امیرحسین کاشانی - ۹۴۳۱۰۵۹

۱- $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

۲- آ) مجموعه‌ی روبه‌رو $\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\0\end{bmatrix} , \alpha > 0\right\}$

ب) فضای حاصل از اجتماع دو فضای روبه‌رو $\left\{\begin{bmatrix}3k\\k\end{bmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{bmatrix}2k\\k\end{bmatrix}\right\}$

$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} \rightarrow$ نسبت به جمع بسته نیست

۳-

۱- ابتدا باید بررسی کنیم $1, a-x, (a-x)^2, \dots, (a-x)^{n-1}$ مستقل خطی باشند که

با توجه به اینکه ماکسیمم درجه‌ی متفاوت دارند مستقل خطی اند. و از طرفی

می‌دانیم که فضای P_n دارای n بردار است و ما اکنون n بردار مستقل

خطی از P_n داریم که یک پایه را تشکیل می‌دهند

۳_۳ باید نسبت به جمع بسته باشد

$P_i + P_j \in \text{span}\{P_i , P_j\}$

$\Rightarrow$ زیرفضا $P_n + P_n \in P_n \subset P[x]$

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1}$$

$$c \cdot P_n \in P_n$$

$$c(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1})$$

$$= ca_0 + ca_1 x + ca_2 x^2 + \dots + ca_{n-1}x^{n-1} \in P_n \subset P[x]$$

$P[x]$ نامتناهی البعد است زیرا هر تعدادی برای آن اعلام شود ۱+ آن نیز را می‌توان فرض کرد

۴ -

آ) $Ax \subseteq Bx \quad \Leftarrow Col(A) \subseteq Col(B)$

از اینکه ستون های A ترکیبی خطی از B هستند نتیجه می گیریم که B یک زیر فضا

از A می باشد از آن می توان نتیجه گرفت که $Ax \subseteq Bx$

$\leftarrow Col(A) \subseteq Col(B)$

از طرفی دیگر چند ماتریس پیدا می شوند که پایه های ماتریس B هستند

را به روش های مختلف به A تبدیل کنند (به این صورت که اگر A

دارای بعد n و B دارای بعد q باشد تعداد $\binom{q}{n}$ روش برای

تبدیل B به A وجود دارد.)

$\Leftarrow$ از برگشت پذیری روابط بالا قسمتی حالات اثبات می شود

$$\left.\begin{array}{l} ker(A) \longrightarrow Au = 0 \\ ker(A^2) \longrightarrow AAu = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{if } u \in ker(A)$$

$$\longrightarrow u \in ker(A^2)$$

$$\longrightarrow ker(A) \subseteq ker(A^2)$$

تعریف :

$Ker(A) \Rightarrow Au = 0$

در صورتی که $n > m$ باشد قطعاً مستقل free خواهیم داشت و فضای پوچ ما مخالف صفر می‌شود

۵ - ۲

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \boxed{A} \checkmark$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/5 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/5 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

جواب اصلی همان A می‌باشد

البته A' نیز به درستی در رابطه صدق می‌کند

۶- فرض می کنیم x_1 و x_2 در U باشند

چون T تبدیل خطی است

$$T(x_1)+T(x_2)=T(x_1+x_2) \xrightarrow{\mathrm{I}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1\in U \\ x_2\in U \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زیرفضا}} x_1+x_2\in U \quad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I},\ \mathrm{II} \Rightarrow T(x_1+x_2)\in T(U)$$

- لازم به ذکر است که از ابتدا $T(x_i)\in T(U)$ واضح بوده است

$$\left.\begin{array}{l} T(cx_1)=cT(x_1) \\ x_1\in U \rightarrow cx_1\in U \end{array}\right\} \Rightarrow T(cx_1)\in T(U)$$

در نتیجه $T(U)$ یک زیرفضا از W می باشد

۷ـ۱ (الف)

$$w=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_1+x_2\\x_1-x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}x_1+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه w از دو بردار مستقل بدست آمده .

و نسبت به جمع و ضرب عدد ثابت بسته است w یک زیرفضای باشد از $\mathbb{R}$

ب) با توجه به مستقل خطی بودن دو بردار و اینکه دو بردار همه ی w را span

می کنند در نتیجه $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$ پایه های w هستند

ج)

$$k\times\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}+0\times\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$= kb_1 \in Span\{B_w\}$ یک ترکیب خطی از پایه های w

می باشد

د) می توان نتیجه گرفت که یک زیرفضا از ~~R~~ w می باشد

۸- از آنجایی که ستون های T باید محوری باشند و سطری خالی نیز نداشته باشد پس T ترتیبی می باشد.

فرض کنید که $\{v_1, \dots, v_p\}$ پایه ای برای V باشند آن گاه

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = 0$$ فقط جواب بدیهی دارد

$$\xrightarrow{\text{پس از تبدیل}} \quad \begin{aligned} h_1 &= \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \dots + \alpha_{1p} v_p \\ h_2 &= \alpha_{21} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \dots + \alpha_{2p} v_p \\ &\vdots \\ + \quad h_\beta &= \alpha_{\beta 1} v_1 + \alpha_{\beta 2} v_2 + \dots + \alpha_{\beta p} v_p \end{aligned}$$

$$c'_1 h_1 + c'_2 h_2 + \dots + c'_\beta h_\beta =$$

$$(c'_1 \alpha_{11} + c'_2 \alpha_{12} + \dots) v_1 + \dots + (c'_1 \alpha_{1p} + \dots + c'_p \alpha_{\beta p}) v_p$$

$$= 0$$ که این معادله نیز فقط جواب بدیهی دارد

۹

آ) (۱) خیر

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) - خیر همین دوتا ماتریس بالا $2<5$

ج) خیر همون بالایی ها

۱۰ - ابتدا

اگر $A=xy^t$ باشد

$$\underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}} \underset{1\times n}{\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \cdots & \alpha_1\beta_n \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_n\beta_1 & \alpha_n\beta_2 & \cdots & \alpha_n\beta_n \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس بدست آمده می بینیم بقیه‌ی ستون ها $\frac{\beta_i}{\beta_1}$ برابر ستون اولی هستند

از طرف دیگر اگر رنک ماتریس A یک باشد یعنی پایه‌ی آن یک بردار است و با ضرب کردن β_i های آن سطرها را از روی آن ساخت

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$V = xa_1 + ya_2 + za_3 + ta_4$

$V = (\overbrace{x-t}^{\alpha_1})a_1 + (\overbrace{y-t}^{\alpha_2})a_2 + (\overbrace{z-t}^{\alpha_3})a_3$

می‌دانیم که با توجه به این که a_1, a_2, a_3 بردارهای پایه هستند $\overbrace{x-t}^{\alpha_1}$

و $\overbrace{y-t}^{\alpha_2}$ و $\overbrace{z-t}^{\alpha_3}$ بردارهای یکتا هستند و $-x+y-z=t$

← بردارها به صورت $2x-y-z$، $-x+2y-z$ و $-x-y+2z$

$\alpha_1 = 2x - y - z$

$\alpha_2 = -x + 2y - z$

$\alpha_3 = -x - y + 4z$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & -1/5 & 1/5 \end{vmatrix}$$

α_1 و y و z بدست می‌آید $\longrightarrow$ $\det \neq 0$

که یکتا باشند و t نیز از روی آنها بدست می‌آید

برای تعمیم مانند قبل ادامه می‌دهیم تا به معادله های α_1 و ... α_n برسیم

که به صورت

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

تمام درایه ها ۱- به جز قطر اصلی که ۲ می‌باشد

→ دترمینان آن مخالف صفر می‌شود

به عبارت دیگر می‌توانیم با حل آن به این نتیجه برسیم

$$x_i = \frac{1}{n+1}\left(nV_k - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n\right)$$