امیرحسین کاشانی - ۹۶۳۱۰۵۹ - تکلیف شماره ی ۲ جبر

۱)

$$B: \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۴ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & -۳ & ۴ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۸ & -۲ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۷ & ۳ & ۱ \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۸ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱۰ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۷ & ۳ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} ۸ & ۳ & ۱ \\ ۱۰ & ۴ & ۱ \\ ۳/۵ & ۱/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

(1-2

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A_1^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

$$A_2 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}}^{A_2^{-1}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

Scanned by CamScanner

ب) ماتریس مورد نظر دارای قطر ۱ (همه‌ی درایه‌های قطری ۱)
و درایه‌ی زیری آن "۱-" می‌باشد.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 1 & & \cdots & & \\ 0 & -1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \\ \vdots & & & & 0 & 0 \\ & & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$A \times B = I$ ؟

اثبات)

• در ابتدا بیان می‌کنیم که بالای قطر اصلی چه در $A \times B$، و چه در $B \times A$ صفر خواهد شد ← زیرا در هر دو ماتریس بالای قطر اصلی کاملاً صفر است

• در $A \times B$، سطرهای زیر قطر اصلی به دلیل ۱ و ۱- در دو عدد آخر سطر A ضرب می‌شوند و جمع آن‌ها صفر می‌شود پس زیر قطر نیز صفر است

• برای قطر اصلی نیز با توجه به اینکه $A_i \times B_i = 1$ می‌شود ~~[illegible]~~ و در ماتریس A درایه‌های بعد از i صفر و در B درایه‌های قبل از B صفر است در نتیجه حاصل $A \times B$ روی قطرش ۱ قرار می‌گیرد

بالای قطر اصلی صفر خواهد بود در $C \times C^{-1}$

روی قطر است ← $[1, 2, 3, \dots, j, 0, 0, 0] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{-1}{j} \\ \frac{-1}{j+1} \end{bmatrix} = 1$

ستون n

زیر قطر اصلی $j > n$

ردیف j

$[1 \ 2 \ 3 \dots j \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n \\ \frac{-1}{n+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow C \times C^{-1} = I$

برای اثبات $C^{-1} \times C$ ← بالای قطر اصلی که صفر است به طور مشابه

روی قطر

$[0, 0, \dots, 0, \frac{-1}{j}, \frac{1}{j}, \dots] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \\ j \\ \vdots \\ j \end{bmatrix} \leftarrow j = 1$

$n < j$

زیر قطر

$[0, 0, 0, \dots, \frac{-1}{j}, \frac{1}{j}, \dots] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n \\ n \\ n \end{bmatrix} = \frac{n}{j} - \frac{n}{j} = 0$

Scanned by CamScanner

(۵

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۶ & ۵ \\ ۴ & ۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۴ & ۴ \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۶ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۲۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۲۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۹ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ & ۶ \\ ۰ & ۴ & ۱ & ۹ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = ۲ \\ x_۳ = ۱ \end{matrix}$$

۶)

آ) می دانیم که اگر دترمینان یک ماتریس صفر شود آن

ماتریس وابسته ی خطی است از طرف دیگر در ضرب ۲ ماتریس

اگر دترمینان آن ها را بخواهیم برابر ضرب دترمینان آن

دو می شود

$|AB| = |A| \times |B| = 0$

AB وابسته ی خطی است

$A + X = CB \longrightarrow X = CB - A$

ب) ~~[illegible]~~

ج) از آنجایی که ماتریس ها ~~[illegible]~~ مربعی هستند

در هنگام ضرب $A \times B$ وقتی قطر اصلی را جمع می کنیم. n^2 ضرب را باهم جمع می کنیم به طوری که هریک از خانه های B به هریک از خانه های A متصل و ضرب می شوند برای مثال در مجموع قطر $A \times B$

$\sum A_{ij} \times B_{ji}$

$B \times A$ مجموع $= \sum B_{ij} \times A_{ij}$

می دانیم با توجه به خواص $\sum$ که دو عبارت بالا برابر اند

د) $trc(\lambda A+B) = \lambda\, trc(A) + trc(B)$

فرض می‌کنیم A و B، $n\times n$ هست

$trc(A)=\alpha$
$trc(B)=\beta$

$$trc(\lambda A+B) = \sum \lambda A_{ii}+B_{ii} = \sum \lambda A_{ii} + \sum B_{ii}$$

$$= \lambda \sum A_{ii} + \sum B_{ii} = \lambda\, trc(A) + trc(B)$$

ه) می‌دانیم که در ضرب $A\times A^T$، درایه‌ی A_{ij} در A^T_{ji} ضرب می‌شود و $A^T_{ji}=A_{ij}$ است.

$$trc(AA^T) = \sum A_{ij}\times A^T_{ji} = \sum A_{ij}\times A_{ij}$$

که اگر این عبارت برابر صفر شود به این معنی است که تمامی A_{ij}ها برابر صفر باشند

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

0

$$= \begin{bmatrix} I + B\cancel{(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}} - B\cancel{(D-CA^{-1}B)^{-1}}CA^{-1} & -B\cancel{(D-CA^{-1}B)^{-1}} + B\cancel{(D-CA^{-1}B)^{-1}} \\ CA^{-1} + CA^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} - D(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -CA^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} + D(D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

0

$-I \times CA^{-1}$

$(D-CA^{-1}B)^{-1} \times (D-CA^{-1}B)$

I

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}+D^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{(A-BD^{-1}C)(A-BD^{-1}C)^{-1}}_{I} & \underbrace{-(A-BD^{-1}C)(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}+BD^{-1}}_{0} \\ \underbrace{C\cancel{(A-BD^{-1}C)}-C\cancel{(A-BD^{-1}C)}^{-1}}_{0} & \underbrace{-C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}+C(A-BD^{-1}C)^{-1}+D\times D^{-1}}_{I} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

9- $L_1U_1 = LU \Rightarrow L_1^{-1}(LU)U^{-1} = L_1^{-1}(L_1U_1)U^{-1}$

$$\Rightarrow (L_1^{-1}L)(UU^{-1}) = (L_1^{-1}L_1)(U_1U^{-1})$$

$$\Rightarrow L_1^{-1}L = U_1U^{-1}$$

از آنجایی که می دانیم L یک ماتریس پایین مثلثی است و U یک ماتریس بالا مثلثی است و L روی قطر اصلی 1 قرار می دهد در نتیجه تنها حالتی که تساوی بالا برقرار است این است $U_1U^{-1} = I$ و $L_1^{-1}L = I$ باشد که در نتیجه خواهیم داشت $L_1 = L$ و $U_1 = U$

Scanned by CamScanner