Методы оптимизации
Лекция 6: Подходы к построению солверов для решения задач оптимизации

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт

ФПМИ

26 октября 2021 г.

На прошлой лекции

- Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами

На прошлой лекции

- Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами
- Коническая двойственность

На прошлой лекции

- Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами
- Коническая двойственность
- Двойственная задача для SDP

На прошлой лекции

- Двойственность для задач с обобщёнными неравенствами
- Коническая двойственность
- Двойственная задача для SDP
- Условие Слейтера для SDP

Задача оптимизации

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m$$
$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \; j = 1, \ldots, p$$

- Возможность эффективного решения сильно зависит от свойств f_0, f_i, h_j

Задача оптимизации

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \dots, m \\
& h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \dots, p
\end{aligned}
$$

- Возможность эффективного решения сильно зависит от свойств f_0, f_i, h_j
- Если f_0, f_i, h_j аффинны, то это задача линейного программирования (LP), которая может быть решена крайне быстро

Задача оптимизации

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

- Возможность эффективного решения сильно зависит от свойств f_0, f_i, h_j
- Если f_0, f_i, h_j аффинны, то это задача линейного программирования (LP), которая может быть решена крайне быстро
- Простые на первый взгляд задачи с нелинейными f_i, h_j могут быть очень сложными для решения

Задача выпуклой оптимизации

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

- f_0, f_i выпуклые функции: для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ и $\alpha \in [0, 1]$

$$
f(\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha) f(\mathbf{y})
$$

- Ограничения типа равенств аффинны

Свойства задач выпуклой оптимизации

- Подмножество задач оптимизации: LP – частный случай

Свойства задач выпуклой оптимизации

- Подмножество задач оптимизации: LP – частный случай
- Могут выглядеть очень сложно, однако решаются также эффективно как и задача LP

Свойства задач выпуклой оптимизации

- Подмножество задач оптимизации: LP – частный случай
- Могут выглядеть очень сложно, однако решаются также эффективно как и задача LP
- Встречаются гораздо чаще, чем можно было бы подумать

Свойства задач выпуклой оптимизации

- Подмножество задач оптимизации: LP – частный случай
- Могут выглядеть очень сложно, однако решаются также эффективно как и задача LP
- Встречаются гораздо чаще, чем можно было бы подумать
- Очень много приложений

Общие подходы к использованию выпуклости

- Надеяться/предполагать/делать вид, что f_i выпуклы

Общие подходы к использованию выпуклости

- Надеяться/предполагать/делать вид, что f_i выпуклы
  - Просто для пользователя

Общие подходы к использованию выпуклости

- Надеяться/предполагать/делать вид, что f_i выпуклы
  - Просто для пользователя
  - Теряется часть преимуществ выпуклых задач

Общие подходы к использованию выпуклости

- Надеяться/предполагать/делать вид, что f_i выпуклы
  - Просто для пользователя
  - Теряется часть преимуществ выпуклых задач
- Проверка выпуклости задачи перед решением

Общие подходы к использованию выпуклости

- Надеяться/предполагать/делать вид, что f_i выпуклы
  - Просто для пользователя
  - Теряется часть преимуществ выпуклых задач
- Проверка выпуклости задачи перед решением
  - в общем случае может быть затруднительна

Общие подходы к использованию выпуклости

- Надеяться/предполагать/делать вид, что f_i выпуклы
  - Просто для пользователя
  - Теряется часть преимуществ выпуклых задач
- Проверка выпуклости задачи перед решением
  - в общем случае может быть затруднительна
- Построение выпуклой задачи из элементарных блоков

Общие подходы к использованию выпуклости

- Надеяться/предполагать/делать вид, что f_i выпуклы
  - Просто для пользователя
  - Теряется часть преимуществ выпуклых задач
- Проверка выпуклости задачи перед решением
  - в общем случае может быть затруднительна
- Построение выпуклой задачи из элементарных блоков
  - пользователь следует фиксированному набору правил при определении f_i

Общие подходы к использованию выпуклости

- Надеяться/предполагать/делать вид, что f_i выпуклы
  - Просто для пользователя
  - Теряется часть преимуществ выпуклых задач
- Проверка выпуклости задачи перед решением
  - в общем случае может быть затруднительна
- Построение выпуклой задачи из элементарных блоков
  - пользователь следует фиксированному набору правил при определении f_i
  - выпуклость проверяется автоматически

Как проверить выпуклость?

- Определение, критерии первого или второго порядка, например $f''(\mathbf{x}) \succeq 0$

Как проверить выпуклость?

- Определение, критерии первого или второго порядка, например $f''(\mathbf{x}) \succeq 0$
- Исчисление выпуклых функций: построение f специальным образом

Как проверить выпуклость?

- Определение, критерии первого или второго порядка, например $f''(\mathbf{x}) \succeq 0$
- Исчисление выпуклых функций: построение f специальным образом
  - Дан набор простых функций, выпуклость которых известна

Как проверить выпуклость?

- Определение, критерии первого или второго порядка, например $f''(\mathbf{x}) \succeq 0$
- Исчисление выпуклых функций: построение f специальным образом
  - Дан набор простых функций, выпуклость которых известна
  - Даны сочетания и преобразования, не меняющие выпуклость

Примеры простых выпуклых функций

- При $x > 0$: x^p для $p < 0,\ p \geq 1$ и x^{-p} для $p \in [0, 1]$

Примеры простых выпуклых функций

- При $x > 0$: x^p для $p < 0,\ p \geq 1$ и x^{-p} для $p \in [0, 1]$
- $e^x,\ -\log x,\ x \log x$

Примеры простых выпуклых функций

- При $x > 0$: x^p для $p < 0,\ p \geq 1$ и x^{-p} для $p \in [0, 1]$
- $e^x,\ -\log x,\ x \log x$
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + b$

Примеры простых выпуклых функций

- При $x > 0$: x^p для $p < 0,\ p \geq 1$ и x^{-p} для $p \in [0, 1]$
- $e^x,\ -\log x,\ x \log x$
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + b$
- $\|\mathbf{x}\|$ – любая норма

Примеры простых выпуклых функций

- При $x > 0$: x^p для $p < 0,\ p \geq 1$ и x^{-p} для $p \in [0, 1]$
- $e^x,\ -\log x,\ x \log x$
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + b$
- $\|\mathbf{x}\|$ – любая норма
- $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\log(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n})$

Примеры простых выпуклых функций

- При $x > 0$: x^p для $p < 0,\ p \geq 1$ и x^{-p} для $p \in [0, 1]$
- $e^x,\ -\log x,\ x \log x$
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + b$
- $\|\mathbf{x}\|$ – любая норма
- $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\log(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n})$
- $\log \det \mathbf{X}^{-1}$ для $\mathbf{X} \in \mathbb{S}^n_{++}$

Правила исчисления выпуклых функций

- Умножение на неотрицательную константу: f выпукла и $\alpha > 0$, тогда αf выпукла

Правила исчисления выпуклых функций

- Умножение на неотрицательную константу: f выпукла и $\alpha > 0$, тогда αf выпукла
- Сложение: f, g выпуклы, тогда $f + g$ выпукла

Правила исчисления выпуклых функций

- Умножение на неотрицательную константу: f выпукла и $\alpha > 0$, тогда αf выпукла
- Сложение: f, g выпуклы, тогда $f + g$ выпукла
- Композиция с аффинной функцией: f выпукла, тогда $f(\mathbf{Ax} + \mathbf{b})$ также выпукла

Правила исчисления выпуклых функций

- Умножение на неотрицательную константу: f выпукла и $\alpha > 0$, тогда αf выпукла
- Сложение: f, g выпуклы, тогда $f + g$ выпукла
- Композиция с аффинной функцией: f выпукла, тогда $f(\mathbf{Ax} + \mathbf{b})$ также выпукла
- Взятие максимума: $f_1, \ldots, f_m$ выпуклы, тогда $\max\limits_{i=1,\ldots,m} \{f_i(\mathbf{x})\}$ выпукла

Правила исчисления выпуклых функций

- Умножение на неотрицательную константу: f выпукла и $\alpha > 0$, тогда αf выпукла
- Сложение: f, g выпуклы, тогда $f + g$ выпукла
- Композиция с аффинной функцией: f выпукла, тогда $f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ также выпукла
- Взятие максимума: $f_1, \ldots, f_m$ выпуклы, тогда $\max\limits_{i=1,\ldots,m} \{f_i(\mathbf{x})\}$ выпукла
- Композиция: если h выпукла и возрастает, f выпукла, тогда $g(\mathbf{x}) = h(f(\mathbf{x}))$ выпукла

Правила исчисления выпуклых функций

- Умножение на неотрицательную константу: f выпукла и $\alpha > 0$, тогда αf выпукла
- Сложение: f, g выпуклы, тогда $f + g$ выпукла
- Композиция с аффинной функцией: f выпукла, тогда $f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ также выпукла
- Взятие максимума: $f_1, \ldots, f_m$ выпуклы, тогда $\max\limits_{i=1,\ldots,m} \{f_i(\mathbf{x})\}$ выпукла
- Композиция: если h выпукла и возрастает, f выпукла, тогда $g(\mathbf{x}) = h(f(\mathbf{x}))$ выпукла
- И многие другие...

Примеры

- $f(\mathbf{x}) = \max\limits_{i=1,\dots,m} (\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i)$

Примеры

- $f(\mathbf{x}) = \max\limits_{i=1,\dots,m}(\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle + b_i)$
- ℓ_1 регуляризация задачи наименьших квадратов

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \quad \lambda > 0$$

Примеры

- $f(\mathbf{x}) = \max\limits_{i=1,\ldots,m}(\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle + b_i)$
- ℓ_1 регуляризация задачи наименьших квадратов

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \quad \lambda > 0$$

- Логарифмический барьер

$$-\sum_{i=1}^{m} \log(-f_i(\mathbf{x}))$$

при $\{\mathbf{x} \mid f_i(\mathbf{x}) < 0\}$ и выпуклых $f_i(\mathbf{x})$

Примеры

- $f(\mathbf{x}) = \max_{i=1,\dots,m} (\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i)$
- ℓ_1 регуляризация задачи наименьших квадратов

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \quad \lambda > 0$$

- Логарифмический барьер

$$-\sum_{i=1}^{m} \log(-f_i(\mathbf{x}))$$

  при $\{\mathbf{x} \mid f_i(\mathbf{x}) < 0\}$ и выпуклых $f_i(\mathbf{x})$
- Максимальное собственное значение $\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n$:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) = \sup_{\|\mathbf{x}\|_2=1} (\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x})$$

Как решать задачу выпуклой оптимизации?

- Использовать «стандартный» солвер (для LP, QP, SDP...)

Как решать задачу выпуклой оптимизации?

- Использовать «стандартный» солвер (для LP, QP, SDP...)
  - лёгкий путь

Как решать задачу выпуклой оптимизации?

- Использовать «стандартный» солвер (для LP, QP, SDP...)
  - лёгкий путь
  - задача ***должна быть*** в стандартной форме для выбранного солвера

Как решать задачу выпуклой оптимизации?

- Использовать «стандартный» солвер (для LP, QP, SDP...)
  - лёгкий путь
  - задача ***должна быть*** в стандартной форме для выбранного солвера
  - сложность разработки компенсируется количеством пользователей

Как решать задачу выпуклой оптимизации?

- Использовать «стандартный» солвер (для LP, QP, SDP...)
  - лёгкий путь
  - задача ***должна быть*** в стандартной форме для выбранного солвера
  - сложность разработки компенсируется количеством пользователей
- Придумать и/или реализовать метод самостоятельно

Как решать задачу выпуклой оптимизации?

- Использовать «стандартный» солвер (для LP, QP, SDP...)
  - лёгкий путь
  - задача ***должна быть*** в стандартной форме для выбранного солвера
  - сложность разработки компенсируется количеством пользователей
- Придумать и/или реализовать метод самостоятельно
  - Трудоёмко

Как решать задачу выпуклой оптимизации?

- Использовать «стандартный» солвер (для LP, QP, SDP...)
  - лёгкий путь
  - задача ***должна быть*** в стандартной форме для выбранного солвера
  - сложность разработки компенсируется количеством пользователей
- Придумать и/или реализовать метод самостоятельно
  - Трудоёмко
  - Может быть эффективнее для конкретной задачи

Как решать задачу выпуклой оптимизации?

- Использовать «стандартный» солвер (для LP, QP, SDP...)
  - лёгкий путь
  - задача ***должна быть*** в стандартной форме для выбранного солвера
  - сложность разработки компенсируется количеством пользователей
- Придумать и/или реализовать метод самостоятельно
  - Трудоёмко
  - Может быть эффективнее для конкретной задачи
- Преобразовать задачу к стандартному виду и использовать стандартный солвер

Как решать задачу выпуклой оптимизации?

- Использовать «стандартный» солвер (для LP, QP, SDP...)
  - лёгкий путь
  - задача ***должна быть*** в стандартной форме для выбранного солвера
  - сложность разработки компенсируется количеством пользователей
- Придумать и/или реализовать метод самостоятельно
  - Трудоёмко
  - Может быть эффективнее для конкретной задачи
- Преобразовать задачу к стандартному виду и использовать стандартный солвер
  - Расширяет множество задач, подходящих для решения

Как решать задачу выпуклой оптимизации?

- Использовать «стандартный» солвер (для LP, QP, SDP...)
  - лёгкий путь
  - задача ***должна быть*** в стандартной форме для выбранного солвера
  - сложность разработки компенсируется количеством пользователей
- Придумать и/или реализовать метод самостоятельно
  - Трудоёмко
  - Может быть эффективнее для конкретной задачи
- Преобразовать задачу к стандартному виду и использовать стандартный солвер
  - Расширяет множество задач, подходящих для решения
  - Преобразование может быть громоздким

Общие методы решения задач выпуклой оптимизации

Субградиентный метод, метод эллипсоидов, проксимальный метод и их вариации

Общие методы решения задач выпуклой оптимизации

Субградиентный метод, метод эллипсоидов, проксимальный метод и их вариации

- В основном разработаны в СССР в 1960-1970-ых годах, подробнее см. заметки Б.Т. Поляка

Общие методы решения задач выпуклой оптимизации

Субградиентный метод, метод эллипсоидов, проксимальный метод и их вариации

- В основном разработаны в СССР в 1960-1970-ых годах, подробнее см. заметки Б.Т. Поляка
- Универсальные методы решения задач выпуклой оптимизации, даже для недифференцируемых f_i

Общие методы решения задач выпуклой оптимизации

Субградиентный метод, метод эллипсоидов, проксимальный метод и их вариации

- В основном разработаны в СССР в 1960-1970-ых годах, подробнее см. заметки Б.Т. Поляка
- Универсальные методы решения задач выпуклой оптимизации, даже для недифференцируемых f_i
- Метод эллипсоидов эффективен в теории (полиномиален)

Общие методы решения задач выпуклой оптимизации

Субградиентный метод, метод эллипсоидов, проксимальный метод и их вариации

- В основном разработаны в СССР в 1960-1970-ых годах, подробнее см. заметки Б.Т. Поляка
- Универсальные методы решения задач выпуклой оптимизации, даже для недифференцируемых f_i
- Метод эллипсоидов эффективен в теории (полиномиален)
- На практике такие методы могут быть медленными

Методы внутренней точки (IPM) для выпуклых задач

- Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, Y. Nesterov, A. Nemirovskii, 1994

Методы внутренней точки (IPM) для выпуклых задач

- Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, Y. Nesterov, A. Nemirovskii, 1994
- Обзор про IPM см. тут

Методы внутренней точки (IPM) для выпуклых задач

- Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, Y. Nesterov, A. Nemirovskii, 1994
- Обзор про IPM см. тут
- Применим для **гладких** f_i и задач в конической форме (LP, SOCP, SDP)

Методы внутренней точки (IPM) для выпуклых задач

- Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, Y. Nesterov, A. Nemirovskii, 1994
- Обзор про IPM см. тут
- Применим для **гладких** f_i и задач в конической форме (LP, SOCP, SDP)
- Чрезвычайно эффективный метод: необходимо сделать несколько десятков итераций, практически независимо от размерности задачи

Методы внутренней точки (IPM) для выпуклых задач

- Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, Y. Nesterov, A. Nemirovskii, 1994
- Обзор про IPM см. тут
- Применим для **гладких** f_i и задач в конической форме (LP, SOCP, SDP)
- Чрезвычайно эффективный метод: необходимо сделать несколько десятков итераций, практически независимо от размерности задачи
- На каждой итерации надо решить некоторую линейную систему

А если IPM нельзя применить к задаче?

А если IPM нельзя применить к задаче?

- Пример: ℓ_1 регуляризация задачи наименьших квадратов

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \quad \lambda > 0$$

А если IPM нельзя применить к задаче?

- Пример: ℓ_1 регуляризация задачи наименьших квадратов

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \quad \lambda > 0$$

- Задача выпукла, но f негладкая!

А если IPM нельзя применить к задаче?

- Пример: ℓ_1 регуляризация задачи наименьших квадратов

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \quad \lambda > 0$$

- Задача выпукла, но f негладкая!
- **Основная идея**: изменить задачу так, чтобы IPM можно было применять

А если IPM нельзя применить к задаче?

- Пример: ℓ_1 регуляризация задачи наименьших квадратов

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \quad \lambda > 0$$

- Задача выпукла, но f негладкая!
- **Основная идея**: изменить задачу так, чтобы IPM можно было применять
- Даже если в новой задаче будет больше переменных и ограничений, она может быть эффективна решена с помощью IPM

Пример

- Исходная задача: n переменных, нет ограничений

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \quad \lambda > 0$$

Пример

- Исходная задача: n переменных, нет ограничений

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \quad \lambda > 0$$

- Введём новую переменную $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ и новые ограничения $|x_i| \leq t_i$:

$$\min_{(\mathbf{x},\mathbf{t})} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\mathbf{1}^\top\mathbf{t}$$

$$\text{s.t. } -\mathbf{t} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{t}$$

Пример

- Исходная задача: n переменных, нет ограничений

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \quad \lambda > 0$$

- Введём новую переменную $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ и новые ограничения $|x_i| \leq t_i$:

$$\begin{aligned} &\min_{(\mathbf{x},\mathbf{t})} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\mathbf{1}^\top\mathbf{t} \\ \text{s.t. } & -\mathbf{t} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{t} \end{aligned}$$

- В новой задаче $2n$ переменных и $2n$ ограничений, но она **гладкая**!

Пример

- Исходная задача: n переменных, нет ограничений

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \quad \lambda > 0$$

- Введём новую переменную $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ и новые ограничения $|x_i| \leq t_i$:

$$\begin{aligned} &\min_{(\mathbf{x},\mathbf{t})} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\mathbf{1}^\top\mathbf{t} \\ \text{s.t. } & -\mathbf{t} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{t} \end{aligned}$$

- В новой задаче $2n$ переменных и $2n$ ограничений, но она **гладкая**!
- **Важно**: задачи эквивалентны! Решив одну, получаем решение другой и наоборот

Почему такое переформулирование корректно?

- Покажем, что для решения гладкой задачи $|x_i^*| = t_i^*$

Почему такое переформулирование корректно?

- Покажем, что для решения гладкой задачи $|x_i^*| = t_i^*$
- Для этого запишем условия ККТ, так как задача выпукла и выполнено условие Слейтера

Почему такое переформулирование корректно?

- Покажем, что для решения гладкой задачи $|x_i^*| = t_i^*$
- Для этого запишем условия ККТ, так как задача выпукла и выполнено условие Слейтера
    - Допустимость в прямой задаче: $x_i^* - t_i^* \leq 0, \; -x_i^* - t_i^* \leq 0$

Почему такое переформулирование корректно?

- Покажем, что для решения гладкой задачи $|x_i^*| = t_i^*$
- Для этого запишем условия ККТ, так как задача выпукла и выполнено условие Слейтера
    - Допустимость в прямой задаче: $x_i^* - t_i^* \leq 0, \; -x_i^* - t_i^* \leq 0$
    - Допустимость в двойственной задаче: $\mu_i^* \geq 0, \; \nu_i^* \geq 0$

Почему такое переформулирование корректно?

- Покажем, что для решения гладкой задачи $|x_i^*| = t_i^*$
- Для этого запишем условия ККТ, так как задача выпукла и выполнено условие Слейтера
  - Допустимость в прямой задаче: $x_i^* - t_i^* \leq 0, \; -x_i^* - t_i^* \leq 0$
  - Допустимость в двойственной задаче: $\mu_i^* \geq 0, \; \nu_i^* \geq 0$
  - Дополняющая нежёсткость:
    $\mu_i^*(x_i^* - t_i^*) = 0, \; \nu_i^*(-x_i^* - t_i^*) = 0$

Почему такое переформулирование корректно?

- Покажем, что для решения гладкой задачи $|x_i^*| = t_i^*$
- Для этого запишем условия ККТ, так как задача выпукла и выполнено условие Слейтера
  - Допустимость в прямой задаче: $x_i^* - t_i^* \leq 0, \ -x_i^* - t_i^* \leq 0$
  - Допустимость в двойственной задаче: $\mu_i^* \geq 0, \ \nu_i^* \geq 0$
  - Дополняющая нежёсткость:
    $\mu_i^*(x_i^* - t_i^*) = 0, \ \nu_i^*(-x_i^* - t_i^*) = 0$
  - Стационарность Лагранжиана по переменным $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) + \boldsymbol{\mu}^* - \boldsymbol{\nu}^* \\ \lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu}^* - \boldsymbol{\nu}^* \end{bmatrix} = 0$$

Почему такое переформулирование корректно?

- Покажем, что для решения гладкой задачи $|x_i^*| = t_i^*$
- Для этого запишем условия ККТ, так как задача выпукла и выполнено условие Слейтера
    - Допустимость в прямой задаче: $x_i^* - t_i^* \leq 0, \; -x_i^* - t_i^* \leq 0$
    - Допустимость в двойственной задаче: $\mu_i^* \geq 0, \; \nu_i^* \geq 0$
    - Дополняющая нежёсткость: $\mu_i^*(x_i^* - t_i^*) = 0, \; \nu_i^*(-x_i^* - t_i^*) = 0$
    - Стационарность Лагранжиана по переменным $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) + \boldsymbol{\mu}^* - \boldsymbol{\nu}^* \\ \lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu}^* - \boldsymbol{\nu}^* \end{bmatrix} = 0$$

- Имеем, что $\boldsymbol{\mu}^* + \boldsymbol{\nu}^* = \lambda\mathbf{1}$, где $\lambda > 0$

Почему такое переформулирование корректно?

- Покажем, что для решения гладкой задачи $|x_i^*| = t_i^*$
- Для этого запишем условия ККТ, так как задача выпукла и выполнено условие Слейтера
  - Допустимость в прямой задаче: $x_i^* - t_i^* \leq 0, \; -x_i^* - t_i^* \leq 0$
  - Допустимость в двойственной задаче: $\mu_i^* \geq 0, \; \nu_i^* \geq 0$
  - Дополняющая нежёсткость:
    $\mu_i^*(x_i^* - t_i^*) = 0, \; \nu_i^*(-x_i^* - t_i^*) = 0$
  - Стационарность Лагранжиана по переменным $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) + \boldsymbol{\mu}^* - \boldsymbol{\nu}^* \\ \lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu}^* - \boldsymbol{\nu}^* \end{bmatrix} = 0$$

- Имеем, что $\boldsymbol{\mu}^* + \boldsymbol{\nu}^* = \lambda\mathbf{1}$, где $\lambda > 0$
- Значит μ_i^* и ν_i^* не могут равны нулю одновременно

Почему такое переформулирование корректно?

- Покажем, что для решения гладкой задачи $|x_i^*| = t_i^*$
- Для этого запишем условия ККТ, так как задача выпукла и выполнено условие Слейтера
  - Допустимость в прямой задаче: $x_i^* - t_i^* \leq 0, \; -x_i^* - t_i^* \leq 0$
  - Допустимость в двойственной задаче: $\mu_i^* \geq 0, \; \nu_i^* \geq 0$
  - Дополняющая нежёсткость:
    $\mu_i^*(x_i^* - t_i^*) = 0, \; \nu_i^*(-x_i^* - t_i^*) = 0$
  - Стационарность Лагранжиана по переменным $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) + \boldsymbol{\mu}^* - \boldsymbol{\nu}^* \\ \lambda\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu}^* - \boldsymbol{\nu}^* \end{bmatrix} = 0$$

- Имеем, что $\boldsymbol{\mu}^* + \boldsymbol{\nu}^* = \lambda\mathbf{1}$, где $\lambda > 0$
- Значит μ_i^* и ν_i^* не могут равны нулю одновременно
- Из дополняющей нежёсткости следует, что $x_i^* = t_i^*$ или $x_i^* = -t_i^*$

Преобразование задачи и эффективность решения

- Дана выпуклая задача P_0

Преобразование задачи и эффективность решения

- Дана выпуклая задача P_0
- Выполняются последовательные эквивалентные преобразования

$$P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_K,$$

где P_K – задача, которую можно решать IPM

Преобразование задачи и эффективность решения

- Дана выпуклая задача P_0
- Выполняются последовательные эквивалентные преобразования

$$P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_K,$$

  где P_K – задача, которую можно решать IPM
- Эффективное решение P_K

Преобразование задачи и эффективность решения

- Дана выпуклая задача P_0
- Выполняются последовательные эквивалентные преобразования

$$P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_K,$$

  где P_K – задача, которую можно решать IPM
- Эффективное решение P_K
- Обратное преобразование решения P_K в решение P_0

Преобразование задачи и эффективность решения

- Дана выпуклая задача P_0
- Выполняются последовательные эквивалентные преобразования

  $$P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_K,$$

  где P_K – задача, которую можно решать IPM
- Эффективное решение P_K
- Обратное преобразование решения P_K в решение P_0
- P_K может иметь больше ограничений и/или переменных, но наличие определённой структуры и высокая эффективность IPM компенсируют это

Примеры преобразований задач

- Правила преобразования выпуклых функций порождают преобразования задач

Примеры преобразований задач

- Правила преобразования выпуклых функций порождают преобразования задач
- $\max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$

Примеры преобразований задач

- Правила преобразования выпуклых функций порождают преобразования задач
- $\max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$
    - Вводим новую переменную $t = \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$

Примеры преобразований задач

- Правила преобразования выпуклых функций порождают преобразования задач
- $\max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$
  - Вводим новую переменную $t = \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$
  - Добавляем ограничения $f_1(\mathbf{x}) \leq t,\ f_2(\mathbf{x}) \leq t$

Примеры преобразований задач

- Правила преобразования выпуклых функций порождают преобразования задач
- $\max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$
  - Вводим новую переменную $t = \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$
  - Добавляем ограничения $f_1(\mathbf{x}) \leq t,\ f_2(\mathbf{x}) \leq t$
- $h(f(\mathbf{x}))$

Примеры преобразований задач

- Правила преобразования выпуклых функций порождают преобразования задач
- $\max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$
  - Вводим новую переменную $t = \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$
  - Добавляем ограничения $f_1(\mathbf{x}) \leq t, \; f_2(\mathbf{x}) \leq t$
- $h(f(\mathbf{x}))$
  - Вводим новую переменную $t = f(\mathbf{x})$

Примеры преобразований задач

- Правила преобразования выпуклых функций порождают преобразования задач
- $\max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$
  - Вводим новую переменную $t = \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$
  - Добавляем ограничения $f_1(\mathbf{x}) \leq t, \ f_2(\mathbf{x}) \leq t$
- $h(f(\mathbf{x}))$
  - Вводим новую переменную $t = f(\mathbf{x})$
  - Добавляем ограничение $f(\mathbf{x}) \leq t$

От выпуклых функций к коническим задачам

- Пусть в задаче есть ограничение $f(\mathbf{x}) \leq t$

От выпуклых функций к коническим задачам

- Пусть в задаче есть ограничение $f(\mathbf{x}) \leq t$
- Рассмотрим конус

$$K = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid yf(\mathbf{x}/y) \leq z\}$$

От выпуклых функций к коническим задачам

- Пусть в задаче есть ограничение $f(\mathbf{x}) \leq t$
- Рассмотрим конус

$$K = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid yf(\mathbf{x}/y) \leq z\}$$

- $K \cup \{0, 0, 0\}$ — выпуклый конус при выпуклой функции f

От выпуклых функций к коническим задачам

- Пусть в задаче есть ограничение $f(\mathbf{x}) \leq t$
- Рассмотрим конус

$$K = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid yf(\mathbf{x}/y) \leq z\}$$

- $K \cup \{0, 0, 0\}$ — выпуклый конус при выпуклой функции f
- Тогда $f(\mathbf{x}) \leq t \Leftrightarrow (\mathbf{x}, 1, t) \in K$

От выпуклых функций к коническим задачам

- Пусть в задаче есть ограничение $f(\mathbf{x}) \leq t$
- Рассмотрим конус

$$K = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid yf(\mathbf{x}/y) \leq z\}$$

- $K \cup \{0, 0, 0\}$ — выпуклый конус при выпуклой функции f
- Тогда $f(\mathbf{x}) \leq t \Leftrightarrow (\mathbf{x}, 1, t) \in K$

Перспективное преобразование

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпуклая функция. Тогда $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ такая что $g(\mathbf{x}, t) = tf(\mathbf{x}/t)$ также выпукла для $t > 0$.

От выпуклых функций к коническим задачам

- Пусть в задаче есть ограничение $f(\mathbf{x}) \leq t$
- Рассмотрим конус

$$K = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid yf(\mathbf{x}/y) \leq z\}$$

- $K \cup \{0, 0, 0\}$ — выпуклый конус при выпуклой функции f
- Тогда $f(\mathbf{x}) \leq t \Leftrightarrow (\mathbf{x}, 1, t) \in K$

Перспективное преобразование

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпуклая функция. Тогда $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ такая что $g(\mathbf{x}, t) = tf(\mathbf{x}/t)$ также выпукла для $t > 0$.

Доказательство

- $(\mathbf{x}, t, s) \in \mathrm{epi}(g)$. Тогда $f(\mathbf{x}/t) \leq s/t, t > 0$
- Значит $(\mathbf{x}/t, s/t) \in \mathrm{epi}(f)$
- Тогда надграфик для g есть обратное преобразование от $P(u, v, w) = (u/w, v/w), w > 0$ для надграфика f, который выпуклый

Перспективное отображение

Определение

Перспективным отображением множества $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$ называется функция $P(\mathbf{x}) = (x_1/x_{n+1}, \ldots, x_n/x_{n+1})$.

Перспективное отображение

Определение

Перспективным отображением множества $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$ называется функция $P(\mathbf{x}) = (x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1})$.

Утверждение

Перспективне отображение выпуклого множества даёт выпуклое множество.

Перспективное отображение

Определение

Перспективным отображением множества $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$ называется функция $P(\mathbf{x}) = (x_1/x_{n+1}, \ldots, x_n/x_{n+1})$.

Утверждение

Перспективне отображение выпуклого множества даёт выпуклое множество.

Доказательство

Перспективное отображение

Определение

Перспективным отображением множества $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$ называется функция $P(\mathbf{x}) = (x_1/x_{n+1}, \ldots, x_n/x_{n+1})$.

Утверждение

Перспективне отображение выпуклого множества даёт выпуклое множество.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = (\hat{\mathbf{x}}, x_{n+1}), \mathbf{y} = (\hat{\mathbf{y}}, y_{n+1}) \in C$ и $x_{n+1} > 0, y_{n+1} > 0$

Перспективное отображение

Определение

Перспективным отображением множества $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$ называется функция $P(\mathbf{x}) = (x_1/x_{n+1}, \ldots, x_n/x_{n+1})$.

Утверждение

Перспективне отображение выпуклого множества даёт выпуклое множество.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = (\hat{\mathbf{x}}, x_{n+1}), \mathbf{y} = (\hat{\mathbf{y}}, y_{n+1}) \in C$ и $x_{n+1} > 0, y_{n+1} > 0$
- Тогда $P(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) = \frac{\alpha\hat{\mathbf{x}}+(1-\alpha)\hat{\mathbf{y}}}{\alpha x_{n+1}+(1-\alpha)y_{n+1}}$

Перспективное отображение

Определение

Перспективным отображением множества $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$ называется функция $P(\mathbf{x}) = (x_1/x_{n+1}, \ldots, x_n/x_{n+1})$.

Утверждение

Перспективне отображение выпуклого множества даёт выпуклое множество.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = (\hat{\mathbf{x}}, x_{n+1}), \mathbf{y} = (\hat{\mathbf{y}}, y_{n+1}) \in C$ и $x_{n+1} > 0, y_{n+1} > 0$
- Тогда $P(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) = \frac{\alpha\hat{\mathbf{x}}+(1-\alpha)\hat{\mathbf{y}}}{\alpha x_{n+1}+(1-\alpha)y_{n+1}}$
- $P(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) = \beta P(\mathbf{x}) + (1-\beta)P(\mathbf{y})$, $\beta \in [0, 1]$

Перспективное отображение

Определение

Перспективным отображением множества $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$ называется функция $P(\mathbf{x}) = (x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1})$.

Утверждение

Перспективне отображение выпуклого множества даёт выпуклое множество.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x} = (\hat{\mathbf{x}}, x_{n+1}), \mathbf{y} = (\hat{\mathbf{y}}, y_{n+1}) \in C$ и $x_{n+1} > 0, y_{n+1} > 0$
- Тогда $P(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) = \frac{\alpha\hat{\mathbf{x}} + (1-\alpha)\hat{\mathbf{y}}}{\alpha x_{n+1} + (1-\alpha) y_{n+1}}$
- $P(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) = \beta P(\mathbf{x}) + (1-\beta)P(\mathbf{y})$, $\beta \in [0, 1]$
- Значит образ также является выпуклым множеством

От доказательства выпуклости к применимости IPM

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \le 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

- Построение f_i из элементарных функций и правил преобразований даёт доказательство выпуклости

От доказательства выпуклости к применимости IPM

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } &f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Построение f_i из элементарных функций и правил преобразований даёт доказательство выпуклости
- Аналогичный разбор даёт преобразование задачи к форме, состоящей из элементарных функций и аффинных равенств

От доказательства выпуклости к применимости IPM

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x})\\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \dots, m\\
&\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

- Построение f_i из элементарных функций и правил преобразований даёт доказательство выпуклости
- Аналогичный разбор даёт преобразование задачи к форме, состоящей из элементарных функций и аффинных равенств
- Если элементарные функции подходят для IPM, преобразование автоматически даёт форму задачи, которая может быть решена IPM

Disciplined convex programming (DCP)

- Задаются искомые переменные и фиксированные параметры

Disciplined convex programming (DCP)

- Задаются искомые переменные и фиксированные параметры
- Целевая функция и ограничения строятся из элементарных функций с помощью правил композиций и сочетаний

Disciplined convex programming (DCP)

- Задаются искомые переменные и фиксированные параметры
- Целевая функция и ограничения строятся из элементарных функций с помощью правил композиций и сочетаний
- Задача выпукла по построению

Disciplined convex programming (DCP)

- Задаются искомые переменные и фиксированные параметры
- Целевая функция и ограничения строятся из элементарных функций с помощью правил композиций и сочетаний
- Задача выпукла по построению
- Автоматически разбирается на элементы

Disciplined convex programming (DCP)

- Задаются искомые переменные и фиксированные параметры
- Целевая функция и ограничения строятся из элементарных функций с помощью правил композиций и сочетаний
- Задача выпукла по построению
- Автоматически разбирается на элементы
- Приводится к форме для запуска IPM

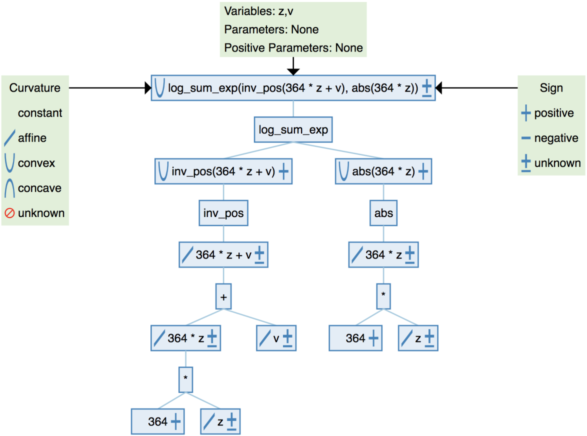
Disciplined convex programming (DCP)

- Задаются искомые переменные и фиксированные параметры
- Целевая функция и ограничения строятся из элементарных функций с помощью правил композиций и сочетаний
- Задача выпукла по построению
- Автоматически разбирается на элементы
- Приводится к форме для запуска IPM
- Решается некоторым стандартным пакетом для IPM

Disciplined convex programming (DCP)

- Задаются искомые переменные и фиксированные параметры
- Целевая функция и ограничения строятся из элементарных функций с помощью правил композиций и сочетаний
- Задача выпукла по построению
- Автоматически разбирается на элементы
- Приводится к форме для запуска IPM
- Решается некоторым стандартным пакетом для IPM
- Восстанавливается решение исходной задачи

Пример разбора выражения и проверка его на выпуклость



Больше примеров можно найти на сайте

История

- Системы AMPL, GAMS – 1970-ые
- Пакеты для задач SDP/LMI: `sdpsol` (Wu, Boyd), `lmilab` (Gahinet, Nemirovsky), `lmitool` (El Ghaoui) – 1990-ые
- `yalmip` (Löfberg 2000–)
- automated convexity checking (Crusius PhD thesis 2002)
- disciplined convex programming (DCP) (Grant, Boyd, Ye 2004)
- `cvx` (Grant, Boyd, Ye 2005) для MATLAB
- `cvxopt` (Dahl, Vandenberghe 2005)
- `Convex.jl` (M. Udell, et. al. 2014) для Julia
- `cvxpy` (Diamond, Boyd 2016) для Python

Главное по DCP

Pro:

- Проверка выпуклости и генерация преобразования задачи для IPM

Главное по DCP

Pro:

- Проверка выпуклости и генерация преобразования задачи для IPM
- Построение задачи: элементарные выпуклые функции + правила композиций и преобразований

Contra:

Главное по DCP

Pro:

- Проверка выпуклости и генерация преобразования задачи для IPM
- Построение задачи: элементарные выпуклые функции + правила композиций и преобразований
- Очень похоже на математическую нотацию

Contra:

Главное по DCP

Pro:

- Проверка выпуклости и генерация преобразования задачи для IPM
- Построение задачи: элементарные выпуклые функции + правила композиций и преобразований
- Очень похоже на математическую нотацию

Contra:

- Не про «plug & play» или «try my code»

Главное по DCP

Pro:

- Проверка выпуклости и генерация преобразования задачи для IPM
- Построение задачи: элементарные выпуклые функции + правила композиций и преобразований
- Очень похоже на математическую нотацию

Contra:

- Не про «plug & play» или «try my code»
- Нельзя записать произвольную задачу и надеяться, что она будет выпукла

Солверы для решения общих задач оптимизации

- ipopt
- Pyomo
- Gurobi

Главное

- Правила построения выпуклых функций

Главное

- Правила построения выпуклых функций
- Сведение задач к стандартной форме

Главное

- Правила построения выпуклых функций
- Сведение задач к стандартной форме
- Disciplined convex programming

Главное

- Правила построения выпуклых функций
- Сведение задач к стандартной форме
- Disciplined convex programming
- Примеры

Главное

- Правила построения выпуклых функций
- Сведение задач к стандартной форме
- Disciplined convex programming
- Примеры
- Солверы для решения задач оптимизации