作业答案 1

司继春

上海对外经贸大学统计与信息学院

练习 1. 计算泊松分布的方差。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}(x-1+1)\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{x'=0}^{\infty}x'\frac{\lambda^{x'}}{x'!}+\lambda \\
&= \lambda^2+\lambda \\
&(x'=x-1)
\end{aligned}
$$

从而其方差：$\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-[\mathbb{E}(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

练习 2. 计算 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 分布的方差。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \\
&= \alpha\beta \int_0^{\infty} x \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha} e^{-x/\beta} dx \\
&= \alpha\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha+1} e^{-x/\beta} dx \\
&= \alpha\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}} (\alpha+1)\beta x^{\alpha+1} e^{-x/\beta} dx \\
&= \alpha\beta(\alpha+1)\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}} x^{\alpha+1} e^{-x/\beta} dx \\
&= \alpha(\alpha+1)\beta^2
\end{aligned}$$

因而 $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$

练习 3. 证明:对于一个随机变量 $X \sim F_X$,随机变量 $Y = F_X(X) \sim Uniform(0,1)$。

$Y \in [0,1]$,其分布函数:

$$\begin{aligned}
P(Y \le y) &= P(F_X(X) \le y) \\
&= P\left(X \le F_X^{-1}(y)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(y)} dF_X \\
&= F_X\left(F_X^{-1}(y)\right) - F_X(-\infty) \\
&= y - 0 = y
\end{aligned}$$

因而 $Y \sim Uniform(0,1)$。

练习 4. 证明 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}[\mathbb{E}(Y|X)] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}(Y|X)]$

两项分开来看:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\mathbb{E}(Y|X)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X) - \mathbb{E}(Y)]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(Y|X))^2 + (\mathbb{E}(Y))^2 - 2\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Y|X)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(Y|X))^2\right] - (\mathbb{E}(Y))^2 \\
\mathbb{E}[\mathrm{Var}(Y|X)] &= \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}\left[[\mathbb{E}(Y|X)]^2\right]
\end{aligned}$$

练习 5. 计算例 (12) 中的 $\mathrm{Var}(M)$。

由于 $\mathrm{Var}(M) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}(M|N)) + \mathbb{E}(\mathrm{Var}(M|N))$,其中 $\mathbb{E}(M|N) = Np$,因而 $\mathrm{Var}(\mathbb{E}(M|N)) = \mathrm{Var}(Np) = p^2\mathrm{Var}(N) = p^2\lambda$,而 $\mathrm{Var}(M|N) = Np(1-p)$,

从而 $\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(M|N\right)\right)=\mathbb{E}\left(Np\left(1-p\right)\right)=\lambda p\left(1-p\right)$。从而 $\mathrm{Var}\left(M\right)=p^2\lambda+\lambda p-\lambda p^2=\lambda p$。

练习 6. 等式 $\mathbb{E}s=\sigma$ 是否成立？如果成立，请证明，如果不成立，请指出其大小关系。

由于 $\mathbb{E}s^2=\sigma^2$，而 $s=\sqrt{s^2}$，$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$，$\sqrt{\cdot}$ 为凹函数，根据 Jesen 不等式，$\mathbb{E}s=\mathbb{E}\sqrt{s^2}\leq\sqrt{\mathbb{E}s^2}=\sigma$。

练习 7. 证明 $F^{-1}\left(q\right)$ 是以下最小化问题的解：

$$\min_c \mathbb{E}\psi_q\left(X-c\right)$$

对上式求一阶条件得到：

$$\begin{aligned}
0&=\frac{\partial\mathbb{E}\psi_q\left(X-c\right)}{\partial c}\\
&=\frac{\partial\int_{\mathbb{R}}\psi_q\left(x-c\right)dF\left(x\right)}{\partial c}\\
&=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\psi_q\left(x-c\right)}{\partial c}dF\left(x\right)\\
&=\int_c^{\infty}\left(-q\right)dF\left(x\right)+\int_{-\infty}^{c}\left(1-q\right)dF\left(x\right)\\
&=-q\left(1-F\left(c\right)\right)+\left(1-q\right)F\left(c\right)\\
&=F\left(c\right)-q
\end{aligned}$$

解上式可得 $c=F^{-1}\left(q\right)$。

练习 8. 求以下分布的充分统计量：

1. 泊松分布样本的联合分布为：

$$f\left(x|\lambda\right)=\prod_{i=1}^{N}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i\ln\left(\lambda\right)-\ln\left(x_i!\right)-\lambda\right]\right\}$$

令 $T\left(x\right)=\sum_{i=1}^{N}x_i$，那么：

$$f\left(x|\lambda\right)=\exp\left\{T\left(x\right)\ln\left(\lambda\right)-N\lambda-\sum_{i=1}^{N}\ln\left(x_i!\right)\right\}$$

根据因子分解定理可得，$T\left(x\right)$ 为充分统计量。

或者，另外一种方法是，将泊松分布写为指数分布族的形式，即：

$$f\left(x_i|\lambda\right)=\frac{1}{x_i!}\exp\left\{\lambda x_i-\lambda\right\}$$

因而 $T(x)=\sum_{i=1}^{N} x_i$ 为充分统计量。

2. 指数分布

   样本的联合分布为:

$$f(x|\lambda)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\beta}\exp\left\{-\frac{x-a}{\beta}\right\}=\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{x_i}{\beta}+\frac{a}{\beta}-\ln\beta\right]\right\}$$

   因而 $T(x)=\sum_{i=1}^{N} x_i$ 为充分统计量。

3. 正态分布

   正态分布的密度函数写成指数分布族的形式为:

$$\begin{aligned}
f\left(x_i|\mu,\sigma^2\right)&=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\\
&=\exp\left\{-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\ln\sigma-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\\
&=\exp\left\{-\frac{x_i^2-2\mu x_i+\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\ln\sigma\right\}\\
&=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}x_i^2+\frac{\mu}{\sigma^2}x_i-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\ln\sigma\right\}
\end{aligned}$$

   因而 $T_1(x_i)=x_i^2$，$T_2(x_i)=x_i$，因而 $T(x)=\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2,\sum_{i=1}^{N} x_i\right]'$ 为正态分布的充分统计量。