Методы оптимизации
Лекция 5: Введение в условия оптимальности. Сопряжённая функция

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

3 марта 2021 г.

На прошлой лекции

- Выпуклые функции

На прошлой лекции

- Выпуклые функции
- Свойства

На прошлой лекции

- Выпуклые функции
- Свойства
- Критерии

На прошлой лекции

- Выпуклые функции
- Свойства
- Критерии
- Операции, сохраняющие выпуклость

План на эту лекцию

- Условия оптимальности

План на эту лекцию

- Условия оптимальности
- Необходимое условие первого порядка

План на эту лекцию

- Условия оптимальности
- Необходимое условие первого порядка
- Достаточное условие второго порядка

План на эту лекцию

- Условия оптимальности
- Необходимое условие первого порядка
- Достаточное условие второго порядка
- Сопряжённая функция

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1), *то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1), *то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Доказательство

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1), *то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Доказательство

- $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ и $\lim\limits_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}^*} \frac{r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2} = 0 \ (*)$

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \qquad (1)$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1), *то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Доказательство

- $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ и $\lim\limits_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}^*} \frac{r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2} = 0 \ (*)$
- Если $f'(\mathbf{x}^*) \neq 0$, тогда $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}^* - \tau f'(\mathbf{x}^*)$, $\tau > 0$

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1), *то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Доказательство

- $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ и $\lim\limits_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}^*} \frac{r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2} = 0 \; (*)$
- Если $f'(\mathbf{x}^*) \neq 0$, тогда $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}^* - \tau f'(\mathbf{x}^*)$, $\tau > 0$
- $f(\mathbf{y}(\tau)) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y}(\tau) - \mathbf{x}^* \rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\tau)) = f(\mathbf{x}^*) - \tau \|f'(\mathbf{x}^*)\|_2^2 + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\tau))$

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1), *то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Доказательство

- $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ и $\lim\limits_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}^*} \frac{r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2} = 0 \ (*)$
- Если $f'(\mathbf{x}^*) \neq 0$, тогда $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}^* - \tau f'(\mathbf{x}^*)$, $\tau > 0$
- $f(\mathbf{y}(\tau)) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y}(\tau) - \mathbf{x}^* \rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\tau)) = f(\mathbf{x}^*) - \tau \|f'(\mathbf{x}^*)\|_2^2 + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\tau))$
- В силу $(*)$ найдётся $\bar{\tau}$ такое что для всех $\tau \in (0, \bar{\tau})$ выполнено $\frac{r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2} \leq \frac{1}{2}\|f'(\mathbf{x}^*)\|_2$, тогда

  $$f(\mathbf{y}(\tau)) - f(\mathbf{x}^*) \leq -\frac{\tau}{2}\|f'(\mathbf{x}^*)\|_2^2 < 0$$

  Значит $\mathbf{x}^*$ не минимум, противоречие.

Замечания к предыдущей теореме

- Доказательство показывает свойство убывания у направления $-f'(\mathbf{x})$

Замечания к предыдущей теореме

- Доказательство показывает свойство убывания у направления $-f'(\mathbf{x})$
- Это нам пригодится при анализе методов

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

- Если $\mathbf{x}^*$ глобальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ локальный минимум

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

- Если $\mathbf{x}^*$ глобальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ локальный минимум
- Значит $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ по предыдущей теореме

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

- Если $\mathbf{x}^*$ глобальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ локальный минимум
- Значит $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ по предыдущей теореме
- Пусть $\mathbf{x}^*$ такая точка, что $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ и функция выпукла

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

- Если $\mathbf{x}^*$ глобальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ локальный минимум
- Значит $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ по предыдущей теореме
- Пусть $\mathbf{x}^*$ такая точка, что $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ и функция выпукла
- Тогда по критерию выпуклости

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle = f(\mathbf{x}^*)$$

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

- Если $\mathbf{x}^*$ глобальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ локальный минимум
- Значит $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ по предыдущей теореме
- Пусть $\mathbf{x}^*$ такая точка, что $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ и функция выпукла
- Тогда по критерию выпуклости

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle = f(\mathbf{x}^*)$$

- Значит $\mathbf{x}^*$ – глобальный минимум.

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ *– решение задачи* (2), *где* f *– выпуклая функция, тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ *и* $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ *– решение задачи* (2)*, где* f *– выпуклая функция, тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ *и* $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$*.*

Доказательство

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ *– решение задачи* (2), *где* f *– выпуклая функция, тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ *и* $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и выполнено неравенство. Тогда по критерию первого порядка для выпуклой функции $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*)$

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \qquad (2)$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ – решение задачи (2), где f – выпуклая функция, тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и выполнено неравенство. Тогда по критерию первого порядка для выпуклой функции $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*)$
- Пусть $\mathbf{x}^*$ решение задачи (2), но найдётся $\tilde{\mathbf{y}}$ такой что $\langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \qquad (2)$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ – решение задачи (2), где f – выпуклая функция, тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и выполнено неравенство. Тогда по критерию первого порядка для выпуклой функции $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*)$
- Пусть $\mathbf{x}^*$ решение задачи (2), но найдётся $\tilde{\mathbf{y}}$ такой что $\langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{z}(t) = t\tilde{\mathbf{y}} + (1-t)\mathbf{x}^*$, $t \in [0, 1]$

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ *– решение задачи* (2), *где* f *– выпуклая функция, тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ *и* $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и выполнено неравенство. Тогда по критерию первого порядка для выпуклой функции $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*)$
- Пусть $\mathbf{x}^*$ решение задачи (2), но найдётся $\tilde{\mathbf{y}}$ такой что $\langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{z}(t) = t\tilde{\mathbf{y}} + (1-t)\mathbf{x}^*$, $t \in [0, 1]$
- Тогда в силу $\frac{d}{dt} f(\mathbf{z}(t)) \Big|_{t=0} = \langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ – решение задачи (2), где f – выпуклая функция, тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и выполнено неравенство. Тогда по критерию первого порядка для выпуклой функции $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*)$
- Пусть $\mathbf{x}^*$ решение задачи (2), но найдётся $\tilde{\mathbf{y}}$ такой что $\langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{z}(t) = t\tilde{\mathbf{y}} + (1-t)\mathbf{x}^*$, $t \in [0, 1]$
- Тогда в силу $\frac{d}{dt} f(\mathbf{z}(t))\Big|_{t=0} = \langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$
- Значит для малого t выполнено $f(\mathbf{z}(t)) < f(\mathbf{x}^*)$. Противоречие.

Достаточное условие второго порядка

Теорема

Пусть f дважды непрерывно дифференцируема. Точка $\mathbf{x}^*$ удовлетворяет уравнению $f'(\mathbf{x}^*) = 0$. Если $\mathbf{s}^\top f''(\mathbf{x}^*)\mathbf{s} > 0$ для всех $\mathbf{s} \neq 0$, тогда $\mathbf{x}^*$ точка локального минимума.

Достаточное условие второго порядка

Теорема

Пусть f дважды непрерывно дифференцируема. Точка $\mathbf{x}^*$ удовлетворяет уравнению $f'(\mathbf{x}^*) = 0$. Если $\mathbf{s}^\top f''(\mathbf{x}^*)\mathbf{s} > 0$ для всех $\mathbf{s} \neq 0$, тогда $\mathbf{x}^*$ точка локального минимума.

Доказательство от противного

Достаточное условие второго порядка

Теорема

Пусть f дважды непрерывно дифференцируема. Точка $\mathbf{x}^*$ удовлетворяет уравнению $f'(\mathbf{x}^*) = 0$. Если $\mathbf{s}^\top f''(\mathbf{x}^*)\mathbf{s} > 0$ для всех $\mathbf{s} \neq 0$, тогда $\mathbf{x}^*$ точка локального минимума.

Доказательство от противного

- Пусть найдётся точка $\mathbf{y}$ близкая к $\mathbf{x}^*$, такая что $f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x}^*)$

Достаточное условие второго порядка

Теорема

Пусть f дважды непрерывно дифференцируема. Точка $\mathbf{x}^*$ удовлетворяет уравнению $f'(\mathbf{x}^*) = 0$. Если $\mathbf{s}^\top f''(\mathbf{x}^*)\mathbf{s} > 0$ для всех $\mathbf{s} \neq 0$, тогда $\mathbf{x}^*$ точка локального минимума.

Доказательство от противного

- Пусть найдётся точка $\mathbf{y}$ близкая к $\mathbf{x}^*$, такая что $f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x}^*)$
- Тогда рассмотрим разложение $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}^*)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle + o(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2)$

Достаточное условие второго порядка

Теорема

Пусть f дважды непрерывно дифференцируема. Точка $\mathbf{x}^*$ удовлетворяет уравнению $f'(\mathbf{x}^*) = 0$. Если $\mathbf{s}^\top f''(\mathbf{x}^*)\mathbf{s} > 0$ для всех $\mathbf{s} \neq 0$, тогда $\mathbf{x}^*$ точка локального минимума.

Доказательство от противного

- Пусть найдётся точка $\mathbf{y}$ близкая к $\mathbf{x}^*$, такая что $f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x}^*)$
- Тогда рассмотрим разложение $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}^*)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle + o(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2)$
- Из условия стационарности следует, что $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}^*)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle + o(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2)$

Достаточное условие второго порядка

Теорема

Пусть f дважды непрерывно дифференцируема. Точка $\mathbf{x}^*$ удовлетворяет уравнению $f'(\mathbf{x}^*) = 0$. Если $\mathbf{s}^\top f''(\mathbf{x}^*)\mathbf{s} > 0$ для всех $\mathbf{s} \neq 0$, тогда $\mathbf{x}^*$ точка локального минимума.

Доказательство от противного

- Пусть найдётся точка $\mathbf{y}$ близкая к $\mathbf{x}^*$, такая что $f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x}^*)$
- Тогда рассмотрим разложение $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}^*)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle + o(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2)$
- Из условия стационарности следует, что $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}^*)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle + o(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2)$
- Если $\mathbf{y} \to \mathbf{x}^*$, тогда у нас есть направление $\mathbf{z} \neq 0$ такое что $\mathbf{z}^\top f''(\mathbf{x}^*)\mathbf{z} \leq 0$, получили противоречие.

Сопряжённая функция

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется сопряжённой функцией к функции f и определена как

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})).$$

Область определения f^* — это множество таких $\mathbf{y}$, что супремум конечен.

Сопряжённая функция

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется сопряжённой функцией к функции f и определена как

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})).$$

Область определения f^* — это множество таких $\mathbf{y}$, что супремум конечен.

Свойства

Сопряжённая функция

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется сопряжённой функцией к функции f и определена как

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})).$$

Область определения f^* — это множество таких $\mathbf{y}$, что супремум конечен.

Свойства

- Выпуклая и замкнутая как супремум линейных функций, которые выпуклы и замкнуты

Сопряжённая функция

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется сопряжённой функцией к функции f и определена как

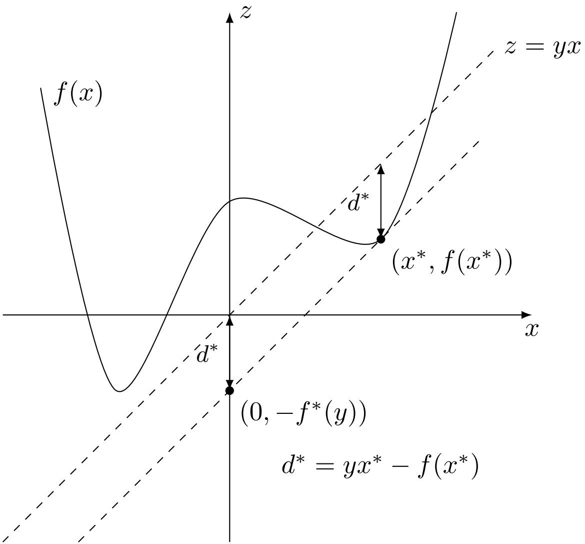
$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})).$$

Область определения f^* — это множество таких $\mathbf{y}$, что супремум конечен.

Свойства

- Выпуклая и замкнутая как супремум линейных функций, которые выпуклы и замкнуты
- Неравенство Юнга-Фенхеля: $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f^*(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x})$

Геометрический смысл



Индикаторная и опорная функции

Пример

- Рассмотрим индикаторную функцию
$$\delta_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin \mathcal{X} \end{cases}$$
- Для неё сопряжённая функция
$$\delta^*_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \delta_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) \right) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \sigma_{\mathcal{X}}(\mathbf{y})$$

Инфимальная конволюция

Определение

Пусть f_1 и f_2 выпуклые функции. Тогда функция $f(\mathbf{x}) = (f_1 \square f_2)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}} (f_1(\mathbf{x}_1) + f_2(\mathbf{x}_2))$ называется инфимальной конволюцией функций f_1 и f_2

Инфимальная конволюция

Определение

Пусть f_1 и f_2 выпуклые функции. Тогда функция $f(\mathbf{x}) = (f_1 \square f_2)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}} (f_1(\mathbf{x}_1) + f_2(\mathbf{x}_2))$ называется инфимальной конволюцией функций f_1 и f_2

Теорема

Инфимальная конволюция выпуклых функций есть выпуклая функция

Инфимальная конволюция

Определение

Пусть f_1 и f_2 выпуклые функции. Тогда функция $f(\mathbf{x}) = (f_1 \Box f_2)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}} (f_1(\mathbf{x}_1) + f_2(\mathbf{x}_2))$ называется инфимальной конволюцией функций f_1 и f_2

Теорема

Инфимальная конволюция выпуклых функций есть выпуклая функция

Доказательство

Инфимальная конволюция

Определение

Пусть f_1 и f_2 выпуклые функции. Тогда функция $f(\mathbf{x}) = (f_1 \Box f_2)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}} (f_1(\mathbf{x}_1) + f_2(\mathbf{x}_2))$ называется инфимальной конволюцией функций f_1 и f_2

Теорема

Инфимальная конволюция выпуклых функций есть выпуклая функция

Доказательство

- Запишем инфимальную конволюцию в виде $(f_1 \Box f_2)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}_2} (f_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) + f_2(\mathbf{x}_2))$

Инфимальная конволюция

Определение

Пусть f_1 и f_2 выпуклые функции. Тогда функция $f(\mathbf{x}) = (f_1 \square f_2)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2=\mathbf{x}} (f_1(\mathbf{x}_1) + f_2(\mathbf{x}_2))$ называется инфимальной конволюцией функций f_1 и f_2

Теорема

Инфимальная конволюция выпуклых функций есть выпуклая функция

Доказательство

- Запишем инфимальную конволюцию в виде $(f_1 \square f_2)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}_2} (f_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) + f_2(\mathbf{x}_2))$
- Рассмотрим функцию $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) = f_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) + f_2(\mathbf{x}_2)$

Инфимальная конволюция

Определение

Пусть f_1 и f_2 выпуклые функции. Тогда функция $f(\mathbf{x}) = (f_1 \Box f_2)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2=\mathbf{x}} (f_1(\mathbf{x}_1) + f_2(\mathbf{x}_2))$ называется инфимальной конволюцией функций f_1 и f_2

Теорема

Инфимальная конволюция выпуклых функций есть выпуклая функция

Доказательство

- Запишем инфимальную конволюцию в виде $(f_1 \Box f_2)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}_2} (f_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) + f_2(\mathbf{x}_2))$
- Рассмотрим функцию $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) = f_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) + f_2(\mathbf{x}_2)$
- Так как f_1 и f_2 выпуклы, то и g выпукла по обоим аргументам

Инфимальная конволюция

Определение

Пусть f_1 и f_2 выпуклые функции. Тогда функция $f(\mathbf{x}) = (f_1 \square f_2)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}} (f_1(\mathbf{x}_1) + f_2(\mathbf{x}_2))$ называется инфимальной конволюцией функций f_1 и f_2

Теорема

Инфимальная конволюция выпуклых функций есть выпуклая функция

Доказательство

- Запишем инфимальную конволюцию в виде $(f_1 \square f_2)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}_2} (f_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) + f_2(\mathbf{x}_2))$
- Рассмотрим функцию $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) = f_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) + f_2(\mathbf{x}_2)$
- Так как f_1 и f_2 выпуклы, то и g выпукла по обоим аргументам
- Значит инфимальная конволюция — это операция частичной минимизации, которая сохраняет выпуклость

Сопряжённая функция к инфимальной конволюции

$$
\begin{aligned}
&f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle - \inf_{\mathbf{x}_1}(f_1(\mathbf{x}_1) + f_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1))) = \\
&\sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{x}_1}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle - f_1(\mathbf{x}_1) - f_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)) = \\
&\sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{x}_1}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1\rangle - f_1(\mathbf{x}_1) - f_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)) = \\
&\sup_{\mathbf{x}_1} \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1\rangle - f_1(\mathbf{x}_1) - f_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)) = \\
&\sup_{\mathbf{x}_1}(f_2^*(\mathbf{y}) + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1\rangle - f_1(\mathbf{x}_1)) = f_2^*(\mathbf{y}) + f_1^*(\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

Сопряжённая функция к квадрату нормы

- Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$

Сопряжённая функция к квадрату нормы

- Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$
- Тогда $f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2)$

Сопряжённая функция к квадрату нормы

- Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$
- Тогда $f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2)$
- Вспомним определение сопряжённой нормы $\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}$

Сопряжённая функция к квадрату нормы

- Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$
- Тогда $f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2)$
- Вспомним определение сопряжённой нормы $\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}$
- $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x}\rangle = \|\mathbf{x}\| \left\langle \mathbf{z}, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\rangle \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{z}\|_*$

Сопряжённая функция к квадрату нормы

- Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$
- Тогда $f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2)$
- Вспомним определение сопряжённой нормы $\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}$
- $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x}\rangle = \|\mathbf{x}\| \left\langle \mathbf{z}, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\rangle \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{z}\|_*$
- Тогда $f^*(\mathbf{y}) \leq \sup_{\mathbf{x}} \left(\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|_* - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2\right) = \sup_x \left(x\|\mathbf{y}\|_* - \frac{1}{2}x^2\right)$

Сопряжённая функция к квадрату нормы

- Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$
- Тогда $f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2)$
- Вспомним определение сопряжённой нормы $\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}$
- $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\| \left\langle \mathbf{z}, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\rangle \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{z}\|_*$
- Тогда $f^*(\mathbf{y}) \leq \sup_{\mathbf{x}} \left(\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|_* - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 \right) = \sup_x \left(x\|\mathbf{y}\|_* - \frac{1}{2}x^2 \right)$
- Супремум достигается в точке $x^* = \|\mathbf{y}\|_*$

Сопряжённая функция к квадрату нормы

- Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$
- Тогда $f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2)$
- Вспомним определение сопряжённой нормы $\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \le 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}$
- $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\| \left\langle \mathbf{z}, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\rangle \le \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{z}\|_*$
- Тогда $f^*(\mathbf{y}) \le \sup_{\mathbf{x}} \left(\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|_* - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 \right) = \sup_x \left(x\|\mathbf{y}\|_* - \frac{1}{2}x^2 \right)$
- Супремум достигается в точке $x^* = \|\mathbf{y}\|_*$
- $f^*(\mathbf{y}) \le \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_*^2$

Сопряжённая функция к квадрату нормы

- Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$
- Тогда $f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2)$
- Вспомним определение сопряжённой нормы $\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}$
- $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x}\rangle = \|\mathbf{x}\| \left\langle \mathbf{z}, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\rangle \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{z}\|_*$
- Тогда $f^*(\mathbf{y}) \leq \sup_{\mathbf{x}} \left(\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|_* - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2\right) = \sup_{x} \left(x\|\mathbf{y}\|_* - \frac{1}{2}x^2\right)$
- Супремум достигается в точке $x^* = \|\mathbf{y}\|_*$
- $f^*(\mathbf{y}) \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_*^2$
- Осталось предъявить вектор, на котором достигается равенство. Этот этап оставим в качестве упражнения

Сопряжённая функция для преобразований аргумента

Сдвиг аргумента

Сопряжённая функция для преобразований аргумента

Сдвиг аргумента

- Пусть $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Найдём связь между f^* и g^*

Сопряжённая функция для преобразований аргумента

Сдвиг аргумента

- Пусть $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Найдём связь между f^* и g^*
- $g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \overset{\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{a}}{=}$
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + \sup_{\mathbf{z}} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z})) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + f^*(\mathbf{y})$

Сопряжённая функция для преобразований аргумента

Сдвиг аргумента

- Пусть $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Найдём связь между f^* и g^*
- $g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right) \overset{\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{a}}{=}$
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + \sup_{\mathbf{z}} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z}) \right) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + f^*(\mathbf{y})$

Умножение на константу

Сопряжённая функция для преобразований аргумента

Сдвиг аргумента

- Пусть $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Найдём связь между f^* и g^*
- $g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right) \overset{\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{a}}{=}$
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + \sup_{\mathbf{z}} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z}) \right) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + f^*(\mathbf{y})$

Умножение на константу

1. Пусть $g(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$

Сопряжённая функция для преобразований аргумента

Сдвиг аргумента

- Пусть $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Найдём связь между f^* и g^*
- $g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \overset{\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{a}}{=}$
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + \sup_{\mathbf{z}} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z})) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + f^*(\mathbf{y})$

Умножение на константу

1. Пусть $g(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$
   - $g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \alpha f(\mathbf{x})) = \alpha \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}/\alpha, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})) =$
     $\alpha f^*(\mathbf{y}/\alpha)$

Сопряжённая функция для преобразований аргумента

Сдвиг аргумента

- Пусть $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Найдём связь между f^* и g^*
- $g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x} - \mathbf{a})\right) \overset{\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{a}}{=}$ $\langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + \sup_{\mathbf{z}} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z})\right) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + f^*(\mathbf{y})$

Умножение на константу

1. Пусть $g(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$
   - $g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \alpha f(\mathbf{x})) = \alpha \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}/\alpha, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})) =$ $\alpha f^*(\mathbf{y}/\alpha)$
2. Пусть $g(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}/\alpha)$

Сопряжённая функция для преобразований аргумента

Сдвиг аргумента

- Пусть $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Найдём связь между f^* и g^*
- $g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \overset{\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{a}}{=}$
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + \sup_{\mathbf{z}} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z})) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle + f^*(\mathbf{y})$

Умножение на константу

1. Пусть $g(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$
   - $g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \alpha f(\mathbf{x})) = \alpha \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}/\alpha, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})) =$
     $\alpha f^*(\mathbf{y}/\alpha)$
2. Пусть $g(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}/\alpha)$
   - $g^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \alpha f(\mathbf{x}/\alpha)) \overset{\mathbf{z}=\mathbf{x}/\alpha}{=}$
     $\sup_{\mathbf{z}}(\alpha \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle - \alpha f(\mathbf{z})) = \alpha f^*(\mathbf{y})$

Разделение переменных

Теорема

Если $g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \sum_{i=1}^k f_i(\mathbf{x}_i)$, тогда
$g^*(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k) = \sum_{i=1}^k f_i^*(\mathbf{y}_i)$

Разделение переменных

Теорема

Если $g(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) = \sum_{i=1}^k f_i(\mathbf{x}_i)$, тогда $g^*(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k) = \sum_{i=1}^k f_i^*(\mathbf{y}_i)$

Доказательство

Разделение переменных

Теорема

Если $g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \sum_{i=1}^k f_i(\mathbf{x}_i)$, тогда
$g^*(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k) = \sum_{i=1}^k f_i^*(\mathbf{y}_i)$

Доказательство

- Если вставить вид функции g в определение сопряжённой функции, то взятие супремума по $\mathbf{x}$ распадётся на решение k независимых задач для каждого k

Разделение переменных

Теорема

Если $g(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\mathbf{x}_i)$, тогда
$g^*(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k) = \sum_{i=1}^{k} f_i^*(\mathbf{y}_i)$

Доказательство

- Если вставить вид функции g в определение сопряжённой функции, то взятие супремума по $\mathbf{x}$ распадётся на решение k независимых задач для каждого k
- После разделения задач, результатом будет сумма супремумов, то есть сумма f_i^*

Разделение переменных

Теорема

Если $g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\mathbf{x}_i)$, тогда
$g^*(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k) = \sum_{i=1}^{k} f_i^*(\mathbf{y}_i)$

Доказательство

- Если вставить вид функции g в определение сопряжённой функции, то взятие супремума по $\mathbf{x}$ распадётся на решение k независимых задач для каждого k
- После разделения задач, результатом будет сумма супремумов, то есть сумма f_i^*
- Формальные выкладки оставлены в качестве упражнения

Дважды сопряжённая функция

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется дважды сопряжённой функцией к функции f и определена как

$$f^{**}(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{x})).$$

Дважды сопряжённая функция

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется дважды сопряжённой функцией к функции f и определена как

$$f^{**}(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\ f} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{x})).$$

Теорема

Для любой функции f выполнено $f^{**} \leq f$

Дважды сопряжённая функция

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется дважды сопряжённой функцией к функции f и определена как

$$f^{**}(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{x})).$$

Теорема

Для любой функции f выполнено $f^{**} \leq f$

Доказательство

Дважды сопряжённая функция

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется дважды сопряжённой функцией к функции f и определена как

$$f^{**}(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{x})).$$

Теорема

Для любой функции f выполнено $f^{**} \leq f$

Доказательство

- Из неравенства Юнга-Фенхеля следует, что $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$

Дважды сопряжённая функция

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется дважды сопряжённой функцией к функции f и определена как

$$f^{**}(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{x})).$$

Теорема

Для любой функции f выполнено $f^{**} \leq f$

Доказательство

- Из неравенства Юнга-Фенхеля следует, что $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f^*(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$
- Возьмём супремум по $\mathbf{y}$ и получим требуемое неравенство

Дважды сопряжённая функция для выпуклой функции

Теорема

Пусть f, f^*, f^{**} определены на $\mathbb{R}^n$. Тогда $f = f^{**}$ iff f выпуклая функция.

Сопряжённая функция к сумме выпуклых функций

Теорема

Пусть f_1, f_2 выпуклые функции. Тогда $(f_1 + f_2)^* = f_1^* \square f_2^*$

Сопряжённая функция к сумме выпуклых функций

Теорема

Пусть f_1, f_2 выпуклые функции. Тогда $(f_1 + f_2)^* = f_1^* \square f_2^*$

Доказательство

Сопряжённая функция к сумме выпуклых функций

Теорема

Пусть f_1, f_2 выпуклые функции. Тогда $(f_1 + f_2)^* = f_1^* \square f_2^*$

Доказательство

- Ранее показали, что $(f_1 \square f_2)^* = f_1^* + f_2^*$

Сопряжённая функция к сумме выпуклых функций

Теорема

Пусть f_1, f_2 выпуклые функции. Тогда $(f_1 + f_2)^* = f_1^* \square f_2^*$

Доказательство

- Ранее показали, что $(f_1 \square f_2)^* = f_1^* + f_2^*$
- Тогда выполнено $(f_1^* \square f_2^*)^* = f_1^{**} + f_2^{**} = f_1 + f_2$

Сопряжённая функция к сумме выпуклых функций

Теорема

Пусть f_1, f_2 выпуклые функции. Тогда $(f_1 + f_2)^* = f_1^* \Box f_2^*$

Доказательство

- Ранее показали, что $(f_1 \Box f_2)^* = f_1^* + f_2^*$
- Тогда выполнено $(f_1^* \Box f_2^*)^* = f_1^{**} + f_2^{**} = f_1 + f_2$
- Так как инфимальная конволюция выпуклая функция, то $(f_1 \Box f_2)^{**} = f_1 \Box f_2$

Сопряжённая функция к сумме выпуклых функций

Теорема

Пусть f_1, f_2 выпуклые функции. Тогда $(f_1 + f_2)^* = f_1^* \square f_2^*$

Доказательство

- Ранее показали, что $(f_1 \square f_2)^* = f_1^* + f_2^*$
- Тогда выполнено $(f_1^* \square f_2^*)^* = f_1^{**} + f_2^{**} = f_1 + f_2$
- Так как инфимальная конволюция выпуклая функция, то $(f_1 \square f_2)^{**} = f_1 \square f_2$
- Тогда $f_1^* \square f_2^* = (f_1 + f_2)^*$

Свойство сильно выпуклой функции

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ точка минимума для сильно выпуклой функции f с константой $m > 0$, то $\mathbf{x}^*$ единственная такая точка и

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2^2, \quad \mathbf{y} \in \mathrm{dom}(f)$$

Свойство сильно выпуклой функции

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ точка минимума для сильно выпуклой функции f с константой $m > 0$, то $\mathbf{x}^*$ единственная такая точка и

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2^2, \quad \mathbf{y} \in \mathrm{dom}(f)$$

Доказательство

Свойство сильно выпуклой функции

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ точка минимума для сильно выпуклой функции f с константой $m > 0$, то $\mathbf{x}^*$ единственная такая точка и

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2^2, \quad \mathbf{y} \in \mathrm{dom}(f)$$

Доказательство

- Воспользуемся фактом о том, что f сильно выпукла с константой m iff $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$ выпукла

Свойство сильно выпуклой функции

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ точка минимума для сильно выпуклой функции f с константой $m > 0$, то $\mathbf{x}^*$ единственная такая точка и

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2^2, \quad \mathbf{y} \in \mathrm{dom}(f)$$

Доказательство

- Воспользуемся фактом о том, что f сильно выпукла с константой m iff $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$ выпукла
- Запишем критерий выпуклости первого порядка для g: $f(\mathbf{y}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2 \geq f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 + \langle f'(\mathbf{x}) - m\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle$

Свойство сильно выпуклой функции

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ точка минимума для сильно выпуклой функции f с константой $m > 0$, то $\mathbf{x}^*$ единственная такая точка и

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2^2, \quad \mathbf{y} \in \mathrm{dom}(f)$$

Доказательство

- Воспользуемся фактом о том, что f сильно выпукла с константой m iff $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$ выпукла
- Запишем критерий выпуклости первого порядка для g: $f(\mathbf{y}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2 \geq f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 + \langle f'(\mathbf{x}) - m\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle$
- Неравенство перепишем в виде $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{m}{2}\left(\|\mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\right)$

Свойство сильно выпуклой функции

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ точка минимума для сильно выпуклой функции f с константой $m > 0$, то $\mathbf{x}^*$ единственная такая точка и

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2^2, \quad \mathbf{y} \in \mathrm{dom}(f)$$

Доказательство

- Воспользуемся фактом о том, что f сильно выпукла с константой m iff $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$ выпукла
- Запишем критерий выпуклости первого порядка для g: $f(\mathbf{y}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2 \geq f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 + \langle f'(\mathbf{x}) - m\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle$
- Неравенство перепишем в виде $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{m}{2}\left(\|\mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\right)$
- Или $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2$

Свойство сильно выпуклой функции

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ точка минимума для сильно выпуклой функции f с константой $m > 0$, то $\mathbf{x}^*$ единственная такая точка и

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2^2, \quad \mathbf{y} \in \mathrm{dom}(f)$$

Доказательство

- Воспользуемся фактом о том, что f сильно выпукла с константой m iff $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$ выпукла
- Запишем критерий выпуклости первого порядка для g: $f(\mathbf{y}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2 \geq f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 + \langle f'(\mathbf{x}) - m\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle$
- Неравенство перепишем в виде $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{m}{2}\left(\|\mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\right)$
- Или $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2$
- В точке минимума $f'(\mathbf{x}^*) = 0$, так что после подстановки получим требуемое неравенство

Сопряжённая функция от m-сильно выпуклой функции есть $\frac{1}{m}$-гладкая функция

Теорема

Если f сильно выпуклая функция с константой m, сопряжённая к которой

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{y}^\top \mathbf{x} - f(\mathbf{x})\right)$$

тогда

Сопряжённая функция от m-сильно выпуклой функции есть $\frac{1}{m}$-гладкая функция

Теорема

Если f сильно выпуклая функция с константой m, сопряжённая к которой

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{y}^\top \mathbf{x} - f(\mathbf{x})\right)$$

тогда

- f^* определена и дифференцируема для всех $\mathbf{y}$ и при этом

$$\nabla f^*(\mathbf{y}) = \arg\max_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{y}^\top \mathbf{x} - f(\mathbf{x})\right)$$

Сопряжённая функция от m-сильно выпуклой функции есть $\frac{1}{m}$-гладкая функция

Теорема

Если f сильно выпуклая функция с константой m, сопряжённая к которой

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{y}^\top \mathbf{x} - f(\mathbf{x}) \right)$$

тогда

- f^* определена и дифференцируема для всех $\mathbf{y}$ и при этом

$$\nabla f^*(\mathbf{y}) = \arg\max_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{y}^\top \mathbf{x} - f(\mathbf{x}) \right)$$

- $\nabla f^*(\mathbf{y})$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{1}{m}$

Доказательство (часть 2)

- Рассмотрим две точки $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, в которых соответственно

$$\mathbf{x}_u = \nabla f^*(\mathbf{u}) \quad \mathbf{x}_v = \nabla f^*(\mathbf{v})$$

Доказательство (часть 2)

- Рассмотрим две точки $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, в которых соответственно

$$\mathbf{x}_u = \nabla f^*(\mathbf{u}) \quad \mathbf{x}_v = \nabla f^*(\mathbf{v})$$

- Тогда по свойству сильно выпуклой функции, приведённому выше и применённому к сильно выпуклой функции $f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^\top \mathbf{x}$

$$f(\mathbf{x}_u) + \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_u \geq f(\mathbf{x}_v) + \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_v + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_u\|_2^2$$
$$f(\mathbf{x}_v) + \mathbf{u}^\top \mathbf{x}_v \geq f(\mathbf{x}_u) + \mathbf{u}^\top \mathbf{x}_u + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_u\|_2^2$$

Доказательство (часть 2)

- Рассмотрим две точки $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, в которых соответственно

$$\mathbf{x}_u = \nabla f^*(\mathbf{u}) \quad \mathbf{x}_v = \nabla f^*(\mathbf{v})$$

- Тогда по свойству сильно выпуклой функции, приведённому выше и применённому к сильно выпуклой функции $f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^\top \mathbf{x}$

$$f(\mathbf{x}_u) + \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_u \geq f(\mathbf{x}_v) + \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_v + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_u\|_2^2$$
$$f(\mathbf{x}_v) + \mathbf{u}^\top \mathbf{x}_v \geq f(\mathbf{x}_u) + \mathbf{u}^\top \mathbf{x}_u + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_u\|_2^2$$

- Сложим оба неравенства и получим
$m\|\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_u\|_2^2 \leq (\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v)^\top(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v\|_2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$
или
$\|\nabla f^*(\mathbf{v}) - \nabla f^*(\mathbf{u})\|_2 \leq \frac{1}{m}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$

Доказательство (часть 2)

- Рассмотрим две точки $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, в которых соответственно

$$\mathbf{x}_u = \nabla f^*(\mathbf{u}) \quad \mathbf{x}_v = \nabla f^*(\mathbf{v})$$

- Тогда по свойству сильно выпуклой функции, приведённому выше и применённому к сильно выпуклой функции $f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^\top \mathbf{x}$

$$f(\mathbf{x}_u) + \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_u \geq f(\mathbf{x}_v) + \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_v + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_u\|_2^2$$
$$f(\mathbf{x}_v) + \mathbf{u}^\top \mathbf{x}_v \geq f(\mathbf{x}_u) + \mathbf{u}^\top \mathbf{x}_u + \frac{m}{2}\|\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_u\|_2^2$$

- Сложим оба неравенства и получим
$m\|\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_u\|_2^2 \leq (\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v)^\top(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v\|_2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$
или
$\|\nabla f^*(\mathbf{v}) - \nabla f^*(\mathbf{u})\|_2 \leq \frac{1}{m}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$
- Таким образом, $\nabla f^*(\mathbf{u})$ Липшицев с константой Липшица $\frac{1}{m}$

Почему важна эта теорема?

- $f(\mathbf{x})$ выпуклая, но *негладкая*
- Moreau-Yosida envelope ($\lambda > 0$)

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}}(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2) = \left(f \square \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|_2^2\right)(\mathbf{x})$$

- $M_{\lambda f}(\mathbf{x})$ – выпукла
- $M^*_{\lambda f}(\mathbf{y}) = f^*(\mathbf{y}) + \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2$ – сильно выпукла с параметром λ
- $M_{\lambda f} = M^{**}_{\lambda f} = (f^* + \frac{\lambda}{2}\|\cdot\|_2^2)^*$
- Сопряжённая функция к сильно выпуклой функции является гладкой $\Rightarrow M_{\lambda f}$ – гладкая функция и

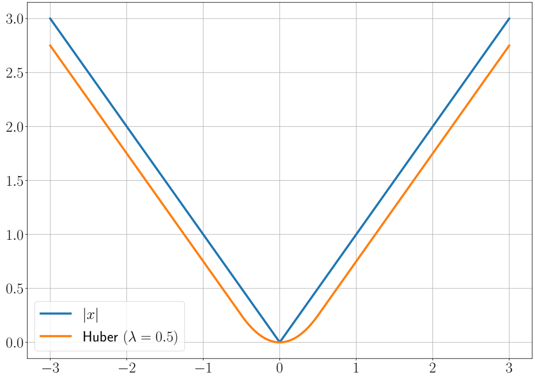
$$M'_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{x} - \mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}^* = \arg\min_{\mathbf{u}}\left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2\right)$$

Важное свойство

Множество точек минимума f и $M_{\lambda f}$ совпадает.
Доказательство далее в курсе...

Пример

- $f(x) = |x|$
- $M_{\lambda f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\lambda} & |x| \le \lambda \\ |x| - \lambda/2 & |x| \ge \lambda \end{cases}$ — получите это выражение!



Главное

- Условия оптимальности для безусловных задач

Главное

- Условия оптимальности для безусловных задач
- Сопряжённое функция

Главное

- Условия оптимальности для безусловных задач
- Сопряжённое функция
- Свойства сопряжённых функций

Главное

- Условия оптимальности для безусловных задач
- Сопряжённое функция
- Свойства сопряжённых функций
- L-гладкость и μ-сильная выпуклость в контексте вычисления сопряжённых функций