Методы оптимизации
Лекция 2: Выпуклые множества и их свойства

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

17 февраля 2021 г.

На прошлой лекции

- План на семестр

На прошлой лекции

- План на семестр
- Формулировки задачи оптимизации

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ *называется выпуклым, если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *и любых* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ *выполнено*

$$\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in \mathcal{X}.$$

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ *называется выпуклым, если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *и любых* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ *выполнено*

$$\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in \mathcal{X}.$$

Примеры

- Многоугольники

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ *называется выпуклым, если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *и любых* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ *выполнено*

$$\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in \mathcal{X}.$$

Примеры

- Многоугольники
- Гиперплоскости

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ *называется выпуклым, если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *и любых* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ *выполнено*

$$\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in \mathcal{X}.$$

Примеры

- Многоугольники
- Гиперплоскости
- Шары в *любой* норме и эллипсоиды

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ *называется выпуклым, если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *и любых* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ *выполнено*

$$\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in \mathcal{X}.$$

Примеры

- Многоугольники
- Гиперплоскости
- Шары в *любой* норме и эллипсоиды
- Симметричные положительно определённые матрицы

Свойство выпуклых множеств

Утверждение

Если множество $\mathcal{X}$ выпукло, то все точки вида $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in \Delta_k = \{\alpha \mid \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\}$, также лежат в этом множестве. Точки такого вида называются выпуклыми комбинациями точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Доказательство по индукции

- База индукции: при $k = 1$ получаем сами точки множества.

Свойство выпуклых множеств

Утверждение

Если множество $\mathcal{X}$ выпукло, то все точки вида $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in \Delta_k = \{\alpha \mid \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$, также лежат в этом множестве. Точки такого вида называются выпуклыми комбинациями точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Доказательство по индукции

- База индукции: при $k = 1$ получаем сами точки множества.
- Предположение: пусть выполнено $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$, где $\alpha \in \Delta_{m-1}$

Свойство выпуклых множеств

Утверждение

Если множество $\mathcal{X}$ выпукло, то все точки вида $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in \Delta_k = \{\alpha \mid \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\}$, также лежат в этом множестве. Точки такого вида называются выпуклыми комбинациями точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Доказательство по индукции

- База индукции: при $k = 1$ получаем сами точки множества.
- Предположение: пусть выполнено $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$, где $\alpha \in \Delta_{m-1}$
- Рассмотрим точку вида $\sum_{i=1}^{m} \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i$, где $\hat{\alpha} \in \Delta_m$

Свойство выпуклых множеств

Утверждение

Если множество $\mathcal{X}$ выпукло, то все точки вида $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in \Delta_k = \{\alpha \mid \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$, также лежат в этом множестве. Точки такого вида называются выпуклыми комбинациями точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Доказательство по индукции

- База индукции: при $k = 1$ получаем сами точки множества.
- Предположение: пусть выполнено $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$, где $\alpha \in \Delta_{m-1}$
- Рассмотрим точку вида $\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i$, где $\hat{\alpha} \in \Delta_m$
- Тогда найдётся $\hat{\alpha}_k < 1$ и $1 - \hat{\alpha}_k = \sum_{i \neq k} \hat{\alpha}_i$

Свойство выпуклых множеств

Утверждение

Если множество $\mathcal{X}$ выпукло, то все точки вида $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in \Delta_k = \{\alpha \mid \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\}$, также лежат в этом множестве. Точки такого вида называются выпуклыми комбинациями точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Доказательство по индукции

- База индукции: при $k = 1$ получаем сами точки множества.
- Предположение: пусть выполнено $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$, где $\alpha \in \Delta_{m-1}$
- Рассмотрим точку вида $\sum_{i=1}^{m} \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i$, где $\hat{\alpha} \in \Delta_m$
- Тогда найдётся $\hat{\alpha}_k < 1$ и $1 - \hat{\alpha}_k = \sum_{i \neq k} \hat{\alpha}_i$
- $\sum_{i=1}^{m} \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i = \sum_{i \neq k} \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i + \hat{\alpha}_k \mathbf{x}_k = (1 - \hat{\alpha}_k) \sum_{i \neq k} \frac{\hat{\alpha}_i}{1 - \hat{\alpha}_k} \mathbf{x}_i + \hat{\alpha}_k \mathbf{x}_k = (1 - \hat{\alpha}_k)\mathbf{y} + \hat{\alpha}_k \mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$ так как множество выпукло

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств $\mathcal{X}_i$ *является выпуклым множеством:*

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i.$$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств $\mathcal{X}_i$ является выпуклым множеством:

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i.$$

Доказательство

- Рассмотрим $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \to \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{I}$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств $\mathcal{X}_i$ является выпуклым множеством:

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i.$$

Доказательство

- Рассмотрим $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \to \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{I}$
- Построим точку $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}$, $\alpha \in [0, 1]$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств $\mathcal{X}_i$ является выпуклым множеством:

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i.$$

Доказательство

- Рассмотрим $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \to \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{I}$
- Построим точку $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Так как все $\mathcal{X}_i$ выпуклы, то $\mathbf{z} \in \mathcal{X}_i$, $\forall i \in \mathcal{I}$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств $\mathcal{X}_i$ является выпуклым множеством:

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i.$$

Доказательство

- Рассмотрим $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \to \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}_i, \forall i \in \mathcal{I}$
- Построим точку $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}$, $\alpha \in [0, 1]$
- Так как все $\mathcal{X}_i$ выпуклы, то $\mathbf{z} \in \mathcal{X}_i$, $\forall i \in \mathcal{I}$
- Следовательно, $\mathbf{z} \in \mathcal{X}$ и $\mathcal{X}$ — выпукло

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{X}$ — выпуклое множество и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{X}$ — выпуклое множество и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$
- Пусть f — линейное отображение вида $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{X}$ — выпуклое множество и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$
- Пусть f — линейное отображение вида $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$
- Покажем, что $\alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha) f(\mathbf{y}) \in f(\mathcal{X})$, где $\alpha \in [0, 1]$

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{X}$ — выпуклое множество и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$
- Пусть f — линейное отображение вида $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$
- Покажем, что $\alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y}) \in f(\mathcal{X})$, где $\alpha \in [0, 1]$
- Действительно,

$$\alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) + (1-\alpha)(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}) =$$
$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) + \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b} = f(\mathbf{z}),$$

где $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in \mathcal{X}$

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ — выпуклые множества. Рассмотрим $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1,\ \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2\}$

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ — выпуклые множества. Рассмотрим $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1,\ \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2\}$
- Пусть $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2$ и $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{x}}_2$ лежат в $\mathcal{X}$. Покажем, что в $\mathcal{X}$ лежит точка $\alpha\hat{\mathbf{x}} + (1-\alpha)\tilde{\mathbf{x}}$

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ — выпуклые множества. Рассмотрим $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1,\ \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2\}$
- Пусть $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2$ и $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{x}}_2$ лежат в $\mathcal{X}$. Покажем, что в $\mathcal{X}$ лежит точка $\alpha\hat{\mathbf{x}} + (1-\alpha)\tilde{\mathbf{x}}$
- Действительно,

  $\alpha\hat{\mathbf{x}}+(1-\alpha)\tilde{\mathbf{x}} = [\alpha\hat{\mathbf{x}}_1+(1-\alpha)\tilde{\mathbf{x}}_1]+[\alpha\hat{\mathbf{x}}_2+(1-\alpha)\tilde{\mathbf{x}}_2] = \mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2,$

  где $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{X}_1$ и $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{X}_2$ в силу выпуклости множеств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ — выпуклые множества. Рассмотрим $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1,\ \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2\}$
- Пусть $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2$ и $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{x}}_2$ лежат в $\mathcal{X}$. Покажем, что в $\mathcal{X}$ лежит точка $\alpha\hat{\mathbf{x}} + (1-\alpha)\tilde{\mathbf{x}}$
- Действительно,

  $\alpha\hat{\mathbf{x}}+(1-\alpha)\tilde{\mathbf{x}} = [\alpha\hat{\mathbf{x}}_1+(1-\alpha)\tilde{\mathbf{x}}_1]+[\alpha\hat{\mathbf{x}}_2+(1-\alpha)\tilde{\mathbf{x}}_2] = \mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2,$

  где $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{X}_1$ и $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{X}_2$ в силу выпуклости множеств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.

Следствие

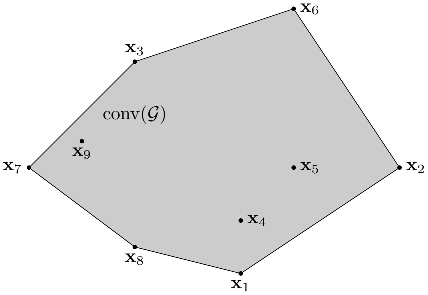
Линейная комбинация выпуклых множеств — выпуклое множество

Выпуклая оболочка (convex hull)

Определение

Выпуклой оболочкой множества $\mathcal{G}$ называется следующее множество

$$\mathrm{conv}\,(\mathcal{G}) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{G}, \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}$$



Альтернативные интерпретации

Эквивалентные формулировки

Выпуклая оболочка множества $\mathcal{G}$ — это

1) минимальное по включению выпуклое множество, содержащее $\mathcal{G}$, то есть если $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$, то $\operatorname{conv}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{X}$
2) пересечение всех выпуклых множеств, содержащих $\mathcal{G}$

Доказательство

- $\operatorname{conv}(\mathcal{G})$ выпуклое множество (проверьте по определению!)
- $\mathcal{G} \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{G})$
- $\mathcal{X}$ содержит все выпуклые комбинации своих точек
- Если $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ содержит все выпуклые комбинации точек из $\mathcal{G}$
- А значит $\operatorname{conv}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{X}$

Использование выпуклых оболочек

- При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**

Использование выпуклых оболочек

- При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**
- Можно заменить само множество его выпуклой оболочкой

Использование выпуклых оболочек

- При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**
- Можно заменить само множество его выпуклой оболочкой
- Решить задачу на этом множестве

Использование выпуклых оболочек

- При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**
- Можно заменить само множество его выпуклой оболочкой
- Решить задачу на этом множестве
- Восстановить некоторым образом приближённое решение из исходной области

Конусы (cones)

Определение

Множество $\mathcal{K}$ называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta \mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

*Множество $\mathcal{K}$ называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.*

Конусы (cones)

Определение

Множество $\mathcal{K}$ *называется конусом, если для любого* $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ *и произвольного числа* $\theta \geq 0$ *выполнено* $\theta\mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

Множество $\mathcal{K}$ *называется* ***выпуклым*** *конусом, если для любых точек* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ *и любых чисел* $\theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$ *выполнено* $\theta_1\mathbf{x}_1 + \theta_2\mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.

Важные конусы

Конусы (cones)

Определение

Множество $\mathcal{K}$ называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta \mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

Множество $\mathcal{K}$ называется **выпуклым** *конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.*

Важные конусы

- Неотрицательный октант
  $\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\} \to$ LP

Конусы (cones)

Определение

Множество $\mathcal{K}$ называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta \mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

Множество $\mathcal{K}$ называется ***выпуклым*** *конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.*

Важные конусы

- Неотрицательный октант
  $\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n\} \to$ LP
- Конус второго порядка $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\} \to$ SOCP

Конусы (cones)

Определение

Множество $\mathcal{K}$ называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta \mathbf{x} \in \mathcal{K}$.

Определение

Множество $\mathcal{K}$ называется ***выпуклым*** *конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$.*

Важные конусы

- Неотрицательный октант $\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\} \to$ LP
- Конус второго порядка $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\} \to$ SOCP
- Конус симметричных положительно полуопределённых матриц $\mathbf{S}^n_+ \to$ SDP

Коническая оболочка (conic hull)

Определение

Конической оболочкой множества $\mathcal{G}$ называется множество точек вида $\sum_{i=1}^{k} \theta_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in \mathcal{G}$ и $\theta_i \geq 0$ и обозначается $\mathrm{cone}\,(\mathcal{G})$.

Теорема

Выпуклый конус содержит все конические оболочки своих элементов

Теорема

Коническая оболочка множества $\mathcal{G}$ — это минимальный выпуклый конус, который содержит $\mathcal{G}$, то есть если $\mathcal{K}$ выпуклый конус и $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{K}$, то $\mathrm{cone}\,(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{K}$.

Аффинное множество

Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Аффинное множество

Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

Аффинное множество

Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

Доказательство

Аффинное множество

Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство

Аффинное множество

Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{A},\ \mathbf{z}_2 = (1 - \theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$

Аффинное множество

Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A},\ \mathbf{z}_2 = (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$
  - $\theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \in \mathcal{A}$

Аффинное множество

Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{A},\ \mathbf{z}_2 = (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$
  - $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \in \mathcal{A}$
- Пусть $\mathcal{A}$ аффинное множество и $0 \in \mathcal{A}$.

Аффинное множество

Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{A},\ \mathbf{z}_2 = (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$
  - $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \in \mathcal{A}$
- Пусть $\mathcal{A}$ аффинное множество и $0 \in \mathcal{A}$.
  - Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$, тогда $\theta \mathbf{x} = (1-\theta)0 + \theta \mathbf{x} \in \mathcal{A}$ — замкнутость для умножения на число

Аффинное множество

Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{A},\ \mathbf{z}_2 = (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$
  - $\theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \in \mathcal{A}$
- Пусть $\mathcal{A}$ аффинное множество и $0 \in \mathcal{A}$.
  - Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$, тогда $\theta \mathbf{x} = (1-\theta)0 + \theta \mathbf{x} \in \mathcal{A}$ — замкнутость для умножения на число
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, тогда $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{x}_2 = \mathbf{y} \in \mathcal{A}$

Аффинное множество

Определение

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Аффинное множество и подпространство

Подпространство в $\mathbb{R}^n$ — это аффинное множество, содержащее 0.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A}$ подпространство
  - $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \to \mathbf{z}_1 = \theta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{A},\ \mathbf{z}_2 = (1 - \theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$
  - $\theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta)\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \in \mathcal{A}$
- Пусть $\mathcal{A}$ аффинное множество и $0 \in \mathcal{A}$.
  - Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$, тогда $\theta \mathbf{x} = (1 - \theta)0 + \theta \mathbf{x} \in \mathcal{A}$ — замкнутость для умножения на число
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, тогда $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{x}_2 = \mathbf{y} \in \mathcal{A}$
  - $\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 2\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ — замкнутость относительно сложения элементов

Параллельность

Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

Параллельность

Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

Параллельность

Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

Доказательство

Параллельность

Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_2$. Значит $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{a}$

Параллельность

Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_2$. Значит $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{a}$
- $0 \in \mathcal{L}_2 \to -\mathbf{a} \in \mathcal{L}_1 \to \mathbf{a} \in \mathcal{L}_1$

Параллельность

Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_2$. Значит $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{a}$
- $0 \in \mathcal{L}_2 \to -\mathbf{a} \in \mathcal{L}_1 \to \mathbf{a} \in \mathcal{L}_1$
- В силу замкнутости подмножества относительно сложения $\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_1 + \mathbf{a} = \mathcal{L}_2$

Параллельность

Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_2$. Значит $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{a}$
- $0 \in \mathcal{L}_2 \to -\mathbf{a} \in \mathcal{L}_1 \to \mathbf{a} \in \mathcal{L}_1$
- В силу замкнутости подмножества относительно сложения $\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_1 + \mathbf{a} = \mathcal{L}_2$
- Аналогично показывается, что $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$

Параллельность

Определение

Аффинное множество $\mathcal{A}_1$ параллельно аффинному множеству $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a}$

Утверждение

Любое аффинное множество $\mathcal{A}$ параллельно единственному подпространству

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{A} \parallel \mathcal{L}_2$. Значит $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{a}$
- $0 \in \mathcal{L}_2 \to -\mathbf{a} \in \mathcal{L}_1 \to \mathbf{a} \in \mathcal{L}_1$
- В силу замкнутости подмножества относительно сложения $\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_1 + \mathbf{a} = \mathcal{L}_2$
- Аналогично показывается, что $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$
- Рассмотрим некоторый вектор $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ и множество $\mathcal{A} - \mathbf{y} = \mathcal{A} + (-\mathbf{y})$, которое является аффинным и содержит 0, следовательно, подпространство

Критерий аффинности множества

Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

Критерий аффинности множества

Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

Доказательство

Критерий аффинности множества

Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению

Критерий аффинности множества

Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$

Критерий аффинности множества

Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta\mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффинннно

Критерий аффинности множества

Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta\mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффиннно
- Рассмотрим произвольное аффинное множество $\mathcal{A}$

Критерий аффинности множества

Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta\mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффиннно
- Рассмотрим произвольное аффинное множество $\mathcal{A}$
  - Для него существует подпространство $\mathcal{L} \parallel \mathcal{A}$

Критерий аффинности множества

Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta\mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффининно
- Рассмотрим произвольное аффинное множество $\mathcal{A}$
  - Для него существует подпространство $\mathcal{L} \parallel \mathcal{A}$
  - Рассмотрим ортогональное подпространство $\mathcal{L}^\perp$ и его базис $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$

Критерий аффинности множества

Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta\mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффинннo
- Рассмотрим произвольное аффинное множество $\mathcal{A}$
  - Для него существует подпространство $\mathcal{L} \parallel \mathcal{A}$
  - Рассмотрим ортогональное подпространство $\mathcal{L}^\perp$ и его базис $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$
  - $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^\perp)^\perp = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, m\} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = 0\}$

Критерий аффинности множества

Формулировка

Множество аффинно iff оно представимо в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n$ и вектора $\mathbf{b}$.

Доказательство

- Рассмотрим $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ и покажем, что оно аффинно по определению
  - Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$, рассмотрим $\mathbf{z} = \theta \mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2$
  - $\mathbf{A}\mathbf{z} = \theta \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \theta \mathbf{b} + (1-\theta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, а значит $\mathcal{A}$ аффинннo
- Рассмотрим произвольное аффинное множество $\mathcal{A}$
  - Для него существует подпространство $\mathcal{L} \parallel \mathcal{A}$
  - Рассмотрим ортогональное подпространство $\mathcal{L}^\perp$ и его базис $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$
  - $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^\perp)^\perp = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = 0, \ i = 1, \ldots, m\} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = 0\}$
  - $\mathcal{A} = \mathcal{L} + \mathbf{c} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = 0\} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$

Теорема Каратеодори

Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\,(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

Теорема Каратеодори

Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\,(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

Доказательство

Теорема Каратеодори

Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\,(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$

Теорема Каратеодори

Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\,(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше

Теорема Каратеодори

Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\operatorname{conv}(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить

Теорема Каратеодори

Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\operatorname{conv}(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить
- Пусть все $\alpha_i > 0$

Теорема Каратеодори

Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\operatorname{conv}(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить
- Пусть все $\alpha_i > 0$
- Так как $m > n+1$, то $\sum_{k=1}^m \gamma_k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ для некоторого набора γ_k не равных нулю одновременно

Теорема Каратеодори

Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\left(\mathcal{X}\right)$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить
- Пусть все $\alpha_i > 0$
- Так как $m > n+1$, то $\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ для некоторого набора γ_k не равных нулю одновременно
- Обозначим $\tau = \min_{\gamma_i > 0} \frac{\alpha_i}{\gamma_i}$ и рассмотрим $\hat{\alpha}_i = \alpha_i - \tau\gamma_i$

Теорема Каратеодори

Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\mathrm{conv}\,(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить
- Пусть все $\alpha_i > 0$
- Так как $m > n+1$, то $\sum_{k=1}^m \gamma_k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ для некоторого набора γ_k не равных нулю одновременно
- Обозначим $\tau = \min_{\gamma_i > 0} \frac{\alpha_i}{\gamma_i}$ и рассмотрим $\hat{\alpha}_i = \alpha_i - \tau\gamma_i$
- $\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \tau \sum_{i=1}^m \gamma_i = 1$

Теорема Каратеодори

Формулировка

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда любую точку из $\operatorname{conv}(\mathcal{X})$ можно представить как выпуклую комбинацию не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i$, где $\alpha \in \Delta_m$, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ и $m > n+1$
- Покажем, как сделать одним слагаемым меньше
- Если $\alpha_j = 0$, тогда $\mathbf{x}_j$ можно исключить
- Пусть все $\alpha_i > 0$
- Так как $m > n+1$, то $\sum_{k=1}^m \gamma_k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ для некоторого набора γ_k не равных нулю одновременно
- Обозначим $\tau = \min_{\gamma_i > 0} \frac{\alpha_i}{\gamma_i}$ и рассмотрим $\hat{\alpha}_i = \alpha_i - \tau\gamma_i$
- $\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \tau \sum_{i=1}^m \gamma_i = 1$
- $\sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i - \tau \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{x}_i = \mathbf{x}$

Продолжение доказательства

- По построению существует j такой что $\hat{\alpha}_j = 0$, значит можно исключить $\mathbf{x}_j$

Продолжение доказательства

- По построению существует j такой что $\hat{\alpha}_j = 0$, значит можно исключить $\mathbf{x}_j$
- Продолжая аналогично, сократим число слагаемых до $n+1$

Продолжение доказательства

- По построению существует j такой что $\hat{\alpha}_j = 0$, значит можно исключить $\mathbf{x}_j$
- Продолжая аналогично, сократим число слагаемых до $n + 1$

Упражнение

Докажите, что если $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, то любая точка из $\mathrm{cone}\,(\mathcal{X})$ может быть представлена в виде конической комбинации не более чем n точек из $\mathcal{X}$.

Компактность

Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

Компактность

Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

Доказательство

Компактность

Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

Доказательство

- Пусть $f : \Delta_{n+1} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая функция, что $f(\alpha, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$

Компактность

Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

Доказательство

- Пусть $f : \Delta_{n+1} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая функция, что $f(\alpha, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$
- f непрерывна, Δ_{n+1} компакт

Компактность

Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

Доказательство

- Пусть $f : \Delta_{n+1} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая функция, что $f(\alpha, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$
- f непрерывна, Δ_{n+1} компакт
- По теореме Каратеодори произвольный элемент $\mathbf{z} \in \operatorname{conv}(\mathcal{G})$ можно представить в виде $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{g}_i$, где $\mathbf{g}_i \in \mathcal{G}$

Компактность

Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

Доказательство

- Пусть $f : \Delta_{n+1} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая функция, что $f(\alpha, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$
- f непрерывна, Δ_{n+1} компакт
- По теореме Каратеодори произвольный элемент $\mathbf{z} \in \mathrm{conv}\,(\mathcal{G})$ можно представить в виде $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{g}_i$, где $\mathbf{g}_i \in \mathcal{G}$
- $\mathrm{conv}\,(\mathcal{G}) = f(\Delta_{n+1} \times \mathcal{G} \times \ldots \times \mathcal{G})$

Компактность

Утверждение

Выпуклая оболочка компактного множества $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ является компактом

Доказательство

- Пусть $f : \Delta_{n+1} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая функция, что $f(\alpha, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$
- f непрерывна, Δ_{n+1} компакт
- По теореме Каратеодори произвольный элемент $\mathbf{z} \in \mathrm{conv}\,(\mathcal{G})$ можно представить в виде $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{g}_i$, где $\mathbf{g}_i \in \mathcal{G}$
- $\mathrm{conv}\,(\mathcal{G}) = f(\Delta_{n+1} \times \mathcal{G} \times \ldots \times \mathcal{G})$
- Непрерывная функция отображает компакт в компакт

Внутренность

Внутренность множества

Внутренность множества $\mathcal{G}$ состоит из точек $\mathcal{G}$, таких что:

$$\mathrm{int}\,(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset \mathcal{G}\},$$

где $B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon\}$

Q: приведите пример непустого выпуклого множества с пустой внутренностью

Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$

Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$

Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$

Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \mathrm{int}\,(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$

Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \mathrm{int}\,(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$

Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim(\mathcal{X} + \mathbf{c}) \to 0 \in \mathcal{X}$

Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \mathrm{int}\,(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim (\mathcal{X} + \mathbf{c}) \to 0 \in \mathcal{X}$
  - Рассмотрим максимальный набор линейно независимых векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ лежащих в $\mathcal{X}$

Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim(\mathcal{X} + \mathbf{c}) \to 0 \in \mathcal{X}$
  - Рассмотрим максимальный набор линейно независимых векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ лежащих в $\mathcal{X}$
  - Тогда $\mathcal{X} \subseteq \mathtt{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$

Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \text{int}\,(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim (\mathcal{X} + \mathbf{c}) \to 0 \in \mathcal{X}$
  - Рассмотрим максимальный набор линейно независимых векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ лежащих в $\mathcal{X}$
  - Тогда $\mathcal{X} \subseteq \texttt{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$
  - $\dim \mathcal{X} = n \to m = n$

Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim (\mathcal{X} + \mathbf{c}) \to 0 \in \mathcal{X}$
  - Рассмотрим максимальный набор линейно независимых векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ лежащих в $\mathcal{X}$
  - Тогда $\mathcal{X} \subseteq \mathtt{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$
  - $\dim \mathcal{X} = n \to m = n$
  - $\operatorname{conv}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, 0) \subset \mathcal{X}$

Критерий непустоты внутренности выпуклого множества

Теорема

Выпуклое множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность iff $\dim \mathcal{X} = n$

Доказательство

- $\dim \mathcal{X}$ — это размерность аффинной оболочки $\mathcal{X}$
- Пусть существует $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathcal{X})$
  - Тогда найдётся шар $B(\mathbf{x}, r)$ такой что $B \subseteq \mathcal{X}$
  - Но это значит что $\dim \mathcal{X} \geq \dim B = n$. Тогда $\dim \mathcal{X} = n$
- Пусть $\dim \mathcal{X} = n$
  - $\dim \mathcal{X} = \dim(\mathcal{X} + \mathbf{c}) \to 0 \in \mathcal{X}$
  - Рассмотрим максимальный набор линейно независимых векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ лежащих в $\mathcal{X}$
  - Тогда $\mathcal{X} \subseteq \mathtt{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$
  - $\dim \mathcal{X} = n \to m = n$
  - $\operatorname{conv}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, 0) \subset \mathcal{X}$
  - Открытое множество $\{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i \mid \alpha > 0,\ \sum_{i=1}^m \alpha_i < 1\} \subset \mathcal{X} \to \operatorname{int}(\mathcal{X}) \neq \varnothing$

Относительная внутренность и замыкание

Относительная внутренность

Относительной внутренностью множества $\mathcal{G}$ называют следующее множество:

$$\mathrm{relint}\,(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathrm{aff}\,(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}\}$$

Относительная внутренность и замыкание

Относительная внутренность

Относительной внутренностью множества $\mathcal{G}$ называют следующее множество:

$$\operatorname{relint}(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \operatorname{aff}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}\}$$

Замыкание

Замыканием множества $\mathcal{G}$ называют множество $\operatorname{cl}(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$, где $\mathcal{G}(r)$ — это множество точек, удалённых от $\mathcal{G}$ меньше чем на r. Также это множество совпадает с множеством всех предельных точек множества $\mathcal{G}$.

Выпуклость замыкания

Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

Выпуклость замыкания

Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

Доказательство

Выпуклость замыкания

Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

Доказательство

- По определению $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$

Выпуклость замыкания

Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

Доказательство

- По определению $\operatorname{cl}(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$
- Покажем, что $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество для фиксированного r

Выпуклость замыкания

Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

Доказательство

- По определению $\mathrm{cl}\left(\mathcal{G}\right) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$
- Покажем, что $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество для фиксированного r
- $\mathcal{G}(r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{g}\|_2 \leq r, \forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}\} = \mathcal{G} + B(0, r)$

Выпуклость замыкания

Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

Доказательство

- По определению $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$
- Покажем, что $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество для фиксированного r
- $\mathcal{G}(r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{g}\|_2 \leq r, \forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}\} = \mathcal{G} + B(0, r)$
- $\mathcal{G}$ и $B(0, r)$ выпуклые множества

Выпуклость замыкания

Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

Доказательство

- По определению $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$
- Покажем, что $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество для фиксированного r
- $\mathcal{G}(r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{g}\|_2 \leq r, \forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}\} = \mathcal{G} + B(0, r)$
- $\mathcal{G}$ и $B(0, r)$ выпуклые множества
- $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество, как сумма Минковского выпуклых множеств

Выпуклость замыкания

Теорема

Замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

Доказательство

- По определению $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G}) = \bigcap_{r>0} \mathcal{G}(r)$
- Покажем, что $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество для фиксированного r
- $\mathcal{G}(r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{g}\|_2 \leq r, \forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}\} = \mathcal{G} + B(0, r)$
- $\mathcal{G}$ и $B(0, r)$ выпуклые множества
- $\mathcal{G}(r)$ выпуклое множество, как сумма Минковского выпуклых множеств
- $\mathrm{cl}\,(\mathcal{G})$ выпуклое множество как пересечение выпуклых множеств

Выпуклость относительной внутренности

Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \operatorname{cl}(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \operatorname{relint}(\mathcal{X})$.

Выпуклость относительной внутренности

Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$.

Доказательство

Выпуклость относительной внутренности

Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \operatorname{cl}(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \operatorname{relint}(\mathcal{X})$.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \operatorname{aff}(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0, 1)$

Выпуклость относительной внутренности

Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \mathrm{aff}\,(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0, 1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$

Выпуклость относительной внутренности

Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \operatorname{cl}(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \operatorname{relint}(\mathcal{X})$.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \operatorname{aff}(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0,1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$
- Выберем $r > 0$ такой что $B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ и точку $\mathbf{b}'$ что $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\| \leq \frac{\alpha r}{1-\alpha}$

Выпуклость относительной внутренности

Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \operatorname{cl}(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \operatorname{relint}(\mathcal{X})$.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \operatorname{aff}(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0,1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$
- Выберем $r > 0$ такой что $B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ и точку $\mathbf{b}'$ что $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\| \leq \frac{\alpha r}{1-\alpha}$
- Пусть $B = \alpha B(\mathbf{a}, r) + (1-\alpha)\mathbf{b}'$

Выпуклость относительной внутренности

Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \operatorname{cl}(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \operatorname{relint}(\mathcal{X})$.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \operatorname{aff}(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0, 1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \operatorname{relint}(\mathcal{X})$
- Выберем $r > 0$ такой что $B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ и точку $\mathbf{b}'$ что $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\| \leq \frac{\alpha r}{1-\alpha}$
- Пусть $B = \alpha B(\mathbf{a}, r) + (1-\alpha)\mathbf{b}'$
- Заметим, что справедливо равенство $B = B(\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}', \alpha r)$

Выпуклость относительной внутренности

Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \mathrm{aff}\,(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0, 1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$
- Выберем $r > 0$ такой что $B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ и точку $\mathbf{b}'$ что $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\| \leq \frac{\alpha r}{1-\alpha}$
- Пусть $B = \alpha B(\mathbf{a}, r) + (1-\alpha)\mathbf{b}'$
- Заметим, что справедливо равенство $B = B(\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}', \alpha r)$
- $\|\mathbf{c} - (\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}')\| = \|(1-\alpha)(\mathbf{b} - \mathbf{b}')\| \leq \alpha r \to \mathbf{c} \in B$

Выпуклость относительной внутренности

Предварительная теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество, $\mathbf{a} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$ и $\mathbf{b} \in \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$, тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$.

Доказательство

- Пусть $\mathcal{A} = \mathrm{aff}\,(\mathcal{X})$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$ и $\alpha \in (0, 1)$
- Покажем, что $\mathbf{c} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$
- Выберем $r > 0$ такой что $B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ и точку $\mathbf{b}'$ что $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\| \leq \frac{\alpha r}{1-\alpha}$
- Пусть $B = \alpha B(\mathbf{a}, r) + (1-\alpha)\mathbf{b}'$
- Заметим, что справедливо равенство $B = B(\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}', \alpha r)$
- $\|\mathbf{c} - (\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}')\| = \|(1-\alpha)(\mathbf{b} - \mathbf{b}')\| \leq \alpha r \to \mathbf{c} \in B$
- $B \cap \mathcal{A} = \alpha(B(\mathbf{a}, r) \cap \mathcal{A}) + (1-\alpha)\mathbf{b}' \subset \alpha\mathcal{X} + (1-\alpha)\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$

Теорема

Относительная внутренность выпуклого множества — выпуклое множество

Теорема

Относительная внутренность выпуклого множества — выпуклое множество

Доказательство

Теорема

Относительная внутренность выпуклого множества — выпуклое множество

Доказательство

- $\mathrm{relint}\,(\mathcal{X}) \subset \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$

Теорема

Относительная внутренность выпуклого множества — выпуклое множество

Доказательство

- $\text{relint}\,(\mathcal{X}) \subset \text{cl}\,(\mathcal{X})$
- По предыдущей теореме выберем $\mathbf{x} \in \text{relint}\,(\mathcal{X})\,, \mathbf{y} \in \text{relint}\,(\mathcal{X}) \;\; \subset \text{cl}\,(X)$

Теорема

Относительная внутренность выпуклого множества — выпуклое множество

Доказательство

- $\mathrm{relint}\,(\mathcal{X}) \subset \mathrm{cl}\,(\mathcal{X})$
- По предыдущей теореме выберем $\mathbf{x} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})\,, \mathbf{y} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X}) \;\subset \mathrm{cl}\,(X)$
- Точка вида $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X})$, $\alpha \in [0,1]$

Связь относительной внутренности и замыкания

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

Связь относительной внутренности и замыкания

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

Доказательство

Связь относительной внутренности и замыкания

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

Доказательство

1a $\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathcal{X} \Rightarrow \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$

Связь относительной внутренности и замыкания

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

Доказательство

1a $\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathcal{X} \Rightarrow \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$

1b Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$, рассмотрим $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$. Тогда $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \subset \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Значит $\mathbf{x} \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$ или $\mathbf{x} \in \partial \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Следовательно, $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right)$

Связь относительной внутренности и замыкания

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

Доказательство

1a $\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathcal{X} \Rightarrow \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$

1b Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$, рассмотрим $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$. Тогда $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \subset \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Значит $\mathbf{x} \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$ или $\mathbf{x} \in \partial\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Следовательно, $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right)$

2a $\mathcal{X} \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right) \Rightarrow \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right)$

Связь относительной внутренности и замыкания

Теорема

Пусть $\mathcal{X}$ выпуклое множество. Тогда

1. $\mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$
2. $\mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right) = \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

Доказательство

1a $\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathcal{X} \Rightarrow \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right) \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$

1b Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$, рассмотрим $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$. Тогда $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \subset \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Значит $\mathbf{x} \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$ или $\mathbf{x} \in \partial\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$. Следовательно, $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\left(\mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)\right)$

2a $\mathcal{X} \subset \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right) \Rightarrow \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right) \subset \mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right)$

2b Пусть $\mathbf{x} \in \mathrm{relint}\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)\right)$, рассмотрим точку $\mathbf{y}_\alpha = (1-\alpha)\mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{x}$ при $\alpha > 1$, тогда $\alpha \to 1, \mathbf{y}_\alpha \to \mathbf{x}$. Выберем достаточно близкое к 1 α_0, для которого $\mathbf{y}_{\alpha_0} \in \mathrm{cl}\left(\mathcal{X}\right)$. Тогда $\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha_0}\mathbf{y}_{\alpha_0} + \left(1 - \frac{1}{\alpha_0}\right)\mathbf{x}_0 \in \mathrm{relint}\left(\mathcal{X}\right)$

Главное

- Выпуклое множество

Главное

- Выпуклое множество
- Конусы

Главное

- Выпуклое множество
- Конусы
- Операции, сохраняющие выпуклость

Главное

- Выпуклое множество
- Конусы
- Операции, сохраняющие выпуклость
- Критерий аффинности

Главное

- Выпуклое множество
- Конусы
- Операции, сохраняющие выпуклость
- Критерий аффинности
- Топологические свойства выпуклых множеств

Главное

- Выпуклое множество
- Конусы
- Операции, сохраняющие выпуклость
- Критерий аффинности
- Топологические свойства выпуклых множеств
- Относительная внутренность и замыкание