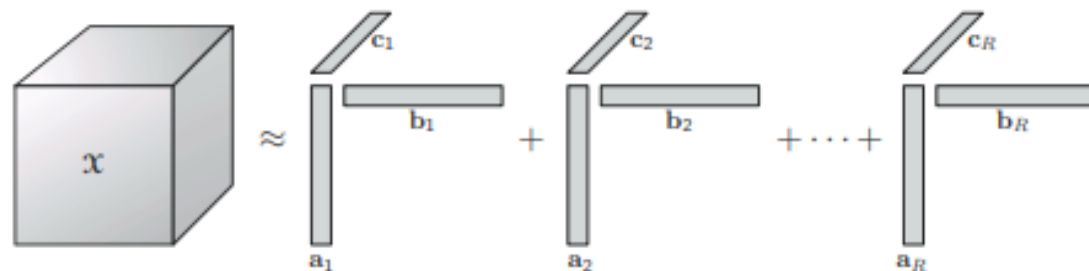


CP Tensor Decomposition

Илья Белько, Данила Андреев, Владислав Муджиков

Постановка задачи

$$\mathcal{X} \approx [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}] \equiv \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r.$$



Найти \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C}

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}} \|\mathbf{X} - \mathbf{M}\|^2 \text{ s.t. } \mathbf{M} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}] \quad \longrightarrow \quad \min_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}} \sum_{ijk} \left(x_{ijk} - \sum_{\ell} a_{i\ell} b_{j\ell} c_{k\ell} \right)^2$$

Как решить? Alternating Least Squares.

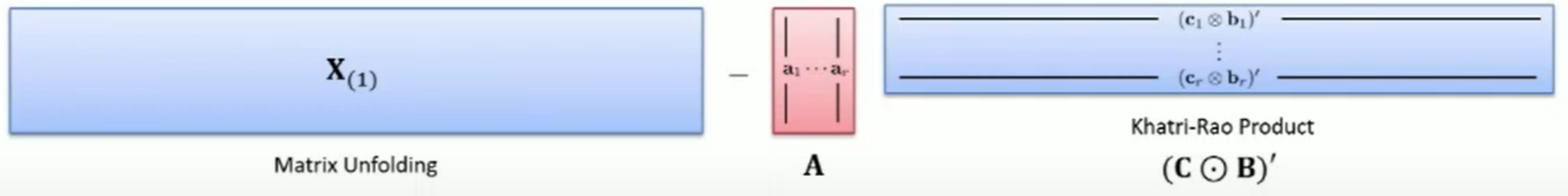
$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{A}} \sum_{ijk} \left(x_{ijk} - \sum_{\ell} a_{i\ell} b_{j\ell} c_{k\ell} \right)^2 \\ & \min_{\mathbf{B}} \sum_{ijk} \left(x_{ijk} - \sum_{\ell} a_{i\ell} b_{j\ell} c_{k\ell} \right)^2 \\ & \min_{\mathbf{C}} \sum_{ijk} \left(x_{ijk} - \sum_{\ell} a_{i\ell} b_{j\ell} c_{k\ell} \right)^2 \end{aligned}$$

Khatri-Rao Product

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right], \quad \mathbf{D} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{C}_1 \otimes \mathbf{D}_1 & \mathbf{C}_2 \otimes \mathbf{D}_2 & \mathbf{C}_3 \otimes \mathbf{D}_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 8 & 21 \\ 2 & 10 & 24 \\ 3 & 12 & 27 \\ 4 & 20 & 42 \\ 8 & 25 & 48 \\ 12 & 30 & 54 \\ 7 & 32 & 63 \\ 14 & 40 & 72 \\ 21 & 48 & 81 \end{array} \right]$$

$$\min_{\mathbf{A}} \sum_{ijk} \left(x_{ijk} - \sum_{\ell} a_{i\ell} b_{j\ell} c_{k\ell} \right)^2 \quad \longrightarrow \quad \min_{\mathbf{A}} \|\mathbf{X}_{(1)} - \mathbf{A}(\mathbf{C} \odot \mathbf{B})'\|_F^2$$



$$\min_{\hat{\mathbf{A}}} \|\mathbf{X}_{(1)} - \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{C} \odot \mathbf{B})^\top\|_F,$$

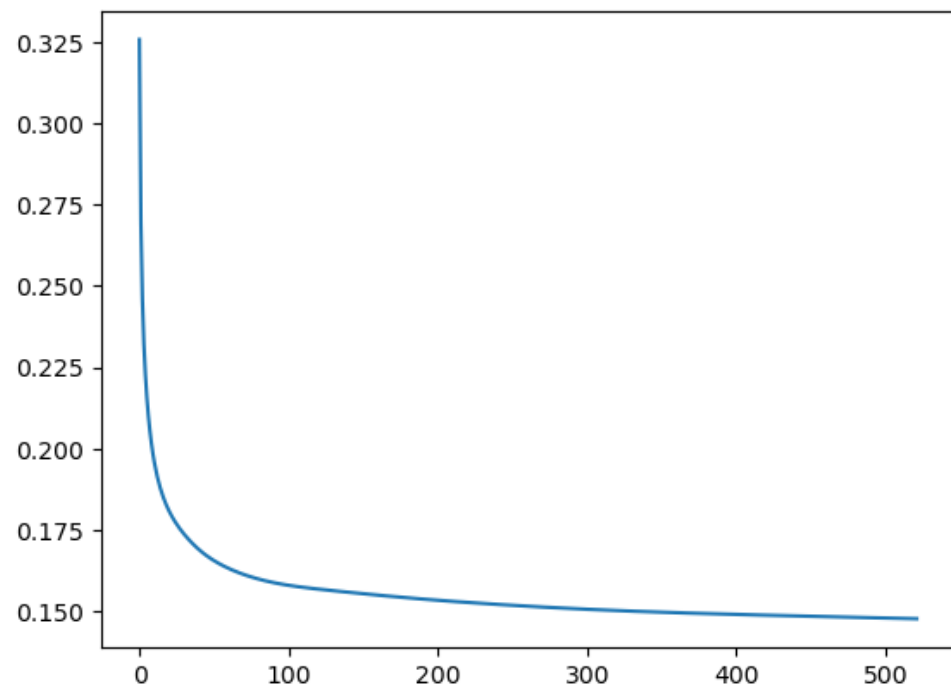
$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{X}_{(1)} \left[(\mathbf{C} \odot \mathbf{B})^\top \right]^\dagger.$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^\top (\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) &= \mathbf{A}^\top \mathbf{A} * \mathbf{B}^\top \mathbf{B}, \\ (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^\dagger &= ((\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) * (\mathbf{B}^\top \mathbf{B}))^\dagger (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^\top. \end{aligned}$$

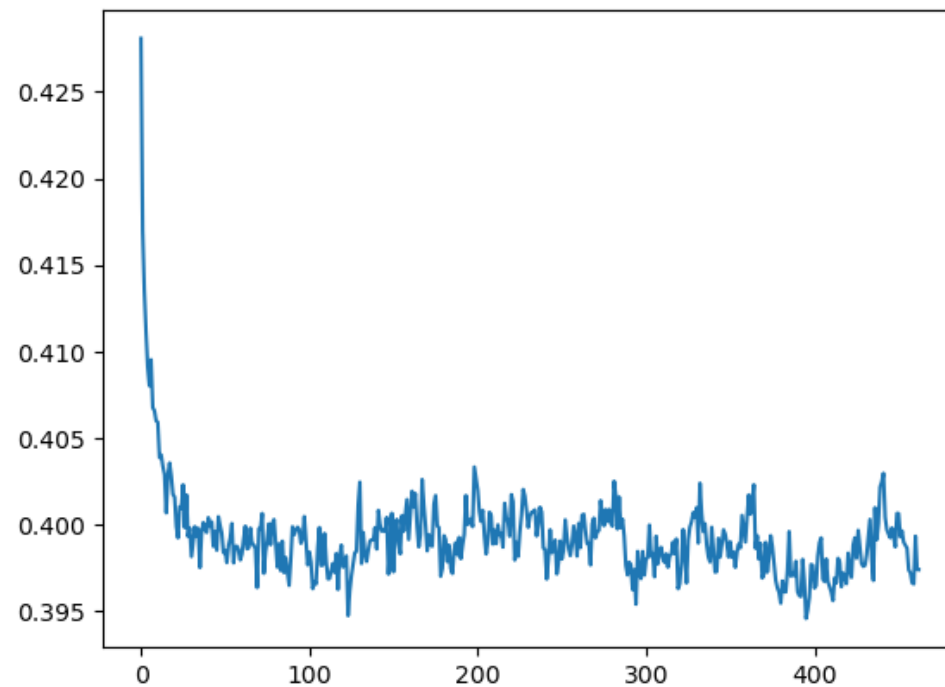
$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{X}_{(1)} (\mathbf{C} \odot \mathbf{B}) (\mathbf{C}^\top \mathbf{C} * \mathbf{B}^\top \mathbf{B})^\dagger.$$

Сходимость

Обычный алгоритм

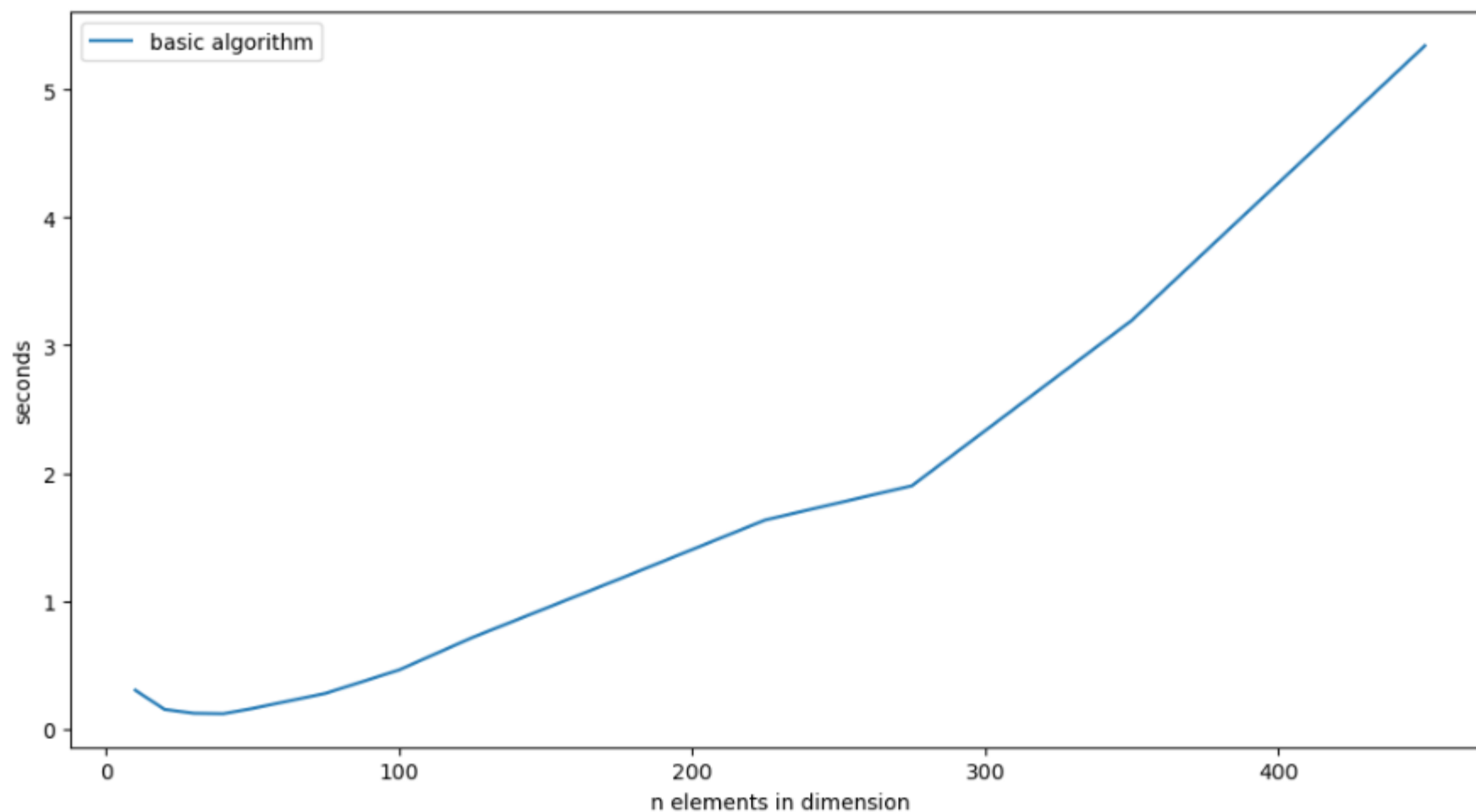


Рандомизированный алгоритм



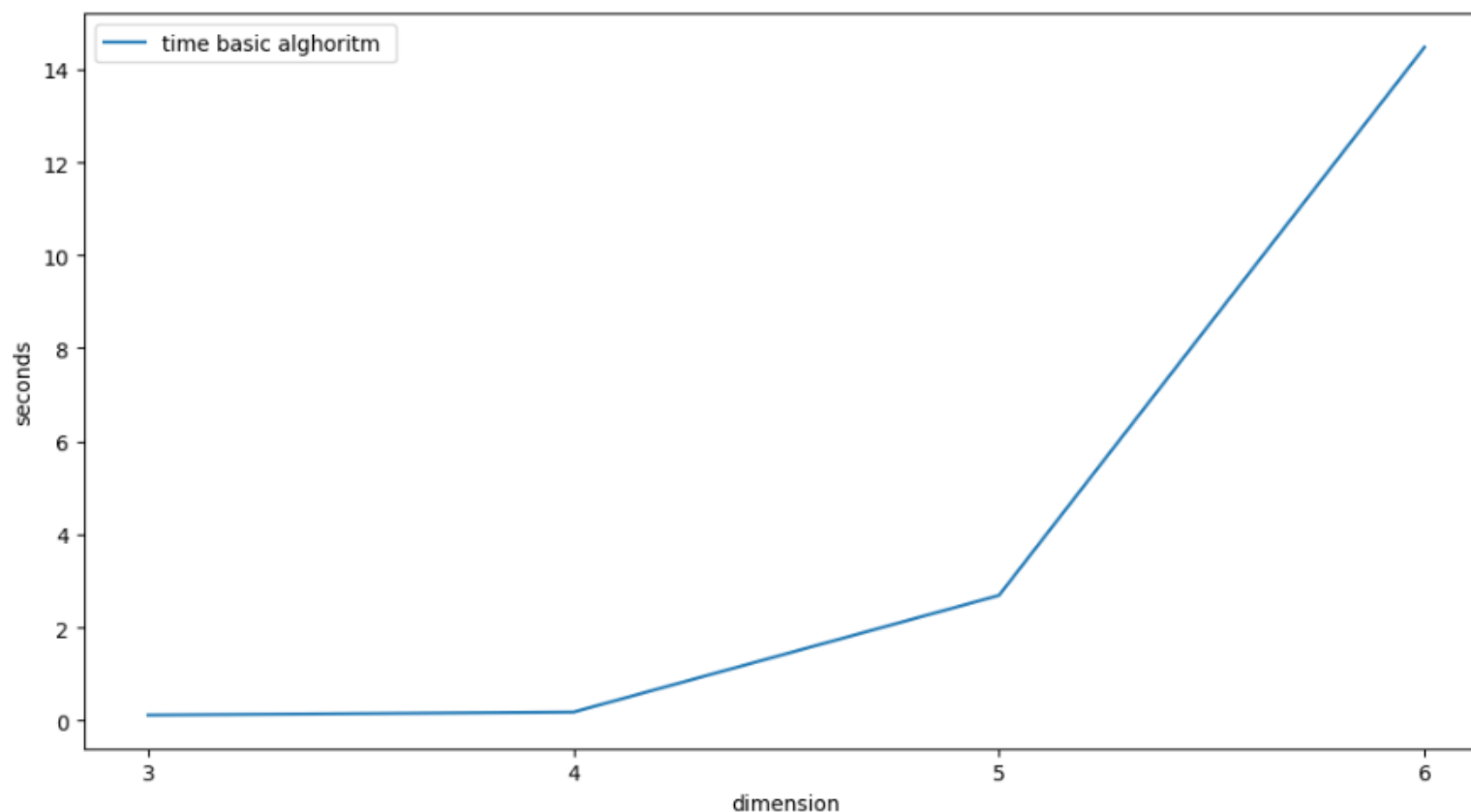
Время работы алгоритма

Время работы по размерности тензора



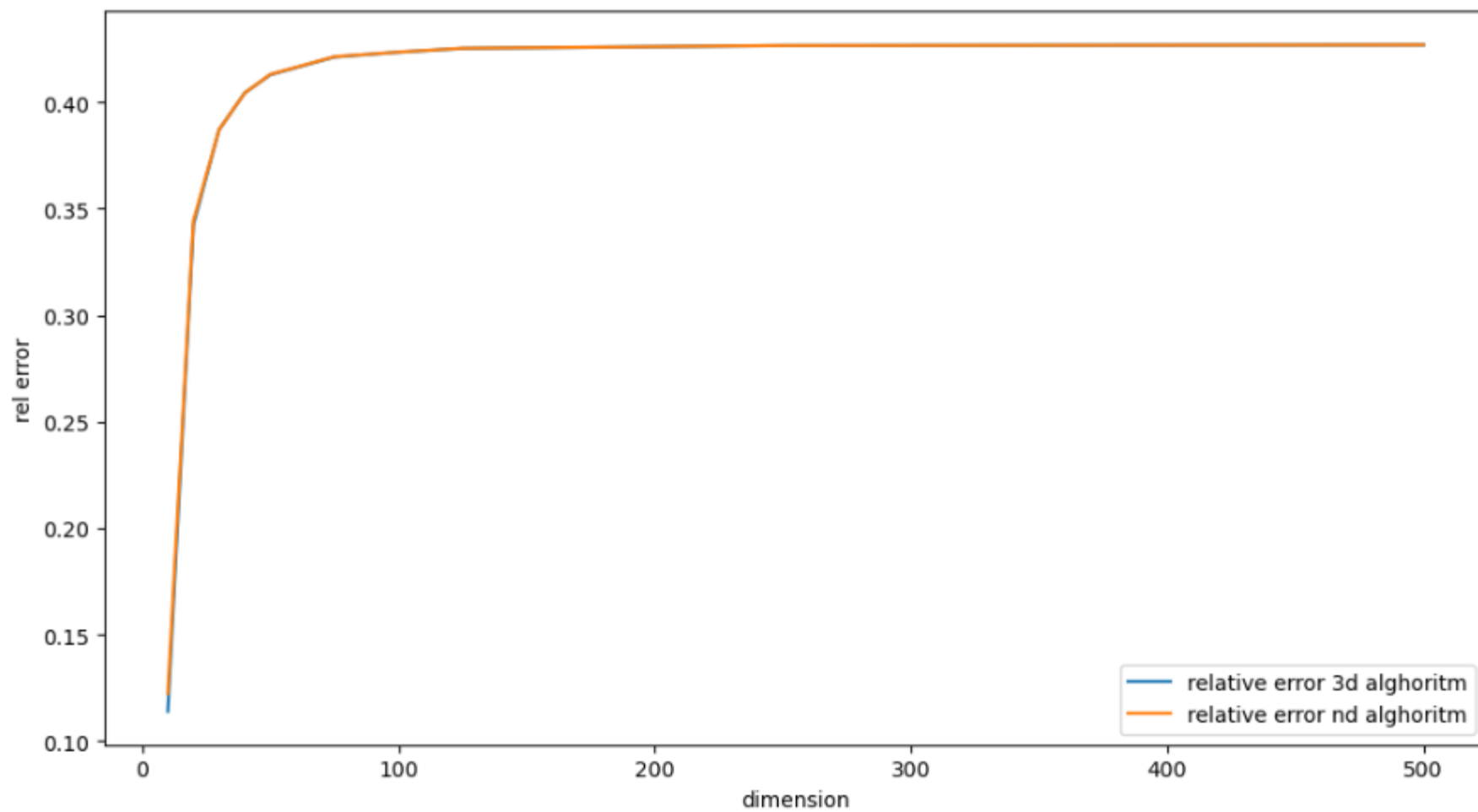
Естественная проблема с размерностью тензора

Сравнение времени работы по размерности тензора



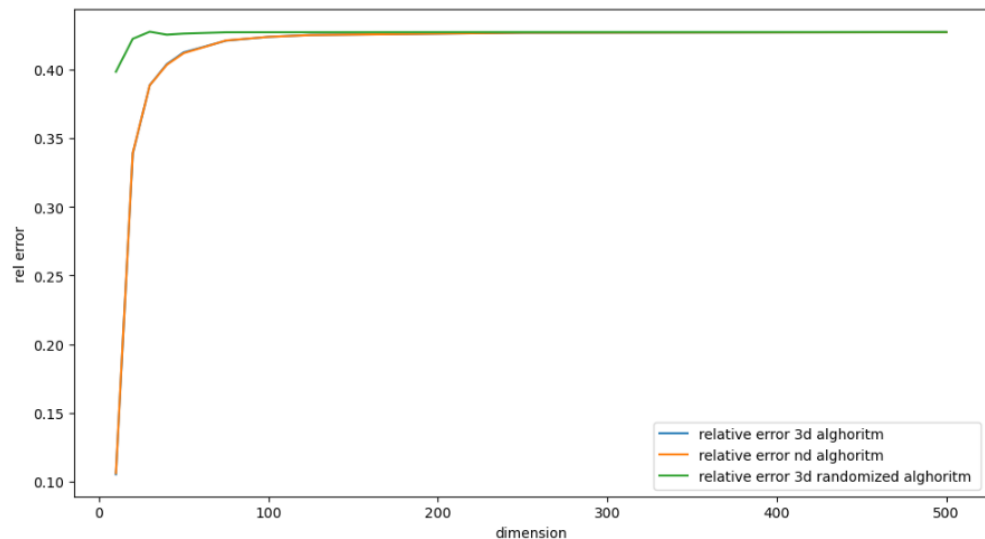
Относительная ошибка в зависимости от размерности тензора

С закрепленным рангом разложения

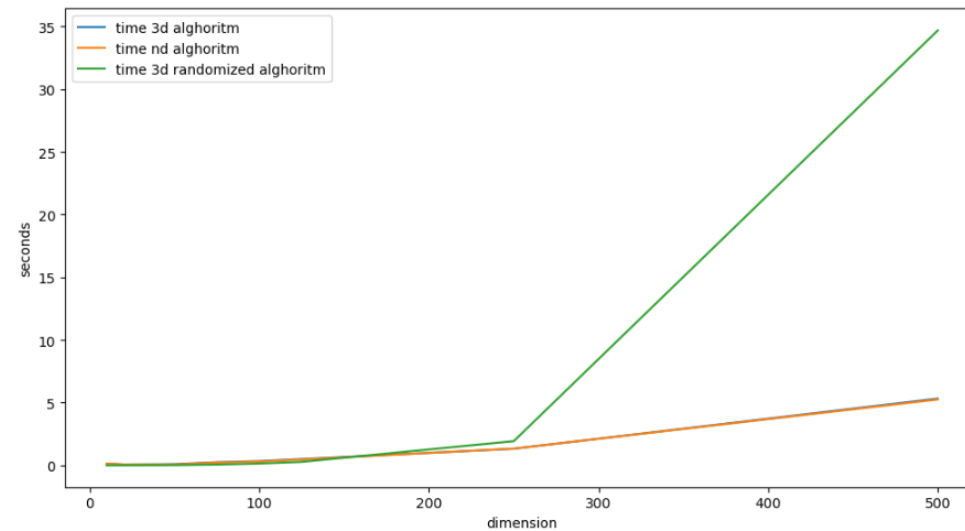


Неинтересные графики (

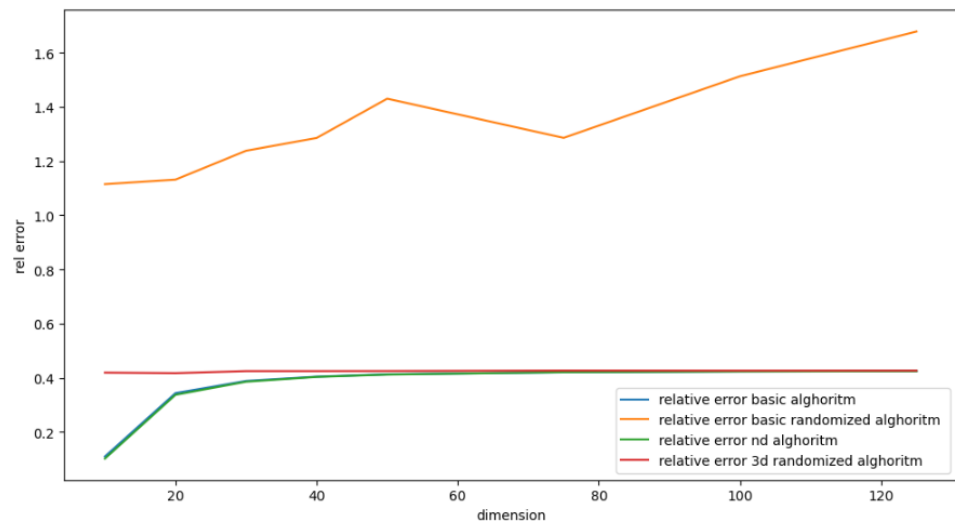
Сравнение минимальной относительной ошибки трех моделей



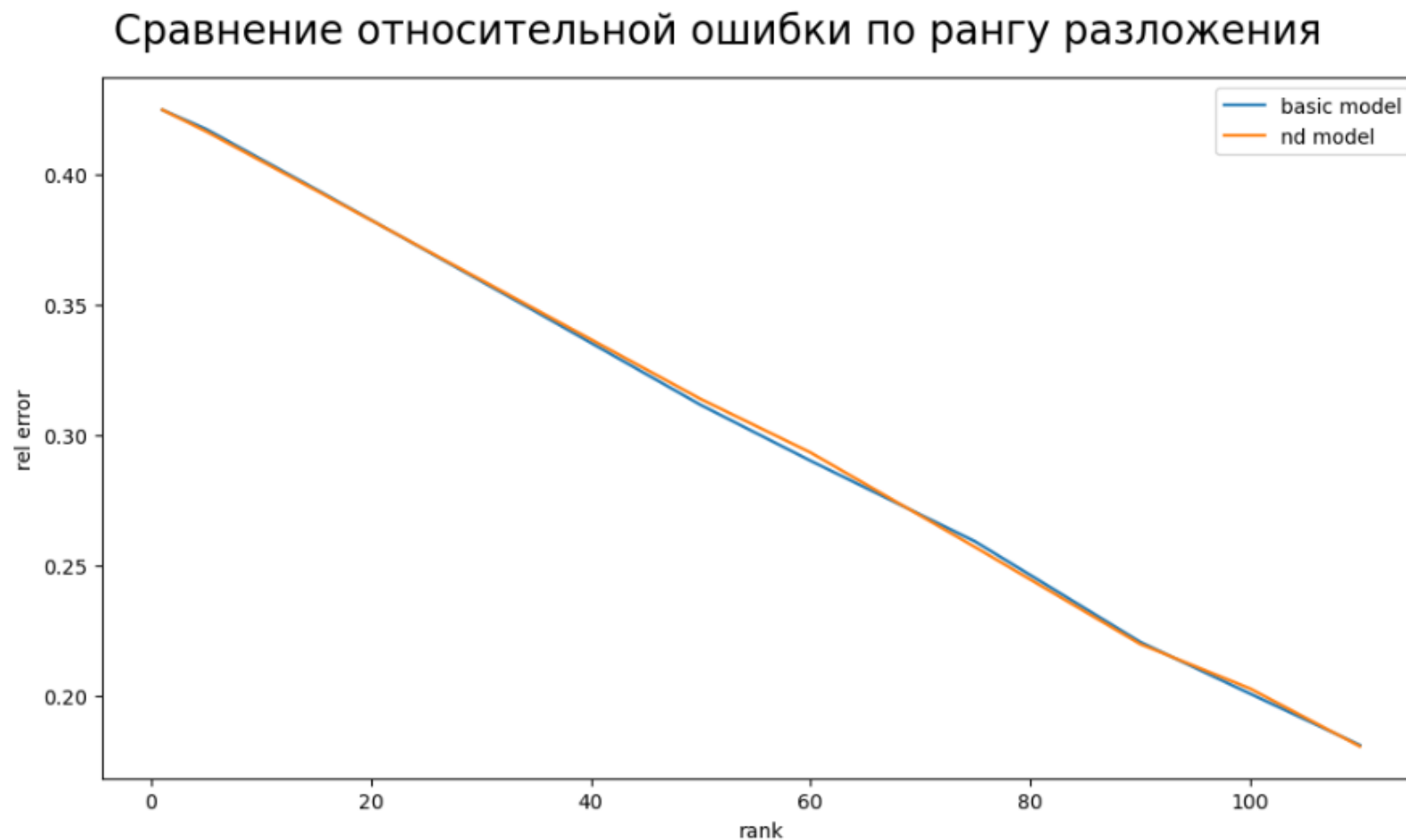
Сравнение времени работы трех моделей



Сравнение минимальной относительной ошибки моделей



Зависимость относительной ошибки от ранга разложения выглядит линейной

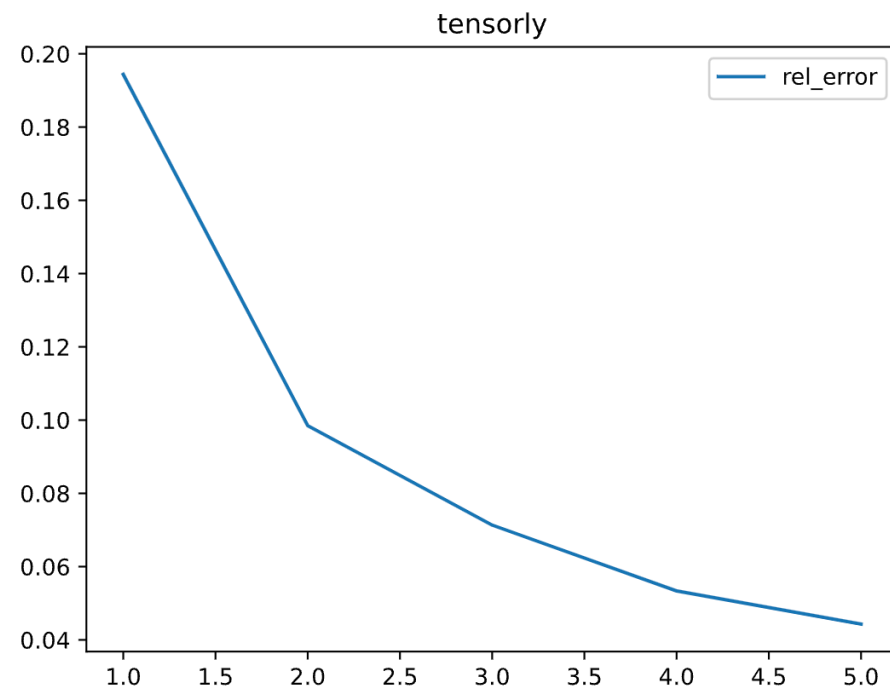
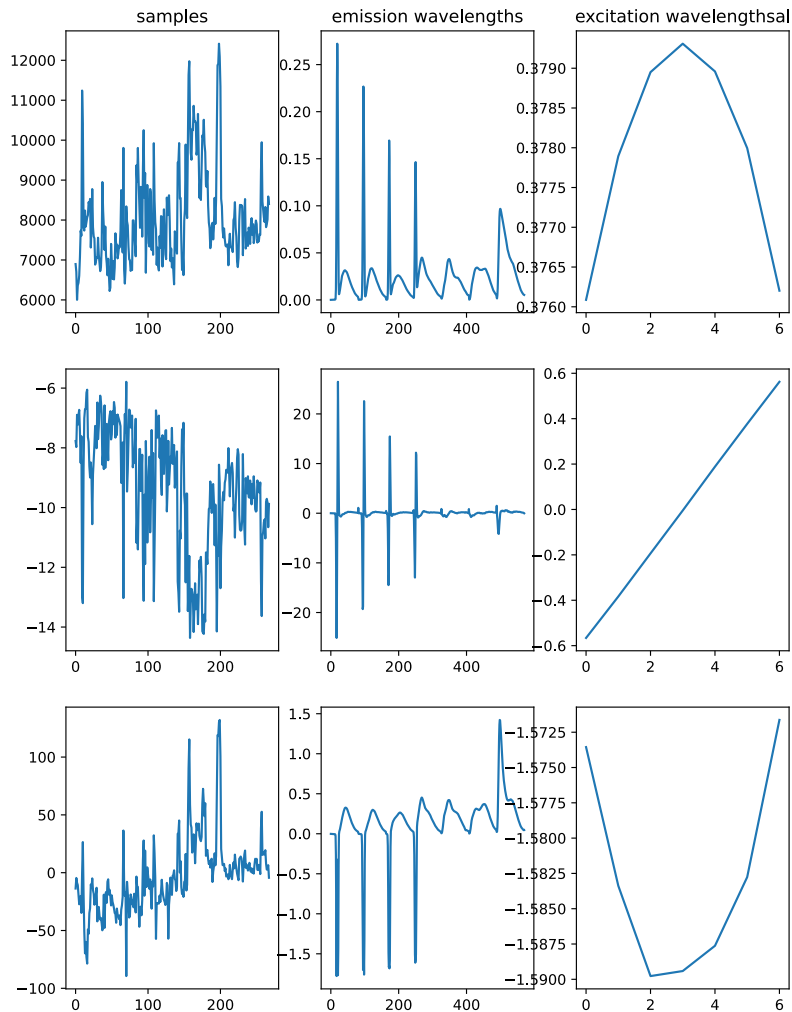


Исследование метода на реальном наборе
данных

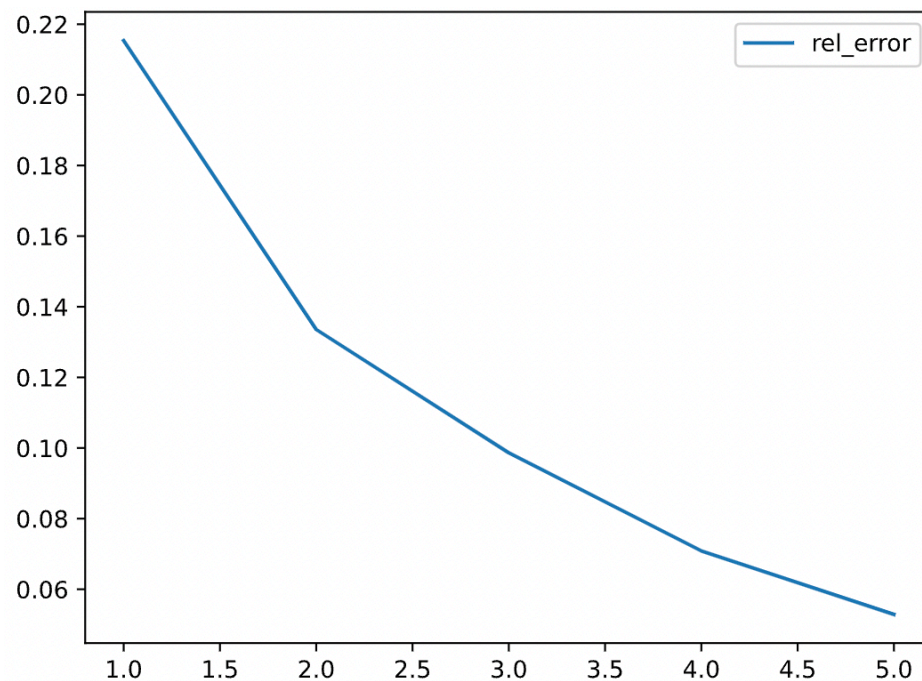
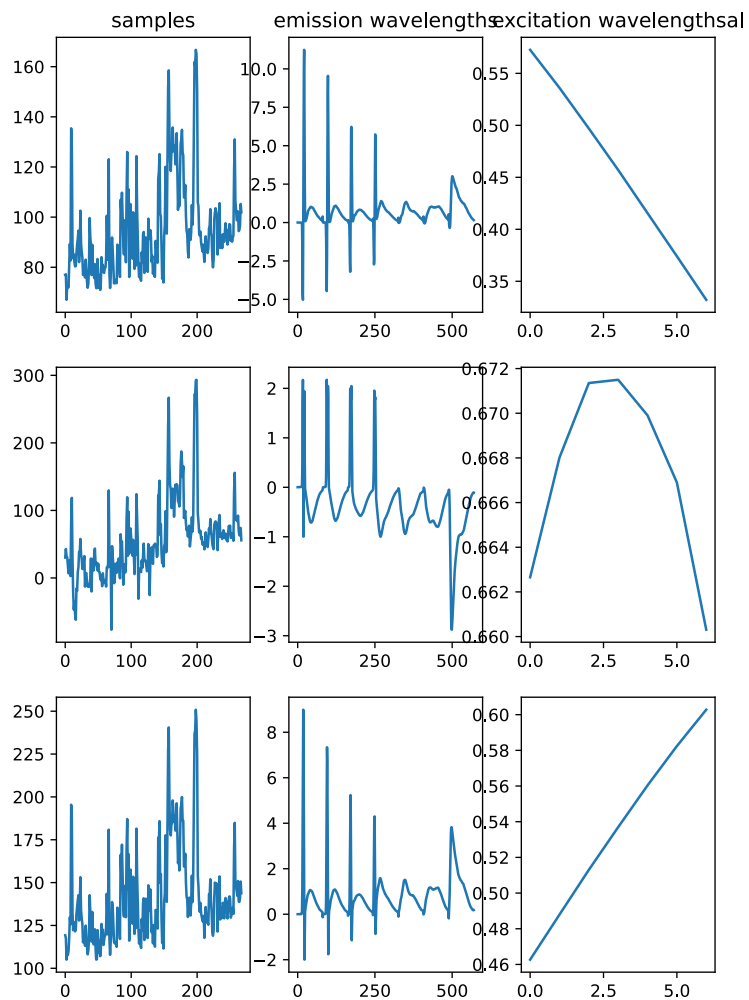
- Возьмем датасет с пробами сахара(<https://ucphchemometrics.com/sugar-process-data/>). Это трехмерный тензор размерности (268,571,7), где:
 - 268 - количество взятых проб;
 - 571 - диапазон измерения эмиссионного спектра(Emission spectrum);
 - 7 - диапазон измерения спектра возбуждения(Excitation Spectrum).

X	268 x 571 x 7	Fluorescence data
---	---------------	-------------------

CP разложение, реализованное библиотекой Tensorly



CP разложение собственной реализации



Место для результатов и выводов

- Были реализованы некоторые основные методы тензорного разложения, связанные с каноническим разложением(CP)
- Попытка реализовать рандомизированный подход
- Приложение данных методов к реальному набору данных проб сахара

Место для используемой литературы

- <https://msimposium.github.io/files/170930/tensordecompositions.pdf> - основная статья по теме
- <https://github.com/CyberKachok/CP-tensor-decomposition>