امیرحسین کاشانی - ۹۶۳۱۰۵۹ - تکلیف ۱ - جبرخطی

۱)

switch

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & 5 \end{bmatrix}$$

echlon

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$u = 1$

$v = 2$

$w = 3$

$z = 4$

تعداد جواب یک عدد می باشد

درایه های محوری

۲) به صورت برداری نمی توان نشان داد

یعنی بردار مورد نظر تهی است

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{36}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

درایه‌های محوری

$$u = 1 \quad v = \frac{29}{7} \quad z = \frac{6}{7}$$

۲-

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{I}$$

$$\begin{array}{c} -a/2 \\ -b/2 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{II}$$

با توجه به I و II چون فرم کاهش یافته ماتریس یکتا است پس این دو نمی‌توانند با هم هم ارزی داشته باشند

۳_۱.

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 4 & 8 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 8-4h & k-8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-h\times\frac{k-8}{8-4h} \\ 0 & 1 & \frac{k-8}{8-4h} \end{bmatrix}$$

- اگر $h=2$ باشد و $k\neq 8$ جواب ندارد
- اگر $h=2$ و $k=8$ باشد بی‌شمار
- و اگر $h\neq 2$ یک جواب دارد

$$\begin{bmatrix} -2 & h & 1 \\ 6 & k & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & h & 1 \\ 0 & 3h+k & +1 \end{bmatrix}$$

- اگر $3h+k=0$ باشد جواب ندارد
- در غیر اینصورت یک جواب دارد

۳_۲.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda+4 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda+4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

اگر $\boxed{\lambda=1}$ باشد ← ستون free خواهیم داشت

۳_۳. ؟

$0 = h = g = d$ $\quad a, e, i \neq 0$

بقیه درایه‌ها هر عددی می‌توانند باشند ⟸ برای مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

۴- با توجه به اینکه معادلات ناسازگار هستند می دانیم

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ h & e & f & g \end{bmatrix}$$

در صورت صفر بودن h و c و f <= g نیز صفر

به طور کلی در صورت صفر بودن بقیه خودش صفر است

می شود که در این حالت وجود ستون free حتمی است. (همچنین برای حالتی که a و b و c صفر باشند)

در بقیه ی شرایط ما کسیم به تعداد سطرها ستون محوری داریم و با توجه به اینکه تعداد سطرها کمتر از تعداد ستون ها است <= قطعاً ستون free خواهیم داشت <= بی نهایت جواب داریم

ب - دستگاه فرامعین می تواند سازگار باشد

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۵- از برهان خلف استفاده می‌کنیم: اگر $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ و $\{V_1, V_1+V_2, \ldots\}$ مستقل خطی نباشد

آن‌گاه $c_1V_1 + c_2(V_1+V_2) + \ldots + c_n(V_1+V_2+\ldots+V_n) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{(c_1+c_2+\ldots+c_n)}_{k_1} V_1 + \underbrace{(c_2+c_3+\ldots+c_n)}_{k_2} V_2 + \ldots + c_n V_n = 0$$

$$\Rightarrow k_1V_1 + k_2V_2 + \ldots + k_nV_n = 0$$

به تناقض رسیدیم، در صورتی که $\{V_1, V_1+V_2, \ldots, V_1+V_2+\ldots+V_n\}$ مستقل خطی نباشد.

$\{V_1, V_1+V_2, V_1+\ldots+V_n\} \xLeftarrow{\text{برهان خلف}}$ مستقل خطی می‌باشد $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$

مستقل خطی هستند.

برای n های فرد فرض می‌کنیم مستقل خطی نیست

برهان خلف: $k_1(V_1+V_2) + k_2(V_2+V_3) + \ldots + k_n(V_n+V_1) = 0$

$$\underbrace{(k_1+k_n)}_{c_1} V_1 + \underbrace{(k_2+k_1)}_{c_2} V_2 + \ldots + \underbrace{(k_n+k_{n-1})}_{c_n} V_n = 0$$

به تناقض می‌رسیم، اینکه $V_1, \ldots, V_n$ مستقل خطی نیستند.

∴ اثبات می‌شود که $V_1+V_2, \ldots, V_n+V_{n-1}$ مستقل خطی است

مثال نقض برای n های فرد ←

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(V_1 + V_2) - (V_2 + V_3) + (V_3 + V_4) - (V_4 + V_1) = 0$$

عکس حکم اول: برقرار است به صورت استقرایی اثبات می کنیم اگر $n-1$ بردار قبلی مستقل باشند بردار جدید نیز در معادله‌ی روبه‌رو جواب نخواهد داشت

$$C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_{n-1} V_{n-1} = K V_n$$

پس مستقل خطی است

Subject
Date

۶-

۶-۱ خیر - $V_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ و $V_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ و $V_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ← V_1 و V_2 برحسب تقیید بدست می‌آیند

۶-۲. بله این به این معنی است که echlon بدست آمده ماتریس افزوده دارای سطری نیست که در آن همه‌ی درایه به جز خانه‌ی آخر صفر باشند (البته با فرض اینکه خانه آخر ردیف نباشد)

۶-۳ بله - با توجه به اینکه $Ax=b$ جواب یکتا دارد تمام ستون‌های آن محوری است

در نتیجه به ازای هر b جواب دارد و کل فضای $\mathbb{R}$ را تولید می‌کند

۶-۴ - بله چون داریم که برای معادله‌ی $c_1S_1+c_2S_2+\dots+c_nS_n=cV$

فقط جواب بدیهی داریم پس معادله‌ی $cV+c_1S_1+c_2S_2+\dots+c_nS_n=0$

نیز فقط یک جواب که همان جواب بدیهی را دارد و مستقل خطی است

۶-۵ - خیر $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

۶-۶ - بله - چون ستون free ندارد

۶-۷ - خیر - شرط دوطرفه نمی‌تواند باشد برای مثال اگر $T=\begin{bmatrix}7&0\\9&9\end{bmatrix}=0$

باشد همه را روی هم تصویر می‌کند؟

PAPCO

۸_۹. خیر، زیرا فقط حالت اشلون کاهش یافته‌ی آنها با هم یکی است و لزومی به یکی بودن S_1 و S_2 نیست

$$S_2 = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \quad v_1 \quad \cdots \quad v_n \\ n\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \right. \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

۷ـ می‌دانیم در صورتی که تعداد معادلات در فضای R^n از n بیشتر شود دیگر مجموعه مستقل خطی نیست زیرا در آن ستون free به وجود می‌آید.

(در صورتی که ماتریس نشان داده شده فقط یک جواب داشته باشد مستقل خطی است.)

حالت اگر $n \geq 3$ باشد آن گاه تعداد بردارهای به وجود آمده همواره از n (بعد فضا) بیشتر بوده و وابستگی خطی است

برای $n=3$ ← سه بردار $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ بدست می‌آید که به $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ تبدیل می‌شود و مستقل خطی است

برای $n=2$ ← $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ← یک بردار است و مستقل خطی است

برای $n=1$ ← به انتفاع موضوع برقرار است (برداری ندارد)

ubject
ate

۸-۱.

$$\begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باید ۳ ستون محوری داشته باشیم

$a \neq 0$ و $c \neq 0$ و $f \neq 0$ و بقیه ی هر عددی می توانند باشند

۸-۲. همه ی متغیر ها هر عددی می توانند باشند. چون بردارها مستقل خطی هستند

۱۰ـ الف) نیست

$$f(2x,2y) = \left(\frac{\tan(2x)}{\tan(3x)} + 9x, 4y\right)$$

$$\neq \left(2\times\left(\frac{\tan x}{\tan x} + 3x\right), 2\times 2y\right) = (2+9x, 4y)$$

درصورتی که "+" درصورت سؤال "و" باشد تبدیل خطی نیست اثبات در پایین آمده

ب) تبدیل خطی هست

$$f(cx,cy) = (2cx+cy, -cy) = c\times(2x+y, -y)$$

$$f(x_1+x_2, y_1+y_2) = \left(2(x_1+x_2)+(y_1+y_2), -(y_1+y_2)\right)$$

$$f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2) = (2x_1+y_1, -y_1)+(2x_2+y_2, -y_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1+x_2, y_1+y_2) = f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)$$

ج) در مورد f

$$f(cv_1, cv_2) = \left(\frac{c(v_1+v_2)}{2}, \frac{c(v_1+v_2)}{2}\right)$$

$$= c\left(\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}\right) = c\,f(v_1,v_2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$f(v_1+u_1, v_2+u_2) = \left(\frac{v_1+u_1+v_2+u_2}{2}, \frac{v_1+u_1+v_2+u_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{v_1+v_2}{2}+\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}+\frac{u_1+u_2}{2}\right) = f(v_1,v_2)+f(u_1,u_2)$$

★ درصورتی که بخش الف از $R^1 \longrightarrow IR^3$ باشد:

$$f(cx,cy) = (1, 3cx, 2cy) \neq c\,f(x,y)$$

Scanned by CamScanner