



جبر خطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۸-۹۷

مدرس: دکتر امیر مزلقانی



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

تمرین سوم (دترمینان)

توجه !!!

- سوالات زیر مربوط به فصل سوم درس جبر خطی کاربردی با موضوع (دترمینان) می باشد که شامل ۸ سوال تئوری و ۱ سوال شبیه سازی است
- سوالات را به دقت و مطالعه و به صورت خوانا و مرتب بنویسید
- برای قسمت پیاده سازی گزارشی دقیق از عملکرد خود بنویسید.
- نمره ای که سوالات امتیازی دریافت می کنید فقط برای این سری تمرین در نظر گرفته می شود (در صورتی که از بقیه سوالات نمره کامل بگیرید حل سوال امتیازی تغییری در نمره شما ایجاد نمی کند).
- در صورت وجود هرگونه مشکل یا ابهام در ارتباط با سوالات از طریق

ala.spring2019@gmail.com

با رعایت مواردی که در قوانین ارسال تمرین آماده است سوال خود را بپرسید.

- پاسخ های خود را در قالب یک فایل zip به صورت الگوی زیر آپلود کنید:
9531000_Claude_Makélélé_HW3.zip
- مهلت ارسال این تمرین ساعت ۲۳:۵۵ روز شنبه ۹۸/۰۱/۲۴ می باشد.

تمرین:

۱. فرض کنید ماتریس های A, B, C, D, I ماتریس های $n \times n$ باشند و A معکوس پذیر است. الف) ماتریس های X و Y را بگونه ای پیدا کنید که ماتریس زیر، تجزیه ی LU باشد:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

و سپس نشان دهید:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = (\det A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

ب) نشان دهید اگر $AC = CA$ آنگاه:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB)$$

۲. فرض کنید A, B, C, D و I ماتریس های $n \times n$ باشند. با استفاده از تعاریف و خواص دترمینان فرمول های زیر را ثابت کنید:

(آ)

$$\det \begin{bmatrix} A & \cdot \\ \cdot & I \end{bmatrix} = \det A$$

(ب)

$$\det \begin{bmatrix} I & \cdot \\ C & D \end{bmatrix} = \det D$$

(ج)

$$\det \begin{bmatrix} A & \cdot \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det D = \det \begin{bmatrix} A & B \\ \cdot & D \end{bmatrix}$$

۳. هریک گزاره های زیر را با فرض هم اندازه و مربعی بودن A, B ثابت کنید:

$$(adj(A))^T = adj(A^T) \quad (\bar{آ})$$

(ب) اگر A منفرد باشد آنگاه $adj(A)$ نیز منفرد است.

$$|adj(A)| = |A|^{n-1} \quad (\text{ج})$$

$$adj(BA) = adj(B)adj(A) \quad (\text{د})$$

$$|adj(adj(A))| = |A|^{(n-1)^2} \quad (\text{ه})$$

۴. با استفاده از عملیات های سطری ثابت کنید:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

۵. فرض کنید $A_{n \times n}$ یک ماتریس $n \times n$ باشد با درایه های ± 1 نشان دهید که $\det(A)$ بخش پذیر است بر 2^{n-1} ؟

۶. فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک تبدیل خطی با ماتریس $\begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}$ باشد که a, b, c مقادیری مثبت باشند، S را

کره واحد در نظر بگیرید که سطح آن با معادله $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ محدود شده است،

۱. نشان دهید $T(S)$ با بیضی به معادله $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ محدود شده است.

۲. با این فرض که حجم کره واحد $4\pi/3$ است حجم بیضی مطرح شده در قسمت ۱ را بیابید.

۷. (امتیازی) علی و ولی در دو شهر مجاور یکدیگر زندگی می کنند، شهری که علی در آن زندگی می کند دچار سیل شده است و آب همه جای شهر را فرا گرفته است، دریچه ای در وسط این دو شهر قرار دارد که در صورت باز شدن تمامی آب شهر علی وارد شهر ولی می شود این دریچه به یک کامپیوتر وصل است، طرز کار این کامپیوتر به گونه ای است که ماتریسی 1398×1398 بر روی آن در نظر گرفته شده است زمانی که دترمینان ماتریس ناصفر باشد دریچه باز می شود و در غیر اینصورت دریچه بسته می ماند، علی و ولی هرکدام به عنوان نماینده شهرشان وظیفه دارند تلاش کنند تا شهر خود را از سیل برهانند برای این کار هرکدام به نوبت باید یک درایه خالی این ماتریس را پر کنند (در ابتدا ماتریس خالی

است) و در نهایت کامپیوتر بر اساس دترمینان ماتریس کامل پر شده تصمیم به باز و بسته کردن دریچه می کند. روشی برای پرکردن ماتریس توسط ولی ارائه دهید تا شهر خود را از سیل مصون نگه دارد.

۸. (امتیازی) فرض کنید $f(x) = (p_1 - x)(p_2 - x) \dots (p_n - x)$ و همچنین:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p_1 & a & a & a & \dots & a & a \\ b & p_2 & a & a & \dots & a & a \\ b & b & p_3 & a & \dots & a & a \\ b & b & b & p_4 & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \dots & p_{n-1} & a \\ b & b & b & b & \dots & b & p_n \end{vmatrix}$$

الف) نشان دهید اگر $a \neq b$ آنگاه:

$$\Delta_n = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

ب) نشان دهید اگر $a = b$ آنگاه:

$$\Delta_n = a \sum_{i=1}^n f_i(a) + p_n f_n(a)$$

که $f_i(a)$ یعنی $f(a)$ بدون عامل $(p_i - a)$

تمرین شبیه سازی و برنامه نویسی: در مورد ماتریس *Toeplitz* تحقیق کنید و تابعی طراحی کنید که دو بردار c و r (هم اندازه) را گرفته سپس یک ماتریس *Toeplitz* با این بردار ها بسازد، آن را با اعمال سطری مقدماتی به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل کند و سپس دترمینان آن را محاسبه و برگرداند. (توجه: استفاده از توابع آماده چه در ساخت ماتریس و چه در محاسبه دترمینان مجاز نیست. جابه جایی سطرها دترمینان ماتریس را تغییر می دهد.) راهنمایی: ماتریس *Toeplitz* به فرم زیر است:

$$\begin{bmatrix} c_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \dots & r_n \\ c_2 & c_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-1} \\ c_3 & c_2 & c_1 & r_2 & \dots & r_{n-2} \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & \dots & r_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots & c_1 \end{bmatrix}$$