

# Методы оптимизации

## Лекция 3: Примеры задач выпуклой оптимизации

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики  
Московский физико-технический институт



27 сентября 2021 г.

## На прошлой лекции

- ▶ Самосопряжённые конусы
- ▶ Отделимость выпуклых множеств
- ▶ Выпуклые функции и способы проверки функции на выпуклость

# Основные результаты по выпуклым функциям

# Основные результаты по выпуклым функциям

## Определение

Функция  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется выпуклой (*строго выпуклой*), если  $X$  — *выпуклое множество* и для

$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$  и  $\alpha \in [0, 1]$  ( $\alpha \in (0, 1)$ ) выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) \leq (<) \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

# Основные результаты по выпуклым функциям

## Определение

Функция  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется выпуклой (*строго выпуклой*), если  $X$  — *выпуклое множество* и для

$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$  и  $\alpha \in [0, 1]$  ( $\alpha \in (0, 1)$ ) выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) \leq (<) \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

## Теорема

Функция  $f$  выпукла  $\Leftrightarrow \text{epi } f$  выпуклое множество.

# Основные результаты по выпуклым функциям

## Определение

Функция  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется выпуклой (*строго выпуклой*), если  $X$  — *выпуклое множество* и для

$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$  и  $\alpha \in [0, 1]$  ( $\alpha \in (0, 1)$ ) выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) \leq (<) \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

## Теорема

Функция  $f$  выпукла  $\Leftrightarrow \text{epi } f$  выпуклое множество.

## Теорема

Пусть функция  $f(\mathbf{x})$  дифференцируема и определена на выпуклом множестве  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Тогда  $f(\mathbf{x})$  сильно выпукла с константой  $m \geq 0$  в том и только том случае, если

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in X.$$

# Основные результаты по выпуклым функциям

## Определение

Функция  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется выпуклой (*строго выпуклой*), если  $X$  — *выпуклое множество* и для

$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$  и  $\alpha \in [0, 1]$  ( $\alpha \in (0, 1)$ ) выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) \leq (<) \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

## Теорема

Функция  $f$  выпукла  $\Leftrightarrow \text{epi } f$  выпуклое множество.

## Теорема

Пусть функция  $f(\mathbf{x})$  дифференцируема и определена на выпуклом множестве  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Тогда  $f(\mathbf{x})$  сильно выпукла с константой  $m \geq 0$  в том и только том случае, если

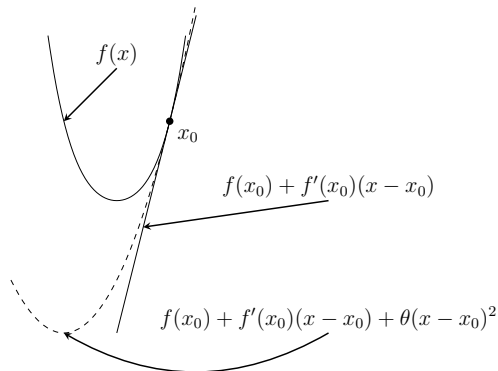
$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in X.$$

## Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция  $f$  выпукла  $\Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

# Иллюстрация дифференциальных критериев

Пусть  $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^4$



- ▶ Линейная глобальная оценка снизу для выпуклой функции
- ▶ Квадратичная глобальная оценка снизу для сильно выпуклой функции



# Стандартная форма записи задачи выпуклой оптимизации

$$\begin{aligned} \min f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

- ▶  $f_0$  – выпуклая целевая функция
- ▶  $f_i$  – выпуклые функции для ограничений типа неравенств
- ▶ Ограничения типа равенств *только* линейные

# Стандартная форма записи задачи выпуклой оптимизации

$$\begin{aligned} \min f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

- ▶  $f_0$  – выпуклая целевая функция
- ▶  $f_i$  – выпуклые функции для ограничений типа неравенств
- ▶ Ограничения типа равенств *только* линейные

## Ограничения стандартной формы записи

- ▶ Выпуклое множество может быть задано более общим образом

$$\begin{aligned} \min x^2 \\ \text{s.t. } (x - 2)^2 = 0 \\ x^3 \geq 0 \end{aligned}$$

# Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

# Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной

# Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации

# Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена  $\mathbb{R}_+^n$  на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

# Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена  $\mathbb{R}_+^n$  на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

# Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена  $\mathbb{R}_+^n$  на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- ▶ Дано  $n$  продуктов, цена единицы каждого  $c_i$



# Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена  $\mathbb{R}_+^n$  на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

## Пример: составление диеты минимальной стоимости

- ▶ Дано  $n$  продуктов, цена единицы каждого  $c_i$
- ▶ Необходимо, чтобы человек получил  $m$  питательных веществ в количествах не менее  $b_1, \dots, b_m$

# Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена  $\mathbb{R}_+^n$  на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

## Пример: составление диеты минимальной стоимости

- ▶ Дано  $n$  продуктов, цена единицы каждого  $c_i$
- ▶ Необходимо, чтобы человек получил  $m$  питательных веществ в количествах не менее  $b_1, \dots, b_m$
- ▶ Известно, что в  $j$ -ом продукте содержится  $a_{ij}$   $i$ -го питательного вещества

# Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена  $\mathbb{R}_+^n$  на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

## Пример: составление диеты минимальной стоимости

- ▶ Дано  $n$  продуктов, цена единицы каждого  $c_i$
- ▶ Необходимо, чтобы человек получил  $m$  питательных веществ в количествах не менее  $b_1, \dots, b_m$
- ▶ Известно, что в  $j$ -ом продукте содержится  $a_{ij}$   $i$ -го питательного вещества
- ▶ Необходимо определить количество каждого продукта

## Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

## Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\ & \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- Задача будет выпукла, если все  $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}_+^n$

## Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Задача будет выпукла, если все  $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}_+^n$
- ▶ Может быть сведена к оптимизации на конусе второго порядка  $\mathcal{Q}^n = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$

## Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Задача будет выпукла, если все  $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}_+^n$
- ▶ Может быть сведена к оптимизации на конусе второго порядка  $\mathcal{Q}^n = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$
- ▶ При  $\mathbf{P}_i = 0$  получим задачу LP

# Линейные системы с неквадратными матрицами

- ▶ Линейная задача наименьших квадратов

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Возможно добавление линейных ограничений вида

$$l_i \leq x_i \leq u_i$$



# Линейные системы с неквадратными матрицами

- ▶ Линейная задача наименьших квадратов

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Возможно добавление линейных ограничений вида

$$l_i \leq x_i \leq u_i$$

- ▶ Поиск решения минимальной нормы

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

# Линейные системы с неквадратными матрицами

- ▶ Линейная задача наименьших квадратов

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Возможно добавление линейных ограничений вида

$$l_i \leq x_i \leq u_i$$

- ▶ Поиск решения минимальной нормы

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

**Q:** Каков геометрический смысл у решения?

# Линейные системы с неквадратными матрицами

- ▶ Линейная задача наименьших квадратов

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Возможно добавление линейных ограничений вида

$$l_i \leq x_i \leq u_i$$

- ▶ Поиск решения минимальной нормы

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

**Q:** Каков геометрический смысл у решения?

**Q:** К какой задаче сводится похожая задача?

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \|\mathbf{x}\|_\infty \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

# Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

# Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

►  $n$  АКТИВОВ

# Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- ▶  $n$  активов
- ▶ Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним  $\bar{\mathbf{p}}$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$

# Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- ▶  $n$  активов
- ▶ Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним  $\bar{\mathbf{r}}$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$
- ▶ Минимально допустимый средний доход  $\bar{r}$

# Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- ▶  $n$  активов
- ▶ Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним  $\bar{\mathbf{p}}$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$
- ▶ Минимально допустимый средний доход  $\bar{r}$

Классическая задача составления оптимального портфеля

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & \bar{\mathbf{p}}^\top \mathbf{x} \geq \bar{r} \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Минимум риска при минимально допустимом доходе
- ▶ Существуют многочисленные вариации, которые не выводят задачу из класса QCQP или SOCP

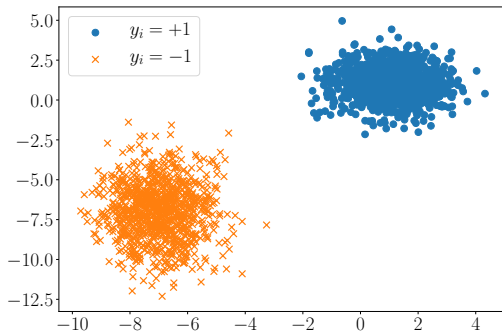


# Задача классификации

- ▶ Дана выборка  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ , где  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ , а  $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$ , если  $y_i = +1$  и  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$ , если  $y_i < 0$

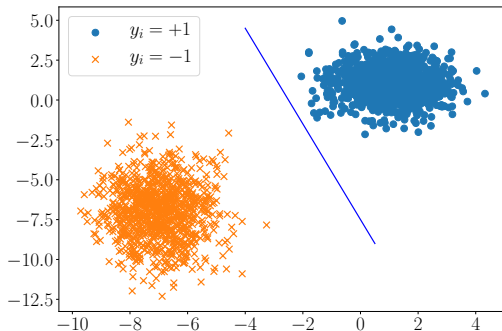
## Задача классификации

- ▶ Дана выборка  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ , где  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ , а  $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$ , если  $y_i = +1$  и  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$ , если  $y_i < 0$



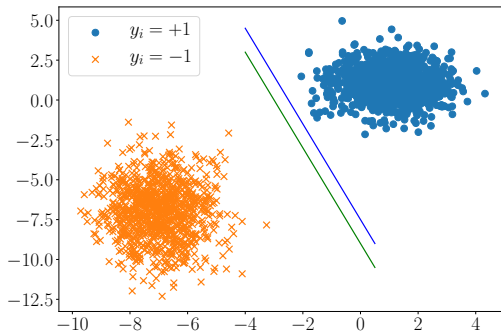
## Задача классификации

- ▶ Дана выборка  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ , где  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ , а  $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$ , если  $y_i = +1$  и  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$ , если  $y_i < 0$



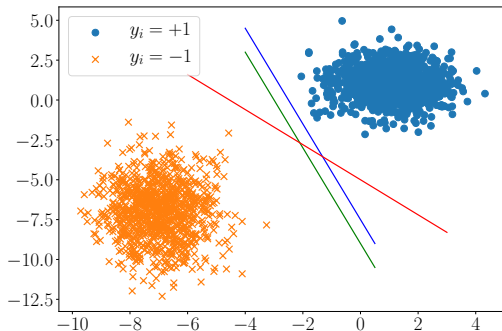
# Задача классификации

- ▶ Дана выборка  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ , где  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ , а  $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$ , если  $y_i = +1$  и  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$ , если  $y_i < 0$



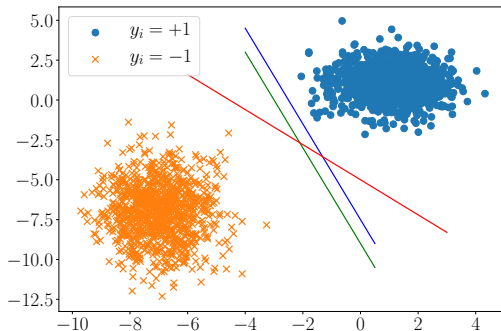
## Задача классификации

- ▶ Дана выборка  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ , где  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ , а  $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$ , если  $y_i = +1$  и  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$ , если  $y_i < 0$



# Задача классификации

- ▶ Дана выборка  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ , где  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ , а  $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$ , если  $y_i = +1$  и  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$ , если  $y_i < 0$



**Q:** Как однозначно задать разделяющую гиперплоскость?

# Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

# Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- ▶ Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$



# Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- ▶ Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

- ▶ Расстояние между гиперплоскостями

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{2}{\|\mathbf{a}\|_2}$$

# Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- ▶ Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

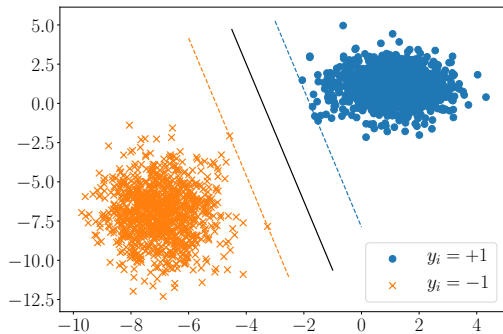
- ▶ Расстояние между гиперплоскостями

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{2}{\|\mathbf{a}\|_2}$$

## Финальная задача

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a}, b} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & y_i (\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

# Оптимальная гиперплоскость



# Оптимизация на конусе второго порядка (SOCP)

Коническая форма записи

$$\begin{aligned} \min \mathbf{f}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}_i^\top \mathbf{x} + d_i \\ \mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \mathbf{f}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } (\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i^\top \mathbf{x} + d_i) \succeq_{K_i} 0 \\ \mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{g} \end{aligned}$$

QCQP  $\rightarrow$  SOCP

- ▶ Пусть  $\mathbf{x}^\top \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r \leq 0$  и  $0 \prec \mathbf{P} = \mathbf{L} \mathbf{L}^\top$
- ▶  $(\mathbf{L}^\top \mathbf{x})^\top (\mathbf{L}^\top \mathbf{x}) + 2\tilde{\mathbf{q}}^\top \mathbf{L}^{-\top} \mathbf{L}^\top \mathbf{x} + \|\mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}\|_2^2 \leq \|\mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}\|_2^2 - r$
- ▶ Или  $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x} + \mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}\|_2 \leq \sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^\top \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} - r}$

## QCQP $\rightarrow$ SOCP: преобразование целевой функции

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 & \Rightarrow \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t \end{array}$$

## QCQP $\rightarrow$ SOCP: преобразование целевой функции

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 & \implies \min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t \end{array}$$

► Так как  $\mathbf{P}_0 \succ 0$ , то  $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$

## QCQP $\rightarrow$ SOCP: преобразование целевой функции

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 & \implies \min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t \end{array}$$

- ▶ Так как  $\mathbf{P}_0 \succ 0$ , то  $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- ▶ Тогда  $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$  сводится к  $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$

## QCQP $\rightarrow$ SOCP: преобразование целевой функции

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 & \implies \min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t \end{array}$$

- ▶ Так как  $\mathbf{P}_0 \succ 0$ , то  $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- ▶ Тогда  $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$  сводится к  $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$
- ▶ Повёрнутый конус второго порядка:  
 $\mathcal{Q}_{\text{rot}}^n = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz}, y \geq 0, z \geq 0\}$



## QCQP $\rightarrow$ SOCP: преобразование целевой функции

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 & \Rightarrow \min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t \end{array}$$

- ▶ Так как  $\mathbf{P}_0 \succ 0$ , то  $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- ▶ Тогда  $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$  сводится к  $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$
- ▶ Повёрнутый конус второго порядка:  
 $\mathcal{Q}_{\text{rot}}^n = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz}, y \geq 0, z \geq 0\}$
- ▶ Условие  $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz}, y, z \geq 0 \Leftrightarrow \|(2\mathbf{x}, y - z)\|_2 \leq y + z$

## QCQP $\rightarrow$ SOCP: преобразование целевой функции

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 & \Rightarrow \min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t \end{array}$$

- ▶ Так как  $\mathbf{P}_0 \succ 0$ , то  $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- ▶ Тогда  $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$  сводится к  $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$
- ▶ Повёрнутый конус второго порядка:  
 $\mathcal{Q}_{\text{rot}}^n = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz}, y \geq 0, z \geq 0\}$
- ▶ Условие  $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz}, y, z \geq 0 \Leftrightarrow \|(2\mathbf{x}, y - z)\|_2 \leq y + z$
- ▶ Тогда  $(\mathbf{L}^\top \mathbf{x}, t, 1) \in \mathcal{Q}_{\text{rot}}^n$

## QCQP $\rightarrow$ SOCP: преобразование целевой функции

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 & \Rightarrow \min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t \end{array}$$

- ▶ Так как  $\mathbf{P}_0 \succ 0$ , то  $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- ▶ Тогда  $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$  сводится к  $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$
- ▶ Повёрнутый конус второго порядка:  
 $\mathcal{Q}_{\text{rot}}^n = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz}, y \geq 0, z \geq 0\}$
- ▶ Условие  $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz}, y, z \geq 0 \Leftrightarrow \|(2\mathbf{x}, y - z)\|_2 \leq y + z$
- ▶ Тогда  $(\mathbf{L}^\top \mathbf{x}, t, 1) \in \mathcal{Q}_{\text{rot}}^n$

Отношения между рассмотренными типами задач

$$\text{LP} \subset \text{QCQP} \subset \text{SOCP}$$

# Задача геометрического программирования (geometric programming)

## Определения

- ▶ Функцию вида  $f(\mathbf{x}) = cx_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ , где  $c > 0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\text{dom} f = \mathbb{R}_{++}^n$  называют обобщённым мономом
- ▶ Функцию вида  $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} \dots x_n^{a_{nk}}$ , где  $c_k > 0$ ,  $a_{ik} \in \mathbb{R}$  и  $\text{dom} f = \mathbb{R}_{++}^n$  называют позиномом

# Задача геометрического программирования (geometric programming)

## Определения

- ▶ Функцию вида  $f(\mathbf{x}) = cx_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ , где  $c > 0, a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\text{dom} f = \mathbb{R}_{++}^n$  называют обобщённым мономом
- ▶ Функцию вида  $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} \dots x_n^{a_{nk}}$ , где  $c_k > 0, a_{ik} \in \mathbb{R}$  и  $\text{dom} f = \mathbb{R}_{++}^n$  называют позиномом

## Общий вид задачи

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq 1 \\ & h_j(\mathbf{x}) = 1, \end{aligned}$$

где  $f_i$  — позиномы, а  $h_j$  — обобщённые мономы

# Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных:  $x_i = e^{y_i}$

# Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных:  $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$

# Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных:  $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- ▶ Полином превращается в  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$



# Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных:  $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- ▶ Полином превращается в  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- ▶ Общий вид переписывается в выпуклой форме

# Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных:  $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- ▶ Полином превращается в  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- ▶ Общий вид переписывается в выпуклой форме

# Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных:  $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- ▶ Полином превращается в  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- ▶ Общий вид переписывается в выпуклой форме

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{y}} \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{k0}^\top \mathbf{y} + b_{k0}} \\ \text{s.t. } & \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{ki}^\top \mathbf{y} + b_{ki}} \leq 1 \\ & e^{\mathbf{d}_j^\top \mathbf{y} + p_j} = 1 \end{aligned}$$

# Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных:  $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- ▶ Полином превращается в  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- ▶ Общий вид переписывается в выпуклой форме

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \quad & \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{k0}^\top \mathbf{y} + b_{k0}} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{ki}^\top \mathbf{y} + b_{ki}} \leq 1 \\ & e^{\mathbf{d}_j^\top \mathbf{y} + p_j} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \quad & \log \left( \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{k0}^\top \mathbf{y} + b_{k0}} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \log \left( \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{ki}^\top \mathbf{y} + b_{ki}} \right) \leq 0 \\ & \mathbf{d}_j^\top \mathbf{y} + p_j = 0 \end{aligned}$$

## Пример

- ▶ Пусть есть  $n$  транмиттеров и  $n$  ресиверов

## Пример

- ▶ Пусть есть  $n$  трансмиттеров и  $n$  ресиверов
- ▶ Мощность сигнала  $p_i$  на трансмиттере

## Пример

- ▶ Пусть есть  $n$  транмиттеров и  $n$  ресиверов
- ▶ Мощность сигнала  $p_i$  на транмиттере
- ▶ Мощность сигнала на  $i$ -ом ресивере  $G_{ii}p_i$ ,  $G_{ii} > 0$

## Пример

- ▶ Пусть есть  $n$  транмиттеров и  $n$  ресиверов
- ▶ Мощность сигнала  $p_i$  на транмиттере
- ▶ Мощность сигнала на  $i$ -ом ресивере  $G_{ii}p_i$ ,  $G_{ii} > 0$
- ▶ Мощность интерференции на  $i$ -ом ресивере  $\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j$



## Пример

- ▶ Пусть есть  $n$  транмиттеров и  $n$  ресиверов
- ▶ Мощность сигнала  $p_i$  на транмиттере
- ▶ Мощность сигнала на  $i$ -ом ресивере  $G_{ii}p_i$ ,  $G_{ii} > 0$
- ▶ Мощность интерференции на  $i$ -ом ресивере  $\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j$
- ▶ Отношение сингал-шум (SINR)  $\frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j}$ , где  $\sigma_i$  — мощность шума на  $i$ -ом ресивере

## Пример

- ▶ Пусть есть  $n$  транмиттеров и  $n$  ресиверов
- ▶ Мощность сигнала  $p_i$  на транмиттере
- ▶ Мощность сигнала на  $i$ -ом ресивере  $G_{ii}p_i$ ,  $G_{ii} > 0$
- ▶ Мощность интерференции на  $i$ -ом ресивере  $\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j$
- ▶ Отношение сигнал-шум (SINR)  $\frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j}$ , где  $\sigma_i$  — мощность шума на  $i$ -ом ресивере

## Задача минимизации мощности

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^n p_i \\ & \text{s.t. } p^{\min} \leq p_i \leq p^{\max} \\ & \frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j} \geq S_i \end{aligned}$$

## Пример

- ▶ Пусть есть  $n$  трансмиттеров и  $n$  ресиверов
- ▶ Мощность сигнала  $p_i$  на трансмиттере
- ▶ Мощность сигнала на  $i$ -ом ресивере  $G_{ii}p_i$ ,  $G_{ii} > 0$
- ▶ Мощность интерференции на  $i$ -ом ресивере  $\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j$
- ▶ Отношение сигнал-шум (SINR)  $\frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j}$ , где  $\sigma_i$  — мощность шума на  $i$ -ом ресивере

## Задача минимизации мощности

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}} \quad & \sum_{i=1}^n p_i \\ \text{s.t.} \quad & p^{\min} \leq p_i \leq p^{\max} \\ & \frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j} \geq S_i \end{aligned}$$

Больше примеров можно найти в этом tutorialе<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>[https://web.stanford.edu/~boyd/papers/pdf/gp\\_tutorial.pdf](https://web.stanford.edu/~boyd/papers/pdf/gp_tutorial.pdf)

## Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left( \sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

# Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left( \sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

- ▶ Эквивалентная запись  $\sum_{k=1}^m e^{z_k - t} \leq 1$

## Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left( \sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

- ▶ Эквивалентная запись  $\sum_{k=1}^m e^{z_k - t} \leq 1$
- ▶ Введём переменную  $e^{z_k - t} \leq u_k$

## Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left( \sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

- ▶ Эквивалентная запись  $\sum_{k=1}^m e^{z_k - t} \leq 1$
- ▶ Введём переменную  $e^{z_k - t} \leq u_k$
- ▶ Тогда  $\sum_{k=1}^m u_k \leq 1$  — линейное неравенство

# Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left( \sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

- ▶ Эквивалентная запись  $\sum_{k=1}^m e^{z_k - t} \leq 1$
- ▶ Введём переменную  $e^{z_k - t} \leq u_k$
- ▶ Тогда  $\sum_{k=1}^m u_k \leq 1$  — линейное неравенство

## Определение

Экспоненциальным конусом называется такой конус

$$K_{\text{exp}} = \{(x, y, z) \mid x \geq ye^{z/y}, y > 0\} \cup \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \leq 0\}$$



# Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left( \sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

- ▶ Эквивалентная запись  $\sum_{k=1}^m e^{z_k - t} \leq 1$
- ▶ Введём переменную  $e^{z_k - t} \leq u_k$
- ▶ Тогда  $\sum_{k=1}^m u_k \leq 1$  — линейное неравенство

## Определение

Экспоненциальным конусом называется такой конус

$$K_{\text{exp}} = \{(x, y, z) \mid x \geq ye^{z/y}, y > 0\} \cup \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \leq 0\}$$

- ▶  $e^{z_k - t} \leq u_k \Leftrightarrow (u_k, 1, z_k - t) \in K_{\text{exp}}$

# Оптимизация на конусе $\mathbf{S}^n_+$ (SDP)

Коническая форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$  и все  $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$ .

Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \text{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\ \text{s.t. } \text{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i \\ \mathbf{X} \succeq 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$  и все  $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

# Оптимизация на конусе $\mathbf{S}_+^n$ (SDP)

Коническая форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$  и все  $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$ .

Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \text{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\ \text{s.t. } \text{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i \\ \mathbf{X} \succeq 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$  и все  $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

- Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса

# Оптимизация на конусе $\mathbf{S}_+^n$ (SDP)

Коническая форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$  и все  $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$ .

Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \text{trace}(\mathbf{CX}) \\ \text{s.t. } \text{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i \\ \mathbf{X} \succeq 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$  и все  $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

- ▶ Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса
- ▶ Геометрию таких задач рассмотрим ближе к концу курса, когда будем говорить о методах

# Оптимизация на конусе $\mathbf{S}_+^n$ (SDP)

Коническая форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$  и все  $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$ .

Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \text{trace}(\mathbf{CX}) \\ \text{s.t. } \text{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i \\ \mathbf{X} \succeq 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$  и все  $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

- ▶ Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса
- ▶ Геометрию таких задач рассмотрим ближе к концу курса, когда будем говорить о методах
- ▶ Из одной формы можно получить другую

# LP и SOCP как задачи SDP

# LP и SOCP как задачи SDP

## LP

- ▶  $\mathbf{G} = 0$
- ▶  $\mathbf{F}_i$  такие, что  $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i = -\text{diag}(\mathbf{x})$

# LP и SOCP как задачи SDP

## LP

- ▶  $\mathbf{G} = 0$
- ▶  $\mathbf{F}_i$  такие, что  $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i = -\text{diag}(\mathbf{x})$

## Дополнение по Шуру

Если  $\mathbf{C} \succ 0$ , то

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \succeq 0$$



# LP и SOCP как задачи SDP

## LP

- ▶  $\mathbf{G} = 0$
- ▶  $\mathbf{F}_i$  такие, что  $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i = -\text{diag}(\mathbf{x})$

## Дополнение по Шуру

Если  $\mathbf{C} \succ 0$ , то

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \succeq 0$$

## SOCP

- ▶  $\|\mathbf{x}\|_2 \leq t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t & \mathbf{x}^\top \\ \mathbf{x} & t\mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0$
- ▶ Аналогично для  $\mathcal{Q}^n$ :  
 $\|\mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i & (\mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i)^\top \\ \mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i & (\mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i)\mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0$

## Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- ▶ Граф  $G = (V, E)$  и матрица весов рёбер  $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$  и  $\mathbf{W} \geq 0$

## Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- ▶ Граф  $G = (V, E)$  и матрица весов рёбер  $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$  и  $\mathbf{W} \geq 0$
- ▶ Задача MAXCUT

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} \sum_{i < j} w_{ij} (1 - x_i x_j) \\ \text{s.t.} \quad & x_i \in \{-1, +1\} \end{aligned}$$

## Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- ▶ Граф  $G = (V, E)$  и матрица весов рёбер  $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$  и  $\mathbf{W} \geq 0$
- ▶ Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i < j} w_{ij} (1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- ▶ В матрично-векторном виде

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{W} \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

## Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- ▶ Граф  $G = (V, E)$  и матрица весов рёбер  $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$  и  $\mathbf{W} \succeq 0$
- ▶ Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i < j} w_{ij} (1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- ▶ В матрично-векторном виде

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{W} \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- ▶ Эквивалентный вид

$$\min \frac{1}{2} \text{trace}(\mathbf{W} \mathbf{X})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X} \succeq 0, \text{rank}(\mathbf{X}) = 1, \text{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$$

## Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- ▶ Граф  $G = (V, E)$  и матрица весов рёбер  $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$  и  $\mathbf{W} \succeq 0$
- ▶ Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i < j} w_{ij} (1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- ▶ В матрично-векторном виде

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{W} \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- ▶ Эквивалентный вид

$$\min \frac{1}{2} \text{trace}(\mathbf{W} \mathbf{X})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X} \succeq 0, \text{rank}(\mathbf{X}) = 1, \text{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$$

- ▶ SDP релаксация

$$\min \text{trace}(\mathbf{W} \mathbf{X})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X} \succeq 0, \text{rank}(\mathbf{X}) \leq 1, \text{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$$

## Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано  $k$  точек  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$

## Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано  $k$  точек  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все  $\mathbf{x}_i$



## Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано  $k$  точек  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все  $\mathbf{x}_i$
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

## Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано  $k$  точек  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все  $\mathbf{x}_i$
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- ▶ Тогда площадь увеличивается в  $\det(\mathbf{A}^{-1})$  раз.

## Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано  $k$  точек  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все  $\mathbf{x}_i$
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- ▶ Тогда площадь увеличивается в  $\det(\mathbf{A}^{-1})$  раз.
- ▶ Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией

## Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано  $k$  точек  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все  $\mathbf{x}_i$
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- ▶ Тогда площадь увеличивается в  $\det(\mathbf{A}^{-1})$  раз.
- ▶ Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- ▶  $\log \det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log \det(\mathbf{A})$  – выпуклая функция при  $\mathbf{A} \succ 0$

# Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано  $k$  точек  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все  $\mathbf{x}_i$
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- ▶ Тогда площадь увеличивается в  $\det(\mathbf{A}^{-1})$  раз.
- ▶ Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- ▶  $\log \det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log \det(\mathbf{A})$  – выпуклая функция при  $\mathbf{A} \succ 0$

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{A}, \mathbf{b}} \log \det \mathbf{A}^{-1} \\ & \text{s.t. } \mathbf{A} \succ 0 \\ & \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}\|_2 \leq 1 \end{aligned}$$

# Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано  $k$  точек  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все  $\mathbf{x}_i$
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

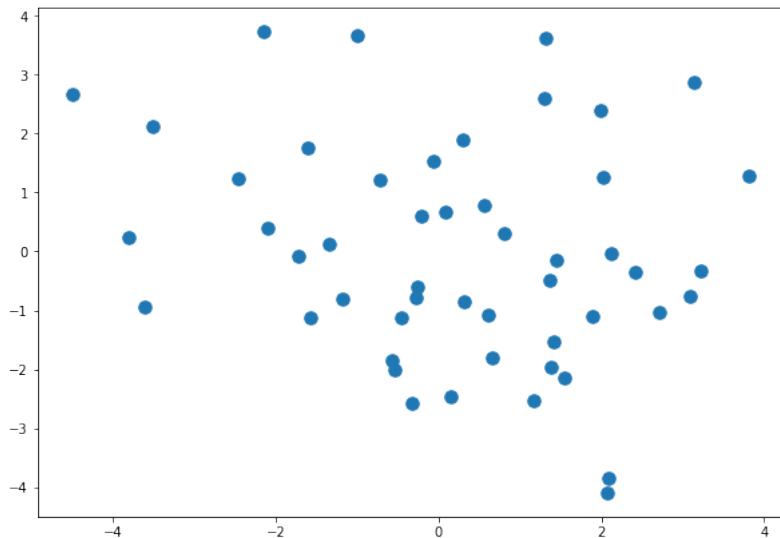
- ▶ Тогда площадь увеличивается в  $\det(\mathbf{A}^{-1})$  раз.
- ▶ Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- ▶  $\log \det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log \det(\mathbf{A})$  – выпуклая функция при  $\mathbf{A} \succ 0$

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{A}, \mathbf{b}} \log \det \mathbf{A}^{-1} \\ & \text{s.t. } \mathbf{A} \succ 0 \\ & \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}\|_2 \leq 1 \end{aligned}$$

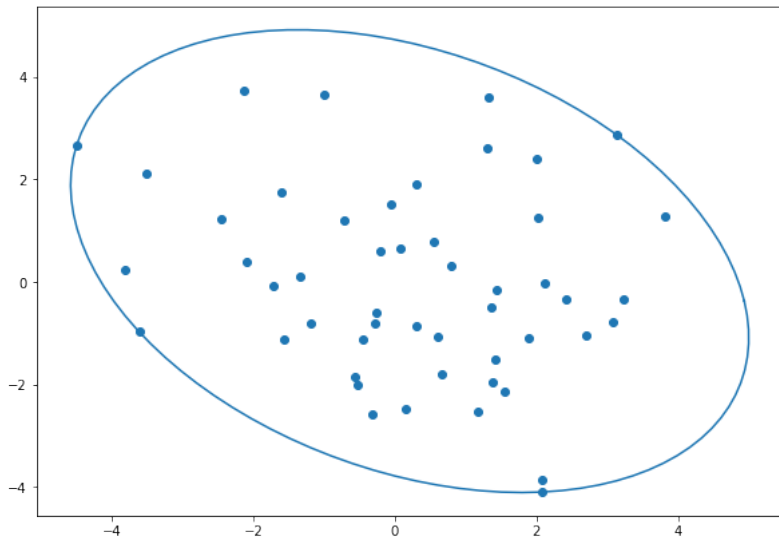
## Эллипсоид Löwner-John

Постановка аналогична только не для точек, а для некоторого выпуклого множества

## Пример построения экстремального эллипсоида



## Пример построения экстремального эллипсоида





# Равносильные преобразования задач

# Равносильные преобразования задач

## Запись через надграфик

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) & \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}, t} t & \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m & \\ f_0(\mathbf{x}) \leq t & \end{array}$$

# Равносильные преобразования задач

## Запись через надграфик

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) & \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}, t} t & \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m & \\ f_0(\mathbf{x}) \leq t & \end{array}$$

## Преобразования ограничений

- ▶  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq 0$
- ▶  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \geq 0, ; \mathbf{x}_2 \geq 0$
- ▶ Формирование блочных матриц

# Равносильные преобразования задач

## Запись через надграфик

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) & \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}, t} t \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m \\ f_0(\mathbf{x}) \leq t \end{array}$$

## Преобразования ограничений

- ▶  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq 0$
- ▶  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0$
- ▶ Формирование блочных матриц

## Перенос ограничений в целевую функцию

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \Rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) + \mathbb{I}_X(\mathbf{x}), \quad \mathbb{I}_X(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in X, \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin X. \end{cases}$$

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации

# Главное

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование
- ▶ Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование
- ▶ Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- ▶ Решение линейных систем с неквадратными матрицами



- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование
- ▶ Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- ▶ Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- ▶ Задача классификации и SVM

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование
- ▶ Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- ▶ Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- ▶ Задача классификации и SVM
- ▶ Выпуклая релаксация задачи MAXCUT

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование
- ▶ Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- ▶ Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- ▶ Задача классификации и SVM
- ▶ Выпуклая релаксация задачи MAXCUT
- ▶ Задача построения оптимального эллипсоида