

# Методы оптимизации

## Постановки задач оптимизации

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

11 февраля 2020 г.

# Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи
5. Реализация алгоритма и проверка его корректности

# Безусловная задача оптимизации

Дана функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

- ▶ Простейший тип задач
- ▶ Но даже такие задачи не всегда легко решить
- ▶ Начнём далее именно с анализа задач безусловной оптимизации

# Регрессия

Дан набор пар  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ , необходимо восстановить функцию  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  так чтобы  $y_i \approx f(\mathbf{x}_i)$ .



# Регрессия

Дан набор пар  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ , необходимо восстановить функцию  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  так чтобы  $y_i \approx f(\mathbf{x}_i)$ .

- ▶ Что надо дополнительно задать?

# Регрессия

Дан набор пар  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ , необходимо восстановить функцию  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  так чтобы  $y_i \approx f(\mathbf{x}_i)$ .

- ▶ Что надо дополнительно задать?
- ▶ Примеры

# Регрессия

Дан набор пар  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ , необходимо восстановить функцию  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  так чтобы  $y_i \approx f(\mathbf{x}_i)$ .

- ▶ Что надо дополнительно задать?
- ▶ Примеры
- ▶ Свойства

# Регрессия

Дан набор пар  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ , необходимо восстановить функцию  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  так чтобы  $y_i \approx f(\mathbf{x}_i)$ .

- ▶ Что надо дополнительно задать?
- ▶ Примеры
- ▶ Свойства

**Q:** что делать, если значения  $\mathbf{x}_i$  даны неточно?

# Оценка параметров распределений

Даны некоторые векторы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ . Надо найти из какого распределения они взяты.

# Оценка параметров распределений

Даны некоторые векторы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ . Надо найти из какого распределения они взяты.

Основной метод: метод максимального правдоподобия

# Оценка параметров распределений

Даны некоторые векторы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ . Надо найти из какого распределения они взяты.

Основной метод: метод максимального правдоподобия

- ▶ Как параметризовать распределение?

# Оценка параметров распределений

Даны некоторые векторы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ . Надо найти из какого распределения они взяты.

Основной метод: метод максимального правдоподобия

- ▶ Как параметризовать распределение?
- ▶ Что такое правдоподобие?



# Оценка параметров распределений

Даны некоторые векторы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ . Надо найти из какого распределения они взяты.

Основной метод: метод максимального правдоподобия

- ▶ Как параметризовать распределение?
- ▶ Что такое правдоподобие?
- ▶ Пример для нормального распределения

# Условная задача оптимизации

$$\begin{array}{ll}\min & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & \mathbf{x} \in \mathcal{D}\end{array}$$

- ▶ Дискретные задачи, например  $\mathcal{D} = \{0, 1\}^n$  или  $\mathcal{D} = \{-1, 1\}^n$
- ▶ Непрерывные задачи

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \mid f_i(\mathbf{x}) = 0, g_k(\mathbf{x}) \leq 0\}$$

## Регрессия по неполным данным

Дан набор данных  $(x_i, y_i)$ ,  $y_i \in \mathbb{R}$ . Однако теперь известно, что только первые  $m$  измерений дали точное значение  $y_i$ . Про остальные известна лишь оценка снизу. Необходимо найти модель, по которой можно восстановить имеющиеся данные и учесть данные оценки на отсутствующие.

## Регрессия по неполным данным

Дан набор данных  $(x_i, y_i)$ ,  $y_i \in \mathbb{R}$ . Однако теперь известно, что только первые  $m$  измерений дали точное значение  $y_i$ . Про остальные известна лишь оценка снизу. Необходимо найти модель, по которой можно восстановить имеющиеся данные и учесть данные оценки на отсутствующие.

- ▶ Какие переменные надо ввести?

# Регрессия по неполным данным

Дан набор данных  $(x_i, y_i)$ ,  $y_i \in \mathbb{R}$ . Однако теперь известно, что только первые  $m$  измерений дали точное значение  $y_i$ . Про остальные известна лишь оценка снизу. Необходимо найти модель, по которой можно восстановить имеющиеся данные и учесть данные оценки на отсутствующие.

- ▶ Какие переменные надо ввести?
- ▶ Какая целевая функция?

# Регрессия по неполным данным

Дан набор данных  $(x_i, y_i)$ ,  $y_i \in \mathbb{R}$ . Однако теперь известно, что только первые  $m$  измерений дали точное значение  $y_i$ . Про остальные известна лишь оценка снизу. Необходимо найти модель, по которой можно восстановить имеющиеся данные и учесть данные оценки на отсутствующие.

- ▶ Какие переменные надо ввести?
- ▶ Какая целевая функция?
- ▶ Какие ограничения?

## Toy metric learning

Дан набор данных  $(x_i, y_i)$ , где  $y_i$  — класс объекта  $x_i$ . Надо получить псевдометрику такую, что объекты одного класса окажутся ближе, чем объекты разных классов.

# Toy metric learning

Дан набор данных  $(x_i, y_i)$ , где  $y_i$  — класс объекта  $x_i$ . Надо получить псевдометрику такую, что объекты одного класса окажутся ближе, чем объекты разных классов.

- ▶ Какая параметризация?



# Toy metric learning

Дан набор данных  $(x_i, y_i)$ , где  $y_i$  — класс объекта  $x_i$ . Надо получить псевдометрику такую, что объекты одного класса окажутся ближе, чем объекты разных классов.

- ▶ Какая параметризация?
- ▶ Какая целевая функция?

# Toy metric learning

Дан набор данных  $(x_i, y_i)$ , где  $y_i$  — класс объекта  $x_i$ . Надо получить псевдометрику такую, что объекты одного класса окажутся ближе, чем объекты разных классов.

- ▶ Какая параметризация?
- ▶ Какая целевая функция?
- ▶ Какие ограничения?

## Задача про склад

Есть список складов и список магазинов. Надо организовать доставку товаров из складов так, чтобы все запросы магазинов были удовлетворены. Как это сделать?

- ▶ Что нам дано?

## Задача про склад

Есть список складов и список магазинов. Надо организовать доставку товаров из складов так, чтобы все запросы магазинов были удовлетворены. Как это сделать?

- ▶ Что нам дано?
- ▶ Что надо найти?

# Задача про склад

Есть список складов и список магазинов. Надо организовать доставку товаров из складов так, чтобы все запросы магазинов были удовлетворены. Как это сделать?

- ▶ Что нам дано?
- ▶ Что надо найти?
- ▶ Какая целевая функция?

# Определение расписания процессора

1. Задан пул задач, необходимое время старта и окончания, а также объём работы необходимой для решения каждой задачи
2. Даны ограничения на скорость процессора и границы её изменения между соседними моментами времени
3. Надо составить расписание выполнения задач так, чтобы потребляемая мощность была минимальна

# Определение расписания процессора

1. Задан пул задач, необходимое время старта и окончания, а также объём работы необходимой для решения каждой задачи
  2. Даны ограничения на скорость процессора и границы её изменения между соседними моментами времени
  3. Надо составить расписание выполнения задач так, чтобы потребляемая мощность была минимальна
- Что дано?

# Определение расписания процессора

1. Задан пул задач, необходимое время старта и окончания, а также объём работы необходимой для решения каждой задачи
  2. Даны ограничения на скорость процессора и границы её изменения между соседними моментами времени
  3. Надо составить расписание выполнения задач так, чтобы потребляемая мощность была минимальна
- ▶ Что дано?
  - ▶ Как задать расписание?



# Определение расписания процессора

1. Задан пул задач, необходимое время старта и окончания, а также объём работы необходимой для решения каждой задачи
  2. Даны ограничения на скорость процессора и границы её изменения между соседними моментами времени
  3. Надо составить расписание выполнения задач так, чтобы потребляемая мощность была минимальна
- ▶ Что дано?
  - ▶ Как задать расписание?
  - ▶ Как задать целевую функцию?

# Определение расписания процессора

1. Задан пул задач, необходимое время старта и окончания, а также объём работы необходимой для решения каждой задачи
  2. Даны ограничения на скорость процессора и границы её изменения между соседними моментами времени
  3. Надо составить расписание выполнения задач так, чтобы потребляемая мощность была минимальна
- ▶ Что дано?
  - ▶ Как задать расписание?
  - ▶ Как задать целевую функцию?
  - ▶ Какие ограничения?

# Лучевая терапия

Распределить интенсивность облучения участка ткани так, чтобы максимизировать поражения заданной области и минимизировать поражение остальных клеток.

# Лучевая терапия

Распределить интенсивность облучения участка ткани так, чтобы максимизировать поражения заданной области и минимизировать поражение остальных клеток.

- ▶ Какие переменные даны, а какие являются решением?

# Лучевая терапия

Распределить интенсивность облучения участка ткани так, чтобы максимизировать поражения заданной области и минимизировать поражение остальных клеток.

- ▶ Какие переменные даны, а какие являются решением?
- ▶ Какие есть ограничения?

# Лучевая терапия

Распределить интенсивность облучения участка ткани так, чтобы максимизировать поражения заданной области и минимизировать поражение остальных клеток.

- ▶ Какие переменные даны, а какие являются решением?
- ▶ Какие есть ограничения?
- ▶ Какая целевая функция?

# Выводы

- ▶ Типы задач оптимизации
- ▶ Шаги для формализации задачи
- ▶ Неоднозначность формализации