На правах рукописи

Лагуновская Анастасия Александровна

Численные методы решения задач выпуклой оптимизации в условиях неопределенности и алгоритмические модели поведения человека

Специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

МОСКВА – 2017

Работа выполнена на кафедре математических основ управления
факультета управления и прикладной математики (ФУПМ)
Московского физико-технического института (государственного университета)

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент Гасников Александр Владимирович

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Назин Александр Викторович
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова,
Лаборатория № 7 им. Я.З. Цыпкина, ведущий научный сотрудник

кандидат физ.-мат. наук Швецов Владимир Иванович
Федеральный Исследовательский Центр "Информатика и Управление" РАН, Институт системного анализа РАН, Лаборатория 11-2 "Математическое моделирование транспортных потоков", заведующий лабораторией

Ведущая организация:
Научно-исследовательский институт "Высшая школа экономики"

Защита состоится _____________________ 2017 г. в __________ часов на заседании диссертационного совета Д 212.156.05 при Московском физико-техническом университете (ГУ) по адресу: 141700, МО, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, 903 КПМ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МФТИ (ГУ).
Автореферат разослан ______________________ 2017 года.

Ученый секретарь диссертационного совета О.С. Федько

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности

Настоящая диссертационная работа посвящена разработке численных методов выпуклой стохастической оптимизации, применяющихся для решения задач в условиях наличия шума и неопределенности не случайной природы. К таким неточностям, в частности, можно относить ошибки округления, возникающие из-за конечной длины мантиссы. В работе также рассматриваются задачи оптимального поведения рационального индивида в условиях неопределенности, а также поиск равновесного распределения потоков в транспортных сетях. В исследовании сделана попытка с формальной точки зрения описать процесс нахождения равновесия ограниченно рациональными агентами, сравнить теоретические и практические оценки на скорость сходимости используемых методов в зависимости от наличия шумов и доступной информации. Такого типа вопросы изучаются в теории дискретного выбора, в онлайн оптимизации, в популяционной теории игр. Важной задачей является объединение подходов отмеченных областей знаний для более полного исследования вопросов алгоритмического поведения ограниченно рациональных агентов в, частности, в следующих контекстах: а) наибыстрейшего обучения, исходя из опыта окружающих экспертов; б) выбора оптимального маршрута следования в транспортных сетях. В качестве конкретного примера одной из теоретических задач, которая решается в диссертационной работе, отметим обоснование техники двойного сглаживания (Б.Т. Поляк) негладких задач в контексте использования безградиентных методов с неточным оракулом (при наличии шумов). Известно, что в условиях отсутствия шума эта техника позволяет сводить негладкий случай к гладкому случаю с сохранением оценок. В условиях даже малого шума, до недавнего времени было совершенно не понятно, как эта техника будет работать. Насколько она чувствительна к неточности? Вопросы сходимости численных методов оптимизации при наличии малых шумов неслучайной природы не так полно исследованы, как это можно было ожидать. Тем не менее, можно отметить монографию Граничина–Поляка, 2001 и цикл исследований Devolder–Glineur–Nesterov, 2013. Однако в диссертации мы минимальным образом используем отмеченные работы, концентрируясь в большей степени на собственных наработках и имеющимся большом заделе в области обычных численных методов стохастической оптимизации, в условиях отсутствия шума не случайной природы.

Цели и задачи

Целью данной работы является разработка эффективных и интерпретируемых численных методов решения задач выпуклой стохастической оптимизации (в том числе онлайн) в условиях неопределенности.

В соответствии с целью исследования были поставлены и решены следующие общие задачи:

- Проведение обзора литературы по теме диссертационной работы;
- Постановка задачи стохастической выпуклой оптимизации и изучение различных содержательных практических ситуаций, возникающих в моделях алгоритмического поведения человека, которые сводятся к задачам стохастической (онлайн) оптимизации;
- Разработка общих методов решения рассматриваемых задач стохастической оптимизации, исходя из различных предположений о доступной информации, в частности, исходя из зашумленной информации о реализациях значений оптимизируемой функции и градиента;
- Сравнение эффективности разработанных методов с уже известными методами, если таковые имеются;
- Рассмотрения конкретных приложений в популяционной теории игр, на примере задачи равновесного распределения потоков по путям.

Также в диссертации были получены решения следующих конкретных задач: 1) насколько лучше сделать 1000 итераций рассматриваемых в диссертации численных методов на одном процессоре, чем параллельно запустить 10 процессоров, на каждом из которых сделать по 100 итераций, а выдаваемые процессорами ответы усреднить? 2) получая на каждой итерации реализации значений негладкой выпуклой функции насколько быстрее можно попасть в заданную окрестность ее минимума, если использовать на одной итерации два значения функции на общей реализации вместо одного? 3) как можно проинтерпретировать равновесие Нэша в популяционной игре загрузки, связанной с равновесным распределением транспортных потоков по сети, с помощью онлайн оптимизации?

Новизна, методология и методы исследования

В основе предложенного в диссертации подхода (см. главы 1 – 3) лежит численный метод зеркального спуска – МЗС (А.С. Немировский, 1977). Среди прочего, в работе поясняется (глава 3) с помощью теории дискретного выбора, почему поведение рациональных индивидов, минимаксным образом “смотрящих на жизнь”, приводит к тому, что процесс сходимости к равновесию представляет собой итерационный процесс метода зеркального спуска на симплексе или прямом произведении симплексов.

Новизна исследования связана с допущением наличия шумов, неполной информацией (типа одноточечных и двухточечных нелинейных многоруких бандитов) и «игрой» на евклидовой асимметрии множества, на котором «живет» изучаемая система, и способом рандомизации МЗС, а также с приложениями модифицированного МЗС к поиску равновесного распределения потоков в транспортных сетях.

Теоретическая и практическая значимость работы

Настоящая работа носит в основном теоретический характер. Подавляющая часть работы посвящена выводу и изучению неулучшаемых с точностью до мультипликативных констант оценок скоростей сходимости различных вариантов модифицированного, как правило, за счет различных рандомизаций, МЗС. В том числе оригинальных вариантов МЗС, использующих на каждой итерации информацию о зашумленной реализации оптимизируемой функции. Однако в отличие от подавляющего большинства работ по численным методам выпуклой оптимизации, в данной диссертации большое внимание уделяется содержательной интерпретации исследуемых численных методов и оценок скорости их сходимости.

Положения, выносимые на защиту

1. Для задач выпуклой стохастической (в том числе онлайн) оптимизации с произвольной прокс-структурой предложены численные методы стохастического градиентного спуска, работающие по известным нижним оценкам, при наличии малого шума неслучайной природы;
2. Для задач выпуклой стохастической (в том числе онлайн) оптимизации с произвольной прокс-структурой в случае когда на каждой итерации доступны наблюдению только зашумленные реализации значений оптимизируемой функции в одной или двух точках, предложены численные методы, работающие по известным нижним оценкам;
3. Получена онлайн интерпретация равновесия Нэша(–Вардропа) в популяционной игре загрузки, описывающей равновесное распределение водителей в транспортной сети;
4. Для решения задачи поиска равновесного распределения потоков в транспортной сети предложена оригинальная прямо-двойственная модификация композитного варианта быстрого градиентного метода, адаптивно настраивающегося на гладкость задачи; доказана теорема с оценкой скорости сходимости, проведены численные эксперименты.

Публикации и личный вклад.

Результаты, включенные в данную работу, представлены 9 статьями, 7 из которых находятся в списке ВАК, 8 из которых написаны в соавторстве. Работа [9] выполнена автором лично. В работах, написанных в соавторстве, соискателю принадлежат результаты, указанные в положениях, выносимых на защиту данной диссертации. Более подробно о вкладе соавторов в получении различных результатов, используемых в работе, написано в тексте самой диссертации.

Обоснованность полученных результатов обеспечивается математическими теоремами, а также сравнением результатов численных экспериментов с теоретическими результатами и известными ранее результатами о сходимости методов, применяемых для решения задач данного типа.

Апробация работы. Результаты данной диссертационной работы докладывались на:

- 56-й, 57-й и 58-й научных конференциях МФТИ (Москва, 2013–2015 гг). На 58-й научной конференции работа автора была отмечена дипломом за лучшую работу;
- VI и VIII Традиционных молодежных школах «Управление, информация и оптимизация» (2014, 2016 гг.);
- Международной конференции «Quasilinear equations, inverse problems and their applications–2015» (Москва, 2015 г.);
- научных семинарах "Стохастический анализ в задачах" Московского Центра непрерывного математического Образования (Москва, 2013–2015 гг.);

Благодарности

Написание диссертации было финансово поддержано грантом Президента РФ и грантом РНФ. Автор выражает глубокую благодарность доценту Александру Гавриловичу Бирюкову за внимательное отношение к работе и помощь в изложении результатов, а также доценту Ольге Сергеевне Федько за ряд ценных замечаний и доброжелательное отношение.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, одного приложения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет ~100 страниц, список литературы содержит ~100 наименований.

Содержание работы

В главе 1 описывается метод зеркального спуска – МЗС (А.С. Немировский, 1977). Рассматривается класс задач выпуклой стохастической оптимизации

$$f(x)=E_\xi\left[f(x,\xi)\right]\to\min_{x\in Q}, \tag{1}$$

где $f(x)$ – выпуклая функция, а Q – выпуклое множество. На каждой итерации (шаге) можно посчитать в выбранной точке x^k стохастический субградиент $\partial_x f\left(x^k,\xi^k\right)$, где $\left\{\xi^k\right\}_k$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (распределенные также как ξ). Для простоты рассуждений будем считать, что работаем с каким-то конкретным измеримым селектором $\nabla_x f\left(x^k,\xi^k\right)$. При этом

$$E_\xi\left[\nabla_x f(x,\xi)\right]\equiv\nabla f(x). \tag{2}$$

Вводится p-норма ($p\in[1,2]$) и параметр q: $1/p+1/q=1$. Предполагается, что существует такое $M>0$, что

$$E_\xi\left[\left\|\nabla_x f(x,\xi)\right\|_q^2\right]\le M^2,\ q\in[2,\infty]. \tag{3}$$

Вводится прокс-функция $d(x)\ge 0$ ($d(x^0)=0$, в ряде случаев точку старта будем обозначать не x^0, а x^1, тогда $d(x^1)=0$), являющаяся 1-строго выпуклой функцией в p-норме. Вводится расхождение Брэгмана

$$V(x,y)=d(x)-d(y)-\langle \nabla d(y), x-y\rangle .$$

Популярными примерами таких функций являются (А.С. Немировский):

$$p=1,\ d(x)=\ln n+\sum_{k=1}^{n} x_k \ln x_k,\ V(x,y)=\sum_{k=1}^{n} x_k \ln(x_k/y_k),$$

$$p=2,\ d(x)=\frac{1}{2}\|x\|_2^2,\ V(x,y)=\frac{1}{2}\|x-y\|_2^2.$$

Далее вводится оператор проектирования согласно расхождению Брэгмана

$$\mathrm{Mirr}_{x^k}(\mathrm{v})=\arg\min_{x\in Q}\left\{\langle \mathrm{v}, x-x^k\rangle+V(x,x^k)\right\}.$$

С помощью этого оператора вводится МЗС

$$\boxed{x^{k+1}=\mathrm{Mirr}_{x^k}\left(h\nabla_x f(x^k,\xi^k)\right),\ k=0,\dots,N-1},$$

где

$$h=\frac{R}{M}\sqrt{\frac{2}{N}}=\frac{\varepsilon}{M^2},\ R^2=V(x_*,x^0),$$

здесь x_* – решение задачи (1). Если x_* не единственно, то можно считать, что среди всех решений (1) выбирается такое x_*, которое доставляет минимум $V(x_*,x^0)$.

Теорема 1 (А.С. Немировский). *Пусть выполняются условия (2), (3). Тогда после*

$$N=\frac{2M^2R^2}{\varepsilon^2}$$

итераций (вычислений стохастических градиентов)

$$E\left[f(\bar{x}^N)\right]-f_*\le\varepsilon,$$

где

$$f_*=\min_{x\in Q} f(x),\ \bar{x}^N=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x^k .$$

Следующая теорема немного уточняет в случае тяжелых хвостов стохастического субградиента (см. условие iii)) результат Немировского–Юдицкого–Лана–Шапиро, 2009.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие (2) и одно из следующих условий*

i) $\|\nabla_x f(x,\xi)\|_q\le M$ *для всех* $x\in Q$ *и п.н. по* ξ;

ii) $E_\xi\left[\exp\left(\|\nabla_x f(x,\xi)\|_q^2/M^2\right)\right]\le\exp(1)$, $\ln\sigma^{-1}\ll N$;

iii) *Существует такое* $\alpha>2$, *что*

$$P\left(\left\|\nabla_x f\left(x,\xi\right)\right\|_q^2 \big/ M^2 \geq t\right) \leq \left(1+t\right)^{-\alpha},\ \sigma^{-1/(\alpha-1)} \ll N.$$

Тогда при соответствующих σ *(см. ii) и iii)) имеет место неравенство*

$$P\left(f\left(\bar{x}^N\right) - f_* \leq \frac{C_1 M}{\sqrt{N}}\left(R + C_2 \bar{R}\sqrt{\ln \sigma^{-1}}\right)\right) \geq 1-\sigma,$$

где $\bar{R} = \max_{x,y\in Q}\left\|x-y\right\|_p$, $C_1, C_2 \leq 3$ *за исключением случая iii), в котором* $C_1\left(\alpha\right)$.

С помощью теоремы 2 в диссертации был получен следующий результат, который может быть использован для распараллеливания работы МЗС.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие (2) и одно из условий i) – iii). Тогда существует такое* $C \leq 50C_1$, *что по* $K = \left\lceil 2\log_2 \sigma^{-1} \right\rceil$ *независимым друг от друга в смысле выбора реализаций* $\left\{\xi^k\right\}_k$ *траекториям МЗС (на каждой траектории рассчитываем* $\bar{x}^{N,i}$*) с одинаковым числом шагов*

$$N = \frac{CM^2\bar{R}^2}{\varepsilon^2}$$

можно "собрать" такой

$$\bar{x}^N = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\bar{x}^{N,i},$$

что

$$P\left(f\left(\bar{x}^N\right) - f_* \leq \varepsilon\right) \geq 1-\sigma.$$

Пример 1. Результат теоремы 3 допускает следующую интерпретацию. Пусть есть один мудрец, который прожил 1000 лет и есть 10 экспертов, проживших по 100 лет. Считается, что у всех у них одинаковая функция ежедневных затрат $f\left(x\right)$ и каждый стремится оказаться как можно быстрее в минимуме этой функции. Каждый день эксперт или мудрец (оптимально) выбирают способ "как жить", исходя из своей истории. Оказывается, что при весьма общих условиях на "обратную связь", которую можно получать ежедневно ($\nabla_x f\left(x^k,\xi^k\right)$), мудрец "эквивалентен" соответствующему числу независимых экспертов в смысле итогового понимания, как именно надо было жить. Под эквивалентностью понимается "с точностью до универсального числового множителя", и результат, с небольшими оговорками, не зависит от того, сколько именно прожил мудрец и эксперты. Важно только, чтобы эксперты в сумме прожили приблизительно столько же сколько мудрец. При переходе на такую интерпретацию в теореме 3, по сути, получено решение задачи, поставленной Ю.Е. Нестеровым (Nesterov–Vial, 2003). □

Далее в главе 1 приведенные выше результаты распространяются, следуя E. Hazan и др., на задачи, в которых дополнительно известно, что

$$f\left(x\right) - \mu_2\text{-сильной выпуклая функция в 2-норме}, \tag{4}$$

при этом выбирается $p = 2$. В варианте аналогичном теореме 1 это также было ранее сделано А.С. Немировским. Более того, в 2011 году А.С. Немировским и А.Б. Юдицким теорема 1 была обобщена на случай, когда вместо условия (2) выполняется более слабое условие

$$\left\| E_{\xi}\left[\nabla_x f\left(x,\xi^k\right)\right]-\nabla f\left(x\right)\right\|_q \le \delta/\bar{R}. \tag{5}$$

Теорема 4 (Немировский–Юдицкий). *Пусть выполняются условия (3), (5). Тогда*

$$E\left[f\left(\bar{x}^N\right)\right]-f_* \le MR\sqrt{\frac{2}{N}}+\delta,$$

где

$$\bar{x}^N=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x^k.$$

Пусть выполняются условия (3), (4), (5) ($p=2$). Тогда

$$E\left[f\left(\bar{x}^N\right)\right]-f_* \le \frac{M_2^2}{2\mu_2 N}\left(1+\ln N\right)+\delta$$

где

$$\bar{x}^N=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x^k,\; x^{k+1}=\mathrm{Mirr}_{x^k}\left(h_k\nabla_x f\left(x^k,\xi^k\right)\right),\; h_k=\left(\mu_2 k\right)^{-1}, k=1,...,N.$$

В диссертации удалось еще больше ослабить условие (5)

$$\sup_{\left\{x^k=x^k\left(\xi^1,...,\xi^{k-1}\right)\right\}_{k=1}^N\in Q} E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left\langle E_{\xi^k}\left[\nabla_x f\left(x^k,\xi^k\right)\middle|\xi^1,...,\xi^{k-1}\right]-\nabla f\left(x^k\right),x^k-x_*\right\rangle\right]\le\delta. \tag{6}$$

При этом формулировка теоремы 4 полностью сохранилась. Именно в таком варианте с наиболее общим условием (6) на уровень допустимого шума δ во второй главе диссертации удалось воспользоваться теоремой 4 для получения оценок скорости сходимости безградиентных методов.

В заключение первой главы приведенные выше результаты обобщаются на задачи онлайн оптимизации (Lugosi–Cesa-Bianchi, 2005). Оказывается, что теорема 4 имеет место с точно такими же оценками скорости сходимости и для задач онлайн оптимизации. В условиях шума (6) ($\delta>0$) такие результаты были получены впервые.

Оценки теоремы 4 являются неулучшаемыми в выпуклом случае с точностью до мультипликативной константы и с точностью до множителя вида $\sim\ln N$ в сильно выпуклом случае. В случае задач онлайн оптимизации ($\delta=0$) оценки теоремы 4 являются в обоих случаях неулучшаемыми с точностью до мультипликативной константы (E. Hazan et al., 2014).

Приведем вкратце постановку задачи онлайн оптимизации и полученный результат. Положим (все функции $f_k\left(x\right)$ из того же класса, что была функция $f\left(x\right)$, причем $f_k\left(x\right)$ может враждебно подбираться, исходя из знания истории $\left\{x^1,...,x^{k-1}\right\}$)

$$\mathrm{Regret}_N\left(\left\{f_k\left(\cdot\right)\right\},\left\{x^k\right\}\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f_k\left(x^k\right)-\min_{x\in Q}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f_k\left(x\right)$$

и рассмотрим следующую задачу

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_k\left(x^k\right) \to \min_{\left\{x^k\left(\nabla_x f_1\left(x^1,\xi^1\right);\ldots;\nabla_x f_{k-1}\left(x^{k-1},\xi^{k-1}\right)\right)\in Q\right\}_{k=1}^{N}}.$$

Если в теореме 4 в процедуре МЗС при расчете x^{k+1} вместо $\nabla_x f\left(x^k,\xi^k\right)$ использовать $\nabla_x f_k\left(x^k,\xi^k\right)$ – то, что доступно наблюдению только на этом шаге (можно называть этот вектор δ-смещенным стохастическим субградиентом $f_k\left(x\right)$), то теорема 4 останется верной если заменить

$$E\left[f\left(\bar{x}^N\right)\right] - f_* \text{ на } E\left[\text{Regret}_N\left(\left\{ f_k\left(\cdot\right)\right\},\left\{x^k\right\}\right)\right].$$

Приводимый далее (известный ранее) конкретный пример задачи онлайн оптимизации (взвешивание экспертных мнений) будет играть важную роль в главе 3.

Пример 2. Если $f_k\left(x\right)=\left\langle l^k,x\right\rangle$, $Q=S_n\left(1\right)=\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1\right\}$, то стоит выбирать $p=1$, $V\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{n}x_k\ln\left(x_k/y_k\right)$. В этом случае

$$x_i^{k+1}=\frac{\exp\left(-h\sum_{r=1}^{k}l_i^r\right)}{\sum_{j=1}^{n}\exp\left(-h\sum_{r=1}^{k}l_j^r\right)}=\frac{x_i^k\exp\left(-h\cdot l_i^k\right)}{\sum_{j=1}^{n}x_j^k\exp\left(-h\cdot l_j^k\right)},$$

$$\text{Regret}_N\left(\left\{ f_k\left(\cdot\right)\right\},\left\{x^k\right\}\right)\le MR\sqrt{\frac{2}{N}},$$

где

$$h=\frac{R}{M}\sqrt{\frac{2}{N}},\ M=\max_{k=1,\ldots,N}\left\|l^k\right\|_{\infty},\ R^2=\ln n.$$

Все приведенные выше результаты (в том числе и этот) можно обобщить на случай, когда h выбирается адаптивным, т.е. не зависящим от N, образом. Для этого нужно использовать вместо МЗС метод двойственных усреднений (Ю.Е. Нестеров, 2009). Для большей наглядности мы ограничились здесь изложением варианта с МЗС.

Приведенная оценка регрета также является неулучшаемой с точностью до мультипликативной константы (Lugosi–Cesa-Bianchi, 2005).

Полученная выше оценка регрета останется верной (в среднем), если на каждом шаге k в оценке регрета выбирать не x^k, а независимо и случайно осуществлять выбор одной из вершин симплекса, согласно распределению вероятностей $\left\{x_i^k\right\}_{i=1}^{n}$, определенному выше, и использовать то, что получится в качестве $\left\{x^k\right\}_k$, формирующих регрет.

Этот результат можно проинтерпретировать, например, следующим образом. Пусть мы играем с казино в орлянку: каждый день казино сообщает нам один из двух возможных исходов $\{1,-1\}$. Каждый день мы (заранее) должны делать ставку 1 рубль на один из исходов. Если мы угадали, то выигрываем рубль – нам возвращают этот рубль вместе с еще одним, если не угадали, то проигрываем (этот) рубль. Казино не знает нашу текущую ставку, но зато знает все предыдущие наши ставки (и может это использовать враждебным для нас способом). Будем формировать вектор $l^k \in \mathbb{R}^2$ следующим образом: $l^k = (-1,1)^T$ если в k-й день казино сообщило 1 и $l^k = (1,-1)^T$ в противном случае. Приведенный выше результат позволяет обыгрывать такое казино, если казино не в состоянии генерировать случайную последовательность $\{1,-1\}$ в следующем смысле: за $N \gg 1$ дней доли (частоты) встречаемости 1 и -1 отличаются не более чем на $N^{-1/2}$. □

В главе 2 результаты главы 1 переносятся на задачи стохастической онлайн оптимизации, в которых вместо (зашумленного) стохастического градиента доступными наблюдению на каждом шаге (итерации) являются только (зашумленные) реализации значений функции в нескольких точках или зашумленная реализация производной по направлению. Для простоты формулировок далее в этой главе мы ограничимся только не онлайн случаем и сходимостью в среднем. Основная идея, восходящая к работам Ю.М. Ермольева, 1976; Немировского–Юдина, 1979; Граничина–Поляка, 2003; J.C. Spall'a, 2003; A.D. Flaxman'a et al., 2005, заключается в введении

$$\nabla_x f\left(x^k, \xi^k := \left(\xi^k, e^k\right)\right) := \frac{n}{\tau} f\left(x^k + \tau e^k, \xi^k\right) e^k, \tag{7}$$

(одноточечная обратная связь)

$$\nabla_x f\left(x^k, \xi^k\right) := \frac{n}{\tau}\left(f\left(x^k + \tau e^k, \xi^k\right) - f\left(x^k, \xi^k\right)\right) e^k, \tag{8}$$

(двухточечная обратная связь)

$$\nabla_x f\left(x^k, \xi^k\right) := n\left\langle \nabla_x f\left(x^k, \xi^k\right), e^k \right\rangle e^k. \tag{9}$$

(обратная связь в виде реализации производной по направлению)

Считается, что $\left\{e^k\right\}_k$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы. Будем предполагать, что $f\left(x^k, \xi^k\right)$ в случаях (7), (8) доступны с, вообще говоря, неслучайным шумом уровня δ:

$$\left|E_\xi\left[f\left(x, \xi\right)\right] - f\left(x\right)\right| \le \delta. \tag{10}$$

В случае (9) будем считать, что выполняется условие (2). Здесь и далее в этой главе будем считать, что все условия выполняются не только в множестве Q, но и в δ-окрестности (в 2-норме) этого множества.

В литературе давно открытым стоял вопрос: как следует выбирать e^k? Основные конкурирующие способы:

$$e^k \in RS_2^n(1),$$

т.е. e^k выбирается равновероятно на поверхности евклидовой сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^n$;

$$e^k = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{i},0,\ldots,0) \text{ с вероятностью } 1/n.$$

Впрочем, есть и другие способы, например, равновероятно среди вершин куба Хэмминга, см. J.C. Duchi et al., 2015. Во второй главе диссертации было доказано, что абсолютно во всех случаях, если ориентироваться только на число сделанных итераций, и не смотреть на "стоимость" итерации, первый способ $e^k \in RS_2^n(1)$ доминирует все известные остальные способы – с точностью до логарифмического множителя, причем в большинстве случаев такая оговорка не требуется.

Заметим, что

$$E_{e^k}\left[n\left\langle \nabla_x f\left(x^k,\xi^k\right),e^k\right\rangle e^k\right] = \nabla_x f\left(x^k,\xi^k\right), \text{ (следует сравнить с (2))}$$

$$E\left[\left\|\frac{n}{\tau}\left(f\left(x^k+\tau e^k,\xi^k\right)-f\left(x^k,\xi^k\right)\right)e^k\right\|_q^2\right] \le \frac{3}{4}n^2\tau^2L_2^2E_{e^k}\left[\left\|e^k\right\|_q^2\right]+$$

$$+3n^2E\left[\left\langle \nabla_x f\left(x^k,\xi^k\right),e^k\right\rangle^2\left\|e^k\right\|_q^2\right]+12\frac{\delta^2n^2}{\tau^2}E_{e^k}\left[\left\|e^k\right\|_q^2\right]. \text{ (следует сравнить с (3))}$$

Если

$$E_{\xi^k}\left[\left|f\left(x,\xi^k\right)\right|^2\right] \le B^2, \tag{11}$$

то

$$E\left[\left\|\frac{n}{\tau}f\left(x^k+\tau e^k,\xi^k\right)e^k\right\|_q^2\right] \le \frac{n^2B^2}{\tau^2}E_{e^k}\left[\left\|e^k\right\|_q^2\right]. \text{ (следует сравнить с (3))}$$

Также заметим, что мы не можем стремить $\tau \to 0+$ в (7), (8) из-за присутствия в оценках неограниченно возрастающего отношения δ/τ. Если бы $\delta = 0$, то можно было объединить случаи (8) и (9), поскольку при $\tau \to 0+$ (8) переходит в (9).

Используя явление концентрации меры на сфере (П. Леви, А. Пуанкаре, В.Д. Мильман) для $e \in RS_2^n(1)$ можно получить следующие результаты

$$E\left[\|e\|_q^2\right] \le \min\{q-1,4\ln n\}\cdot n^{\frac{2}{q}-1},\; E\left[\langle c,e\rangle^2\right] \le \|c\|_2^2 n^{-1},\; 2\le q\le\infty,$$

$$E\left[\langle c,e\rangle^2\|e\|_q^2\right] \le \frac{4}{3}\|c\|_2^2\min\{q-1,4\ln n\}\cdot n^{\frac{2}{q}-2},\; 2\le q\le\infty.$$

В доказательстве, полученном совместно с И.Н. Усмановой, использовались стандартные факты концентрации меры из обзора K. Ball, 1997.

Выписанные формулы позволяют надеяться, что можно погрузить рассматриваемые в этой главе задачи в класс задач обычной стохастической оптимизации, рассматриваемый в прошлой главе. И, действительно, уже прямо сейчас это можно сделать для случая (9). Однако для случаев (7), (8) даже при $\delta = 0$ возникает проблема с условием (2)

$$E_{e^k}\left[\frac{n}{\tau} f\left(x^k + \tau e^k, \xi^k\right) e^k\right] = E_{e^k}\left[\frac{n}{\tau}\left(f\left(x^k + \tau e^k, \xi^k\right) - f\left(x^k, \xi^k\right)\right) e^k\right] \neq$$
$$\neq E_{e^k}\left[n\left\langle \nabla_x f\left(x^k, \xi^k\right), e^k\right\rangle e^k\right].$$

Выручает введенное ранее условие (6). Благодаря именно такому обобщению теоремы 4 удалось получить следующий результат.

Теорема 5. *Пусть для задачи выпуклой стохастической оптимизации (1) на каждой итерации доступен наблюдению один из следующих векторов (7) – (9). При этом в случае (7) выполняются условия (3) с* $q = 2$*, (10), (11), в случае (8) выполняются условия (3) с* $q = 2$*, (10) и условие*

$$\left\|\nabla f\left(y\right) - \nabla f\left(x\right)\right\|_2 \le L_2 \left\|y - x\right\|_2, \tag{12}$$

в случае (9) выполняются условия (2), (3) с $q = 2$. *Тогда используя МЗС с* $\nabla_x f\left(x^k, \xi^k\right)$, *рассчитываемым по соответствующей формуле (7) – (9), с явно выписываемыми оценками на* τ, h *и допустимым уровнем шума* $\delta \le \delta\left(\varepsilon, n\right)$, *после* N *итераций можно получить следующую оценку*

$$E\left[f\left(\bar{x}^N\right)\right] - f_* \le \varepsilon,$$

где N *определяется из таблицы 1 в случае (7) и из таблицы 2 в случае (8), (9). Причем,* $\tilde{O}(\ ) = O(\ )$ *с точностью до логарифмического по* n *или* N *множителя. Параметр* p *выбирается из отрезка* $\left[1, 2\right]$, $1/p + 1/q = 1$.

Таблица 1

N ($R^2 = \tilde{O}\left(\left\|x_* - x^0\right\|_p^2\right)$)	$E\left[\left\|\nabla_x f\left(x, \xi\right)\right\|_2^2\right] \le M_2^2$	$\left\|\nabla f\left(y\right) - \nabla f\left(x\right)\right\|_2 \le L_2 \left\|y - x\right\|_2$
$f\left(x\right)$ выпуклая	$\tilde{O}\left(\frac{B^2 M_2^2 R^2 n^{1+2/q}}{\varepsilon^4}\right)$	$\tilde{O}\left(\frac{B^2 L_2 R^2 n^{1+2/q}}{\varepsilon^3}\right)$
$f\left(x\right)$ – μ_2-сильно выпуклая	$\tilde{O}\left(\frac{B^2 M_2^2 n^2}{\mu_2 \varepsilon^3}\right)$	$\tilde{O}\left(\frac{B^2 L_2 n^2}{\mu_2 \varepsilon^2}\right)$

Таблица 2

N ($R^2 = \tilde{O}\left(\left\|x_* - x^0\right\|_p^2\right)$)	$E\left[\left\|\nabla_x f\left(x, \xi\right)\right\|_2^2\right] \le M_2^2$	$\left\|\nabla f\left(y\right) - \nabla f\left(x\right)\right\|_2 \le L_2 \left\|y - x\right\|_2$
$f\left(x\right)$ выпуклая	$\tilde{O}\left(\frac{M_2^2 R^2 n^{2/q}}{\varepsilon^2}\right)$	$\tilde{O}\left(\frac{M_2^2 R^2 n^{2/q}}{\varepsilon^2}\right)$

$f(x)$ $-\mu_2$-сильно выпуклая	$\tilde{O}\left(\frac{M_2^2 n}{\mu_2 \varepsilon}\right)$	$\tilde{O}\left(\frac{M_2^2 n}{\mu_2 \varepsilon}\right)$

Замечание 1. В категориях $\tilde{O}(\ )$ даже при $\delta = 0$ выписанные в таблицах 1, 2 оценки оптимальны, т.е. совпадают с нижними оценками (A. Agrawal et al., 2012). В случае таблицы 1 нужны оговорки, что все-таки приведенные оценки могут быть улучшен по тому как входит в оценку N желаемая точность ε за счет ухудшения того как входит размерность пространства n (S. Bubeck et al., 2015). В случае таблицы 2 оценки равномерно оптимальны одновременно и по ε и по n. Причем эти оценки остаются оптимальными также в случае, когда рассматривается задача не стохастической, а обычной оптимизации. В точности такие же оценки можно получить и для задач стохастической онлайн оптимизации. Иногда в таком контексте, т.е. с обратной связью (7) – (9), эти задачи называют задачами о (контекстуальных) нелинейных многоруких бандитах (Bubeck–Cesa-Bianchi, 2012). Новизна в теореме 5 заключается в рассмотрении случая $\delta > 0$, а также в рассмотрении случаев с $p \neq 2$. Впрочем, недавно в работе J.C. Duchi et al., 2015 были получены результаты, близкие к приведенным в теореме 5 при $p = 1$ и $\delta = 0$.

Замечание 2. В случае обратной связи (8) условие на уровень шума δ имеет вид

$$\delta \le \min\left\{\frac{\varepsilon\tau}{16R\sqrt{n}}, \frac{M_2\tau}{\sqrt{96n}}\right\},$$

Откуда из условия на τ

$$\tau = \min\left\{\max\left\{\frac{\varepsilon}{2M_2}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{L_2}}\right\}, \frac{M_2}{L_2}\sqrt{\frac{1}{6n}}\right\},$$

в итоге можно получить

$$\delta \le \frac{\varepsilon^{3/2}}{16R\sqrt{L_2 n}}.$$

Замечание 3 (техника двойного сглаживания). Сопоставляя условия, при которых оценки таблицы 2 справедливы для обратной связи вида (8) и вида (9), несложно заметить, что в случае (8) в теореме 5 требовалось выполнение дополнительного условия гладкости (12). Замечание 2 хорошо поясняет почему при $\delta > 0$ это условие может понадобиться. Однако уже довольно давно (Б.Т. Поляк, 1983; см. также J.C. Duchi et al., 2015) было подмечено, что и без условия (12) можно использовать безградиентные двухточечные методы. Для этого вместо (8) формируется

$$\nabla_x f\left(x^k, \xi^k\right) = \frac{n}{\tau_2}\left(f\left(x^k + \tau_1\tilde{e}_1^k + \tau_2 e_2^k, \xi^k\right) - f\left(x^k + \tau_2\tilde{e}_1^k, \xi^k\right)\right)e_2^k,$$

где $\tilde{e}_1^k \in RB_2^n(1)$, т.е. $\tilde{e}_1^k$ – случайный вектор, равномерно распределенный на евклидовом шаре единичного радиуса в пространстве $\mathbb{R}^n$, $e_2^k \in RS_2^n(1)$ и $\{\tilde{e}_1^k, e_2^k, \xi^k\}_k$ – независимы в совокупности. В диссертационной работе удалось получить условие на уровень шума, при котором оценки из второго столбца таблицы 2, отвечающего негладкому случаю, для обратной связи (8) остаются по-прежнему верными, т.е. верными без условия (12),

$$\delta \le \frac{\varepsilon^2}{56 M_2 R n^{3/2}}.$$

При этом

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon}{4M_2},\ \tau_2 = \frac{\varepsilon}{4M_2 n}.$$

Насколько нам известно, ранее не был известны теоретически обоснованные способы выбора τ_1, τ_2. Как и следовало ожидать, из-за отсутствия гладкости, приведенное здесь условие на допустимый уровень шума δ получилось более жестким, чем в гладком случае – см. замечание 2.

Пример 3. Пусть на воображаемой планете живут “оптимизаторы”. Каждый из них стремиться жить с наименьшими потерями нервов. Планета характеризуется выпуклой M_2-липшицевой функцией $f(x)$, аргумента $x \in Q \subseteq \mathbb{R}^n$, где Q – выпуклое множество, являющееся множеством допустимых стратегий оптимизаторов. Считаем, что этому множеству соответствует выбор $p = 2$. Функция $f(x)$ обозначает нервные потери оптимизатора за день, если оптимизатор в этот день использовал стратегию $x \in Q$. Однако значение функции $f(x)$ не наблюдаемы. Оптимизатор, использовавший в k-й день стратегию x^k, может наблюдать лишь зашумленную реализацию значения этой функции $f(x^k, \xi^k)$.

Рассматривается два способа жить на такой планете: 1) жить одному, 2) жить вдвоем. В случае 1) оптимизатор может получать каждый день только обратную связь вида (7), а вот в случае 2), за счет сговора, каждому можно рассчитывать на обратную связь вида (8). Из теоремы 5 и замечания 3 (в онлайн варианте) получаем, что в случае 1) необходимо (и достаточно) прожить $N = C_1 B^2 M_2^2 R^2 n^2 / \varepsilon^4$ дней, чтобы обеспечить выполнение условия

$$E[\text{Regret}_N] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E\left[f(x^k)\right] - \min_{x\in Q}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x) \le \varepsilon.$$

В случае 2) для этой же цели достаточно прожить $N = C_2 M_2^2 R^2 n / \varepsilon^2$ дней. Здесь $C_1, C_2 \le 100$. Интересно заметить, что если жить втроем, вчетвером и т.д., то это лишь немого улучшает оценку $N = C_2 M_2^2 R^2 n / \varepsilon^2$. А именно, если $2k$ оптимизаторов живут вместе и могут согласовывать свои стратегии, исходя из общедоступной информации, то $N \approx (C_2/k) M_2^2 R^2 n / \varepsilon^2$. □

В **Главе 3** рассматриваются приложение результатов главы 1 к решению задач поиска равновесного распределения потоков в транспортных сетях.

Рассматривается транспортная сеть, которую можно представить ориентированным графом $\langle V,E\rangle$, где V – множество вершин, а E – множество ребер. Обозначим множество пар источник-сток через $OD\subseteq V\otimes V$; d_w – корреспонденция, отвечающая паре w; x_p – поток по пути p; P_w – множество путей, отвечающих корреспонденции w, $P=\bigcup_{w\in OD} P_w$ – множество всех путей. Обозначим через H – максимальное число ребер в пути из P. Затраты на прохождения ребра $e\in E$ описываются неубывающей и ограниченной в рассматриваемом диапазоне значений функцией

$$0\le \tau_e\left(f_e\right)\le \tilde{M},$$

где f_e – поток по ребру e,

$$f_e\left(x\right)=\sum_{p\in P}\delta_{ep}x_p,\ \delta_{ep}=\begin{cases}1, & e\in p\\ 0, & e\notin p\end{cases}.$$

Положим $\breve{M}=\tilde{M}\cdot H$. Введем затраты на проезд по пути p

$$G_p\left(x\right)=\sum_{e\in E}\tau_e\left(f_e\left(x\right)\right)\delta_{ep}.$$

Введем также множество

$$X=\left\{x\ge 0:\ \sum_{p\in P_w}x_p=d_w,\, w\in OD\right\},$$

и функцию, порождающее потенциальное векторное поле $G\left(x\right)$:

$$\Psi\left(x\right)=\sum_{e\in E}\int_0^{f_e(x)}\tau_e\left(z\right)dz.$$

Основное свойство этой функции заключается в том, что

$$\nabla\Psi\left(x\right)=G\left(x\right).$$

Будем считать, что число пользователей транспортной сети большое

$$d_w:=d_w\cdot\bar{N},\ \bar{N}\gg 1,\ w\in OD,$$

но в функциях затрат это учитывается

$$\tau_e\left(f_e\right):=\tau_e\left(f_e/\bar{N}\right).$$

Таким образом, далее под d_w, x, f будем понимать соответствующие прошкалированные по $\bar{N}$ величины, W. Sandholm, 2010.

Выберем корреспонденцию $w\in OD$ и рассмотрим пользователя транспортной сети, соответствующего этой корреспонденции. Стратегией пользователя является выбор одного из возможных путей следования $p\in P_w$. Будем считать, что пользователь мало что знает об устройстве транспортной системы и о формировании своих затрат. Все что доступно пользователю на шаге $k+1$ – это история затрат на разных путях, соответствующих его корреспонденции, на всех предыдущих шагах $\left\{ l_p^r = \left\{ G_p\left(x^r\right) \right\}_{p\in P_w} \right\}_{r=1}^{k}$. Для простоты рассуждений мы не зашумляем эту информацию, считая что доступны точные значения имевших место затрат. Все последующие рассуждения можно обобщить и на случай зашумленных данных.

Допуская, что $0 \le \left\{ l_p^k \right\} \le \breve{M}$ могут выбираться враждебно, пользователь стремиться действовать оптимальным образом, то есть так, как предписывает стратегия из примера 2 с $i = p$, $n = n_w = \left|P_w\right|$. Заметим, что при некоторых дополнительных оговорках (см. Lugosi–Cesa-Bianchi, 2005) случайный выбор пути согласно рандомизированному варианту МЗС из примера 2 может быть осуществлен за время $\mathrm{O}\left(\left|E\right|\right)$, что не зависит от n, которое может быть намного больше, как это имеет место, например, для манхетенской сети.

Представим себе, что остальные пользователи ведут себя аналогичным образом, но независимо (в вероятностном плане) друг от друга. Тогда в пределе $\bar{N} \to \infty$ такая стохастическая марковская динамика в дискретном времени вырождается в детерминированную динамику $x^k \in \prod_{w\in OD} S_{n_w}\left(1\right)$, $k = 1,\ldots,N$ в дискретном времени, и имеет место следующий результат.

Теорема 6. *Пусть*

$$\bar{x}^N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x^k\,,\ \Psi_* = \Psi\left(x_*\right), x_* \in \mathrm{Arg}\min_{x\in X} \Psi\left(x\right).$$

Тогда

$$\Psi\left(\bar{x}^N\right) - \Psi_* \le \frac{M}{\sqrt{N}} \frac{\max_{w\in OD}\left\{\ln n_w\right\}}{\sqrt{2\min_{w\in OD}\left\{\ln n_w\right\}}} \left(\sum_{w\in OD} d_w^2 + 1 \right).$$

Решение x_* часто называют равновесием Нэша(–Вардропа) в описанной выше классической модели равновесного распределения потоков по путям (Beckmann–McGuire–Winsten, 1954). Такая “онлайн” интерпретация этого равновесия, насколько нам известно, приводится впервые.

К аналогичному равновесию можно было прийти и по-другому. Второй подход воспроизводит logit-динамику в соответствующей описанной модели популяционной игре загрузки. Приводимый далее способ рассуждения пополняет аналогичные известные ранее результаты, полученные сразу в непрерывном времени, W. Sandholm, 2010.

Пусть теперь l-й пользователь, принадлежащий корреспонденции $w \in W$, независимо от всех остальных пользователей на шаге $k+1$ с вероятностью $1 - \lambda/N$ выбирает путь $p^{l,k}$, который использовал на шаге $k = 0,\ldots,tN$, а с вероятностью λ/N ($\lambda > 0$) решает изменить путь и выбирает (возможно, тот же самый) зашумленный кратчайший путь

$$p^{l,k+1} = \arg\max_{q\in P_w} \left\{ -G_q\left(x^k\right) + \xi_q^{l,k+1} \right\},$$

$$G_q(x)=\sum_{e\in E}\tau_e\left(f_e(x)\right)\delta_{eq},\ f_e(x)=\sum_{p\in P}\delta_{ep}x_p,\ \delta_{ep}=\begin{cases}1, & e\in p\\ 0, & e\notin p\end{cases};$$

где независимые случайные величины $\xi_q^{l,k+1}$ одинаково распределены

$$P\left(\xi_q^{l,k+1}<\zeta\right)=\exp\left\{-e^{-\zeta/\gamma-E}\right\},\ \gamma>0.$$

Такое распределение обычно называю распределение Гумбеля или двойным экспоненциальным распределением. Возникает оно здесь не случайно, Andersen–de Palma–Thisse, 1992. В математической экономике имеется целое направление Discrete choice theory, которое объясняет использование именно такого распределения. А именно, распределение Гумбеля можно объяснить исходя из идемпотентного аналога центральной предельной теоремы (вместо суммы случайных величин – максимум) для независимых случайных величин с экспоненциальным и более быстро убывающим правым хвостом. Распределение Гумбеля возникает в данном контексте, например, если при принятии решения водитель собирает информацию с большого числа разных (независимых) зашумленных источников, ориентируясь на худшие прогнозы по каждому из путей. Также это распределение удобно тем, что есть явная формула

$$P\left(p^{l,k+1}=p\,\middle|\,\text{агент решил "поменять" путь}\right)=\frac{\exp\left(-G_p\left(x^k\right)/\gamma\right)}{\sum_{q\in P_w}\exp\left(-G_q\left(x^k\right)/\gamma\right)}.$$

Если взять $E\approx 0.5772$ – константа Эйлера, то

$$E\left[\xi_q^{l,k+1}\right]=0,\ D\left[\xi_q^{l,k+1}\right]=\gamma^2\pi^2/6.$$

Пусть $N\to\infty$. Тогда описанная марковская динамика в дискретном времени перейдет в марковскую динамику в непрерывном времени. Если $t\to\infty$, то полученный таким образом марковский процесс в виду эргодичности выйдет на стационарную меру (теорема типа Санова)

$$\sim\exp\left(-\frac{\bar N}{\gamma}\cdot\left(\Psi_\gamma(x)+o_{\bar N}(1)\right)\right),\ \bar N\gg 1,$$

где

$$\Psi_\gamma(x)=\Psi(x)+\gamma\sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}x_p\ln x_p.$$

При $\bar N\to\infty$ эта мера экспоненциально быстро концентрируется в окрестности «стохастического» равновесия (Y. Sheffi, 1985), которое определяется из решения задачи

$$\Psi_\gamma(x)\to\min_{x\in X}. \tag{13}$$

Поскольку $\Psi_\gamma(x)$ – строго выпуклая функция, то стохастическое равновесие всегда единственно.

Отметим, что при $\gamma\to 0+$ описанная выше logit-динамика вырождается в одну из самых популярных и естественных динамик в популяционной теории игр (W. Sandholm, 2010) – динамику наилучших ответов. При этом стохастическое равновесие вырождается в равновесие Нэша(–Вардропа). Если последних равновесий много, то описанный выше предельный переход $\gamma \to 0+$ можно понимать как естественный способ отбора единственного (Е.В. Гасникова, 2012). “Естественный”, потому что связан с естественно интерпретируемой энтропийной регуляризацией.

Приведенная выше трактовка равновесия с точки зрении популяционной теории игр допускает и эволюционную (дарвиновскую) интерпретацию. Если под разными типами корреспонденций понимать разные типы популяций. Под пользователями, использующими внутри заданной корреспонденции–популяции заданный маршрут, понимать заданный вид внутри заданной популяции, то динамика наилучших ответов – это просто естественный отбор (борьба за существование), в результате которого “выживет” такая конфигурация видов, которая максимально приспособлена. Таким образом, равновесие Нэша(–Вардропа) может быть тут также проинтерпретировано, как результат естественного отбора, т.е. как равновесие Дарвина. Причем, поскольку $x_* \in \operatorname{Arg}\min_{x \in X} \Psi(x)$, то имеет место эволюционная оптимальность с функционалом $\Psi(x)$ (В.Н. Разжевайкин, 2012).

К сожалению, хорошо интерпретируемый способ поиска x_* из теоремы 6 не является наиболее подходящим численным методом поиска x_*. Как именно стоит численно искать x_*, описано в следующее главе. В завершении данной главы приведены необходимые и также интерпретируемые выкладки по переформулировки исходной задачи (13), с целью ее последующего численного решения.

Запишем, следуя Ю.Е. Нестерову, 1999 и А.В. Гасникову, 2013, двойственную задачу к задаче (13), используя обозначение $\operatorname{dom} \sigma^*$ – область определения сопряженной к σ функции:

$$\min_{f,x} \left\{ \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e) + \gamma \sum_{w \in OD} \sum_{p \in P_w} x_p \ln(x_p/d_w) :\ f = \Theta x,\ x \in X \right\} =$$

$$= \min_{f,x} \left\{ \sum_{e \in E} \max_{t_e \in \operatorname{dom} \sigma_e^*} \left[f_e t_e - \sigma_e^*(t_e) \right] + \gamma \sum_{w \in OD} \sum_{p \in P_w} x_p \ln(x_p/d_w) :\ f = \Theta x,\ x \in X \right\} =$$

$$= \max_{t \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left\{ \min_{f,x} \left[\sum_{e \in E} f_e t_e + \gamma \sum_{w \in OD} \sum_{p \in P_w} x_p \ln(x_p/d_w) :\ f = \Theta x,\ x \in X \right] - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) \right\} =$$

$$= -\min_{t \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left\{ \gamma \psi(t/\gamma) + \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) \right\}, \qquad (14)$$

где

$$\psi(t) = \sum_{w \in OD} d_w \psi_w(t),\ \psi_w(t) = \ln\left(\sum_{p \in P_w} \exp\left(-\sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e \right) \right),$$

$$f = -\nabla\gamma\psi\left(t/\gamma\right),\ x_p = d_w \frac{\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E}\delta_{ep}t_e\right)}{\sum_{q\in P_w}\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E}\delta_{eq}t_e\right)},\ p\in P_w, \tag{15}$$

для

$$\tau_e\left(f_e\right) = \bar{t}_e\cdot\left(1+\rho\cdot\left(\frac{f_e}{\bar{f}_e}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right),$$

$$\sigma_e^*\left(t_e\right) = \sup_{f_e\ge 0}\left(\left(t_e-\bar{t}_e\right)\cdot f_e - \bar{t}_e\cdot\frac{\mu}{1+\mu}\cdot\rho\cdot\frac{f_e^{1+\frac{1}{\mu}}}{\bar{f}_e^{\frac{1}{\mu}}}\right) = \bar{f}_e\cdot\left(\frac{t_e-\bar{t}_e}{\bar{t}_e\cdot\rho}\right)^{\mu}\frac{\left(t_e-\bar{t}_e\right)}{1+\mu}.$$

В приложениях наиболее популярны BPR-функции, в которых $\mu = 1/4$.

Собственно, формула (15) есть не что иное, как отражение формулы $f = -\nabla\gamma\psi\left(t/\gamma\right)$ и связи $t_e = \tau_e\left(f_e\right)$, $e\in E$. Действительно, по формуле Демьянова–Данскина–Рубинова

$$\frac{d\sigma_e^*\left(t_e\right)}{dt_e} = \frac{d}{dt_e}\max_{f_e\ge 0}\left\{t_e f_e - \int_0^{f_e}\tau_e\left(z\right)dz\right\} = f_e:\ t_e = \tau_e\left(f_e\right).$$

В свою очередь, формула $f = -\nabla\gamma\psi\left(t/\gamma\right)$ может интерпретироваться, как следствие соотношений $f = \Theta x$ и формулы распределения Гиббса (логит-распределения)

$$x_p = d_w \frac{\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E}\delta_{ep}t_e\right)}{\sum_{q\in P_w}\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E}\delta_{eq}t_e\right)},\ p\in P_w.$$

При такой интерпретации связь задачи (15) с логит-динамикой, порождающей стохастические равновесия, наиболее наглядна.

В **Главе 4** базируясь на работе Гасникова–Нестерова, 2016 изложен возможный способ решения двойственной задачи (14), позволяющий при этом восстанавливать решение прямой задачи (13). Новизна заключается в проработке того, как именно следует восстанавливать решение задачи (13).

Рассмотрим общую задачу выпуклой композитной оптимизации (Ю.Е. Нестеров, 2013) на множестве простой структуры

$$F\left(t\right) = \underbrace{\Phi\left(t\right)}_{\gamma\psi\left(t/\gamma\right)} + \underbrace{h\left(t\right)}_{\sum_{e\in E}\sigma_e^*\left(t_e\right)} \to \min_{t\in Q}. \tag{16}$$

Положим $R^2 = \frac{1}{2}\left\| t_* - y^0 \right\|_2^2$, где $y^0 = \overline{t}$, t_* – решение задачи (16), если решение не единственно, то, также как и в главе 1, выбирается то, которое доставляет минимум $\left\| t_* - y^0 \right\|_2^2$.

Пусть

$$\left\| \nabla\Phi(t) - \nabla\Phi(y) \right\|_2 \le L_\nu \left\| t - y \right\|_2^\nu,\ \nu \in [0,1],\ L_0 < \infty, \tag{17}$$

$L_\nu \le \infty$, т.е. допускается равенство бесконечности.

Положим

$$\varphi_0(t) = \alpha_0 \left[\Phi(y^0) + \left\langle \nabla\Phi(y^0), t - y^0 \right\rangle + h(t) \right] + \frac{1}{2}\left\| t - y^0 \right\|_2^2,$$

$$\varphi_{k+1}(t) = \varphi_k(t) + \alpha_{k+1}\left[\Phi(y^{k+1}) + \left\langle \nabla\Phi(y^{k+1}), t - y^{k+1} \right\rangle + h(t) \right],$$

Начнем описание универсального метода подобных треугольников (УМПТ) с самой первой итерации. Положим

$$A_0 = \alpha_0 = 1/L_0^0,\ k = 0,\ j_0 = 0;\ t^0 = u^0 = \arg\min_{t\in Q} \varphi_0(t).$$

До тех пор пока

$$\Phi(t^0) > \Phi(y^0) + \left\langle \nabla\Phi(y^0), t^0 - y^0 \right\rangle + \frac{L_0^{j_0}}{2}\left\| t^0 - y^0 \right\|_2^2 + \frac{\alpha_0}{2A_0}\varepsilon,$$

выполнять

$$j_0 := j_0 + 1;\ L_0^{j_0} := 2^{j_0} L_0^0;\ t^0 := u^0 := \arg\min_{t\in Q}\varphi_0(t),\ (A_0 :=)\alpha_0 := \frac{1}{L_0^{j_0}}.$$

<u>Универсальный Метод Подобных Треугольников</u>

1. $L_{k+1}^0 = L_k^{j_k}/2$, $j_{k+1} = 0$.

2. $$\begin{cases} \alpha_{k+1} := \dfrac{1}{2L_{k+1}^{j_{k+1}}} + \sqrt{\dfrac{1}{4\left(L_{k+1}^{j_{k+1}}\right)^2} + \dfrac{A_k}{L_{k+1}^{j_{k+1}}}},\ A_{k+1} := A_k + \alpha_{k+1}; \\ y^{k+1} := \dfrac{\alpha_{k+1}u^k + A_k t^k}{A_{k+1}},\ u^{k+1} := \arg\min_{t\in Q}\varphi_{k+1}(t),\ t^{k+1} := \dfrac{\alpha_{k+1}u^{k+1} + A_k t^k}{A_{k+1}}. \end{cases} \tag{*}$$

До тех пор пока

$$\Phi(y^{k+1}) + \left\langle \nabla\Phi(y^{k+1}), t^{k+1} - y^{k+1} \right\rangle + \frac{L_{k+1}^{j_{k+1}}}{2}\left\| t^{k+1} - y^{k+1} \right\|_2^2 + \frac{\alpha_{k+1}}{2A_{k+1}}\varepsilon < \Phi(t^{k+1}),$$

выполнять

$$j_{k+1} := j_{k+1} + 1;\ L_{k+1}^{j_{k+1}} = 2^{j_{k+1}} L_{k+1}^0;\ (*).$$

3. $k := k + 1$ и **go to** 1.

УМПТ сходится согласно оценке

$$A_N F\left(t^N\right) \le \min_{t\in Q}\left\{\frac{1}{2}\left\|t-y^0\right\|_2^2 + \sum_{k=0}^{N}\alpha_k\left[\Phi\left(y^k\right) + \left\langle\nabla\Phi\left(y^k\right), t-y^k\right\rangle + h(t)\right]\right\}. \quad (18)$$

Гасниковым–Нестеровым, 2016 было получено, что $A_N \simeq 2R^2/\varepsilon$ при

$$N \approx \inf_{\nu\in[0,1]}\left(\frac{L_\nu\cdot(16R)^{1+\nu}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{1+3\nu}}, \quad (19)$$

т.е. при таком N справедливо неравенство

$$F\left(t^N\right) - \min_{t\in Q} F(t) \le \varepsilon .$$

При этом среднее число вычислений значения функции на одной итерации будет ≈ 4, а градиента функции ≈ 2.

Задачи, получающиеся из (16) при $\mu > 0$ и $\mu \to 0+$, можно не различать по сложности при композитном подходе к ним. В задаче, отвечающей $\mu \to 0+$, сепарабельный композит $h(t)$ проще сепарабельного композита задачи с $\mu > 0$, но зато дополнительно добавляется сепарабельное ограничение простой структуры. В любом случае, основные затраты на каждой итерации при использовании УМПТ в композитном варианте связаны с необходимостью расчета градиента гладкой функции $\Phi(t) = \gamma\psi(t/\gamma)$. Последнее делается за $\mathrm{O}(SHn)$, где $|E| = n$ – число ребер в графе, $|O| = S$ – число источников корреспонденций, с помощью сглаженного варианта алгоритма Форда–Беллмана (Ю.Е. Нестеров, 2007) и быстрого автоматического дифференцирования. В диссертации приведены все необходимые формулы. Здесь же отметим, что константы Гёльдера (см. (17)) градиента $\Phi(t)$ в 2-норме могут быть оценены следующим образом

$$L_1 \le \frac{Hd}{\gamma} \text{ (при } \gamma > 0\text{)}, \quad L_0 \le 2\sqrt{H}d \text{ (при } \gamma \to 0+\text{)},$$

где $d = \sum_{w\in OD} d_w$. Как правило, можно считать, что $H = \mathrm{O}\left(\sqrt{n}\right)$ – диаметр графа с манхетенской структурой, то есть для квадратной решетки с n ребрами.

В данной главе описано, как с помощью формулы (18) восстанавливать решение задачи (13), исходя из последовательности, сгенерированной УМПТ при решении двойственной задачи (16).

Пусть $\mu > 0$, положим (следует сравнить с (15))

$$f^k = -\nabla\gamma\psi\left(y^k/\gamma\right),\ x_p^k = d_w \frac{\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E}\delta_{ep}y_e^k\right)}{\sum_{q\in P_w}\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E}\delta_{eq}y_e^k\right)},\ p\in P_w,\ w\in OD,$$

$$\bar{f}^N = \frac{1}{A_N}\sum_{k=0}^{N} a_k f^k,\ \bar{x}^N = \frac{1}{A_N}\sum_{k=0}^{N}\alpha_k x^k .$$

Положим $\tilde{R}^2 = \frac{1}{2}\sum_{e\in E}\left(\tau_e\left(\bar{f}_e^N\right) - \bar{t}_e\right)^2$, где $\left\{\tau_e\left(\bar{f}_e^N\right)\right\}_{e\in E}$ равно

$$\arg\min_{t\in\mathrm{dom}\,\sigma^*}\left\{\frac{1}{A_N}\left[\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\cdot\left(\gamma\psi\left(y^k/\gamma\right) + \left\langle\nabla\gamma\psi\left(y^k/\gamma\right), t - y^k\right\rangle\right)\right] + \sum_{e\in E}\sigma_e^*\left(t_e\right)\right\}.$$

Из (18) получаем следующую оценку сверху на зазор двойственности

$$\sum_{e\in E}\sigma_e\left(\bar{f}_e^N\right) + \gamma\sum_{w\in OD}\sum_{p\in P_w}x_p^N\ln\left(x_p^N/d_w\right) - \left(\sum_{e\in E}\sigma_e\left(f_e^*\right) + \gamma\sum_{w\in OD}\sum_{p\in P_w}x_p^*\ln\left(x_p^*/d_w\right)\right)\le$$

$$\le\left\{\gamma\psi\left(t^N/\gamma\right) + \sum_{e\in E}\sigma_e^*\left(t_e^N\right)\right\} + \left\{\sum_{e\in E}\sigma_e\left(\bar{f}_e^N\right) + \gamma\sum_{w\in OD}\sum_{p\in P_w}\bar{x}_p^N\ln\left(\bar{x}_p^N/d_w\right)\right\}\le\frac{\tilde{R}^2}{A_N} + \frac{\varepsilon}{2},\qquad(20)$$

где $\left(f^*, x^*\right)$ – решение задачи (13) (прямой задачи в (14)).

На формулу (20) можно смотреть как на критерий останова УМПТ. А именно, ждем когда (вычислимый) зазор двойственности станет меньше ε. Формула (19) (с заменой R на $\tilde{R}$) содержит оценку, на число итераций УМПТ, после которого метод гарантированно остановится по критерию (2-).

Для модели (стохастической) стабильной динамики ($\mu\to 0+$) получаем следующую оценку сверху на зазор двойственности

$$\left\langle\bar{f}^N, \bar{t}\right\rangle + \gamma\sum_{w\in OD}\sum_{p\in P_w}x_p^N\ln\left(x_p^N/d_w\right) - \left(\left\langle f^*, \bar{t}\right\rangle + \gamma\sum_{w\in OD}\sum_{p\in P_w}x_p^*\ln\left(x_p^*/d_w\right)\right)\le$$

$$\le\gamma\psi\left(t^N/\gamma\right) + \left\langle\bar{f}, t^N - \bar{t}\right\rangle + \left\langle\bar{f}^N, \bar{t}\right\rangle + \gamma\sum_{w\in OD}\sum_{p\in P_w}x_p^N\ln\left(x_p^N/d_w\right)\le\frac{5R^2}{A_N} + \frac{\varepsilon}{2},\qquad(21)$$

$$\left\|\left(\bar{f}^N - \bar{f}\right)_+\right\|_2\le\frac{5R}{A_N} + \frac{\varepsilon}{2R},\qquad(22)$$

где $\left(f^*, x^*\right)$ – решение задачи (13) (прямой задачи в (14)).

На формулы (17), (18) можно смотреть как на критерий останова УМПТ. А именно, ждем когда (вычислимые) левые части (21), (22) станут меньше ε. Формула (19) (с заменой R на $\sqrt{5}R$) содержит оценку, на число итераций УМПТ, после которого метод гарантировано остановится по критерию (21), (22).

Далее для краткости будем единым образом обозначать через $\bar{R}$ либо $\tilde{R}$, либо $\sqrt{5}R$. Расшифровывать $\bar{R}$ нужно будет в зависимости от контекста. Если $\mu\to 0+$, то $\bar{R} = \sqrt{5}R$, иначе $\bar{R} = \tilde{R}$.

Теорема 7. *УМПТ с критериями останова (20) ($\mu > 0$) или (21), (22) ($\mu\to 0+$) гарантированно остановится, достигнув желаемой точности ε, сделав количество арифметических операций не больше, чем приведено в соответствующем поле таблицы 3.*

Таблица 3

Время работы	$\gamma > 0$	$\gamma \to 0+$
$\mu \to 0+,\ \mu > 0$ не важно	$O\left(SHn \cdot \sqrt{\frac{Hd\bar{R}^2}{\gamma\varepsilon}}\right)$ (23)	$O\left(Sn\ln n \cdot \frac{Hd^2\bar{R}^2}{\varepsilon^2}\right)$ (24)

Обратим внимание, что оценки (23), (24) не зависят от (потенциально экспоненциально большого) числа путей $|P|$. В частности, $|P| \gg 2^{\sqrt{n}}$, для манхетенских сетей. Также обратим внимание, что оценка (23) весьма чувствительна к предельному переходу $\gamma \to 0+$. Численные эксперименты, проведенные совместно с Д.Р. Баймурзиной по городу Анахайм на данных из https://github.com/bstabler/TransportationNetworks,
показали, что на практике время работы при $\gamma \to 0+$ пропорционально ε^{-1}.

В заключение этой главы отмечается, что популярный на практике метод Франк–Вульфа (M. Patriksson, 1994) применим к рассматриваемым в главах 3, 4 задачам только в случае $\mu > 0,\ \gamma \to 0+$.

В **Заключении** приводятся основные результаты и выводы диссертации. Намечаются направления дальнейшего развития.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. Бабичева Т.С., Гасников А.В., **Лагуновская А.А.,** Мендель М.А. Двухстадийная модель равновесного распределения транспортных потоков // Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 3. С. 31–41.
2. Баяндина А.С., Гасников А.В., Гулиев Ф.Ш., **Лагуновская А.А.** Безградиентные двухточечные методы решения задач стохастической негладкой выпуклой оптимизации при наличии малых шумов не случайной природы // e-print, 2017. URL – https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1701/1701.03821.pdf
3. Баймурзина Д.Р., Гасников А.В., Гасникова Е.В., Двуреченский П.Е., Ершов Е.И., **Лагуновская А.А.** Универсальный метод поиска равновесий и стохастических равновесий в транспортных сетях // e-print, 2017. URL – https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1701/1701.02473.pdf
4. Гасников А.В., **Лагуновская А.А.,** Морозова Л.Э. О связи имитационной логит динамики в популяционной теории игр и метода зеркального спуска в онлайн оптимизации на примере задачи выбора кратчайшего маршрута // Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 4. С. 104–113.
5. Гасников А.В., Гасникова Е.В., Двуреченский П.Е., Ершов Е.И., **Лагуновская А.А.** Поиск стохастических равновесий в транспортных моделях равновесного распределения потоков // Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 4. С. 114–128.
6. Гасников А.В., Крымова Е.А., **Лагуновская А.А.,** Усманова И.Н., Федоренко Ф.А. Стохастическая онлайн оптимизация. Одноточечные и двухточечные нелинейные многорукие бандиты. Выпуклый и сильно выпуклый случаи // Автоматика и телемеханика. 2017. Т. 2. С. 30–46.

7. Гасников А.В., **Лагуновская А.А.,** Усманова И.Н., Федоренко Ф.А. Безградиентные прокс-методы с неточным оракулом для негладких задач выпуклой стохастической оптимизации на симплексе // Автоматика и телемеханика. 2016. Т. 10. С. 57–77
8. Двуреченский П.Е., Гасников А.В., **Лагуновская А.А.** Параллельные алгоритмы и оценки вероятностей больших уклонений в задачах стохастической оптимизации // e-print, 2017. URL – https://arxiv.org/pdf/1701.01830.pdf
9. **Лагуновская А.А.** Алгоритмические модели поведения человека по Ю.Е. Нестерову // Препринт ИПМ РАН им. М.В. Келдыша, 2016.