期中考试

2017 年 11 月 30 日

1. 证明：

   (a) 若 $\mathbb{E}(u|X)=0$，那么 $\mathrm{Cov}(u,X)=0$

   由于 $\mathbb{E}(u)=\mathbb{E}[\mathbb{E}(u|X)]=0$，此外 $\mathbb{E}(uX)=\mathbb{E}[\mathbb{E}(uX|X)]=\mathbb{E}[X\mathbb{E}(u|X)]=0$，从而 $\mathrm{Cov}(u,X)=\mathbb{E}(uX)-\mathbb{E}(u)\mathbb{E}(X)=0$。

   (b) 如果 $d\sim Ber(0.5), x_1\sim N(3,1), x_2\sim N(-3,1)$，且三者相互独立，令 $x=d\cdot x_1+(1-d)x_2$，求 $\mathrm{Var}(x)$

   该随机变量的期望：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x)&=\mathbb{E}[de_1+(1-d)e_2]=\mathbb{E}(d)\mathbb{E}(e_1)+\mathbb{E}(1-d)\mathbb{E}(e_2)\\&=0.5\times 3+0.5\times(-3)=0\end{aligned}$$

   该随机变量的方差：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(x)&=\mathrm{Var}[(de_1+(1-d)e_2)]\\&=\mathbb{E}(\mathrm{Var}[(de_1+(1-d)e_2)|d])\\&+\mathrm{Var}(\mathbb{E}[(de_1+(1-d)e_2)|d])\\&=\mathbb{E}\left[d^2\times 1+(1-d)^2\times 1\right]\\&+\mathrm{Var}[d\times 3+(1-d)\times(-3)]\\&=0.5+0.5+\mathrm{Var}[d\times 6-3]\\&=1+\frac{36}{4}=10\end{aligned}$$

2. 已知 Beta 分布的密度函数为：

$$f(x|\alpha,\beta)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

   若一组 i.i.d 样本 $x_i, i=1,...,N$ 服从 Beta 分布，求 Beta 分布的充分统计量。

   该样本的联合分布为：

$$\begin{aligned}f(x|\alpha,\beta)&=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x_i^{\alpha-1}(1-x_i)^{\beta-1}\\&==\frac{1}{B(\alpha,\beta)^N}\left(\prod_{i=1}^{N}x_i\right)^{\alpha-1}\left(\prod_{i=1}^{N}(1-x_i)\right)^{\beta-1}\end{aligned}$$

   因而根据因子化定理，充分统计量为：

$$\left(\prod_{i=1}^{N}x_i,\prod_{i=1}^{N}(1-x_i)\right)$$

。或者，观察到该分布为指数分布族，可以将该分布写为指数分布族的形式，通过指数分布族的性质，可以直接写出该分布的充分统计量为：

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i, \sum_{i=1}^{N}(1-x_i)\right)$$

3. 若 $x_i \sim P(\lambda)$，求：

   (a) $\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$ 的概率极限；
   由于 $\mathbb{E}\left(x_i^2\right) = \mathrm{Var}(x_i) + [\mathbb{E}(x_i)]^2 = \lambda + \lambda^2$，因而

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \xrightarrow{p} \mathbb{E}\left(x_i^2\right) = \lambda + \lambda^2$$

   (b) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$，求 $\bar{x}^2$ 的极限分布。
   由于 $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}(x_i) = \lambda$，因而 $\bar{x}^2$ 的概率极限为 λ^2。根据 delta 方法，首先在 λ 处进行泰勒展开，得到：

$$\begin{aligned}
\sqrt{N}\bar{x}^2 - \sqrt{N}\lambda^2 &= \sqrt{N}2\lambda(\bar{x}-\lambda) + \sqrt{N}2(\bar{x}-\lambda)^2 \\
&= (2\lambda)\left[\sqrt{N}(\bar{x}-\lambda)\right] + 2\sqrt{N}(\bar{x}-\lambda)(\bar{x}-\lambda) \\
&= (2\lambda)\left[\sqrt{N}(\bar{x}-\lambda)\right] + 2O_p(1)\,o_p(1) \\
&= (2\lambda)\left[\sqrt{N}(\bar{x}-\lambda)\right] + o_p(1) \\
&\xrightarrow{D} (2\lambda)\left[\sqrt{N}(\bar{x}-\lambda)\right] \\
&\overset{a}{\sim} N\left(0, \lambda \times 4\lambda^2\right)
\end{aligned}$$

   从而

$$\sqrt{N}\left(\bar{x}^2 - \lambda^2\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, 4\lambda^3\right)$$

   或者：

$$\bar{x}^2 \overset{a}{\sim} N\left(\lambda^2, \frac{4\lambda^3}{N}\right)$$