Методы оптимизации. Условия оптимальности.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

2 марта 2020 г.

Напоминание

- Выпуклые функции
- Критерии выпуклости
- Неравенство Йенсена

Мотивация

Вопрос 0

Когда существует решение оптимизационной задачи?

Вопрос 1

Как проверить, что точка является решением оптимизационной задачи?

Вопрос 2

Из каких условий можно найти решение оптимизационной задачи?

Существование решения

Теорема Вейерштрасса

Пусть $X \subset R^n$ компактное множество и пусть $f(x)$ непрерывная функция на X. Тогда точка глобального минимума функции $f(x)$ на X существует.

Эта теорема гарантирует, что решение подавляющего большинства разумных задач существует.

Условия оптимальности

Определение

Условием оптимальности будем называть некоторое выражение, выполнимость которого даёт необходимое и (или) достаточное условие экстремума.

Классы задач:

- Задача безусловной минимизации
- Задача условной минимизации

Необходимое условие

Основной факт

Пусть f дифференцируема в точке x^*, тогда

- если в точке x^* локальный минимум, то $f'(x^*) = 0$
- если f выпукла и $f(x^*) = 0$ тогда x^* глобальный минимум функции f

Достаточное условие для невыпуклых функций

Пусть f дважды дифференцируема на $\mathbb{R}^n$ и x^* такая что $\nabla f(x^*) = 0$. Тогда если $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$, то x^* точка строгого локального минимума $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$.

Примеры

- $f(x) = \frac{1}{2}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$

Примеры

- $f(x) = \frac{1}{2}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$
- Оценка максимального правдоподобия для среднего в нормальном распределении

Примеры

- $f(x) = \frac{1}{2}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$
- Оценка максимального правдоподобия для среднего в нормальном распределении
- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_1}) \cos x_2 \to \min$

Примеры

- $f(x) = \frac{1}{2}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$
- Оценка максимального правдоподобия для среднего в нормальном распределении
- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_1}) \cos x_2 \to \min$
- Функция Розенброка:
  $(1 - x_1)^2 + \alpha \sum\limits_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}^2)^2 \to \min, \ \alpha > 0$

Примеры

- $f(x) = \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$
- Оценка максимального правдоподобия для среднего в нормальном распределении
- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_1}) \cos x_2 \to \min$
- Функция Розенброка:
  $(1 - x_1)^2 + \alpha \sum\limits_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}^2)^2 \to \min, \ \alpha > 0$
- $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + e^{x_1 + x_2} \to \min$

Задача

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

$$\text{s.t. } g_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, m$$

Лагранжиан

$$L(x, \boldsymbol{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

Возможные варианты

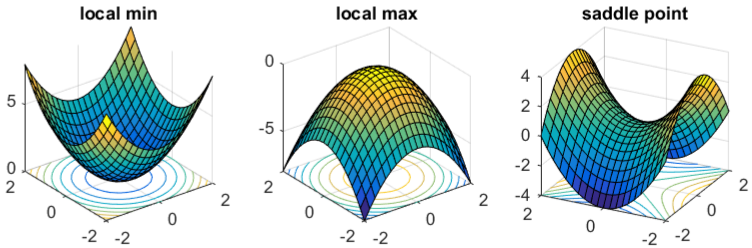

Рисунок взят из блога
`http://www.offconvex.org/2016/03/22/saddlepoints/`

Задача

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$
$$\text{s.t. } g_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, m$$
$$h_j(x) \leq 0,\ j = 1, \dots, p$$

Лагранжиан

$$L(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$$

Условия оптимальности

Необходимые условия

Пусть для задачи выполнено условие регулярности. Тогда если x^* локальное решение задачи, и функции f, h_j, g_i дифференцируемы, то найдутся такие $\boldsymbol{\mu}^*$ и $\boldsymbol{\lambda}^*$, для которых выполнено следующее:

- $g_i(x^*) = 0, \ i = 1, \dots, m$
- $h_j(x^*) \le 0, \ j = 1, \dots, p$
- $\mu_j^* \ge 0, \ j = 1, \dots, p$
- $\mu_j^* h_j(x^*) = 0, \ j = 1, \dots, p$
- $\nabla_x L(x^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = 0$

Если задача выпуклая, то эти же условие является достаточным.

Примеры условий регулярности

- Если g_i и h_j линейны, то дополнительные условия не нужны
- Градиенты ограничений типа равенств и активных ограничений типа неравенств линейно независимы в x^*
- Условие Слейтера:
  - Задача является выпуклой, то есть g_i — аффинные, h_j и f — выпуклые
  - Существует точка x_0 такая что $g_i(x_0) = 0$ и $h_j(x_0) < 0$

Примеры

- $$\begin{aligned} &\min x + 3y \\ \text{s.t. } & x - y \geq 0 \\ & (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 9 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &\min\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \\ \text{s.t. } & 2x + 3y \geq 5 \end{aligned}$$

Резюме

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
  - задачи безусловной оптимизации
  - задачи условной оптимизации