Методы оптимизации.
Введение в теорию двойственность.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

20 марта 2019 г.

Напоминание

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
  - задачи безусловной оптимизации
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Обозначения

Задача

$$\min_{x \in \mathfrak{D}} f_0(x) = p^*$$

$$\text{s.t. } g_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, m$$

$$h_j(x) \leq 0,\ j = 1, \dots, p$$

Лагранжиан

$$L(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$$

Двойственные переменные

Вектора $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ называются двойственными переменными.

Двойственная функция

Функция $g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \inf\limits_{x \in \mathfrak{D}} L(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ называется двойственной функцией Лагранжа.

Свойства двойственной функции

Вогнутость

Двойственная функция является вогнутой как инфимум аффинных функций по $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ вне зависимости от того, является ли исходная задача выпуклой.

Нижняя граница

Для любого $\boldsymbol{\lambda}$ и для $\boldsymbol{\mu} \geq 0$ выполнено $g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \leq p^*$.

Двойственная задача

$$\max g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = d^*$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{\mu} \geq 0$$

Зачем?

- Двойственная задача выпукла независимо от того, выпукла ли прямая
- Нижняя оценка **может** достигаться

Примеры

Найти двойственную функцию:

- Решение СЛУ минимальной нормы
$$\begin{aligned} &\min \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$
- Линейное программирование
$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\intercal \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$
- Задача разбиения
$$\begin{aligned} &\min \mathbf{x}^\intercal \mathbf{W} \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &x_i^2 = 1, \; i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Слабая и сильная двойственность

Определение

Оптимальные значения целевой функции в прямой и двойственной задаче связаны соотношением

$$d^* \leq p^*.$$

Если $d^* < p^*$, то свойство называют слабой двойственностью.
Если $d^* = p^*$, то — сильной двойственностью.

Замечание

Слабая двойственность есть всегда по построению двойственной задачи.

Вопросы

- При каких условиях выполняется сильная двойственность?
- Как использовать двойственность для проверки оптимальности?

Критерий субоптимальности

По построению $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$, поэтому
$f_0(x) - p^* \leq f_0(x) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \varepsilon$.

Определение

Разность $f_0(x) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ называется *двойственным зазором* и является оценкой сверху для разности текущего и оптимального значения функции.

Способы использования:

- критерий остановки в итерационном процессе
- теоретическая оценка сходимости алгоритма
- проверка оптимальности данной точки

Условие Слейтера

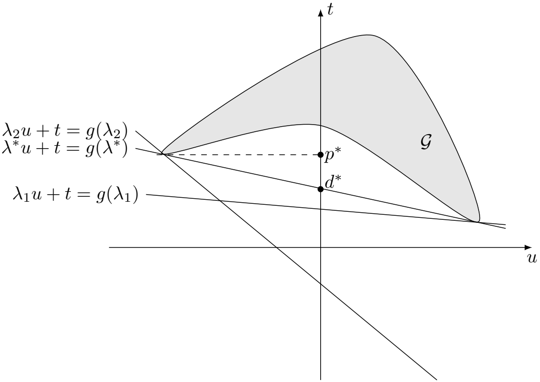
Условие Слейтера

Если существует x, лежащий внутри допустимой области, т.е. ограничения типа неравенств выполнены как строгие неравенства, то выполняется условие Слейтера.

- Решение СЛАУ наименьшей нормы
- Линейное программирование
- Квадратичное программирование с квадратичными огранчиениями

$$\min_x f_0(x), \text{ where } f_1(x) \le 0.$$

$$g(\lambda) = \inf_{(u,t)\in\mathcal{G}} (t + \lambda u) \qquad \mathcal{G} = \{(f_1(x), f_0(x)) \mid x \in \mathcal{D}\}$$



- $\lambda = 0$
- λ^* — оптимальное значение
- $\lambda > \lambda^*$

Условия дополняющей нежёсткости

Пусть $\mathbf{x}^*$ и $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность. То есть

$$f(\mathbf{x}^*) = g(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \leq$$

$$f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) \leq$$

$$f(\mathbf{x}^*), \qquad \boldsymbol{\mu}^* \geq 0$$

Условия дополняющей нежёсткости

$$\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \qquad j = 1, \ldots, p$$

Для каждого неравенства

- либо множитель Лагранжа равен нулю
- либо оно активно.

Условия Каруша-Куна-Таккера

Необходимость: если $\mathbf{x}^*$ и $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ оптимальные прямые и двойственные переменные и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $g_i(x^*) = 0$ — допустимость в прямой задаче
2. $h_j(x^*) \leq 0$ — допустимость в прямой задаче
3. $\mu_j^* \geq 0$ — допустимость в двойственной задаче
4. $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ — условие дополняющей нежёсткости
5. $\nabla_x L(x^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = 0$ — стационарность лагранжиана по прямым переменным

Сильная двойственность vs. условие Слейтера

Теорема

Если задача выпукла и выполнено условие Слейтера, то выполняется сильная двойственность

Доказательство на доске

Достаточность

Если задача выпукла и для точек $\mathbf{x}^*$, $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ выполнены условия ККТ, то эти точки решения прямой и двойственной задачи с нулевым зазором двойственности

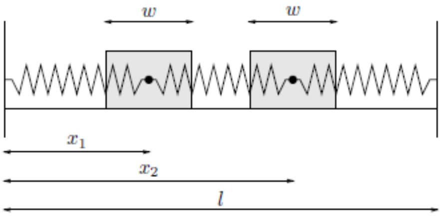
План доказательства

1. L выпуклая функция
2. Стационарность L – достаточное условие минимума
3. Зазор двойственности равен 0
4. Оптимальность прямых и двойственных переменных

Итог для выпуклых задач

1. ККТ $\Rightarrow$ оптимальность и сильная двойственность
2. Оптимальность и условие Слейтера $\Rightarrow$ оптимальность и сильная двойственность $\Rightarrow$ ККТ

Механическая интерпретация



Поиск устойчивого положения системы:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(l - x_2)^2$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{w}{2} - x_1 \leq 0$$

$$w + x_1 - x_2 \leq 0$$

$$\frac{w}{2} - l + x_2 \leq 0$$

Примеры

- Отрицательная энтропия при линейных ограничениях
$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
& \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 1
\end{aligned}
$$
- QCQP
- Минимизация нормы невязки в линейной задаче аппроксимации
$$
\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|
$$
- Полуопределённое программирование (SDP)
- Важность условия Слейтера
$$
\begin{aligned}
\min_{x \in \mathbb{R}, y > 0} & \; e^{-x} \\
\text{s.t. } & x^2/y \leq 0
\end{aligned}
$$

Резюме

- Двойственая задача: что это такое и зачем она нужна?
- Сильная и слабая двойственность
- Условия Слейтера
- Геометрическая и механическая интерпретации