第十一节 · 随机过程

司继春

上海对外经贸大学统计与信息学院

在此之前我们已经学习了随机变量、随机向量等概念，其中随机变量一般指一元随机变量，而随机向量代表有限维的多元随机变量。在这节课中，我们将讨论随机向量在无限维的扩展，即随机过程。

1 随机过程

回忆在概率论的学习中，我们将随机变量定义为在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ 上，从样本空间 Ω 到实轴上的一个映射 $X : \Omega \to \mathbb{R}^*$；而随机向量被定义为在概率空间中，从样本空间 Ω 到 n 维欧几里得空间的函数，$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$。现在，我们将随机向量的概念扩展到无穷维，就有了**随机过程**（**stochastic process**，或者 **random process**）的概念：

定义 1. （随机过程）在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ 上，如果对于指标集（index set）A 上，$X_a(\omega), a \in A$ 为一个随机变量，那么随机变量族 $\{X_a(\omega), a \in A\}$ 称为一个随机过程。

指标集通常是一个具有无穷多元素的集合，比如通常可以选取整数集 $\mathbb{Z}$、自然数集 $\mathbb{Z}^+$ 实数集 $\mathbb{R}$、正实数集 $\mathbb{R}^+$ 或者 $[0,1]$ 区间等。习惯上，我们通常将指标集解释为时间。如果指标集为可数集，我们通常称其为离散时间随机过程；而如果指标集为连续统，则称其为连续时间随机过程。

例 1. 令样本空间 $\Omega = [0,1]$ 的闭区间，概率函数 $\mathscr{P}$ 为该区间上的均匀分布，那么以下定义都是随机过程：

$$
\begin{aligned}
X_n(\omega) &= \sin 2\pi n\omega, n = 0, 1, ... \\
Y_t(\omega) &= \sin 2\pi t\omega, t \in [0, \infty) \\
Z_{n,t}(\omega) &= X_n^2(\omega) + Y_t^2(\omega)
\end{aligned}
$$

注意其中在 $Z_{n,t}$ 的定义中，指标集为 $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+$。

在接下来的讨论中，为叙述方便，我们在标记中忽略 ω，比如随机过程 $X_n(\omega)$ 将直接记为 X_n。

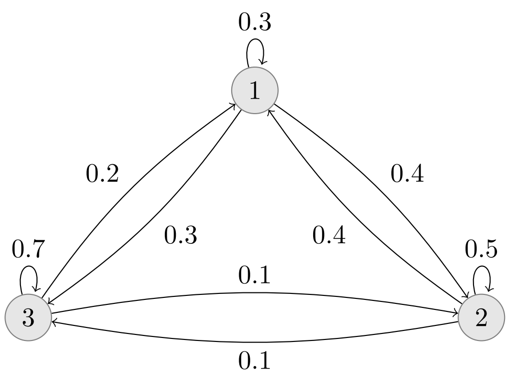

图 1: 三个食堂之间的转移

随机过程 $X_a, a \in A$ 的任意一个实现称为一个样本路径（sample path）。例如在例 (1) 中，如果 ω 的实现为 $\omega = 0.5$，那么 $X_n(\omega) = \sin n\pi$ 即该随机过程的一个实现。

例 2. （简单的马尔可夫链）如果一个学校有三个食堂，分别标为 $\{1,2,3\}$。学生在这三个食堂之间的选择符合如 图 (1) 的规律，比如如果上一顿在一餐厅就餐，那么下一次吃饭仍然在一餐厅的学生比率为 0.3，去二餐厅的比率为 0.4，去三餐厅的比率为 0.3 等等。以 $n = 1, 2, ...$ 为指标集，每一次去的餐厅 $X_n \in \{1,2,3\}$ 是一个随机变量，$\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 就构成了一个离散时间的随机过程。如此，如果我们记录某一位同学的就餐路径，如 $\{2,2,1,2,1,3,3,3,1,......\}$，就形成了一条样本路径。

例 3. （i.i.d 序列）令 $\{X_n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 为一系列独立同分布的随机变量，显然 $\{X_n\}$ 为一个随机过程。

例 4. （一维随机游走）假设在一维数轴上有一个质点，其初始位置为 0，每一期以 0.5 的概率向左或者向右移动一个单位。记第 n 时刻的位置为 X_n，那么 $\{X_n, n \in \mathbb{Z}^+, X_n \in \mathbb{Z}\}$ 为取整数值的随机过程，且 $X_0 = 0$，$X_{n+1} = X_n + \epsilon_{n+1}$，其中 $P(\epsilon_n = 1) = P(\epsilon_n = -1) = 0.5$。如此，我们有：

$$X_n = X_{n-1} + \epsilon_n = X_{n-2} + \epsilon_n + \epsilon_{n-1} = \cdots = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$$

注意在这里 $\{\epsilon_n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 为一系列独立同分布的随机变量，因而一维随机游走可以看做一系列独立同分布随机变量的和。

例 5. （高斯随机游走）假设 $\{\epsilon_n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 为一系列独立同分布的随机变量，且 $\epsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$，那么：

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \sim N(0, n\sigma^2)$$

由此我们定义了一个新的随机过程 $\{X_n, n \in \mathbb{Z}^+\}$。

在随机向量中，我们可以使用联合分布这一工具对随机向量进行描述。然而，在随机过程中，我们潜在的有无穷多个随机变量，因而无法定义这无穷多个随机变量的联合分布函数。为了描述随机过程，我们通常使用有限维分布族来定义随机过程的概率分布。

定义 2.（有限维分布族）对于任意的正整数 $1 \leq k < \infty$，以及任意的 $(a_1, a_2, ..., a_k) \in A^k$，所有的有限维分布：

$$\left\{P_{a_1,...,a_k}(B_1 \times ... \times B_k) = \mathscr{P}\left(X_{a_1}^{-1}(B_1) \times ... \times X_{a_1}^{-1}(B_k)\right)\right\}$$

称为有限维分布族（family of finite dimentional distributions, fdds）。

根据联合分布的性质我们知道，联合分布必然满足一些性质，比如：

假设 1.（一致性条件）对于任意的正整数 $1 \leq k < \infty$，以及任意的 $(a_1, a_2, ..., a_k) \in A^k$，假设：

（*a*）$P_{a_1,...,a_k}(B_1 \times ... \times B_{k-1} \times \mathbb{R}) = P_{a_1,...,a_{k-1}}(B_1 \times ... \times B_{k-1})$

（*b*）$P_{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k}}(B_{i_1} \times ... \times B_{i_k}) = P_{a_1,a_2,...,a_k}(B_1 \times ... \times B_{k-1})$

其中假设 (a) 表明联合分布与边缘分布之间的关系；假设 (b) 表明对时间重排不会影响概率值。我们称以上性质为一致性条件（consistency conditions）。

一个自然的问题是，给定一个有限维分布族 Q，那么是否存在一个实值的随机过程 $\{X_a, a \in A\}$ 刚好符合有限维分布族的设定？Kolmogorov（1965）证明，只要有限维分布族 Q 满足以上的一致性条件，那么总会存在一个随机过程的有限维分布族与 Q 一致。

定理 1.（*Kolmogorov* 一致性定理）给定一个有限维分布族 $Q = \{P_{a_1,a_2,...,a_k}\}$ 满足以上的一致性条件，那么存在一个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ 和一个定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ 上的随机过程 $\{X_a, a \in A\}$，使得 Q 刚好是该随机过程的有限维分布。

该定理意味着，对于一个随机过程，我们只要研究起有限维分布族，就可以完全描述整个随机过程。因而后续的学习中，我们将主要使用有限维分布族作为工具研究随机过程。

例 6.（泊松过程）对于一个 $\lambda > 0$，$t \in [0, \infty)$，如果：

1. $X_0 = 0$
2. 对于任意的 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k \leq \infty$，$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ 为独立的随机变量
3. 对于任意的 $0 \leq s \leq t < \infty$，随机变量 $X_t - X_s \sim P(\lambda(t-s))$，即参数为 $\lambda(t-s)$ 的泊松分布

那么 X_t 被称为强度为 λ 的泊松过程。

以上定义中，第一条约束了随机过程的起始位置；第二条意味着，只要时间不重叠，泊松过程在不同时间段的增量之间相互独立，因而也称为"独立增量性"(independent increment)；第三条意味着，任意相同的时间间隔内，增量的分布时完全相同的，该性质也被称为"平稳增量性"(stationary increment)。这两条性质实际上对随机过程 $\{X_t, t \in [0,\infty)\}$ 的有限维分布做出了限制。比如，根据第三条要求，对于任意的 t，$X_t \sim P(\lambda t)$，而对于任意的 $0 \leq s \leq t < \infty$，(X_s, X_t) 的联合分布可以通过第二条、第三条要求写出。

独立增量性和平稳增量性在很多随机过程的研究中占有十分重要的位置，为此法国数学家 Paul Lévy 提出了 Lévy 过程：

定义 3. （Lévy 过程）如果随机过程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 满足以下条件：

1. $X_0 = 0$
2. 独立增量性：于任意的 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k \leq \infty, X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ 为独立的随机变量
3. 平稳增量性：对于任意的 $0 \leq s \leq t < \infty$，$X_t - X_s$ 具有与 X_{t-s} 同样的分布
4. 依概率连续性：对于任意的 $\epsilon > 0$，$\lim_{h\to 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0$

那么该随机过程被称为 Lévy 过程。

注意以上第 4 条连续性并没有要求 X_t 一定是连续的，而仅仅要求不连续的点的概率为 0。比如，对于泊松过程，由于 $X_{t+h} - X_t \sim P(\lambda h)$，对于任意 $\epsilon < 1$，$P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 1 - e^{-\lambda h}$，当 $h \to 0$ 时，该概率趋向于 0，因而让然满足第 4 条要求。因而泊松过程也是 Lévy 过程。

另外一个常见的 Lévy 过程的例子是布朗运动：

例 7. （布朗运动）如果随机过程 $\{W_t, t \geq 0\}$ 满足：

1. $W_0 = 0$
2. $\{W_t, t \geq 0\}$ 是一个 Lévy 过程
3. $W_t \sim N(0, t)$

那么我们称 $\{W_t, t \geq 0\}$ 为**布朗运动(Brownian motion)**或者**维纳过程(Wiener process)**。

注意根据独立平稳增量性，布朗运动的增量也服从正态分布：

$$W_t - W_s \sim W_{t-s} \sim N(0, t-s), t \geq s$$

这与例 (5) 中的随机游走类似，然而随机游走为离散时间的随机过程，而维纳过程是一个连续时间的随机过程。实际上维纳过程可以看做是当时间间隔趋向于无穷小时随机游走的极限。

更一般的，布朗运动是高斯过程的一个特例：

定义 4. （高斯过程）如果连续时间随机过程 $\{X_t, t \in A\}$ 的有限维联合分布都是联合正态分布，那么我们称 $\{X_t, t \in A\}$ 为**高斯过程**（**Gaussian process**）。

显然，布朗运动是属于高斯过程。对于一个高斯过程，可以定义均值函数：$\mu(t) = \mathbb{E}(X_t)$ 以及协方差函数：$\sigma(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$。由于联合正态分布完全依赖于其期望和协方差矩阵，因而期望函数和协方差函数完全定义了高斯过程。对于布朗运动，其均值函数为 $\mu(t) = 0$，协方差函数为：

$$
\begin{aligned}
\sigma(s,t) &= \mathrm{Cov}(X_s, X_t) \\
&= \mathbb{E}(X_s X_t) \\
&= \mathbb{E}\left[X_{\min\{s,t\}}\left(X_{\max\{s,t\}} - X_{\min\{s,t\}} + X_{\min\{s,t\}}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left(X^2_{\min\{s,t\}}\right) \\
&= \min\{s,t\}
\end{aligned}
$$

例 8. （布朗桥）如果 W_t 是一个维纳过程，那么定义：

$$B_t = W_t - tW_1, t \in [0,1]$$

易知 $B_0 = B_1 = 0$，我们称 $\{B_t, t \in [0,1]\}$ 为一个**布朗桥**（**Brownian bridge**）。布朗桥同样也属于高斯过程。

习题

练习 1. 使用任意计算机语言生成泊松过程的路径。

练习 2. 使用任意计算机语言生成布朗运动的路径。

练习 3. 求布朗桥的期望函数和协方差函数。

参考文献

[1] Athreya, K.B., Lahiri, S.N., 2006. Measure Theory and Probability Theory. Springer, New York.