Выпуклый анализ и оптимизация
Лекция 4: Введение в теорию двойственности

Александр Катруца

Школа анализа данных
Яндекс

1 октября 2021 г.

Задача оптимизации с функциональными ограничениями

$$
\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

dom $f_0 = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f_0(\mathbf{x}^*) = p^*$

Q: как сформулировать условия оптимальности для задачи в таком виде?

Задача оптимизации с функциональными ограничениями

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

dom $f_0 = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f_0(\mathbf{x}^*) = p^*$

Q: как сформулировать условия оптимальности для задачи в таком виде?

Лагранжиан $L : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(\mathbf{x})$$

- λ_i – множители Лагранжа для ограничений $g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, m$
- μ_j – множители Лагранжа для ограничений $h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = 1, \ldots, p$

Двойственная функция

Определение

Функция $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ такая что

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(\mathbf{x}) \right)$$

называется *двойственной функцией*

Двойственная функция

Определение

Функция $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ такая что

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(\mathbf{x}) \right)$$

называется *двойственной функцией*

Свойства

- Всегда вогнута
- Может равняться $-\infty$ для некоторых $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Нижняя оценка оптимального значения функции

Утверждение

Если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Нижняя оценка оптимального значения функции

Утверждение

Если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Доказательство

Нижняя оценка оптимального значения функции

Утверждение

Если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Доказательство

- Если $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}$ и лежит в допустимом множестве, а также $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда

$$f_0(\hat{\mathbf{x}}) \geq L(\hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \geq \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

Нижняя оценка оптимального значения функции

Утверждение

Если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Доказательство

- Если $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}$ и лежит в допустимом множестве, а также $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда

$$f_0(\hat{\mathbf{x}}) \geq L(\hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \geq \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

- Минимизируя обе части по всем допустимым $\hat{\mathbf{x}}$, получим

$$p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

Нижняя оценка оптимального значения функции

Утверждение

Если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Доказательство

- Если $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}$ и лежит в допустимом множестве, а также $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда

$$f_0(\hat{\mathbf{x}}) \geq L(\hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \geq \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

- Минимизируя обе части по всем допустимым $\hat{\mathbf{x}}$, получим

$$p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

Q: что теперь надо сделать с двойственной функцией, чтобы получить наилучшее приближение к p^*?

Двойственная задача

Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{\mu} \geq 0$$

Двойственная задача

Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{\mu} \geq 0$$

- Всегда выпуклая задача

Двойственная задача

Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{\mu} \geq 0$$

- Всегда выпуклая задача
- Обозначим $d^* = g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$

Двойственная задача

Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$
\begin{aligned}
&\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\
\text{s.t. } &\boldsymbol{\mu} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Всегда выпуклая задача
- Обозначим $d^* = g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$
- Лучшая нижняя оценка для p^*, которую может дать двойственная функция

Двойственная задача

Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\begin{aligned} &\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{s.t. } &\boldsymbol{\mu} \geq 0 \end{aligned}$$

- Всегда выпуклая задача
- Обозначим $d^* = g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$
- Лучшая нижняя оценка для p^*, которую может дать двойственная функция
- Вектора $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ называются допустимыми для двойственной задачи, если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$ и $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathrm{dom}\ g$

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \le p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \le p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов
- Может выполняться и для **невыпуклых** задач

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \le p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов
- Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов
- Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

Зазор двойственности: $f_0(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов
- Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

Зазор двойственности: $f_0(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

- Оценка точности решения

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов
- Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

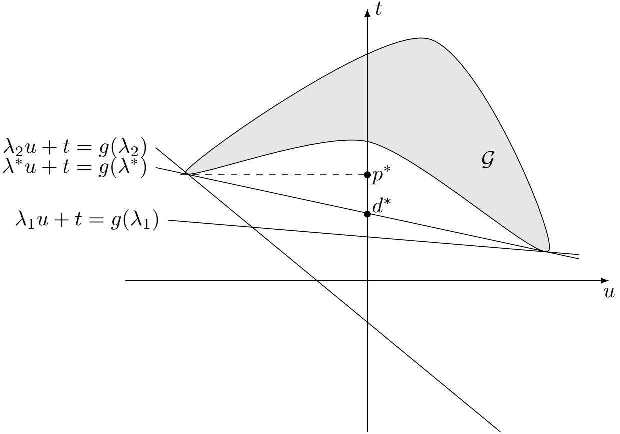
Зазор двойственности: $f_0(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

- Оценка точности решения
- Доказательство корректности и сходимости алгоритма

Геометрическая интерпретация

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \qquad g(\lambda) = \inf_{(u,t) \in \mathcal{G}} (t + \lambda u)$$

$$\text{s.t. } f_1(\mathbf{x}) \le 0 \qquad \mathcal{G} = \{(f_1(\mathbf{x}), f_0(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{D}\}$$



Условие Слейтера и сильная двойственность

Условие Слейтера

Говорят, что выполнено условие Слейтера, если
$\exists \bar{\mathbf{x}} \in \text{int } \mathcal{D}: \; f_i(\bar{\mathbf{x}}) < 0, \; \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$

Теорема

Сильная двойственность выполняется для выпуклой задачи

$$\begin{aligned} &\min f_0(\mathbf{x}) \\ \textit{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \le 0, \; i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \; \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n} \end{aligned}$$

если выполнено условие Слейтера.

Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,
$\mathbf{x}^*$ – решение прямой задачи,
$(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ – решение двойственной задачи, тогда

Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,
$\mathbf{x}^*$ – решение прямой задачи,
$(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ – решение двойственной задачи, тогда

$$
\begin{aligned}
f_0(\mathbf{x}^*) = & g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}) \right) \\
& \leq f_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) \\
& \leq f_0(\mathbf{x}^*)
\end{aligned}
$$

Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,
$\mathbf{x}^*$ – решение прямой задачи,
$(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ – решение двойственной задачи, тогда

$$
\begin{aligned}
f_0(\mathbf{x}^*) =& g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}) \right) \\
&\le f_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) \\
&\le f_0(\mathbf{x}^*)
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{x}^*$ минимизирует $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$

Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,
$\mathbf{x}^*$ – решение прямой задачи,
$(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ – решение двойственной задачи, тогда

$$
\begin{aligned}
f_0(\mathbf{x}^*) =& g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}) \right) \\
&\leq f_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) \\
&\leq f_0(\mathbf{x}^*)
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{x}^*$ минимизирует $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$
- Условие дополняющей нежёсткости
  $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0,\ j = 1, \ldots, p$

$$
\mu_j^* > 0 \Rightarrow h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad h_j(\mathbf{x}^*) < 0 \Rightarrow \mu_j^* = 0
$$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Последнее равенство выполнено в силу

$$\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$$

и необходимого условия минимума.

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Последнее равенство выполнено в силу

$$\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$$

и необходимого условия минимума.

Замечание

Сначала эти условия были известны как условия Куна-Таккера (работа 1951 г.). Потом обнаружили, что Вильям Каруш вывел их в своей дипломной работе 1939 г.

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из ККТ $\to$ $\hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из ККТ $\to$ $\hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$
- $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \to L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по $\mathbf{x}$

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из ККТ $\to \hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \le 0$
- $\hat{\boldsymbol{\mu}} \ge 0 \to L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по $\mathbf{x}$
- Последнее условие $\to \hat{\mathbf{x}}$ минимизирует L: $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^p \hat{\boldsymbol{\mu}}_j h_j(\hat{\mathbf{x}})$

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из ККТ $\to \hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$
- $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \to L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по $\mathbf{x}$
- Последнее условие $\to \hat{\mathbf{x}}$ минимизирует L: $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^p \hat{\boldsymbol{\mu}}_j h_j(\hat{\mathbf{x}})$
- Из условий дополняющей нежёсткости $\hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ следует, что $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}})$

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из ККТ $\to \hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$
- $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \to L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по $\mathbf{x}$
- Последнее условие $\to \hat{\mathbf{x}}$ минимизирует L: $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^p \hat{\boldsymbol{\mu}}_j h_j(\hat{\mathbf{x}})$
- Из условий дополняющей нежёсткости $\hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ следует, что $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}})$
- Выполнена сильная двойственность

KKT для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия KKT, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из KKT $\to$ $\hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$
- $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \to L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по $\mathbf{x}$
- Последнее условие $\to$ $\hat{\mathbf{x}}$ минимизирует L: $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{p} \hat{\boldsymbol{\mu}}_j h_j(\hat{\mathbf{x}})$
- Из условий дополняющей нежёсткости $\hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ следует, что $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}})$
- Выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера. Тогда $\mathbf{x}$ решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ такие, что для них выполнены условия ККТ

KKT для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера. Тогда $\mathbf{x}$ решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ такие, что для них выполнены условия KKT

Доказательство

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера. Тогда $\mathbf{x}$ решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ такие, что для них выполнены условия ККТ

Доказательство

- Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума p^*

KKT для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера. Тогда $\mathbf{x}$ решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ такие, что для них выполнены условия ККТ

Доказательство

- Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума p^*
- Необходимость выполнения ККТ следует из утверждения для общего случая

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера. Тогда $\mathbf{x}$ решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ такие, что для них выполнены условия ККТ

Доказательство

- Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума p^*
- Необходимость выполнения ККТ следует из утверждения для общего случая
- Достаточность следует из утверждения 1

Переформулировка задачи

- Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи

Переформулировка задачи

- Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Переформулировка задачи

- Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Стандартные приёмы

Переформулировка задачи

- Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Стандартные приёмы

- Введение новых переменных

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \to \begin{array}{c} \min\limits_{(\mathbf{x},\mathbf{y})} \|\mathbf{y}\| \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{y} \end{array}$$

Переформулировка задачи

- Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Стандартные приёмы

- Введение новых переменных

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \to \begin{array}{c} \min\limits_{(\mathbf{x},\mathbf{y})} \|\mathbf{y}\| \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{y} \end{array}$$

- Превращение явных ограничений в неявные

$$\begin{array}{c} \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } -1 \leq \mathbf{x} \leq 1 \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array} \to \begin{array}{c} \min\limits_{-1\leq\mathbf{x}\leq 1} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array}$$

Двойственная задача к LP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

Двойственная задача к LP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Лагранжиан:
$L = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$

Двойственная задача к LP

- Исходная задача

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Лагранжиан:
  $L = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$
- Двойственная функция

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}, & \mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} = 0, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Двойственная задача к LP

- Исходная задача

$$\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$
$$\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

- Лагранжиан:
$L = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^\top(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$
- Двойственная функция

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}, & \mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} = 0, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Двойственная задача

$$\min \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$$
$$\text{s.t. } \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \geq 0$$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}^* = 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$
5. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$
5. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Q: как по решению двойственной задачи восстановить решение прямой?

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} + \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$
5. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Q: как по решению двойственной задачи восстановить решение прямой?

Утверждение

Если допустимое множество прямой задачи LP непусто, то выполнена сильная двойственность.

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geq 0\}$
- Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$
- Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$
- Двойственная задача

$$
\begin{gathered}
\min \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\
\text{s.t. } \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \geq 0
\end{gathered}
$$

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$
- Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$
- Двойственная задача

$$\min \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$$
$$\text{s.t. } \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \geq 0$$

- Пусть $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \theta \mathbf{p}$, $\theta > 0$, тогда $\theta \mathbf{p}^\top \mathbf{b} \to -\infty$ и $\theta \mathbf{A}^\top \mathbf{p} + \mathbf{c} \geq 0$

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$
- Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$
- Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
&\min \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Пусть $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \theta \mathbf{p}$, $\theta > 0$, тогда $\theta \mathbf{p}^\top \mathbf{b} \to -\infty$ и $\theta \mathbf{A}^\top \mathbf{p} + \mathbf{c} \geq 0$
- Двойственная задача не ограничена

Двойственность для задачи с обобщёнными неравенствами

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & g_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = 1, \dots, m \\
& h_j(\mathbf{x}) \preceq_K 0, \ j = 1, \dots, p
\end{aligned}
$$

Двойственность для задачи с обобщёнными неравенствами

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \dots, m \\
& h_j(\mathbf{x}) \preceq_K 0, \; j = 1, \dots, p
\end{aligned}
$$

Лагранжиан

$$
L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f_0(\mathbf{x}) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \rangle
$$

Двойственность для задачи с обобщёнными неравенствами

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_j(\mathbf{x}) \preceq_K 0, \; j = 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

Лагранжиан

$$
L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f_0(\mathbf{x}) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \rangle
$$

Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
&\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\
\text{s.t. } & \boldsymbol{\mu} \succeq_{K^*} 0
\end{aligned}
$$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \succeq_{K^*} 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \succeq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \succeq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \succeq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия оптимальности

Все утверждения для обычных скалярных неравенств (то есть для конуса $\mathbb{R}^n_+$) переносятся на случай произвольного конуса K с точностью до отмеченных отличий.

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \succeq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия оптимальности

Все утверждения для обычных скалярных неравенств (то есть для конуса $\mathbb{R}^n_+$) переносятся на случай произвольного конуса K с точностью до отмеченных отличий.

Условие Слейтера для выпуклой задачи

Говорят, что выполнено условие Слейтера, если найдётся $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}$ такой что $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ и $f_i(\hat{\mathbf{x}}) \prec_K 0$

Двойственность для задачи конической оптимизации

- Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \geq_K 0
\end{aligned}
$$

Двойственность для задачи конической оптимизации

- Стандартная форма

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq_K 0 \end{aligned}$$

- Двойственная задача (аналогично LP)

$$\begin{aligned} &\max \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} \leq_{K^*} \mathbf{c} \end{aligned}$$

Двойственность для задачи конической оптимизации

- Стандартная форма

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq_K 0 \end{aligned}$$

- Двойственная задача (аналогично LP)

$$\begin{aligned} & \max \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t. } & \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} \leq_{K^*} \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Если конус K самосопряжённый мы автоматически знаем, как выглядит двойственная задача!

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0
\end{aligned}
$$

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \mathrm{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\mathrm{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\
\text{s.t. } &\mathbf{C} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{A}_i \succeq 0
\end{aligned}
$$

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\
\text{s.t. } &\mathbf{C} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{A}_i \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Условие Слейтера: найдётся матрица $\hat{\mathbf{X}}$ такая что $\hat{\mathbf{X}} \succ 0$ и $\operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i$

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \mathrm{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X})\\
\text{s.t. } &\mathrm{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i\\
&\mathbf{X} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}\\
\text{s.t. } &\mathbf{C} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{A}_i \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Условие Слейтера: найдётся матрица $\hat{\mathbf{X}}$ такая что $\hat{\mathbf{X}} \succ 0$ и $\mathrm{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i$
- Отличие от LP: непустого допустимого множества НЕдостаточно для сильной двойственности!

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
&\min x_2 \\
\text{s.t.}\ &\begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0
\end{aligned}$$

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\min x_2 \\ \text{s.t.} \; &\begin{bmatrix} x_2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

- Допустимое множество:
  $x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2+1) \geq 0, (x_2+1)(-x_2^2) \geq 0$

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\min x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} x_2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0$$

- Допустимое множество: $x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2+1) \geq 0, (x_2+1)(-x_2^2) \geq 0$
- $p^* = 0$

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$
\begin{aligned}
&\min x_2 \\
\text{s.t. } &\begin{bmatrix} x_2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество: $x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2+1) \geq 0, (x_2+1)(-x_2^2) \geq 0$
- $p^* = 0$

Двойственная задача имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\min -y_{11} \\
\text{s.t. } &\mathbf{Y} \succeq 0 \\
&y_{11} + y_{32} + y_{23} = 1 \\
&y_{22} = 0
\end{aligned}
$$

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$
\begin{aligned}
&\min x_2 \\
\text{s.t.}\ &\begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество: $x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2+1) \geq 0, (x_2+1)(-x_2^2) \geq 0$
- $p^* = 0$

Двойственная задача имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\min -y_{11} \\
\text{s.t.}\ &\mathbf{Y} \succeq 0 \\
&y_{11} + y_{32} + y_{23} = 1 \\
&y_{22} = 0
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество: $y_{11} \geq 0, y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32} \geq 0$

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$
\begin{aligned}
&\min x_2 \\
\text{s.t. } &\begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество: $x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2+1) \geq 0, (x_2+1)(-x_2^2) \geq 0$
- $p^* = 0$

Двойственная задача имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\min -y_{11} \\
\text{s.t. } &\mathbf{Y} \succeq 0 \\
&y_{11} + y_{32} + y_{23} = 1 \\
&y_{22} = 0
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество: $y_{11} \geq 0, y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32} \geq 0$
- $d^* = -1$

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач
- Преобразования задач для получения двойственных

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач
- Преобразования задач для получения двойственных
- Двойственность для LP

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач
- Преобразования задач для получения двойственных
- Двойственность для LP
- Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач
- Преобразования задач для получения двойственных
- Двойственность для LP
- Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами
- Коническая двойственность

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач
- Преобразования задач для получения двойственных
- Двойственность для LP
- Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами
- Коническая двойственность
- SDP vs. LP