

Моделирование транспортных потоков на основе теории равновесия

Нурминский Е.А., Шамрай Н.Б.

Содержание

1	Задача транспортного равновесия	1
1.1	Моделирование транспортных потоков как задача принятия решений	2
1.2	Постановка задачи	3
1.3	Сведение к вариационному неравенству	4
1.3.1	Транспортная задача с фиксированным спросом	4
1.3.2	Транспортное равновесие с эластичным спросом	6
1.3.3	Симметричные задачи транспортного равновесия	9
1.4	Построение функций транспортных затрат	10
1.5	Численные методы решения задач транспортного равновесия	12
1.6	Соотношение между системным оптимумом и конкурентным равновесием . .	14
2	Построение матрицы корреспонденций	18
2.1	Гравитационная модель	18
2.2	Энтропийная модель	20
2.3	Связь между гравитационной и энтропийной моделями	23
3	Парадоксы транспортного равновесия	24
3.1	Парадокс Брайеса	24
3.2	Транспортно-экологические парадоксы	26
3.2.1	Экологический парадокс Брайеса	26
3.2.2	Экологический треугольник	27
3.2.3	Рокадная экология	28
3.2.4	Перераспределение спроса	29
4	Практическая работа	30
	Список литературы	32

1 Задача транспортного равновесия

Моделирование и исследование транспортных потоков часто проводится с помощью теории конкурентного бескоалиционного равновесия, описывающего достаточно адекватный механизм функционирования автомобильных улично-дорожных сетей (УДС). Рассматриваемые модели позволяют получить прогнозные оценки по загрузке элементов транспортной сети. Подобные задачи интересны в частности тем, что являются одним из инструментов для объективной оценки эффективности проектов по модификации УДС с точки зрения разгрузки

наиболее проблемных участков дорог и уменьшения общих затрат на передвижение пользователей сети.

1.1 Моделирование транспортных потоков как задача принятия решений

Для определения объемов загрузки УДС в первую очередь необходимо выявить правила, по которым водители выбирают тот или иной маршрут следования. Поведенческие принципы пользователей транспортной сети окончательно были сформулированы в работе [48], где постулировались следующие две возможные ситуации.

1. Пользователи сети независимо друг от друга выбирают маршруты следования, соответствующие их минимальным транспортным расходам.
2. Пользователи сети выбирают маршруты следования, исходя из минимизации общих транспортных расходов в сети.

С тех пор в транспортной науке приведенные поведенческие принципы получили названия, соответственно, первого и второго принципов Вардропы.

Распределение транспортных потоков согласно первому принципу Вардропы соответствует конкурентному бескоалиционному равновесию, предполагающему совершенный эгоизм участников дорожного движения — каждый стремится достигнуть конечного пункта своей поездки как можно быстрее и из имеющихся возможных вариантов следования выбирает тот маршрут, по которому будет нести минимальные затраты (временные, финансовые, моральные и т.п.) на проезд. Поэтому данный принцип также называют оптимизацией пользователей (user optimization).

Стоит отдельно отметить, что первый поведенческий принцип предполагает определенные допущения. Во-первых, это совершенная информированность участников движения о ситуации на дорогах — каждый знает затраты на передвижения по тем или иным маршрутам. Конечно на данный момент такое предположение выглядит изрядной идеализацией, но развитие автоматизированных автонавигаторов и интеллектуальных транспортных систем приближает нас к такой ситуации. Во-вторых, предполагается ничтожно малое влияние отдельного участника движения на затраты по всем маршрутам. Хотя такое предположение и заведомо неверно для крупногабаритных транспортных средств, для легковых автомобилей оно представляется достаточно разумным, исключая случаи аварийных ситуаций или неопытных водителей за рулем.

Второй принцип Вардропы предполагает централизованное управление движением в сети. Соответствующее ему распределение транспортных потоков называют системным оптимумом (system optimization). Примером пользователей, передвигающихся согласно второго принципа, служат водители маршрутизированного транспорта.

Несмотря на то, что принципы потокового равновесия широко цитируются как принципы Вардропы, на самом деле чуть ранее их сформулировали Найт [36] и Пигу [45] утверждая, что все участники движения, направляющиеся из некоторого узла сети в другой, распределяются по различным маршрутам таким образом, чтобы удельная (в расчете на один автомобиль) стоимость поездки была одна и та же для всех.

В ситуации массовой автомобилизации, имеющей место практически во всех странах, подавляющее большинство участников дорожного движения любого города составляют легковые автомобили и миниавтобусы, совершающие преимущественно маятниковые поездки место проживания — место работы и обратно. Именно такие поездки создают пиковые нагрузки на УДС, вызывают основные потери времени и других ресурсов, повышают аварийность

и усложняют социально-экономическую ситуацию. Поэтому при исследовании загрузки сети рассмотрим транспортные потоки, порождаемые именно легковым частным транспортом. Как правило, водители такого транспорта преследуют исключительно личные цели и стремятся выбрать путь следования с наименьшими затратами. Такое поведение явно соответствует первому принципу Вардропы.

Все результаты настоящей работы получены в конечномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n со скалярным произведением xy и нормой $\|x\| = \sqrt{xx}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Элементами пространства являются вектор-столбцы, однако знак транспонирования и дополнительные скобки при скалярном умножении будем опускать, чтобы не загромождать запись формул.

1.2 Постановка задачи

Исходя из приведенных соображений, построим экономико-математическую модель транспортных потоков в УДС, соответствующую первому поведенческому принципу Вардропы.

Транспортную сеть опишем в виде ориентированного графа $\Gamma(V, E)$, где V — множество вершин, E — множество дуг сети. Каждая дуга соответствует реальному участку автодороги без перекрестков. Каждая вершина представляет узел, разделяющий участки дорог. Направление дуги определяет ход следования автотранспорта. Магистраль с двусторонним движением соответственно имеют парные противоположно ориентированные дуги.

При исследовании потокообразующих факторов в множестве вершин V выделим два подмножества: первое $S \subseteq V$ содержит пункты, порождающие потоки, элементы множества S назовем источниками; второе $D \subseteq V$ содержит пункты, поглощающие потоки, элементы множества D назовем стоками. Применительно к задаче моделирования потоков, порождаемых ежедневной трудовой миграцией для утренних часов пик, источниками являются спальные районы и пригороды, стоками — деловые районы города. Множество всех потокообразующих пар представим в виде декартова произведения

$$W = \{w = (i, j) : i \in S, j \in D\}.$$

Каждой паре "источник-сток" $w = (i, j) \in W$ соответствует свой спрос на перевозку ρ_w — общий объем пользователей, которые из пункта i должны прибыть в пункт j . Набор $\{\rho_w : w \in W\}$ называется матрицей корреспонденций. Объемы корреспонденций ρ_w могут иметь фиксированные значения или являться функциями от затрат на передвижения в сети, то есть $\rho_w = \rho(u_w)$, где u_w — минимальные транспортные затраты на проезд для пары w , зависящие в свою очередь, от загрузки сети. В первом случае, говорят о задаче транспортного равновесия с фиксированным спросом, во втором — о задаче с эластичным спросом.

Путем (маршрутом) в сети Γ , соединяющим вершины i и j , назовем последовательность дуг $e_1 = (i \rightarrow k_1), e_2 = (k_1 \rightarrow k_2), \dots, e_l = (k_{l-1} \rightarrow k_l), e_{l+1} = (k_l \rightarrow j)$, где $e_t \in E$ при всех $t = 1, \dots, l+1$. Предполагается отсутствие петель и циклов в маршрутах. Обозначим через P_w множество альтернативных маршрутов, следуя которым для каждой пары $w = (i, j) \in W$ исходящий из источника i поток достигает стока j . Совокупность всех путей в сети Γ обозначим через $P = \bigcup_{w \in W} P_w$.

Пусть x_p — это величина потока идущего по пути $p \in P$. Традиционно для транспортных задач потоковые переменные должны быть неотрицательными и удовлетворять балансовым ограничениям. Поэтому для каждой пары w потоки x_p , $p \in P_w$, должны принадлежать множеству

$$X_w = \{x_p \geq 0 : p \in P_w, \sum_{p \in P_w} x_p = \rho_w\}.$$

Объединим величины x_p в вектор $x = (x_p : p \in P)$. Тогда допустимой областью для вектора x является множество, образованное как декартово произведение всех X_w :

$$X = \prod_{w \in W} X_w = \{x \geq 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = \rho_w, w \in W\}. \quad (1)$$

Преодоление каждого из путей $p \in P$ сопровождается некоторыми затратами (время, топливо, деньги, амортизация автомобиля, износ дороги и т.п.). Количественная характеристика таких затрат зависит от интенсивности и плотности движения в сети. Как правило в моделях рассматриваются временные или финансовые затраты. Обозначим через G_p — удельные затраты пользователей на проезд по пути p . Поскольку на затраты по одному маршруту может влиять загрузка других путей УДС, то в общем случае G_p представляют собой функции от загрузки всей сети, то есть $G_p = G_p(x)$.

Во введенных обозначениях первый принцип Вардропы можно формализовать следующим образом. Водители выбирают путь с наименьшими транспортными расходами, поэтому для каждой пары w если по пути $p \in P_w$ идет ненулевой поток, то затраты по этому пути минимальны, то есть

$$\text{если } x_p^\dagger > 0, \text{ то } G_p(x^\dagger) = \min_{q \in P_w} G_q(x^\dagger) = u_w(x^\dagger), \quad (2)$$

где $u_w(x^\dagger)$ — минимальные транспортные затраты по маршрутам, соединяющим пару $w \in W$, при загрузке сети, определяемой вектором x^\dagger . Потоки $x^\dagger \in X$, удовлетворяющие условию (2), называются равновесными. Проблема поиска равновесных потоков $x^\dagger \in X$ называется задачей транспортного (потокowego) равновесия.

1.3 Сведение к вариационному неравенству

Основной подход к решению задачи транспортного равновесия состоит в сведении условия (2) к вариационному неравенству или задаче дополнителности [17, 30, 38, 40], а в частном случае, к оптимизационной задаче [26, 3, 16, 20], и дальнейшем применении существующих численных методов.

Для компактности последующего изложения объединим компоненты $G_p(x)$ в вектор-функцию $G(x) = (G_p(x) : p \in P)$. Отдельно рассмотрим случаи эластичного и неэластичного спроса.

1.3.1 Транспортная задача с фиксированным спросом

Пусть для каждой пары $w \in W$ объемы корреспонденций ρ_w заданы и имеют фиксированные значения. Справедлив следующий результат.

Теорема 1. Вектор $x^\dagger \in X$ удовлетворяет условию равновесия (2) тогда и только тогда, когда является решением вариационного неравенства

$$G(x^\dagger)(x - x^\dagger) \geq 0, \quad \forall x \in X. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть вектор $x^\dagger = (x_p^\dagger : p \in P) \in X$ является решением вариационного неравенства (3). Покажем, что в x^\dagger выполнены условие (2). Предположим противное, а именно, что для пары w существует путь $\bar{p} \in P_w$ такой, что $x_{\bar{p}}^\dagger > 0$ и $G_{\bar{p}}(x^\dagger) > G_{\bar{q}}(x^\dagger)$ для некоторого $\bar{q} \in P_w$, $\bar{q} \neq \bar{p}$. Рассмотрим вектор $x^\varepsilon = (x_p^\varepsilon : p \in P)$ такой, что

$$x_p^\varepsilon = \begin{cases} x_p^\dagger, & p \neq \bar{p}, p \neq \bar{q}, \\ x_{\bar{p}}^\dagger - \varepsilon, & p = \bar{p}, \\ x_{\bar{q}}^\dagger + \varepsilon, & p = \bar{q}, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало и не нарушает условия неотрицательности $x^\varepsilon \geq 0$. Нетрудно видеть, что $x^\varepsilon \in X$, при этом

$$G(x^\dagger)(x^\varepsilon - x^\dagger) = G_{\bar{p}}(x^\dagger)(x_{\bar{p}}^\varepsilon - x_{\bar{p}}^\dagger) + G_{\bar{q}}(x^\dagger)(x_{\bar{q}}^\varepsilon - x_{\bar{q}}^\dagger) = \varepsilon(G_{\bar{q}}(x^\dagger) - G_{\bar{p}}(x^\dagger)) < 0,$$

что противоречит тому, что x^\dagger — решение вариационного неравенства (3). Следовательно в точке x^\dagger условие (2) всегда выполнено.

Пусть вектор $x^\dagger \in X$ удовлетворяет условию (2). При этом для всех $p \in P_w$ и $w \in W$ выполнено

$$G_p(x^\dagger) - u_w(x^\dagger) \geq 0, \quad (G_p(x^\dagger) - u_w(x^\dagger))x_p^\dagger = 0, \quad (G_p(x^\dagger) - u_w(x^\dagger))x_p \geq 0, \quad \forall x \in X,$$

следовательно имеет место оценка

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} (G_p(x^\dagger) - u_w(x^\dagger))(x_p - x_p^\dagger) = \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} G_p(x^\dagger)(x_p - x_p^\dagger) - \\ &\sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} u_w(x^\dagger)(x_p - x_p^\dagger) = G(x^\dagger)(x - x^\dagger) - \sum_{w \in W} u_w(x^\dagger) \left(\sum_{p \in P_w} x_p - \sum_{p \in P_w} x_p^\dagger \right) = G(x^\dagger)(x - x^\dagger), \end{aligned}$$

то есть x^\dagger — решение вариационного неравенства (3). \square

К настоящему времени теория и методы решения вариационных неравенств уже достаточно хорошо разработаны (см., напр., монографии [37, 38, 32, 40]. Одним из наиболее известных является проективный метод и его модификации, по мнению авторов особенно подходящие для решения транспортных задач. В связи с этим далее понадобятся следующие результаты.

Определение 1. *Проекцией точки $y \in \mathbb{R}^n$ на множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется точка $\pi_X(y) = \operatorname{argmin}\{\|y - x\| : x \in X\}$.*

Критерием проверки, является ли вектор p проекцией точки $y \in \mathbb{R}^n$ на множество X служит выполнение условия

$$(p - y)(x - p) \geq 0, \quad \forall x \in X. \quad (4)$$

Решение вариационного неравенства (3) тесно связано с поиском неподвижных точек проективного отображения $H(x) = \pi_X(x - \lambda G(x))$, где $\lambda > 0$ — некоторое фиксированное число.

Утверждение 1. *Множество решений $X^\dagger \subseteq X$ вариационного неравенства (3) совпадает с множеством неподвижных точек отображения $H(x)$, то есть $X^\dagger = \{x^\dagger \in X : x^\dagger = H(x^\dagger)\}$.*

Доказательство. Пусть $x^\dagger \in X^\dagger$ и $\lambda > 0$, тогда выполнено неравенство

$$(x^\dagger - (x^\dagger - \lambda G(x^\dagger)))(x - x^\dagger) \geq 0, \quad \forall x \in X,$$

следовательно, в силу свойства (4) имеем $x^\dagger = \pi_X(x^\dagger - \lambda G(x^\dagger)) = H(x^\dagger)$.

Пусть $x^\dagger = H(x^\dagger)$, тогда в силу свойства (4) для любого $x \in X$ выполнено условие

$$0 \leq (x - x^\dagger)(x^\dagger - (x^\dagger - \lambda G(x^\dagger))) = G(x^\dagger)(x - x^\dagger),$$

то есть $x^\dagger \in X^\dagger$. \square

Теорема 2. Пусть вектор-функция G непрерывна по каждой компоненте, множество X непусто, выпукло и замкнуто. Если X ограничено, то вариационное неравенство (3) разрешимо.

Доказательство. Для выпуклого множества X отображение $H(x) : X \rightarrow X$ является непрерывным и однозначным. Множество X по условию теоремы компактно, следовательно по теореме Брауэра (см., напр., [18, 1, 8]) у $H(x)$ существует неподвижная точка $x^\dagger = H(x^\dagger)$, которая в силу утверждения 1 одновременно является решением вариационного неравенства (3). \square

Нетрудно видеть, что при фиксированных неотрицательных корреспонденциях ρ_w допустимая область X , определенная в (1), является непустым полиэдральным ограниченным множеством. Следовательно, если затраты на передвижение $G_p(x)$ являются непрерывными функциями от потоков $x \in X$, то задача транспортного равновесия с фиксированным спросом всегда разрешима. Единственность решения гарантирует свойство строгой монотонности вектор-функции $G(x)$.

Определение 2. Вектор-функция $G : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется строго монотонной на X , если для любых $x, y \in X$ таких, что $x \neq y$ выполнено $(G(x) - G(y))(x - y) > 0$.

Теорема 3. Если вектор-функция $G(x)$ строго монотонна, то вариационное неравенство (3) может иметь не более одного решения.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что существуют два различных решения $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, задачи (3). Очевидно, при этом выполнены неравенства

$$G(x^1)(x^2 - x^1) \geq 0, \quad G(x^2)(x^1 - x^2) \geq 0,$$

складывая которые получаем

$$(G(x^1) - G(x^2))(x^2 - x^1) \geq 0,$$

что противоречит свойству строгой монотонности $G(x)$. \square

С точки зрения задачи транспортного равновесия утверждение теоремы 3 означает, что если транспортные затраты возрастают с увеличением загрузки сети, а это весьма естественное предположение, то существует единственное равновесное распределение транспортных потоков.

1.3.2 Транспортное равновесие с эластичным спросом

Рассмотрим случай, когда спрос на перевозки зависит от транспортных затрат, то есть $\rho_w = \rho_w(u_w)$. Предположим, что для каждого маршрута $p \in P$ транспортные затраты $G_p(x)$ строго положительны, а для всех пар $w \in W$ функция спроса $\rho_w(u_w)$ принимает только неотрицательные значения.

Объединим величины u_w в вектор $u = (u_w : w \in W)$, функции $\rho_w(u_w)$ в вектор $\rho(u) = (\rho_w(u_w) : w \in W)$. Построим вектора

$$z = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad F(z) = \begin{pmatrix} G(x) - \Xi u \\ \Xi^T x - \rho(u) \end{pmatrix},$$

где $\Xi = (\xi_{pw} : p \in P, w \in W)$ — матрица инцидентности путей и пар "источник-сток",

$$\xi_{pw} = \begin{cases} 1, & \text{если путь } p \text{ соединяет пару } w, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Допустимым множеством для вектора z будет неотрицательный ортант $Z = \{z : z \geq 0\}$.

Утверждение 2. Вектор $z^\dagger = (x^\dagger, u^\dagger) \geq 0$ является решением вариационного неравенства

$$F(z^\dagger)(z - z^\dagger) \geq 0, \quad \forall z \in Z, \quad (5)$$

тогда и только тогда, когда x^\dagger — решение вариационного неравенства (3) с допустимой областью $X = X(u^\dagger) = \{x \geq 0 : \Xi^T x = \rho(u^\dagger)\}$.

Доказательство. Пусть $x^\dagger \in X$ — решение вариационного неравенства (3) и $u^\dagger = (u_w(x^\dagger) : w \in W)$, где $u_w(x^\dagger) = \min_{q \in P_w} G_q(x^\dagger) > 0$. Тогда для любых $x \geq 0$ и $u \geq 0$ выполнены условия

$$\begin{aligned} (G(x^\dagger) - \Xi u^\dagger)x^\dagger &= 0, & (G(x^\dagger) - \Xi u^\dagger)x &\geq 0, \\ (\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger))u^\dagger &= 0, & (\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger))u &= 0 \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$0 \leq (G(x^\dagger) - \Xi u^\dagger)(x - x^\dagger) + (\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger))(u - u^\dagger) = F(z^\dagger)(z - z^\dagger).$$

Покажем обратное. Пусть $z^\dagger = (x^\dagger, u^\dagger) \geq 0$ — решение вариационного неравенства (5), то есть для любых $z \geq 0$ выполнено

$$F(z^\dagger)z^\dagger \leq F(z^\dagger)z.$$

Рассмотрим точки $z^\sigma = \sigma z^\dagger \geq 0$ для всех $\sigma \geq 0$. Имеем

$$F(z^\dagger)z^\dagger \begin{cases} \leq 0, & \text{при } \sigma = 0, \\ \geq \frac{F(z^\dagger)z^\dagger}{\sigma} \rightarrow 0, & \text{при } \sigma \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Следовательно $F(z^\dagger)z^\dagger = 0$ и $F(z^\dagger)z \geq 0$.

Если предположить существование индекса l такого, что соответствующий ему элемент вектора $F(z^\dagger)$ отрицательный, $F_l(z^\dagger) < 0$, то выбирая $z_l \rightarrow +\infty$ получаем нарушение неравенства $F(z^\dagger)z \geq 0$. Отсюда $F(z^\dagger) \geq 0$. Таким образом точка $z^\dagger = (x^\dagger, u^\dagger) \geq 0$ удовлетворяет системе

$$F(z^\dagger) \geq 0, \quad z^\dagger \geq 0, \quad F(z^\dagger)z^\dagger = 0, \quad (6)$$

известной в литературе, как нелинейная задача дополнителности (см., напр., [17, 32]).

Перепишем условия (6) в виде

$$G(x^\dagger) - \Xi u^\dagger \geq 0, \quad x^\dagger \geq 0, \quad (G(x^\dagger) - \Xi u^\dagger)x^\dagger = 0, \quad (7)$$

$$\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger) \geq 0, \quad u^\dagger \geq 0, \quad (\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger))u^\dagger = 0. \quad (8)$$

Система (7) показывает, что вектор u^\dagger соответствует минимальным транспортным затратам в сети, при загрузке, определяемой потоками x^\dagger . При условии положительности транспортных затрат из (8) следует, что $\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger) = 0$, тогда неравенство (5) можно переписать в виде

$$G(x^\dagger)(x - x^\dagger) \geq u^\dagger(\Xi^T x - \rho(u^\dagger)) = 0, \quad \forall x \in X(u^\dagger).$$

□

Из утверждения 2 следует, что решение задачи транспортного равновесия с эластичным спросом сводится к решению вариационного неравенства (5), которое в свою очередь эквивалентно нелинейной задаче дополнителности (6). Допустимая область Z вариационного неравенства (5) неограничена, поэтому для существования решения z^\dagger помимо непрерывности необходимы дополнительные предположения о свойствах вектор-функции $F(z)$.

В случаях неограниченного допустимого множества вводят дополнительные предположения о свойствах задачи, например, ограниченность потенциального множества решений, коэрцитивность, монотонность и прочие. Общая идея выявления таких свойств состоит в следующем. Выберем радиус $R > 0$ такой, что пересечение замкнутого шара $B = \{z : \|z\| \leq R\}$ с выпуклым замкнутым множеством Z непусто, положим $Z_R = Z \cap B \neq \emptyset$. По теореме 2 существует точка $z_R^\dagger \in Z_R$ такая, что

$$F(z_R^\dagger)(z - z_R^\dagger) \geq 0, \quad \forall z \in Z_R. \quad (9)$$

Теорема 4. Пусть вектор-функция F непрерывна по каждой компоненте, множество Z непусто, выпукло и замкнуто. Если существует радиус $R > 0$ такой, что $Z_R \neq \emptyset$ и решение $z_R^\dagger \in Z_R$ вариационного неравенства (9) удовлетворяет условию $\|z_R^\dagger\| < R$, то вариационное неравенство (3) разрешимо.

Доказательство. Для произвольного $z \in Z$ выберем $\lambda \in (0, 1]$ такое, что точка $\bar{z} = z_R^\dagger + \lambda(z - z_R^\dagger) \in Z_R$. Имеем

$$0 \leq F(z_R^\dagger)(\bar{z} - z_R^\dagger) = F(z_R^\dagger)(z_R^\dagger + \lambda(z - z_R^\dagger) - z_R^\dagger) = \lambda F(z_R^\dagger)(z - z_R^\dagger),$$

то есть z_R^\dagger одновременно является решением вариационного неравенства (3). □

Из теоремы 4 выводится ряд следствий (см., напр., [17]).

Следствие 1. Пусть вектор-функция F непрерывна по каждой компоненте, множество Z непусто, выпукло и замкнуто. Если вектор-функция $F(z)$ коэрцитивна относительно Z , то есть

$$\lim_{\|z\| \rightarrow \infty, z \in Z} \frac{F(z)(z - \bar{z})}{\|z\|} \rightarrow \infty, \quad \text{для некоторого } \bar{z} \in Z, \quad (10)$$

то вариационное неравенство (5) разрешимо.

Доказательство. Условие коэрцитивности (10) позволяет для каждого фиксированного $C > 0$ подобрать достаточно большое $R_C > 0$ такое, что

$$F(z)(z - \bar{z}) \geq C\|z\|, \quad \forall z \in Z, \quad \|z\| = R_C,$$

для какого-то $\bar{z} \in Z_{R_C}$ не зависящего от C и R_C .

В силу теоремы 2 разрешимо вариационное неравенство

$$F(z_{R_C}^\dagger)(z - z_{R_C}^\dagger) \geq 0, \quad \forall z \in Z_{R_C}.$$

Если $\|z_C^\dagger\| < R_C$, то по теореме 4 точка $z_{R_C}^\dagger$ является решением исходного вариационного неравенства (5).

Если $\|z_{R_C}^\dagger\| = R_C$, то получаем

$$F(z_{R_C}^\dagger)(\bar{z} - z_{R_C}^\dagger) \leq -C\|z_{R_C}^\dagger\| = -CR < 0,$$

что противоречит определению $z_{R_C}^\dagger$. □

В случае разрешимости вариационного неравенства (5), строгая монотонность вектор-функции $F(z)$ гарантирует существование не более одного решения (теорема 3).

1.3.3 Симметричные задачи транспортного равновесия

Из теории оптимизации известно, что условие

$$\nabla f(x^\dagger)(x - x^\dagger) \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad (11)$$

представляет необходимый критерий оптимальности в задаче

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (12)$$

с дифференцируемой целевой функцией $f(x)$ и выпуклым замкнутым допустимым множеством X .

В самом деле, пусть $x^\dagger = \operatorname{argmin}\{f(x) : x \in X\}$. Рассмотрим точку $x_\lambda = x^\dagger + \lambda(x - x^\dagger) \in X$, где $\lambda \in (0, 1)$ достаточно мало. Имеет место следующая оценка:

$$0 \leq \frac{f(x_\lambda) - f(x^\dagger)}{\lambda} = \frac{f(x^\dagger) + \lambda \nabla f(x^\dagger)(x - x^\dagger) + o(\lambda) - f(x^\dagger)}{\lambda}$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ получаем (11).

Таким образом, если предположить существование дифференцируемой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\nabla f(x) = G(x)$ (вектор-функция G в таком случае называется потенциальной), то вариационное неравенство (3) эквивалентно оптимизационной задаче (12).

В общем случае считается, что решить оптимизационную задачу намного проще, чем вариационное неравенство [42]. Теория методов оптимизации богата разнообразными алгоритмами. Кроме того, существует множество программных пакетов для решения этого класса задач, чего нельзя сказать о вариационных неравенствах. Однако основная трудность состоит в построении функции $f(x)$. Для потенциальных отображений такую функцию можно построить проведя следующие рассуждения.

Рассмотрим кривую L , зафиксируем на ней точку x^0 и вычислим интеграл $G(x)$ вдоль этой кривой до некоторой точки $x \in L$.

Пусть кривая L задана параметрически $L = \{x(t) : t \in [0, 1]\}$, где $x(t)$ — гладкая вектор-функция, при этом $x(0) = x^0$, $x(1) = x$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \oint_{x^0}^x G(x(t))d(x(t)) = \int_0^1 G(x(t))x'_t(t)dt = \int_0^1 \nabla f(x(t))x'_t(t)dt = \\ &= \int_0^1 df(x(t)) = f(x(t)) \Big|_0^1 = f(x(1)) - f(x(0)) = f(x) - f(x^0). \end{aligned}$$

Видим, что значение интеграла \mathcal{I} не зависит от параметрического задания кривой L . Рассмотрим простейший пример такого задания $x(t) = x^0 + t(x - x^0)$, тогда при $G(x) = \nabla f(x)$ вариационное неравенство (3) эквивалентно следующей оптимизационной задаче:

$$f(x) = f(x^0) + \int_0^1 G(x^0 + t(x - x^0))(x - x^0)dt \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (13)$$

Отметим, что признаком потенциальности вектор-функции $G : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ является симметричность матрицы Якоби $\nabla G(x) = (\frac{\partial G_p(x)}{\partial x_q} : p, q \in P)$ для всех $x \in X$. Поэтому задачи транспортного равновесия (2), которые можно свести к оптимизационной задаче (13) называют симметричными.

На практике для получения численных значений равновесного распределения потоков в сети, предварительно необходимо решить ряд проблем, связанных с получением исходных данных задачи, чему и посвящены следующие разделы. К таким проблемам относятся: построение функций транспортных затрат $G_p(x)$, формирование множеств всех возможных маршрутов P_w , определение объемов корреспонденций ρ_w .

1.4 Построение функций транспортных затрат

Сложность численного решения задачи транспортного равновесия во многом зависит от аналитического задания функций $G_p(x)$. Интуитивно вполне очевидно, что на транспортные затраты при проезде из источника в сток в первую очередь влияют издержки на дугах, составляющих маршрут следования. В литературе, посвященной изучению проблем моделирования транспортных потоков, рассматриваются разные формы такой зависимости.

Обозначим через y_e величину потока по дуге $e \in E$. Зная распределение потоков по путям можно рассчитать загрузку каждой дуги по следующей формуле:

$$y_e = \sum_{p \in P} \theta_{ep} x_p, \text{ где } \theta_{ep} = \begin{cases} 1, & \text{если путь } p \text{ проходит через дугу } e; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (14)$$

Определим $\Theta = (\theta_{ep} : e \in E, p \in P)$ — матрицу инцидентности дуг и путей, $y = (y_e : e \in E)$ — вектор, описывающий загрузку дуг сети Γ . В матричной форме взаимосвязь потоков по путям и дугам описывается уравнением $y = \Theta x$.

В ряде случаев рассматриваются транспортные задачи в терминах только потоковых переменных по дугам. Отметим, что в множестве X , определенном в (1), от потоковых переменных по путям x можно легко перейти к вектору y , обратный переход неоднозначен.

Удельные затраты на прохождение дуги e обозначим через τ_e . В общем случае значение τ_e зависит не только от величины потока y_e , но и от потоков по другим дугам сети. Характерным примером тому служат, нерегулируемые перекрестки, где порядок движения определяет приоритетность дорог, регулируемые перекрестки с дополнительной стрелкой сигнала светофора — движение в так называемом режиме "просачивания" и т.п. Поэтому правильно предположить, что $\tau_e = \tau_e(y)$. Сформируем вектор-функцию $\tau(y) = (\tau_e(y) : e \in E)$.

Самым распространенным и простым предположением о свойствах функций транспортных затрат является аддитивная зависимость $G(x)$ от $\tau(y)$, означающая, что транспортные затраты на прохождение каждого пути $p \in P$ складываются только из затрат на проезд по дугам, составляющим этот путь [30, 40, 29]:

$$G_p(x) = \sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y). \quad (15)$$

В результате, вектор-функция $G(x)$ вариационного неравенства (3) имеет вид

$$G(x) = \Theta^T \tau(y), \quad y = \Theta x, \quad (16)$$

Рассмотрим частный случай, когда затраты на проезд по дуге $\tau_e(y)$ зависят только от объема идущего по ней потока y_e , то есть $\tau_e(y) \equiv \tau_e(y_e)$. В этом случае для любых $p, q \in P$,

$p \neq q$, имеем

$$\frac{\partial G_p}{\partial x_q} = \sum_{e \in E} \theta_{ep} \frac{\partial \tau_e}{\partial y_e} \frac{\partial y_e}{\partial x_q} = \sum_{e \in E} \theta_{ep} \theta_{eq} \frac{\partial \tau_e}{\partial y_e} = \frac{\partial G_q}{\partial x_p}.$$

Следовательно матрица Якоби $\nabla G(x)$ симметрична для любых $x \in X$, то есть вектор-функция $G(x)$ потенциальна и равновесные транспортные потоки можно определить как решение оптимизационной задачи (13). Учитывая соотношения (16) вид целевой функции $f(x)$ определяется как:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \sum_{p \in P} G_p(x^0 + t(x - x^0))(x_p - x_p^0) dt = \int_0^1 \sum_{p \in P} \left(\sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) \right) (x_p - x_p^0) dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{p \in P} \sum_{e \in E} \theta_{ep} (x_p - x_p^0) \tau_e(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) dt = \int_0^1 \sum_{e \in E} \tau_e(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) \sum_{p \in P} \theta_{ep} (x_p - x_p^0) dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{e \in E} \tau_e(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) (y_e - y_e^0) dt = \int_0^1 \sum_{e \in E} \tau_e(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) d(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) = \sum_{e \in E} \int_{y_e^0}^{y_e} \tau_e(z) dz. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\tau_e(y) \equiv \tau_e(y_e)$ задача (13) перепишется в виде:

$$\sum_{e \in E} \int_0^{y_e} \tau_e(z) dz \rightarrow \min. \quad y = \Theta x, \quad x \in X. \quad (17)$$

Одной из широко используемых форм функции затрат $\tau_e(y)$ является так называемая BPR-функция (Bureau of Public Road), описывающая временные затраты на проезд:

$$\tau_e(y) = \tau_e^0 (1 + \mu(y_e/c_e)^n),$$

где τ_e^0 — задержки на передвижение по пустой дуге e , c_e — пропускная способность дуги e , μ и n — некоторые положительные константы. При использовании BPR-функции задача транспортного равновесия сводится к оптимизационной задаче (17).

В общем случае, построение функции затрат $\tau_e(y)$ является задачей, требующей отдельных исследований. Здесь окажутся полезными как натурные замеры потоков и соответствующих им задержек в реальных УДС, так и результаты компьютерного моделирования, например, при помощи специальных программ для агентного моделирования, так активно развивающиеся в последние годы.

Существуют ситуации, когда предположение об аддитивности функций $G_p(x)$ не подходит для описания транспортных затрат. Стремление к более адекватному моделированию автомобильных потоков привело к новым формам аналитического описания затрат [34, 39, 23]. Неаддитивные транспортные затраты возникают, например, в случаях, когда при моделировании одновременно учитываются и временные и финансовые расходы. Так, в работе [34] предложена функция, характеризующая финансовые затраты, на которые, в свою очередь, влияют временные задержки:

$$G_p(x) = \Phi_p \left(\sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y) \right) + \Psi_p(x) + \eta \sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y),$$

где $\tau_e(\cdot)$ — время, потраченное на прохождение дуги e , $\Phi_p(\cdot)$ — функция, преобразующая временные задержки для пути p в финансовые затраты, $\Psi_p(\cdot)$ — финансовые затраты, характеризующие маршрут p , которые могут меняться в зависимости от загрузки сети, $\eta > 0$

— эксплуатационные расходы в единицу времени. В работе [23] предложен более общий вид неаддитивной функции затрат:

$$G_p(x) = U_w \left(\sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y) + g_p(\Psi_p) \right), \quad p \in P_w,$$

где Ψ_p — фиксированные финансовые затраты, характеризующие маршрут p , $g_p(\cdot)$ — функция, преобразующая финансовые затраты во временные задержки, $U_w(\cdot)$ — функция потерь (отрицательной полезности) для пары $w \in W$.

С одной стороны, неаддитивные затраты более реалистично могут описать функционирование транспортной системы, с другой, вариационное неравенство (3) (а тем более (5)) при сложных функциях $G_p(x)$ весьма сложно для анализа и решения.

1.5 Численные методы решения задач транспортного равновесия

Эквивалентность задачи транспортного равновесия вариационному неравенству, а в частном случае оптимизационной задаче, позволяет адаптировать численные методы решения последних для поиска равновесных потоков.

К настоящему времени можно выделить два основных подхода к построению алгоритмических схем. В первом случае задачу транспортного равновесия моделируют только через потоковые переменные по дугам и, соответственно, поиск равновесия ведется по дугам сети (дуговые алгоритмы). Во втором — основной переменной задачи является поток по пути, соответственно, итерирование ведется по допустимым маршрутам (маршрутные алгоритмы). И в первом, и втором случаях основная трудность при численных расчетах состоит в большой размерности решаемых задач, особенно на реальных транспортных сетях.

Богатый практический опыт накоплен для частного случая, когда транспортное равновесие ищется как решение оптимизационной задачи (17).

Наиболее распространенным дуговым алгоритмом является метод Франка-Вульфа [33], несмотря на то, что этот алгоритм имеет довольно медленную сходимость, существенно замедляющуюся при приближении к равновесию и весьма чувствительному к размерности задачи. Причиной такого поведения является как практически неизбежно вырождающийся характер вспомогательной задачи линейного программирования, так и неравномерная сходимость потоков к равновесным значениям или так называемый эффект "застревающих потоков" [21, 28, 35] — в процессе решения формируется некоторый набор дуг, по которым потоки сильно отличаются от равновесных и такая ситуация не меняется при последующем итерировании.

Маршрутные алгоритмы распределяют корреспонденции непосредственно по множеству альтернативных путей, причем это множество, как правило, формируется в процессе решения [44, 25]. Перераспределение потоков не по дугам, а сразу по маршрутам, позволяет своевременно уйти от "застревающих потоков", поэтому алгоритмы данного класса не обладают отмеченным недостатком метода Франка-Вульфа и сходятся равномерно, однако и здесь есть свои проблемы. Основная идея алгоритмов состоит в последовательной балансировке потоков между альтернативными маршрутами для каждой пары источник-сток. Поскольку перераспределение одного потока между маршрутами изменяет транспортные затраты во всей сети, и тем самым влияет на распределение других корреспонденций, то возникает необходимость многократного просмотра всех потокообразующих пар и повторения перераспределения потоков. Отсутствие необходимости априорного задания всех допустимых маршрутов для каждой пары источник-сток, с одной стороны, делает алгоритмы поиска равновесия по путям привлекательными для использования, с другой, как показала вычислительная практика [21, 25], такие алгоритмы сводят к минимуму количество используемых

путей, то есть теряется возможность равномерного расщепления корреспонденции по множеству привлекательных маршрутов.

Поиск транспортного равновесия как решения вариационного неравенства (3) исследован в основном теоретически, не смотря на то, что более адекватное моделирование транспортных потоков все-таки требует рассмотрения общего случая непотенциальной и/или неаддитивной функции затрат $G(x) = (G_p(x) : p \in P)$. В целом алгоритмический аппарат для вариационных неравенств разработан достаточно хорошо, о чем свидетельствуют монографии [32, 37], но большое количество переменных и сложное описание вектор-функции $G(x)$ на практике делают задачу (3) труднорешаемой.

Среди существующих методов решения вариационных неравенств отдельно можно выделить проективные методы, отличающиеся простотой своих итерационных схем:

$$x^{k+1} = \pi_X(x^k - \lambda_k G(x^k)), \quad \lambda_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

где $\pi_X(y) = \operatorname{argmin}\{\|y - x\| : x \in X\}$ — проекция точки y на множество X . Для простых множеств (гиперплоскость, полупространство, шар, брус и т.п.) операция проектирования вычисляется аналитически, в общем случае требуется решать задачу квадратичного программирования, что значительно усложняет общий процесс. При выборе шага $\lambda_k \rightarrow 0$, $\sum \lambda_k = \infty$ проективный метод сходится к равновесному распределению при весьма общих предположениях о свойствах задачи, однако на практике такой выбор ведет к очень медленной скорости сходимости.

Для декомпозиции и ускорения сходимости процесса (18) предполагается применить подходы, основанные на теории фейеровских процессов с малыми возмущениями [9, 10] с использованием адаптивной регулировки шага [11]. Основная идея этого подхода заключается в следующем. Допустимое множество X из (1) можно представить в виде пересечения конечного числа гиперплоскостей H_w и неотрицательного ортанта H^+ :

$$X = \bigcap_{w \in W} H_w \bigcap H^+,$$

где $H_w = \{x_p : \sum_{p \in P_w} x_p = \rho_w\}$, $H^+ = \{x_p \geq 0 : p \in P\}$. Объединим супермножества H_w и H^+ в семейство множеств $\mathcal{H} = \{H^+, H_w : w \in W\} = \{\mathcal{H}_l : l = 1, 2, \dots, |W| + 1\}$. Операция проектирования $\pi_{\mathcal{H}_l}(\cdot)$ для любого элемента \mathcal{H}_l вычисляется аналитически. Поэтому для численных расчетов транспортных потоков использовалась следующая модификация процесса (18), получившая название метода последовательных проекций [15]:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \lambda_k v^k, \quad v^k = (\pi_{\mathcal{H}_l}(\bar{x}^k) - x^k) / \lambda_k, \\ \mathcal{H}_l &\in \mathcal{H}, \quad \bar{x}^k = x^k - \lambda_k G(x^k) \notin \mathcal{H}_l, \quad \lambda_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Значительного ускорения сходимости процесса (19) к равновесному решению удастся достичь за счет адаптивного выбора шагового множителя λ_k . Обозначим $V(k, m) = \operatorname{conv}\{v^k, v^{k+1}, \dots, v^m\}$ — выпуклую оболочку векторов v^k, v^{k+1}, \dots, v^m , через $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$ — единичный шар. Для заданной последовательности $\theta_t \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$ определим последовательность индексов $\{k_t\}$. Шаговые множители λ_k определялись по следующим правилам.

1. При $t = 0$ полагается $k_t = 0$, $\lambda_0 > 0$ — произвольное, $q \in (0, 1)$.
2. Для данных t и k_t определяется индекс k_{t+1} такой, что $0 \notin V(k_t, s) + \theta_t B$, $\lambda_s = \lambda_{k_t}$, $k_t \leq s < k_{t+1}$, $0 \in V(k_t, k_{t+1}) + \theta_t B$.
3. Положить $\lambda_{k_{t+1}} = q \lambda_{k_t}$.

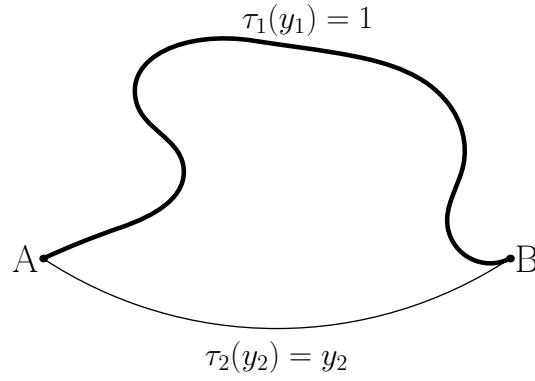


Рис. 1: Пример транспортной сети Пигу.

4. Увеличить номер итерации $t = t+1$ и повторить вычисление (19) для текущего значения λ_k .

Другими словами, по условию п. 2 первый переход к шагу k_{t+1} после k_t осуществляется тогда, когда $0 \in \text{conv}\{v^{k_t}, v^{k_t+1}, \dots, v^{k_{t+1}}\} + \theta_t B$, при этом шаговый множитель уменьшается, согласно п. 3, в $q < 1$ раз.

1.6 Соотношение между системным оптимумом и конкурентным равновесием

Очевидно, что общие затраты при системной оптимизации не могут превышать общих затрат при пользовательской оптимизации. Поэтому разность между совокупными транспортными затратами, которые несут пользователи сети, перемещаясь следуя либо только первому, либо только второму поведенческим принципам Вардропы, можно рассматривать как цену анархии и существуют примеры, когда эта цена составляет существенную долю от общих расходов.

На принципиальную разницу между конкурентным транспортным равновесием и системным оптимумом одним из первых обратил внимание Пигу [45], рассмотрев простейшую транспортную сеть состоящую из двух дуг, соединяющих два пункта, скажем спальня район A и бизнес-зону B (см. Рис. 1). Жители пункта A вольны выбирать, по какой из двух дорог им лучше добираться до работы. Обозначим через y_1 и y_2 доли общего объема трудового потока, едущего по первой и второй дорогам соответственно. Дороги в рассматриваемой сети неравноценны. Первая представляет магистральное шоссе, которое способно принять весь поток автомобилей из пункта A в пункт B без всякого замедления движения. Однако эта дорога достаточно длинная и проезд по ней требует определенного времени τ_1 , которое будем считать равным, например, 1 часу, то есть $\tau_1(y_1) = 1$. По второй дороге путь существенно короче, но это дорога узкая и движение сильно замедляется при наличии на ней потока автомобилей. Чтобы подчеркнуть суть примера будем считать, что время проезда по второй дороге τ_2 линейно зависит от потока по этой дороге y_2 и задается соотношением $\tau_2(y_2) = y_2$. Тогда, в соответствии с первым принципом Вардропы (Пигу-Найта-Вардропы) равновесному состоянию будет соответствовать такое распределение потоков $(y_1^\dagger, y_2^\dagger)$, что

$$\tau_1(y_1^\dagger) = \tau_2(y_2^\dagger), \quad y_1^\dagger + y_2^\dagger = 1, \quad y_1^\dagger, y_2^\dagger \geq 0,$$

откуда немедленно следует, что $y_1^\dagger = 0$, $y_2^\dagger = 1$, при этом системные затраты $c(y_1^\dagger, y_2^\dagger) = 1 \cdot y_1^\dagger + y_2^\dagger \cdot y_2^\dagger = 1$.

Распределение потоков в соответствии со вторым принципом Вардропы (системный оптимум) определяется как решение оптимизационной задачи

$$\min y_1 + y_2^2, \quad y_1 + y_2 = 1, \quad y_1, y_2 \geq 0, \quad (20)$$

минимум которой достигается в точке $y_1^* = y_2^* = 0.5$, минимальные затраты $c(y_1^*, y_2^*) = 0.75$, что на 25% уменьшает системные издержки в сети.

Приведенный пример Пигу показывает, что суммарные затраты в конкурентном равновесии могут составлять $4/3$ от суммарных затрат системного оптимума. Оказывается, это соотношение представляет собой неуплачиваемую оценку сверху для конкурентного потокового равновесия с аффинными функциями затрат и не зависит от топологии сети. Для подробного изложения этого результата установим некоторые полезные соотношения, характеризующие равновесные и оптимальные потоки.

Условие равновесия (2) для вектора $x^\dagger \in X$ можно переписать следующим образом: для каждой пары "источник-сток" $w \in W$ в сети Γ выполнены условия:

$$\text{если } x_p^\dagger > 0, \text{ то } G_p(x^\dagger) = u_w^\dagger \leq G_q(x^\dagger) \text{ для всех } q \in P_w.$$

Отсюда, очевидно следует, что если $x_p^\dagger > 0$ и $x_q^\dagger > 0$ для путей $p, q \in P_w$, то $G_p(x^\dagger) = G_q(x^\dagger) = u_w^\dagger$, что собственно говоря и представляет собой математическую запись первого поведенческого принципа Вардропы.

Поскольку вклад в суммарные системные затраты, обозначим их $c(x^\dagger)$, при равновесном распределении x^\dagger вносят только ненулевые потоки $x_p^\dagger > 0$, а для них все удельные затраты в пределах одной пары w одинаковы и равны u_w^\dagger , то значение $c(x^\dagger)$ можно рассчитать следующим образом:

$$c(x^\dagger) = \sum_{p \in P} G_p(x^\dagger) x_p^\dagger = \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} G_p(x^\dagger) x_p^\dagger = \sum_{w \in W} u_w^\dagger \sum_{p \in P_w} x_p^\dagger = \sum_{w \in W} u_w^\dagger \rho_w. \quad (21)$$

Распределение потоков по второму принципу Вардропы x^* и системный оптимум $c(x^*)$ соответствуют решению оптимизационной задачи

$$c(x) = \sum_{p \in P} G_p(x) x_p \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (22)$$

Положим $c_p(x) = G_p(x) x_p$ и будем предполагать, что для всех $p \in P$ функции $c_p(x)$ являются выпуклыми и непрерывно дифференцируемыми. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть x^* — решения задачи (22), то есть оптимальное распределение потоков в сети. Тогда для всякой пары $w \in W$, если $x_p^* > 0$, $p \in P_w$, то $\frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} \leq \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_q}$ для всех $q \in P_w$.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что для пары w существует путь $\bar{p} \in P_w$ такой, что $x_{\bar{p}}^* > 0$ и $\frac{\partial c(x^*)}{\partial x_{\bar{p}}} > \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_{\bar{q}}}$ для некоторого $\bar{q} \in P_w$, $\bar{q} \neq \bar{p}$. Рассмотрим вектор $x^\varepsilon = (x_p^\varepsilon : p \in P)$ такой, что

$$x_p^\varepsilon = \begin{cases} x_p^*, & p \neq \bar{p}, p \neq \bar{q}, \\ x_{\bar{p}}^* - \varepsilon, & p = \bar{p}, \\ x_{\bar{q}}^* + \varepsilon, & p = \bar{q}, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало и не нарушает условия неотрицательности $x^\varepsilon \geq 0$. Нетрудно видеть, что $x^\varepsilon \in X$, при этом в силу выпуклости функции $c(x)$ имеем оценку

$$c(x^\varepsilon) - c(x^*) \leq \nabla c(x^\varepsilon)(x^\varepsilon - x^*) = \varepsilon \left(\frac{\partial c(x^\varepsilon)}{\partial x_q} - \frac{\partial c(x^\varepsilon)}{\partial x_p} \right) < 0,$$

что противоречит оптимальности x^* . □

В частном случае, когда $G_p(x) \equiv G_p(x_p)$, из теоремы 5 непосредственно следует, что в оптимальном распределении потоков x^* для всякой пары $w \in W$, если $x_p^* > 0$, $p \in P_w$, то $\frac{\partial c_p(x^*)}{\partial x_p} \leq \frac{\partial c_q(x^*)}{\partial x_q}$ для всех $q \in P_w$. При этом, как и в случае равновесных потоков, для оптимальных потоков справедливы равенства $\frac{\partial c_p(x^*)}{\partial x_p} = \frac{\partial c_q(x^*)}{\partial x_q}$ для тех $p, q \in P_w$ для которых $x_p^* > 0$, $x_q^* > 0$. Эти условия известны также как условия Гиббса (см., напр., [7]).

Рассмотрим случай, когда транспортные затраты на прохождение каждого пути $p \in P$ складываются только из затрат на проезд по дугам, составляющим этот путь, то есть $G_p(x)$ определяются по формуле (15), при этом затраты по дугам $\tau_e(y)$ описываются аффинными функциями $\tau_e(y) = a_e y_e + b_e$, где a_e и b_e — неотрицательные коэффициенты для всех $e \in E$. При этом функция системных затрат и ее частные производные определяются как

$$c(x) = \sum_{p \in P} \sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y) x_p = \sum_{e \in E} \tau_e(y) y_e = \sum_{e \in E} (a_e y_e^2 + b_e y_e), \quad \frac{\partial c(x)}{\partial x_p} = \sum_{e \in E} \theta_{ep} (2a_e y_e + b_e).$$

Обозначим через $y^\dagger = (y_e^\dagger : e \in E)$ и $y^* = (y_e^* : e \in E)$ — загрузку дуг сети, порожденную потоками x^\dagger и x^* , соответственно. Опираясь на приведенные выше результаты для равновесных x^\dagger и оптимальных x^* потоков выполнены следующие условия:

равновесие: если $x_p^\dagger > 0$, $p \in P_w$, то для любого $q \in P_w$ выполнено

$$\sum_{e \in E} \theta_{ep} (a_e y_e^\dagger + b_e) \leq \sum_{e \in E} \theta_{eq} (a_e y_e^\dagger + b_e); \quad (23)$$

оптимальность: если $x_p^* > 0$, $p \in P_w$, то для любого $q \in P_w$ выполнено

$$\sum_{e \in E} \theta_{ep} (2a_e y_e^* + b_e) \leq \sum_{e \in E} \theta_{eq} (2a_e y_e^* + b_e). \quad (24)$$

Любопытно, что при линейных функциях задержек $\tau_e(y) = a_e y_e$ из неравенств (23) и (24) следует совпадение равновесных и оптимальных потоков.

Следуя работе [46], через тройку $[\Gamma, \rho, G(x)]$ обозначим транспортную модель, определенную на сети Γ , с матрицей корреспонденций $\rho = (\rho_w : w \in W)$ и затратами $G(x) = (G_p(x) : p \in P)$. Везде далее будем полагать

$$G_p(x) = \sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y) = \sum_{e \in E} \theta_{ep} (a_e y_e + b_e). \quad (25)$$

Имеет место следующий результат.

Лемма 1. Пусть x^\dagger решение задачи транспортного равновесия для модели $[\Gamma, \rho, G(x)]$. Тогда вектор $\frac{1}{2}x^\dagger$ является решением оптимизационной задачи для модели $[\Gamma, \frac{1}{2}\rho, G(x)]$.

Доказательство. Если x^\dagger является допустимым решением равновесной модели $[\Gamma, \rho, G(x)]$, то очевидно $\frac{1}{2}x^\dagger$ — допустимое решение оптимизационной модели $[\Gamma, \frac{1}{2}\rho, G(x)]$, при этом неравенства (24) для $\frac{1}{2}x^\dagger$ переходят в (23). \square

Более того, для каждого маршрута $p \in P_w$ такого, что $x_p^\dagger > 0$ выполнено

$$\frac{\partial c(\frac{1}{2}x^\dagger)}{\partial x_p} = \sum_{e \in E} \theta_{ep} \{a_e y_e^\dagger + b_e\} = u_w(x^\dagger).$$

Лемма 2. Пусть x^* — оптимальное распределение потоков, отвечающее транспортной модели $[\Gamma, \rho, G(x)]$. Тогда для любого допустимого потока x^δ в модели $[\Gamma, (1 + \delta)\rho, G(x)]$ справедлива оценка

$$c(x^\delta) \geq c(x^*) + \delta \sum_{w \in W} v_w(x^*) \rho_w, \quad (26)$$

где $\delta \geq 0$, $v_w(x^*) = \min_{p \in P_w} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p}$.

Доказательство. Рассмотрим допустимые относительно модели $[\Gamma, (1 + \delta)\rho, G(x)]$ потоки x^δ . При затратах $G_p(x)$, определенных в (25), где все коэффициенты $a_e \geq 0$, функция $c(x)$ выпукла, отсюда

$$\begin{aligned} c(x^\delta) &\geq c(x^*) + \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p}(x^\delta_p - x^*_p) = c(x^*) + \sum_{p \in P} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p}(x^\delta_p - x^*_p) = \\ &c(x^*) + \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p}(x^\delta_p - x^*_p) = c(x^*) + \sum_{w \in W} \left(\sum_{p \in P_w} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} x^\delta_p - \sum_{p \in P_w} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} x^*_p \right). \end{aligned}$$

Поскольку для p таких, что $x^*_p > 0$ производная $\frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p}$ принимает минимальное значение:

$$\frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} = \min_{q \in P_w} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_q} = v_w(x^*)$$

то

$$\sum_{p \in P_w} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} x^*_p = \sum_{p \in P_w} v_w(x^*) x^*_p.$$

Следовательно, продолжая оценку снизу для $c(x^\delta)$, получаем:

$$\begin{aligned} c(x^\delta) &\geq c(x^*) + \sum_{w \in W} \left(\sum_{p \in P_w} v_w(x^*) x^\delta_p - \sum_{p \in P_w} v_w(x^*) x^*_p \right) = c(x^*) + \sum_{w \in W} v_w(x^*) \left(\sum_{p \in P_w} x^\delta_p - \sum_{p \in P_w} x^*_p \right) = \\ &c(x^*) + \sum_{w \in W} v_w(x^*) ((1 + \delta)\rho_w - \rho_w) = c(x^*) + \delta \sum_{w \in W} v_w(x^*) \rho_w. \end{aligned}$$

\square

Итоговый результат текущего раздела устанавливает следующая теорема.

Теорема 6. Для транспортной модели $[\Gamma, \rho, G(x)]$, с аффинными функциями задержек (25) для оптимального x^* и равновесного x^\dagger распределений потоков выполняется соотношение

$$c(x^\dagger)/c(x^*) \leq 4/3.$$

Доказательство. Согласно (21) системные затраты для равновесного распределения x^\dagger рассчитываются как

$$c(x^\dagger) = \sum_{w \in W} u_w(x^\dagger) \rho_w,$$

по лемме 1 поток $\frac{1}{2}x^\dagger$ оптимален для транспортной модели $[\Gamma, \frac{1}{2}\rho, G(x)]$, при этом $v_w(\frac{1}{2}x^\dagger) = u_w(x^\dagger)$.

Положим $\delta = 1$ в оценке (26). Тогда для произвольного потока x , допустимого в модели $[\Gamma, 2\frac{1}{2}\rho, G(x)] = [\Gamma, \rho, G(x)]$, имеем

$$c(x) \geq c(\frac{1}{2}x^\dagger) + \sum_{w \in W} \frac{1}{2}v_w(\frac{1}{2}x^\dagger)\rho_w = c(\frac{1}{2}x^\dagger) + \frac{1}{2} \sum_{w \in W} u_w(x^\dagger)\rho_w = c(\frac{1}{2}x^\dagger) + \frac{1}{2}c(x^\dagger). \quad (27)$$

Осталось получить оценку снизу $c(\frac{1}{2}x^\dagger)$ в терминах $c(x^\dagger)$, что легко сделать, учитывая вид функций задержки:

$$c(\frac{1}{2}x^\dagger) = \sum_{e \in E} \frac{1}{2}y_e^\dagger(\frac{1}{2}a_e y_e^\dagger + b_e) \geq \frac{1}{4} \sum_{e \in E} y_e^\dagger(a_e y_e^\dagger + b_e) = \frac{1}{4}c(x^\dagger),$$

где для промежуточных вычислений использовались потоки по дугам $(y_e^\dagger, e \in E)$, индуцированные равновесными потоками по маршрутам x^\dagger . Очевидно, что при этом потоки $\frac{1}{2}x^\dagger$ будут индуцировать загрузку дуг $(\frac{1}{2}y_e^\dagger, e \in E)$.

В результате, продолжая оценку (27) получим

$$c(x) \geq \frac{1}{4}c(x^\dagger) + \frac{1}{2}c(x^\dagger) = \frac{3}{4}c(x^\dagger).$$

Вычисляя в последнем неравенстве минимум левой части по всем x , допустимым в модели $[\Gamma, \rho, G(x)]$, получаем

$$c(x^\dagger)/c(x^*) \leq 4/3.$$

□

2 Построение матрицы корреспонденций

В задаче транспортного равновесия с фиксированным спросом корреспонденция ρ_w , $w = (i, j)$, рассматривается как средний поток пользователей, который из источника $i \in S$ должен прибыть в сток $j \in D$. В данном разделе вместо ρ_w будем использовать обозначение ρ_{ij} , чтобы выделять характеристики источников i и стоков j .

Существуют разные методики для вычисления элементов матрицы $\rho = (\rho_{ij} : i \in S, j \in D)$, в том числе, с применением математических моделей. Рассмотрим наиболее часто используемые, а именно, гравитационную и энтропийную модели построения матрицы корреспонденций. Описание указанных моделей для транспортных сетей можно найти, например, в работах [5, 13, 14, 3, 4, 20, 31].

2.1 Гравитационная модель

Идею к построению гравитационной модели дал всемирный закон тяготения, утверждающий, что все тела притягиваются друг к другу с силой прямо пропорциональной произведению

масс этих тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Применительно к транспортной системе, в качестве тел выступают пункты порождающие/поглощающие потоки, за массу тела принимается суммарный объем выезжающего/въезжающего потока, физическое расстояние можно заменить на любые другие затраты, связанные с передвижением. В самой простой форме гравитационная модель имеет вид:

$$\rho_{ij} = \kappa \frac{s_i d_j}{c_{ij}^2}, \quad i \in S, j \in D. \quad (28)$$

где s_i — общий объем выезжающих из пункта $i \in S$, d_j — общий объем въезжающих в пункт $j \in D$, c_{ij} — удельные затраты на передвижение из i в j , $\kappa > 0$ — калибровочный коэффициент.

Система (28) обладает существенным недостатком. Нетрудно видеть, что при увеличении объемов s_i и d_j , например, в два раза, модель (28) приведет к увеличению корреспонденции ρ_{ij} в четыре раза, что совершенно не логично. Поэтому вместо классической гравитационной модели (28) на практике используют ее модификацию, в которой к условию (28) добавляют дополнительные условия, например, балансовые ограничения на выезд и въезд. Кроме того, квадрат расстояния (затрат) c_{ij}^2 заменяют на так называемую функцию тяготения $f(c_{ij})$, характеризующую предпочтения индивидуумов при выборе пары "источник-сток" (i, j) для передвижения. В результате модифицированная гравитационная модель имеет вид:

$$\rho_{ij} = \frac{s_i d_j}{f(c_{ij})}, \quad \sum_{j=1}^n \rho_{ij} = s_i, \quad \sum_{i=1}^m \rho_{ij} = d_j, \quad \rho_{ij} \geq 0, \quad i \in S, j \in D.$$

или, что то же

$$\rho_{ij} = \alpha_i \beta_j s_i d_j f(c_{ij}), \quad i \in S, j \in D. \quad (29)$$

где калибровочные коэффициенты α_i и β_j определяются из системы

$$\alpha_i = \left[\sum_{j \in D} \beta_j d_j f(c_{ij}) \right]^{-1}, \quad \beta_j = \left[\sum_{i \in S} \alpha_i s_i f(c_{ij}) \right]^{-1}. \quad (30)$$

Очевидно, что система будет совместной только тогда, когда суммарные объемы по выезду и въезду равны $\sum_{i \in S} s_i = \sum_{j \in D} d_j$.

Выбор функции тяготения f осуществляется либо в процессе калибровки модели на основе сопоставления расчетных данных по модели и эмпирических наблюдений, либо на основе некоторых соображений о предпочтениях при выборе пары "источник-сток". Одна из аппроксимаций функции имеет следующий вид $f(c_{ij}) = \exp(-\gamma c_{ij}^\theta)$, где при расчете корреспонденций трудовых миграций полагают $\gamma \approx 0.065$, $\theta \approx 1$ (см., напр., [20] и ссылки там).

Важно отметить, что величины α_i и β_j зависят от всего набора s_i и d_j , а, следовательно, и объемы корреспонденций ρ_{ij} зависят от загрузки всей системы.

Численные значения α_i и β_j определяют по специальной итеративной процедуре. В отечественной литературе такая процедура известна как метод балансировки Шацкого-Шелейховского [19, 22]. В зарубежной литературе метод балансировки имеет свою независимую историю развития. Например, в работе [24] описана следующая процедура: начиная с матрицы

$$\rho_{ij}^0 = s_i d_j f(c_{ij}) \left[\sum_{l \in D} d_l f(c_{il}) \right]^{-1}$$

каждая итерация метода состоит из последовательности операций

$$\begin{aligned} \varrho_{ij}^k &= \begin{cases} \rho_{ij}^k d_j [\sum_{i \in S} \rho_{ij}^k]^{-1}, & \text{если } \sum_{i \in S} \rho_{ij}^k > d_j, \\ \rho_{ij}^k, & \text{в противном случае.} \end{cases} \\ q_i &= s_i - \sum_{j \in D} \varrho_{ij}^k, \quad r_j = d_j - \sum_{i \in S} \varrho_{ij}^k. \\ \rho_{ij}^{k+1} &= \varrho_{ij}^k + q_i r_j f(c_{ij}) \left[\sum_{l \in D} r_l f(c_{il}) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Вычислительные эксперименты по расчету трудовых корреспонденций на примере УДС г. Владивостока [12] (строилась матрица размерности 638×638) показали высокую скорость сходимости процесса (31) к искомой матрице корреспонденций — сбалансированная матрица была получена всего за 4 итерации.

2.2 Энтропийная модель

Как и в случае гравитационного подхода, идею построения энтропийной модели подсказала физика, а именно второй закон термодинамики, утверждающий, что любая замкнутая физическая система стремится достичь устойчивого равновесного состояния, которое характеризуется максимумом энтропии этой системы. Впервые концепция энтропии для определения матрицы корреспонденций была использована в работе [47].

Транспортную систему, как систему передвижения индивидуумов по УДС города, объединяет с физической наличие очень большого числа неуправляемых элементов. При определенных допущениях, например, таких, как неизменность затрат на проезд по маршрутам, неизменность топологии УДС (исключаются реконструкция, введение новых, закрытие старых дорог) и т.п., транспортную систему можно считать замкнутой. Таким образом, проблеме определения корреспонденций ρ_{ij} можно ставить как задачу максимизации энтропии в транспортной системе.

Пусть задано фиксированное пространственное распределение населения по зонам, порождающим потоки, как и ранее, назовем такие зоны источниками и объединим их в множество S , и по зонам, поглощающим потоки, назовем их стоками и объединим в множество D . Источниками, например, могут служить районы жилых массивов, стоками — места приложения труда. Индивидуумы в транспортной системе перемещаются от источников к стокам. Предположим, что все индивидуумы имеют уникальный идентификатор, например, номер паспорта. Состояние транспортной системы определяется распределением "помеченных" индивидуумов между парами "источник-сток".

При определении объемов корреспонденций значимым является только общее количество индивидуумов, без детализации по составу их идентификаторов. Поэтому каждой паре "источник-сток" соответствует величина корреспонденции ρ_{ij} — количество индивидуумов выезжающих из источника $i \in S$ и прибывающих в сток $j \in D$. Очевидно, что существует множество состояний, приводящих к одной и той же матрицы корреспонденций $\rho = \{\rho_{ij} : i \in S, j \in D\}$. Следуя принципу максимизации энтропии будем искать значения ρ_{ij} , доставляющие максимум функции $P(\rho)$, определяющей вероятность реализации состояния системы, соответствующего матрицы корреспонденций ρ .

Обозначим через $\nu(\rho)$ — вероятность каждой реализации матрицы ρ , через $Q(\rho)$ — количество состояний системы, соответствующих ρ . Тогда

$$P(\rho) = \nu(\rho)Q(\rho). \quad (32)$$

Пусть в системе имеется n источников и m стоков. Обозначим через $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \rho_{ij}$ — общее количество индивидуумов в системе, через $\nu_{ij} > 0$ — вероятность выбора индивидуумом коммуникации ρ_{ij} .

По аналогии со схемой Бернули значение $\nu(\rho)$ определяется формулой

$$\nu(\rho) = \nu_{11}^{\rho_{11}} \cdot \nu_{12}^{\rho_{12}} \cdot \dots \cdot \nu_{nm}^{\rho_{nm}} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \nu_{ij}^{\rho_{ij}}.$$

Вычислим количество состояний $Q(\rho)$. Если объем корреспонденции из источника 1 в сток 1 равен ρ_{11} , то количество способов достижения этого объема равно $C_{\mathcal{R}}^{\rho_{11}}$. Далее, из оставшейся части индивидуумов, количество способов достижения объема корреспонденции ρ_{12} равно $C_{\mathcal{R}-\rho_{11}}^{\rho_{12}}$, корреспонденции ρ_{13} равно $C_{\mathcal{R}-\rho_{11}-\rho_{12}}^{\rho_{13}}$ и так далее. В итоге получаем следующую формулу для $Q(\rho)$:

$$Q(\rho) = C_{\mathcal{R}}^{\rho_{11}} \cdot C_{\mathcal{R}-\rho_{11}}^{\rho_{12}} \cdot C_{\mathcal{R}-\rho_{11}-\rho_{12}}^{\rho_{13}} \cdot \dots \cdot C_{\mathcal{R}-\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \rho_{ij}}^{\rho_{nm}} = \frac{\mathcal{R}!}{(\mathcal{R}-\rho_{11})!\rho_{11}!} \cdot \frac{(\mathcal{R}-\rho_{11})!}{(\mathcal{R}-\rho_{11}-\rho_{12})!\rho_{12}!} \cdot \frac{(\mathcal{R}-\rho_{11}-\rho_{12})!}{(\mathcal{R}-\rho_{11}-\rho_{12}-\rho_{13})!\rho_{13}!} \cdot \dots \cdot \frac{(\mathcal{R}-\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \rho_{ij})!}{\rho_{nm}!} = \frac{\mathcal{R}!}{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \rho_{ij}!}.$$

Очевидно, что результат не зависит от того, в каком порядке берутся корреспонденции ρ_{ij} для вычисления количества способов распределения индивидуумов в системе.

Подставив рассчитанные значения $\nu(\rho)$ и $Q(\rho)$ в формулу (32), получаем критерий выбора наиболее вероятного состояния системы

$$P(\rho) = \mathcal{R}! \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{\nu_{ij}^{\rho_{ij}}}{\rho_{ij}!} \rightarrow \max. \quad (33)$$

Помимо требования максимизации вероятности $P(\rho)$ на значения ρ_{ij} , как правило, накладываются дополнительные условия. Самыми естественными из них являются балансовые ограничения и условия неотрицательности. Пусть в каждой зоне-источнике $i \in S$ задан общий объем выезжающих s_i , в каждой зоне-стоке $j \in D$ — общий объем въезжающих d_j . Рассмотрим только те корреспонденции ρ_{ij} , которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{j=1}^n \rho_{ij} = s_i, \quad \sum_{i=1}^m \rho_{ij} = d_j, \quad \rho_{ij} \geq 0, \quad i \in S, \quad j \in D. \quad (34)$$

Очевидно, для совместности системы суммарный объем выезжающих должен быть равен суммарному объему въезжающих

$$\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j = \mathcal{R}. \quad (35)$$

Дополнительно к условиям баланса (34) введем ограничение на общие затраты при проезде

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \rho_{ij} = C, \quad (36)$$

где c_{ij} — удельные затраты на передвижения из источника i в сток j , C — полные затраты в транспортной системе.

Таким образом проблема построения матрицы корреспонденции $\rho = (\rho_{ij} : i \in S, j \in D)$ сводится к задаче условной оптимизации (33), (34), (36).

Нет сомнений, что в заданной форме (33), функция $P(\rho)$ весьма неприятна для оптимизации. Для удобства максимизации можно воздействовать на $P(\rho)$ любым монотонным оператором, например, прологарифмировать $P(\rho)$ и вместо (33) использовать критерий

$$\ln P(\rho) = \ln \mathcal{R}! + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\rho_{ij} \ln \nu_{ij} - \ln \rho_{ij}!) \rightarrow \max. \quad (37)$$

Проводя параллель между физической и транспортной системами, было отмечено наличие большого количество неуправляемых элементов, что позволяет предположить, что значения ρ_{ij} достаточно велики. Поэтому вполне правомерно для дальнейшего преобразования критерия (37) использовать формулу Стирлинга $\ln z! = z \ln z - z$, которая справедлива при больших z . Имеем

$$\ln P(\rho) \approx \mathcal{R} \ln \mathcal{R} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \ln \frac{\nu_{ij}}{\rho_{ij}}.$$

При фиксированных объемах выездов s_i и въездов d_j и выполнении равенства (35), величина $\mathcal{R} \ln \mathcal{R}$ постоянна и может быть исключена из критерия.

В результате проведенных преобразований наиболее вероятное состояние транспортной системы будет соответствовать такой матрицы корреспонденций ρ , элементы которой удовлетворяют условиям (34), (36) и критерию

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \ln \frac{\nu_{ij}}{\rho_{ij}} \rightarrow \max. \quad (38)$$

При построении энтропийной модели (38), (34), (36) предполагалось, что известна априорная информация о предпочтении индивидуумом одной коммуникации другой. Если же любое состояние система принимает с равной вероятностью, то есть для любых пар (i, j) значение ν_{ij} постоянно и определяется как $\nu_{ij} = \frac{1}{mn}$, то вместо критерия (38) рассматривают

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \ln \frac{1}{\rho_{ij}} \rightarrow \max. \quad (39)$$

Допустимая область, задаваемая условиями (34), (36) образует полиэдральное множество. Целевая функция критерия (38) на допустимой области является строго вогнутой. В самом деле, матрица Гессе для (38) имеет вид диагональной матрицы размерности $mn \times mn$ с элементами на главной диагонали $\{-\frac{1}{x_{ij}}\}$. Такая матрица отрицательно определена для любых m, n и $x_{ij} \geq 0$. Таким образом, задача (38), (34), (36) относится к классу задач выпуклой гладкой оптимизации. Строгая вогнутость целевой функции гарантирует единственность ее решения. Несмотря на свои хорошие свойства, для реальных транспортных сетей задача (38), (34), (36) имеет большую размерность, что в свою очередь серьезно усложняет применение на практике стандартных для этого класса задач численных методов. Так, например, для расчета трудовых корреспонденций в УДС г. Владивостока [12], территория города была поделена на зоны 800×800 метров. В результате получилась сетка 22×29 квадрата, каждый из которых одновременно являлся зоной-источником и зоной-стоком. при этом размерность задачи (38), (34), (36) составила 407044 переменных, 1277 ограничений равенств (34), (36).

Для решения задачи (38), (34), (36) разработана простая итерационная схема [19, 22]: начиная с матрицы $\{\rho_{ij} = i\nu_{ij}\}$ на каждой итерации метода попеременно достигается выполнение балансовых ограничений для выездов и въездов:

$$\varrho_{ij}^k = \rho_{ij}^k s_i \left[\sum_{j \in D} \rho_{ij}^k \right]^{-1}, \quad \rho_{ij}^{k+1} = \varrho_{ij}^k d_j \left[\sum_{i \in S} \varrho_{ij}^k \right]^{-1}. \quad (40)$$

В работе [2] доказана сходимость процесса (40) к оптимальному решению задачи (38), (34), (36). Существуют и другие подходы к решению энтропийных моделей (см., напр., [6, 31]).

Подробнее генезис и феноменология энтропийных моделей для поиска равновесного состояния макросистем, в том числе транспортных, рассмотрена в приложении Е.В.Гасниковой настоящего пособия. Особый интерес тут представляет связь энтропийного критерия с динамикой достижения равновесного состояния.

2.3 Связь между гравитационной и энтропийной моделями

Количество переменных в задаче (38), (34), (36), как правило, во много раз превышает число ограничений. Традиционно, в такой ситуации вместо исходной решается двойственная задача, которая в данном случае заключается в максимизации функции Лагранжа

$$L(\rho, \lambda, \mu, \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\rho_{ij} \ln \frac{\nu_{ij}}{\rho_{ij}} + \lambda_i (s_i - \rho_{ij}) + \mu_j (d_j - \rho_{ij}) + \gamma (C - c_{ij} \rho_{ij}) \right],$$

где $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ — вектор двойственных переменных, соответствующих балансовым ограничениям (34) для источников, $\mu = (\mu_j : j \in D)$ — вектор двойственных переменных, соответствующих балансовым ограничениям (34) для стоков, γ — двойственная переменная, соответствующая ограничению по затратам (36).

Точка максимума для $L(\rho, \lambda, \mu, \gamma)$ должна удовлетворять условиям (34), (36) и системе уравнений

$$\ln \frac{\nu_{ij}}{\rho_{ij}} - 1 - \lambda_i - \mu_j - \gamma c_{ij} = 0, \quad i \in S, \quad j \in D. \quad (41)$$

Из системы (41) можно выразить корреспонденции

$$\rho_{ij} = \nu_{ij} \exp(-1 - \lambda_i - \mu_j - \gamma c_{ij}). \quad (42)$$

Видим, что для $\nu_{ij} \geq 0$ условие неотрицательности корреспонденций ρ_{ij} выполнено автоматически, поэтому может не учитываться при построении двойственной задачи и применении к ней численных методов. Однако заметим, что случай, когда $\nu_{ij} = 0$ означает отсутствие корреспонденции между парой (i, j) , следовательно $\rho_{ij} = 0$ и максимизация функции Лагранжа должна рассматриваться в пространстве меньшей размерности.

Введем обозначения

$$\alpha_i = \frac{\exp(-1 - \lambda_i)}{s_i}, \quad \beta_j = \frac{\exp(-\mu_j)}{d_j}.$$

Тогда выражение (42) переписывается в виде

$$\rho_{ij} = \alpha_i \beta_j s_i d_j \nu_{ij} \exp(-\gamma c_{ij}). \quad (43)$$

При подстановке (43) в балансовые ограничения (34) определяются параметры α_i и β_j :

$$\alpha_i = \left[\sum_{j \in D} \beta_j d_j \nu_{ij} \exp(-\gamma c_{ij}) \right]^{-1}, \quad \beta_j = \left[\sum_{i \in S} \alpha_i s_i \nu_{ij} \exp(-\gamma c_{ij}) \right]^{-1}.$$

Отметим, что величина C на практике, как правило, не известна, поэтому лагранжевый множитель γ нельзя определить из решения уравнения (36). Значение γ определяется обычными методами калибровки.

Сравнивая выражение (43) с гравитационной моделью (29) видим, что отличие между ними состоит только в аналитическом задании функции тяготения $f(c_{ij})$. При $f(c_{ij}) = \nu_{ij} \exp(-\gamma c_{ij})$ гравитационная (29) и энтропийная (38), (34), (36) модели эквивалентны. Таким образом, при однородной цели поездок, при заданных объемах выездов s_i , въездов d_j , затратах на передвижение c_{ij} , при фиксированных полных затратах C существует наиболее вероятное распределение поездок между зонами (i, j) и это распределение совпадает с тем, которое задается гравитационной моделью с экспоненциальной функцией притяжения.

3 Парадоксы транспортного равновесия

В данном разделе рассматривается ряд антиинтуитивных примеров транспортных ситуаций, в которых применение принципа равновесия приводит к неожиданным решениям.

3.1 Парадокс Брайеса

Пример Пигу (см. раздел 1.6) заставляет усомниться в эффективности ”невидимой руки рынка” Адама Смита, которая, направляя эгоистичные действия пользователей сети, позволяет достичь общественного блага. Последующий пример Брайеса показывает, что конкурентное бескоалиционное равновесие может не только отклоняться от системного оптимума, но и ухудшать ситуацию для всех участников движения.

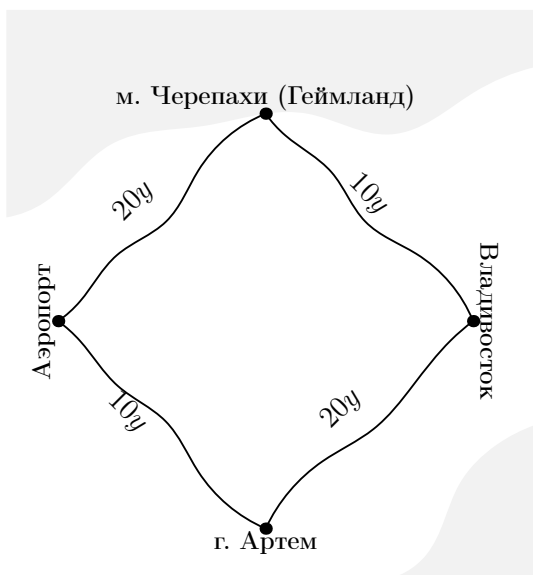
Рассмотрим появление парадокса Брайеса в результате последовательных весьма вероятных трансформаций транспортной сети окрестностей г. Владивостока, которые представлены в серии Рис. 2. Будем рассматривать ситуацию с точки зрения перевозок Аэропорт–Владивосток, с общей потребностью в перевозках 6 условных единиц. На Рис. 2 изображены воображаемые этапы изменения участка транспортной сети в окрестности Владивостока, которые могут быть связаны с созданием игровой зоны на мысе Черепяхи.

Начальное состояние а): Аэропорт и Владивосток соединены двумя дорогами, одна из которых проходит через г. Артем, а другая через мыс Черепяхи — место, где будет построена игровая зона Геймланд. В начальный момент обе дороги невысокого качества и как показано на Рис. 2 а), время проезда по ним сильно зависит от нагрузки y .

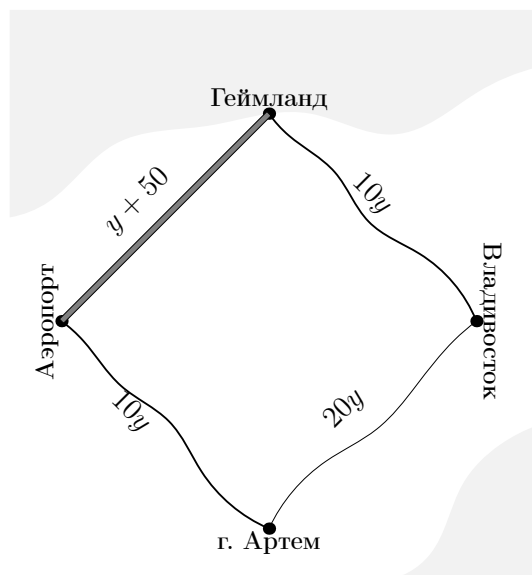
Очевидно, что в силу симметрии равновесные потоки распределяться поровну между двумя маршрутами Аэропорт – м. Черепяхи – Владивосток и Аэропорт – Артем – Владивосток с соответствующими потоками $y = 3$. Пользовательские затраты на проезд — 90, системные — 540.

Построено шоссе Аэропорт-Игровая зона б): Снизилась зависимость времени проезда из Аэропорта в Геймланд, в затратах на проезд появилась постоянная составляющая, которая может представлять собой время проезда по пустой дороге. Часть равновесного трафика переместилась на направление Аэропорт – м. Черепяхи – Владивосток (3.17), соответственно поток по другому маршруту Аэропорт – Артем – Владивосток упал до 2.83. Пользовательские затраты на проезд составили 84.88, системные — $84.88 \cdot 6 = 509.28$.

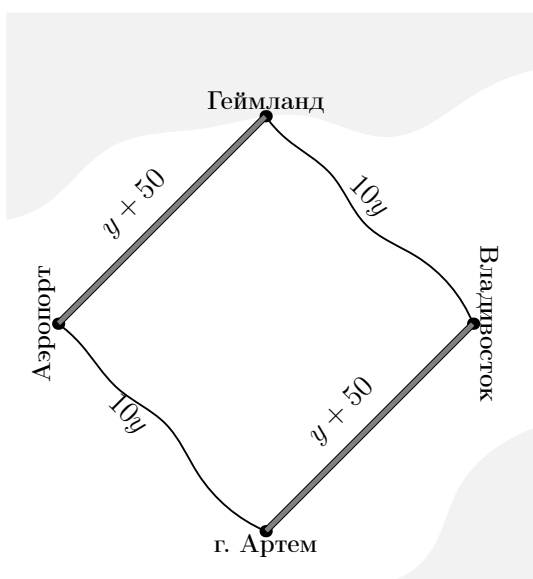
Построено шоссе Артем-Владивосток в): Полученные доходы от игорного бизнеса позволили модернизировать часть одного из маршрутов Владивосток – Артем – Аэропорт, в



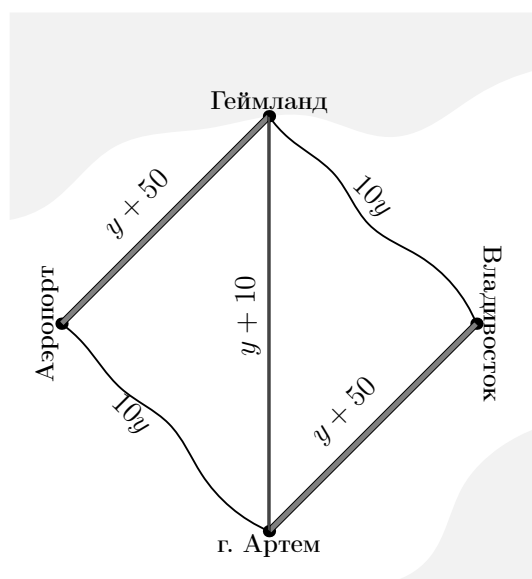
а) Исходное состояние сети



б) Строительство шоссе Аэропорт-Игровая зона



в) Строительство шоссе Артем-Владивосток



г) Строительство шоссе Артем-Игровая зона

Рис. 2: Парадокс Брайеса

результате чего равновесные потоки снова стали симметричными и затраты пользователей составили 83, а системные — 498, дальнейшее снижение.

Построено шоссе Артем-Игровая зона г): Поскольку игровая зона обслуживается в основном жителями Артема, был поставлен и положительно решен вопрос о строительстве дороги Артем – Игровая зона. Затраты на проезд соответствовали классу уже построенных дорог, а постоянное слагаемое уменьшилось в силу территориальной близости.

Равновесные потоки теперь распределяться по трем маршрутам Владивосток – Геймланд – Артем – Аэропорт, Владивосток – Геймланд – Аэропорт, Владивосток – Артем – Аэропорт, причем нагрузка на каждый из них будет составлять 2 единицы трафика, а пользовательские затраты на проезд неожиданно возрасли до 92, а системные — до 552 !

В результате как системные, так и личные затраты превзошли даже первоначальный уровень **а)**, несмотря на то, что на каждом предыдущем этапе мы улучшали транспортную ситуацию как с пользовательской, так и с системной точки зрения.

Причиной этого эффекта является то, что постройка на этапе **г)** шоссе Артем-Игровая зона создало оппортунистическую возможность проехать по маршруту Аэропорт–Артем–Игровая зона Геймланд–Владивосток. При нулевом потоке на маршруте Артем–Игровая зона Геймланд временные затраты составляют 70 и провоцируют водителей на выбор именно этого маршрута. Однако когда эта идея овладеет массами, то поток по сегменту Артем–Игровая зона Геймланд будет уже ненулевой, что увеличит соответствующие общие затраты. Равновесная ситуация установится при одинаковых затратах (временах) по всем маршрутам, что и приводит к этому парадоксальному результату.

3.2 Транспортно-экологические парадоксы

Существует ряд парадоксов [41], связанных с транспортными ситуациями, в которых помимо времени проезда учитываются и дополнительные критерии. Одним из таких критериев, важных в настоящее время, является загрязнение окружающей среды (ЗОС). ЗОС является сложным многокомпонентным понятием, включающим различные виды ущерба для окружающей среды: газовое и тепловое загрязнение, разрушение сложившихся природных ландшафтов, мест обитания редких животных и пр. В данном случае будем все же считать, что ЗОС измеряется некоторым универсальным показателем, связанным с данным участком дороги и зависящим вообще говоря от потока транспорта по этой дороге. ЗОС от различных участков дороги суммируются, образуя итоговый ЗОС либо от маршрутов, либо от всей транспортной сети в целом.

3.2.1 Экологический парадокс Брайеса

В своей схематической форме сеть, реализующая парадокс Брайеса представлена на Рис. 3, где на каждом ребре показаны как временные затраты $\tau(y)$ так и экологический ущерб $e(y)$, как функции потоков по этим ребрам y . Взяв для предполагаемого потока те же данные, что в предыдущем примере, оценим ЗОС до и после строительства новой дороги. Для исходного состояния сети ЗОС оценивается как

$$E = 2 \cdot 3 \cdot (0.2 + 0.1) = 1.8$$

После строительства новой дороги с нулевым экологическим ущербом ЗОС становится равным

$$E = 4 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = 2!$$

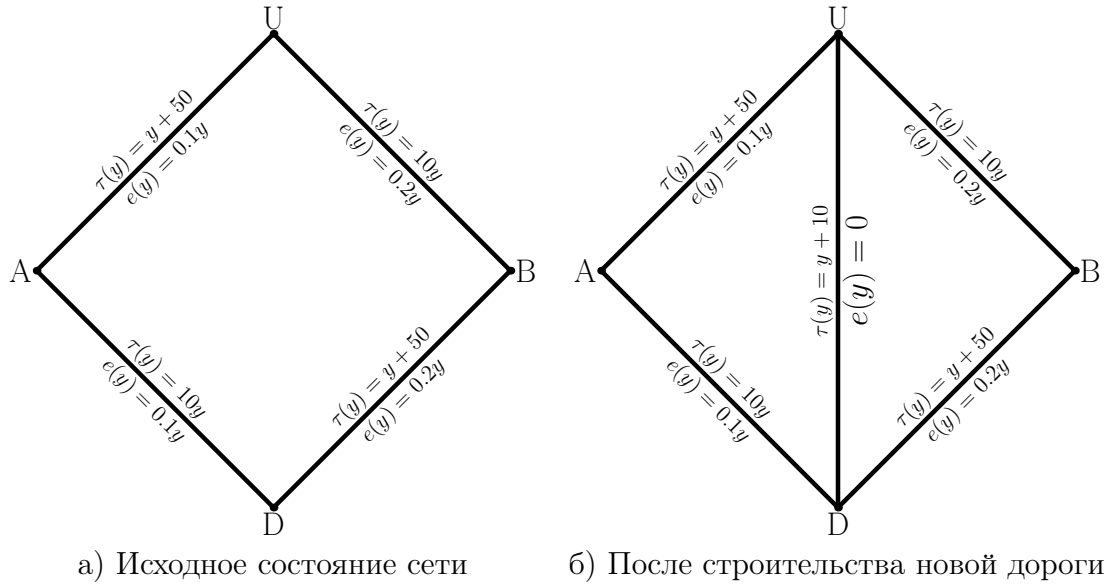


Рис. 3: Парадокс Брайеса

Как нетрудно понять, в данном случае парадокс вызван тем, что в результате перераспределения потоков увеличились потоки именно по тем дугам, которые имеют максимальные удельные приращения ЗОС.

3.2.2 Экологический треугольник

Рассмотрим теперь еще более простую транспортную сеть, представленную на Рис. 4. Также

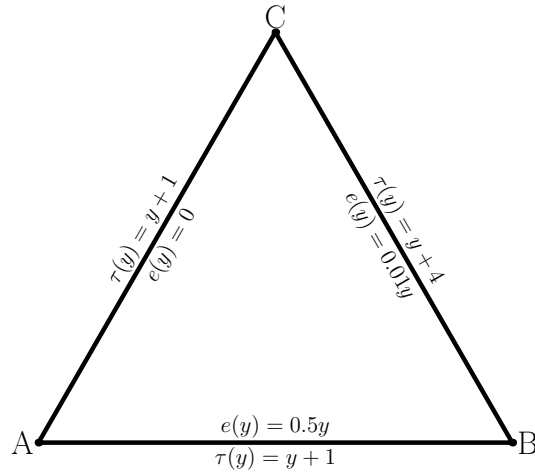


Рис. 4: Уменьшение перевозок вызывает увеличение ЗОС

как и ранее на дугах этой сети приведены формулы, описывающие временные затраты $\tau(y)$ и экологический ущерб $e(y)$ как функции потока y по этой дуге. Пусть требуется перевезти 2 единицы груза из C в B и одну единицу из C в A . Очевидно, что достаточно рассмотреть 3 маршрута: $p_1 = C \rightarrow A$, $p_2 = C \rightarrow A \rightarrow B$ и $p_3 = C \rightarrow B$. Условия равновесия совместно с условиями удовлетворения спроса на перевозки дают систему уравнений

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2) + 1 + x_2 + 1 &= x_3 + 4 \\ x_2 + x_3 &= 2, \quad x_1 = 1\end{aligned}$$

где $x_i, i = 1, 2, 3$ — это потоки по маршрутам $p_i, i = 1, 2, 3$. Решение этой системы дает равновесные потоки $x_1^\dagger = x_2^\dagger = x_3^\dagger = 1$ с общим экологическим ущербом $E = 0.51$.

Теперь предположим, что спрос на перевозки по маршруту $C \rightarrow A$ упал до $1/2$. Тогда решение аналогичной системы дает $x_1^\dagger = 1/2$, $x_2^\dagger = 7/6 > 1$, $x_3^\dagger = 5/6 < 1$ с общим экологическим ущербом $E = 0.5 \cdot 7/6 + 0.01 \cdot 5/6 \approx 0.591 > 0.51$.

Заметим, что увеличение экологического ущерба в этом случае вызвано уменьшением нагрузки на экологически чистую дугу сети. С одной стороны это вызвало переход части трафика с маршрута p_3 , не проходящего через дугу $C \rightarrow A$ на маршрут p_2 , проходящий через эту дугу, однако с другой стороны это вызвало увеличение трафика по дуге $A \rightarrow B$ с высоким экологическим ущербом и суммарный эффект оказался негативным.

3.2.3 Рокадная экология

Последующий пример показывает, как такая популярная мера, как строительство рокадной дороги улучшенного качества, может на самом деле ухудшить экологическую ситуацию.

Рассмотрим дорожную сеть, изображенную на Рис. 5, часть а). Предположим, что эта сеть

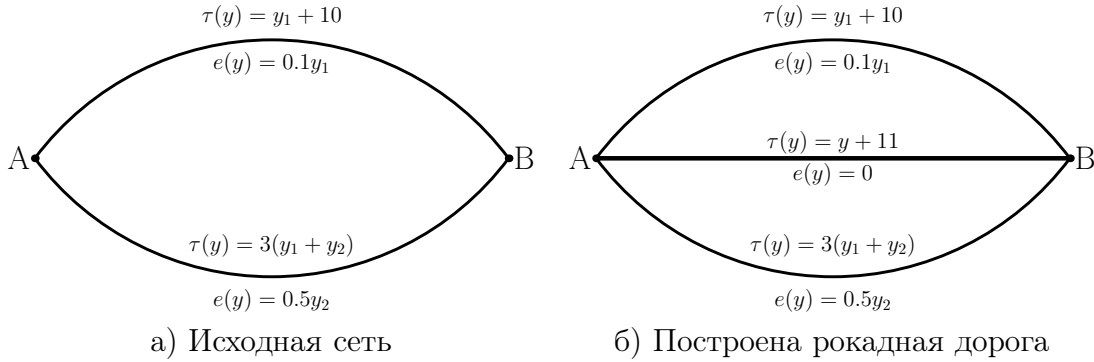


Рис. 5: Новая рокадная дорога вызывает увеличение ЗОС

предназначена для перемещения автомобильного трафика в объеме 5 условных единиц из точки A в точку B по двум дублирующим дорогам различного качества, временные затраты по которым задаются соотношениями на соответствующих дугах. В этих соотношениях y_1 означает поток по верхней дуге, y_2 — по нижней. Зависимость времени проезда по нижней дуге от потока по верхней может быть вызвана указанием приоритета на соответствующем перекрестке.

Определяющая система уравнений для равновесных потоков имеет вид:

$$y_1 + y_2 = 5, \quad y_1 + 10 = 3(y_1 + y_2),$$

откуда $y_1^\dagger = 5$, $y_2^\dagger = 0$. Затраты пользователей на проезд составляют при этом $\tau^\dagger = 15$, а экологический ущерб при этом составляет 0.5.

Если, как показано на правой части Рис. 5 построена новая дорога с нулевым ущербом для окружающей среды и временными характеристиками $\tau(y) = y + 11$, то новая определяющая система будет иметь вид

$$y_1 + y_2 + y = 5, \quad y_1 + 10 = 3(y_1 + y_2) = y + 11$$

и ее решение: $y_1^\dagger = y_2^\dagger = 2$, $y^\dagger = 1$. Затраты пользователей на проезд при этом уменьшились до $\tau^\dagger = 12$, а экологический ущерб возрос до 1.2 !

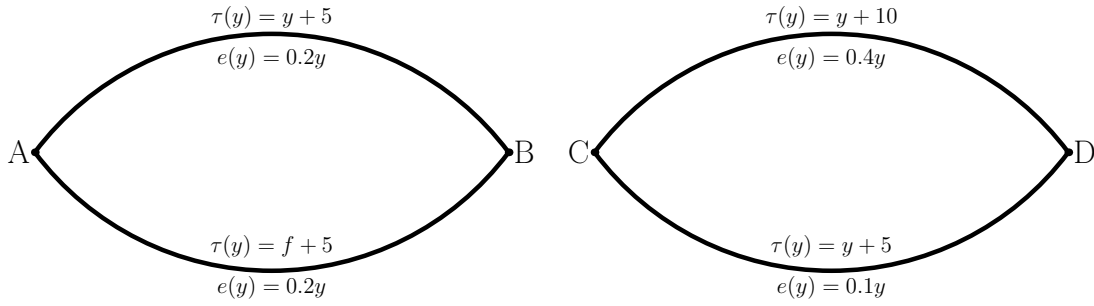


Рис. 6: Сети автомобильных дорог и трамвайных линий

3.2.4 Перераспределение спроса

Еще один пример показывает, что перенос части пассажиров с транспортного средства экологически более вредного (скажем автобус) на менее вредный (например трамвай) может в действительности увеличить ЗОС. В этой модели рассматривается сеть, состоящая из двух компонент, отражающих различные виды транспорта. В этих компонентах необходимо перевезти 10 единиц потока из A в B и 5 единиц потока из C в D . Пункты отправления A и C , а также пункты прибытия C и B будем считать близкими, так что между ними возможен обмен перевозками.

В такой транспортной схеме появляются 4 маршрута, каждый из которых состоит из одной дуги, которые мы будем считать пронумерованными сверху вниз. Затраты на перевозку по маршрутам совпадают, конечно, с затратами по дугам и обозначены на рисунке.

При этих начальных данных решение задачи равновесия имеет вид:

Автомобильная сеть. В силу симметрии потоки равны и составляют $y_1^\dagger = y_2^\dagger = 5$. Экологический ущерб $E = 2$.

Трамвайная сеть. $y_3^\dagger = 0$, $y_4^\dagger = 5$. Экологический ущерб $E = 0.5$.

Суммарный экологический ущерб составляет 2.5.

Предположим теперь, что 2.5 единицы трафика перенесены из сильно загрязняющей автомобильной сети в менее загрязняющую трамвайную с целью уменьшить суммарный ЗОС. Новое равновесное решение будет иметь вид:

Автомобильная сеть. В силу симметрии потоки равны и составляют $y_1^\dagger = y_2^\dagger = 3.75$. Экологический ущерб $E = 1.5$.

Трамвайная сеть. $y_3^\dagger = 0$, $y_4^\dagger = 5$. Экологический ущерб $E = 1.125$.

Суммарный экологический ущерб составляет 2.625, что превосходит (!) ущерб в предыдущем варианте распределения нагрузки для двух видов трафика.

То, что перенос трафика осуществляется в размере 2.5 единиц на самом деле несущественно, любое уменьшение объема перевозок по автомобильной сети вызывает появление ненулевого объема перевозок по экологически затратной дуге 3 в трамвайной сети, что не компенсируется уменьшением объемов перевозок по дугам 1,2. Любое увеличение объемов перевозок по автомобильной сети также не приводит к уменьшению ЗОС, так как вызывает в два раза больший экологический ущерб, чем уменьшение ЗОС от трамвайного трафика, который будет продолжать концентрироваться на дуге 4.

4 Практическая работа

Упражнение 1. На входе в Великий Федеральный Университет есть две двери, через которые входят и выходят студенты. При подходе к ним перед каждым студентом возникает проблема, какой дверью воспользоваться, если он заинтересован в скорейшем входе или выходе. Найти равновесное распределение потоков в двух случаях:

- 1) задержка в дверях одинакова для входящих и выходящих и пропорциональна произведению интенсивностей входящего и выходящего потоков;
- 2) задержка в дверях пропорциональна интенсивности потока студентов,двигающихся в том же направлении плюс задержка, пропорциональная произведению интенсивностей входящего и выходящего потоков.

Общее количество входящих и выходящих за единицу времени студентов считать одинаковым.

Упражнение 2. Рассматривается транспортная сеть $\Gamma = (V, E)$ (пример сети взят из работы [27]), состоящая из 25 вершин ($|V| = 25$) и 40 ориентированных дуг ($|E| = 40$). Топология сети с направлением дуг представлена на Рис. 7.

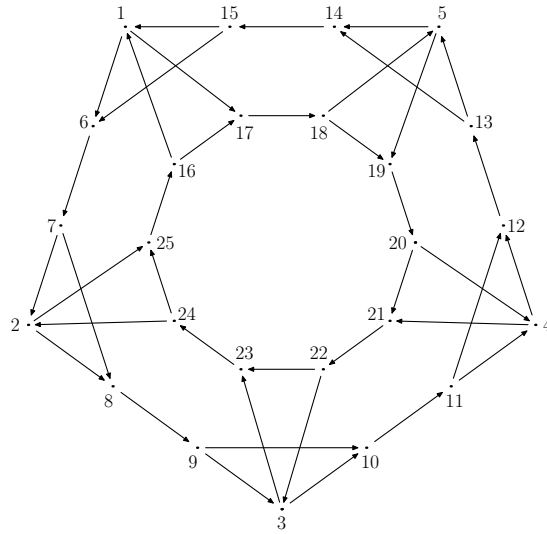


Рис. 7: Транспортная сеть $\Gamma = (V, E)$

Дороги (дуги) транспортной сети Γ поделены на четыре категории:

1. магистрали $E_h = \{(6 \rightarrow 7), (8 \rightarrow 9), (10 \rightarrow 11), (12 \rightarrow 13), (14 \rightarrow 15), (17 \rightarrow 18), (19 \rightarrow 20), (21 \rightarrow 22), (23 \rightarrow 24), (25 \rightarrow 16)\}$;
2. выезды $E_{ex} = \{(16 \rightarrow 1), (15 \rightarrow 1), (24 \rightarrow 2), (7 \rightarrow 2), (22 \rightarrow 3), (9 \rightarrow 3), (20 \rightarrow 4), (11 \rightarrow 4), (18 \rightarrow 5), (13 \rightarrow 5)\}$;
3. въезды $E_{en} = \{(1 \rightarrow 6), (1 \rightarrow 17), (2 \rightarrow 25), (2 \rightarrow 8), (3 \rightarrow 23), (3 \rightarrow 10), (4 \rightarrow 21), (4 \rightarrow 12), (5 \rightarrow 19), (5 \rightarrow 14)\}$;
4. второстепенные дороги $E_s = \{(15 \rightarrow 6), (7 \rightarrow 8), (9 \rightarrow 10), (11 \rightarrow 12), (13 \rightarrow 14), (16 \rightarrow 17), (18 \rightarrow 19), (20 \rightarrow 21), (22 \rightarrow 23), (24 \rightarrow 25)\}$.

Пропускная способность магистралей равна 100 единицам потока, остальных дуг — 50 ед.

Категория дороги влияет на затраты при передвижении. Минимальные транспортные затраты τ_e^0 по каждому из участков $e \in E$ определяются по формуле $\tau_e^0 = \kappa_e l_e$, где l_e — длина дуги e , данные приведены в таблице 1, $\kappa_e > 0$ — коэффициент, зависящий от категории, которой принадлежит дуга e :

$$\kappa_e = \begin{cases} 0.011, & e \in E_h, \\ 0.025, & e \in E_{ex} \cup E_{en}, \\ 0.033, & e \in E_s \end{cases}$$

Таблица 1: Длины дуг сети $\Gamma = (V, E)$

Дуга	Длина	Дуга	Длина	Дуга	Длина	Дуга	Длина
6 → 7	4	16 → 1	6	1 → 6	3	15 → 6	1
8 → 9	10	15 → 1	9	1 → 17	7	7 → 8	6
10 → 11	3	24 → 2	3	2 → 25	6	9 → 10	4
12 → 13	3	7 → 2	8	2 → 8	2	11 → 12	3
14 → 15	5	22 → 3	5	3 → 23	6	13 → 14	9
17 → 18	1	9 → 3	1	3 → 10	5	16 → 17	10
19 → 20	2	20 → 4	10	4 → 21	6	18 → 19	4
21 → 22	6	11 → 4	8	4 → 12	8	20 → 21	6
23 → 24	9	18 → 5	5	5 → 19	7	22 → 23	10
25 → 16	2	13 → 5	3	5 → 14	4	24 → 25	1

В сети Γ выделено пять ”вершин-источников” $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ с заданными объемами выходящего трафика $s = (69, 90, 10, 100, 53)$ и пять ”вершин-стоков” $D = \{17, 19, 21, 23, 25\}$ с заданными объемами входящего трафика $d = (128, 59, 34, 61, 40)$.

Используя аппарат математического моделирования и численные методы рассчитать объемы корреспонденций ρ_w для всех пар ”источник-сток” $w \in W = S \times D$.

При моделировании необходимо учесть, что предпочтения при выборе пары w определяются функцией $f(c_w) = \exp(-0.065c_w)$, где c_w — минимальные транспортные затраты на передвижение для пары w . Предполагается, что величина c_w характеризует длину кратчайшего пути для каждой пары w и определяется из соотношений: $c_w = 0.05$, если источник и сток совпадают, в противном случае

$$c_w = \min_{p \in P_w} \sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e^0, \quad \theta_{ep} = \begin{cases} 1, & \text{если путь } p \text{ проходит через дугу } e; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где через P_w обозначено множество всех допустимых маршрутов передвижения для пары w .

Для рассчитанных корреспонденций сравнить загрузку транспортной сети, индивидуальные и общие транспортные затраты при нормативном и дескриптивном распределении потоков. Под нормативным распределением понимается централизованное управление движением, имеющее своей целью минимизацию совокупных транспортных затрат (второй поведенческий принцип Вардропа). Под дескриптивным — отсутствие централизованного управления, каждый пользователь выбирает маршрут следования исходя из минимизации собственных транспортных затрат (первый поведенческий принцип Вардропа).

Удельные транспортные затраты для каждой пары ”источник-сток” w складываются из затрат по дугам τ_e , входящим в маршрут следования из источника в сток. В свою очередь

на значение τ_e влияет величина потока, проходящего по дуге $e \in E$, такая зависимость описывается функцией $\tau_e(y_e) = \tau_e^0(1 + (y_e/c_e)^4)$, где c_e — пропускная способность дуги e .

Список литературы

- [1] Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. М.: Изд-во МГУ, 1980.
- [2] Брэгман Л.Д. Доказательство сходимости метода Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. № 1. С. 147–156.
- [3] Васильева Е.М., Левит Б.Ю., Лившиц В.Н. Нелинейные транспортные задачи на сетях. М.: Финансы и статистика, 1981.
- [4] Васильева Е.М., Игудин Р.В., Лившиц В.Н. Оптимизация планирования и управления транспортными системами. М.: Транспорт, 1987.
- [5] Вильсон А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978.
- [6] Гасникова Е.В. Двойственные мультипликативные алгоритмы для задачи энтропийно-линейного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 3. С. 453–464.
- [7] Данскин Дж. Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружений М.: Сов. радио, 1970.
- [8] Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
- [9] Нурминский Е.А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2008. Т. 48, вып. 12. С. 2121–2128.
- [10] Нурминский Е.А. Фейеровские процессы с малыми возмущениями // Доклады АН. 2008. Т. 422, вып. 5. С. 601–605.
- [11] Nurminski E.A. Envelope stepsize control for iterative algorithms based on Fejer processes with attractants // Optimization Methods and Software. 2010. V. 25, №. 1. P. 97-108.
- [12] Нурминский Е.А., Шамрай Н.Б. Моделирование транспортных потоков г. Владивостока на основе теории равновесия // Systeme de transport si logistica: Materialele Conf. Int., Chisinau, 22-23 octombrie 2009; red. Resp. Dumitru Solomon; Acad. de Transporturi, Informatica si Comunicatii. Ch.: Evrica, 2009. P. 334–348.
- [13] Попков Ю.С., Посохин М.В., Гутнов А.Э., Шмутьян Б.Л. Системный анализ и проблемы развития городов. М.: Наука, 1983.
- [14] Попков Ю.С. Макросистемные модели пространственной экономики. М.: КомКнига, 2008.
- [15] Шамрай Н.Б. Решение задач транспортного равновесия с декомпозицией по ограничениям // Труды всероссийской конференции "Равновесные модели в экономике и энергетике". – Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН. 2008. С. 618-624.

- [16] Стенбринк П.А. Оптимизация транспортных сетей. М.:Транспорт, 1961.
- [17] Попов Л.Д. Введение в теорию, методы и экономические приложения задач о дополнителности. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001.
- [18] Тодд М.Дж. Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике. М.: Наука, 1983.
- [19] Шацкий Ю.А. Расчет схемы расселения и трудовых корреспонденций при разработке генерального плана города // Развитие системы городского транспорта. Киев, 1971. Вып. 4. С. 3–14.
- [20] Швецов В.И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2003. № 11. С. 3–46.
- [21] Швецов В.И. Алгоритмы распределения транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 148–157.
- [22] Шелейховский Г.В. Транспортные основания композиции городского плана. Л., 1936.
- [23] Agdeppa R.P., Yamashita N., Fukushima M. The traffic equilibrium problem with nonadditive costs and its monotone mixed complementarity problem formulation // Transportation Research Part B. 2007. № 41. 862–874 p.
- [24] Arrowsmith G.A. A behavioural approach to obtaining a doubly constrained trip distribution model //Operational Research Quarterly. 1973. Vol. 24, № 1. P. 101–111.
- [25] Bar-Gera H. Origin-based algorithm for the traffic assignment problem // Transportation Science. 2002. Vol. 36, № 4. P. 398–417.
- [26] Beckmann M., McGuire C.B., Winsten C.B. Studies in the economics of transportation. RM-1488. Santa Monica: RAND Corporation, 1955.
- [27] Bertsekas D., Gafni E. Projection methods for variational inequalities with application to the traffic assignment problem // Mathematical Programming Study. 1982. № 17. P. 139-159.
- [28] Boyce D., Ralevic-Dekic B., Bar-Gera H. Convergence of traffic assignments: how much is enough? // Journal Transport Engineer. 2004. V. 130. № 1. P. 49–55.
- [29] Chen M., Bernstein D.H., Chien S.I.J., Mouskos K. Simplified formulation of toll design problem // Transportation Research Record. 1999. № 1667. P. 88–95.
- [30] Dafermos S. Traffic equilibrium and variational inequalities // Transportation Science. 1980. Vol. 14, № 1. P. 42-54.
- [31] Fang S.-C., Rajasekera J.R., Tsao H.-S.J. Entropy optimization and mathematical programming. Kluwer Academic Publisher, 1997.
- [32] Facchinei, F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems (Volume I,II). Springer, 2003.
- [33] Frank M., Wolfe P. An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3. P. 95–110.

- [34] Gabriel S.A., Bernstein D. The traffic equilibrium problem with nonadditive path costs // Transportation Science. 1997. Vol. 31, № 4. P. 337–348.
- [35] Janson B., Zozaya-Gorostiza C. The problem of cyclic flows in traffic assignment // Transportation Research Part B. 1987. Vol. 21, № 4. P. 299–310.
- [36] Knight F.H. Some fallacies in the interpretation of social cost // The Quarterly Journal of Economics. 1924. Vol. 38, № 4. P. 582–606.
- [37] Konnov I.V. Combined relaxation methods for variational inequalities. Berlin: Springer, 2001.
- [38] Konnov I.V. Equilibrium Models and Variational Inequalities. Elsevier Science, 2007.
- [39] Lo H.K., Chen A. Traffic equilibrium problem with rout-specific costs: formulation and algorithms // Transportation Research Part B. 2000. Vol. 34. P. 493–513.
- [40] Nagurney A. Network Economics: A Variational Inequality Approach (second revised edition) Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [41] Nagurney A., Dong J. Paradoxes in networks with zero emission links: implications for telecommunications versus transportation // Transportation Research Part D. 2001. Vol. 6, № 4. P. 283–296.
- [42] Nemerovsky A., Yudin D. Informational complexity and efficient methods for solution of convex extremal problems. New York: Wiley, 1983.
- [43] Nesterov Y., de Palma A. Stationary dynamic solutions in congested transportation networks: summary and perspectives // Networks and spatial economics. 2003. № 3. P. 371–395.
- [44] Patriksson M. The traffic assignment problem — models and methods. Utrecht, Netherlands: VSP. 1994.
- [45] Piugou A.C. The economics of welfare, London: MacMillan, 1932, 4-th edition. (Русский перевод: Пигу А.С. Экономическая теория благосостояния т. 1-2, Сер. Экономическая мысль Запада, М.: Прогресс, 1985).
- [46] Roughgarden T., Tardos E. How bad is selfish routing? // Journal of the ACM. 2002. № 2, Vol. 49. P. 236–259.
- [47] Wilson A. G. A statistical theory of spatial distribution models // Transportation Research. 1967. Vol. 1. P. 253–270.
- [48] Wardrop J. Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. Proceedings of the institute of Engineers, 1952.