Metody Numeryczne – sprawozdanie

Poszukiwanie minimum wartości funkcji metodą największego spadku

Laboratorium nr 10

Adam Młyńczak 410702, Informatyka Stosowana

1. Cel ćwiczenia

Na laboratorium zajęliśmy się poszukiwaniem minimum wartości funkcji. Przedstawioną nam metodą była metoda największego spadku. Na zajęciach prowadzący wytłumaczył sposób implementacji tej metody i wskazał potrzebne elementy sprawozdania.

2. Opis problemu

Dana jest funkcja:

$$f(\vec{r}) = f(x, y) = \frac{5}{2}(x^2 - y)^2 + (1 - x)^2$$

Za pomocą metody największego spadku mieliśmy wyznaczyć w sposób numeryczny minimum funkcji.

3. Teoria – metoda największego spadku

W tej metodzie startujemy od przybliżenia $\overrightarrow{r_0}$, które z każdą kolejną iteracją jest „poprawiane", według wzoru:

$$\overrightarrow{r_{i+1}} = \vec{r_i} - h \cdot \nabla f(\vec{r_i}),$$

gdzie $\nabla f(\vec{r})$ (gradient) definiujemy jako:

$$\nabla f(\vec{r}) = \left[\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right].$$

Pochodne obliczamy numerycznie według wzorów:

$$\frac{df(\vec{r})}{dx} = \frac{f(\vec{r} + \Delta \cdot \vec{e}_x) - f(\vec{r} - \Delta \cdot \vec{e}_x)}{2\Delta}$$

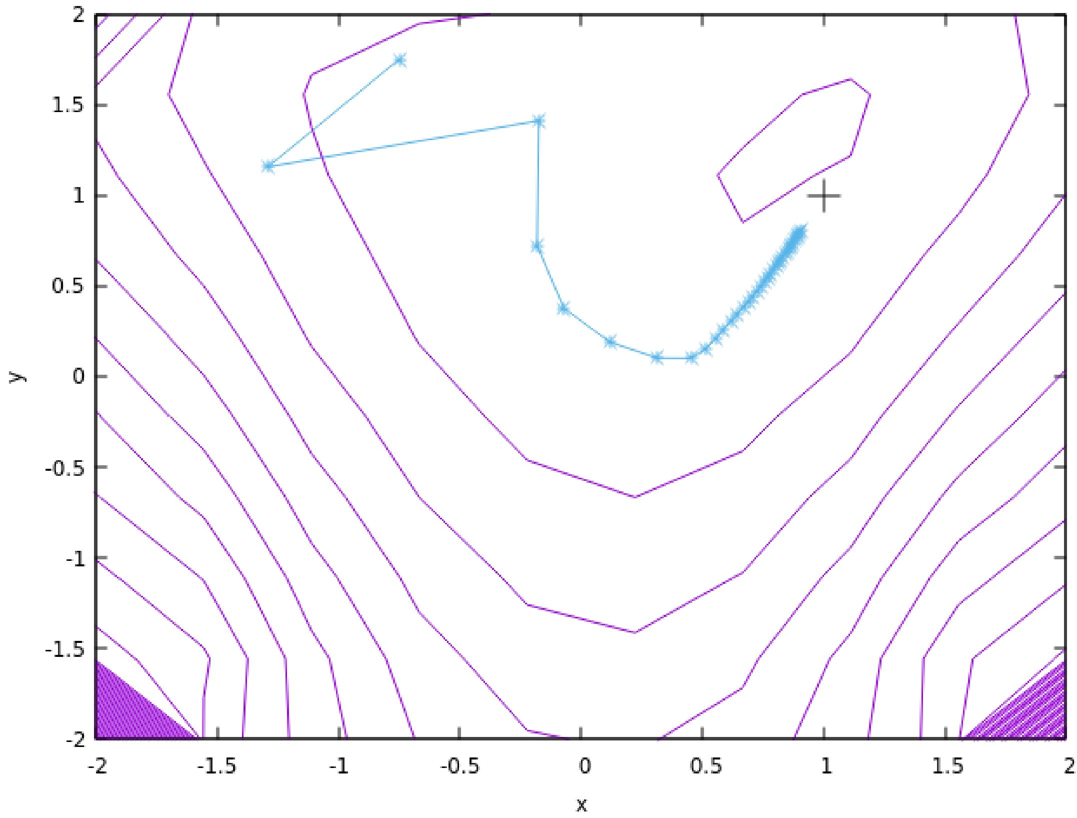
$$\frac{df(\vec{r})}{dy} = \frac{f\left(\vec{r} + \Delta \cdot \vec{e}_y\right) - f(\vec{r} - \Delta \cdot \vec{e}_y)}{2\Delta}$$

gdzie parametry *e* to wersory: $\vec{e}_x = (1, 0), \vec{e}_y = (0, 1)$. Za Δ przyjmujemy 10^{-4}.

Rozwiązywanie w naszym przypadku rozpoczynamy od $\vec{r}_0 = (-0.75, 1.75)$ i dla stałej *h = 0.1*. Za warunek stopu przyjmujemy $\|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i\| < \varepsilon \vee i > 1000$. ε przyjmujemy jako 10^{-2} albo 10^{-3}, a *i* to liczba iteracji pętli.

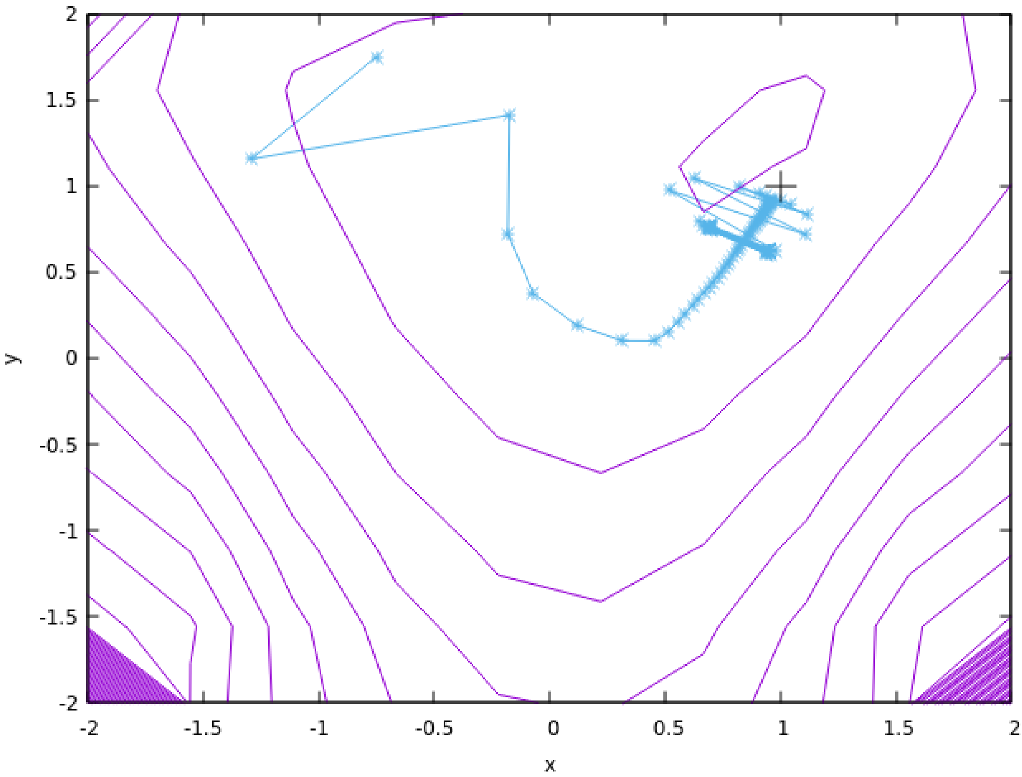
4. Wyniki obliczeń

4.1. Wykres dla $\varepsilon = 10^{-2}$



Uzyskane przez program wartości dla wektora *r* to [0.904394, 0.801381] (dla właściwej wartości [1.0, 1.0]), pętla przerwała działanie ze względu na warunek z ε.

4.2. Wykres dla ε = 10^{-3}



Uzyskane przez program wartości dla wektora *r* to [0.693963, 0.761188] (dla właściwej wartości [1.0, 1.0]), pętla została przerwana przez przekroczenie liczby 1000 iteracji.

5. Pytania i odpowiedzi

5.1. Czy warunek stopu jest właściwy?

Wydaje się, na podstawie przypadku 2 (ε = 10^{-3}), warunek ograniczający liczbę iteracji jest właściwy. Jak możemy zauważyć, w pewnym momencie program zaczyna „krążyć" wokół dwóch punktów i nie przybliża się do punktu minimum – w ten sposób jest możliwe, że pętla trwałaby przez bardzo długi czas bez zadowalających efektów. Jeśli chodzi o warunek pierwszy, sprawdza on jak bardzo się przybliżamy (o ile zmienia się położenie punktu końcowego wektora r_i). Jeśli chodzi o ten warunek, to tutaj trzeba ostrożnie dobrać wartość ε, aby nie powstawały niechciane zachowania.

5.2. Dlaczego uzyskane przybliżenia są dalekie od dokładnego?

Wpływ na to mogą mieć dwie zmienne – wybór r_0 i błędy zaokrągleń. Przy niefortunnym wyborze punktu, gdzie startujemy, program może „błądzić" na początku, przez co wyznaczanie rozwiązania może trwać na tyle długo, że nie zostanie spełniony warunek kolejnej iteracji pętli. Dodatkowo, jak już napisałem, ta metoda jest wrażliwa na błędy zaokrągleń.

5.3. Jaki wpływ na rozwiązanie ma utrzymywanie stałej wartości *h*?

Na pewno ma wpływ – przez to otrzymujemy w miarę przewidywalne następne wartości dla składowych punktu. Bez tego, przy losowym lub zmiennym *h*, możemy pominąć punkty, które ułatwiłyby znalezienie rozwiązania.

6. Podsumowanie

Metoda największego spadku, to przydatne narzędzie to w miarę szybkiego znalezienia może nie koniecznie wartości dla minimum, ale do znalezienia pewnego miejsca na płaszczyźnie, gdzie ono się znajduje. Przy odpowiednim dobraniu parametrów jest to metoda wystarczająco skuteczna.