

Методы оптимизации. Введение в теорию двойственности.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

19 марта 2019 г.

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
 - задачи безусловной оптимизации
 - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Обозначения

Задача

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathfrak{D}} f(x) &= p^* \\ \text{s.t. } g_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$

Двойственные переменные

Вектора μ и λ называются двойственными переменными.

Двойственная функция

Функция $g(\mu, \lambda) = \inf_{x \in \mathfrak{D}} L(x, \lambda, \mu)$ называется двойственной функцией Лагранжа.

Свойства двойственной функции

Вогнутость

Двойственная функция является **вогнутой** как инфимум аффинных функций по (μ, λ) вне зависимости от того, является ли исходная задача выпуклой.

Нижняя граница

Для любого λ и для $\mu \geq 0$ выполнено $g(\mu, \lambda) \leq p^*$.

Двойственная задача

$$\begin{aligned} \max g(\mu, \lambda) &= d^* \\ \text{s.t. } \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

Зачем?

- Двойственная задача выпукла независимо от того, выпукла ли прямая
- Нижняя оценка **может** достигаться

Найти двойственную функцию:

- Решение СЛУ минимальной нормы

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Линейное программирование

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Задача разбиения

$$\begin{aligned} \min \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x} \\ \text{s.t. } x_i^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Слабая и сильная двойственность

Определение

Оптимальные значения целевой функции в прямой и двойственной задаче связаны соотношением

$$d^* \leq p^*.$$

Если $d^* < p^*$, то свойство называют слабой двойственностью.
Если $d^* = p^*$, то — сильной двойственностью.

Замечание

Слабая двойственность есть всегда по построению двойственной задачи.

Вопросы

- При каких условиях выполняется сильная двойственность?
- Как использовать двойственность для проверки оптимальности?

Критерий субоптимальности

По построению $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$, поэтому
 $f_0(x) - p^* \leq f_0(x) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \varepsilon$.

Определение

Разность $f_0(x) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ называется *двойственным зазором* и является оценкой сверху для разности текущего и оптимального значения функции.

Способы использования:

- критерий остановки в итерационном процессе
- теоретическая оценка сходимости алгоритма
- проверка оптимальности данной точки

Теорема

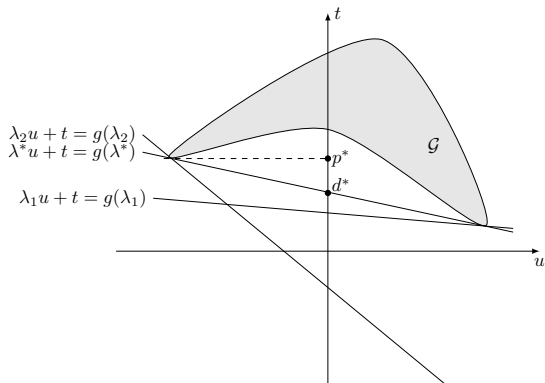
Если задача выпукла и существует x , лежащий внутри допустимой области, т.е. ограничения типа неравенств выполнены как строгие неравенства, то выполнено свойство сильной двойственности.

- Решение СЛАУ наименьшей нормы
- Линейное программирование
- Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями

Геометрическая интерпретация

$$\min_x f_0(x), \text{ where } f_1(x) \leq 0.$$

$$g(\lambda) = \inf_{(u,t) \in \mathcal{G}} (t + \lambda u) \quad \mathcal{G} = \{(f_1(x), f_0(x)) \mid x \in \mathcal{D}\}$$



- $\lambda = 0$
- λ^* — оптимальное значение
- $\lambda > \lambda^*$

Условия дополняющей нежёсткости

Пусть \mathbf{x}^* и $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ решения прямой и двойственной задачи. То есть

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^*) &= g(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq \\ f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) &\leq \\ f(\mathbf{x}^*), \quad \boldsymbol{\mu} &\geq 0 \end{aligned}$$

Условия дополняющей нежёсткости

$$\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

Для каждого неравенства

- либо множитель Лагранжа равен нулю
- либо оно активно.

Условия Каруша-Куна-Таккера

Необходимость: если x^* и (μ^*, λ^*) оптимальные прямые и двойственные переменные и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $g_i(x^*) = 0$ — допустимость в прямой задаче
2. $h_j(x^*) \leq 0$ — допустимость в прямой задаче
3. $\mu_j^* \geq 0$ — допустимость в двойственной задаче
4. $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ — условие дополняющей нежёсткости
5. $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$ — стационарность лагранжиана по прямым переменным

Сильная двойственность vs. условие Слейтера

Теорема

Если задача выпукла и выполнено условие Слейтера, то выполняется сильная двойственность

Доказательство на доске

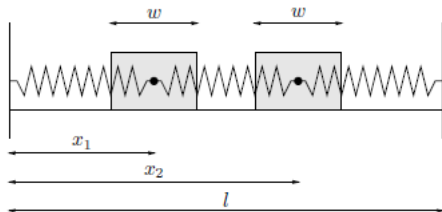
Если задача выпукла и для точек x^* , (μ^*, λ^*) выполнены условия ККТ, то эти точки решения прямой и двойственной задачи с нулевым зазором двойственности

1. L выпуклая функция
2. Стационарность L – достаточное условие минимума
3. Зазор двойственности равен 0
4. Оптимальность прямых и двойственных переменных

Итог для выпуклых задач

1. ККТ \Rightarrow оптимальность и сильная двойственность
2. Оптимальность и условие Слейтера \Rightarrow оптимальность и сильная двойственность \Rightarrow ККТ

Механическая интерпретация



Поиск устойчивого положения системы:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} & \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(l - x_2)^2 \\ \text{s.t.} & \frac{w}{2} - x_1 \leq 0 \\ & w + x_1 - x_2 \leq 0 \\ & \frac{w}{2} - l + x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

- Отрицательная энтропия при линейных ограничениях

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \end{aligned}$$

- QCQP
- Минимизация нормы невязки в линейной задаче аппроксимации

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$$

- Полуопределённое программирование (SDP)
- Важность условия Слейтера

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}, y > 0} \quad & e^{-x} \\ \text{s.t.} \quad & x^2/y \leq 0 \end{aligned}$$

- Двойственная задача: что это такое и зачем она нужна?
- Сильная и слабая двойственность
- Условия Слейтера
- Геометрическая и механическая интерпретации