دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۸ـ۹۷

مدرس :دکتر امیر مزلقانی

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

---

تمرین چهارم (فضای برداری)

---

توجه !!!

- سوالات زیر مربوط به فصل چهارم درس جبر خطی کاربردی با موضوع (فضای برداری )می باشد که شامل ۱۴ سوال تئوری و ۲ سوال شبیه سازی است
- سوالات را به دقت و مطالعه و به صورت خوانا و مرتب بنویسید
- برای قسمت پیاده سازی گزارشی دقیق از عملکرد خود بنویسید.
- نمره ای که سوالات امتیازی دریافت می کنید فقط برای این سری تمرین در نظر گرفته می شود(در صورتی که از بقیه سوالات نمره کامل بگیرید حل سوال امتیازی تغییری در نمره شما ایجاد نمی کند.)
- در صورت وجود هرگونه مشکل یا ابهام در ارتباط با سوالات از طریق

*ala.spring*2019*@gmail.com*

با رعایت مواردی که در قوانین ارسال تمارین آماده است سوال خود را بپرسید.

- پاسخ های خود را در قالب یک فایل zip به صورت الگوی زیر آپلود کنید:

9531000_Steve_ McManaman_HW4.zip

- مهلت ارسال تمرینات تئوری ساعت (۲۳:۵۵ روز جمعه ۹۸/۰۲/۱۸) و مهلت ارسال تمرینات عملی ساعت (۲۳:۵۵ روز جمعه ۹۸/۰۲/۲۵) می باشد.

تمارین:

۱. سه بردار وابسته خطی بیابید که دو به دو مستقل خطی باشند

۲. فضای $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید زیرمجموعه ای از این فضا را مثال بزنید که :

(آ) تحت ضرب عدد ثابت بسته نباشد اما تحت جمع بسته باشد .

(ب) تحت جمع بسته نباشد اما تحت ضرب عدد ثابت بسته باشد .

۳. تمامی چند جمله های حداکثر از درجه $n$ با ضرایب حقیقی را با نماد $\mathbb{P}_n[x]$ نشان می دهیم و همچنین مجموعه تمام چند جمله ها با ضرایب حقیقی را با $\mathbb{P}[x]$ نشان می دهیم

۱. نشان دهید اگر $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ یک پایه برای $\mathbb{P}_n[x]$ باشد ، $\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}\}$ نیز یک پایه برای آن است .

۲. مختصات $f(x)=a_{۰}+a_{۱}x+\ +a_{n-۱}x^{n-۱}$ را تحت $\{۱,(x-a),(x-a)۲,,(x-a)^{n-۱}\}$ بیابید .

۳. نشان دهید $\mathbb{P}_n[x]$ یک زیر فضای $\mathbb{P}[x]$ است . آیا $\mathbb{P}[x]$ فضای متنهای البعد است ؟ توضیح دهید .

۴. $A$ یک ماتریس $m\times n$ و B یک ماتریس $m\times q$ است. نشان دهید که جملات زیر هم ارز یکدیگرند :

(آ) $Col(A)\subseteq Col(B)$

(ب) ستون های $A$ ترکیب خطی از ستون های $B$ هستند.

(ج) $A=BC$ برای برخی ماتریس های $C_{q\times p}$

همچنین نشان دهید $ker(A)\subseteq ker(A^{۲})$ وبرای ماتریس $m\times n$ ، $A$ اگر $m<n$ باشد آنگاه $ker(A)\neq ۰$.

۵. $A$ را به گونه ای بیابید که مجموعه داده شده زیر همان $Col(A)$ باشد.

$$\left\{\begin{bmatrix}۲s+۳t\\ r+s-۲t\\ r+s-۲t\\ ۴r+s\\ ۳r-s-t\end{bmatrix} : r,s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

۶. تبدیل خطی $T:V\rightarrow W$ را داریم.($V$ و$W$ فضای برداری هستند) $U$ یک زیر فضااز $V$ است که $T(U)$ بیانگر مجموعه تصاویر $T(X)$ است که $x$ در $U$ می باشد. نشان دهید که $T(U)$ یک زیر فضا از $W$ است .

۷. فرض کنید $W=\left\{\begin{bmatrix}x_{۱}\\ x_{۲}\\ x_{۳}\\ x_{۴}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{۴}|x_{۳}=x_{۱}+x_{۲},x_{۴}=x_{۱}-x_{۲}\right\}$

(آ) ثابت کنید$W$زیر فضایی از $\mathbb{R}$ است .

(ب) پایه ای برای$W$بیابید. بعد$W$ چیست.

(ج) ثابت کنید $\{k(۱,۰,۱,۱)^t|k\in\mathbb{R}\}$ زیر فضایی از$W$است .

۸. ثابت کنید هر تبدیل خطی یک به یک پوشا به شکل $T:V\rightarrow W$ هر پایه در $V$ را به پایه اي در $W$ می نگارد.

۹. درستی یا نادرستی گزاره هاي زیر را مشخص کنید. A،B نشان دهنده ماتریس و r(A) نشان دهنده رنک ماتریس A است :

(آ) اگر $r(A)=r(B)$آن گاه $r(A^{۲})=r(B^{۲})$

(ب) $r(A-B)\leq r(A)-r(B)$

(ج) اگر $r(AB)=۰$ آنگاه $r(A)=۰$ یا $r(B)=۰$

۱۰. نشان دهید ماتریس دارای رتبه ۱ است اگر و تنها اگر را بتوان به صورت $A=xy^t$ نوشت به طوری که $x$و $y$ بردارهای ستونی باشند. (شرط دو طرفه است و هر دو طرف باید ثابت شود).

۱۱. فرض کنید $\{a_{۱},a_{۲},...,a_n\}$ پایه‌های فضای برداری با بعد باشند. نشان دهید $\{\lambda_{۱}a_{۱},\lambda_{۲}a_{۲},...,\lambda_na_n\}$ نیز به ازای اعداد غیر صفر $\{\lambda_{۱},\lambda_{۲},...,\lambda_n\}$ پایه‌هایی برای فضای برداری هستند. اگر مختصات بردار تحت پایه‌های

$\{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$ برابر با $x = \{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$ مختصات آن تحت پایه‌های $\{\lambda_۱ a_۱, \lambda_۲ a_۲, ..., \lambda_n a_n\}$ چه خواهد بود؟
مختصات بردار $w = a_۱ + a_۲ + ... + a_n$ تحت پایه‌های $\{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$ و $\{\lambda_۱ a_۱, \lambda_۲ a_۲, ..., \lambda_n a_n\}$ چه خواهد بود؟

۱۲. فرض کنید $\{a_۱, a_۲, a_۳\}$ پایه‌هایی برای فضای برداری $R^۳$ باشند و $a_۴ = -a_۱ - a_۲ - a_۳$ نشان دهید می‌توان همه‌ی بردارهای در $\mathbb{R}^۳$ را به فرم $v = xa_۱ + ya_۲ + za_۳ + ta_۴$ نوشت به طوری که $x, y, z, t$ اعداد حقیقی متفاوت هستند و $x + y + z + t = ۰$ حالا جواب خود را برای فضای برداری $R^n$ تعمیم دهید.(فضای برداری بعدی)

۱۳. (امتیازی) فرض کنید $W_۱, W_۲$ زیر فضا های فضای برداری $V$ باشند، تعریف می کنیم :

$$W_۱ + W_۲ = \{w_۱ + w_۲ | w_۱ \in W_۱, w_۲ \in W_۲\}$$

.

۱. نشان دهید :

$$W_۱ + W_۲ + \cdots + W_n = span(\bigcup_{i=۱}^{n} W_i)$$

۲. نشان دهید $W_۱ \cap W_۲, W_۱ + W_۲$ زیر فضای $V$ هستند و همچنین نشان دهید:

$$W_۱ \cap W_۲ \subseteq W_۱ \cup W_۲ \subseteq W_۱ + W_۲$$

.

۳. نشان دهید :

$$dim(W_۱ + W_۲) = dim(W_۱) + dim(W_۲) - dim(W_۱ \cap W_۲)$$

.

۴. نتیجه گیری قسمت ۲ را با استفاده از دو خط که از مبدا مختصات $xy$ می گذرند توجیه کنید.

۵. درستی یا نادرستی تساوی زیر را بررسی کنید در صورت درست بودن اثبات و در صورت نادرست بودن مثال نقض بزنید:

$$W_۳ \cap (W_۱ + W_۲) = (W_۳ \cap W_۱) + (W_۳ \cap W_۲)$$

.

۶. اگر $W_۱ \cap W_۲ = \{۰\}$ باشد آنگاه به $W_۱ + W_۲$ جمع مستقیم نیز می گویند و آن را با $W_۱ \bigoplus W_۲$ نشان می دهند،ثابت کنید اگر $V_۱$ زیر فضایی از فضای برداری $V$ باشد و اگر زیر فضای برداری یکتای $V_۲$ موجود باشد که $V = V_۱ \bigoplus V_۲$ آنگاه $V_۱ = V$.

۱۴. (امتیازی) فرض کنید V فضای برداری و متناهی بعد باشد و $V_۱$ و $V_۲$ زیرفضاهایی از V باشند. اگر $dim(V_۱ + V_۲) = dim(V_۱ \cap V_۲) + ۱$ ، ثابت کنید $V_۱ + V_۲$ یا$V_۱$ است یا $V_۲$ و همین طور $V_۱ \cap V_۲$ یا $V_۱$ است یا $V_۲$. به طور معادل، اگر $V_۱$و$V_۲$ زیرفضا باشند و اگر هیچ کدام دیگری را دربر نداشته باشد، آنگاه:

$$dim(V_۱ + V_۲) \geq dim(V_۱ \cap V_۲) + ۱$$

تمرین شبیه سازی و برنامه نویسی:
۱۵.

۱. پایه‌های فضای پوچ A را بدست آورید.

۲. پایه‌های فضای سطری A را بدست آورید.

۳. پایه‌های فضای ستونی A را بدست آورید به طوری که از بردارهای ستون‌های A تشکیل شده باشد.

۴. به ازای هر ستونی از ماتریس که در قسمت ۳ بدست نیامده، نشان دهید حاصل چه ترکیب خطی از بردارهای پایه فضای ستونی A است.(یعنی اگر $v-1$ ها بردارهای پایه فضای ستونی A باشند و $k = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ بردار های پایه به‌دست آمده در هر قسمت را، در سطر های جدا چاپ کنید.)

۱۶. مفهوم rank در طراحی سیستم های کنترلی مانند سیستم شاتل های فضایی نقش مهمی دارد.یک نمونه از سیستم های کنترلی که برای مدل کردن وضعیت فضا استفاده می شود به شرح زیر است.

$$x_(k+1) = Ax_k + Bu_k \quad for \quad k = 0, 1, \ldots$$

که $A$ یک ماتریس $n \times n$ و $B$ یک ماتریس $n \times m$ است و $\{x_k\}$ دنباله ای از بردارهای وضعیت در $R^n$ است که وضعیت سیستم را در زمان های گسسته نشان می دهد.و $\{u_k\}$ دنباله ای از ورودی ها است. اگر جفت ماتریس $(A, B)$ قابل کنترل باشند آنگاه سیستم قابل کنترل است. یعنی از وضعیت ۰ به هروضعیتی در $R^n$ با حداکثر n مرحله می توان آن را برد.
تعریف : به جفت ماتریس (A،B) قابل کنترل گفته می شود اگر

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

باشد.
سوال: با استفاده از متلب بررسی کنید آیا جفت ماتریس زیر قابل کنترل هستند یا خیر.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -13 & -12/3 & -1/5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$