Metody numeryczne - sprawozdanie

Rozwiązywanie układów równań metodami bezpośrednimi

Laboratorium nr 1

Adam Młyńczak 410702, Informatyka Stosowana

1. Cel zajęć

Pierwsze zajęcia miały na celu przypomnieć metody rozwiązywania układów algebraicznych równań liniowych metodami bezpośrednimi – metodą Gaussa oraz metodą Gaussa-Jordana. Na laboratorium przedstawione zostały ogólne zasady działania tych metod oraz wytłumaczone zostały poszczególne kroki działania przy rozwiązywaniu postawionego problemu.

2. Opis problemu

Naszym zadaniem jest rozwiązanie układu postaci:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \cdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

Gdzie a_{ij} jest elementem macierzy współczynników A, x_i jest niewiadomą, a b_i to wyraz wolny.

3. Teoria

3.1. Układ algebraicznych rozwiązań liniowych

Dany wcześniej układ można przedstawić w wygodniejszym, dostosowanym do metod rozwiązywania, zapisie macierzowym $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Przy rozwiązywaniu naszego problemu przyjmujemy, że $m = n$, zatem Macierz A jest kwadratowa. Rozwiązanie tego układu to $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, jednakże przez problemy z odwracaniem macierzy wyższych rzędów, należy tego typu układy rozwiązywać w inny sposób.

3.2. Metoda eliminacji Gaussa

Metoda ta składa się z dwóch etapów:

1) Przekształcenie macierzy *A* do postaci trójkątnej
2) Rozwiązanie układu z trójkątną macierzą

Aby przekształcić daną macierz *A* do postaci trójkątnej, należy wszystkie współczynniki poniżej przekątnej wyzerować. Zerowanie tych współczynników wykonuje się osobno dla każdej kolumny. Wyzerowanie współczynników w *j*-tej kolumnie wymaga odjęcia od każdego *i*-tego wiersza (gdzie *i* = *j* + 1, *j* + 2, … , *n*) pomnożonego przez współczynnik *l*, który wyliczamy ze wzoru:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

Wszelkie operacje prowadzone na macierzy *A* muszą być jednocześnie prowadzone na wektorze $\vec{b}$. Dla łatwiejszych rachunków można stworzyć macierz uzupełnioną $U = [A|b]$.

Po przeprowadzeniu operacji na każdej kolumnie otrzymamy układ równań:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}$$

Rozwiązania – współrzędne wektora $\vec{x}$ – obliczamy według wzoru:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b'_n}{a'_{nn}} \\ x_i = \dfrac{b'_n - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij} x_j}{a'_{ii}} \end{cases}$$

3.3. Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

Jest to metoda podobna do metody Gaussa, jednak wykonujemy tylko operacje mające na celu doprowadzenie macierzy *A* do postaci jednostkowej, działając na macierzy uzupełnionej $U = [A|b]$.

Aby osiągnąć zamierzony efekt, każdy *j*-ty wiersz macierzy U należy podzielić przez współczynnik $\omega_j = a_{jj}$, a następnie odjąć od każdego *i*-tego wiersza *j*-ty wiersz pomnożony przez współczynnik $\omega_{ji} = a_{ij}$

W ten sposób doprowadzamy równanie do postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}$$

W tym przypadku, aby układ miał rozwiązanie, $\vec{x} = \vec{b}'$

Zatem $x_i = b'_i$

4. Podsumowanie

Rozwiązywanie układów algebraicznych równań liniowych metodami bezpośrednimi to alternatywa do wcześniej poznanych metod analitycznych. Wykorzystane zostały dwie metody: Gaussa oraz Gaussa-Jordana.