امیرحسین کاشانی - ۹۴۳۱۰۵۹ ۳

تکلیف شماره ی ۳:

۱- الف)

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ XA & XB+Y \end{bmatrix}$$

$$XA = C \rightarrow \underline{X = CA^{-1}}$$

$$XB + Y = D \rightarrow CA^{-1}B + Y = D \rightarrow \underline{Y = (D - CA^{-1}B)}$$

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \times \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

چون U هست

$$= 1 \times \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \det A \times \det Y$$

$$= \det A \,.\, \det(D - CA^{-1}B)$$

ب)

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = 1 \times \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

$$= \det(AY) = A \times (D - CA^{-1}B) = AD - ACA^{-1}B$$

$$= AD - CAA^{-1}B = AD - CB$$

۲) <= برای محاسبه ی دترمینان از عملیات های سطری استفاده می کنیم تا ماتریس به صورت قطری یا بالامثلثی درآید

الف) $\det \begin{bmatrix} A_{n\times n} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ ، می دانیم که بعد از خانه $n\times n$ خانه های روی قطر اصلی یک هستند و خود $A_{n\times n}$ را به صورت ~~[illegible]~~ بالامثلثی درمی آوریم

نتیجه به صورت روبه رو می شود

$$\begin{bmatrix} [\text{قطری } A_{n\times n}] & \vdots & \vdots \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & 1 & 0 \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در نتیجه

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det A$$

ب) $\det\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ ، از آنجا که جمع کردن سطرهای یک ماتریس

با ضریب سطرهای دیگر روی دترمینان تأثیری ندارد. پس تا الان

داریم $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ که با توجه به بخش قبل $\det\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$

برابر با $\det(D)$ است

$$\det\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det(D)$$

ج) $\det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ ← ابتدا A را به صورت پلکانی در می‌آوریم

به این حالت می‌رسیم $\begin{bmatrix} A_{\text{پلکانی}} & B'_{\text{جدید}} \\ 0 & D \end{bmatrix}$ ← سپس D را به صورت

پلکانی در می‌آوریم در آخر $\begin{bmatrix} A_{\text{پلکانی}} & B'_{\text{جدید}} \\ 0 & D_{\text{پلکانی}} \end{bmatrix}$ دترمینان

حاصل ضرب قطر A در قطر D است که همان

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det(A) \times \det(D)$$

۳_ الف)

$\square\ adj(A) = C^T \qquad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$\rightarrow (adj(A))^T = C \qquad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$\square\ adj(A^T) = C'^T \qquad C'_{ij} = (-1)^{i+j} M'_{ij}$

$\rightarrow C'^T_{ij} = (-1)^{i+j} M'_{ji}$

از آنجایی که دترمینان A و A^T و هر ماتریس با ترانهاده‌اش برابر است

و ماتریس به جا مانده از حذف سطر i و ستون j از ماتریس A ترانهاده‌ی

ماتریس به جا مانده از حذف سطر j و ستون i از ماتریس A^T است

در نتیجه $\Leftarrow C = C'^T \Leftarrow adj(A)^T = adj(A^T)$

ب) فرض می‌کنیم $\det(A) \neq 0$ باشد می‌دانیم $A \times adj(A) = \det(A) \times I$

$\Leftarrow$ $\det(adj\, A) \neq 0$

حال فرض می‌کنیم $\det(adj\, A) \neq 0$ $\leftarrow$ $A \cdot adj(A) = \det(A) \times I$

اگر در این حالت $\det(A) = 0$ باشد، $A = 0$ می‌شود (که در این حالت

همه جز واضح صفرها" است $\det(adj\, A) = 0$) در غیر اینصورت $\det(A) \neq 0$

است که در مجموع به یک رابطه دو طرفه می‌رسیم iff که.

اگر $\det(A) = 0$ $\leftarrow$ $\det(adj(A)) = 0$

ج) می‌دانیم $A \times Adj(A) = \det(A) \times I$

از دو طرف دترمینان می‌گیریم

$$|A| \times |adj(A)| = |A|^n$$

$$\longrightarrow |adj(A)| = |A|^{n-1}$$

د) $\left.\begin{array}{l} A^{-1} \times \det(A) = adj(A) \\ B^{-1} \times \det(B) = adj(B) \end{array}\right\} \Rightarrow B^{-1}A^{-1} \times \overbrace{\det(A) \times \det(B)}^{\det(AB)} = adj(B) \times adj(A)$ I

II $adj(AB) = B^{-1}A^{-1} \times \det(AB)$

$\Rightarrow$ I و II $adj(AB) = adj(B) \times adj(A)$

$$|Adj(Adj(A))| = |Adj(A)|^{n-1} = |A|^{(n-1)(n-1)}$$ (۵-۳

$$|A|^{(n-1)^2}$$

(۴

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & -\frac{c-a}{b-a}\times b^2-a^2+c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

$$\det = (b-a)\times(c^2-a^2-(c-a)(b+a))$$

$$= (b-a)(c^2-\cancel{a^2}-cb-ca+ab+\cancel{a^2})$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

۵) ماتریس A را با استفاده از کاهش سطری به شکل روبه‌رو در می‌آوریم

$$A = \begin{bmatrix} \pm 1 & B \\ 0 & \\ \vdots & X \\ 0 & \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که ماتریس X از آرایه ۰ یا ۲ یا ۲- تشکیل شده است پس می‌توانیم:

$$X = 2C \rightarrow |X| = 2^{n-1}|C|$$

$$\Rightarrow |A| = \pm 1 \times 2^{n-1} \times |C|$$

۶)

الف)

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} ax_1 = z_1 &\rightarrow x_1 = \frac{z_1}{a} \\ &\rightarrow x_2 = \frac{z_2}{b} \\ & x_3 = \frac{z_3}{c} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1$$

۲- با استفاده از دترمینان

$$|abc| \times \frac{4\pi}{3} = \frac{4(|abc|)\pi}{3}$$