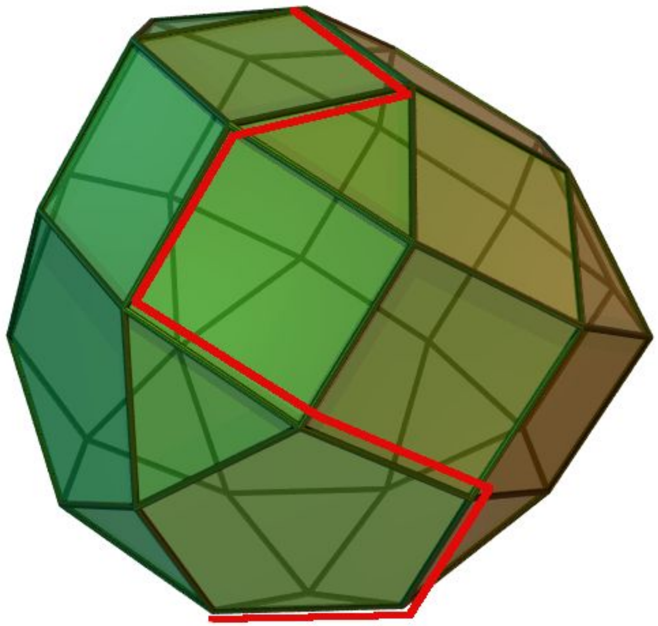
Сравнение методов обновления LU-разложения для разреженных матриц типа ранг-1

Команда «LULU»
Артём Шейнов, Максим Смирнов, Марк Миргалеев, Семён Савоськин

Симплекс метод

- Задача линейного программирования:

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \langle c, x \rangle$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b$$
$$\alpha \leq x \leq \beta$$

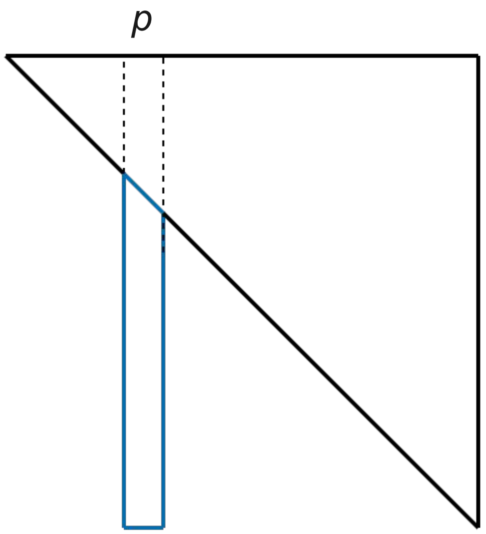


- Одним из методов решения является модифицированный симплекс метод
  - Выбор базисных векторов
  - Вычисляем остаток целевой ф-ии
  - Если целевая функция не уменьшилась, то решение найдено
  - Иначе заменяем базисный вектор, соответствующая переменная которой дает меньший вклад

Обновление LU разложения

- Обновляем матрицу B базисных векторов
- Заменяем вектор, соответствующая переменная которой дает меньший вклад
- Для вычислений достаточно обновить матрицу U

$$PBQ' = LU$$
$$B = B + (a_q - Be_p)\,e_p'$$
$$L^{-1}B = U + \left(L^{-1}a_q - Ue_p\right)e_p'$$
$$g = L^{-1}a_q$$



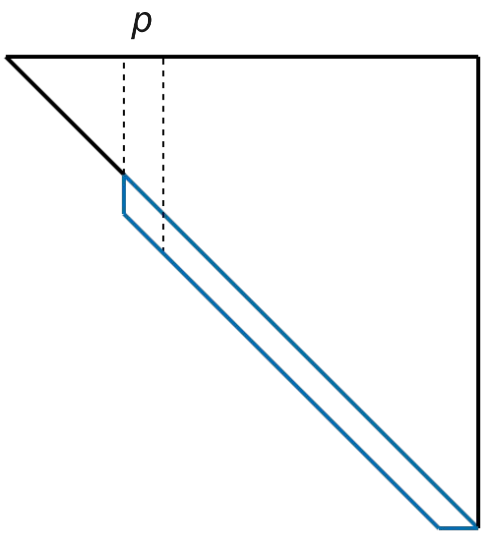
Матрица $L^{-1}B$

Метод Бартельса-Голуба

Описание метода

1. Переставить шип в последнюю позицию
2. Занулить элементы под диагональю
   2.1. Выбрать опорный элемент из диагонального и поддиагонального для лучшей устойчивости
   2.2. При необходимости поменять строки

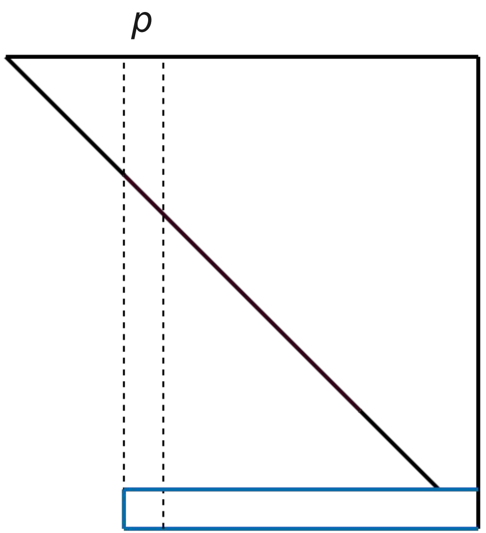
Сложность метода: $O\left(n^2\right)$



Матрица после перестановки столбцов

Метод Форреста-Томлина

Описание метода
1. Переставить шип в последнюю позицию 2. Переставить строку на *p* позицию в конец 3. Занулить элементы в последней строке
Сложность метода: $O\left(n^2\right)$



Матрица после перестановки
столбцов и строк

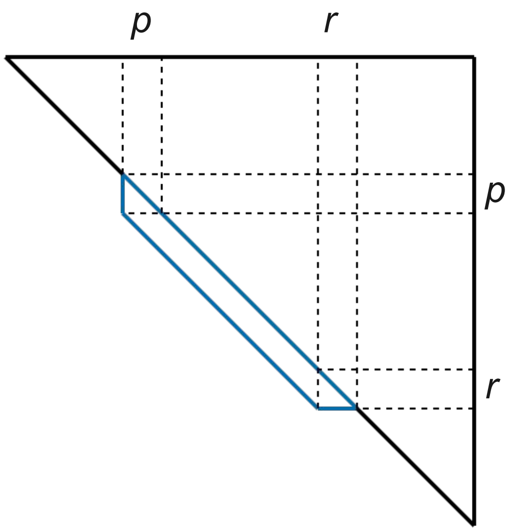
Метод Рида

Описание метода

Пусть шип имеет высоту до позиции *r*

1. Переставить шип в позицию *r*
2. Найти все столбцы «одиночки» и совершить «поворот» матрицы так, чтобы <u>столбец</u> перешел в начало «бугра» — это уменьшит его размер
3. Найти все строки «одиночки» и совершить «поворот» матрицы так, чтобы <u>строка</u> перешла в конец «бугра» — это уменьшит его размер
4. Занулить элементы под диагональю, если таковые имеются

Сложность метода: $O\left(n^2\right)$



Матрица после перестановки столбцов и «поворотов» матрицы

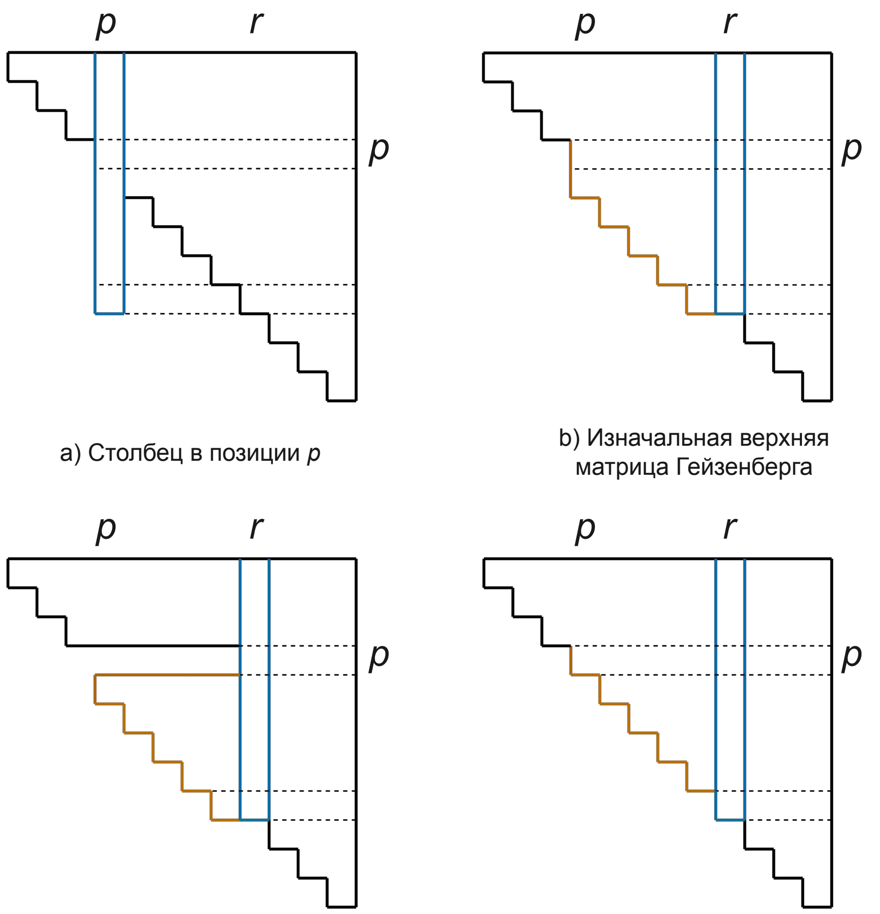
Метод Суль

Описание метода

Пусть шип имеет высоту до позиции *r*

1. Переставить шип в позицию *r*
2. Занулить все элементы строки *p* от позиции *p* до позиции *r* с помощью строк (*p*+1), …, (*r*-1)
3. Переставить строку *p* в позицию *r*

Сложность метода: $O\left(n^2\right)$



a) Столбец в позиции *p*

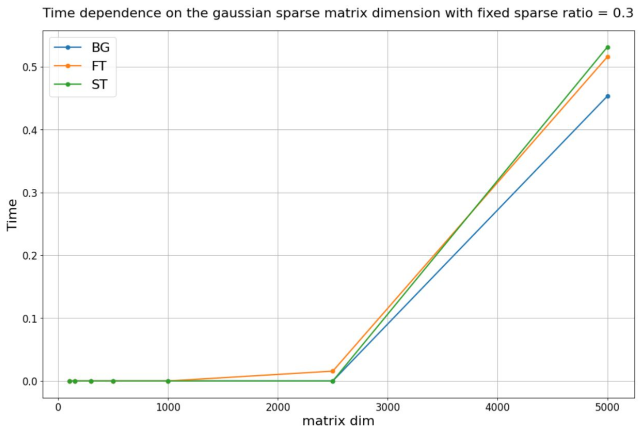
b) Изначальная верхняя матрица Гейзенберга

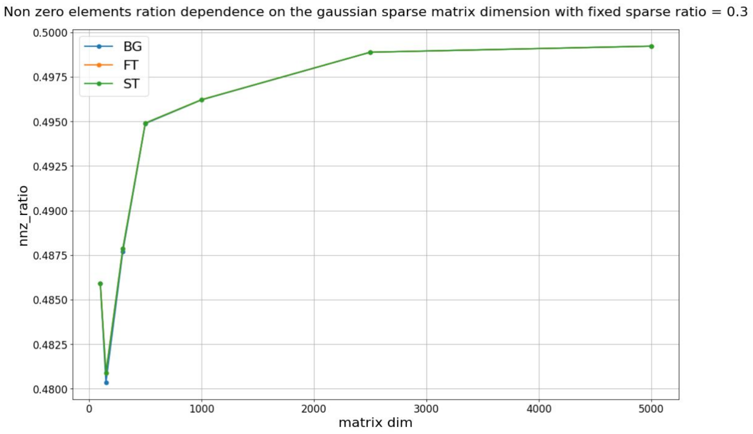
c) Верхняя матрица Гейзенберга после зануления строки

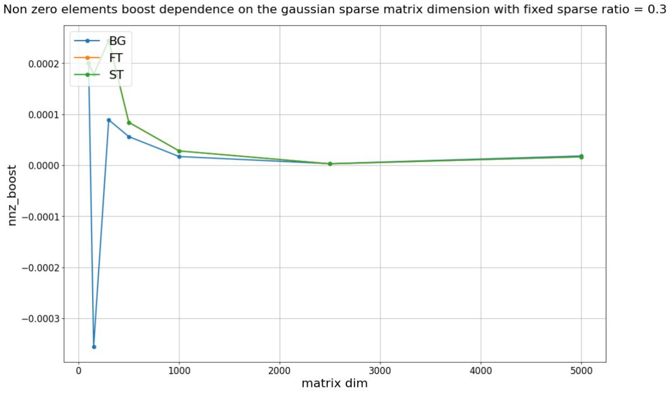
d) Верхнетреугольная матрица после перестановки строк

Результаты

Размер матрицы

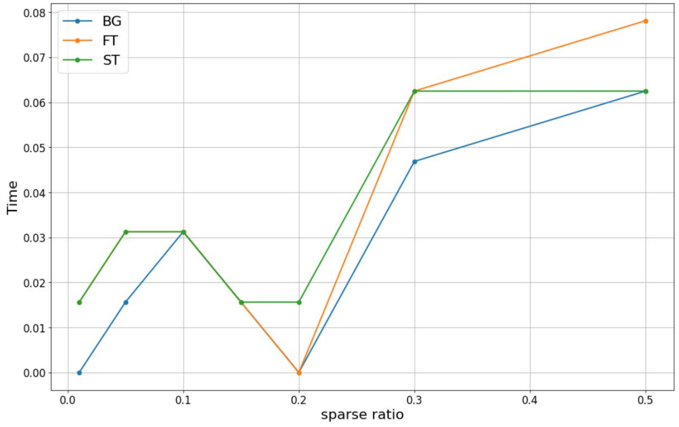




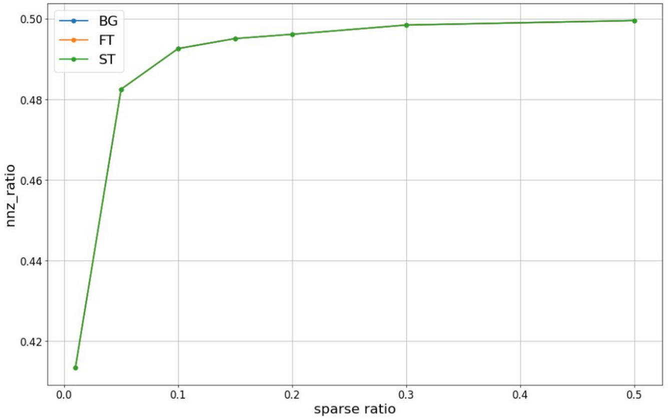


Результаты
Степень разреженности матрицы

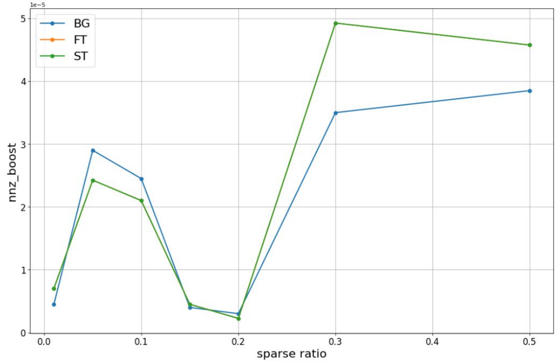
Time dependence on the gaussian matrix sparse ratio with fixed dimension = (2000, 2000)



Non-zero elements ration dependence on the gaussian matrix sparse ratio with fixed dimension = (2000, 2000)



Non-zero elements boost dependence on the gaussian matrix sparse ratio with fixed dimension = (2000, 2000)



Выводы

- Реализовали 3 метода замены столбцов в разреженных матрицах
  - Бартельса-Голуба
  - Фореста-Томлина
  - Суль
- Суль показал себя лучше всех
- Метод Рида в разы медленнее при незначительных улучшениях и слишком сложная техническая реализация с поворотами матрицы

Ссылки

- Репозиторий
  - https://github.com/Markm536/AIM_NLA_proj2
- Материалы:
  - https://link.springer.com/article/10.1007/BF02025534
  - https://staff.ulsu.ru/semushin/_index/_pilocus/_gist/docs/mycourseware/9-linprogram/6-tools/simplex-DemoCD/_SIMPLEX-DemoTools/teor3/chapter2.htm#Figure%203
  - https://www.mathnet.ru/links/f0b4bfb866bd2d79b639d97c2338b280/sjvm587.pdf