Методы оптимизации
Лекция 3: Отделимость и проекция

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

17 февраля 2021 г.

Отделимость

Определение

- *Множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ называются отделимыми, если существует гиперплоскость $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b\}$ такая что $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b \leq \mathbf{a}^\top \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{z} \neq b$ для произвольного $\mathbf{z} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*

Отделимость

Определение

- *Множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ называются отделимыми, если существует гиперплоскость $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b\}$ такая что $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b \leq \mathbf{a}^\top \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{z} \neq b$ для произвольного $\mathbf{z} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*
- *Множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ называются* ***строго*** *отделимыми, если существует гиперплоскость $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b\}$ и числа $b_1 < b < b_2$ такие что $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b_1 < b_2 \leq \mathbf{a}^\top \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$*

Критерий отделимости множеств

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ и $\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$

Критерий отделимости множеств

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ и $\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$

Доказательство

Критерий отделимости множеств

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \leq \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$ и $\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$

Доказательство

- Пусть выполнены условия в 1. Тогда выберем b что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \leq b \leq \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$

Критерий отделимости множеств

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$ и $\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$

Доказательство

- Пусть выполнены условия в 1. Тогда выберем b что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le b \le \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
- Тогда $\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le b$ и $\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle \ge b$ для всех $\mathbf{x}\in\mathcal{A}$ и $\mathbf{y}\in\mathcal{B}$

Критерий отделимости множеств

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \le \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$ и $\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle < \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$

Доказательство

- Пусть выполнены условия в 1. Тогда выберем b что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \le b \le \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$
- Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \le b$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle \ge b$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$
- Также в силу второго условия $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \ne b$ для $\mathbf{x} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Таким образом, множества отделимы

Критерий отделимости множеств

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \le \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$ и $\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle < \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$

Доказательство

- Пусть выполнены условия в 1. Тогда выберем b что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \le b \le \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$
- Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \le b$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle \ge b$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$
- Также в силу второго условия $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \ne b$ для $\mathbf{x} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Таким образом, множества отделимы
- Пусть множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ отделимы. Тогда $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \le b$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle \ge b$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$

Критерий отделимости множеств

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$ и $\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
2. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **строго** отделимы iff найдётся вектор $\mathbf{c}$ такой что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$

Доказательство

- Пусть выполнены условия в 1. Тогда выберем b что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le b \le \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
- Тогда $\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le b$ и $\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle \ge b$ для всех $\mathbf{x}\in\mathcal{A}$ и $\mathbf{y}\in\mathcal{B}$
- Также в силу второго условия $\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \ne b$ для $\mathbf{x}\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$. Таким образом, множества отделимы
- Пусть множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ отделимы. Тогда $\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle \le b$ и $\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle \ge b$ для всех $\mathbf{x}\in\mathcal{A}$ и $\mathbf{y}\in\mathcal{B}$
- Так как $\langle\mathbf{c},\mathbf{z}\rangle \ne b$, $\mathbf{z}\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$, то найдутся $\mathbf{x}_1\in\mathcal{A}, \mathbf{y}_1\in\mathcal{B}$, что $\langle\mathbf{c},\mathbf{x}_1\rangle < \langle\mathbf{c},\mathbf{y}_1\rangle$ и выполнено второе условие

- Пусть выполнены условия 2. Тогда выберем b так что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < b < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$

- Пусть выполнены условия 2. Тогда выберем b так что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle < b < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle$
- Значит можно найти числа b_1, b_2, для которых будет выполнено условие в определении строгой отделимости

- Пусть выполнены условия 2. Тогда выберем b так что $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle < b < \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\langle\mathbf{c},\mathbf{y}\rangle$
- Значит можно найти числа b_1, b_2, для которых будет выполнено условие в определении строгой отделимости
- Пусть множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ строго отделимы. Тогда из определения сразу следует выполнение условия 2

Отделимость выпуклого множества от точки

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

Отделимость выпуклого множества от точки

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

Доказательство

Отделимость выпуклого множества от точки

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$

Отделимость выпуклого множества от точки

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое

Отделимость выпуклого множества от точки

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$

Отделимость выпуклого множества от точки

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \operatorname{cl}(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\operatorname{cl}(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$
- Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $B(\mathbf{a}, r)$ пересекал $\mathcal{X}$

Отделимость выпуклого множества от точки

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$
- Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $B(\mathbf{a}, r)$ пересекал $\mathcal{X}$
- Тогда множество $\mathcal{X} \cap B(\mathbf{a}, r)$ является компактом

Отделимость выпуклого множества от точки

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \operatorname{cl}(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\operatorname{cl}(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$
- Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $B(\mathbf{a}, r)$ пересекал $\mathcal{X}$
- Тогда множество $\mathcal{X} \cap B(\mathbf{a}, r)$ является компактом
- Функция $d(\mathbf{x})$ принимает на нём минимальное значение в точке $\mathbf{x}_0$

Отделимость выпуклого множества от точки

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$
- Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $B(\mathbf{a}, r)$ пересекал $\mathcal{X}$
- Тогда множество $\mathcal{X} \cap B(\mathbf{a}, r)$ является компактом
- Функция $d(\mathbf{x})$ принимает на нём минимальное значение в точке $\mathbf{x}_0$
- Значит $d(\mathbf{x}) \geq d(\mathbf{x}_0)$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Отделимость выпуклого множества от точки

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathbf{a} \notin \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$. Тогда $\mathcal{X}$ строго отделима от $\mathbf{a}$

Доказательство

- Если гиперплоскость строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, то она строго отделяет $\mathbf{a}$ от $\mathcal{X}$
- Рассматриваем $\mathcal{X}$ выпуклое и замкнутое
- Пусть $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2$
- Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $B(\mathbf{a}, r)$ пересекал $\mathcal{X}$
- Тогда множество $\mathcal{X} \cap B(\mathbf{a}, r)$ является компактом
- Функция $d(\mathbf{x})$ принимает на нём минимальное значение в точке $\mathbf{x}_0$
- Значит $d(\mathbf{x}) \geq d(\mathbf{x}_0)$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Покажем, что для $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{x}_0$ выполнено $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$
- Вычислим $f'(0) = -2\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle < 0$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$
- Вычислим $f'(0) = -2\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle < 0$
- Значит для достаточно малого α выполнено $d(\mathbf{x}(\alpha)) < d(\mathbf{x}_0)$ — противоречие

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0,1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$
- Вычислим $f'(0) = -2\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle < 0$
- Значит для достаточно малого α выполнено $d(\mathbf{x}(\alpha)) < d(\mathbf{x}_0)$ — противоречие
- Значит $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$
- Вычислим $f'(0) = -2\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle < 0$
- Значит для достаточно малого α выполнено $d(\mathbf{x}(\alpha)) < d(\mathbf{x}_0)$ — противоречие
- Значит $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Следоватиельно, $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle - \|\mathbf{c}\|_2^2$

- Пусть найдётся $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$ такой что $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle > 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Тогда $f(\alpha) = d(\mathbf{x}(\alpha)) = \|\mathbf{x}(\alpha) - \mathbf{a}\|_2^2$
- Вычислим $f'(0) = -2\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rangle < 0$
- Значит для достаточно малого α выполнено $d(\mathbf{x}(\alpha)) < d(\mathbf{x}_0)$ — противоречие
- Значит $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Следоватиельно, $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle - \|\mathbf{c}\|_2^2$
- И наконец $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle$ — критерий сильной отделимости

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе C, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе C, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе C, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:
$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$
- Поскольку $0 \in C$, то $d > 0$. Также $\mathbf{a}_i \in C \Rightarrow \alpha \mathbf{a}_i \in C\ \alpha > 0$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе C, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:
$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$
- Поскольку $0 \in C$, то $d > 0$. Также $\mathbf{a}_i \in C \Rightarrow \alpha \mathbf{a}_i \in C\ \alpha > 0$
- Значит $\mathbf{c}^\top \alpha \mathbf{a}_i < d \Rightarrow \mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i < d/\alpha$. При $\alpha \to \infty$, $\mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i \leq 0$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

1. Множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
2. Существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Доказательство

- Первое условие означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе C, образованном столбцами матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$
- Если это не так, то существует гиперплоскость, которая *строго* отделяет конус от точки $\mathbf{b}$:
$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < d,\ \mathbf{y} \in C \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{b} > d.$$
- Поскольку $0 \in C$, то $d > 0$. Также $\mathbf{a}_i \in C \Rightarrow \alpha\mathbf{a}_i \in C\ \alpha > 0$
- Значит $\mathbf{c}^\top \alpha\mathbf{a}_i < d \Rightarrow \mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i < d/\alpha$. При $\alpha \to \infty$, $\mathbf{c}^\top \mathbf{a}_i \leq 0$
- Таким образом, $\mathbf{p} = -\mathbf{c}$ и выполнено второе условие

Критерий отделимости выпуклых множеств

Теорема

Два выпуклых множества отделимы, iff их относительные внутренности не пересекаются

Критерий отделимости выпуклых множеств

Теорема

Два выпуклых множества отделимы, iff их относительные внутренности не пересекаются

Признак отделимости

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — выпуклые и непересекающиеся множества. Тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

Опорная гиперплоскость

Определение

Гиперплоскость называется опорной в точке $\mathbf{x}_0$ к множеству $\mathcal{X}$, если она отделяет множество и точку, то есть выполнено $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle < \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$

Опорная гиперплоскость

Определение

Гиперплоскость называется опорной в точке $\mathbf{x}_0$ к множеству $\mathcal{X}$, если она отделяет множество и точку, то есть выполнено $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle < \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$

Критерий существования

Если $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ точка относительной границы множества, $\mathcal{X}$ выпуклое множество, тогда существует опорная гиперплоскость в точке $\mathbf{x}_0$ к множеству $\mathcal{X}$.

Главное в первой части

- Отделимость множеств
- Лемма Фаркаша
- Опорная гиперплоскость

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\| \cdot \|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \underset{\mathbf{y} \in \mathcal{X}}{\arg\min} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\| \cdot \|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{a} \not\in \mathcal{X}$, иначе очевидно
- Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_\mathcal{X}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_\mathcal{X}(\mathbf{a}) = \underset{\mathbf{y} \in \mathcal{X}}{\arg\min} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно
- Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ и зададим $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{a} \not\in \mathcal{X}$, иначе очевидно
- Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \; \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ и зададим $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$
- Тогда $\mathcal{G} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ является компактом

Проекция

Определение

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Теорема о существовании проекции

Проекция точки $\mathbf{a}$ на непустое замкнутое множество всегда существует.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{a} \notin \mathcal{X}$, иначе очевидно
- Пусть $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $f(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$
- Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ и зададим $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$
- Тогда $\mathcal{G} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ является компактом
- $f(\mathbf{x})$ достигает на $\mathcal{G}$ своего минимального значение, которое и будет проекцией.

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- Существование следует из предыдущей теоремы

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- Существование следует из предыдущей теоремы
- Пусть есть две точки $\boldsymbol{\pi}_1 \in \mathcal{X}$ и $\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки $\mathbf{a}$, тогда $\|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2$

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- Существование следует из предыдущей теоремы
- Пусть есть две точки $\boldsymbol{\pi}_1 \in \mathcal{X}$ и $\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки $\mathbf{a}$, тогда $\|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2$
- Рассмотрим $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$ в силу выпуклости

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- Существование следует из предыдущей теоремы
- Пусть есть две точки $\boldsymbol{\pi}_1 \in \mathcal{X}$ и $\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки $\mathbf{a}$, тогда $\|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2$
- Рассмотрим $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$ в силу выпуклости
- Тогда $\|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|_2 = \left\|\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a})\right\|_2 < \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\pi}_1 - a\|_2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2$ — противоречие

Единственность проекции

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое замкнутое множество. Тогда проекция любой точки на это множество существует и единственна

Доказательство

- Существование следует из предыдущей теоремы
- Пусть есть две точки $\boldsymbol{\pi}_1 \in \mathcal{X}$ и $\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$, которые являются проекциями точки $\mathbf{a}$, тогда $\|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2$
- Рассмотрим $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_2 \in \mathcal{X}$ в силу выпуклости
- Тогда $\|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|_2 = \left\|\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a})\right\|_2 < \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\pi}_1 - a\|_2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\pi}_2 - \mathbf{a}\|_2 = \|\boldsymbol{\pi}_1 - \mathbf{a}\|_2$ — противоречие
- Значит проекция единственна

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
   - Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
   - Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$
   - Тогда $\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 \leq \|\mathbf{z}_\lambda - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}))\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 + \lambda^2\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 + 2\lambda\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
   - Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$
   - Тогда $\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 \leq \|\mathbf{z}_\lambda - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}))\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 + \lambda^2\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 + 2\lambda\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle$
   - $2\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle + \lambda\|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 \geq 0$

Критерий проекции

Теорема

Дана точка $\mathbf{a}$ и выпуклое замкнутое множество $\mathcal{X}$. Тогда точка $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ есть проекция $\mathbf{a}$ iff $\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Доказательство

1. Пусть неравенство выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$
   - Рассмотрим $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + 2\langle \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$
   - Значит $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит по определению $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})$
2. Пусть $\mathbf{y} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})$
   - Для произвольного $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{z}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{X}$
   - Тогда $\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 \leq \|\mathbf{z}_\lambda - \mathbf{a}\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}))\|_2^2 = \|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 + 2\lambda \langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle$
   - $2\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a}) \rangle + \lambda \|\mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{a})\|_2^2 \geq 0$
   - При $\lambda \to 0$ получим требуемое неравенство

Проекция как нерастягивающий оператор

Теорема

Оператор проекции является нерастягивающим.

Доказательство

1. По свойству проекции, для любой точки $\mathbf{y}_1$
$$\langle \mathbf{y}_1 - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \mathbf{x} - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$
2. Пусть $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2)$, тогда
$$\langle \mathbf{y}_1 - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq 0$$
$$\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \mathbf{y}_2, \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq 0$$
3. Сложим
$$\langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1) \rangle \leq \langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1), \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 \rangle$$
4. По неравенству КБШ $\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_2) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}_1)\|_2 \leq \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|_2$

Firmly non-expansiveness

Определение

Оператор f называется firmly non-expansive, если

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_2^2 \leq \langle f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$$

Теорема

Оператор проекции является firmly non-expansive:

$$\|\pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y})\|_2^2 \leq \langle \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) - \pi_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$$

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке $\mathbf{x}$ называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha}\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = prox_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке $\mathbf{x}$ называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = prox_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке $\mathbf{x}$ называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = prox_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

- Проекция — частный случай проксимального оператора для $f(\mathbf{x}) = I_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin \mathcal{X} \end{cases}$

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке $\mathbf{x}$ называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha}\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = prox_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

- Проекция — частный случай проксимального оператора для $f(\mathbf{x}) = I_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin \mathcal{X} \end{cases}$
- Решение задачи $\min f(\mathbf{x})$ для выпуклой функции f является неподвижной точкой проксимального оператора

Проксимальный оператор

Определение

Проксимальным оператором для функции f в точке $\mathbf{x}$ называется такой оператор что

$$\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) = prox_{\alpha f}(\mathbf{x})$$

Свойства

- Проекция — частный случай проксимального оператора для $f(\mathbf{x}) = I_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin \mathcal{X} \end{cases}$
- Решение задачи $\min f(\mathbf{x})$ для выпуклой функции f является неподвижной точкой проксимального оператора
- Также является нерастягивающим и firmly non-expansiveness

Главное во второй части

- Проекция и её существование

Главное во второй части

- Проекция и её существование
- Критерий проекции

Главное во второй части

- Проекция и её существование
- Критерий проекции
- Понятие о проксимальном операторе и его свойствах