Методы оптимизации
Лекция 5: Применение двойственности и коническая двойственность

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт

23 октября 2021 г.

На прошлой лекции

- Условия оптимальности для задач без ограничений

На прошлой лекции

- Условия оптимальности для задач без ограничений
- Условие оптимальности для общей задачи с ограничениями

На прошлой лекции

- Условия оптимальности для задач без ограничений
- Условие оптимальности для общей задачи с ограничениями
- Двойственная функция и двойственная задача

На прошлой лекции

- Условия оптимальности для задач без ограничений
- Условие оптимальности для общей задачи с ограничениями
- Двойственная функция и двойственная задача
- Свойства двойственной функции и зазор двойственности

На прошлой лекции

- Условия оптимальности для задач без ограничений
- Условие оптимальности для общей задачи с ограничениями
- Двойственная функция и двойственная задача
- Свойства двойственной функции и зазор двойственности
- Сильная двойственность и условие Слейтера

На прошлой лекции

- Условия оптимальности для задач без ограничений
- Условие оптимальности для общей задачи с ограничениями
- Двойственная функция и двойственная задача
- Свойства двойственной функции и зазор двойственности
- Сильная двойственность и условие Слейтера
- Условия Каруша-Куна-Таккера

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^p \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Последнее равенство выполнено в силу

$$\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$$

и необходимого условия минимума.

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера. Тогда $\mathbf{x}$ решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ такие, что для них выполнены условия ККТ

Переформулировка задачи

- Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи

Переформулировка задачи

- Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Переформулировка задачи

- Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Стандартные приёмы

Переформулировка задачи

- Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Стандартные приёмы

- Введение новых переменных

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \to \begin{array}{c} \min\limits_{(\mathbf{x},\mathbf{y})} \|\mathbf{y}\| \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{y} \end{array}$$

Переформулировка задачи

- Равносильные прямые задачи могут давать совершенно разные двойственные задачи
- Равносильное преобразование исходной задачи может дать более простую или полезную двойственную задачу

Стандартные приёмы

- Введение новых переменных

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \to \begin{aligned} &\min_{(\mathbf{x},\mathbf{y})} \|\mathbf{y}\| \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{y} \end{aligned}$$

- Превращение явных ограничений в неявные

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & -1 \leq \mathbf{x} \leq 1 \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned} \to \begin{aligned} &\min_{-1 \leq \mathbf{x} \leq 1} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Двойственная задача к LP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

Двойственная задача к LP

- Исходная задача

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Лагранжиан:
  $L = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^\top(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$

Двойственная задача к LP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Лагранжиан:
  $L = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^\top(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$
- Двойственная функция

$$
g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}, & \mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} = 0, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}
$$

Двойственная задача к LP

- Исходная задача

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Лагранжиан:
  $L = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^\top(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$
- Двойственная функция

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}, & \mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} = 0, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Двойственная задача

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \geq 0 \end{aligned}$$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} - \boldsymbol{\mu}^* = 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} - \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} - \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$
5. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} - \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$
5. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Q: как по решению двойственной задачи восстановить решение прямой?

Условия оптимальности для LP

1. $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{x}^* \geq 0$
3. $\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{c} - \boldsymbol{\mu}^* = 0$
4. $\mu_i^* x_i^* = 0$
5. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Q: как по решению двойственной задачи восстановить решение прямой?

Утверждение

Если допустимое множество прямой задачи LP непусто, то выполнена сильная двойственность.

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, а допустимое множество в двойственной задаче непусто, то двойственная задача не ограничена.

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, а допустимое множество в двойственной задаче непусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, а допустимое множество в двойственной задаче непусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, а допустимое множество в двойственной задаче непусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$
- Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, а допустимое множество в двойственной задаче непусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$
- Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$
- Двойственная задача

$$\min \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$$
$$\text{s.t. } \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \geq 0$$

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, а допустимое множество в двойственной задаче непусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$
- Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$
- Двойственная задача
$$\min \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$$
$$\text{s.t. } \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \geq 0$$
- Пусть $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \theta \mathbf{p}$, $\theta > 0$, где $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ некоторая допустимая точка в двойственной задаче

Связь между неограниченностью и неразрешимостью

Теорема

Если допустимое множество в прямой задаче LP пусто, а допустимое множество в двойственной задаче непусто, то двойственная задача не ограничена.

Доказательство

- Допустимое множество в прямой задаче $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$
- Если оно пустое, то по лемме Фаркаша найдётся вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$
- Двойственная задача
$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \geq 0 \end{aligned}$$
- Пусть $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \theta \mathbf{p}$, $\theta > 0$, где $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ некоторая допустимая точка в двойственной задаче
- Тогда $(\bar{\boldsymbol{\lambda}} + \theta \mathbf{p})^\top \mathbf{b} \to -\infty$ и $\mathbf{A}^\top \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \theta \mathbf{A}^\top \mathbf{p} + \mathbf{c} \geq 0$

Почему допустимые множества в прямой и двойственной задачах LP могут быть пустыми?

- Рассмотрим задачу с допустимым множеством вида

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq -1,\ -x_2 \leq -1,\ x_{1,2} \geq 0\}$$

Почему допустимые множества в прямой и двойственной задачах LP могут быть пустыми?

- Рассмотрим задачу с допустимым множеством вида

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq -1,\ -x_2 \leq -1,\ x_{1,2} \geq 0\}$$

- В стандартном виде это множество примет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_{1,2} \geq 0 \; s_{1,2} \geq 0$$

Почему допустимые множества в прямой и двойственной задачах LP могут быть пустыми?

- Рассмотрим задачу с допустимым множеством вида

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq -1,\ -x_2 \leq -1,\ x_{1,2} \geq 0\}$$

- В стандартном виде это множество примет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_{1,2} \geq 0\ s_{1,2} \geq 0$$

- Тогда допустимое множество в двойственной задаче

$$\begin{cases} c_1 + \lambda_1 \geq 0 \\ c_2 - \lambda_2 \geq 0 \\ c_3 + \lambda_1 \geq 0 \\ c_4 + \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \{\lambda_2 \leq c_2,\ \lambda_2 \geq -c_4\}$$

Почему допустимые множества в прямой и двойственной задачах LP могут быть пустыми?

- Рассмотрим задачу с допустимым множеством вида

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 \le -1,\ -x_2 \le -1,\ x_{1,2} \ge 0\}$$

- В стандартном виде это множество примет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_{1,2} \ge 0\ s_{1,2} \ge 0$$

- Тогда допустимое множество в двойственной задаче

$$\begin{cases} c_1 + \lambda_1 \ge 0 \\ c_2 - \lambda_2 \ge 0 \\ c_3 + \lambda_1 \ge 0 \\ c_4 + \lambda_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \{\lambda_2 \le c_2,\ \lambda_2 \ge -c_4\}$$

- Получаем пустое множество например для $c_2 = c_4 = -1$

Двойственность для задачи с обобщёнными неравенствами

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_j(\mathbf{x}) \preceq_K 0, \; j = 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

Двойственность для задачи с обобщёнными неравенствами

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \dots, m \\
& h_j(\mathbf{x}) \preceq_K 0, \; j = 1, \dots, p
\end{aligned}
$$

Лагранжиан

$$
L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f_0(\mathbf{x}) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \rangle
$$

Двойственность для задачи с обобщёнными неравенствами

Постановка задачи

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, m$$
$$h_j(\mathbf{x}) \leq_K 0, \; j = 1, \ldots, p$$

Лагранжиан

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f_0(\mathbf{x}) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \rangle$$

Двойственная задача

$$\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{\mu} \geq_{K^*} 0$$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq_{K^*} 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \succeq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \succeq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \succeq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия оптимальности

Все утверждения для обычных скалярных неравенств (то есть для конуса $\mathbb{R}^n_+$) переносятся на случай произвольного конуса K с точностью до отмеченных отличий.

Условия ККТ для задачи с обобщёнными неравенствами

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \preceq_K 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \succeq_{K^*} 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия оптимальности

Все утверждения для обычных скалярных неравенств (то есть для конуса $\mathbb{R}_+^n$) переносятся на случай произвольного конуса K с точностью до отмеченных отличий.

Условие Слейтера для выпуклой задачи

Говорят, что выполнено условие Слейтера, если найдётся $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}$ такой что $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ и $f_i(\hat{\mathbf{x}}) <_K 0$

Двойственность для задачи конической оптимизации

- Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \geq_K 0
\end{aligned}
$$

Двойственность для задачи конической оптимизации

- Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \geq_K 0
\end{aligned}
$$

- Строим двойственную задачу (аналогично LP)

Двойственность для задачи конической оптимизации

- Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \geq_K 0
\end{aligned}
$$

- Строим двойственную задачу (аналогично LP)
  - Двойственная функция $g(\boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$

Двойственность для задачи конической оптимизации

- Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
\min\ & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq_K 0
\end{aligned}
$$

- Строим двойственную задачу (аналогично LP)
  - Двойственная функция $g(\boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$
  - Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
\max\ & -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\
\text{s.t. } & \mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} \geq_{K^*} 0
\end{aligned}
\quad \xRightarrow{\boldsymbol{\lambda} \equiv -\boldsymbol{\lambda}} \quad
\begin{aligned}
\max\ & \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} \leq_{K^*} \mathbf{c}
\end{aligned}
$$

Двойственность для задачи конической оптимизации

- Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \geq_K 0
\end{aligned}
$$

- Строим двойственную задачу (аналогично LP)
  - Двойственная функция $g(\boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b}$
  - Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
\max -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\
\text{s.t. } \mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} \geq_{K^*} 0
\end{aligned}
\quad \xrightarrow{\boldsymbol{\lambda} \equiv -\boldsymbol{\lambda}} \quad
\begin{aligned}
\max \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\
\text{s.t. } \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} \leq_{K^*} \mathbf{c}
\end{aligned}
$$

- Если конус K самосопряжённый мы автоматически знаем, как выглядит двойственная задача!

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \mathrm{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X})\\
\text{s.t. } &\mathrm{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i\\
&\mathbf{X} \succeq 0
\end{aligned}
$$

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{X}} \mathrm{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\ \text{s.t. } &\mathrm{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\ &\mathbf{X} \succeq 0 \end{aligned}$$

- Аналогия с элементами задачи в конической форме

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Аналогия с элементами задачи в конической форме
  - $\mathbf{c} \to \mathbf{C}$

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Аналогия с элементами задачи в конической форме
  - $\mathbf{c} \to \mathbf{C}$
  - $K \equiv \mathbf{S}_+^n$

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Аналогия с элементами задачи в конической форме
  - $\mathbf{c} \to \mathbf{C}$
  - $K \equiv \mathbf{S}^n_+$
  - Строки матрицы $\mathbf{A}$ стали матрицами $\mathbf{A}_i$

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Аналогия с элементами задачи в конической форме
  - $\mathbf{c} \to \mathbf{C}$
  - $K \equiv \mathbf{S}_+^n$
  - Строки матрицы $\mathbf{A}$ стали матрицами $\mathbf{A}_i$
  - Вектор $\mathbf{b}$ остался как есть

Двойственная задача для SDP

- Исходная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \mathrm{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\mathrm{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Аналогия с элементами задачи в конической форме
  - $\mathbf{c} \to \mathbf{C}$
  - $K \equiv \mathbf{S}_+^n$
  - Строки матрицы $\mathbf{A}$ стали матрицами $\mathbf{A}_i$
  - Вектор $\mathbf{b}$ остался как есть
- Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\
\text{s.t. } &\mathbf{C} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{A}_i \succeq 0
\end{aligned}
\quad \text{или} \quad
\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{b} \\
\text{s.t. } &\mathbf{C} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{A}_i \succeq 0
\end{aligned}
$$

Отличие SDP задачи от LP задачи

- Условие Слейтера: найдётся матрица $\hat{\mathbf{X}}$ такая что $\hat{\mathbf{X}} \succ 0$ и $\mathrm{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i$

Отличие SDP задачи от LP задачи

- Условие Слейтера: найдётся матрица $\hat{\mathbf{X}}$ такая что $\hat{\mathbf{X}} \succ 0$ и $\mathrm{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i$
- Отличие от LP: непустого допустимого множества НЕдостаточно для сильной двойственности!

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$
\begin{aligned}
&\min x_2 \\
\text{s.t. } &\begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
&\max -x_2 \\
\text{s.t. } &\begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0
\end{aligned}
$$

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$
\begin{aligned}
&\min x_2 && && \max -x_2 \\
&\text{s.t. } \begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 &&\Rightarrow && \text{s.t. } \begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество:
  $x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2+1) \geq 0, (x_2+1)(-x_2^2) \geq 0$

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\min x_2 \\ \text{s.t.} &\begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\max -x_2 \\ \text{s.t.} &\begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

- Допустимое множество:
  $x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2+1) \geq 0, (x_2+1)(-x_2^2) \geq 0$
- $p^* = 0$

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\min x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\max -x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

- Допустимое множество:
  $x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2+1) \geq 0, (x_2+1)(-x_2^2) \geq 0$
- $p^* = 0$

Двойственная задача имеет вид

$$\begin{aligned} &\min y_{11} \\ \text{s.t. } &\mathbf{Y} \succeq 0 \\ &y_{11} + y_{32} + y_{23} = -1 \\ &y_{22} = 0 \end{aligned}$$

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}&\min x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}&\max -x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0\end{aligned}$$

- Допустимое множество: $x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2+1) \geq 0, (x_2+1)(-x_2^2) \geq 0$
- $p^* = 0$

Двойственная задача имеет вид

$$\begin{aligned}&\min y_{11} \\ \text{s.t. } &\mathbf{Y} \succeq 0 \\ &y_{11} + y_{32} + y_{23} = -1 \\ &y_{22} = 0\end{aligned}$$

- Допустимое множество: $y_{11} \geq 0, y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32} \geq 0$

Существенность условия Слейтера для SDP

Рассмотрим задачу

$$\min x_2 \qquad\qquad \max -x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \Rightarrow \text{s.t.} \begin{bmatrix} x_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0$$

- Допустимое множество:
  $x_2 \geq -1, x_1 \geq 0, -x_2^2 \geq 0, x_1(x_2+1) \geq 0, (x_2+1)(-x_2^2) \geq 0$
- $p^* = 0$

Двойственная задача имеет вид

$$\begin{aligned} &\min y_{11} \\ \text{s.t. } &\mathbf{Y} \succeq 0 \\ &y_{11} + y_{32} + y_{23} = -1 \\ &y_{22} = 0 \end{aligned}$$

- Допустимое множество: $y_{11} \geq 0, y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32} \geq 0$
- $d^* = -1$

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач
- Преобразования задач для получения двойственных

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач
- Преобразования задач для получения двойственных
- Двойственность для LP

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач
- Преобразования задач для получения двойственных
- Двойственность для LP
- Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач
- Преобразования задач для получения двойственных
- Двойственность для LP
- Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами
- Коническая двойственность

Главное

- Условия оптимальности для выпуклых задач
- Преобразования задач для получения двойственных
- Двойственность для LP
- Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами
- Коническая двойственность
- SDP vs. LP