

Методы оптимизации. Условия оптимальности.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

4 марта 2020 г.

- Выпуклые функции
- Критерии выпуклости
- Неравенство Йенсена

Вопрос 0

Когда существует решение оптимизационной задачи?

Вопрос 1

Как проверить, что точка является решением оптимизационной задачи?

Вопрос 2

Из каких условий можно найти решение оптимизационной задачи?

Теорема Вейерштрасса

Пусть $X \subset R^n$ компактное множество и пусть $f(x)$ непрерывная функция на X . Тогда точка глобального минимума функции $f(x)$ на X существует.

Эта теорема гарантирует, что решение подавляющего большинства разумных задач существует.

Определение

Условием оптимальности будем называть некоторое выражение, выполнение которого даёт необходимое и (или) достаточное условие экстремума.

Классы задач:

- Задача безусловной минимизации
- Задача условной минимизации

Необходимое условие

Основной факт

Пусть f дифференцируема в точке x^* , тогда

- если в точке x^* локальный минимум, то $f'(x^*) = 0$
- если f выпукла и $f'(x^*) = 0$, тогда x^* глобальный минимум функции f

Достаточное условие для невыпуклых функций

Пусть f дважды дифференцируема на \mathbb{R}^n и x^* такая что $\nabla f(x^*) = 0$. Тогда если $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$, то x^* точка строгого локального минимума $f(x)$ на \mathbb{R}^n .

- $f(x) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$

- $f(x) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$
- Оценка максимального правдоподобия для среднего в нормальном распределении

Примеры

- $f(x) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$
- Оценка максимального правдоподобия для среднего в нормальном распределении
- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_1}) \cos x_2 \rightarrow \min$

- $f(x) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$
- Оценка максимального правдоподобия для среднего в нормальном распределении
- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_1}) \cos x_2 \rightarrow \min$
- Функция Розенброка:
$$(1 - x_1)^2 + \alpha \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}^2)^2 \rightarrow \min, \alpha > 0$$

- $f(x) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$
- Оценка максимального правдоподобия для среднего в нормальном распределении
- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_1}) \cos x_2 \rightarrow \min$
- Функция Розенброка:
$$(1 - x_1)^2 + \alpha \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}^2)^2 \rightarrow \min, \alpha > 0$$
- $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + e^{x_1 + x_2} \rightarrow \min$

Задача

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

Возможные варианты

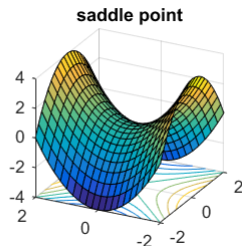
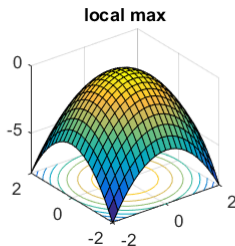
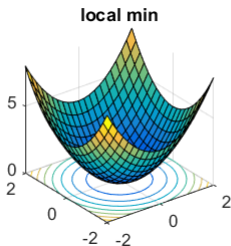


Рисунок взят из блога

<http://www.offconvex.org/2016/03/22/saddlepoints/>

Задача

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{s.t. } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$

Необходимые условия

Пусть для задачи выполнено условие регулярности. Тогда если x^* локальное решение задачи, и функции f, h_j, g_i дифференцируемы, то найдутся такие μ^* и λ^* , для которых выполнено следующее:

- $g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m$
- $h_j(x^*) \leq 0, j = 1, \dots, p$
- $\mu_j^* \geq 0, j = 1, \dots, p$
- $\mu_j^* h_j(x^*) = 0, j = 1, \dots, p$
- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$

Если задача выпуклая, то эти же условие является достаточным.

Примеры условий регулярности

- Если g_i и h_j линейны, то дополнительные условия не нужны
- Градиенты ограничений типа равенств и активных ограничений типа неравенств линейно независимы в x^*
- Условие Слейтера:
 - Задача является выпуклой, то есть g_i — аффинные, h_j и f — выпуклые
 - Существует точка x_0 такая что $g_i(x_0) = 0$ и $h_j(x_0) < 0$



$$\begin{aligned} & \min x + 3y \\ \text{s.t. } & x - y \geq 0 \\ & (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 9 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \min (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \\ \text{s.t. } & 2x + 3y \geq 5 \end{aligned}$$

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
 - задачи безусловной оптимизации
 - задачи условной оптимизации