

## 第四节 · 多元随机变量

司继春

上海对外经贸大学统计与信息学院

在前两节中，我们讨论了一元随机变量的定义及其期望等概念。此外，我们还可以把随机变量的概念扩展到随机向量。

### 1 多元随机变量

在有了以上准备之后，我们可以定义随机向量的概念。

**定义 1.** (随机向量) 给定一个概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ，一个  $k$  维的随机向量  $X$  即从样本空间到  $n$  维欧几里得空间的函数， $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。

即，如果一个向量其每个分量都是随机变量，那么此向量被称为随机向量。

**例 1.** (随机向量) 投两个均匀的四面骰子，则

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (4, 4)\}$$

定义随机变量  $Y$  为两个骰子的数值之和，定义  $Z$  为两个骰子中较小的骰子的数值，如图 (1) 所示。那么向量  $(Y, Z)' = X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  为一个随机向量，其可能的取值为  $\{(y, z), y \in \{2, \dots, 8\}, z \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ 。例如， $X^{-1}(\{(5, 3)\}) = \{(2, 3), (3, 2)\}$ 。

4	5	6	7	8
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
1	2	3	4	5
	1	2	3	4

图 1: 四面骰子

进而，我们可以使用  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  和一个随机向量  $X$  的定义导出一个  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$  上的概率函数的定义。即定义：

$$P_X(A) = \mathcal{P}(X^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{B}^n$$

**例 2.** 在例 (1) 中，如果  $A = \{(5, 2)\}$ ，那么：

$$P_X(A) = \mathcal{P}(X^{-1}(A)) = \mathcal{P}(\{(2, 3), (3, 2)\}) = \frac{2}{16}$$

同理， $P_X(\{(2, 1)\}) = \frac{1}{16}$ ， $P_X(\{(5, a), a \in \{1, 2, 3, 4\}\}) = \frac{4}{16}$  等等。

给定一个随机向量  $X$ ，在得到了由原始概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  导出的概率空间  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P)$  后，仿照一元随机变量，我们还可以定义随机向量的**联合分布函数** (joint cumulative distribution function)：

**定义 2.** (联合分布函数) 由  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  导出的概率空间  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P)$  的**联合分布函数** (joint c.d.f.) 定义为：

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= P((-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \dots \times (-\infty, x_n]) \\ &= \mathcal{P}(X^{-1}((-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \dots \times (-\infty, x_n])) \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ 。

易得，联合分布函数为单调递增且  $F(-\infty, -\infty, \dots, -\infty) = 0$ ， $F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$ 。相应的，对于连续（离散）型的随机向量  $X$ ，我们还可以定义其联合概率密度（质量）函数。

**定义 3.** (随机向量的联合密度函数与联合质量函数)

1. 如果随机向量  $X$  的每个分量都是离散型随机变量，那么可以定义联合概率质量函数 p.m.f 为： $f(x) = P(\{x\}) = P(\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\})$ 。
2. 如果随机变量  $X$  的联合分布函数连续，如果函数  $f(x)$  满足：

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathcal{B}^n$$

那么我们称  $f(x)$  为其联合概率密度函数 p.d.f。特别的，如果联合分布函数  $F(x)$  可微那么：

$$f(x) = \frac{\partial^n F(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

**例 3.** (概率质量函数) 例 (1) 中的概率质量函数可以用下表描述：

$Z \setminus Y$	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0
3	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$

**例 4.** (概率密度函数) 如果随机向量  $X = (X_1, X_2)$  的两个分量分别服从正态分布, 且相互独立, 那么其概率密度函数为:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}$$

现在, 如果  $X = (X_1, \dots, X_n)$  为随机向量, 那么  $\tilde{X} = (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}), 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  也是一个随机向量.  $\tilde{X}$  的联合分布函数可以通过  $F(x)$  来定义, 即令  $F(x)$  中满足  $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$  的分量为  $\infty$ . 如对于三维随机变量  $X = (X_1, X_2, X_3)$ , 则  $\tilde{X} = (X_1, X_2)$  的分布函数为:  $F_{\tilde{X}}(\tilde{x}) = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \infty)$ .

特别的, 对于随机向量  $X$  的每个分量  $X_i$ , 我们可以定义其**边缘分布函数** (marginal c.d.f.) 为:

$$F_{X_i}(x_i) = F(\infty, \dots, x_i, \dots, \infty)$$

注意边缘分布函数对应着一元随机变量  $X_i$  的分布函数:

$$\begin{aligned} F(\infty, \dots, x_i, \dots, \infty) &= P(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times (-\infty, x_i] \times \dots \times \mathbb{R}) \\ &= \mathcal{P}(X^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times (-\infty, x_i] \times \dots \times \mathbb{R})) \\ &= \mathcal{P}(X_i^{-1}((-\infty, x_i])) \end{aligned}$$

对于连续 (离散) 型的随机变量  $X_i$ , 其边缘概率密度 (质量) 函数可以相应定义。

**例 5.** (边缘质量函数) 例 (1) 中,  $X = (Y, Z)$ ,  $Y$  和  $Z$  的边缘概率质量函数如下表所示:

$Z \setminus Y$	2	3	4	5	6	7	8	$F_Z$	$f_Z$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	$\frac{12}{16}$	$\frac{5}{16}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{15}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{16}{16}$	$\frac{1}{16}$
$F_Y$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{16}{16}$		$\sum f_Z$
$f_Y$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\sum f_Y =$	1

**例 6.** (边缘密度函数) 例 (4) 中的联合正态分布函数, 其边缘分布函数为:

$$\begin{aligned}
 F_{X_1}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^t f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} dx_2 \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} dx_1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} dx_1
 \end{aligned}$$

则其边缘密度函数为:

$$f_{X_1}(t) = \frac{dF_{X_1}(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

即例 (4) 中联合正态分布的边缘分布仍然是正态分布。

注意边缘分布函数由联合分布函数导出, 然而如果只确定了边缘分布, 联合分布并不能唯一确定。

**例 7.** (联合分布与边缘分布) 以下两个联合质量函数具有相同的边缘分布, 然而其联合质量函数并不相同:

$Z \setminus Y$	0	1	$f_Z$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$f_Y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$Z \setminus Y$	0	1	$f_Z$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
$f_Y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

**例 8.** 如果随机向量  $(U, V)$  的分布函数为:

$$F_{U,V}(u, v) = \min\{u, v\}$$

其边缘分布:

$$\begin{aligned}
 F_U(u) &= F_{U,V}(u, \infty) = u \\
 F_V(v) &= F_{U,V}(\infty, v) = v
 \end{aligned}$$

即其边缘分布为均匀分布。如果另一分布函数为:

$$F_{U,V}(U, V) = u \cdot v$$

其边缘分布也为均匀分布。因而如果只知道边缘分布, 不能确定其联合分布。

## 2 多元随机变量的期望

与一元随机变量类似，对于随机向量  $X$  以及相应的从概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  导出的概率空间  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P)$ ，对于实值可测函数  $g(X(\omega)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ，可以使用导出的概率空间计算数学期望：

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(\omega)) \mathcal{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) P(dx)$$

根据此定义，如果令  $g(X) = \iota'_i X = X_i$ ，其中  $\iota_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ ，那么：

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\Omega} X_i(\omega) \mathcal{P}(d\omega) = \mathbb{E}(X_i)$$

即多元随机变量的分量的期望与一元随机变量的期望定义相同。因而我们经常把随机向量的期望写为：

$$\mathbb{E}(X) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}X_1 \\ \mathbb{E}X_2 \\ \vdots \\ \mathbb{E}X_n \end{bmatrix}$$

如果我们令  $g(X) = \sum_{i=1}^n X_i = \iota'X$ ，其中  $\iota = (1, 1, \dots, 1)'$  为全部由 1 构成的向量，那么：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n X_i P(dx) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} X_i P(dx) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \end{aligned}$$

即期望的**线性性**。如果令  $\mu = \mathbb{E}(X) = [\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \dots, \mathbb{E}(X_d)]'$ ，令  $a \in \mathbb{R}^n$ ，那么我们有  $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \mathbb{E}(a'X) = a'\mathbb{E}(X) = a'\mu$ 。

而对于一个实数矩阵  $A_{h \times n} = [a_1, a_2, \dots, a_h]'$ ，其乘积  $AX = [a'_1 X, a'_2 X, \dots, a'_h X]'$ ，其期望为：

$$\mathbb{E}(AX) = \mathbb{E} \begin{bmatrix} a'_1 X \\ a'_2 X \\ \vdots \\ a'_h X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(a'_1 X) \\ \mathbb{E}(a'_2 X) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(a'_h X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 \mathbb{E}(X) \\ a'_2 \mathbb{E}(X) \\ \vdots \\ a'_h \mathbb{E}(X) \end{bmatrix} = A\mathbb{E}(X)$$

因而对于  $A_{h \times n}$  以及  $h$  维向量  $b$ ，有： $\mathbb{E}(AX + b) = A\mathbb{E}(X) + b$ 。

此外，如果对于两个一元随机变量  $Y, Z$ ，如果  $\mathbb{E}|Y|^2 < \infty, \mathbb{E}|Z|^2 < \infty$ ，

根据 Cauchy-Schwarz 不等式,  $\mathbb{E}|YZ| \leq \sqrt{\mathbb{E}|Y|^2 \mathbb{E}|Z|^2} < \infty$ , 即  $YZ$  可积, 我们可以定义两个随机变量的**协方差** (Covariance):

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Y, Z) &= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))(Z - \mathbb{E}(Z))] \\ &= \mathbb{E}[YZ - \mathbb{E}(Y)Z - Z\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)] \\ &= \mathbb{E}(YZ) - 2\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) + \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) \\ &= \mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)\end{aligned}$$

当  $Y = Z$  时,  $\text{Cov}(Y, Y) = \mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)]^2 = \text{Var}(Y)$ 。

进而可以使用协方差定义**相关系数** (correlation coefficient):

$$\rho_{Y,Z} = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\sqrt{\text{Var}(Y)\text{Var}(Z)}}$$

由于:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Y, Z) &= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))(Z - \mathbb{E}(Z))] \\ &\leq \mathbb{E}|(Y - \mathbb{E}(Y))(Z - \mathbb{E}(Z))| \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}|(Y - \mathbb{E}(Y))|^2 \mathbb{E}|Z - \mathbb{E}(Z)|^2} \\ &= \sqrt{\text{Var}(Y)\text{Var}(Z)}\end{aligned}$$

可知  $-1 \leq \rho_{Y,Z} \leq 1$ 。如果  $\rho_{Y,Z} = \pm 1$ , 那么  $P(Y = c_1 Z + c_2) = 1, c_1 \neq 0$ ; 如果  $\rho_{Y,Z} > 0$ , 我们称随机变量  $Y$  和  $Z$  正相关, 反之成为负相关, 如果  $\rho_{Y,Z} = 0$ , 我们称随机变量  $Y$  和  $Z$  不相关 (uncorrelated)。这里所谓的「相关系数」特指**皮尔森相关系数** (Pearson correlation coefficient), 实际上只度量了随机变量之间的线性相关性。相关系数等于 0 并不意味着两个随机变量没有非线性的相关性。

**例 9.** 如果随机变量  $Y = Z^2$ ,  $Z \sim N(0, 1)$ , 那么:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Z, Y) &= \mathbb{E}ZY - \mathbb{E}Z\mathbb{E}Y \\ &= \mathbb{E}Z^3 \\ &= 0\end{aligned}$$

两者相关系数为 0, 然而显然两者存在着非线性的函数关系。

此外, 如果  $a, b$  为任意实数,  $Y$  和  $Z$  为一元随机变量, 那么:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(aY + bZ) &= \mathbb{E}(aY + bZ)^2 - [a\mathbb{E}(Y) + b\mathbb{E}(Z)]^2 \\ &= \mathbb{E}(a^2Y^2 + b^2Z^2 + 2abYZ) \\ &\quad - [a^2(\mathbb{E}(Y))^2 + b^2(\mathbb{E}(Z))^2 + 2ab\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)] \\ &= a^2\operatorname{Var}(Y) + b^2\operatorname{Var}(Z) + 2ab\operatorname{Cov}(Y, Z)\end{aligned}$$

如果  $Y, Z$  不相关, 那么  $\operatorname{Var}(aY + bZ) = a^2\operatorname{Var}(Y) + b^2\operatorname{Var}(Z)$ 。

对于一个随机向量  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ , 我们可以定义**方差协方差矩阵** (**variance-covariance matrix**), 或者**协方差矩阵**为:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)'] \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{Var}(X_1) & \operatorname{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \operatorname{Cov}(X_1, X_n) \\ \operatorname{Cov}(X_2, X_1) & \operatorname{Var}(X_2) & \cdots & \operatorname{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}(X_n, X_1) & \operatorname{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \operatorname{Var}(X_n) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

由于  $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \operatorname{Cov}(X_j, X_i)$ , 因而协方差矩阵为实对称矩阵。根据定义, 有:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)'] \\ &= \mathbb{E}[XX' - X\mathbb{E}(X') - \mathbb{E}(X)X' + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X')] \\ &= \mathbb{E}(XX') - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X')\end{aligned}$$

此外, 根据协方差矩阵的定义, 对于任意的  $n$  维向量  $c$ , 我们有:

$$\begin{aligned}c'\operatorname{Var}(X)c &= c'[\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)']c \\ &= \mathbb{E}[c'(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)'c] \\ &= \mathbb{E}\left\{[c'(X - \mathbb{E}X)][c'(X - \mathbb{E}X)]'\right\} \\ &= \mathbb{E}\left[(c'(X - \mathbb{E}X))^2\right] \\ &\geq 0\end{aligned}$$

因而协方差矩阵是一个半正定矩阵, 通常我们记为  $\operatorname{Var}(X) \geq 0$ 。

由于  $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \operatorname{Cov}(X_j, X_i)$ , 因而协方差矩阵为实对称矩阵。根据

定义, 对于实数矩阵  $A_{h \times n}$  以及  $h$  维向量  $b$ , 我们有:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(AX + b) &= \mathbb{E}[(AX + b - \mathbb{E}(AX + b))(AX + b - \mathbb{E}(AX + b))'] \\
 &= \mathbb{E}[(AX - \mathbb{E}(AX))(AX - \mathbb{E}(AX))'] \\
 &= \mathbb{E}[(AX - A\mathbb{E}(X))(X'A' - \mathbb{E}(X')A')] \\
 &= \mathbb{E}[AXX'A' - AX\mathbb{E}(X')A' - A\mathbb{E}(X)X'A' + A\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X')A'] \\
 &= A[\mathbb{E}(XX') - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X')]A' \\
 &= A\text{Var}(X)A'
 \end{aligned}$$

### 3 多元随机变量的独立性

在概率一节中, 我们学习了事件的独立性, 现在我们讨论随机变量的独立性。

**定义 4.** 如果  $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$  是定义在概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  上的一系列随机变量, 如果对于任意的 Borel 集  $\{B_i, 1 \leq i \leq n\}$ , 有:

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i(\omega) \in B_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(X_i(\omega) \in B_i) \quad (1)$$

那么我们称随机变量  $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$  相互独立。

根据以上定义, 随机变量的相互独立意味着对于任意的 Borel 集  $B_i$ , 事件集  $\{X_i^{-1}(B_i), 1 \leq i \leq n\}$  内的事件都是相互独立的。如果我们选取  $B_i = (-\infty, x_i]$ , 那么:

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i(\omega) \leq x_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\{X_i(\omega) \leq x_i\}) \quad (2)$$

实际上, (1) 式与 (2) 式是等价的。如果一系列随机变量  $(X_1, \dots, X_n)$  是相互独



立的，那么其联合分布函数：

$$\begin{aligned}
 F(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\
 &= \mathcal{P} \left( \bigcap_{i=1}^n \{X_i(\omega) \leq x_i\} \right) \\
 &= \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\{X_i(\omega) \leq x_i\}) \\
 &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i) \\
 &= \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)
 \end{aligned} \tag{3}$$

即独立随机向量的联合分布函数等于其边际分布函数的乘积。(2) 式与 (3) 式也是等价的，因而当我们说一系列随机变量  $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$  相互独立时，等价于其联合分布函数可以写成边际分布相乘的形式。

如果密度（质量）函数存在，那么根据 (3) 式可得：

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

**例 10.** 在例 (5) 中，概率质量函数为：

$Z \backslash Y$	2	3	4	5	6	7	8	$F_Z$	$f_Z$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	$\frac{12}{16}$	$\frac{5}{16}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{15}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{16}{16}$	$\frac{1}{16}$
$F_Y$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{16}{16}$		$\sum f_Z$
$f_Y$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\sum f_Y =$	1

可见  $f_{Z,Y} \neq f_Z \cdot f_Y$ ，所以随机变量  $(Y, Z)$  不独立。

**例 11.** 例 (8) 中的两个联合分布函数：

$$\begin{aligned}
 F_{U,V}^1(u, v) &= \min\{u, v\} \\
 F_{U,V}^2(u, v) &= u \cdot v
 \end{aligned}$$

其边缘分布都为均匀分布，即  $F_U(u) = u, F_V(v) = v$ ，然而由于：

$$\begin{aligned}
 F_{U,V}^1(u, v) &= \min\{u, v\} && \neq F_U(u) \cdot F_V(v) \\
 F_{U,V}^2(u, v) &= u \cdot v && = F_U(u) \cdot F_V(v)
 \end{aligned}$$

因而联合分布服从  $F_{U,V}^1$  的随机变量不是相互独立的，而服从  $F_{U,V}^2$  的随机变量是相互独立的。

**定理 1.**  $\{X_j, 1 \leq j \leq n\}$  为一系列相互独立的随机变量， $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k = n$ ，那么对于 Borel 可测函数  $f_1, f_2, \dots, f_k$ ，那么：

$$\{f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_2}), \dots, f_k(X_{n_{k-1}+1}, \dots, X_{n_k})\}$$

也为相互独立的随机变量

上述定理表明，任意独立的随机变量的函数仍然是相互独立的。此外，对于独立的随机变量的乘积，我们有如下结论：

**定理 2.** 如果概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  上的随机向量  $X = (Y, Z)'$ ， $Y$  和  $Z$  相互独立且可积，那么：

$$\mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$$

因而，如果两个随机变量相互独立，那么其协方差  $\text{Cov}(Y, Z) = \mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = 0$ 。然而反之并不成立，参见例 (9)。

## 4 条件期望与条件分布

### 4.1 条件期望

令  $(Y, X)$  为一个二元的随机向量。我们经常碰到的问题是，如何使用随机变量  $X$  预测随机变量  $Y$ ，在统计中，我们把这类问题成为**回归 (Regression)**。如果我们观察到了随机变量  $X$  的值，那么  $X$  的何种函数形式可以更好的预测  $Y$  呢？为此比较常见的做法是最小化**均方误差 (mean squared error)**：

$$\min_{h \in \mathbb{H}} \left\{ \mathbb{E} \left[ (Y - h(X))^2 \right] \right\} \quad (4)$$

即选择一个函数  $h$  使得目标函数  $\mathbb{E} \left[ (Y - h(X))^2 \right]$  最小，其中

$$\mathbb{H} = \left\{ h | h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{E} \left[ (h(X))^2 \right] < \infty \right\}$$

注意到，如果

$$h_0(X) = \arg \min_{h \in \mathbb{H}} \left\{ \mathbb{E} \left[ (Y - h(X))^2 \right] \right\}$$

那么我们可以定义误差项  $\epsilon = Y - h_0(X)$ ，我们有： $\mathbb{E}[\epsilon \cdot g(X)] = 0$ ，其中  $g(X)$  为随机变量  $X$  的任意函数。通过反证法证明，如果存在  $g(X)$  使得  $\mathbb{E}[\epsilon \cdot g(X)] \neq 0$ ，那么我们令

$$h(X) = h_0(X) + \frac{\mathbb{E}[g(X)\epsilon]}{\mathbb{E}[g^2(X)]}g(X)$$

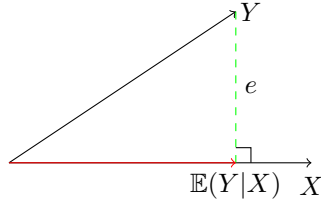


图 2: 条件期望图示

那么:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[(Y - h(X))^2] &= \mathbb{E}\left[\left(Y - h_0(X) - \frac{\mathbb{E}[g(X)\epsilon]}{\mathbb{E}[g^2(X)]}g(X)\right)^2\right] \\
 &= \mathbb{E}[(Y - h_0(X))^2] + \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}[g(X)\epsilon]}{\mathbb{E}[g^2(X)]}g(X)\right)^2 \\
 &\quad - 2\mathbb{E}\left(e(X)g(X)\frac{\mathbb{E}[g(X)\epsilon]}{\mathbb{E}[g^2(X)]}\right) \\
 &= \mathbb{E}[(Y - h_0(X))^2] + \left(\frac{\mathbb{E}[g(X)\epsilon]}{\mathbb{E}[g^2(X)]}\right)^2 \mathbb{E}g^2(X) \\
 &\quad - 2\mathbb{E}[eg(X)]\frac{\mathbb{E}[g(X)\epsilon]}{\mathbb{E}[g^2(X)]} \\
 &= \mathbb{E}[(Y - h_0(X))^2] - \frac{(\mathbb{E}[g(X)\epsilon])^2}{\mathbb{E}[g^2(X)]} \\
 &< \mathbb{E}[(Y - h_0(X))^2]
 \end{aligned}$$

因而如果  $h_0(X)$  使得 (4) 式最小化, 那么对于任意的函数  $g(X)$ , 我们一定有  $\mathbb{E}(g(X)[Y - h_0(X)]) = 0$ 。由于这个特性, 我们一般称  $h(X)$  为  $Y$  在  $X$  上的 **正交投影 (Orthogonal projection)**。直观上, 我们可以把随机变量  $X, Y$  想象为两个向量, 那么如图 (2) 所示, 在  $X$  上距离  $Y$  最近的一点即  $Y$  点向  $X$  的方向上做垂线, 而垂线与  $X$  是正交的。

如果令  $g(X) = 1$ , 那么我们有  $\mathbb{E}[\epsilon \cdot g(X)] = \mathbb{E}[\epsilon] = \mathbb{E}[Y - h_0(X)] = 0$ , 因而  $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(h_0(X))$ 。

我们知道,  $\mathbb{E}(Y) = \arg \min_{c \in \mathbb{R}} \{\mathbb{E}(Y - c)^2\}$ , 仿照上式, 我们可以定义随机变量  $Y$  给定  $X$  的**条件期望 (Conditional expectation)**:

$$\mathbb{E}(Y|X) = h_0(X) = \arg \min_{h \in \mathbb{H}} \left\{ \mathbb{E}[(Y - h(X))^2] \right\}$$

因而随机变量  $Y$  给定  $X$  的条件期望实际上是一个关于  $X$  的函数。对于条件期望, 我们有如下几个结论:

**定理 3.** (条件期望的性质) 对于任意的可测函数  $g(X)$ , 条件期望有如下性质:

1.  $\mathbb{E}[g(X)|X] = g(X)$ ;
2.  $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X)) \cdot g(X)] = 0$ ;
3.  $\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] = \mathbb{E}(Y)$ ,  $\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}(Y|X)] = 0$ ;
4.  $\mathbb{E}[(g(X) \cdot Y)|X] = g(X) \cdot \mathbb{E}(Y|X)$ ;
5.  $\mathbb{E}(aY_1 + bY_2|X) = a\mathbb{E}(Y_1|X) + b\mathbb{E}(Y_2|X)$ 。

其中第一条性质可以由条件期望的定义得到；第二条性质与第三条性质上文已经说明，两者意味着  $\text{Cov}(g(X), Y - \mathbb{E}(Y|X)) = 0$ ，即误差项  $\epsilon = Y - h_0(X)$  与  $X$  的任意函数都不相关；第四条性质同样可以使用条件期望的定义证明；最后一条即条件期望的线性可加性。

注意到如果我们没有任何信息，因而只能用常数  $c$  去预测  $Y$ ，那么以上最小化问题：

$$\mathbb{E}(Y|c) = c^* = \arg \min_{h \in \mathbb{H}} \left\{ \mathbb{E}[(Y - c)^2] \right\}$$

对以上最优化问题求解，即：

$$\frac{\partial \mathbb{E}[(Y - c)^2]}{\partial c} = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial (Y - c)^2}{\partial c} \right] = 0$$

从而得到： $\mathbb{E}(Y|c) = \mathbb{E}(Y)$ 。即如果我们没有任何其他随机变量的信息，只能用常数预测  $Y$ ，那么我们将得到  $Y$  的期望。也就是说， $Y$  的期望可以看做是没有其他随机变量信息时对  $Y$  的最优预测。正因为如此，如果我们有其他随机变量  $X$ ，但是  $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$ ，那么我们称  $Y$  对  $X$  是**均值独立**（**mean independence**）的。

注意，如果随机变量  $Y$  对  $X$  是均值独立的，那么：

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|X)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因而随机变量  $Y$  和  $X$  必然是不相关的。反之则不成立，不相关并不一定意味着独立。

相应的，我们还可以定义随机变量的条件方差  $\text{Var}(Y|X) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X))^2|X]$ 。

根据条件期望的性质：

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y|X) &= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X))^2 | X] \\
 &= \mathbb{E}\left\{\left[Y^2 + [\mathbb{E}(Y|X)]^2 - 2Y\mathbb{E}(Y|X)\right] | X\right\} \\
 &= \mathbb{E}(Y^2|X) + [\mathbb{E}(Y|X)]^2 - 2\mathbb{E}[Y\mathbb{E}(Y|X)|X] \\
 &= \mathbb{E}(Y^2|X) + [\mathbb{E}(Y|X)]^2 - 2\mathbb{E}(Y|X)\mathbb{E}[Y|X] \\
 &= \mathbb{E}(Y^2|X) - [\mathbb{E}(Y|X)]^2
 \end{aligned}$$

其中第 4 个等号由于  $\mathbb{E}(Y|X)$  也是  $X$  的函数，所以根据定理 (3.4)，可以从条件期望中提取出来。

**例 12.** 假设每天到达银行的人数服从泊松分布  $N \sim P(\lambda)$ ，而每个到达银行的人，办理外汇业务的概率为  $p$ 。那么每一天来银行办理外汇业务的人数  $M$  服从二项分布，即  $M|N \sim \text{Bi}(N, p)$ ,  $N \sim P(\lambda)$ 。那么每天来银行办理外汇业务的人数的期望：

$$\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(M|N)] = \mathbb{E}(Np) = p\mathbb{E}(N) = p\lambda$$

数据生成过程 (Data generating process)  
DGP

## 4.2 条件分布

如果对于随机变量  $X, Y$ ，我们取  $1_A(x) = 1$  if  $x \in X(A)$ ，这是一个随机变量  $X$  的函数，因而根据定理 (3.2)，有：

$$\mathbb{E}(Y \cdot 1_A(X)) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X) \cdot 1_A(X)] = \mathbb{E}[h_0(X) \cdot 1_A(X)] \quad (5)$$

如果  $X$  是一个离散的随机变量，那么我们令  $A = \{X = x_i\}$ ，那么：

$$\mathbb{E}(Y \cdot 1\{X = x_i\}) = h_0(x_i) \cdot P(X = x_i)$$

从而：

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y|X = x_i) &= h_0(x_i) = \frac{\mathbb{E}(Y \cdot 1\{X = x_i\})}{P(X = x_i)} \\
 &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} [y_k \cdot P(Y = y_k, X = x_i)]}{P(X = x_i)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot \frac{P(Y = y_k, X = x_i)}{P(X = x_i)}
 \end{aligned}$$

而对于连续型随机变量，根据条件期望的定义，我们希望最小化目标函数  $\mathbb{E}[(Y - h(X))^2]$ ，假设使得目标函数最小化的函数为  $h_0(x)$ ，那么对于任意的

一个连续函数  $\epsilon(x)$ , 都要求:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(Y - h_0(X))^2] &\leq \mathbb{E}[(Y - [h_0(X) + \epsilon(X)])^2] \\ &= \mathbb{E}[(Y - h_0(X))^2 + \epsilon(X)^2 - 2\epsilon(X)[Y - h_0(X)]] \\ &= \mathbb{E}[Y - h_0(X)]^2 + \mathbb{E}[\epsilon(X)^2 - 2\epsilon(X)[Y - h_0(X)]]\end{aligned}$$

因而我们必须要求:  $\mathbb{E}[\epsilon(X)^2 - 2\epsilon(X)[Y - h_0(X)]] \geq 0$ , 或者:

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\epsilon(x)^2 - 2\epsilon(x)[y - h_0(x)]) f(x, y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \epsilon(x)^2 f(x, y) dy dx - 2 \int_{\mathbb{R}} \epsilon(x) \left\{ \int_{\mathbb{R}} [y - h_0(x)] f(x, y) dy \right\} dx\end{aligned}$$

注意由于  $\epsilon(x)$  的任意性, 因而我们实际上必须保证对于任意的  $x$ ,  $\int_{\mathbb{R}} [y - h_0(x)] f(x, y) dy = 0$  都要成立, 否则总可以找到一个  $\epsilon(x)$  使得以上不等式不成立。

如果我们固定  $x$ , 那么以上条件意味着:

$$\int_{\mathbb{R}} y f(x, y) dy = h_0(x) \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = h_0(x) f_X(x)$$

从而我们得到了:

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = h_0(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y f(x, y) dy}{f_X(x)} = \int_{\mathbb{R}} y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$$

对于离散型随机变量, 定义

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{P(Y=y, X=x)}{P(X=x)} = \frac{P(Y=y, X=x)}{\sum_y P(Y=y, X=x)}$$

对于连续型随机变量, 定义

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy}$$

那么条件期望可以写为

$$\mathbb{E}(Y|X) = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_{Y|X}(y|x) dy$$

因而我们把  $f_{Y|X}(y|x)$  定义为**条件密度函数** (conditional density function)。

根据定义, 对于离散型随机变量:

$$\sum_y f_{Y|X}(y|x) = \sum_y \frac{P(Y=y, X=x)}{\sum_y P(Y=y, X=x)} = 1$$

而对于连续型随机变量:

$$\int_{\mathbb{R}} f_{Y|X}(y|x) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy} dy = 1$$

因而条件密度函数也是密度函数。

此外, 如果随机变量  $X$  和  $Y$  是独立的, 那么:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_X(x) \cdot f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$

即两个随机变量独立的充要条件是  $f_{Y|X} = f_Y$ 。在这种情况下:

$$\mathbb{E}(Y|X) = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_{Y|X}(y|x) dy = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_Y(y) dy = \mathbb{E}(Y)$$

因而如果随机变量  $X$  和  $Y$  是独立的, 那么其一定是均值独立的, 反之则不成立。

**例 13.** (条件密度函数) 例 (1) 中, 其条件概率密度函数如下表所示:

$Z \backslash Y$	2	3	4	5	6	7	8	$f_{Z Y}(z Y=2)$	$f_{Z Y}(z Y=4)$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	0	0
$f_{Y Z}(y Z=1)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	0			
$f_{Y Z}(y Z=2)$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	0			

**例 14.** 对于联合正态密度函数:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \right] \right\}$$

其中  $-1 < \rho < 1$ , 其边际密度函数为:

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}} \\
 &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(1-\rho^2)(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} - \frac{\rho(x-\mu_X)}{\sigma_X}\right)^2\right]\right\} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \\
 &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} - \frac{\rho(x-\mu_X)}{\sigma_X}\right)^2\right\} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)}{\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}}\right)^2\right\} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}
 \end{aligned}$$

因而二元联合正态分布的边缘密度分布仍然是正态分布。其条件分布:

$$\begin{aligned}
 f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}} \cdot \sqrt{2\pi}\sigma_X \\
 &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right\} \\
 &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)}{\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}}\right)^2\right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \left[\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)\right]}{\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}}\right)^2\right\}
 \end{aligned}$$

因而  $Y|X \sim N\left(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X), \sigma_Y^2(1-\rho^2)\right)$ , 也是正态分布。进而, 条件期望  $\mathbb{E}(Y|X=x) = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$ 。



使用条件密度函数的定义，我们还可以得到随机变量的贝叶斯公式。由于：

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) \cdot f_{X|Y}(x|y)$$

从而条件密度：

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy} = \frac{f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) dy}$$

以上方程即随机变量的贝叶斯公式，在贝叶斯统计中有大量的应用。

在一些统计模型中，我们经常不直接假设数据的联合分布，而是通过假设条件分布从而对所观察到的数据进行分布上的假定。比如**分层模型**（**hierarchical model**）就通过分层次的假设条件分布对数据的分布进行建模。

**例 15.**（高斯混合模型）如果我们关注某一项疾病指标  $X$ ，该指标对于患者和健康人群具有不同的分布。如果记  $D = 1$  为患者， $D = 0$  为健康人群，记患者该项指标为  $X_1$ ，健康人群该项指标为  $X_0$ ，假设：

$$\begin{cases} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_0 \sim N(\mu_0, \sigma_0^2) \end{cases}$$

即分别假设了患者和健康人群该项指标的分布，那么观察到的指标： $X = DX_1 + (1 - D)X_0$ ，该模型可以写为：

$$\begin{cases} X|D=1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X|D=0 \sim N(\mu_0, \sigma_0^2) \\ D \sim Ber(p) \end{cases}$$

即给定  $D = 1$ ， $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ，即给定  $D = 0$ ， $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ ，或者我们对  $X$  的条件分布进行了假设。此外，通常个人是否患病我们是不能观测的，因而有必要对  $D$  本身进行概率建模，如上通过无条件分布对  $D$  的分布进行了假定。如此我们就完成了对  $X$  的分布的建模。

### 4.3 \* 条件期望的推广

以上我们针对两个随机变量  $Y$  和  $X$  定义了条件期望  $\mathbb{E}(Y|X)$ 。条件期望可以很方便的扩充到多个  $X$  的情形，比如  $\mathbb{E}(Y|X_1, X_2)$  可以定义为：

$$\mathbb{E}(Y|X_1, X_2) = h_0(X_1, X_2) = \arg \min_{h \in \mathbb{H}} \left\{ \mathbb{E} \left[ (Y - h(X_1, X_2))^2 \right] \right\}$$

图 3: 高斯混合模型

图 (3) 展示了该分布的一个示意图, 途中红线和蓝线分别代表健康人群、患者的  $X$  的分布情况, 而黑线代表观察到的实际的  $X$  的分布情况。我们可以使用条件期望计算  $X$  的期望 “

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|D)] \\
 &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[DX_1 + (1-D)X_0|D]\} \\
 &= \mathbb{E}\{D\mathbb{E}(X_1|D) + (1-D)\mathbb{E}(X_0|D)\} \\
 &= \mathbb{E}\{D\mu_1 + (1-D)\mu_0\} \\
 &= \mu_1\mathbb{E}(D) + \mu_0\mathbb{E}(1-D) \\
 &= p\mu_1 + (1-p)\mu_0
 \end{aligned}$$

此外, 如果我们观察到了  $X$ , 也可以使用贝叶斯公式计算其患病的概率:

$$\begin{aligned}
 f_{D|X}(d=1|x) &= \frac{f_{X|D}(x|d=1)f_D(d=1)}{\int_{\mathbb{R}} f_{X|D}(x|\tilde{d})f_D(\tilde{d})d\tilde{d}} \\
 &= \frac{\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1^2}\right)p}{\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1^2}\right)p + \phi\left(\frac{x-\mu_0}{\sigma_0^2}\right)(1-p)}
 \end{aligned}$$

条件期望有如下性质:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X_1, X_2)|X_1] = \mathbb{E}(Y|X_1)$$

即如果我们对随机变量  $Y$ , 先在大的空间上投影, 再在这个大的空间上的一个小的子空间上进行投影, 与直接在这个小的空间上进行投影是相等的。图 (??) 展示了一个线性投影的示例, 注意条件期望是一个更加广义的非线性投影。以上公式我们称之为**迭代期望公式 (Law of iterated expectation)**。定理 (3.4) 可以看成是令  $X_1$  为常数的特殊情形。

以上条件期望的概念还可以继续推广。首先我们引入一个随机变量生成的  $\sigma$ -代数的概念。

**定义 5.** 令  $X$  为一个随机变量, 令

$$\sigma\langle X \rangle = \sigma\langle X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B} \rangle$$

即包含  $\{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}\}$  的最小  $\sigma$ -代数。

**例 16.** 例 (1) 中, 随机变量  $Z$  可能取值为:  $\{1, 2, 3, 4\}$ , 因而:

$$\begin{aligned}\sigma\langle X\rangle &= \sigma\langle Z^{-1}(A): A\in\mathcal{B}\rangle \\ &= \sigma\langle \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}, \\ &\quad \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (4,2)\}, \\ &\quad \{(3,3), (3,4), (4,3)\}, \\ &\quad \{(4,4)\}\rangle\end{aligned}$$

实际上, 如果我们只知道  $Z = 3$ , 我们知道实际发生的情况应该是  $\{(3,3), (3,4), (4,3)\}$  中的某一种。因而如果给定  $Z = 3$ , 我们把之前的 16 种情况降低到了 3 种情况。

在上例中,  $Z$  总共有 4 种可能的取值, 在每种  $Z$  的可能取值的情况下, 都可以把 16 种情况降低为更少的情況, 因而增大了信息量。而如果我们使用随机变量  $Y$ ,  $Y$  共有 7 种可能的取值, 给定  $Y$  也会增大我们的信息量。而如果给定  $(X, Y)$  两个随机变量, 可以更加细分为 10 种情况, 我们可以得到  $\sigma\langle X\rangle \subset \sigma\langle X, Y\rangle, \sigma\langle Y\rangle \subset \sigma\langle X, Y\rangle$ , 即两个随机变量提供了比单独一个随机变量更多的信息。

现在, 如果给定  $Z = 3$ , 那么我们可以把  $\mathbb{E}(Y|Z = 3)$  看成是  $\{(3,3), (3,4), (4,3)\}$  中三种情况下  $Y$  的均值, 即

$$\mathbb{E}(Y|Z = 3) = \frac{1}{3}[(3+3) + (3+4) + (4+3)] = \frac{20}{3}$$

类似的, 对于概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , 我们可以对  $\mathcal{F}$  的一个子  $\sigma$ -代数  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  定义条件期望如下:

**定义 6.** 对于概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ,  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  为一个  $\sigma$ -代数, 如果对于任意的  $A \in \mathcal{G}$ , 随机变量  $H$  满足:

$$\mathbb{E}(Y \cdot 1_A) = \mathbb{E}(H \cdot 1_A)$$

那么我们称  $H$  为给定  $\mathcal{G}$  随机变量  $Y$  的条件期望, 记为  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ 。令  $B \in \mathcal{F}$ , 定义  $\mathcal{P}(B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_B|\mathcal{G})$  为条件概率。

注意以上定义与式 (5) 相同, 所以以上定义的  $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y|\sigma\langle X\rangle)$ 。特别的, 令  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathbb{E}(Y|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}(Y)$ , 即信息量最小的条件期望即为期望本身。而以上的迭代期望公式也可以相应推广, 即如果  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ , 那么:

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}\{\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\}$$

即先在大的信息集上做投影, 再将其投影到小的信息集上, 等价于直接投影在小的信息集上。

## 5 \* 常用多元随机变量

### 5.1 多元随机变量的位置尺度族

对于一个  $n$  维随机向量  $X$ ，不失一般性，我们假设  $\mathbb{E}(X) = 0$ ，我们记其协方差矩阵  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(XX') = \Sigma$ 。根据定义， $\Sigma$  为  $n \times n$  维实对称矩阵，因而该矩阵一定可以被对角化为一个正交矩阵  $\Gamma$  和一个对角矩阵  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ：

$$\Sigma = \Gamma \Lambda \Gamma'$$

其中  $\Gamma$  为正交矩阵。此外，由于  $\text{Var}(X)$  是一个半正定矩阵，因而我们有特征值  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ 。对角矩阵的幂可以写为：

$$\Lambda^p = \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)$$

进而实对称矩阵的幂为：

$$\Sigma^p = \Gamma \Lambda^p \Gamma'$$

特别的， $\Sigma^{-1} = \Gamma \Lambda^{-1} \Gamma' = \Gamma \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) \Gamma'$ ， $\Sigma^{-\frac{1}{2}} = \Gamma \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Gamma' = \Gamma \text{diag}(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}}) \Gamma'$ 。我们有：

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1} \Sigma &= \Gamma \Lambda^{-1} \underbrace{\Gamma' \Gamma}_I \Lambda \Gamma' = \Gamma \underbrace{\Lambda^{-1} \Lambda}_I \Gamma' = I \\ \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma^{-\frac{1}{2}} &= \Gamma \Lambda^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\Gamma' \Gamma}_I \underbrace{\Lambda \Gamma' \Lambda^{-\frac{1}{2}}}_I \Gamma = \Gamma \underbrace{\Lambda^{-\frac{1}{2}} \Lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}}}_I \Gamma' = I \\ \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}} &= \Gamma \Lambda^{\frac{1}{2}} \underbrace{\Gamma' \Gamma}_I \Lambda^{\frac{1}{2}} \Gamma = \Gamma \underbrace{\Lambda^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}}}_\Lambda \Gamma' = \Sigma \end{aligned}$$

现在令  $Y = \Sigma^{-\frac{1}{2}} X$ ，那么：

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \mathbb{E}(\Sigma^{-\frac{1}{2}} X X' \Sigma^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mathbb{E}(X X') \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= I \end{aligned}$$

因而新生成的随机向量  $Y$  为方差为 1 且两两不相关的随机变量。

一般的，对于任意  $n \times n$  维**实对称正定矩阵**  $M$  以及  $n$  维向量  $b$ ，令  $Y = M^{\frac{1}{2}} X + b$ ，那么  $X = M^{-\frac{1}{2}}(Y - b)$ ，那么其分布函数为：

$$F_Y(y) = F_X(M^{-\frac{1}{2}}(y - b))$$

相反，对于满足上式的一系列分布  $\{P_{b,M} : M \text{ 为实对称正定矩阵}\}$ ，我们称

之为多元随机变量的位置尺度族，这是对一元随机变量的自然推广。如果密度函数存在，那么其密度函数为：

$$f_Y(y) = \left| M^{-\frac{1}{2}} \right| f_X \left( M^{-\frac{1}{2}} (y - b) \right)$$

其中  $\left| M^{-\frac{1}{2}} \right|$  为  $M^{-\frac{1}{2}}$  的行列式值。

**例 17.** (多元正态分布) 如果  $Z_1, \dots, Z_n$  为独立的正态分布，那么随机向量  $(Z_1, \dots, Z_n)$  的联合密度函数为：

$$f(z) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{2} \right\} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp \left( -\frac{z'z}{2} \right), x = (z_1, \dots, z_n)'$$

那么给定一个  $n \times n$  维实对称正定矩阵  $\Sigma$  以及  $n$  维向量  $\mu$ ， $X = \Sigma^{\frac{1}{2}}Z + \mu$  的密度函数为：

$$f_{\mu, \Sigma}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \Sigma^{-\frac{1}{2}} \right| \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}, x = (x_1, \dots, x_n)' \quad (6)$$

我们称满足以上密度函数的所有分布为**多元正态分布** (Multivariate normal distribution)，如果随机向量  $X$  服从上述多元正态分布，我们简记为  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ 。由于标准正态分布的期望为 0，协方差矩阵为单位阵，因而  $E(X) = \mu$ ,  $\text{Var}(X) = \Sigma$ 。

## 5.2 多元正态分布

前面在例 (17) 中，我们定义了多元正态分布或者联合正态分布。由于接下来我们将大量使用联合正态分布，这里我们将详细讨论联合正态分布的一些性质。

### 5.2.1 多元正态分布的定义

由前所述， $n$  维多元正态分布实际上是  $n$  个独立的正态分布的联合分布生成的位置尺度族，如果  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ ，那么  $E(X) = \mu$ ,  $\text{Var}(X) = \Sigma$ 。现在，假设随机向量  $X$  的分量两两不相关， $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ ，那么  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ 。带入式 (6) 中，得到：

$$\begin{aligned} f_{\mu, \Sigma}(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \Sigma^{-\frac{1}{2}} \right| \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n f_{\mu_i, \sigma_i^2}(x_i) \end{aligned}$$

其中  $f_{\mu_i, \sigma_i^2}(x_i)$  为一元正态分布的密度函数。因而如果  $X$  服从多元正态分布且其分量之间两两不相关，那么其分量之间也是**独立**的。尽管一般来说不相关得不到独立，但是如果随机变量服从联合正态分布，不相关可以得到独立。

在位置尺度族中我们限定矩阵必须为实对称矩阵，而实际上，任意给定一个矩阵  $M_{k \times n}$  以及一个向量  $\zeta_{k \times 1}$ ，如果  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ ，随机向量  $Y = MX + \zeta$  仍然服从正态分布，即  $Y \sim N(M\mu + \zeta, M\Sigma M')$ 。特别的，令  $k = 1$ ，即  $M$  为  $1 \times n$  维向量，那么  $Y$  为一个一元的随机变量，也服从正态分布。因而正态分布之和也为正态分布。

### 5.2.2 条件分布与边缘分布

根据例 (14)，如果  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ ，那么其边缘分布和条件分布都为正态分布。特别的，对于二维的联合正态分布随机变量  $X = (X_1, X_2) \sim N(\mu, \Sigma)$ ，其中  $\mu = (\mu_1, \mu_2)'$ ，

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

边缘分布  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ，条件分布

$$X_1|X_2 \sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(X_2 - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2)\right)$$

相关系数  $\text{Corr}(X_1, X_2) = \rho$ ，条件期望

$$\mathbb{E}(X_1|X_2) = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(X_2 - \mu_2)$$

现在定义

$$\epsilon = X_1 - \mathbb{E}(X_1|X_2) = X_1 - \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(X_2 - \mu_2) \quad (7)$$

由于正态分布之和（差）仍为正态分布，因而随机变量  $\epsilon$  也为正态分布，其期望  $\mathbb{E}(\epsilon) = \mathbb{E}(X_1 - \mathbb{E}(X_1|X_2)) = 0$ ，方差

$$\text{Var}(\epsilon) = \text{Var}\left(X_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}X_2\right) = \sigma_1^2 + \rho^2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sigma_2^2 - 2 \cdot \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \rho\sigma_1\sigma_2 = (1 - \rho^2)\sigma_1^2$$

因而  $\epsilon \sim N(0, (1 - \rho^2) \sigma_1^2)$ 。此外, 由于:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_2, \epsilon) &= \mathbb{E}(X_2 \epsilon) \\ &= \mathbb{E}\{X_2 [X_1 - \mathbb{E}(X_1|X_2)]\} \\ &= \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}[X_2 \mathbb{E}(X_1|X_2)] \\ &= \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_1 X_2|X_2)] \\ &= \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1 X_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因而  $X_2$  和  $\epsilon$  是不相关的, 而且由于其服从联合正态分布, 因而也是**独立**的。  
将式 (7) 重写, 有:

$$X_1 = \mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (X_2 - \mu_2) + \epsilon = \mu_1 - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \mu_2 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} X_2 + \epsilon$$

上式对二维联合正态进行了分解, 将其中的一个分量  $X_1$  分解为独立的两部分: 另外一个分量  $X_2$  和一个误差项 ( $\epsilon$ ) 的线性相加的形式。

这里需要提示的一点是, 尽管多元正态分布的边缘分布为正态分布, 但是反过来, 两个正态分布在一起不一定就是联合正态分布。比如, 如果  $X_1 \sim N(0, 1)$ , 而给定一个常数  $c$ , 定义

$$X_2 = \begin{cases} X_1 & \text{if } |X_1| > c \\ -X_1 & \text{else} \end{cases}$$

可以计算,  $X_2$  也为正态分布, 但是  $(X_1, X_2)$  显然不是联合正态分布。

以上二元情况还可以推广, 如果  $X = (X_1, X_2)' \sim N(\mu, \Sigma)$ , 其中  $X_1$  为  $k \times 1$  向量,  $X_2$  为  $(n-k) \times 1$  向量,  $\mu = (\mu_1, \mu_2)'$ ,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{k \times k} & \Sigma_{k \times (n-k)} \\ \Sigma_{(n-k) \times k} & \Sigma_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix}$$

那么边缘分布  $X_1 \sim N(\mu_1, \Sigma_{k \times k})$ , 条件分布  $X_1|X_2 \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma})$ , 其中:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \mu_1 + \Sigma_{k \times (n-k)} \Sigma_{(n-k) \times (n-k)}^{-1} (X_2 - \mu_2) \\ \tilde{\Sigma} &= \Sigma_{k \times k} - \Sigma_{k \times (n-k)} \Sigma_{(n-k) \times (n-k)}^{-1} \Sigma_{(n-k) \times k} \end{aligned}$$

## 5.2.3 正态分布的衍生分布

现在如果令  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ , 令  $Y = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(X - \mu)$ , 可以得到  $Y \sim N(0, I)$ , 进而可以得到

$$\begin{aligned} (X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) &= Y' Y \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i^2 \end{aligned}$$

由于  $Y_i \sim N(0, 1)$  且  $Y_i$  之间相互独立, 从而  $(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) = \sum_{i=1}^n Y_i^2 \sim \chi_n^2$ 。

现在考虑分量之间两两不相关且期望、方差相同的联合正态分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2 I)$ , 如果我们有一个正交矩阵  $\Gamma_{n \times n}$ ,  $\Gamma \Gamma' = I$ , 那么  $\mathbb{E}(\Gamma X) = \Gamma \mu$ ,  $\text{Var}(\Gamma X) = \Gamma \text{Var}(X) \Gamma' = \sigma^2 \Gamma \Gamma' = \sigma^2 I$ , 因而:

$$\Gamma X \sim N(\Gamma \mu, \sigma^2 I)$$

特别的, 如果  $X \sim N(0, I)$ , 那么  $\Gamma X \sim N(0, I)$ , 即联合标准正态分布经过一个正交矩阵变换之后, 仍然是联合标准正态分布。

前面我们介绍了投影矩阵的概念, 现在考虑一个投影矩阵  $P$ , 其必然可以分解为  $P = \Gamma' \Lambda \Gamma$ , 其中  $\Gamma$  为正交矩阵, 而  $\Lambda$  为对角矩阵, 且对角元只能为 1 或者 0。现在考虑一个联合正态分布  $X \sim N(0, I)$ , 那么:

$$\begin{aligned} X' P X &= X' \Gamma' \Lambda \Gamma X \\ &= (\Gamma X)' \Lambda (\Gamma X) \end{aligned}$$

根据之前的推理,  $Y = \Gamma X \sim N(0, I)$ , 因而:

$$\begin{aligned} X' P X &= Y' \Lambda Y \\ &= \sum_{i=1}^k Y_i^2 \end{aligned}$$

其中  $k = \text{tr}(P) = \text{tr}(\Lambda)$ , 因而  $X' P X \sim \chi_k^2$ 。

**例 18.** 对于幂等矩阵  $P_0 = \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}'$  以及  $M_0 = I - P_0 = I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}'$ , 并有  $\text{tr}(M_0) = n - 1$ 。对于联合正态分布  $X \sim N(0, I)$ , 有:

$$X' M_0 X = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

对于两个投影矩阵  $M$  和  $P$ , 我们有如下定理:

**定理 4.** 如果  $n$  维随机向量  $X \sim N(0, I)$ , 矩阵  $M$  和  $P$  为投影矩阵, 那么二



次型  $X'MX$  和  $X'PX$  独立的充要条件是  $MP = 0$ 。

**例 19.** 接上例, 我们有  $P_0M_0 = 0$ , 因而二次型  $X'P_0X$  和  $X'M_0X$  是相互独立的。

在以上定理的基础之上, 回顾  $F$  分布的定义, 我们有如下定理:

**定理 5.** 如果  $n$  维随机向量  $X \sim N(0, I)$ , 矩阵  $M$  和  $P$  为投影矩阵且  $MP = 0$ ,  $tr(M) = k_1$ ,  $tr(P) = k_2$ , 那么

$$\frac{X'PX/k_2}{X'MX/k_1} \sim F_{k_2, k_1}$$

类似的, 对于一个向量  $L_{n \times 1}$ , 我们也有如下定理:

**定理 6.** 如果随机向量  $X \sim N(0, I)$ , 矩阵  $P$  为投影矩阵, 那么二次型  $X'PX$  和随机变量  $L'X$  独立的充要条件是  $PL = 0$ 。

回顾  $t$  分布的定义, 相应的我们有如下定理:

**定理 7.** 如果随机向量  $X \sim N(0, I)$ , 矩阵  $P$  为投影矩阵, 向量  $L$  满足  $PL = 0$ ,  $tr(P) = k$ , 且  $L'L = 1$ , 那么

$$\frac{L'X}{\sqrt{X'PX/k}} \sim t_k$$

**例 20.** 如果  $n$  维随机向量  $X \sim N(0, I)$ , 取  $L = \frac{1}{\sqrt{n}}\iota$  以及  $M_0 = I - P_0 = I - \frac{1}{n}\iota\iota'$ , 可以得到:

$$\begin{aligned} M_0L &= \left(I - \frac{1}{n}\iota\iota'\right) \frac{1}{\sqrt{n}}\iota \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\iota - \frac{1}{n}\iota\iota'\iota\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\iota - \frac{1}{n}\iota n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} (\iota - \iota) = 0 \end{aligned}$$

且  $\mathbb{E}(L'X) = 0$ ,  $\text{Var}(L'X) = L'IL = \frac{1}{n}\iota'\iota = 1$ , 因而  $L'X \sim N(0, 1)$ 。根据例 (18),  $X'M_0X \sim \chi^2(n-1)$ , 因而:

$$\frac{L'X}{\sqrt{X'M_0X/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}} \sim t_{n-1}$$

### 5.3 指数分布族

在上一节中我们讨论了单参数指数分布族，这一节中我们把指数分布族进一步推广。更加一般化的指数分布族的定义如下：

**定义 7. (指数分布族)** 对于一个参数族  $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ ，如果其概率密度（质量）函数可以写成如下形式：

$$f(x|\theta) = h(x) \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1}^k [\eta_i(\theta) \cdot T_i(x)] - B(\theta) \right\} \quad (8)$$

那么我们称  $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$  为**指数分布族** (Exponential family)。

如果使用向量的形式，令

$$\eta(\theta) = \begin{bmatrix} \eta_1(\theta) \\ \eta_2(\theta) \\ \vdots \\ \eta_k(\theta) \end{bmatrix}, T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_k(x) \end{bmatrix}$$

为列向量<sup>1</sup>，那么方程 (2) 也可以写为：

$$f(x|\theta) = h(x) \cdot \exp \{ \eta(\theta)' T(x) - B(\theta) \}$$

**例 21.** 正态分布的密度函数：

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

如果令  $\theta = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix} \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ，那么其密度函数可以写为：

$$\begin{aligned} f(x|\mu, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln(\sigma) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\sigma^2} - \ln(\sigma) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} x^2 + \frac{\mu}{\sigma^2} x - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \ln(\sigma) \right\} \end{aligned}$$

令  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ， $\eta(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sigma^2} \\ \frac{\mu}{\sigma^2} \end{pmatrix}$ ， $T(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}$ ， $B(\theta) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \ln(\sigma)$ ，

<sup>1</sup>根据惯例，向量一般写为列向量的形式。

可以得到正态分布也属于指数分布族。

需要注意的是，在指数分布族中，其密度函数：

$$\begin{aligned} f(x|\theta) &= h(x) \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1}^k [\eta_i(\theta) \cdot T_i(x)] - B(\theta) \right\} \\ &= h(x) \cdot \exp \{-B(\theta)\} \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1}^k [\eta_i(\theta) \cdot T_i(x)] \right\} \\ &\triangleq \frac{1}{\mathcal{B}(\theta)} \cdot h(x) \exp \left\{ \sum_{i=1}^k [\eta_i(\theta) \cdot T_i(x)] \right\} \end{aligned}$$

而由于  $\int f(x|\theta) dx = 1$ ，因而

$$\mathcal{B}(\theta) = \int h(x) \exp \left\{ \sum_{i=1}^k [\eta_i(\theta) \cdot T_i(x)] \right\} dx$$

这意味着指数分布族密度函数中的四个函数： $h(x), T(x), \eta(\theta), B(\theta)$  并不是独立任意选取的。

与单参数的指数分布族类似，我们通常会把密度函数重新参数化，即对于指数分布族

$$f(x|\theta) = h(x) \cdot \exp \{ \eta(\theta)' T(x) - B(\theta) \}$$

我们令  $k$  维向量  $\lambda = \eta(\theta)$ ，那么指数分布族可以写为：

$$f(x|\theta) = h(x) \cdot \exp \{ \lambda' T(x) - C(\lambda) \} \quad (9)$$

我们将指数分布族重新参数化为式 (9) 的形式，并将这种形式成为**规范形式** (Canonical form)，新的参数称之为**自然参数** (Natural parameter)，而新的参数的参数空间  $\Lambda$  为**自然参数空间** (Natural parameter space)。

**例 22.** 在正态分布例 (21) 中，可以令  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)' = (-\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{\mu}{\sigma^2})'$ ，而

$$C(\lambda) = -\frac{\lambda_2^2}{4\lambda_1} - \frac{\ln(-2\lambda_1)}{2}$$

其中  $\mu = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1}, \sigma^2 = -\frac{1}{2\lambda_1}$ 。由此我们写出了正态分布的规范形式。

在有了指数分布族的规范形式和向量导数的概念之后，我们可以得到以下定理：

**定理 8.** 对于一个**规范形式**的指数分布族的随机变量  $X \sim P_\lambda \in \{P_\lambda(x), \lambda \in \Lambda\}$ ，有：

1.  $\Lambda$  为一个凸集

2.  $C(\lambda)$  为凸函数 ( $\frac{\partial^2 C(\lambda)}{\partial \lambda \partial \lambda'}$  为正定矩阵)

3.  $\mathbb{E}[T(X)] = \frac{\partial C(\lambda)}{\partial \lambda}$ ,  $\text{Var}[T(X)] = \mathbb{E}[T(X)T(X)'] = \frac{\partial^2 C(\lambda)}{\partial \lambda \partial \lambda'}$

**例 23.** 例 (22) 中我们得到了正态分布的规范形式, 其中  $T(X) = (X^2, X)'$ , 因而使用上述定理:

$$\mathbb{E}[T(X)] = \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} X^2 \\ X \end{bmatrix}\right) = \frac{\partial C(\lambda)}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2^2}{4\lambda_1^2} - \frac{1}{2\lambda_1} \\ -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^2 + \sigma^2 \\ \mu \end{bmatrix}$$

## 习题

**练习 1.** 对于一个向量  $x \in \mathbb{R}^n$  以及一个权重向量  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , 我们希望计算其加权平均:

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i$$

请写出一个幂等矩阵  $P_w$  使得  $P_w x = \bar{x}_w \mathbf{1}$ .

**练习 2.** 若随机向量  $(U, V)$  的分布函数为:

$$F_{U,V}(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}, \theta \in [-1, 1]$$

其中  $P(U \in [0, 1]) = 1, P(V \in [0, 1]) = 1$ , 求其边缘分布函数和边缘密度函数。

**练习 3.** 如果一个随机变量  $X \sim N(0, 1)$ , 现如下定义随机变量  $Y$ :

$$Y = \begin{cases} X - 2 & \text{with prob } 0.5 \\ X + 2 & \text{with prob } 0.5 \end{cases}$$

求  $\text{Var}(Y)$ 。

**练习 4.** 证明  $g(X) \cdot \mathbb{E}(Y|X) = \arg \min_{h \in \mathbb{H}} \left\{ \mathbb{E} \left[ (g(X) \cdot Y - h(X))^2 \right] \right\}$ 。

**练习 5.** 证明  $\text{Var}(Y) = \text{Var}[\mathbb{E}(Y|X)] + \mathbb{E}[\text{Var}(Y|X)]$

**练习 6.** 使用练习 (5) 中的结论, 计算例 (12) 中的  $\text{Var}(M)$ 。

**练习 7.** 如果随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立, 求  $\mathbb{E}(Y|X)$ 。

**练习 8.** 使用上述结论, 产生一组二维正态随机变量  $X = (X_1, X_2)$ , 使得第一个分量方差为 1, 第二个分量方差为 2, 且其相关系数为 0.5。

**练习 9.**  $\Gamma$  分布是否属于指数分布族?

**练习 10.** 使用正态分布的规范形式求  $\mathbb{E}X^3$  及  $\mathbb{E}X^4$ , 并验证  $\frac{\partial^2 C(\lambda)}{\partial \lambda \partial \lambda'}$  的正定性。

**参考文献**

- [1] Athreya, K.B., Lahiri, S.N., 2006. Measure Theory and Probability Theory. Springer, New York.
- [2] Bickel, P.J., Doksum, K.A., 2001. Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics. Prentice-Hall, Inc, New Jersey.
- [3] Casella, G., Berger, R.L., 2002. Statistical inference. Duxbury Pacific Grove, CA.
- [4] Chung, K.L., 2001. A Course in Probability Theory, 3rd editio. ed. Elsevier Ltd., Singapore.
- [5] Greene, W.H., 2013. Econometric analysis, Seventh Ed. ed. Pearson Education.
- [6] Shao, J., 2007. Mathematical Statistics, 2nd ed. Springer, New York.
- [7] Wooldridge, J.M., 2010. Econometric Analysis of Cross Sectional and Panel Data, 2nd ed. The MIT Press, Cambridge.