作业答案 1

司继春

上海对外经贸大学统计与信息学院

练习 1. 计算泊松分布的方差。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\left(x-1+1\right)\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\left(x-1\right)\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{x'=0}^{\infty}x'\frac{\lambda^{x'}}{x'!}+\lambda \\
&= \lambda^2+\lambda \\
&\left(x'=x-1\right)
\end{aligned}
$$

从而其方差：$\mathrm{Var}\left(X\right)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\left[\mathbb{E}\left(X\right)\right]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

练习 2. 计算 $\Gamma\left(\alpha,\beta\right)$ 分布的方差。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \\
&= \alpha\beta \int_0^{\infty} x \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha} e^{-x/\beta} dx \\
&= \alpha\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha+1} e^{-x/\beta} dx \\
&= \alpha\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}} (\alpha+1)\beta x^{\alpha+1} e^{-x/\beta} dx \\
&= \alpha\beta(\alpha+1)\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}} x^{\alpha+1} e^{-x/\beta} dx \\
&= \alpha(\alpha+1)\beta^2
\end{aligned}$$

因而 $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$

练习 3. 证明：对于一个随机变量 $X \sim F_X$，随机变量 $Y = F_X(X) \sim Uniform(0,1)$。

$Y \in [0,1]$，其分布函数：

$$\begin{aligned}
P(Y \le y) &= P(F_X(X) \le y) \\
&= P\left(X \le F_X^{-1}(y)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(y)} dF_X \\
&= F_X\left(F_X^{-1}(y)\right) - F_X(-\infty) \\
&= y - 0 = y
\end{aligned}$$

因而 $Y \sim Uniform(0,1)$。

练习 4. 证明 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}[\mathbb{E}(Y|X)] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}(Y|X)]$

两项分开来看：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\mathbb{E}(Y|X)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X) - \mathbb{E}(Y)]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(Y|X))^2 + (\mathbb{E}(Y))^2 - 2\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Y|X)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(Y|X))^2\right] - (\mathbb{E}(Y))^2 \\
\mathbb{E}[\mathrm{Var}(Y|X)] &= \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}\left[[\mathbb{E}(Y|X)]^2\right]
\end{aligned}$$

练习 5. 计算例 (12) 中的 $\mathrm{Var}(M)$。

由于 $\mathrm{Var}(M) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}(M|N)) + \mathbb{E}(\mathrm{Var}(M|N))$，其中 $\mathbb{E}(M|N) = Np$，因而 $\mathrm{Var}(\mathbb{E}(M|N)) = \mathrm{Var}(Np) = p^2\mathrm{Var}(N) = p^2\lambda$，而 $\mathrm{Var}(M|N) = Np(1-p)$，从而 $\mathbb{E}(\mathrm{Var}(M|N)) = \mathbb{E}(Np(1-p)) = \lambda p(1-p)$。从而 $\mathrm{Var}(M) = p^2\lambda + \lambda p - \lambda p^2 = \lambda p$。

练习 6. 等式 $\mathbb{E}s = \sigma$ 是否成立？如果成立，请证明，如果不成立，请指出其大小关系。

由于 $\mathbb{E}s^2 = \sigma^2$，而 $s = \sqrt{s^2}$，$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$，$\sqrt{\cdot}$ 为凹函数，根据 Jesen 不等式，$\mathbb{E}s = \mathbb{E}\sqrt{s^2} \leq \sqrt{\mathbb{E}s^2} = \sigma$。

练习 7. 证明 $F^{-1}(q)$ 是以下最小化问题的解：

$$\min_c \mathbb{E}\psi_q(X-c)$$

对上式求一阶条件得到：

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \mathbb{E}\psi_q(X-c)}{\partial c} \\
&= \frac{\partial \int_{\mathbb{R}} \psi_q(x-c)\,dF(x)}{\partial c} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \psi_q(x-c)}{\partial c} dF(x) \\
&= \int_c^{\infty} (-q)\,dF(x) + \int_{-\infty}^{c} (1-q)\,dF(x) \\
&= -q(1-F(c)) + (1-q)F(c) \\
&= F(c) - q
\end{aligned}$$

解上式可得 $c = F^{-1}(q)$。

练习 8. 求以下分布的充分统计量：

1. 泊松分布样本的联合分布为：

$$f(x|\lambda) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \exp\left\{\sum_{i=1}^{N} [x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!) - \lambda]\right\}$$

令 $T(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i$，那么：

$$f(x|\lambda) = \exp\left\{T(x)\ln(\lambda) - N\lambda - \sum_{i=1}^{N} \ln(x_i!)\right\}$$

根据因子分解定理可得，$T(x)$ 为充分统计量。

或者，另外一种方法是，将泊松分布写为指数分布族的形式，即：

$$f(x_i|\lambda) = \frac{1}{x_i!}\exp\{\lambda x_i - \lambda\}$$

因而 $T(x) = \sum_{i=1}^N x_i$ 为充分统计量。

2. 指数分布

样本的联合分布为：

$$f(x|\lambda) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\beta}\exp\left\{-\frac{x-a}{\beta}\right\} = \exp\left\{\sum_{i=1}^N\left[-\frac{x_i}{\beta}+\frac{a}{\beta}-\ln\beta\right]\right\}$$

因而 $T(x) = \sum_{i=1}^N x_i$ 为充分统计量。

3. 正态分布

正态分布的密度函数写成指数分布族的形式为：

$$\begin{aligned}
f\left(x_i|\mu,\sigma^2\right) &= \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \ln\sigma - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{x_i^2-2\mu x_i+\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \ln\sigma\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}x_i - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \ln\sigma\right\}
\end{aligned}$$

因而 $T_1(x_i) = x_i^2$，$T_2(x_i) = x_i$，因而 $T(x) = \left[\sum_{i=1}^N x_i^2, \sum_{i=1}^N x_i\right]'$ 为正态分布的充分统计量。

练习 9. 已知：如果 $x \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，那么

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(x-\mathbb{E}(x))^4\right] &= 3\sigma^4 \\
\mathbb{E}\left[(x-\mathbb{E}(x))^6\right] &= 15\sigma^6 \\
\mathbb{E}\left[(x-\mathbb{E}(x))^8\right] &= 105\sigma^8
\end{aligned}$$

对于样本偏度系数：

$$b_1 = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N(x_i-\bar{x})^3}{s^3}$$

请计算：

1. b_1 的概率极限

   由于 $\frac{N^2}{(N-1)(N-2)} \to 1$，根据大数定律，$\bar{x} \xrightarrow{p} \mathbb{E}(x) = \mu$，

   $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^3 \xrightarrow{p} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^3 \xrightarrow{p} \mathbb{E}\left((x_i-\mu)^3\right)$$

   即收敛到峰度系数。

2. $\sqrt{N}b_1$ 的极限分布

   $$b_1 = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^3}{s^3} \to \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^3}{s^3} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)^3 \xrightarrow{p} \mathbb{E}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^3$$

   即总体的偏度系数。

   $$\sqrt{N}b_1 \xrightarrow{p} \sqrt{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^3 \overset{a}{\sim} N\left(0, \mathrm{Var}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right) \sim N(0,15)$$

练习 10. 若 $x_i \sim \left(\mu, \sigma^2\right)$，求 $\sqrt{N}\ln(\bar{x})$ 的极限分布。

首先在 $\bar{x}$ 的概率极限 μ 处进行泰勒展开，得到：

$$\begin{aligned}
\sqrt{N}\ln(\bar{x}) - \sqrt{N}\ln(\mu) &= \sqrt{N}\frac{1}{\mu}(\bar{x}-\mu) + \sqrt{N}O\left((\bar{x}-\mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{\mu}\sqrt{N}(\bar{x}-\mu) + O\left(\sqrt{N}(\bar{x}-\mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{\mu}\sqrt{N}(\bar{x}-\mu) + O\left(O_p(1)\cdot o_p(1)\right) \\
&= \frac{1}{\mu}\sqrt{N}(\bar{x}-\mu) + o_p(1) \\
&\xrightarrow{D} \frac{1}{\mu}\sqrt{N}(\bar{x}-\mu) \\
&\overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)
\end{aligned}$$

从而

$$\sqrt{N}\left(\ln(\bar{x}) - \ln(\mu)\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)$$

练习 11. 若 $x_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，求 $\sqrt{N}\bar{x}^2$ 的极限分布和 $\sqrt{N}\ \overline{x^2}$ 的极限分布。

对于 $\sqrt{N}\bar{x}^2$，在 $\bar{x}$ 的概率极限 μ 处进行泰勒展开，得到：

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\bar{x}^2-\sqrt{N}\mu^2&=\sqrt{N}2\mu\left(\bar{x}-\mu\right)+\sqrt{N}\frac{1}{2}\cdot 2\left(\bar{x}-\mu\right)^2\\&=\sqrt{N}2\mu\left(\bar{x}-\mu\right)+\sqrt{N}\left(\bar{x}-\mu\right)\left(\bar{x}-\mu\right)\\&=2\mu\sqrt{N}\left(\bar{x}-\mu\right)+\sqrt{N}O_p\left(1\right)o_p\left(1\right)\\&\xrightarrow{D}2\mu\sqrt{N}\left(\bar{x}-\mu\right)\\&\overset{a}{\sim}N\left(0,4\mu^2\sigma^2\right)\end{aligned}$$

从而 $\sqrt{N}\left(\bar{x}^2-\mu^2\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,4\mu^2\sigma^2\right)$。

而对于 $\sqrt{N}\ \overline{x^2}$，由于：

$$\mathbb{E}\left(x_i^2\right)=\mu^2+\sigma^4$$

以及：

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^4\right)=3$$

可以计算得到，$\mathbb{E}\left(x_i^4\right)=13\mu^4+3\sigma^4+6\mu^2\sigma^2$，因而：

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(x_i^2\right)&=\mathbb{E}\left(x_i^4\right)-\left[\mathbb{E}\left(x_i^2\right)\right]^2\\&=12\mu^4+2\sigma^4+4\mu^2\sigma^2\end{aligned}$$

根据大数定律，得到：

$$\sqrt{N}\left[\overline{x^2}-\left(\mu^2+\sigma^2\right)\right]\overset{a}{\sim}N\left(0,12\mu^4+2\sigma^4+4\mu^2\sigma^2\right)$$

练习 12. 求以下分布总体的矩估计，并验证其无偏性和一致性。

1. $x_i\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$

   首先，计算总体矩。即：

$$\begin{cases}\mathbb{E}\left(x_i\right)=\mu\\\mathbb{E}\left(x_i^2\right)=\operatorname{Var}\left(x_i\right)+\left[\mathbb{E}\left(x_i\right)\right]^2=\mu^2+\sigma^2\end{cases}$$

   其次，我们有样本矩：

$$\begin{cases}m_1=\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i\\m_2=\overline{x^2}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i^2\end{cases}$$

为了估计未知参数 μ, σ^2，我们令样本矩等于总体矩，即：

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} \end{cases}$$

联立以上方程组，得到估计：

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - \hat{\mu}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \end{cases}$$

首先验证两个估计的无偏性。首先，对于两个样本矩，我们有：

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(m_1\right) = \mathbb{E}\left(\bar{x}\right) = \mu \\ \mathbb{E}\left(m_2\right) = \mathbb{E}\left(\overline{x^2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left(x_i^2\right) = \mu^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

因而 $\mathbb{E}\left(\hat{\mu}\right) = \mu$，而根据 Jensen 不等式，

$$\mathbb{E}\left(\hat{\sigma}^2\right) = \mathbb{E}\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right) = \mu^2 + \sigma^2 - \mathbb{E}\left(\bar{x}^2\right) \leq \mu^2 + \sigma^2 - \left[\mathbb{E}\left(\bar{x}\right)\right]^2 = \sigma^2$$

因而 $\hat{\mu}$ 是 μ 的无偏估计，而 $\hat{\sigma}^2$ 不是 σ^2 的无偏估计。

而对于一致性，根据大数定律，我们有：

$$\begin{cases} m_1 = \bar{x} \xrightarrow{p} \mathbb{E}\left(x_i\right) \mu \\ m_2 = \overline{x^2} = \xrightarrow{p} \mathbb{E}\left(x_i^2\right) = \mu^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

因而 $\hat{\mu} = \bar{x} \xrightarrow{p} \mu$，而 $\hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \xrightarrow{p} \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$，即 $\hat{\mu}$ 是 μ 的一致估计，而 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的一致估计。

2. $x_i \sim P\left(\lambda\right)$

练习 13. 若 $x_i \sim Ber\left(p_0\right)$，求其矩估计，并给出 p_0 的 95% 的置信区间的计算公式。

由于总体矩为：$\mathbb{E}\left(x_i\right) = p_0$，令总体矩与样本矩相等，得到矩估计：

$$\hat{p} = \bar{x}$$

根据中心极限定理，有：

$$\sqrt{N}\left(\hat{p} - p_0\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, p_0\left(1 - p_0\right)\right)$$

或者等价的：

$$\hat{p} \overset{a}{\sim} N\left(p_0, \frac{p_0\left(1-p_0\right)}{N}\right)$$

因而其 95% 置信区间可以由：

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{N}}} \leq 1.96\right) = 95\%$$

得到，由于 p_0 不可观测，在渐进方差的估计中，我们使用 $\hat{p}$ 代替 p_0，因而其 95% 置信区间为：

$$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{N}}, \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{N}}\right]$$

练习 14. 若 $x_i \sim U\left(a,b\right)$ $i.i.d$，求其矩估计，并验证其一致性。

首先，计算总体矩。即：

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(x_i\right) = \frac{a+b}{2} \\ \mathbb{E}\left(x_i^2\right) = \mathrm{Var}\left(x_i\right) + \left[\mathbb{E}\left(x_i\right)\right]^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} \end{cases}$$

其次，我们有样本矩：

$$\begin{cases} m_1 = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \\ m_2 = \overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{cases}$$

为了估计未知参数 a, b，我们令样本矩等于总体矩，即：

$$\begin{cases} \frac{\hat{a}+\hat{b}}{2} = \bar{x} \\ \frac{\left(\hat{b}-\hat{a}\right)^2}{12} + \frac{\left(\hat{a}+\hat{b}\right)^2}{4} = \overline{x^2} \end{cases}$$

联立以上方程组，得到估计：

$$\begin{cases} \hat{a} = \bar{x} - \sqrt{3}\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \\ \hat{b} = \bar{x} + \sqrt{3}\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \end{cases}$$

为了验证一致性，首先根据大数定律，有：

$$\begin{cases} m_1 = \bar{x} \xrightarrow{p} \mathbb{E}\left(x_i\right) = \frac{a+b}{2} \\ m_2 = \overline{x^2} \xrightarrow{p} \mathbb{E}\left(x_i^2\right) \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} \end{cases}$$

因而 $\hat{a} \xrightarrow{p} \frac{a+b}{2} - \sqrt{3}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a$，同理 $\hat{b} \xrightarrow{p} b$。

练习 15. 若 $x_i \sim P(\lambda_0), i=1,...,N$，请完成以下步骤：

1. 写出极大似然函数 $L(\lambda|x)$
2. 写出极大似然函数的概率极限 $\mathscr{L}(\lambda)=\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}L(\lambda|x)\right)$
3. 证明 $\lambda_0=\arg\max_\lambda \mathscr{L}(\lambda)$

首先，极大似然函数为：

$$L(\lambda|x)=\sum_{i=1}^{N}\left[x_i\ln(\lambda)-\lambda-\ln(x!)\right]$$

其概率极限为：

$$\mathscr{L}(\lambda)=\mathbb{E}\left[x_i\ln(\lambda)-\lambda-\ln(x!)\right]=\lambda_0\ln(\lambda)-\lambda-\mathbb{E}\left[\ln(x_i!)\right]$$

对以上函数求导得：

$$\frac{\lambda_0}{\lambda}-1=0$$

从而 $\lambda_0=\arg\max_\lambda \mathscr{L}(\lambda)$。

练习 16. 求以下分布总体的极大似然估计，证明其一致性并计算估计量的极限分布。

1. $x_i \sim P(\lambda)$

   样本 $x=(x_1,...,x_N)'$ 的联合密度函数为：

   $$f(x|\lambda)=\prod_{i=1}^{N}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i\ln(\lambda)-\ln(x_i!)-\lambda\right]\right\}$$

   因而其对数似然函数为：

   $$L(\lambda|x)=\sum_{i=1}^{N}\left[x_i\ln(\lambda)-\ln(x_i!)-\lambda\right]$$

   最大化似然函数，其一阶条件为：

   $$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i}{\lambda}-1\right)=0$$

   解得：

   $$\hat{\lambda}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

验证一致性，直接根据大数定律可得：

$$\hat{\lambda}=\bar{x}\xrightarrow{p}\mathbb{E}\left(x_i\right)=\lambda$$

而根据中心极限定理，有：

$$\sqrt{N}\left(\hat{\lambda}-\lambda\right)=\sqrt{N}\left(\bar{x}-\lambda\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,\operatorname{Var}\left(x_i\right)\right)$$

而由于 $\operatorname{Var}\left(x_i\right)=\lambda$，因而

$$\sqrt{N}\left(\hat{\lambda}-\lambda\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,\lambda\right)$$

即 $\hat{\lambda}\overset{a}{\sim}N\left(\lambda,\frac{\lambda}{N}\right)$。

2. $x_i\sim N\left(\mu,1\right)$
3. $x_i\sim N\left(0,\sigma^2\right)$

练习 17. （泊松回归）如果 $\left(y_i,x_i'\right)',i=1,...,N,x_i\in\mathbb{R}^K$ 为一系列独立同分布的随机向量，且 $y_i\in\mathbb{Z}$，经常使用的模型为泊松回归（Possion regression），即假设：

$$y_i|x_i\sim P\left(e^{x_i'\beta}\right)$$

请写出其条件对数似然函数。

条件密度函数为：$f\left(y_i|x_i\right)=\frac{\left(e^{x_i'\beta}\right)^{y_i}}{y_i!}e^{-e^{x_i'\beta}}$，因而极大似然函数：

$$L\left(\beta|y_i,x_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left[y_i\cdot x_i'\beta-e^{x_i'\beta}-\ln\left(y_i!\right)\right]$$

练习 18. 若 $x_i\sim P\left(\lambda_0\right)$，求其矩估计，给出在 5% 显著性水平下，对于原假设：$H_0:\lambda_0=10$ 的检验步骤。

其矩估计为：$\hat{\lambda}=\bar{x}$。首先根据中心极限定理，有：

$$\sqrt{N}\left(\hat{\lambda}-\lambda_0\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,\lambda_0\right)$$

或者：

$$\hat{\lambda}\overset{a}{\sim}N\left(\lambda_0,\frac{\lambda_0}{N}\right)$$

在原假设：$\lambda_0=10$ 的条件下，$\hat{\lambda}\overset{a}{\sim}N\left(10,\frac{10}{N}\right)$，因而：

$$\frac{\sqrt{N}\left(\hat{\lambda}-10\right)}{\sqrt{10}}\overset{a}{\sim}N\left(0,1\right)$$

如果 $\left|\frac{\sqrt{N}\left(\hat{\lambda}-10\right)}{\sqrt{10}}\right| > 1.96$，则可以拒绝原假设。

练习 19. 如果样本 $x_i \sim Ber\left(p\right)\ i.i.d, i = 1, ..., N$，设原假设为 $H_0 : p = 0.5$，请问：

1. 该假设检验的备择假设是什么？
2. 该假设检验的检验统计量是什么？
3. 该假设检验的拒绝域是什么？
4. 请写出该假设检验的势函数（power function）。

备择假设：$p \neq 0.5$。检验统计量为：

$$z = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5\times 0.5}{N}}} \sim N\left(0, 1\right)$$

当 $|z| > 1.96$ 时拒绝原假设，即：

$$[-\infty, 0.5 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{N}}) \cup (0.5 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{N}}, \infty]$$

势函数为：

$$\begin{aligned}
\beta\left(p\right) &= P\left(\hat{p} > 0.5 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{N}}\right) + P\left(\hat{p} < 0.5 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{N}}\right) \\
&= P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}} > \frac{\left(0.5 - p\right)\sqrt{N} + 1.96 \times 0.5}{\sqrt{p\left(1 - p\right)}}\right) + P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}} < \frac{\left(0.5 - p\right)\sqrt{N} - 1.96 \times 0.5}{\sqrt{p\left(1 - p\right)}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\left(0.5 - p\right)\sqrt{N} + 1.96 \times 0.5}{\sqrt{p\left(1 - p\right)}}\right) + \Phi\left(\frac{\left(0.5 - p\right)\sqrt{N} - 1.96 \times 0.5}{\sqrt{p\left(1 - p\right)}}\right)
\end{aligned}$$