

Оптимизация I

Семинар 1: Постановки задач оптимизации

Александр Катруца



10 февраля 2020 г.

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи
5. Реализация алгоритма и проверка его корректности

Безусловная задача оптимизации

Дана функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

- ▶ Простейший тип задач
- ▶ Но даже такие задачи не всегда легко решить
- ▶ Начнём далее именно с анализа задач безусловной оптимизации

Регрессия

Дан набор пар (\mathbf{x}_i, y_i) , необходимо восстановить функцию $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ так чтобы $y_i \approx f(\mathbf{x}_i)$.

Регрессия

Дан набор пар (\mathbf{x}_i, y_i) , необходимо восстановить функцию $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ так чтобы $y_i \approx f(\mathbf{x}_i)$.

- ▶ Что надо дополнительно задать? (Вспомните курс по машинному обучению)

Регрессия

Дан набор пар (\mathbf{x}_i, y_i) , необходимо восстановить функцию $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ так чтобы $y_i \approx f(\mathbf{x}_i)$.

- ▶ Что надо дополнительно задать? (Вспомните курс по машинному обучению)
- ▶ Примеры

Регрессия

Дан набор пар (\mathbf{x}_i, y_i) , необходимо восстановить функцию $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ так чтобы $y_i \approx f(\mathbf{x}_i)$.

- ▶ Что надо дополнительно задать? (Вспомните курс по машинному обучению)
- ▶ Примеры
- ▶ Свойства

Регрессия

Дан набор пар (x_i, y_i) , необходимо восстановить функцию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ так чтобы $y_i \approx f(x_i)$.

- ▶ Что надо дополнительно задать? (Вспомните курс по машинному обучению)
- ▶ Примеры
- ▶ Свойства

Q: что делать, если значения x_i даны неточно?

Оценка параметров распределений

Даны некоторые векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$. Надо найти из какого распределения они взяты.

Оценка параметров распределений

Даны некоторые векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$. Надо найти из какого распределения они взяты.

Основной метод: метод максимального правдоподобия

Оценка параметров распределений

Даны некоторые векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$. Надо найти из какого распределения они взяты.

Основной метод: метод максимального правдоподобия

- ▶ Как параметризовать распределение?

Оценка параметров распределений

Даны некоторые векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$. Надо найти из какого распределения они взяты.

Основной метод: метод максимального правдоподобия

- ▶ Как параметризовать распределение?
- ▶ Что такое правдоподобие?

Оценка параметров распределений

Даны некоторые векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$. Надо найти из какого распределения они взяты.

Основной метод: метод максимального правдоподобия

- ▶ Как параметризовать распределение?
- ▶ Что такое правдоподобие?
- ▶ Пример для нормального распределения

Условная задача оптимизации

$$\begin{array}{ll}\min & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & \mathbf{x} \in \mathcal{D}\end{array}$$

- ▶ Дискретные задачи, например $\mathcal{D} = \{0, 1\}^n$ или $\mathcal{D} = \{-1, 1\}^n$
- ▶ Непрерывные задачи

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \mid f_i(\mathbf{x}) = 0, g_k(\mathbf{x}) \leq 0\}$$

Регрессия по неполным данным

Дан набор данных (x_i, y_i) , $y_i \in \mathbb{R}$. Однако теперь известно, что только первые m измерений дали точное значение y_i . Про остальные известна лишь оценка снизу. Необходимо найти модель, по которой можно восстановить имеющиеся данные и учесть данные оценки на отсутствующие.

Регрессия по неполным данным

Дан набор данных (x_i, y_i) , $y_i \in \mathbb{R}$. Однако теперь известно, что только первые m измерений дали точное значение y_i . Про остальные известна лишь оценка снизу. Необходимо найти модель, по которой можно восстановить имеющиеся данные и учесть данные оценки на отсутствующие.

- ▶ Какие переменные надо ввести?

Регрессия по неполным данным

Дан набор данных (x_i, y_i) , $y_i \in \mathbb{R}$. Однако теперь известно, что только первые m измерений дали точное значение y_i . Про остальные известна лишь оценка снизу. Необходимо найти модель, по которой можно восстановить имеющиеся данные и учесть данные оценки на отсутствующие.

- ▶ Какие переменные надо ввести?
- ▶ Какая целевая функция?

Регрессия по неполным данным

Дан набор данных (x_i, y_i) , $y_i \in \mathbb{R}$. Однако теперь известно, что только первые m измерений дали точное значение y_i . Про остальные известна лишь оценка снизу. Необходимо найти модель, по которой можно восстановить имеющиеся данные и учесть данные оценки на отсутствующие.

- ▶ Какие переменные надо ввести?
- ▶ Какая целевая функция?
- ▶ Какие ограничения?

Toy metric learning

Дан набор данных (x_i, y_i) , где y_i — класс объекта x_i . Надо получить псевдометрику такую, что объекты одного класса окажутся ближе, чем объекты разных классов.

Toy metric learning

Дан набор данных (x_i, y_i) , где y_i — класс объекта x_i . Надо получить псевдометрику такую, что объекты одного класса окажутся ближе, чем объекты разных классов.

- ▶ Какая параметризация?

Toy metric learning

Дан набор данных (x_i, y_i) , где y_i — класс объекта x_i . Надо получить псевдометрику такую, что объекты одного класса окажутся ближе, чем объекты разных классов.

- ▶ Какая параметризация?
- ▶ Какая целевая функция?

Toy metric learning

Дан набор данных (x_i, y_i) , где y_i — класс объекта x_i . Надо получить псевдометрику такую, что объекты одного класса окажутся ближе, чем объекты разных классов.

- ▶ Какая параметризация?
- ▶ Какая целевая функция?
- ▶ Какие ограничения?

Задача про склад

Есть список складов и список магазинов. Надо организовать доставку товаров из складов так, чтобы все запросы магазинов были удовлетворены. Как это сделать?

- ▶ Что нам дано?

Задача про склад

Есть список складов и список магазинов. Надо организовать доставку товаров из складов так, чтобы все запросы магазинов были удовлетворены. Как это сделать?

- ▶ Что нам дано?
- ▶ Что надо найти?

Задача про склад

Есть список складов и список магазинов. Надо организовать доставку товаров из складов так, чтобы все запросы магазинов были удовлетворены. Как это сделать?

- ▶ Что нам дано?
- ▶ Что надо найти?
- ▶ Какая целевая функция?

Определение расписания процессора

1. Задан пул задач, необходимое время старта и окончания, а также объём работы необходимой для решения каждой задачи
2. Даны ограничения на скорость процессора и границы её изменения между соседними моментами времени
3. Надо составить расписание выполнения задач так, чтобы потребляемая мощность была минимальна

Определение расписания процессора

1. Задан пул задач, необходимое время старта и окончания, а также объём работы необходимой для решения каждой задачи
 2. Даны ограничения на скорость процессора и границы её изменения между соседними моментами времени
 3. Надо составить расписание выполнения задач так, чтобы потребляемая мощность была минимальна
- Что дано?

Определение расписания процессора

1. Задан пул задач, необходимое время старта и окончания, а также объём работы необходимой для решения каждой задачи
 2. Даны ограничения на скорость процессора и границы её изменения между соседними моментами времени
 3. Надо составить расписание выполнения задач так, чтобы потребляемая мощность была минимальна
- ▶ Что дано?
 - ▶ Как задать расписание?

Определение расписания процессора

1. Задан пул задач, необходимое время старта и окончания, а также объём работы необходимой для решения каждой задачи
 2. Даны ограничения на скорость процессора и границы её изменения между соседними моментами времени
 3. Надо составить расписание выполнения задач так, чтобы потребляемая мощность была минимальна
- ▶ Что дано?
 - ▶ Как задать расписание?
 - ▶ Как задать целевую функцию?

Определение расписания процессора

1. Задан пул задач, необходимое время старта и окончания, а также объём работы необходимой для решения каждой задачи
 2. Даны ограничения на скорость процессора и границы её изменения между соседними моментами времени
 3. Надо составить расписание выполнения задач так, чтобы потребляемая мощность была минимальна
- ▶ Что дано?
 - ▶ Как задать расписание?
 - ▶ Как задать целевую функцию?
 - ▶ Какие ограничения?

Лучевая терапия

Распределить интенсивность облучения участка ткани так, чтобы максимизировать поражения заданной области и минимизировать поражение остальных клеток.

Лучевая терапия

Распределить интенсивность облучения участка ткани так, чтобы максимизировать поражения заданной области и минимизировать поражение остальных клеток.

- ▶ Какие переменные даны, а какие являются решением?

Лучевая терапия

Распределить интенсивность облучения участка ткани так, чтобы максимизировать поражения заданной области и минимизировать поражение остальных клеток.

- ▶ Какие переменные даны, а какие являются решением?
- ▶ Какие есть ограничения?

Лучевая терапия

Распределить интенсивность облучения участка ткани так, чтобы максимизировать поражения заданной области и минимизировать поражение остальных клеток.

- ▶ Какие переменные даны, а какие являются решением?
- ▶ Какие есть ограничения?
- ▶ Какая целевая функция?

Выводы

- ▶ Типы задач оптимизации
- ▶ Шаги для формализации задачи
- ▶ Неоднозначность формализации