

Методы оптимизации

Лекция 4: Примеры задач выпуклой оптимизации

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт



3 октября 2022 г.

На прошлой лекции

- ▶ Автоматическое дифференцирование
- ▶ Выпуклые функции и способы проверки функции на выпуклость

Стандартная форма записи задачи выпуклой оптимизации

$$\begin{aligned} \min & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

- ▶ f_0 – выпуклая целевая функция
- ▶ f_i – выпуклые функции для ограничений типа неравенств
- ▶ Ограничения типа равенств *только* линейные

Стандартная форма записи задачи выпуклой оптимизации

$$\begin{aligned} \min f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

- ▶ f_0 – выпуклая целевая функция
- ▶ f_i – выпуклые функции для ограничений типа неравенств
- ▶ Ограничения типа равенств *только* линейные

Ограничения стандартной формы записи

- ▶ Выпуклое множество может быть задано более общим образом

$$\begin{aligned} \min x^2 \\ \text{s.t. } (x - 2)^2 = 0 \\ x^3 \geq 0 \end{aligned}$$

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена \mathbb{R}_+^n на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена \mathbb{R}_+^n на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена \mathbb{R}_+^n на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- ▶ Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена \mathbb{R}_+^n на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- ▶ Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i
- ▶ Необходимо, чтобы человек получил m питательных веществ в количествах не менее b_1, \dots, b_m

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена \mathbb{R}_+^n на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- ▶ Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i
- ▶ Необходимо, чтобы человек получил m питательных веществ в количествах не менее b_1, \dots, b_m
- ▶ Известно, что в j -ом продукте содержится a_{ij} i -го питательного вещества

Линейное программирование (LP)

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Существуют различные формы задачи LP, но все они сводятся к указанной
- ▶ Простейший пример задачи конической оптимизации
- ▶ Замена \mathbb{R}_+^n на другие конусы даёт более богатое семейство задач, примеры далее

Пример: составление диеты минимальной стоимости

- ▶ Дано n продуктов, цена единицы каждого c_i
- ▶ Необходимо, чтобы человек получил m питательных веществ в количествах не менее b_1, \dots, b_m
- ▶ Известно, что в j -ом продукте содержится a_{ij} i -го питательного вещества
- ▶ Необходимо определить количество каждого продукта

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- Задача будет выпукла, если все $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}_+^n$

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Задача будет выпукла, если все $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}_+^n$
- ▶ Может быть сведена к оптимизации на конусе второго порядка $\mathcal{Q}^n = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$

Квадратичное программирование с квадратичными ограничениями (QCQP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_0 \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r_0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- ▶ Задача будет выпукла, если все $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}_+^n$
- ▶ Может быть сведена к оптимизации на конусе второго порядка $\mathcal{Q}^n = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$
- ▶ При $\mathbf{P}_i = 0$ получим задачу LP

Линейные системы с неквадратными матрицами

- ▶ Линейная задача наименьших квадратов

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Возможно добавление линейных ограничений вида

$$l_i \leq x_i \leq u_i$$

Линейные системы с неквадратными матрицами

- ▶ Линейная задача наименьших квадратов

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Возможно добавление линейных ограничений вида

$$l_i \leq x_i \leq u_i$$

- ▶ Поиск решения минимальной нормы

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Линейные системы с неквадратными матрицами

- ▶ Линейная задача наименьших квадратов

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Возможно добавление линейных ограничений вида

$$l_i \leq x_i \leq u_i$$

- ▶ Поиск решения минимальной нормы

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Q: Каков геометрический смысл у решения?

Линейные системы с неквадратными матрицами

- ▶ Линейная задача наименьших квадратов

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Возможно добавление линейных ограничений вида

$$l_i \leq x_i \leq u_i$$

- ▶ Поиск решения минимальной нормы

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Q: Каков геометрический смысл у решения?

Q: К какой задаче сводится похожая задача?

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \|\mathbf{x}\|_\infty \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

► n АКТИВОВ

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- ▶ n активов
- ▶ Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним $\bar{\mathbf{r}}$ и ковариационной матрицей Σ

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- ▶ n активов
- ▶ Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним $\bar{\mathbf{p}}$ и ковариационной матрицей Σ
- ▶ Минимально допустимый средний доход \bar{r}

Задача о составлении оптимального портфеля

Дано

- ▶ n активов
- ▶ Изменение относительной цены активов — случайный вектор со средним $\bar{\mathbf{p}}$ и ковариационной матрицей Σ
- ▶ Минимально допустимый средний доход \bar{r}

Классическая задача составления оптимального портфеля

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x} \\ & \text{s.t. } \bar{\mathbf{p}}^\top \mathbf{x} \geq \bar{r} \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

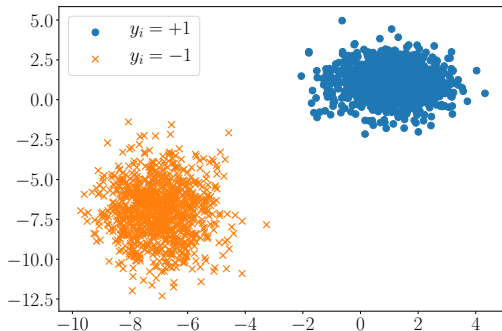
- ▶ Минимум риска при минимально допустимом доходе
- ▶ Существуют многочисленные вариации, которые не выводят задачу из класса QCQP или SOCP

Задача классификации

- ▶ Дана выборка (\mathbf{x}_i, y_i) , где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$

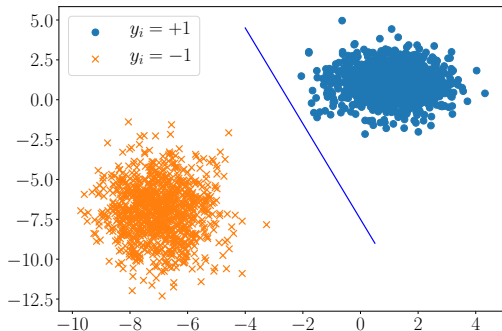
Задача классификации

- ▶ Дана выборка (\mathbf{x}_i, y_i) , где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



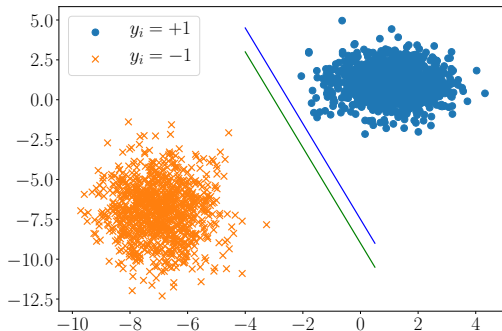
Задача классификации

- ▶ Дана выборка (\mathbf{x}_i, y_i) , где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



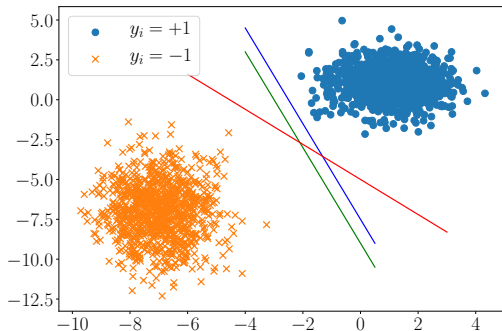
Задача классификации

- ▶ Дана выборка (\mathbf{x}_i, y_i) , где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



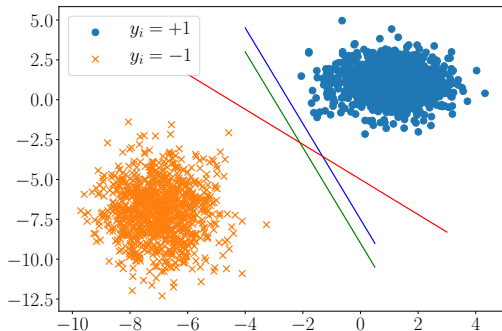
Задача классификации

- ▶ Дана выборка (\mathbf{x}_i, y_i) , где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



Задача классификации

- ▶ Дана выборка (\mathbf{x}_i, y_i) , где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, а $y_i \in \{-1, +1\}$
- ▶ Необходимо построить гиперплоскость так, чтобы $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b > 0$, если $y_i = +1$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b < 0$, если $y_i < 0$



Q: Как однозначно задать разделяющую гиперплоскость?

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- ▶ Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- ▶ Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

- ▶ Расстояние между гиперплоскостями

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{2}{\|\mathbf{a}\|_2}$$

Максимизация зазора: метод опорных векторов (SVM)

- ▶ Для опорных объектов каждого класса выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_k + b = 1, & y_k = +1 \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{x}_j + b = -1, & y_j = -1 \end{cases}$$

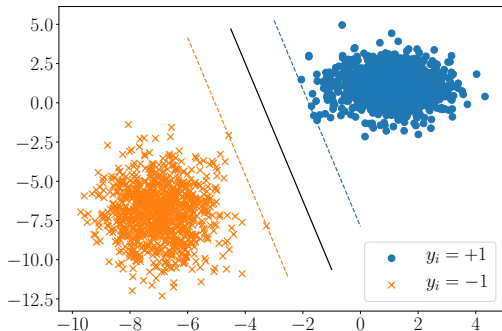
- ▶ Расстояние между гиперплоскостями

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{2}{\|\mathbf{a}\|_2}$$

Финальная задача

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a}, b} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & y_i (\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Оптимальная разделяющая гиперплоскость



Оптимизация на конусе второго порядка (SOCP)

Коническая форма записи

$$\begin{aligned} \min \mathbf{f}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}_i^\top \mathbf{x} + d_i \\ \mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \mathbf{f}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } (\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i^\top \mathbf{x} + d_i) \succeq_{K_i} 0 \\ \mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{g} \end{aligned}$$

QCQP \rightarrow SOCP

- ▶ Пусть $\mathbf{x}^\top \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r \leq 0$ и $0 \prec \mathbf{P} = \mathbf{L} \mathbf{L}^\top$
- ▶ $(\mathbf{L}^\top \mathbf{x})^\top (\mathbf{L}^\top \mathbf{x}) + 2\tilde{\mathbf{q}}^\top \mathbf{L}^{-\top} \mathbf{L}^\top \mathbf{x} + \|\mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}\|_2^2 \leq \|\mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}\|_2^2 - r$
- ▶ Или $\|\mathbf{L}^\top \mathbf{x} + \mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}\|_2 \leq \sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^\top \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} - r}$

Отношения между рассмотренными типами задач

$$\text{LP} \subset \text{QCQP} \subset \text{SOCP}$$

Задача геометрического программирования (geometric programming)

Определения

- ▶ Функцию вида $f(\mathbf{x}) = cx_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, где $c > 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\text{dom} f = \mathbb{R}_{++}^n$ называют обобщённым мономом
- ▶ Функцию вида $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} \dots x_n^{a_{nk}}$, где $c_k > 0$, $a_{ik} \in \mathbb{R}$ и $\text{dom} f = \mathbb{R}_{++}^n$ называют позиномом

Задача геометрического программирования (geometric programming)

Определения

- ▶ Функцию вида $f(\mathbf{x}) = cx_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, где $c > 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\text{dom} f = \mathbb{R}_{++}^n$ называют обобщённым мономом
- ▶ Функцию вида $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} \dots x_n^{a_{nk}}$, где $c_k > 0$, $a_{ik} \in \mathbb{R}$ и $\text{dom} f = \mathbb{R}_{++}^n$ называют позиномом

Общий вид задачи

$$\begin{aligned} \min f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) &\leq 1 \\ h_j(\mathbf{x}) &= 1, \end{aligned}$$

где f_i — позиномы, а h_j — обобщённые мономы

Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$

Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$

Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- ▶ Полином превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$

Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- ▶ Полином превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- ▶ Общий вид переписывается в выпуклой форме

Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- ▶ Полином превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- ▶ Общий вид переписывается в выпуклой форме

Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- ▶ Полином превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- ▶ Общий вид переписывается в выпуклой форме

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{y}} \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{k0}^\top \mathbf{y} + b_{k0}} \\ \text{s.t. } & \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{ki}^\top \mathbf{y} + b_{ki}} \leq 1 \\ & e^{\mathbf{d}_j^\top \mathbf{y} + p_j} = 1 \end{aligned}$$

Выпуклая форма задачи GP

- ▶ Преобразование переменных: $x_i = e^{y_i}$
- ▶ Обобщенный моном превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b}$
- ▶ Полином превращается в $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_k^\top \mathbf{y} + b_k}$
- ▶ Общий вид переписывается в выпуклой форме

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \quad & \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{k0}^\top \mathbf{y} + b_{k0}} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{ki}^\top \mathbf{y} + b_{ki}} \leq 1 \\ & e^{\mathbf{d}_j^\top \mathbf{y} + p_j} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \quad & \log \left(\sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{k0}^\top \mathbf{y} + b_{k0}} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \log \left(\sum_{k=1}^K e^{\mathbf{a}_{ki}^\top \mathbf{y} + b_{ki}} \right) \leq 0 \\ & \mathbf{d}_j^\top \mathbf{y} + p_j = 0 \end{aligned}$$

Пример

- ▶ Пусть есть n передатчиков и n приемников

Пример

- ▶ Пусть есть n трансмиттеров и n ресиверов
- ▶ Мощность сигнала p_i на трансмиттере

Пример

- ▶ Пусть есть n трансмиттеров и n ресиверов
- ▶ Мощность сигнала p_i на трансмиттере
- ▶ Мощность сигнала на i -ом ресивере $G_{ii}p_i$, $G_{ii} > 0$

Пример

- ▶ Пусть есть n транмиттеров и n ресиверов
- ▶ Мощность сигнала p_i на транмиттере
- ▶ Мощность сигнала на i -ом ресивере $G_{ii}p_i$, $G_{ii} > 0$
- ▶ Мощность интерференции на i -ом ресивере $\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j$

Пример

- ▶ Пусть есть n транмиттеров и n ресиверов
- ▶ Мощность сигнала p_i на транмиттере
- ▶ Мощность сигнала на i -ом ресивере $G_{ii}p_i$, $G_{ii} > 0$
- ▶ Мощность интерференции на i -ом ресивере $\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j$
- ▶ Отношение сингал-шум (SINR) $\frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j}$, где σ_i — мощность шума на i -ом ресивере

Пример

- ▶ Пусть есть n передатчиков и n приемников
- ▶ Мощность сигнала p_i на передатчике
- ▶ Мощность сигнала на i -ом приемнике $G_{ii}p_i$, $G_{ii} > 0$
- ▶ Мощность интерференции на i -ом приемнике $\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j$
- ▶ Отношение сигнал-шум (SINR) $\frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j}$, где σ_i — мощность шума на i -ом приемнике

Задача минимизации мощности

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^n p_i \\ & \text{s.t. } p^{\min} \leq p_i \leq p^{\max} \\ & \frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j} \geq S_i \end{aligned}$$

Пример

- ▶ Пусть есть n транмиттеров и n ресиверов
- ▶ Мощность сигнала p_i на транмиттере
- ▶ Мощность сигнала на i -ом ресивере $G_{ii}p_i$, $G_{ii} > 0$
- ▶ Мощность интерференции на i -ом ресивере $\sum_{j \neq i} G_{ij}p_j$
- ▶ Отношение сигнал-шум (SINR) $\frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j}$, где σ_i — мощность шума на i -ом ресивере

Задача минимизации мощности

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^n p_i \\ & \text{s.t. } p^{\min} \leq p_i \leq p^{\max} \\ & \frac{G_{ii}p_i}{\sigma_i + \sum_{j \neq i} G_{ij}p_j} \geq S_i \end{aligned}$$

Больше примеров можно найти в этом tutorialе¹

¹https://web.stanford.edu/~boyd/papers/pdf/gp_tutorial.pdf

Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left(\sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left(\sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

- ▶ Эквивалентная запись $\sum_{k=1}^m e^{z_k - t} \leq 1$

Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left(\sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

- ▶ Эквивалентная запись $\sum_{k=1}^m e^{z_k - t} \leq 1$
- ▶ Введём переменную $e^{z_k - t} \leq u_k$

Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left(\sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

- ▶ Эквивалентная запись $\sum_{k=1}^m e^{z_k - t} \leq 1$
- ▶ Введём переменную $e^{z_k - t} \leq u_k$
- ▶ Тогда $\sum_{k=1}^m u_k \leq 1$ — линейное неравенство

Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left(\sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

- ▶ Эквивалентная запись $\sum_{k=1}^m e^{z_k - t} \leq 1$
- ▶ Введём переменную $e^{z_k - t} \leq u_k$
- ▶ Тогда $\sum_{k=1}^m u_k \leq 1$ — линейное неравенство

Определение

Экспоненциальным конусом называется такой конус

$$K_{\text{exp}} = \{(x, y, z) \mid x \geq ye^{z/y}, y > 0\} \cup \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \leq 0\}$$

Коническая форма задачи GP

- ▶ После равносильных преобразований задач достаточно описать неравенство

$$\log \left(\sum_{k=1}^m e^{z_k} \right) \leq t$$

в конической форме

- ▶ Эквивалентная запись $\sum_{k=1}^m e^{z_k - t} \leq 1$
- ▶ Введём переменную $e^{z_k - t} \leq u_k$
- ▶ Тогда $\sum_{k=1}^m u_k \leq 1$ — линейное неравенство

Определение

Экспоненциальным конусом называется такой конус

$$K_{\text{exp}} = \{(x, y, z) \mid x \geq ye^{z/y}, y > 0\} \cup \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \leq 0\}$$

- ▶ $e^{z_k - t} \leq u_k \Leftrightarrow (u_k, 1, z_k - t) \in K_{\text{exp}}$

Оптимизация на конусе \mathbf{S}_+^n (SDP)

Коническая форма

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

Стандартная форма

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{X}} \text{trace}(\mathbf{CX}) \\ \text{s.t. } & \text{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i \\ & \mathbf{X} \succeq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

Оптимизация на конусе \mathbf{S}_+^n (SDP)

Коническая форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

- Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса

Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \text{trace}(\mathbf{CX}) \\ \text{s.t. } \text{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i \\ \mathbf{X} \succeq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

Оптимизация на конусе \mathbf{S}_+^n (SDP)

Коническая форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

- ▶ Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса
- ▶ Геометрию таких задач рассмотрим ближе к концу курса, когда будем говорить о методах

Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \text{trace}(\mathbf{CX}) \\ \text{s.t. } \text{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i \\ \mathbf{X} \succeq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

Оптимизация на конусе \mathbf{S}_+^n (SDP)

Коническая форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{G} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i \preceq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{G} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{F}_i \in \mathbf{S}^n$.

- ▶ Полная аналогия с LP с точностью до определения скалярного произведения и конуса
- ▶ Геометрию таких задач рассмотрим ближе к концу курса, когда будем говорить о методах
- ▶ Из одной формы можно получить другую

Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \text{trace}(\mathbf{CX}) \\ \text{s.t. } \text{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{X}) = b_i \\ \mathbf{X} \succeq 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{S}^n$ и все $\mathbf{A}_i \in \mathbf{S}^n$

LP и SOCP как задачи SDP

LP

► $\mathbf{G} = 0$

► \mathbf{F}_i такие, что $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i = -\text{diag}(\mathbf{x})$

LP и SOCP как задачи SDP

LP

- ▶ $\mathbf{G} = 0$
- ▶ \mathbf{F}_i такие, что $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i = -\text{diag}(\mathbf{x})$

Дополнение по Шуру

Если $\mathbf{C} \succ 0$, то

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \succeq 0$$

LP и SOCP как задачи SDP

LP

- ▶ $\mathbf{G} = 0$
- ▶ \mathbf{F}_i такие, что $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{F}_i = -\text{diag}(\mathbf{x})$

Дополнение по Шуру

Если $\mathbf{C} \succ 0$, то

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \succeq 0$$

SOCP

- ▶ $\|\mathbf{x}\|_2 \leq t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t & \mathbf{x}^\top \\ \mathbf{x} & t\mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0$
- ▶ Аналогично для SOCP:
$$\|\mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i & (\mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i)^\top \\ \mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_i & (\mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d_i)\mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0$$

Немного про дополнение по Шуру

Блочное исключение

- ▶
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}$$
- ▶ Выразим $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{h} - \mathbf{B}^\top \mathbf{x})$
- ▶ Первое уравнение сводится к
$$\mathbf{Ax} + \mathbf{BC}^{-1}(\mathbf{h} - \mathbf{B}^\top \mathbf{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{BC}^{-1}\mathbf{B}^\top)\mathbf{x} + \mathbf{BC}^{-1}\mathbf{h} = \mathbf{g}$$
- ▶ Получили дополнение по Шуру для матрицы \mathbf{C}

Немного про дополнение по Шуру

Блочное исключение

- ▶
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}$$
- ▶ Выразим $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{h} - \mathbf{B}^\top \mathbf{x})$
- ▶ Первое уравнение сводится к
$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{h} - \mathbf{B}^\top \mathbf{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top)\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{h} = \mathbf{g}$$
- ▶ Получили дополнение по Шуру для матрицы \mathbf{C}

Доказательство факта с предыдущего слайда

- ▶ Пусть $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \succeq 0$ тогда по определению
$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + 2\mathbf{y}^\top \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{y}^\top \mathbf{C}\mathbf{y} \geq 0$$
- ▶ Значит функция $f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$
- ▶ Функция g выпукла при каждом фиксированном \mathbf{x} , тогда $\mathbf{y}^* = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}$ и $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top (\mathbf{A} - \mathbf{B}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{x}$
- ▶ Значит $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \succeq 0$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- ▶ Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- ▶ Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$
- ▶ Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i < j} w_{ij} (1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- ▶ Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$
- ▶ Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i < j} w_{ij} (1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- ▶ В матрично-векторном виде

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{W} \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- ▶ Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \succeq 0$
- ▶ Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i < j} w_{ij} (1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- ▶ В матрично-векторном виде

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{W} \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- ▶ Эквивалентный вид

$$\min \frac{1}{2} \text{trace}(\mathbf{W} \mathbf{X})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X} \succeq 0, \text{ rank}(\mathbf{X}) = 1, \text{ diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$$

Задача MAXCUT и её выпуклая релаксация

- ▶ Граф $G = (V, E)$ и матрица весов рёбер $\mathbf{W} \in \mathbf{S}^n$ и $\mathbf{W} \geq 0$
- ▶ Задача MAXCUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i < j} w_{ij} (1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- ▶ В матрично-векторном виде

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{W} \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } x_i \in \{-1, +1\}$$

- ▶ Эквивалентный вид

$$\min \frac{1}{2} \text{trace}(\mathbf{W} \mathbf{X})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X} \succeq 0, \text{rank}(\mathbf{X}) = 1, \text{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$$

- ▶ SDP релаксация

$$\min \text{trace}(\mathbf{W} \mathbf{X})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X} \succeq 0, \text{rank}(\mathbf{X}) \leq 1, \text{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все \mathbf{x}_i

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все \mathbf{x}_i
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все \mathbf{x}_i
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- ▶ Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все \mathbf{x}_i
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- ▶ Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- ▶ Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все \mathbf{x}_i
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- ▶ Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- ▶ Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- ▶ $\log \det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log \det(\mathbf{A})$ – выпуклая функция при $\mathbf{A} \succ 0$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все \mathbf{x}_i
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

- ▶ Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- ▶ Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- ▶ $\log \det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log \det(\mathbf{A})$ – выпуклая функция при $\mathbf{A} \succ 0$

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{b}} \log \det \mathbf{A}^{-1}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{A} \succ 0$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}\|_2 \leq 1$$

Экстремальный эллипсоид для данного множества точек

- ▶ Дано k точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Необходимо найти эллипсоид минимальной площади, который покрывает все \mathbf{x}_i
- ▶ Эллипсоид можно задать аффинным преобразованием

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\} \rightarrow \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq 1, \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\}$$

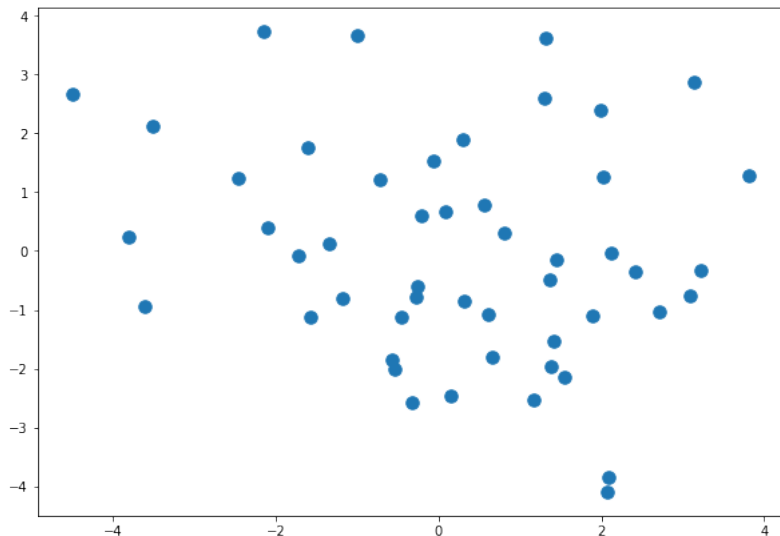
- ▶ Тогда площадь увеличивается в $\det(\mathbf{A}^{-1})$ раз.
- ▶ Детерминант не является выпуклой/вогнутой функцией
- ▶ $\log \det(\mathbf{A}^{-1}) = -\log \det(\mathbf{A})$ – выпуклая функция при $\mathbf{A} \succ 0$

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{A}, \mathbf{b}} \log \det \mathbf{A}^{-1} \\ & \text{s.t. } \mathbf{A} \succ 0 \\ & \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}\|_2 \leq 1 \end{aligned}$$

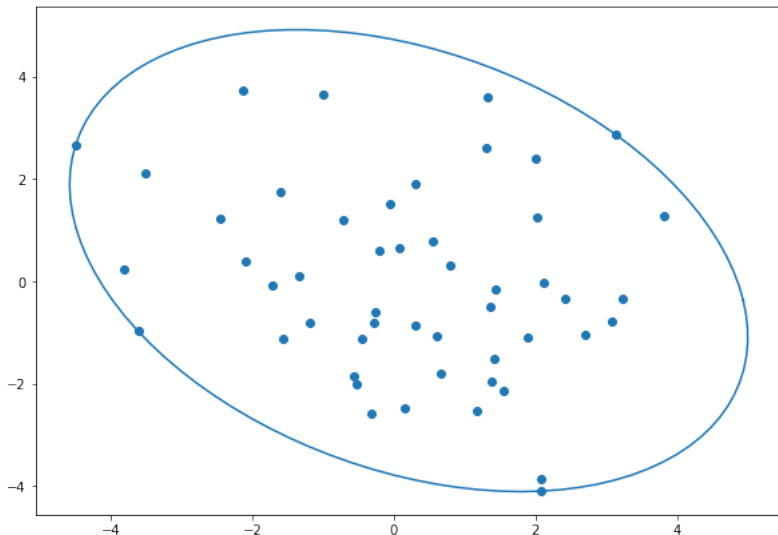
Эллипсоид Лёвнера-Джона (Löwner-John)

Постановка аналогична только не для точек, а для некоторого выпуклого множества

Пример построения экстремального эллипса



Пример построения экстремального эллипсоида



Равносильные преобразования задач

Равносильные преобразования задач

Запись через надграфик

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) & \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}, t} t & \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m & \\ f_0(\mathbf{x}) \leq t & \end{array}$$

Равносильные преобразования задач

Запись через надграфик

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) & \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}, t} t & \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m & \\ f_0(\mathbf{x}) \leq t & \end{array}$$

Преобразования ограничений

- ▶ $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq 0$
- ▶ $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0$
- ▶ Выпуклые ограничения неравенства \rightarrow конические ограничения

$$f(\mathbf{x}) \leq t \Leftrightarrow (\mathbf{x}, 1, t) \in \mathcal{K}_f$$

$$\mathcal{K}_f = \{(\mathbf{x}, y, z) \mid yf(\mathbf{x}/y) \leq z\} \cup (0, 0, 0)$$

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование
- ▶ Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование
- ▶ Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- ▶ Решение линейных систем с неквадратными матрицами

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование
- ▶ Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- ▶ Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- ▶ Задача классификации и SVM

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование
- ▶ Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- ▶ Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- ▶ Задача классификации и SVM
- ▶ Выпуклая релаксация задачи MAXCUT

- ▶ Стандартная форма задачи выпуклой оптимизации
- ▶ Линейное программирование
- ▶ Коническая оптимизация: LP, SOCP и SDP
- ▶ Решение линейных систем с неквадратными матрицами
- ▶ Задача классификации и SVM
- ▶ Выпуклая релаксация задачи MAXCUT
- ▶ Задача построения оптимального эллипсоида