Обновление SVD разложения для рекоммендательных систем

Елизавета Кияко/Фуад Бабаев

AI MASTERS

kiyako_2002@mail.ru / f.babaev@yahoo.com
GitHub

6 ноября 2023 г.

Введение

1. **"О чём"**
   В данной презентации будет представлена реализация быстрого обновления SVD разложения с применением в рекоммендательных системах.
2. **"Зачем"**
   С ростом объёмов данных и динамичным изменением пользовательских предпочтений важно иметь возможность оперативно обновлять рекомендательные системы без полного пересчёта модели.
3. **"Гипотеза"**
   Предполагается, что использование техники быстрого обновления SVD позволит значительно сократить время, необходимое для интеграции новой информации, и улучшит масштабируемость рекомендательных систем.

Применение

Нами был взять датасет MovieLens 10M, состоящий из зарегистрированных взаимодействий пользователей сервиса с фильмами, которые предлагал сервис. Мы поставили перед собой задачу научиться создавать рекомендации для новых пользователей сервиса / рекомендовать новые фильмы без пересчета полного SVD разложения.

	user	item	values	timestamp
0	0	1260	4.0	2006-11-30 11:19:50
1	0	1529	4.5	2006-01-01 00:38:35
2	0	2373	4.0	2006-11-30 11:18:46
3	0	2515	4.0	2006-01-01 00:38:44
4	0	2829	4.5	2005-12-03 00:53:20
...	...	...	...	...

Рисунок - 0

Метрики

- Технические метрики
  - Тесты на затрачиваемое алгоритмом время
  - Точность алгоритма (Фробениусова норма разности реальной матрицы и результата работы алгоритма)
- Продуктовые метрики
  - $precision = \dfrac{TP}{FP + TP}$
  - Mean normalized average precision:
    $$MNAP = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} target_{sort}[i]} \sum_{i=1}^{k} target_{sort}[i] \cdot precision$$
  - Normalized Discounted Cumulative Gain:
    $$NDCG = \frac{\sum_{i=1}^{k} \dfrac{2^{target_{sort}[i]} - 1}{\log(i+1)}}{\sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\log(i+1)}}$$

Основные идеи метода

$X \in \mathbb{R}^{p \times q}$ и $USV^T = X$ с $S \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Пусть $A \in \mathbb{R}^{p \times c}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times c}$ будут произвольными матрицами ранга c.

$$X + AB^T = \begin{bmatrix} U & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & B \end{bmatrix}^T \tag{1}$$

Основные идеи метода

Пусть P будет ортогональным базисом пространства столбцов $(I - UU^T)A$ — компоненты A, ортогональной к U — и пусть $R_A \equiv P^T(I - UU^T)A$.

$$[U \quad A] = [U \quad P] \begin{bmatrix} I & U^T A \\ 0 & R_A \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Аналогично, пусть $QR_B = (I - VV^T)B$.

$$X + AB^T = [U \quad P] K [V \quad Q]^T \tag{3}$$

$$K = \begin{bmatrix} I & U^T A \\ 0 & R_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & V^T B \\ O & R_B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U^T A \\ R_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T B \\ R_B \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

Основные идеи метода

Разложение K в виде $U^T K V' = S'$ дает повороты U' и V' расширенных подпространств [U   P] и [V   Q]
Тогда искомое разложение можно представить в виде

$$X + AB^T = ([U \quad P]U')S'([V \quad Q]V')^T \tag{5}$$

Модификация ранга-1

Для SVD $USV^T + ab^T$ с векторами $a \in \mathbb{R}^p$ и $b \in \mathbb{R}^q$. Для случая добавления колонки $b^T = [0, 0, ..., 1]$
Тогда eq. (2) можно переписать с использованием алгоритма Грама-Шмидта:

$$m = U^T a; \qquad p = a - Um; \qquad R_a = \|p\|; \qquad P = R_a^{-1}$$

Матрица K упрощается до

$$K = \begin{bmatrix} S & m \\ 0 & \|p\| \end{bmatrix}$$

Ключевые особенности

Вместо вращения больших матриц сингулярных векторов, как показано в уравнении (5), мы представим SVD разложение в виде пяти матриц.

$$U_{pxr} \cdot U'_{rxr}, \quad S_{rxr}, \quad V'^{T}_{rxr}, \quad V^{T}_{qxr} (6)$$

Обновление левого подпространства

Пусть K и p определены как выше, и пусть ортогональные C, $D \in \mathbb{R}^{(r+1)\times(r+1)}$ диагонализируют K как $CS'D^T = K$. Из уравнения (5), левостороннее обновление должно удовлетворять $U_{\text{new}}U'_{\text{new}} = [U_{\text{old}} \;\; p]U'_{\text{old}}C$.

$$U' \leftarrow \begin{bmatrix} U' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C; \quad U \leftarrow [U \quad p].$$

Обновление правого подпространства

Из уравнения (5), обновление с правой стороны должно удовлетворять

$$V_{\text{new}} V'_{\text{new}} = \begin{bmatrix} V_{\text{old}} V'_{\text{old}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D.$$

$$V'_{\text{new}} \leftarrow \begin{bmatrix} V'_{\text{old}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D; \quad (V^{+})_{\text{new}} \leftarrow D^{T} \begin{bmatrix} (V^{+})_{\text{old}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$V_{\text{new}} \leftarrow \begin{bmatrix} V_{\text{old}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

потому что

$$\begin{bmatrix} V'V' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D$$

и D ортогональна.

Оценка сложности

SVD разложение (полный пересчет)

При добавлении колонки (строки) сложность пересчета SVD разложения можно оценить как $O(m \times (n+1) \times min(m, n+1)$, и так как мы рассматриваем случай $m > n$, имеем $O(mn^2)$.

Метод быстрого обновления

Метод быстрого обновления SVD разложения позволяет вычислять правые сингулярные векторы за $O(n^2)$ и левые сингулярные векторы за O(m $\times n$).

Результаты. Технические метрики. Сравнение по времени.

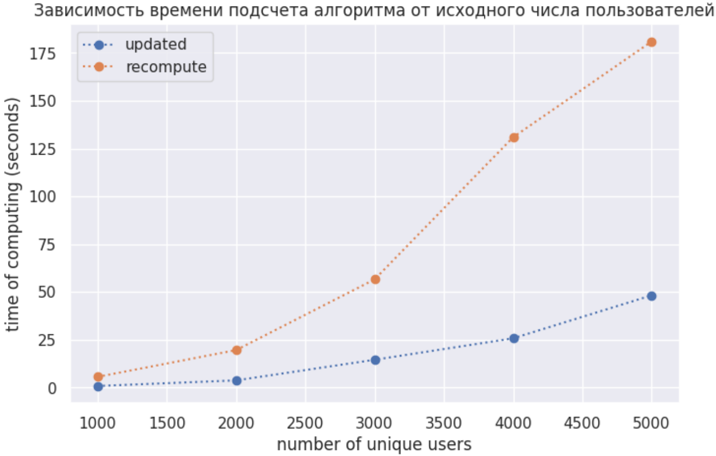

Рисунок - 1

Результаты. Технические метрики. Сравнение по точности.

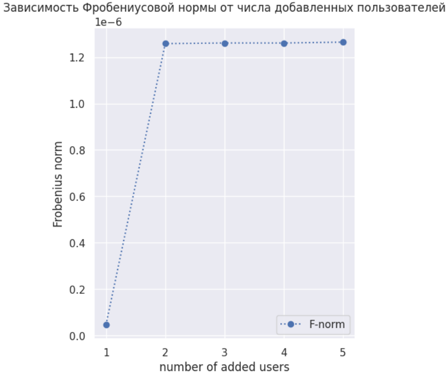

Рисунок - 2

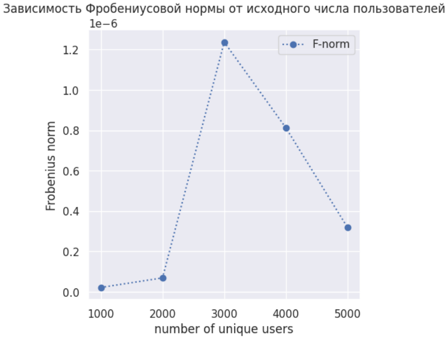

Рисунок - 3

Результаты. Продуктовые метрики после добавления пользователя.

	Updating algorithm	Recomputing algorithm	Baseline
Precision TOP 1	0.9843	0.9843	0.3971
Precision TOP 3	0.9611	0.9611	0.3771
Precision TOP 10	0.8723	0.8723	0.2835
MNAP TOP 10	0.9843	0.9843	0.2085
NDCG TOP 10	0.9843	0.9843	0.3181

Таблица - 1

Основные результаты проекта

1. Был реализован алгоритм быстрого обновления SVD разложения при добавлении нового пользователя (продукта) в рекоммендательную системы.
2. Данный алгоритм имеет существенное преимущество во времени(рис.1) по сравнению с полным пересчетом и его реализация достаточно точна (рис.2 и рис.3).
3. Реализация данного алгоритма не повлияла на продуктовые метрики.

Заключение

1. **"Что планировалось"**
   Планировалось реализовать обновление SVD разложения для рекомендательных систем при добавлении отдельного столбца или строки (модификация ранга-1), а также при добавлении целых подматриц — набора столбцов и набора строк (модификации более высокого ранга).
2. **"Что получилось, а что нет"**
   Получилось реализовать оба сценария, однако обновление ранга > 1 выполняется в цикле из обновлений ранга 1. Не удалось реализовать более быстрые методы обновления модификаций более высокого ранга.

References

Brand, M. (2006).
Fast low-rank modifications of the thin singular value decomposition.
Linear Algebra and its Applications, 415, 20–30.
doi: 10.1016/j.laa.2005.07.021.

Gu, M. & Eisenstat, S. C. (1993).
A Stable and Fast Algorithm for Updating the Singular Value Decomposition.
Yale University.

Stange, P. (2009).
On the Efficient Update of the Singular Value Decomposition Subject to Rank-One Modifications.
doi: 10.1002/pamm.200810827.

Zhou, X., He, J., Huang, G., & Zhang, Y. (2015).
SVD-based incremental approaches for recommender systems.
Journal of Computer and System Sciences, 81(4), 717–733.
doi: 10.1016/j.jcss.2014.11.016.