Методы оптимизации
Лекция 3: Примеры задач выпуклой оптимизации

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт

27 сентября 2021 г.

На прошлой лекции

- Самосопряжённые конусы
- Отделимость выпуклых множеств
- Выпуклые функции и способы проверки функции на выпуклость

Уточнение про конусы и отношение порядка

Определение

Конус K называется правильным (proper), если

- K выпуклый
- K замкнутый
- K не содежит прямых
- внутренность K непуста

Уточнение про конусы и отношение порядка

Определение

Конус K называется правильным (proper), если

- K выпуклый
- K замкнутый
- K не содежит прямых
- внутренность K непуста

Дополнение к прошлой лекции

Упорядочивание элементов относительно конусов справедливо только для правильных конусов.

Основные результаты по выпуклым функциям

Основные результаты по выпуклым функциям

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ $(\alpha \in (0, 1))$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Основные результаты по выпуклым функциям

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ $(\alpha \in (0, 1))$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow \operatorname{epi} f$ *выпуклое множество.*

Основные результаты по выпуклым функциям

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ $(\alpha \in (0, 1))$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\ f$ *выпуклое множество.*

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ *дифференцируема и определена на выпуклом множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Тогда* $f(\mathbf{x})$ *сильно выпукла с константой* $m \geq 0$ *в том и только том случае, если*

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \left\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in X.$$

Основные результаты по выпуклым функциям

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ $(\alpha \in (0, 1))$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \; (<) \; \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\ f$ *выпуклое множество.*

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ *дифференцируема и определена на выпуклом множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n$*. Тогда* $f(\mathbf{x})$ *сильно выпукла с константой* $m \geq 0$ *в том и только том случае, если*

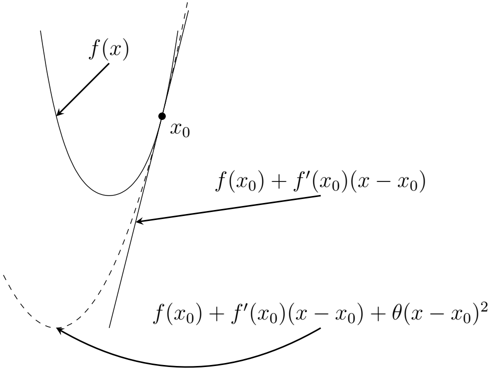
$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \left\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2 , \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in X.$$

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Иллюстрация дифференциальных критериев

Пусть $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^4$



- Линейная глобальная оценка снизу для выпуклой функции
- Квадратичная глобальная оценка снизу для сильно выпуклой функции

Стандартная форма записи задачи выпуклой оптимизации

$$
\begin{aligned}
& \min f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

- f_0 – выпуклая целевая функция
- f_i – выпуклые функции для ограничений типа неравенств
- Ограничения типа равенств *только* линейные

Стандартная форма записи задачи выпуклой оптимизации

$$
\begin{aligned}
& \min f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

- f_0 – выпуклая целевая функция
- f_i – выпуклые функции для ограничений типа неравенств
- Ограничения типа равенств *только* линейные

Ограничения стандартной формы записи

- Выпуклое множество может быть задано более общим образом

$$
\begin{aligned}
& \min x^2 \\
\text{s.t. } & (x-2)^2 = 0 \\
& x^3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
& \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
& \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i
- Необходимо, чтобы человек получил m питательных веществ в количествах не менее $b_1, \ldots, b_m$

Линейное программирование (LP)

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\\
&x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i
- Необходимо, чтобы человек получил m питательных веществ в количествах не менее $b_1, \ldots, b_m$
- Известно, что в j-ом продукте содержится a_{ij} i-го питательного вещества

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- Простейший пример задачи конической оптимизации
- Замена $\mathbb{R}^n_+$ на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i
- Необходимо, чтобы человек получил m питательных веществ в количествах не менее $b_1, \ldots, b_m$
- Известно, что в j-ом продукте содержится a_{ij} i-го питательного вещества
- Необходимо определить количество каждого продукта

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \le 0, \; i = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Задача будет выпукла, если все $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}^n_+$

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- Задача будет выпукла, если все $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}^n_+$
- Может быть сведена к оптимизации на конусе второго порядка $\mathcal{Q}^n = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \ i = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

- Задача будет выпукла, если все $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}^n_+$
- Может быть сведена к оптимизации на конусе второго порядка $\mathcal{Q}^n = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$
- При $\mathbf{P}_i = 0$ получим задачу LP

Линейные системы с неквадратными матрицами

- Линейная задача наименьших квадратов

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Возможно добавление линейных ограничений вида
$l_i \leq x_i \leq u_i$

Линейные системы с неквадратными матрицами

- Линейная задача наименьших квадратов

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

  Возможно добавление линейных ограничений вида $l_i \leq x_i \leq u_i$

- Поиск решения минимальной нормы

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$$
$$\text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Линейные системы с неквадратными матрицами

- Линейная задача наименьших квадратов

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

  Возможно добавление линейных ограничений вида $l_i \leq x_i \leq u_i$

- Поиск решения минимальной нормы

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t. } &\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Q: Каков геометрический смысл у решения?

Линейные системы с неквадратными матрицами

- Линейная задача наименьших квадратов

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

  Возможно добавление линейных ограничений вида $l_i \leq x_i \leq u_i$

- Поиск решения минимальной нормы

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 \\ &\text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Q: Каков геометрический смысл у решения?

Q: К какой задаче сводится похожая задача?

$$\begin{aligned} &\min \|\mathbf{x}\|_\infty \\ &\text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- n активов

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- n активов
- Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним $\bar{\mathbf{p}}$ и ковариационной матрицей $\mathbf{\Sigma}$

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- n активов
- Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним $\bar{\mathbf{p}}$ и ковариационной матрицей $\mathbf{\Sigma}$
- Минимально допустимый средний доход $\bar{r}$

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- n активов
- Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним $\bar{\mathbf{p}}$ и ковариационной матрицей $\mathbf{\Sigma}$
- Минимально допустимый средний доход $\bar{r}$

Классическая задача составления оптимального портфеля

$$
\begin{aligned}
& \min \mathbf{x}^\top \mathbf{\Sigma} \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \bar{\mathbf{p}}^\top \mathbf{x} \geq \bar{r} \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1, \; x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

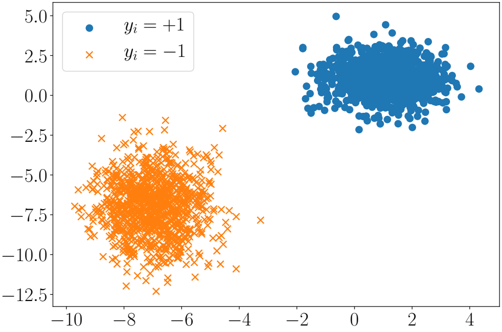
- Минимум риска при минимально допустимом доходе
- Существуют многочисленные вариации, которые не выводят задачу из класса QCQP или SOCP

Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$

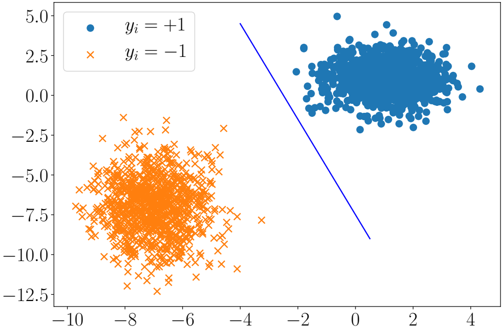
Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



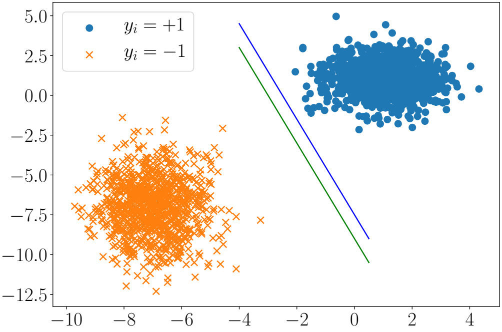
Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



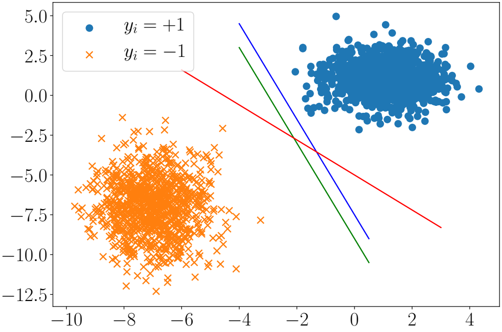
Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



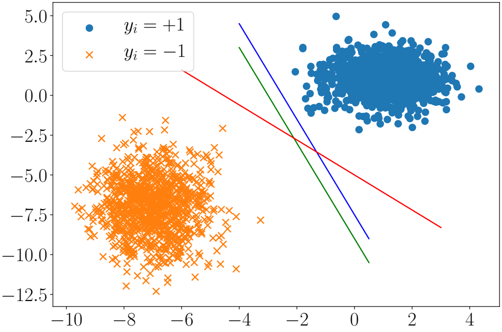
Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



Задача классификации

- Дана выборка $(\mathbf{x}_i, y_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



Q: Как однозначно задать разделяющую гиперплоскость?

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

- Расстояние между гиперплоскостями

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{2}{\|\mathbf{a}\|_2}$$

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

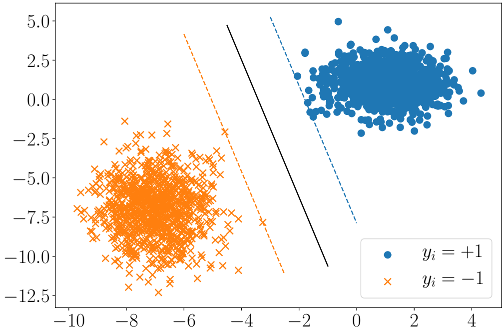
- Расстояние между гиперплоскостями

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{2}{\|\mathbf{a}\|_2}$$

Финальная задача

$$\min_{\mathbf{a}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\|_2^2$$
$$\text{s.t. } y_i(\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b) > 1, \; i = 1, \dots, m$$

Оптимальная гиперплоскость



Оптимизация на конусе второго порядка (SOCP)

$$\min \mathbf{f}^\top \mathbf{x}$$
s.t. $\|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \le \mathbf{c}_i^\top \mathbf{x} + d_i$
$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{g}$$

Коническая форма записи

$$\min \mathbf{f}^\top \mathbf{x}$$
s.t. $(\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i^\top \mathbf{x} + d_i) \succeq_{K_i} 0$
$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{g}$$

QCQP $\to$ SOCP

- Пусть $\mathbf{x}^\top \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r \le 0$ и $0 \prec \mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- $(\mathbf{L}^\top \mathbf{x})^\top (\mathbf{L}^\top \mathbf{x}) + 2\tilde{\mathbf{q}}^\top \mathbf{L}^{-\top} \mathbf{L}^\top \mathbf{x} + \|\mathbf{L}^{-1}\tilde{\mathbf{q}}\|_2^2 \le \|\mathbf{L}^{-1}\tilde{\mathbf{q}}\|_2^2 - r$
- Или $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x} + \mathbf{L}^{-1}\tilde{\mathbf{q}}\|_2 \le \sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^\top \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} - r}$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \; & \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}, t} \; & t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \le t
\end{aligned}
$$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t
\end{aligned}
$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t
\end{aligned}
$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- Тогда $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$ сводится к $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \quad \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \min_{\mathbf{x},t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \quad \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \; \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \le t$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- Тогда $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \le t$ сводится к $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \le t$
- Повёрнутый конус второго порядка: $\mathcal{Q}^n_{\text{rot}} = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{yz},\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x},t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t
\end{aligned}
$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- Тогда $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$ сводится к $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$
- Повёрнутый конус второго порядка:
  $\mathcal{Q}^n_{\text{rot}} = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$
- Условие $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y, z \geq 0 \Leftrightarrow \|(2\mathbf{x}, y - z)\|_2 \leq y + z$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0$$
$$\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\min_{\mathbf{x},t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0$$
$$\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- Тогда $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$ сводится к $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$
- Повёрнутый конус второго порядка:
  $\mathcal{Q}^n_{\text{rot}} = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$
- Условие $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y, z \geq 0 \Leftrightarrow \|(2\mathbf{x}, y - z)\|_2 \leq y + z$
- Тогда $(\mathbf{L}^\top \mathbf{x}, t, 1) \in \mathcal{Q}^n_{\text{rot}}$

QCQP $\to$ SOCP: преобразование целевой функции

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}, t} t + \mathbf{q}_0^\top \mathbf{x} + r_0 \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t
\end{aligned}
$$

- Так как $\mathbf{P}_0 \succ 0$, то $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- Тогда $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq t$ сводится к $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x}\|_2^2 \leq t$
- Повёрнутый конус второго порядка:
  $\mathcal{Q}^n_{\text{rot}} = \{(\mathbf{x}, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$
- Условие $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{yz},\ y, z \geq 0 \Leftrightarrow \|(2\mathbf{x}, y - z)\|_2 \leq y + z$
- Тогда $(\mathbf{L}^\top \mathbf{x}, t, 1) \in \mathcal{Q}^n_{\text{rot}}$

Отношения между рассмотренными типами задач

LP $\subset$ QCQP $\subset$ SOCP

Задача геометрического программирования (geometric programming)

Определения

- Функцию вида $f(\mathbf{x}) = cx_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$, где $c > 0, a_i \in \mathbb{R}$, $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^n_{++}$ называют обобщённым мономом
- Функцию вида $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} \ldots x_n^{a_{nk}}$, где $c_k > 0, a_{ik} \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^n_{++}$ называют позиномом

Задача геометрического программирования (geometric programming)

Определения

- Функцию вида $f(\mathbf{x}) = cx_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, где $c > 0, a_i \in \mathbb{R}$, $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^n_{++}$ называют обобщённым мономом
- Функцию вида $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} \dots x_n^{a_{nk}}$, где $c_k > 0, a_{ik} \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^n_{++}$ называют позиномом

Общий вид задачи

$$
\begin{aligned}
&\min f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 1 \\
& h_j(\mathbf{x}) = 1,
\end{aligned}
$$

где f_i — позиномы, а h_j — обобщённые мономы

Выпуклая форма задачи GP

- Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$

Выпуклая форма задачи GP

- Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$

Выпуклая форма задачи GP

- Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- Позином превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$

Выпуклая форма задачи GP

- Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- Позином превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- Общий вид переписывается в выпуклой форме

Выпуклая форма задачи GP

- Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- Позином превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- Общий вид переписывается в выпуклой форме

Выпуклая форма задачи GP

- Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- Позином превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- Общий вид переписывается в выпуклой форме

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{y}} \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{k0}^\top \mathbf{y} + b_{k0}} \\
\text{s.t. } &\sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{ki}^\top \mathbf{y} + b_{ki}} \leq 1 \\
&e^{\mathbf{d}_j^\top \mathbf{y} + p_j} = 1
\end{aligned}
$$

Выпуклая форма задачи GP

- Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- Позином превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- Общий вид переписывается в выпуклой форме

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{y}} \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{k0}^\top \mathbf{y} + b_{k0}} \\
\text{s.t. } &\sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{ki}^\top \mathbf{y} + b_{ki}} \leq 1 \\
&e^{\mathbf{d}_j^\top \mathbf{y} + p_j} = 1
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{y}} \log \left(\sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{k0}^\top \mathbf{y} + b_{k0}} \right) \\
\text{s.t. } &\log \left(\sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{ki}^\top \mathbf{y} + b_{ki}} \right) \leq 0 \\
&\mathbf{d}_j^\top \mathbf{y} + p_j = 0
\end{aligned}
$$

Пример

- Пусть есть n трансмиттеров и n ресиверов

Пример

- Пусть есть n трансмиттеров и n ресиверов
- Мощность сигнала p_i на трансмиттере

Пример

- Пусть есть n трансмиттеров и n ресиверов
- Мощность сигнала p_i на трансмиттере
- Мощность сигнала на i-ом ресивере $G_{ii}p_i$, $G_{ii} > 0$

Пример

- Пусть есть n трансмиттеров и n ресиверов
- Мощность сигнала p_i на трансмиттере
- Мощность сигнала на i-ом ресивере $G_{ii}p_i$, $G_{ii} > 0$
- Мощность интерференции на i-ом ресивере $\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j$

Пример

- Пусть есть n трансмиттеров и n ресиверов
- Мощность сигнала p_i на трансмиттере
- Мощность сигнала на i-ом ресивере $G_{ii}p_i$, $G_{ii} > 0$
- Мощность интерференции на i-ом ресивере $\sum_{j \neq i} G_{ij} p_j$
- Отношение сингал-шум (SINR) $\frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij} p_j}$, где σ_i — мощность шума на i-ом ресивере

Пример

- Пусть есть n трансмиттеров и n ресиверов
- Мощность сигнала p_i на трансмиттере
- Мощность сигнала на i-ом ресивере $G_{ii}p_i$, $G_{ii} > 0$
- Мощность интерференции на i-ом ресивере $\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j$
- Отношение сингал-шум (SINR) $\frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j}$, где σ_i — мощность шума на i-ом ресивере

Задача минимизации мощности

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^{n} p_i \\
\text{s.t. } & p^{\min} \leq p_i \leq p^{\max} \\
& \frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j} \geq S_i
\end{aligned}
$$

Пример

- Пусть есть n трансмиттеров и n ресиверов
- Мощность сигнала p_i на трансмиттере
- Мощность сигнала на i-ом ресивере $G_{ii}p_i$, $G_{ii} > 0$
- Мощность интерференции на i-ом ресивере $\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j$
- Отношение сингал-шум (SINR) $\frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j}$, где σ_i — мощность шума на i-ом ресивере

Задача минимизации мощности

$$
\min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^{n} p_i
$$

$$
\text{s.t. } p^{\min} \leq p_i \leq p^{\max}
$$

$$
\frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j} \geq S_i
$$

Больше примеров можно найти в этом туториале[1]

[1] https://web.stanford.edu/~boyd/papers/pdf/gp_tutorial.pdf

Коническая форма задачи GP

- После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log\left(\sum_{k=1}^{m} e^{z_k}\right) \leq t$$

в конической форме

Коническая форма задачи GP

- После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log\left(\sum_{k=1}^{m} e^{z_k}\right) \le t$$

в конической форме

- Эквивалентная запись $\sum_{k=1}^{m} e^{z_k - t} \le 1$

Коническая форма задачи GP

- После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log\left(\sum_{k=1}^{m} e^{z_k}\right) \leq t$$

в конической форме

- Эквивалентная запись $\sum_{k=1}^{m} e^{z_k - t} \leq 1$
- Введём переменную $e^{z_k - t} \leq u_k$

Коническая форма задачи GP

- После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log\left(\sum_{k=1}^{m} e^{z_k}\right) \le t$$

  в конической форме
- Эквивалентная запись $\sum_{k=1}^{m} e^{z_k - t} \le 1$
- Введём переменную $e^{z_k - t} \le u_k$
- Тогда $\sum_{k=1}^{m} u_k \le 1$ — линейное неравенство

Коническая форма задачи GP

- После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство
$$\log\left(\sum_{k=1}^{m} e^{z_k}\right) \leq t$$
в конической форме
- Эквивалентная запись $\sum_{k=1}^{m} e^{z_k - t} \leq 1$
- Введём переменную $e^{z_k - t} \leq u_k$
- Тогда $\sum_{k=1}^{m} u_k \leq 1$ — линейное неравенство

Определение

Экспоненциальным конусом называется такой конус
$K_{\exp} = \{(x, y, z) \mid x \geq ye^{z/y},\ y > 0\} \cup \{(x, 0, z) \mid x \geq 0,\ z \leq 0\}$

Коническая форма задачи GP

- После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log\left(\sum_{k=1}^{m} e^{z_k}\right) \leq t$$

в конической форме
- Эквивалентная запись $\sum_{k=1}^{m} e^{z_k - t} \leq 1$
- Введём переменную $e^{z_k - t} \leq u_k$
- Тогда $\sum_{k=1}^{m} u_k \leq 1$ — линейное неравенство

Определение

Экспоненциальным конусом называется такой конус
$K_{\exp} = \{(x, y, z) \mid x \geq y e^{z/y},\ y > 0\} \cup \{(x, 0, z) \mid x \geq 0,\ z \leq 0\}$

- $e^{z_k - t} \leq u_k \Leftrightarrow (u_k, 1, z_k - t) \in K_{\exp}$

Оптимизация на конусе $\mathbf{S}_+^n$ (SDP)

Коническая форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

Оптимизация на конусе $\mathbf{S}_+^n$ (SDP)

Коническая форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \mathrm{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } &\mathrm{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\
&\mathbf{X} \succeq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

- Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса

Оптимизация на конусе $\mathbf{S}_+^n$ (SDP)

Коническая форма

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{G} + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{F}_i \preceq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

Стандартная форма

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\ \text{s.t. } &\operatorname{trace}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}) = b_i \\ &\mathbf{X} \succeq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

- Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса
- Геометрию таких задач рассмотрим ближе к концу курса, когда будем говорить о методах

Оптимизация на конусе $\mathbf{S}^n_+$ (SDP)

Коническая форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X}} \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \\
\text{s.t. } & \operatorname{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i \\
& \mathbf{X} \succeq 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

- Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса
- Геометрию таких задач рассмотрим ближе к концу курса, когда будем говорить о методах
- Из одной формы можно получить другую

LP и SOCP как задачи SDP

LP и SOCP как задачи SDP

LP

- $\mathbf{G} = 0$
- $\mathbf{F}_i$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{F}_i = -\mathrm{diag}(\mathbf{x})$

LP и SOCP как задачи SDP

LP

- $\mathbf{G} = 0$
- $\mathbf{F}_i$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{F}_i = -\mathrm{diag}(\mathbf{x})$

Дополнение по Шуру

Если $\mathbf{C} \succ 0$, то

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \succeq 0$$

LP и SOCP как задачи SDP

LP

- $\mathbf{G} = 0$
- $\mathbf{F}_i$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{F}_i = -\mathrm{diag}(\mathbf{x})$

Дополнение по Шуру

Если $\mathbf{C} \succ 0$, то

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \succeq 0$$

SOCP

- $\|\mathbf{x}\|_2 \leq t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t & \mathbf{x}^\top \\ \mathbf{x} & t\mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0$
- Аналогично для $\mathcal{Q}^n$:
  $\|\mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i & (\mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i)^\top \\ \mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i & (\mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i)\mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$
- Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i<j} w_{ij}(1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$
- Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i<j} w_{ij}(1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- В матрично-векторном виде

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{W} \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$
- Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i<j} w_{ij}(1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- В матрично-векторном виде

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{W} \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- Эквивалентный вид

$$\min \frac{1}{2} \mathrm{trace}(\mathbf{W}\mathbf{X})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X} \succeq 0, \; \mathrm{rank}(\mathbf{X}) = 1, \; \mathrm{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$
- Задача MAXCUT

$$
\begin{aligned}
&\max \frac{1}{2} \sum_{i<j} w_{ij}(1 - x_i x_j)\\
\text{s.t. } & x_i \in \{-1, +1\}
\end{aligned}
$$

- В матрично-векторном виде

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{W}\mathbf{x}\\
\text{s.t. } & x_i \in \{-1, +1\}
\end{aligned}
$$

- Эквивалентный вид

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathrm{trace}(\mathbf{W}\mathbf{X})\\
\text{s.t. } & \mathbf{X} \succeq 0, \; \mathrm{rank}(\mathbf{X}) = 1, \; \mathrm{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

- SDP релаксация

$$
\begin{aligned}
&\min \mathrm{trace}(\mathbf{W}\mathbf{X})\\
\text{s.t. } & \mathbf{X} \succeq 0, \; \xcancel{\mathrm{rank}(\mathbf{X}) = 1}, \; \mathrm{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1,\ \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \; \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1,\ \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \; \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- $\log\det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log\det(\mathbf{A})$ – выпуклая функция при $\mathbf{A} \succ 0$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \ \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- $\log\det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log\det(\mathbf{A})$ – выпуклая функция при $\mathbf{A} \succ 0$

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{A},\mathbf{b}} \log\det \mathbf{A}^{-1} \\ \text{s.t. } & \mathbf{A} \succ 0 \\ & \|\mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}\|_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все $\mathbf{x}_i$
- Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \to \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \; \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

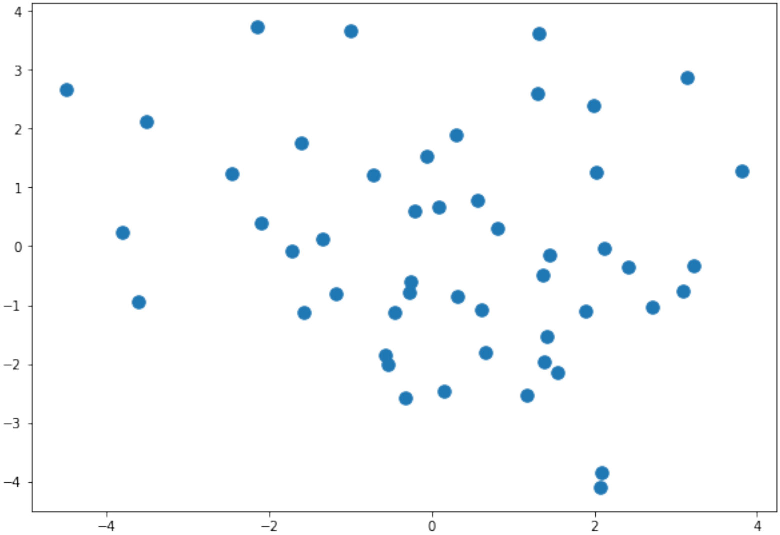
- Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- $\log\det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log\det(\mathbf{A})$ – выпуклая функция при $\mathbf{A} \succ 0$

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{A},\mathbf{b}} \log\det \mathbf{A}^{-1} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A} \succ 0 \\
& \|\mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}\|_2 \leq 1
\end{aligned}$$

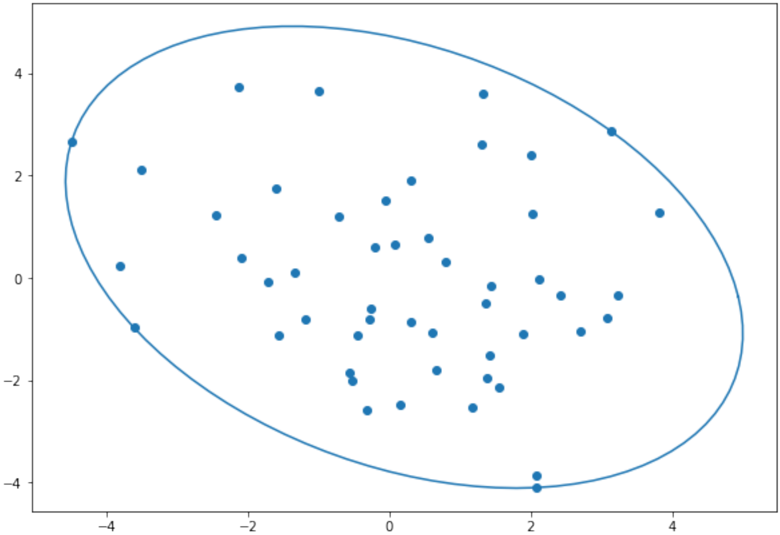
Эллипсоид Löwner-John

Постановка аналогична только не для точек, а для некоторого выпуклого множества

Пример построения экстремального эллипсоида



Пример построения экстремального эллипсоида



Равносильные преобразования задач

Равносильные преобразования задач

Запись через надграфик

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& f_i(\mathbf{x}) \le 0, \ i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x},\, t} t \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& f_i(\mathbf{x}) \le 0, \ i = 1, \ldots, m \\
& f_0(\mathbf{x}) \le t
\end{aligned}
$$

Равносильные преобразования задач

Запись через надграфик

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&f_i(\mathbf{x}) \le 0, \; i = 1, \dots, m
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x},\, t} t \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&f_i(\mathbf{x}) \le 0, \; i = 1, \dots, m \\
&f_0(\mathbf{x}) \le t
\end{aligned}
$$

Преобразования ограничений

- $\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \to \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \; \mathbf{y} \ge 0$
- $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \; \mathbf{x}_1 \ge 0, \; ; \mathbf{x}_2 \ge 0$
- Формирование блочных матриц

Равносильные преобразования задач

Запись через надграфик

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \ldots, m \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min_{\mathbf{x},\, t} t \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \ldots, m \\ &f_0(\mathbf{x}) \le t \end{aligned}$$

Преобразования ограничений

- $\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \to \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b},\ \mathbf{y} \ge 0$
- $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1 \ge 0,\ ; \mathbf{x}_2 \ge 0$
- Формирование блочных матриц

Перенос ограничений в целевую функцию

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \Rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) + \mathbb{I}_X(\mathbf{x}), \quad \mathbb{I}_X(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in X, \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin X. \end{cases}$$

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование
- Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование
- Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- Решение линейных систем с неквадратными матрицами

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование
- Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- Задача классификации и SVM

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование
- Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- Задача классификации и SVM
- Выпуклая релаксация задачи MAXCUT

Главное

- Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- Линейное программирование
- Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- Задача классификации и SVM
- Выпуклая релаксация задачи MAXCUT
- Задача построения оптимального эллипсоида