جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۸_۹۷

مدرس :دکتر امیر مزلقانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

تمرین پنجم (مقادیر و بردار ویژه، تعامد و کمترین مربعات)

توجه !!!

- سوالات زیر مربوط به فصل پنجم و ششم درس جبر خطی کاربردی با موضوع (مقادیر و بردار ویژه، تعامد و کمترین مربعات)می باشد که شامل ۱۴ سوال تئوری و ۲ سوال شبیه سازی است
- سوالات را به دقت و مطالعه و به صورت خوانا و مرتب بنویسید
- برای قسمت پیاده سازی گزارشی دقیق از عملکرد خود بنویسید.
- نمره ای که سوالات امتیازی دریافت می کنید فقط برای این سری تمرین در نظر گرفته می شود(در صورتی که از بقیه سوالات نمره کامل بگیرید حل سوال امتیازی تغییری در نمره شما ایجاد نمی کند.)
- در صورت وجود هرگونه مشکل یا ابهام در ارتباط با سوالات از طریق

  $ala.spring2019@gmail.com$

  با رعایت مواردی که در قوانین ارسال تمارین آماده است سوال خود را بپرسید.
- پاسخ های خود را در قالب یک فایل zip به صورت الگوی زیر آپلود کنید:

9531000_Lazaros_Christodoulopoulos_HW5.zip

- مهلت ارسال این تمرین ساعت ۲۳:۵۵ روز جمعه ۹۸/۰۳/۱۰ می باشد.

تمارین:

۱. ماتریس مربعی A را درنظر بگیرید که مجموع هر سطر آن برابر s است، نشان دهید s یک مقدار ویژه برای A است. اگر به جای سطر مجموع درایه های ستون های یک ماتریس s باشد گزاره همچنان درست؟ با توجه به گزاره های بالا فرض کنید جمع درایه های ستون یک ماتریس ۱ باشد. فرض کنید که $\lambda \neq 1$ یک مقدار ویژه آن ماتریس باشد و w بردار ویژه متناظر با λ باشد،ثابت کنید که جمع درایه های w برابر صفر است.

۲. برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (نه لزوما متمایز) ثابت کنید:

$$detA = \lambda_1 \cdots \lambda_n \qquad trA = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

۳. گزاره های زیر را ثابت کنید :

(آ) نشان دهید اگر a یک مقدار ویژه ماتریس وارون پذیر A باشد آنگاه $\frac{1}{a}$ مقدار ویژه برای معکوس ماتریس A است.

(ب) نشان دهید اگر $A^2 = 0$ باشد آنگاه تنها مقدار ویژه A صفر است.

(ج) S مقدار ویژه ای از A است اگر و تنها اگر مقدار ویژه ای از A^T باشد.

(د) نشان دهید A و A^T چندجمله ای سرشت نمای یکسان دارند.

۴. گزاره های زیر را ثابت کنید (همه ماتریس های گفته شده مربعی هستند)

(آ) اگر A معکوس پذیر باشد و با B مشابه باشد آنگاه B معکوس پذیر است و معکوس A با معکوس B مشابه است.

(ب) اگر A با B مشابه باشد آنگاه $A^۲$ با $B^۲$ مشابه است.

(ج) اگر B با A و C با A مشابه باشد آنگاه B با C مشابه است.

(د) اگر A یک ماتریس قطری شدنی باشد و B با A مشابه باشد آنگاه B نیز قطری شدنی است.

(ه) اگر A و B مشابه باشند آنگاه رتبه یکسانی دارند.

۵. فرض کنید A یک ماتریس ۲*۲ و حقیقی با یک مقدار ویژه مختلط $a - bi = e$ باشد و بردار متناظر آن به نام v در فضای $C^۲$ تعریف شده باشد

(آ) نشان دهید

$$aRe(v) + bIm(v) = A(Re(v)) \qquad - bRe(v) + aIm(v) = A(Im(v))$$

(ب) اگر P و C به صورت زیر تعریف شوند

$$A = PCP^{-۱} \qquad P = \begin{pmatrix} Re_v & Im_v \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ثابت کنید$AP = PC$

۶. فرض کنید A ماتریس مربعی باشد و $A^۲ = A$ چنین ماتریسی را ماتریس تصویر می نامند نشان دهید مقادیر ویژه یک ماتریس تصویر ۰ یا ۱ است.

۷. می دانیم اگر a, b, c اعداد متمایزی باشند دستگاه زیر جواب ندارد. نشان دهید پاسخ کمترین مربعات دستگاه، صفحه ای است با معادله ی $\chi - ۲y + ۵z = \frac{a+b+c}{۳}$

$$x - ۲y + ۵z = a$$
$$x - ۲y + ۵z = b$$
$$x - ۲y + ۵z = c$$

۸.

(آ) پاسخ کمترین مربعات دو معادله ی $ax = b$ و $cx = d$ را که در آن $(a, c) \neq (۰, ۰)$ بدست آورید.

(ب) n معادله ی $a_j x = b_j$ داده شده اند به طوری که هیچ یک از a_j ها صفر نیست و همچنین $a_۱, \cdots, a_n, b_۱, \cdots, b_n \in \mathbb{C}$. پاسخ مربعات این دستگاه را به دست آورید.

۹. فرض کنید n نقطه با مختصات $(x_۱, y_۱), \cdots, (x_n, y_n)$ داریم و می خواهیم m و b را طوری به دست بیاوریم که خط $y = mx + b$ نزدیک ترین خط به این نقاط باشد. این مسئله را به صورت یک مسئله ی کمترین مربعات بیان کرده و آن را حل کنید.

۱۰.

(آ) اگر بردار z بر بردارهای $u_۱$ و $u_۲$ عمود باشد و $W = span(u_۲, u_۱)$ آنگاه z بر W عمود است.

(ب) برای هر بردار y در زیرفضای W بردار $proj_w y - y$ بر زیرفضای W عمود است.

(ج) اگر بردار y در زیرفضای W باشد آنگاه تصویر متغامد y بر W خود y است.

۱۱. بردار $y = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۸ \\ ۱ \end{pmatrix}$ و بردار $u_۱ = \begin{pmatrix} ۲/۳ \\ ۱/۳ \\ ۲/۳ \end{pmatrix}$ و بردار $u_۲ = \begin{pmatrix} -۲/۳ \\ ۲/۳ \\ ۱/۳ \end{pmatrix}$ و داریم $W = span(u_۲, u_۱)$:

(آ) اگر $U = \begin{pmatrix} u۱ & u۲ \end{pmatrix}$ مقدار $U^T U$ و UU^T را بدست آورید.

(ب) مقدار $proj_w y$ و $y(UU^T)$ را بدست آورید.

۱۲. فرض کنید بردار u ناصفر در فضای R^n است و داریم $L = span(u)$ نشان دهید نگاشت $x \longrightarrow proj_L x$ یک تبدیل خطی است.

۱۳. (امتیازی)فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با مقادیر ویژه متمایز $\lambda_۱, \cdots, \lambda_k$ باشد موارد زیر را ثابت کنید:

۱. بعد فضای ویژه مربوط به λ_k کمتر از تکرر آن است.

۲. ماتریس A قطری شدنی است اگر و فقط اکر بعد فضای ویژه مربوط به λ_k برابر با تکرر آن باشد.

۱۴. (امتیازی)فرض کنید B پایه ای برای فضای برداری V باشد نشان دهید برای هر پایه مثل B برای این فضای برداری می توان ضرب داخلی روی آن تعریف کرد که اعضای آن پایه بر هم عمود باشند.

سوالات برنامه نویسی:

۱. روش های مختلفی برای یافتن تقریبی مقدار ویژه یک ماتریس وجود دارد که یک از آن ها روش های تکرار شونده هستند،در زیر دو روش تکرار شونده برای یافتن تقریبی مقادیر ویژه یک ماتریس ارائه شده است،این دو روش را پیاده سازی کنید و سپس برای یک ماتریس $n \times n$ ، $n > ۲۰$ که درایه های آن اعداد حقیقی رندوم بین صفر و ۱۰ است ،تست کنید.

(آ) روش توانی برای تخمین زدن مقدار ویژه اکیدا غالب:
۱. یک بردار اولیه $x_۰$ که بزرگترین درایه آن ۱ است را انتخاب کن.
۲. برای $k = ۰, ۱, \cdots$ ، Ax_k را محاسبه کن .
فرض کن s_k درایه با بیشترین اندازه در A_k باشد حاصل $x_{k+۱} = \frac{Ax_k}{s_k}$ را محاسبه کن.
۳. برای تقریبا تمام انتخاب های ممکن $x_۰$ مجموعه s_k به مقدار ویژه غالب نزدیک می شود. همچنین مجموعه x_k به بردار ویژه متناسب نزدیک می شود.

(ب) روش توانی معکوس برای تخمین زدن مقدار ویژه اکیدا غالب:
۱. یک تخمین اولیه a که به اندازه کافی به L نزدیک است را انتخاب کن.
۲. یک بردار اولیه $x_۰$ که بزرگترین درایه آن ۱ است را انتخاب کن.
۳. برای $k = ۰, ۱, \cdots$
- $A - aIy_k = x_k$ را برای y_k حل کن.
- فرض کن s_k یک درایه در y_k باشد که اندازه اش بزرگترین مقدار ممکن است.
- $v_k = a + \frac{۱}{s_k}$ را محاسبه کن.
- $x_{k+۱} = \frac{y_k}{s_k}$ را محاسبه کن.

۴. تقریبا برای تمام انتخاب های $x_۰$ مجموعه v_k به مقدار ویژه L از A نزدیک می شود. همچنین مجموعه x_k به بردار ویژه متناظر نزدیک می شود.

۲. برای تخمین میزان تیک آف یک هواپیما مکان هواپیما در هر لحظه از زمان صفر تا ۱۲ برابر است با: ۰ ، ۸.۸، ۹.۲۹، ۶۳.۰، ۱۰۴.۷، ۱۵۹.۱، ۲۲۲.۰، ۲۹۴.۵، ۳۸۰.۴، ۴۷۱.۱، ۵۷۱.۷، ۶۸۶.۸، ۸۰۹.۲

۱) ضرایب کمترین مربعات برای معادله $y = b_۰ + b_۱t + b_۲t^۲$ را بدست آورید.

۲) از قسمت اول مقدار سرعت هواپیما در زمان $t = ۴/۵s$ را تخمین بزنید.