

# Методы оптимизации

## Лекция 8: Метод сопряжённых градиентов, метод тяжёлого шарика и ускоренный градиентный метод Нестерова

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики  
Московский физико-технический институт



15 ноября 2021 г.

## На прошлой лекции

- ▶ Введение в численные методы оптимизации
- ▶ Скорости сходимости методов
- ▶ Градиентный спуск
- ▶ Понятие о нижних оценках сходимости

## Получение нижних оценок: выпуклый случай

- ▶ Построим выпуклую  $L$ -гладкую функцию  $f$ , такую что за  $k$  итераций любой метод вида

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_0 + \text{span}(f'(\mathbf{x}_0), \dots, f'(\mathbf{x}_k))$$

сходится НЕ быстрее чем

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) - f^* \geq \frac{3L\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

## Получение нижних оценок: выпуклый случай

- Построим выпуклую  $L$ -гладкую функцию  $f$ , такую что за  $k$  итераций любой метод вида

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_0 + \text{span}(f'(\mathbf{x}_0), \dots, f'(\mathbf{x}_k))$$

сходится НЕ быстрее чем

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) - f^* \geq \frac{3L\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Рассмотрим квадратную матрицу вида

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

размерности  $n = 2k + 1$

- Для неё выполнено, что

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

Упражнение: проверьте это равенство!

- Для неё выполнено, что

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

Упражнение: проверьте это равенство!

- Это значит что  $\mathbf{A} \succeq 0$

- ▶ Для неё выполнено, что

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

Упражнение: проверьте это равенство!

- ▶ Это значит что  $\mathbf{A} \succeq 0$

- ▶ Более того  $\mathbf{A} \preceq 4\mathbf{I}$ , так как

$$\mathbf{x}^\top (\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) \mathbf{x} = -x_1^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1})^2 - x_n^2$$

- ▶ Для неё выполнено, что

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

Упражнение: проверьте это равенство!

- ▶ Это значит что  $\mathbf{A} \succeq 0$

- ▶ Более того  $\mathbf{A} \preceq 4\mathbf{I}$ , так как

$$\mathbf{x}^\top (\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) \mathbf{x} = -x_1^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1})^2 - x_n^2$$

- ▶ Итак, определим  $L$ -гладкую выпуклую функцию

$$f(\mathbf{x}) = \frac{L}{8} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{L}{4} \mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}$$



- ▶ Для неё выполнено, что

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

Упражнение: проверьте это равенство!

- ▶ Это значит что  $\mathbf{A} \succeq 0$

- ▶ Более того  $\mathbf{A} \preceq 4\mathbf{I}$ , так как

$$\mathbf{x}^\top (\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) \mathbf{x} = -x_1^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1})^2 - x_n^2$$

- ▶ Итак, определим  $L$ -гладкую выпуклую функцию

$$f(\mathbf{x}) = \frac{L}{8} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{L}{4} \mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}$$

- ▶ Её градиент  $f'(\mathbf{x}) = \frac{L}{4} \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{L}{4} \mathbf{e}_1$

- ▶ Для неё выполнено, что

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

Упражнение: проверьте это равенство!

- ▶ Это значит что  $\mathbf{A} \succeq 0$

- ▶ Более того  $\mathbf{A} \preceq 4\mathbf{I}$ , так как

$$\mathbf{x}^\top (\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) \mathbf{x} = -x_1^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1})^2 - x_n^2$$

- ▶ Итак, определим  $L$ -гладкую выпуклую функцию

$$f(\mathbf{x}) = \frac{L}{8} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{L}{4} \mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}$$

- ▶ Её градиент  $f'(\mathbf{x}) = \frac{L}{4} \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{L}{4} \mathbf{e}_1$
- ▶ Условие первого порядка даёт  $\mathbf{A} \mathbf{x}^* = \mathbf{e}_1$

- ▶ Для неё выполнено, что

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

Упражнение: проверьте это равенство!

- ▶ Это значит что  $\mathbf{A} \succeq 0$

- ▶ Более того  $\mathbf{A} \preceq 4\mathbf{I}$ , так как

$$\mathbf{x}^\top (\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) \mathbf{x} = -x_1^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1})^2 - x_n^2$$

- ▶ Итак, определим  $L$ -гладкую выпуклую функцию

$$f(\mathbf{x}) = \frac{L}{8} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{L}{4} \mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}$$

- ▶ Её градиент  $f'(\mathbf{x}) = \frac{L}{4} \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{L}{4} \mathbf{e}_1$
- ▶ Условие первого порядка даёт  $\mathbf{A} \mathbf{x}^* = \mathbf{e}_1$
- ▶ Из рекурсии можно показать, что  $x_i^* = 1 - \frac{i}{n+1}$

- Тогда оптимальное значение функции

$$\begin{aligned} f^* &= -\frac{L}{4} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{L}{8} \left( \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^2 + \frac{n}{(n+1)^2} \right) = \\ &= -\frac{L}{4} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{L}{8} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= -\frac{L}{8} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

- Тогда оптимальное значение функции

$$\begin{aligned} f^* &= -\frac{L}{4} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{L}{8} \left( \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^2 + \frac{n}{(n+1)^2} \right) = \\ &= -\frac{L}{4} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{L}{8} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= -\frac{L}{8} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

- Пусть  $\mathbf{x}_0 = 0$ , тогда  $\mathbf{x}_1 = \alpha \mathbf{e}_1$ , далее  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{e}_1)$  и тд

- ▶ Тогда оптимальное значение функции

$$\begin{aligned} f^* &= -\frac{L}{4} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{L}{8} \left( \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^2 + \frac{n}{(n+1)^2} \right) = \\ &= -\frac{L}{4} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{L}{8} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= -\frac{L}{8} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

- ▶ Пусть  $\mathbf{x}_0 = 0$ , тогда  $\mathbf{x}_1 = \alpha \mathbf{e}_1$ , далее  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{e}_1)$  и тд
- ▶ Заметим, что спустя  $k$  итераций в векторе  $\mathbf{x}_k$  первые  $k$  элементов нули, то есть  $[\mathbf{x}_k]_i = 0$  при  $i > k$

- ▶ Тогда оптимальное значение функции

$$\begin{aligned} f^* &= -\frac{L}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{L}{8} \left( \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{n}{(n+1)^2} \right) = \\ &= -\frac{L}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

- ▶ Пусть  $\mathbf{x}_0 = 0$ , тогда  $\mathbf{x}_1 = \alpha \mathbf{e}_1$ , далее  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{e}_1)$  и тд
- ▶ Заметим, что спустя  $k$  итераций в векторе  $\mathbf{x}_k$  первые  $k$  элементов ненули, то есть  $[\mathbf{x}_k]_i = 0$  при  $i > k$
- ▶ Рассмотрим задачу

$$\mathbf{x}_k^* = \arg \min_{x_i=0, i>k} f(\mathbf{x})$$

- ▶ Тогда оптимальное значение функции

$$\begin{aligned}
 f^* &= -\frac{L}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{L}{8} \left( \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{n}{(n+1)^2} \right) = \\
 &= -\frac{L}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

- ▶ Пусть  $\mathbf{x}_0 = 0$ , тогда  $\mathbf{x}_1 = \alpha \mathbf{e}_1$ , далее  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{e}_1)$  и тд
- ▶ Заметим, что спустя  $k$  итераций в векторе  $\mathbf{x}_k$  первые  $k$  элементов ненули, то есть  $[\mathbf{x}_k]_i = 0$  при  $i > k$
- ▶ Рассмотрим задачу

$$\mathbf{x}_k^* = \arg \min_{x_i=0, i>k} f(\mathbf{x})$$

- ▶ Соответственно её решение  $[\mathbf{x}_k^*]_i = \begin{cases} 1 - \frac{i}{k+1}, & i \leq k \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$



► Тогда  $f(\mathbf{x}_k^*) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$

- ▶ Тогда  $f(\mathbf{x}_k^*) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$
- ▶ В итоге получим следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) &\geq f(\mathbf{x}_k^*) - f(\mathbf{x}^*) = \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+1+1}\right) = \frac{L}{8} \frac{1}{2(k+1)} \end{aligned}$$

- ▶ Тогда  $f(\mathbf{x}_k^*) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$
- ▶ В итоге получим следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) &\geq f(\mathbf{x}_k^*) - f(\mathbf{x}^*) = \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+1+1}\right) = \frac{L}{8} \frac{1}{2(k+1)} \end{aligned}$$

- ▶ Далее оценим  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_2^2 = \|\mathbf{x}^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2$

- ▶ Тогда  $f(\mathbf{x}_k^*) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$
- ▶ В итоге получим следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) &\geq f(\mathbf{x}_k^*) - f(\mathbf{x}^*) = \\
 &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \\
 &= \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+1+1}\right) = \frac{L}{8} \frac{1}{2(k+1)}
 \end{aligned}$$

- ▶ Далее оценим  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_2^2 = \|\mathbf{x}^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2$
- ▶  $\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 = n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2$

- ▶ Тогда  $f(\mathbf{x}_k^*) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$
- ▶ В итоге получим следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) &\geq f(\mathbf{x}_k^*) - f(\mathbf{x}^*) = \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+1+1}\right) = \frac{L}{8} \frac{1}{2(k+1)} \end{aligned}$$

- ▶ Далее оценим  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_2^2 = \|\mathbf{x}^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2$
- ▶  $\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 = n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2$
- ▶ Вспомним, что  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  и  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

- ▶ Тогда  $f(\mathbf{x}_k^*) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$
- ▶ В итоге получим следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) &\geq f(\mathbf{x}_k^*) - f(\mathbf{x}^*) = \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+1+1}\right) = \frac{L}{8} \frac{1}{2(k+1)} \end{aligned}$$

- ▶ Далее оценим  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_2^2 = \|\mathbf{x}^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2$
- ▶  $\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 = n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2$
- ▶ Вспомним, что  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  и  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- ▶ Тогда  $\|\mathbf{x}^*\|_2^2 = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)} \leq \frac{n+1}{3} = \frac{2(k+1)}{3}$

- ▶ Тогда  $f(\mathbf{x}_k^*) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$
- ▶ В итоге получим следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) &\geq f(\mathbf{x}_k^*) - f(\mathbf{x}^*) = \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+1+1}\right) = \frac{L}{8} \frac{1}{2(k+1)} \end{aligned}$$

- ▶ Далее оценим  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_2^2 = \|\mathbf{x}^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2$
- ▶  $\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 = n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2$
- ▶ Вспомним, что  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  и  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- ▶ Тогда  $\|\mathbf{x}^*\|_2^2 = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)} \leq \frac{n+1}{3} = \frac{2(k+1)}{3}$
- ▶ И наконец  $k+1 \geq \frac{3}{2} \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0\|_2^2$

## Итоговая оценка снизу

$$f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) \geq \frac{L}{8} \frac{1}{2(k+1)} = \frac{L}{8} \frac{k+1}{2(k+1)^2} \geq \frac{L}{8} \frac{3}{2} \frac{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0\|_2^2}{2(k+1)^2}$$



## Итоговая оценка снизу

$$f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) \geq \frac{L}{8} \frac{1}{2(k+1)} = \frac{L}{8} \frac{k+1}{2(k+1)^2} \geq \frac{L}{8} \frac{3}{2} \frac{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0\|_2^2}{2(k+1)^2}$$

Случай сильно выпуклой функции

## Итоговая оценка снизу

$$f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) \geq \frac{L}{8} \frac{1}{2(k+1)} = \frac{L}{8} \frac{k+1}{2(k+1)^2} \geq \frac{L}{8} \frac{3}{2} \frac{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0\|_2^2}{2(k+1)^2}$$

## Случай сильно выпуклой функции

- ▶ "Плохая" функция  $g(\mathbf{x}) = \frac{\mu(\kappa-1)}{8} (\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2$

## Итоговая оценка снизу

$$f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) \geq \frac{L}{8} \frac{1}{2(k+1)} = \frac{L}{8} \frac{k+1}{2(k+1)^2} \geq \frac{L}{8} \frac{3}{2} \frac{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0\|_2^2}{2(k+1)^2}$$

### Случай сильно выпуклой функции

- ▶ "Плохая" функция  $g(\mathbf{x}) = \frac{\mu(\kappa-1)}{8} (\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2$
- ▶ Аналогичная техника позволяет получить оценку снизу для класса сильно выпуклых функций

Что нам известно?

## Что нам известно?

Нижние оценки сходимости линейных методов первого порядка:

- ▶ для выпуклых функций с Липшицевым градиентом

$$f(x_{k+1}) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- ▶ для сильно выпуклых функций с Липшицевым градиентом

$$f(x_{k+1}) - f^* \geq \frac{\mu}{2} \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^{2k} \|x_0 - x^*\|_2^2$$

## Что нам известно?

Нижние оценки сходимости линейных методов первого порядка:

- ▶ для выпуклых функций с Липшицевым градиентом

$$f(x_{k+1}) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- ▶ для сильно выпуклых функций с Липшицевым градиентом

$$f(x_{k+1}) - f^* \geq \frac{\mu}{2} \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^{2k} \|x_0 - x^*\|_2^2$$

Сходимость градиентного спуска:

- ▶ для выпуклых функций с Липшицевым градиентом

$$f(x_{k+1}) - f^* \leq \frac{2L\|x - x_0\|_2^2}{k+4}$$

- ▶ для сильно выпуклых функций с Липшицевым градиентом

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L}{2} \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^{2k} \|x_0 - x^*\|_2^2$$

# Метод сопряжённых градиентов: постановка задачи

- Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

где  $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$  и  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$

# Метод сопряжённых градиентов: постановка задачи

- ▶ Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

где  $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$  и  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$

- ▶ Из необходимого условия экстремума имеем

$$Ax^* = b$$



# Метод сопряжённых градиентов: постановка задачи

- ▶ Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

где  $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$  и  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$

- ▶ Из необходимого условия экстремума имеем

$$Ax^* = b$$

- ▶ Также обозначим  $f'(x_k) = Ax_k - b = r_k$

# Метод сопряжённых градиентов: постановка задачи

- ▶ Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

где  $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$  и  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$

- ▶ Из необходимого условия экстремума имеем

$$Ax^* = b$$

- ▶ Также обозначим  $f'(x_k) = Ax_k - b = r_k$
- ▶ Задача оптимизации сведена к задаче решения системы линейных уравнений

## Немного истории

- ▶ М. Hestenes и Е. Stiefel предложили метод сопряжённых градиентов в 1952 году как *прямой* метод

## Немного истории

- ▶ М. Hestenes и Е. Stiefel предложили метод сопряжённых градиентов в 1952 году как *прямой* метод
- ▶ Долгое время считалось, что метод представляет только теоретический интерес поскольку

## Немного истории

- ▶ М. Hestenes и Е. Stiefel предложили метод сопряжённых градиентов в 1952 году как *прямой* метод
- ▶ Долгое время считалось, что метод представляет только теоретический интерес поскольку
  - ▶ не работает на логарифмической линейке

## Немного истории

- ▶ М. Hestenes и Е. Stiefel предложили метод сопряжённых градиентов в 1952 году как *прямой* метод
- ▶ Долгое время считалось, что метод представляет только теоретический интерес поскольку
  - ▶ не работает на логарифмической линейке
  - ▶ имеет небольшое преимущество перед исключением Гаусса при вычислениях на калькуляторе

## Немного истории

- ▶ М. Hestenes и Е. Stiefel предложили метод сопряжённых градиентов в 1952 году как *прямой* метод
- ▶ Долгое время считалось, что метод представляет только теоретический интерес поскольку
  - ▶ не работает на логарифмической линейке
  - ▶ имеет небольшое преимущество перед исключением Гаусса при вычислениях на калькуляторе
- ▶ Метод сопряжённых градиентов необходимо рассматривать как *итерационный метод*, то есть останавливаться до точной сходимости!

## Немного истории

- ▶ М. Hestenes и Е. Stiefel предложили метод сопряжённых градиентов в 1952 году как *прямой* метод
- ▶ Долгое время считалось, что метод представляет только теоретический интерес поскольку
  - ▶ не работает на логарифмической линейке
  - ▶ имеет небольшое преимущество перед исключением Гаусса при вычислениях на калькуляторе
- ▶ Метод сопряжённых градиентов необходимо рассматривать как *итерационный метод*, то есть останавливаться до точной сходимости!
- ▶ Подробнее [здесь](#)



# Мотивация

- ▶ Сходимость градиентного спуска сильно зависит от числа обусловленности

# Мотивация

- ▶ Сходимость градиентного спуска сильно зависит от числа обусловленности
- ▶ Как сделать метод, который для любого числа обусловленности сходился бы как максимум за  $n$  итераций?

# Мотивация

- ▶ Сходимость градиентного спуска сильно зависит от числа обусловленности
- ▶ Как сделать метод, который для любого числа обусловленности сходился бы как максимум за  $n$  итераций?

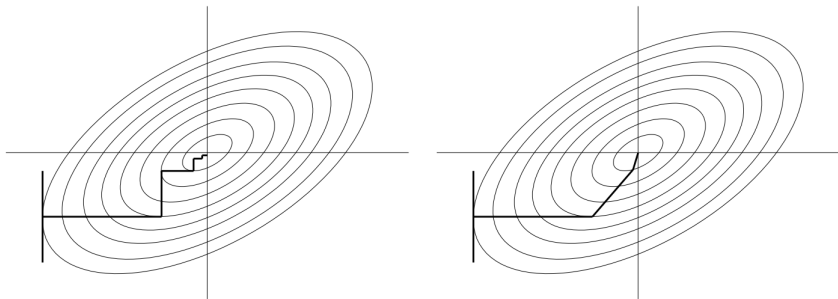


Рисунок взят [отсюда](#)

# Сопряжённые направления

## Определение

Множество ненулевых векторов  $\{p_0, \dots, p_l\}$  называется сопряжёнными относительно матрицы  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ , если

$$p_i^\top A p_j = 0, \quad i \neq j$$

# Сопряжённые направления

## Определение

Множество ненулевых векторов  $\{p_0, \dots, p_l\}$  называется сопряжёнными относительно матрицы  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ , если

$$p_i^\top A p_j = 0, \quad i \neq j$$

## Свойства

# Сопряжённые направления

## Определение

Множество ненулевых векторов  $\{p_0, \dots, p_l\}$  называется сопряжёнными относительно матрицы  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ , если

$$p_i^\top A p_j = 0, \quad i \neq j$$

## Свойства

- ▶ линейно независимы

# Сопряжённые направления

## Определение

Множество ненулевых векторов  $\{p_0, \dots, p_l\}$  называется сопряжёнными относительно матрицы  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ , если

$$p_i^\top A p_j = 0, \quad i \neq j$$

## Свойства

- ▶ линейно независимы
- ▶ сопряжённые направления + шаг по правилу наискорейшего спуска = метод, сходящийся за  $n$  итераций

# Сопряжённые направления

## Определение

Множество ненулевых векторов  $\{p_0, \dots, p_l\}$  называется сопряжёнными относительно матрицы  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ , если

$$p_i^\top A p_j = 0, \quad i \neq j$$

## Свойства

- ▶ линейно независимы
- ▶ сопряжённые направления + шаг по правилу наискорейшего спуска = метод, сходящийся за  $n$  итераций
- ▶  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \rightarrow r_{k+1} = r_k + \alpha_k A p_k$



# Сопряжённые направления

## Определение

Множество ненулевых векторов  $\{p_0, \dots, p_l\}$  называется сопряжёнными относительно матрицы  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ , если

$$p_i^\top A p_j = 0, \quad i \neq j$$

## Свойства

- ▶ линейно независимы
- ▶ сопряжённые направления + шаг по правилу наискорейшего спуска = метод, сходящийся за  $n$  итераций
- ▶  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \rightarrow r_{k+1} = r_k + \alpha_k A p_k$

**Q:** как получить сопряжённые направления из любого набора линейно независимых векторов?

# Сходимость

## Теорема

Пусть  $x_k$  генерируются методом сопряжённых направлений.

Тогда

1.  $\langle r_k, p_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k - 1$
2.  $x_k = \arg \min_{x \in P} f(x)$ , где  $P = x_0 + \text{span}(p_0, \dots, p_{k-1})$

## Доказательство

# Сходимость

## Теорема

Пусть  $x_k$  генерируются методом сопряжённых направлений.

Тогда

1.  $\langle r_k, p_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k - 1$
2.  $x_k = \arg \min_{x \in P} f(x),$  где  $P = x_0 + \text{span}(p_0, \dots, p_{k-1})$

## Доказательство

1.  $\phi(\gamma) = f(x_0 + \gamma_0 p_0 + \dots + \gamma_{k-1} p_{k-1})$

# Сходимость

## Теорема

Пусть  $x_k$  генерируются методом сопряжённых направлений.

Тогда

1.  $\langle r_k, p_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k-1$
2.  $x_k = \arg \min_{x \in P} f(x)$ , где  $P = x_0 + \text{span}(p_0, \dots, p_{k-1})$

## Доказательство

1.  $\phi(\gamma) = f(x_0 + \gamma_0 p_0 + \dots + \gamma_{k-1} p_{k-1})$
2.  $\phi(\gamma)$  – строго выпукла  $\rightarrow$  существует  $\gamma^*$

# Сходимость

## Теорема

Пусть  $x_k$  генерируются методом сопряжённых направлений.

Тогда

1.  $\langle r_k, p_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k-1$
2.  $x_k = \arg \min_{x \in P} f(x)$ , где  $P = x_0 + \text{span}(p_0, \dots, p_{k-1})$

## Доказательство

1.  $\phi(\gamma) = f(x_0 + \gamma_0 p_0 + \dots + \gamma_{k-1} p_{k-1})$
2.  $\phi(\gamma)$  – строго выпукла  $\rightarrow$  существует  $\gamma^*$
3. По критерию первого порядка

$$\phi'(\gamma^*) = \langle f'(x_0 + \gamma_0^* p_0 + \dots + \gamma_{k-1}^* p_{k-1}), p_i \rangle = 0, \quad i = 0, \dots, k-1$$

# Сходимость

## Теорема

Пусть  $x_k$  генерируются методом сопряжённых направлений.

Тогда

1.  $\langle r_k, p_i \rangle = 0, i = 1, \dots, k-1$
2.  $x_k = \arg \min_{x \in P} f(x)$ , где  $P = x_0 + \text{span}(p_0, \dots, p_{k-1})$

## Доказательство

1.  $\phi(\gamma) = f(x_0 + \gamma_0 p_0 + \dots + \gamma_{k-1} p_{k-1})$
2.  $\phi(\gamma)$  – строго выпукла  $\rightarrow$  существует  $\gamma^*$
3. По критерию первого порядка

$$\phi'(\gamma^*) = \langle f'(x_0 + \gamma_0^* p_0 + \dots + \gamma_{k-1}^* p_{k-1}), p_i \rangle = 0, i = 0, \dots, k-1$$

4. Из определения  $r_k$  следует, что  $\langle r_k, p_i \rangle = 0, i = 0, \dots, k-1$

# Сходимость

## Теорема

Пусть  $x_k$  генерируются методом сопряжённых направлений.

Тогда

1.  $\langle r_k, p_i \rangle = 0, i = 1, \dots, k-1$
2.  $x_k = \arg \min_{x \in P} f(x)$ , где  $P = x_0 + \text{span}(p_0, \dots, p_{k-1})$

## Доказательство

1.  $\phi(\gamma) = f(x_0 + \gamma_0 p_0 + \dots + \gamma_{k-1} p_{k-1})$
2.  $\phi(\gamma)$  – строго выпукла  $\rightarrow$  существует  $\gamma^*$
3. По критерию первого порядка

$$\phi'(\gamma^*) = \langle f'(x_0 + \gamma_0^* p_0 + \dots + \gamma_{k-1}^* p_{k-1}), p_i \rangle = 0, i = 0, \dots, k-1$$

4. Из определения  $r_k$  следует, что  $\langle r_k, p_i \rangle = 0, i = 0, \dots, k-1$
5. Таким образом,  $(1) \Leftrightarrow (2)$

6. Докажем (1) по индукции:



6. Докажем (1) по индукции:

- ▶ база:  $\langle r_1, p_0 \rangle = 0$  по построению

6. Докажем (1) по индукции:

- ▶ база:  $\langle r_1, p_0 \rangle = 0$  по построению
- ▶ гипотеза:  $\langle r_{k-1}, p_i \rangle = 0, i = 1, \dots, k-2$

6. Докажем (1) по индукции:

- ▶ база:  $\langle r_1, p_0 \rangle = 0$  по построению
- ▶ гипотеза:  $\langle r_{k-1}, p_i \rangle = 0, i = 1, \dots, k-2$

7.  $r_k = r_{k-1} + \alpha_{k-1} A p_{k-1}$

6. Докажем (1) по индукции:

- ▶ база:  $\langle r_1, p_0 \rangle = 0$  по построению
- ▶ гипотеза:  $\langle r_{k-1}, p_i \rangle = 0, i = 1, \dots, k-2$

7.  $r_k = r_{k-1} + \alpha_{k-1} A p_{k-1}$

8.  $\langle p_{k-1}, r_k \rangle = \langle p_{k-1}, r_{k-1} \rangle + \alpha_{k-1} \langle p_{k-1}, A p_{k-1} \rangle = 0$  по построению  $\alpha_{k-1}$

6. Докажем (1) по индукции:

- ▶ база:  $\langle r_1, p_0 \rangle = 0$  по построению
- ▶ гипотеза:  $\langle r_{k-1}, p_i \rangle = 0, i = 1, \dots, k-2$

7.  $r_k = r_{k-1} + \alpha_{k-1} A p_{k-1}$

8.  $\langle p_{k-1}, r_k \rangle = \langle p_{k-1}, r_{k-1} \rangle + \alpha_{k-1} \langle p_{k-1}, A p_{k-1} \rangle = 0$  по построению  $\alpha_{k-1}$

9.  $\langle p_i, r_k \rangle = \langle p_i, r_{k-1} \rangle + \alpha_{k-1} \langle p_i, A p_{k-1} \rangle, i = 1, \dots, k-2$

6. Докажем (1) по индукции:
- ▶ база:  $\langle r_1, p_0 \rangle = 0$  по построению
  - ▶ гипотеза:  $\langle r_{k-1}, p_i \rangle = 0, i = 1, \dots, k-2$
7.  $r_k = r_{k-1} + \alpha_{k-1} A p_{k-1}$
8.  $\langle p_{k-1}, r_k \rangle = \langle p_{k-1}, r_{k-1} \rangle + \alpha_{k-1} \langle p_{k-1}, A p_{k-1} \rangle = 0$  по построению  $\alpha_{k-1}$
9.  $\langle p_i, r_k \rangle = \langle p_i, r_{k-1} \rangle + \alpha_{k-1} \langle p_i, A p_{k-1} \rangle, i = 1, \dots, k-2$
10.  $\langle p_i, r_{k-1} \rangle = 0$  по гипотезе

6. Докажем (1) по индукции:
- ▶ база:  $\langle r_1, p_0 \rangle = 0$  по построению
  - ▶ гипотеза:  $\langle r_{k-1}, p_i \rangle = 0, i = 1, \dots, k-2$
7.  $r_k = r_{k-1} + \alpha_{k-1} A p_{k-1}$
8.  $\langle p_{k-1}, r_k \rangle = \langle p_{k-1}, r_{k-1} \rangle + \alpha_{k-1} \langle p_{k-1}, A p_{k-1} \rangle = 0$  по построению  $\alpha_{k-1}$
9.  $\langle p_i, r_k \rangle = \langle p_i, r_{k-1} \rangle + \alpha_{k-1} \langle p_i, A p_{k-1} \rangle, i = 1, \dots, k-2$
10.  $\langle p_i, r_{k-1} \rangle = 0$  по гипотезе
11.  $\langle p_i, A p_{k-1} \rangle = 0$  по свойству сопряжённости  $\{p_i\}$

# Сопряжённые градиенты

- ▶  $p_0 = -r_0$  — антиградиент



# Сопряжённые градиенты

- ▶  $p_0 = -r_0$  — антиградиент
- ▶  $p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_{k+1}p_k$ , где  $\beta_{k+1}$  гарантирует сопряжённость  $p_k$  и  $p_{k+1}$ :

$$p_k^\top A p_{k+1} = p_k^\top A (-r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k) = 0$$
$$\beta_{k+1} = \frac{p_k^\top A r_{k+1}}{p_k^\top A p_k}$$

## Псевдокод: медленная версия

```
def ConjugateGradientQuadratic(x0, A, b, eps):  
    r = A.dot(x0) - b  
    p = -r  
    while np.linalg.norm(r) > eps:  
        alpha = -r.dot(p) / p.dot(A.dot(p))  
        x = x + alpha * p  
        r = A.dot(x) - b  
        beta = r.dot(A.dot(p)) / p.dot(A.dot(p))  
        p = -r + beta * p  
    return x
```

## Ускорение медленной версии

- Вычисление  $\alpha_k$ :

$$\alpha_k = -\frac{r_k^\top p_k}{p_k^\top A p_k} = -\frac{r_k^\top (-r_k + \beta_k p_{k-1})}{p_k^\top A p_k} = \frac{\|r_k\|_2^2}{p_k^\top A p_k}$$

## Ускорение медленной версии

- Вычисление  $\alpha_k$ :

$$\alpha_k = -\frac{r_k^\top p_k}{p_k^\top A p_k} = -\frac{r_k^\top (-r_k + \beta_k p_{k-1})}{p_k^\top A p_k} = \frac{\|r_k\|_2^2}{p_k^\top A p_k}$$

- Вычисление  $\beta_k$ :

$$\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^\top A p_k}{p_k^\top A p_k} = \frac{r_{k+1}^\top (r_{k+1} - r_k)}{(-r_k + \beta_k p_{k-1})^\top (r_{k+1} - r_k)} = \frac{\|r_{k+1}\|_2^2}{\|r_k\|_2^2}$$

## Псевдокод: быстрая версия

```
def ConjugateGradientQuadratic(x0, A, b, eps):  
    r = A.dot(x0) - b  
    p = -r  
    while np.linalg.norm(r) > eps:  
        alpha = r.dot(r) / p.dot(A.dot(p))  
        x = x + alpha * p  
        r_next = r + alpha * A.dot(p)  
        beta = r_next.dot(r_next) / r.dot(r)  
        p = -r_next + beta * p  
        r = r_next  
    return x
```

# Почему сопряжённые градиенты сопряжены?

## Теорема

Пусть после  $k$  итераций  $x_k \neq x^*$ . Тогда

1.  $\langle r_k, r_i \rangle = 0, i = 1, \dots, k - 1$
2.  $\text{span}(r_0, \dots, r_k) = \text{span}(r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0)$
3.  $\text{span}(p_0, \dots, p_k) = \text{span}(r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0)$
4.  $p_k^\top A p_i = 0, i = 1, \dots, k - 1$

# Крыловское пространство

## Определение

Пространство  $\mathcal{K}_k(A) = \text{span}(b, Ab, \dots, A^{k-1}b)$  называется пространством Крылова.

# Крыловское пространство

## Определение

Пространство  $\mathcal{K}_k(A) = \text{span}(b, Ab, \dots, A^{k-1}b)$  называется пространством Крылова.

## Основное свойство

$$A^{-1}b \in \mathcal{K}_n(A)$$



# Крыловское пространство

## Определение

Пространство  $\mathcal{K}_k(A) = \text{span}(b, Ab, \dots, A^{k-1}b)$  называется пространством Крылова.

## Основное свойство

$$A^{-1}b \in \mathcal{K}_n(A)$$

## Доказательство

# Крыловское пространство

## Определение

Пространство  $\mathcal{K}_k(A) = \text{span}(b, Ab, \dots, A^{k-1}b)$  называется пространством Крылова.

## Основное свойство

$$A^{-1}b \in \mathcal{K}_n(A)$$

## Доказательство

- ▶ Теорема Гамильтона-Кэли:  $p(A) = 0$ , где  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

# Крыловское пространство

## Определение

Пространство  $\mathcal{K}_k(A) = \text{span}(b, Ab, \dots, A^{k-1}b)$  называется пространством Крылова.

## Основное свойство

$$A^{-1}b \in \mathcal{K}_n(A)$$

## Доказательство

- ▶ Теорема Гамильтона-Кэли:  $p(A) = 0$ , где  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- ▶  $p(A)b = A^n b + a_1 A^{n-1}b + \dots + a_{n-1}Ab + a_n b = 0$

# Крыловское пространство

## Определение

Пространство  $\mathcal{K}_k(A) = \text{span}(b, Ab, \dots, A^{k-1}b)$  называется пространством Крылова.

## Основное свойство

$$A^{-1}b \in \mathcal{K}_n(A)$$

## Доказательство

- ▶ Теорема Гамильтона-Кэли:  $p(A) = 0$ , где  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- ▶  $p(A)b = A^n b + a_1 A^{n-1}b + \dots + a_{n-1}Ab + a_n b = 0$
- ▶  $A^{-1}p(A)b = A^{n-1}b + a_1 A^{n-2}b + \dots + a_{n-1}b + a_n A^{-1}b = 0$

# Крыловское пространство

## Определение

Пространство  $\mathcal{K}_k(A) = \text{span}(b, Ab, \dots, A^{k-1}b)$  называется пространством Крылова.

## Основное свойство

$$A^{-1}b \in \mathcal{K}_n(A)$$

## Доказательство

- ▶ Теорема Гамильтона-Кэли:  $p(A) = 0$ , где  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- ▶  $p(A)b = A^n b + a_1 A^{n-1}b + \dots + a_{n-1}Ab + a_n b = 0$
- ▶  $A^{-1}p(A)b = A^{n-1}b + a_1 A^{n-2}b + \dots + a_{n-1}b + a_n A^{-1}b = 0$
- ▶  $A^{-1}b = -\frac{1}{a_n}(A^{n-1}b + a_1 A^{n-2}b + \dots + a_{n-1}b)$

# Интерпретация

- ▶ Поиск лучшего приближения на  $k$ -ом Крыловском пространстве

$$x_k = \arg \min_{x \in \mathcal{K}_k} f(x)$$

# Интерпретация

- ▶ Поиск лучшего приближения на  $k$ -ом Крыловском пространстве

$$x_k = \arg \min_{x \in \mathcal{K}_k} f(x)$$

- ▶ Направления  $\{p_i\} \neq \{b, Ab, \dots, A^{k-1}b\}$ . Почему?

# Интерпретация

- ▶ Поиск лучшего приближения на  $k$ -ом Крыловском пространстве

$$x_k = \arg \min_{x \in \mathcal{K}_k} f(x)$$

- ▶ Направления  $\{p_i\} \neq \{b, Ab, \dots, A^{k-1}b\}$ . Почему?

Краткое описание метода сопряжённых градиентов

Поиск решения в ортонормированном Крыловском базисе



## Полезные соотношения

- ▶ Решение:  $x^* = A^{-1}b$

## Полезные соотношения

- ▶ Решение:  $x^* = A^{-1}b$
- ▶ Минимум функции:

$$f^* = \frac{1}{2}b^\top A^{-\top} A A^{-1}b - b^\top A^{-1}b = -\frac{1}{2}b^\top A^{-1}b = -\frac{1}{2}\|x^*\|_A^2$$

## Полезные соотношения

- ▶ Решение:  $x^* = A^{-1}b$
- ▶ Минимум функции:

$$f^* = \frac{1}{2}b^\top A^{-\top}AA^{-1}b - b^\top A^{-1}b = -\frac{1}{2}b^\top A^{-1}b = -\frac{1}{2}\|x^*\|_A^2$$

- ▶ Оценка сходимости по функции:

$$\begin{aligned}f(x) - f^* &= \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x + \frac{1}{2}\|x^*\|_A^2 \\&= \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - x^\top Ax^* + \frac{1}{2}\|x^*\|_A^2 \\&= \frac{1}{2}\|x - x^*\|_A^2\end{aligned}$$

# Сходимость

- ▶  $x_k$  лежит в  $\mathcal{K}_k$

# Сходимость

- ▶  $x_k$  лежит в  $\mathcal{K}_k$
- ▶  $x_k = \sum_{i=1}^k c_i A^{i-1} b = p(A)b$ , где  $p(x)$  некоторый полином степени не выше  $k - 1$

# Сходимость

- ▶  $x_k$  лежит в  $\mathcal{K}_k$
- ▶  $x_k = \sum_{i=1}^k c_i A^{i-1} b = p(A)b$ , где  $p(x)$  некоторый полином степени не выше  $k - 1$
- ▶  $x_k$  минимизирует  $f$  на  $\mathcal{K}_k$ , отсюда

$$2(f_k - f^*) = \inf_{x \in \mathcal{K}_k} \|x - x^*\|_A^2 = \inf_{\deg(p) < k} \|(p(A) - A^{-1})b\|_A^2$$

## Сходимость

- ▶  $x_k$  лежит в  $\mathcal{K}_k$
- ▶  $x_k = \sum_{i=1}^k c_i A^{i-1} b = p(A)b$ , где  $p(x)$  некоторый полином степени не выше  $k - 1$
- ▶  $x_k$  минимизирует  $f$  на  $\mathcal{K}_k$ , отсюда

$$2(f_k - f^*) = \inf_{x \in \mathcal{K}_k} \|x - x^*\|_A^2 = \inf_{\deg(p) < k} \|(p(A) - A^{-1})b\|_A^2$$

- ▶ Спектральное разложение  $A = U\Lambda U^*$  даёт

$$\begin{aligned} 2(f_k - f^*) &= \inf_{\deg(p) < k} \|(p(\Lambda) - \Lambda^{-1})d\|_\Lambda^2 \\ &= \inf_{\deg(p) < k} \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2 (\lambda_i p(\lambda_i) - 1)^2}{\lambda_i} \\ &= \inf_{\deg(q) \leq k, q(0)=1} \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2 q(\lambda_i)^2}{\lambda_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_k - f^* &\leq \left( \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{2\lambda_i} \right) \inf_{\deg(q) \leq k, q(0)=1} \left( \max_{i=1, \dots, n} q(\lambda_i)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \|x^*\|_A^2 \inf_{\deg(q) \leq k, q(0)=1} \left( \max_{i=1, \dots, n} q(\lambda_i)^2 \right)
 \end{aligned}$$

- Пусть  $A$  имеет  $m$  различных собственных значений, тогда для

$$r(y) = \frac{(-1)^m}{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m} (y - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (y - \lambda_m)$$

выполнено  $\deg(r) = m$  и  $r(0) = 1$



$$\begin{aligned}
 f_k - f^* &\leq \left( \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{2\lambda_i} \right) \inf_{\deg(q) \leq k, q(0)=1} \left( \max_{i=1, \dots, n} q(\lambda_i)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \|x^*\|_A^2 \inf_{\deg(q) \leq k, q(0)=1} \left( \max_{i=1, \dots, n} q(\lambda_i)^2 \right)
 \end{aligned}$$

- ▶ Пусть  $A$  имеет  $m$  различных собственных значений, тогда для

$$r(y) = \frac{(-1)^m}{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m} (y - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (y - \lambda_m)$$

выполнено  $\deg(r) = m$  и  $r(0) = 1$

- ▶ Значение для оптимального полинома степени не выше  $k$  оценим сверху значением для полинома  $r$  степени  $m$

$$0 \leq f_k - f^* \leq \frac{1}{2} \|x^*\|_A^2 \max_{i=1, \dots, m} r(\lambda_i) = 0$$

$$f_k - f^* \leq \left( \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{2\lambda_i} \right) \inf_{\deg(q) \leq k, q(0)=1} \left( \max_{i=1, \dots, n} q(\lambda_i)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \|x^*\|_A^2 \inf_{\deg(q) \leq k, q(0)=1} \left( \max_{i=1, \dots, n} q(\lambda_i)^2 \right)$$

- Пусть  $A$  имеет  $m$  различных собственных значений, тогда для

$$r(y) = \frac{(-1)^m}{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m} (y - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (y - \lambda_m)$$

выполнено  $\deg(r) = m$  и  $r(0) = 1$

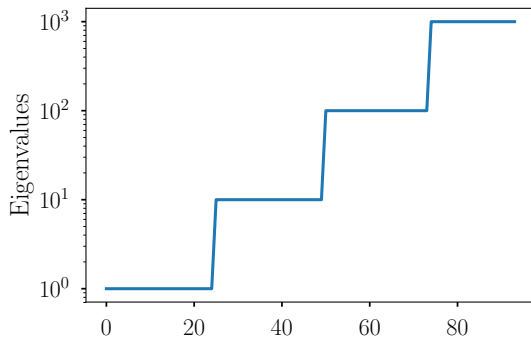
- Значение для оптимального полинома степени не выше  $k$  оценим сверху значением для полинома  $r$  степени  $m$

$$0 \leq f_k - f^* \leq \frac{1}{2} \|x^*\|_A^2 \max_{i=1, \dots, m} r(\lambda_i) = 0$$

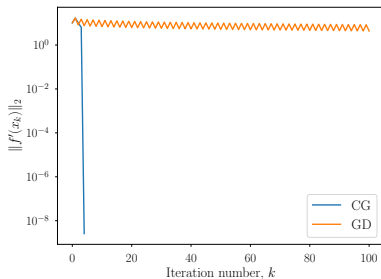
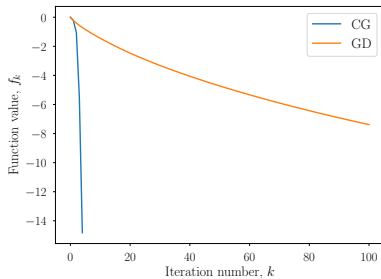
- Метод сопряжённых градиентов сошёлся за  $m$  итераций

## Пример задачи

- ▶  $n = 100$
- ▶ Спектр  $A$ :  $\{1, 10, 100, 1000\}$
- ▶  $\kappa = 1000$



# Иллюстрация сходимости



## Другие оценки

- ▶ Если  $q(x)$  – Чебышёвский полином на  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ , то

$$f_k - f^* \leq C \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k$$

- ▶ Если  $q(x)$  имеет корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$  и  $(\lambda_1 + \lambda_n)/2$ , то

$$f_k - f^* \leq C \left( \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\lambda_k + \lambda_n} \right)^2$$

## Обобщение на неквадратичную целевую функцию

1. Шаг  $\alpha_k$  подбирается адаптивно

## Обобщение на неквадратичную целевую функцию

1. Шаг  $\alpha_k$  подбирается адаптивно
2. Коэффициент  $\beta_k$  ищется с помощью градиентов  
 $f'(x_{k-1}), f'(x_{k-2})$

## Обобщение на неквадратичную целевую функцию

1. Шаг  $\alpha_k$  подбирается адаптивно
2. Коэффициент  $\beta_k$  ищется с помощью градиентов  
 $f'(x_{k-1}), f'(x_{k-2})$

### Примеры



## Обобщение на неквадратичную целевую функцию

1. Шаг  $\alpha_k$  подбирается адаптивно
2. Коэффициент  $\beta_k$  ищется с помощью градиентов  $f'(x_{k-1}), f'(x_{k-2})$

### Примеры

- Метод Флетчера-Ривса (Fletcher-Reeves)

$$\beta_k = \frac{\|f'(x_{k-1})\|_2^2}{\|f'(x_{k-2})\|_2^2}$$

## Обобщение на неквадратичную целевую функцию

1. Шаг  $\alpha_k$  подбирается адаптивно
2. Коэффициент  $\beta_k$  ищется с помощью градиентов  $f'(x_{k-1}), f'(x_{k-2})$

### Примеры

- ▶ Метод Флетчера-Ривса (Fletcher-Reeves)

$$\beta_k = \frac{\|f'(x_{k-1})\|_2^2}{\|f'(x_{k-2})\|_2^2}$$

- ▶ Метод Полака-Рибьера (Polak-Ribière)

$$\beta_k = \frac{\langle f'(x_{k-1}), f'(x_{k-1}) - f'(x_{k-2}) \rangle}{\|f'(x_{k-2})\|_2^2}$$

## Обобщение на неквадратичную целевую функцию

1. Шаг  $\alpha_k$  подбирается адаптивно
2. Коэффициент  $\beta_k$  ищется с помощью градиентов  $f'(x_{k-1}), f'(x_{k-2})$

### Примеры

- ▶ Метод Флетчера-Ривса (Fletcher-Reeves)

$$\beta_k = \frac{\|f'(x_{k-1})\|_2^2}{\|f'(x_{k-2})\|_2^2}$$

- ▶ Метод Полака-Рибьера (Polak-Ribière)

$$\beta_k = \frac{\langle f'(x_{k-1}), f'(x_{k-1}) - f'(x_{k-2}) \rangle}{\|f'(x_{k-2})\|_2^2}$$

- ▶ Метод Хестенса-Штифеля (Hestenes-Stiefel)

$$\beta_k = \frac{\langle f'(x_{k-1}), f'(x_{k-1}) - f'(x_{k-2}) \rangle}{\langle p_{k-1}, f'(x_{k-1}) - f'(x_{k-2}) \rangle}$$

## Особенности неквадратичного случая

- ▶ С ростом числа итераций направления  $p_k$  могут становиться всё более коллинеарными

## Особенности неквадратичного случая

- ▶ С ростом числа итераций направления  $p_k$  могут становится всё более коллинеарными
- ▶ Помогают рестарты при выполнении некоторых условий

# Особенности неквадратичного случая

- ▶ С ростом числа итераций направления  $p_k$  могут становится всё более коллинеарными
- ▶ Помогают рестарты при выполнении некоторых условий
- ▶ При выборе  $\alpha_k$  по правилу наискорейшего спуска,  $p_k$  – направление убывание

## Особенности неквадратичного случая

- ▶ С ростом числа итераций направления  $p_k$  могут становиться всё более коллинеарными
- ▶ Помогают рестарты при выполнении некоторых условий
- ▶ При выборе  $\alpha_k$  по правилу наискорейшего спуска,  $p_k$  – направление убывания
- ▶ НЕ при любом способе адаптивного поиска  $\alpha_k$  направление  $\alpha_k p_k$  будет направлением убывания

## Особенности неквадратичного случая

- ▶ С ростом числа итераций направления  $p_k$  могут становится всё более коллинеарными
- ▶ Помогают рестарты при выполнении некоторых условий
- ▶ При выборе  $\alpha_k$  по правилу наискорейшего спуска,  $p_k$  – направление убывания
- ▶ НЕ при любом способе адаптивного поиска  $\alpha_k$  направление  $\alpha_k p_k$  будет направлением убывания
- ▶ Интерпретация через квазиньютоновский метод с ограниченной памятью – через две недели



# Метод тяжёлого шарика (Б. Т. Поляк, 1964)

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k) + \beta_k (x_k - x_{k-1})$$

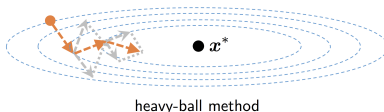
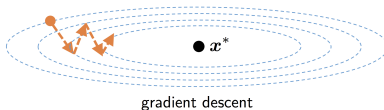


Рисунок взят [отсюда](#)

- ▶ Двухшаговый немонотонный метод
- ▶ Дискретизация следующего дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + b\dot{x} + af'(x) = 0$$

- ▶ Метод сопряжённых градиентов — частный случай

## Сходимость для сильно выпуклой функции

- Перепишем метод как

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_k f'(x_k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Сходимость для сильно выпуклой функции

- Перепишем метод как

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_k f'(x_k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Используем теорему из анализа

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} - x^* \\ x_k - x^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I - \alpha_k \int_0^1 f''(x(\tau))d\tau & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix}}_{=A_t} \begin{bmatrix} x_k - x^* \\ x_{k-1} - x^* \end{bmatrix},$$

где  $x(\tau) = x_k + \tau(x^* - x_k)$

## Сходимость для сильно выпуклой функции

- Перепишем метод как

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_k f'(x_k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Используем теорему из анализа

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} - x^* \\ x_k - x^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I - \alpha_k \int_0^1 f''(x(\tau))d\tau & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix}}_{=A_t} \begin{bmatrix} x_k - x^* \\ x_{k-1} - x^* \end{bmatrix},$$

где  $x(\tau) = x_k + \tau(x^* - x_k)$

- Сходимость зависит от спектрального радиуса матрицы итераций  $A_t$

# Сходимость для сильно выпуклой функции

- Перепишем метод как

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_k f'(x_k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Используем теорему из анализа

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} - x^* \\ x_k - x^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I - \alpha_k \int_0^1 f''(x(\tau))d\tau & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix}}_{=A_t} \begin{bmatrix} x_k - x^* \\ x_{k-1} - x^* \end{bmatrix},$$

где  $x(\tau) = x_k + \tau(x^* - x_k)$

- Сходимость зависит от спектрального радиуса матрицы итераций  $A_t$
- Выберем  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  так, чтобы минимизировать спектральный радиус

# Выбор параметров

## Теорема

Пусть  $f$  выпуклая с Липшицевым градиентом и сильно выпуклая функция. Тогда  $\alpha_k = \frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}$  и

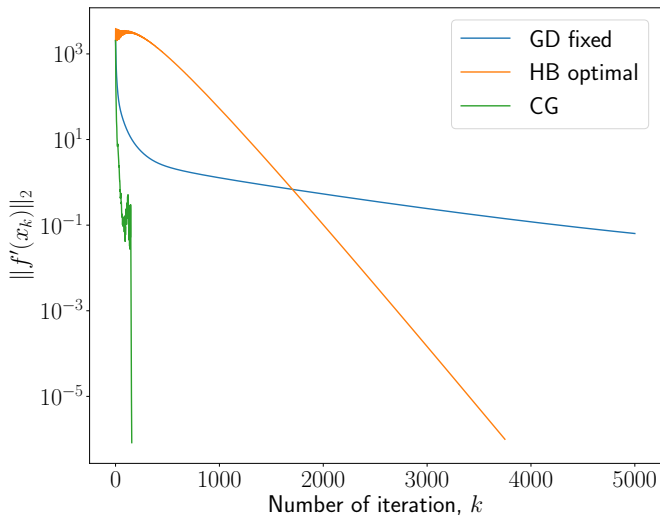
$\beta_k = \max(|1 - \sqrt{\alpha_k L}|, |1 - \sqrt{\alpha_k \mu}|)^2$  дают

$$\left\| \begin{bmatrix} x_{k+1} - x^* \\ x_k - x^* \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k \left\| \begin{bmatrix} x_1 - x^* \\ x_0 - x^* \end{bmatrix} \right\|_2$$

- ▶ Параметры зависят от  $L$  и  $\mu$
- ▶ Быстрее чем градиентный спуск
- ▶ Аналог CG для сильно выпуклой квадратичной функции

# Иллюстрация

- ▶  $n = 100$
- ▶ Случайная квадратичная задача



# Ускоренный градиентный метод (Нестеров, 1983)

Один из вариантов

$$y_0 = x_0$$

$$x_{k+1} = y_k - \alpha_k f'(y_k)$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} + \frac{k}{k+3}(x_{k+1} - x_k)$$



# Ускоренный градиентный метод (Нестеров, 1983)

Один из вариантов

$$y_0 = x_0$$

$$x_{k+1} = y_k - \alpha_k f'(y_k)$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} + \frac{k}{k+3}(x_{k+1} - x_k)$$

- ▶ Сравнение с методом тяжёлого шарика

# Ускоренный градиентный метод (Нестеров, 1983)

Один из вариантов

$$y_0 = x_0$$

$$x_{k+1} = y_k - \alpha_k f'(y_k)$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} + \frac{k}{k+3}(x_{k+1} - x_k)$$

- ▶ Сравнение с методом тяжёлого шарика
- ▶ Немонотонный

# Ускоренный градиентный метод (Нестеров, 1983)

Один из вариантов

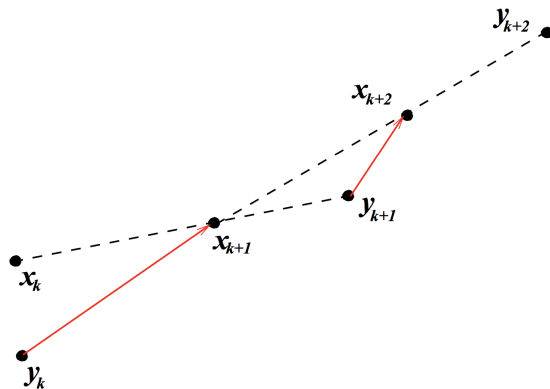
$$y_0 = x_0$$

$$x_{k+1} = y_k - \alpha_k f'(y_k)$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} + \frac{k}{k+3}(x_{k+1} - x_k)$$

- ▶ Сравнение с методом тяжёлого шарика
- ▶ Немонотонный
- ▶ Интерпретация как дискретизация некоторого ОДУ

# Визуализация итераций



# Сходимость

## Теорема

Пусть  $f$  выпукла с Липшицевым градиентом, а шаг  $\alpha_k = \frac{1}{L}$ .  
Тогда ускоренный градиентный метод сходится как

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2L\|x_0 - x^*\|_2^2}{(k+1)^2} = \mathcal{O}(1/k^2)$$

# Сходимость

## Теорема

Пусть  $f$  выпукла с Липшицевым градиентом, а шаг  $\alpha_k = \frac{1}{L}$ . Тогда ускоренный градиентный метод сходится как

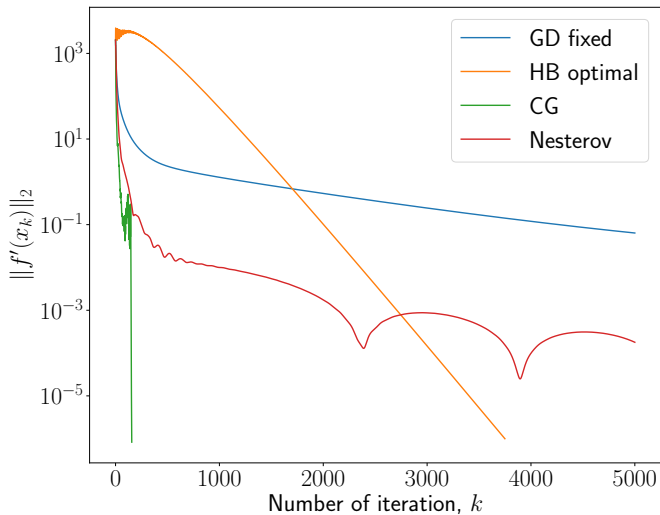
$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2L\|x_0 - x^*\|_2^2}{(k+1)^2} = \mathcal{O}(1/k^2)$$

## Теорема

Ускоренный метод Нестерова для сильно выпуклой функции при шаге  $\alpha_k = \frac{1}{L}$  сходится как

$$f(x_k) - f^* \leq L\|x_k - x_0\|_2^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)^k$$

## Пример сходимости



## Что мы знаем?

- ▶ Сходимость градиентного спуска может быть улучшена



## Что мы знаем?

- ▶ Сходимость градиентного спуска может быть улучшена
- ▶ Метод сопряжённых градиентов надо использовать для квадратичных сильно выпуклых функций

## Что мы знаем?

- ▶ Сходимость градиентного спуска может быть улучшена
- ▶ Метод сопряжённых градиентов надо использовать для квадратичных сильно выпуклых функций
- ▶ Ускоренный метод Нестерова оптимален для выпуклых с Липшицевым градиентом и сильно выпуклых функций

## Что мы знаем?

- ▶ Сходимость градиентного спуска может быть улучшена
- ▶ Метод сопряжённых градиентов надо использовать для квадратичных сильно выпуклых функций
- ▶ Ускоренный метод Нестерова оптимален для выпуклых с Липшицевым градиентом и сильно выпуклых функций

## Вопросы

# Что мы знаем?

- ▶ Сходимость градиентного спуска может быть улучшена
- ▶ Метод сопряжённых градиентов надо использовать для квадратичных сильно выпуклых функций
- ▶ Ускоренный метод Нестерова оптимален для выпуклых с Липшицевым градиентом и сильно выпуклых функций

## Вопросы

- ▶ Что делать, когда нельзя точно посчитать градиент?

# Что мы знаем?

- ▶ Сходимость градиентного спуска может быть улучшена
- ▶ Метод сопряжённых градиентов надо использовать для квадратичных сильно выпуклых функций
- ▶ Ускоренный метод Нестерова оптимален для выпуклых с Липшицевым градиентом и сильно выпуклых функций

## Вопросы

- ▶ Что делать, когда нельзя точно посчитать градиент?
- ▶ Все методы зависят от неизвестных констант, как подбирать шаги адаптивно?

# Что мы знаем?

- ▶ Сходимость градиентного спуска может быть улучшена
- ▶ Метод сопряжённых градиентов надо использовать для квадратичных сильно выпуклых функций
- ▶ Ускоренный метод Нестерова оптимален для выпуклых с Липшицевым градиентом и сильно выпуклых функций

## Вопросы

- ▶ Что делать, когда нельзя точно посчитать градиент?
- ▶ Все методы зависят от неизвестных констант, как подбирать шаги адаптивно?
- ▶ Что произойдёт со скоростями сходимости?

- ▶ Метод сопряжённых градиентов

# Резюме

- ▶ Метод сопряжённых градиентов
- ▶ Метод тяжёлого шарика



- ▶ Метод сопряжённых градиентов
- ▶ Метод тяжёлого шарика
- ▶ Ускоренный градиентный метод Нестерова