第十二节 · 计数过程

司继春

上海对外经贸大学统计与信息学院

计数过程，特别是泊松过程是非常常用的一类随机过程，特别是在排队论以及金融市场建模中都有大量应用。如果用随机变量 N_t 表示知道 t 时刻已经发生的事件总数，那么随机过程 $\{N_t, t \geq 0\}$ 称为计数过程。计数过程必须满足：

1. $N_t \geq 0$
2. N_t 为整数值
3. 如果 $s < t$，那么 $N_s \leq N_t$
4. 如果 $s < t$，$N_t - N_s$ 为区间 $(s, t]$ 内的事件数

本节将主要介绍泊松过程，并对一般的更新过程做简要介绍。

1 泊松过程

1.1 泊松过程的性质

在上一节中，我们已经定义了泊松过程，即如果 N_t 具有独立、平稳增量性，$N_0 = 0$ 且 $N_t \sim P(\lambda t)$，那么我们称 $\{N_t, t \geq 0\}$ 为泊松过程。实际上，我们还可以给出泊松过程的另外一个定义：

定义 1. （泊松过程）如果计数过程 $\{N_t, t \geq 0\}$ 满足：

1. $N_0 = 0$
2. $\{N_t\}$ 是一个 Lévy 过程，即具有独立增量和平稳增量
3. $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$
4. $P(N_h \geq 2) = o(h)$

那么我们称 $\{N_t, t \geq 0\}$ 为强度为 λ 的泊松过程。

在以上定义中，第 3 条要求在一个充分小的时间间隔 h 内，到达的概率正比与时间间隔 h；第 4 条要求在充分小的时间间隔 h 内，同时到达两个的可

能性为一个无穷小量。实际上，根据我们在概率论中的论述，以上两条等价于 $N_t \sim P(\lambda t)$，因而以上定义与前一节中的定义是等价的。

如果 $\{N_t\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，那么容易计算：

$$\mathbb{E}(N_t) = \lambda t$$
$$\mathrm{Var}(N_t) = \lambda t$$

从而 $\lambda = \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t}$ 为单位时间内时间发生的平均数。

现在考虑一个强度为 λ 的泊松过程 $\{N_t, t \geq 0\}$。记 X_1 为首个事件到达的时刻，而对于 $n \geq 1$，记 X_n 为第 $n-1$ 个事件和第 n 个事件到达的时间间隔，我们称序列 $X_n, n \geq 1$ 为到达间隔时间序列。为了确定 X_n 的分布，首先注意到事件 $\{X_1 > t\}$ 发生等价于 $N_t = 0$，从而：

$$P(X_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

从而 X_1 服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。为了得到 X_2 的分布，我们可以先计算给定 X_1 的条件分布，即：

$$\begin{aligned} P(X_2 > t | X_1 = s) &= P(N_t = 1 | X_1 = s) \\ &= P(N_t - N_s = 0) \\ &= P(N_{t-s} = 0) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

可以看到，以上条件分布不依赖于 X_1 的取值，因而无条件分布也服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。以此类推，我们可以得到所有的时间间隔 $X_n \sim E\left(\frac{1}{\lambda}\right)$。

此外，如果我们定义 $S_0 = 0$，而 S_n 表示第 n 个事件到达的时刻，我们称 $\{S_n, n = 0, 1, ...\}$ 为泊松过程 $\{N_t, t \geq 0\}$ 的呼叫流。与以上类似，我们有以下的等价关系：

$$\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}$$
$$\{N_t = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}$$

此外，呼叫流可以使用时间间隔 X_n 定义：$\sqrt{N}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

因而 S_n 的分布函数为:

$$\begin{aligned}F_n(t) &= P(S_n \le t)\\ &= P(N_t \ge n)\\ &= 1 - P(N_t < n)\\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

其密度函数为:

$$\begin{aligned}f_n(t) &= F_n'(t)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \lambda e^{-\lambda t} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(\lambda t)^{k-1}\lambda}{k!} e^{-\lambda t}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \lambda e^{-\lambda t} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda t}\\ &= \lambda e^{-\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

因而 $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ 的 Gamma 分布。

注意到 $\{S_n\}$ 中各个元素之间并非独立同分布的，因而存在着联合分布。为了得到联合分布，注意到：$P(S_1 \le t_1, S_2 \le t_2) + P(S_1 > t_1, S_2 \le t_2) = P(S_2 \le t_2)$，从而对于 $t_1 < t_2$：

$$\begin{aligned}F_{S_1,S_2}(t_1, t_2) &= P(S_2 \le t_2) - P(S_1 > t_1, S_2 \le t_2)\\ &= F(t_2) - P(N_{t_1} = 0, N_{t_2} \ge 2)\\ &= F(t_2) - P(N_{t_1} = 0, N_{t_2} - N_{t_1} \ge 2)\\ &= F(t_2) - P(N_{t_1} = 0) \cdot P(N_{t_2} - N_{t_1} \ge 2)\\ &= F(t_2) - e^{-\lambda t_1}\left(1 - e^{-\lambda(t_2 - t_1)} - \lambda(t_2 - t_1) e^{-\lambda(t_2 - t_1)}\right)\\ &= F(t_2) - e^{-\lambda t_1} + [1 + \lambda(t_2 - t_1)] e^{-\lambda t_2}\end{aligned}$$

从而密度函数为:

$$f_{S_1,S_2}(t_1, t_2) = \lambda^2 e^{-\lambda t_2}$$

使用同样的技巧，可以证明，$(S_1, S_2, ..., S_n)$ 的联合密度函数为：

$$f_{S_1,S_2,...,S_n}(t_1, t_2, ..., t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n}, 0 < t_1 < ... < t_n$$

如果我们知道在 t 时刻之前恰好有一个事件发生，需要确定发生事件 S_1 的分布，即 $P(S_1 \le s | N_t = 1)$，考虑到泊松过程具有独立且平稳的增量，可以预想到该分布是一个均匀分布。实际上，对于 $0 < s \le t$：

$$\begin{aligned}
P(S_1 \le s | N_t = 1) &= \frac{P(X_1 \le s, N_t = 1)}{P(N_t = 1)} \\
&= \frac{P(N_s = 1, N_t - N_s = 0)}{P(N_t = 1)} \\
&= \frac{P(N_s = 1) \cdot P(N_t - N_s = 0)}{P(N_t = 1)} \\
&= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{s}{t}
\end{aligned}$$

因而起条件分布的确为均匀分布。

如果两个强度为 λ_1 和 λ_2 的泊松过程 $\{N_{1t}\}$ 和 $\{N_{2t}\}$，且两者相互独立，令 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$，记两者之和为：$N_t = N_{1t} + N_{2t}$。为了证明这一结论，首先，$N_0 = N_{1,0} + N_{2,0} = 0$；其次，根据 N_{1t} 和 N_{2t} 的独立增量性、平稳增量性，可知 N_t 也具有独立增量性和平稳增量性；最后，

$$\begin{aligned}
P(N_h = 1) &= P(N_{1h} = 1, N_{2h} = 0) + P(N_{2h} = 1, N_{1h} = 0) \\
&= [\lambda_1 h + o(h)][1 - \lambda_2 h + o(h)] + [\lambda_2 h + o(h)][1 - \lambda_1 h + o(h)] \\
&= \lambda_1 h + \lambda_2 h - 2\lambda_1 \lambda_2 h^2 + o(h) \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2) h + o(h) \\
&= \lambda h + o(h)
\end{aligned}$$

同时可以证明，

$$\begin{aligned}
P(N_h = 0) &= P(N_{1h} = 0, N_{2h} = 0) \\
&= P(N_{1h} = 0) \cdot P(N_{2h} = 0) \\
&= [1 - \lambda_1 h + o(h)][1 - \lambda_2 h + o(h)] \\
&= 1 - \lambda h + o(h)
\end{aligned}$$

从而可以得到

$$P(N_h \ge 2) = 1 - (\lambda h + 1 - \lambda h + o(h)) = o(h)$$

从而根据定义 (1)，$\{N_t\}$ 也是泊松过程，其强度为 $\lambda_1+\lambda_2$。

1.2 复合泊松过程

定义 2. 如果已知 $\{N_t, t\geq 0\}$ 是一个泊松过程，令：

$$X_t=\sum_{i=1}^{N_t} Z_i$$

其中 $Z_i\sim F$ 为独立同分布的随机变量序列，且与 $\{N_t, t\geq 0\}$ 独立，那么随机过程 $\{X_t, t\geq 0\}$ 称为复合泊松过程（**compound poisson process**）。

如果 $\mathbb{E}\left(Z_i\right)=\mu$，$\operatorname{Var}\left(Z_i\right)=\sigma^2$，那么我们有：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_t\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t} Z_i\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t} Z_i | N_t\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left(\mu N_t\right) \\
&= \mu t \lambda
\end{aligned}$$

同时：

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(X_t\right) &= \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(X_t | N_t\right)\right]+\operatorname{Var}\left[\mathbb{E}\left(X_t | N_t\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N_t} Z_i | N_t\right)\right]+\operatorname{Var}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t} Z_i | N_t\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[N_t \sigma^2\right]+\operatorname{Var}\left[\mu N_t\right] \\
&= \lambda t \sigma^2+\mu^2 t \lambda \\
&= \lambda t\left(\mu^2+\sigma^2\right)
\end{aligned}$$

此外，在复合泊松过程中，以下定理在计算中通常非常有用：

定理 1. 令：

$$X=\sum_{i=1}^{N} Z_i$$

其中 $N\sim P(\lambda)$，$Z_i\sim F$，$Z\sim F$，且 Z 与 $\{Z_i\}$ 相互独立，那么对于任意函数 $h(x)$，有：

$$\mathbb{E}[X h(X)]=\lambda \mathbb{E}(Z h(X+Z))$$

该定理经常用于复合泊松分布的函数的期望的计算，比如：

定理 2. 若 $X \sim F$，那么对于任意正整数 n，有：

$$\mathbb{E}\left(X^n\right) = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array} \right) \mathbb{E}\left(X^j\right) \mathbb{E}\left(Z^{n=j}\right)$$

证明. 令 $h(x) = x^{n-1}$，那么利用定理 (1) 有：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^n\right) &= \lambda \mathbb{E}\left[Z\left(X+Z\right)^{n-1}\right] \\ &= \lambda \mathbb{E}\left[Z \sum_{j=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array} \right) X^j Z^{n-1-j}\right] \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{N} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array} \right) \mathbb{E}\left(X^j\right) \mathbb{E}\left(Z^{n-j}\right) \end{aligned}$$

□

于是，为了计算 $\mathbb{E}\left(X^n\right)$，我们可以通过以上定理进行递推，如：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X\right) &= \lambda \mathbb{E}\left(Z\right) \\ \mathbb{E}\left(X^2\right) &= \lambda\left[\mathbb{E}\left(Z^2\right) + \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Z\right)\right] \\ &= \lambda \mathbb{E}\left(Z^2\right) + \lambda^2\left[\mathbb{E}\left(Z\right)\right]^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

1.3 泊松过程的参数估计

如果在 t 时间内，我们观察到了 N_t 次到达，那么很自然的问题时，我们希望使用数据估计出泊松过程的强度 λ。回忆 λ 是单位时间内的平均到达次数，即 $\mathbb{E}\left(N_t\right) = \lambda t$，从而使用矩估计的思路，一个可行的估计为：

$$\hat{\lambda} = \frac{N_t}{t}$$

如此，我们有：

$$\mathbb{E}\left(\hat{\lambda}\right) = \lambda$$

即以上定义的估计量是 λ 的无偏估计。

接下来论证一致性，即当 $t \to \infty$ 时，是否存在 $\hat{\lambda} \xrightarrow{p} \lambda$。为了证明这一结论，我们首先找到一个正整数 n，满足 $n-1 < t \leq n$，从而：

$$\frac{N_{n-1}}{n} \leq \frac{N_t}{n-1} \leq \frac{N_t}{t} < \frac{N_t}{n-1} \leq \frac{N_n}{n-1}$$

根据平稳增量性和独立增量性，有：

$$N_n=\sum_{j=1}^{n}N(j-1,j]$$

其中 $N(j-1,j]$ 为时刻 $j-1$ 到 j 的到达次数，因而 $N(j-1,j]\sim P(\lambda)$。根据大数定律，有：

$$\frac{N_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}N(j-1,j]\xrightarrow{p}\mathbb{E}\left(N(j-1,j]\right)=\lambda$$

从而 $\frac{N_{n-1}}{n}\xrightarrow{p}\lambda$，$\frac{N_n}{n-1}\xrightarrow{p}\lambda$，从而当 $t\to\infty$ 时，$n\to\infty$，$\hat{\lambda}=\frac{N_t}{t}\xrightarrow{p}\lambda$。

使用类似思路，根据中心极限定理，有：

$$\sqrt{n}\left(\frac{N_n}{n}-\lambda\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,\lambda\right)$$

从而：

$$\frac{N_t-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}\overset{a}{\sim}N\left(0,1\right)$$

或者，我们可以使用间隔时间 $\{X_n,n\geq 0\}$ 为基础作为统计推断的工具。根据以上的性质，我们知道间隔时间 $\{X_n,n\geq 0\}$ 为一系列的服从 $E\left(1/\lambda\right)$ 的独立同分布的序列，因而自然有：

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\mathbb{E}\left(x_1\right)=\frac{1}{\lambda}$$

从而一个自然的矩估计为：

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{n}{S_n}$$

2 更新过程

在之前的学习中我们看到，泊松过程的等待间隔 X_n 为独立同分布的指数分布。在实际应用中，还有一些计数过程的等待时间并不是指数分布，比如一个零部件的寿命可能是服从正态分布的，如此更换零部件的次数也不是服从泊松过程的。为此，我们使用更新过程（Renewal process）来描述这样的随机过程。

定义 3. 令 $\{X_n,n=1,2,...\}$ 为一系列独立同分布的非负随机变量，且 $X_1\sim F$，令 $S_0=0$，

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

为第 n 次到达的时间点，定义：

$$N_t = \sup_n \{S_n \le t\}$$

那么随机过程 $\{N_t, t \ge 0\}$ 称为更新过程。

更新过程是泊松过程的自然拓展，然而值得注意的是，更新过程并没有独立增量性和平稳增量性。

与泊松过程类似，更新过程中 N_t 和 S_n 之间存在着如下关系：

$$\begin{aligned}\{N_t < n\} &= \{S_n > t\} \\ \{N_t = n\} &= \{S_n \le t < S_{n+1}\}\end{aligned}$$

与此同时，根据 N_t 的定义，更新过程还可以写为：

$$N_t = \#\{n|S_n \le t\} = \sum_{i=1}^{\infty} 1\{S_i \le t\}$$

从而：

$$m(t) \triangleq \mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} 1\{S_i \le t\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(1\{S_i \le t\}) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t)$$

其中 $F_i(t)$ 为 S_i 的分布函数。我们称 $m(t)$ 为更新函数。

由于 N_t 为 $[0,t]$ 时间段内的更新次数，记 $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ 为两次更新之间的平均等待间隔，那么 $\frac{t}{N_t}$ 就是平均的等待时间，可以想象这个平均等待时间随着 $t \to \infty$，会趋向 μ。为了证明这个结论，我们首先要讨论 N_t 的极限，即 $N_\infty = \lim_{t\to\infty} N_t$。容易猜测，该极限应为 $N_\infty = \infty$ $a.s.$。为了证明这个结论，我们有：

$$\begin{aligned}P(N_\infty < \infty) &= P(\exists n\ s.t. X_n = \infty) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (X_i = \infty)\right) \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} P(X_i = \infty) \\ &= 0\end{aligned}$$

从而当 $t \to \infty$ 时，N_t 以 1 的概率趋向于无穷，从而根据强大数定律：

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} X_i}{N_t} \to \mu,\ a.s.$$

同时:

$$\frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t} \to \mu,\ a.s.$$

由于:

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{S_{N_t+1}}{N_t}$$

从而

$$\frac{t}{N_t} \to \mu,\ a.s.$$

或者 $\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{\mu}\ a.s.$。

以上讨论了 $\frac{N_t}{t}$ 的极限，有时我们还需要讨论 $\frac{m(t)}{t}$ 的极限。注意即使 $\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{\mu}$ 成立，也并不代表 $\frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ 一定成立。在讨论这个极限之前，我们需要先介绍停时（**stopping time**）的概念。

定义 4. 记 $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ 为一个随机变量序列，T 是一个取正整数值的随机变量，如果对于正整数 $n = 1, 2, ...$，事件 $\{T \leq n\}$ 由 $\{X_1, ..., X_n\}$ 所唯一确定，那么我们称 T 为 $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ 的停时。

以上定义意味着如果 T 是一个停时，事件 $\{T \leq n\}$ 是否发生由 $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ 所完全决定的，也就意味着事件 $\{T \leq n\}$ 与 $\{X_{n+1}, X_{n+2}, ...\}$ 都是独立的。

例 1. 某人在第 0 天买入了某一只股票，并制定了如下策略：当该只股票开盘价格大于等于 10 元时就卖出股票。记 $\{Y_1, Y_2, ...\}$ 为该只股票未来的开盘价格，那么卖出股票的时间可以表示为:

$$T = \min_n \{Y_n \geq 10\}$$

可见事件 $\{T \leq n\} = \{\exists m \leq n\ s.t.\ Y_m \geq 10\}$ 由 $\{Y_1, ..., Y_n\}$ 所完全确定，因而 T 是一个停时。一旦 $\{T \leq n\}$ 事件发生，该事件就与 $\{Y_{n+1}, ...\}$ 完全独立。

注意到，由于事件 $\{T \leq n\}$ 由 $(X_1, ..., X_n)$ 所唯一确定，从而事件 $\{T > n\}$ 也是由 $(X_1, ..., X_n)$ 所唯一确定的，$\{T = n\} = \{T \leq n\} \cup \{T > n-1\}$ 也是由 $(X_1, ..., X_n)$ 所唯一确定的，从而都与 $\{X_{n+1}, X_{n+2}, ...\}$ 是独立的。

定理 3. （*Wald* 定理）如果 $\{X_1, X_2, ...\}$ 是一系列独立同分布的随机变量，而 T 是 $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ 的停时，且 $\mathbb{E}T < \infty$，那么:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{T} X_i\right) = \mathbb{E}\left(T\right) \cdot \mathbb{E}\left(X_i\right)$$

证明. 由于:

$$\sum_{i=1}^{T} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cdot 1\left\{i \leq T\right\}$$

从而:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{T} X_i\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i \cdot 1\{i \leq T\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(X_i \cdot 1\{i \leq T\}\right)$$

注意由于 $\{i \leq T\} = \{T < i\}^c = \{T \leq i-1\}^c$,从而事件 $\{i \leq T\}$ 由 $\{X_1, ..., X_{n-1}\}$ 所完全确定,从而与 X_i 是独立的,从而 $\mathbb{E}(X_i \cdot 1\{i \leq T\}) = \mathbb{E}(X_i) \cdot \mathbb{E}(1\{i \leq T\})$,因而:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{T} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(X_i \cdot 1\{i \leq T\}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_i) \cdot \mathbb{E}(1\{i \leq T\}) \\
&= \mathbb{E}(X_i) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(1\{i \leq T\}) \\
&= \mathbb{E}(X_i) \cdot \mathbb{E}(T)
\end{aligned}$$

其中最后一步由于:$T = \sum_{i=1}^{\infty} 1\{i \leq T\}$。 □

现在回到更新过程。现在我们令 $T = N_t + 1$,即 t 时刻之后第一次更新的时间停止,由于:

$$\{N_t + 1 = n\} = \{N_t = n-1\} = \{X_1 + \cdots X_{n-1} \leq t, X_1 + \cdots X_n > t\}$$

从而 $T = N_t + 1$ 是一个依赖于 $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ 的一个停时。根据 Wald 定理,有:

$$\mathbb{E}\left(S_{N_t+1}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t+1} X_i\right) = \mathbb{E}(X_i) \cdot \mathbb{E}(N_t + 1) = \mu\left[m(t) + 1\right]$$

使用以上结论,我们可以证明如下定理:

定理 4. (基本更新定理)如果 $\mu = \mathbb{E}(X_i) < \infty$,则:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

证明. 首先,由于 $S_{N_t+1} > t$,两边求期望得到:

$$\mu\left[m(t) + 1\right] > t$$

或者:

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$$

现在还需要证明

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\le\frac{1}{\mu}$$

为了证明这一点，我们固定一个常数 M，并令一个新的随机变量：

$$\tilde{X}_i=\begin{cases}X_i & if\ X_i\le M\\ M & if\ X_i>M\end{cases},i=1,2,...$$

并根据 $\left\{\tilde{X}_i,i=1,2,...\right\}$ 定义一个新的更新过程，令 $\tilde{S}_n=\tilde{X}_1+\cdots\tilde{X}_n$，$\tilde{N}_t=\sup_n\left\{\tilde{S}_n\le t\right\}$，我们称该过程为截断更新过程。由于在这个过程中，$M$ 是更新间隔时间的上限，从而：

$$\tilde{S}_{N_t+1}\le t+M$$

从而：

$$\left(\tilde{m}(t)+1\right)\tilde{\mu}\le t+M$$

取极限得到：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\tilde{m}(t)}{t}\le\frac{1}{\tilde{\mu}}$$

由于 $m(t)\le\tilde{m}(t)$，因而：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\le\frac{1}{\tilde{\mu}}$$

现在令 $M\to\infty$，则 $\tilde{\mu}\to\mu$，从而：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\le\frac{1}{\mu}$$

最终得到：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$$

$\square$

接下来我们讨论当 $t\to\infty$ 时，$N(t)$ 的渐进分布。我们有如下定理：

定理 5. 令 $\mu=\mathbb{E}(X_1),\sigma^2=Var(X_1)$，则当 $t\to\infty$，有：

$$P\left(\frac{N_t-\frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}\le y\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

证明. 令 $r_t = \frac{t}{\mu} + y\sigma\sqrt{t/\mu^3}$，那么：

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \le y\right) &= P\left(N_t \le r_t\right) \\
&= P\left(S_{r_t} > r_t\right) \\
&= P\left(\frac{S_{r_t} - r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}} > \frac{t - r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}\right) \\
&= P\left(\frac{S_{r_t} - r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}} > -y\left(1 + \frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}}\right)^{-1/2}\right)
\end{aligned}$$

当 $t \to \infty$ 时，$-y\left(1 + \frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}}\right)^{-1/2} \to -y$，根据中心极限定理，有：

$$\frac{S_{r_t} - r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}} \overset{a}{\sim} N\left(0, 1\right)$$

从而根据正态分布的对称性，得到结论。 □

习题

练习 1. 证明：给定 $N_t = n$,$\left(S_1, ..., S_n\right)|N_t = n$ 的条件密度函数为：$\frac{n!}{t^n}$。(Tips，使用 $\left(S_1, ..., S_n\right)$ 的联合密度函数）

练习 2. 请推导 λ 的估计量 $\hat{\lambda} = \frac{n}{S_n}$ 的渐进分布。

练习 3. 如何估计复合泊松过程中的参数？包括 λ 以及 Z 的分布的参数。

参考文献

[1] Casella, G., Berger, R.L., 2002. Statistical inference. Duxbury Pacific Grove, CA.

[2] Shao, J., 2007. Mathematical Statistics, 2nd ed. Springer, New York.