Metody Numeryczne – sprawozdanie

Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Laboratorium nr 12

Adam Młyńczak 410702, Informatyka Stosowana

1. Cel ćwiczenia

Na zajęciach laboratoryjnych obliczaliśmy wartości całek oznaczonych. Ćwiczenie to miało pokazać nam działanie metody Simpsona, czyli algorytmu z wykorzystaniem wzoru parabol.

2. Opis problemu

Należy obliczyć numerycznie całki typu:

$$I = \int_0^{\pi} x^m \sin kx \ dx.$$

Do rozwiązania tego problemy mamy zaimplementować metodę Simpsona. Do sprawdzenia poprawności obliczeń tej metody korzystamy z rozwinięcia funkcji *sin(x)* w szereg:

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!},$$

a następnie wstawiając to rozwinięcie pod całkę otrzymujemy:

$$I = \int_a^b x^m \sin kx \ dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(kx)^{2i+1}}{(2i+1)!} \ x^m =$$
$$= \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \ \frac{(kx)^{2i+1}}{k^{m+1} \ (2i+1)! \ (2i+m+2)} \right]_a^b,$$

co dla małej różnicy *x – a* możemy obliczyć sumując pierwsze ok. 30 wyrazów.
Naszym zadaniem było obliczyć całki metodą rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg dla danych parametrów:

1) *m = 0, k = 1* (oczekiwane *I = 2*)
2) *m = 1, k = 1* (oczekiwane *I = π*)
3) *m = 5, k = 5* (oczekiwane *I = 56.363569*)

Następnie mieliśmy obliczyć wartości całki metodą Simpsona dla różnych liczb węzłów (*n = 2p+1, węzły 11, 21, 51, 101, 201*) i dla danych parametrów:

1) *m = 0, k = 1*
2) *m = 1, k = 1*
3) *m = 5, k = 5*

3. Teoria

Całkowanie metodą Simpsona ma zastosowanie dla funkcji w nieparzystej liczbie równo odległych punktów. Opiera się ona na przybliżaniu funkcji całkowanej przez interpolację. Znając wartości y_{i-1}, y_i, y_{i+1} w punktach x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, przybliża się jej inne wartości za pomocą wielomianu Lagrange'a i całkuje w danym przedziale (od x_{i-1} do x_{i+1}), otrzymując przybliżoną wartość całki:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}),$$

gdzie $h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$.

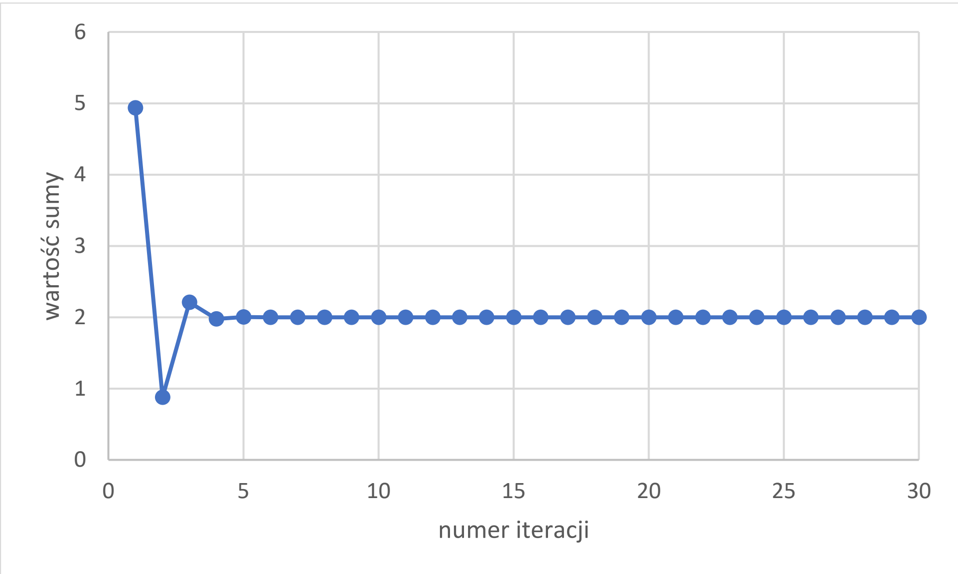
Znając wartości funkcji w potrzebnych $2p + 1$ kolejnych, równo odległych punktach, możemy iterować wzór na p przedziałów, ostatecznie otrzymując:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx$$

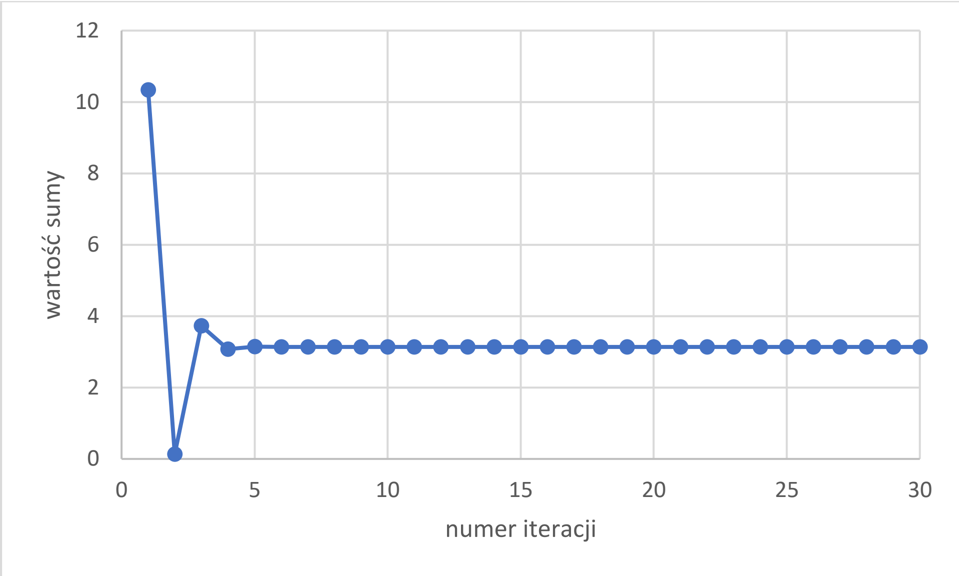
4. Wyniki

4.1. Zmiany wartości sumy w zależności od ilości uwzględnionych wyrazów

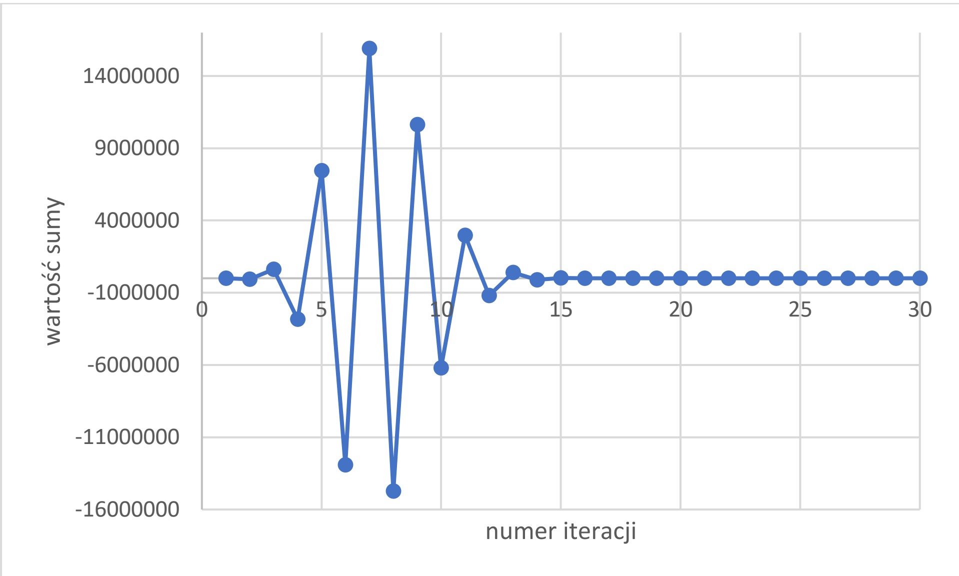
4.1.1. *m = 0, k = 1*



4.1.2. *m = 1, k = 1*



4.1.3. *m = 5, k = 5*

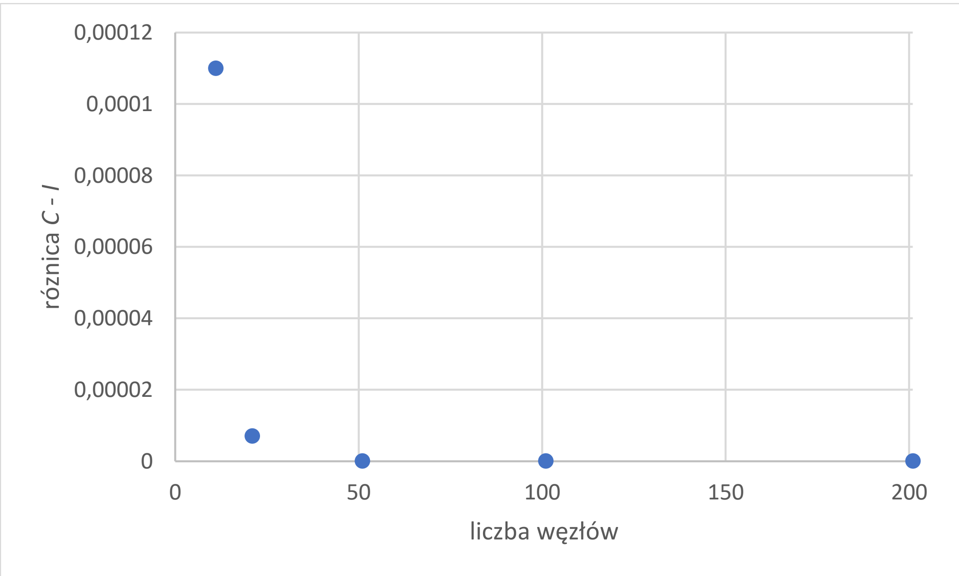


4.2. Otrzymane wartości całek

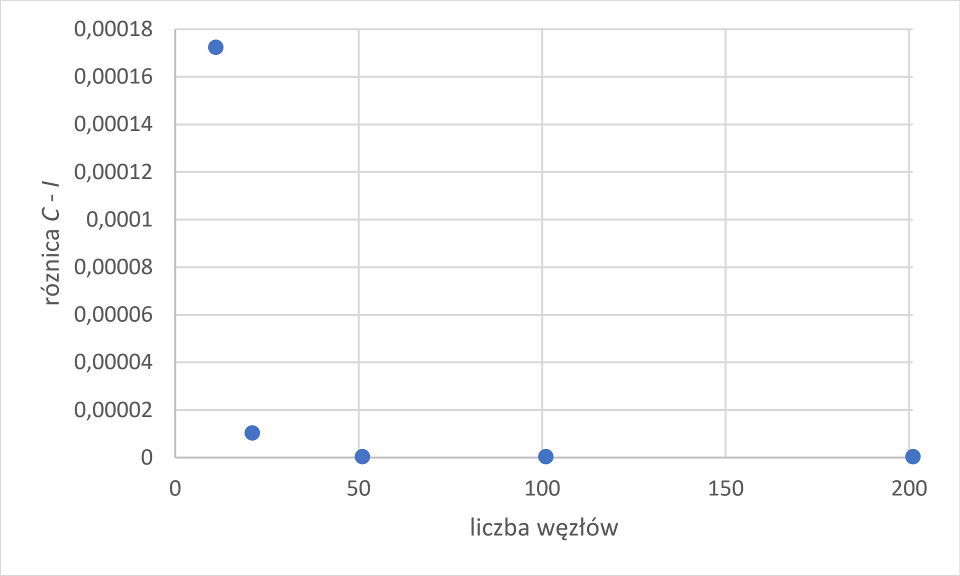
```
metoda simpsona
---------------------------------

11 wezlow
pierwsza calka: 2.000110
druga calka: 3.141765
trzecia calka: 57.843583

----------
21 wezlow
pierwsza calka: 2.000007
druga calka: 3.141603
trzecia calka: 56.462920

----------
51 wezlow
pierwsza calka: 2.000000
druga calka: 3.141593
trzecia calka: 56.366084

----------
101 wezlow
pierwsza calka: 2.000000
druga calka: 3.141593
trzecia calka: 56.363727

----------
201 wezlow
pierwsza calka: 2.000000
druga calka: 3.141593
trzecia calka: 56.363580
```

4.3. Różnice *C – I*

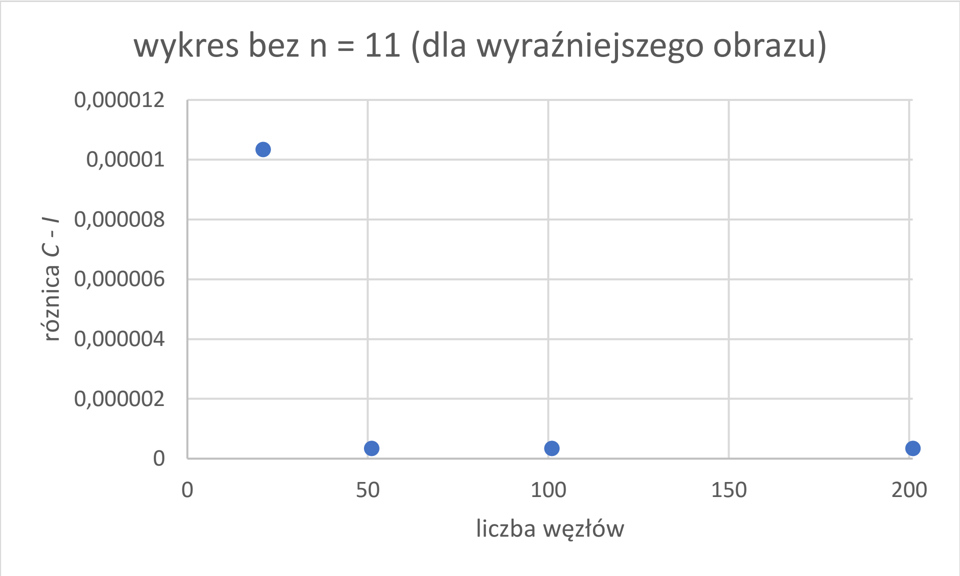
4.3.1. *m = 0, k = 1*



4.3.2. *m = 1, k = 1*

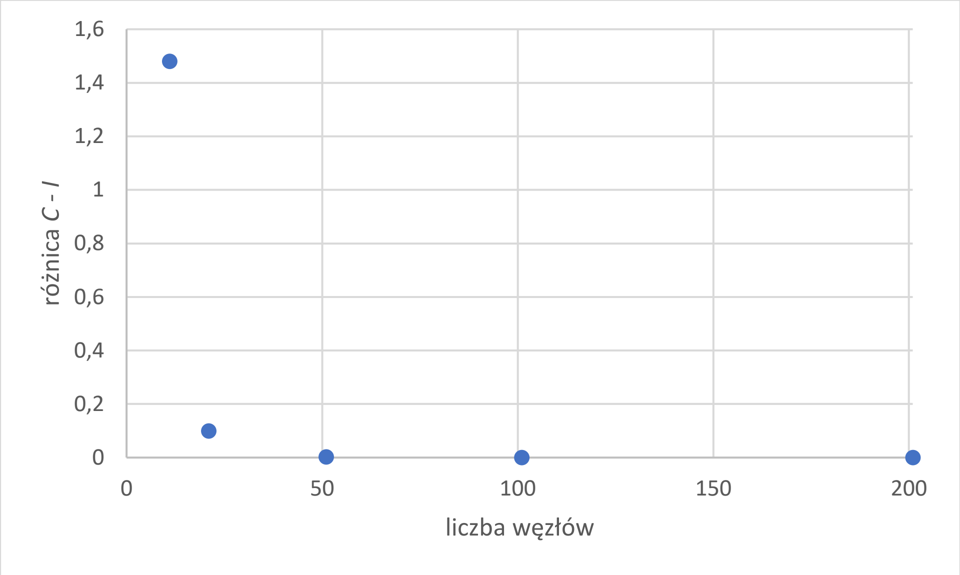


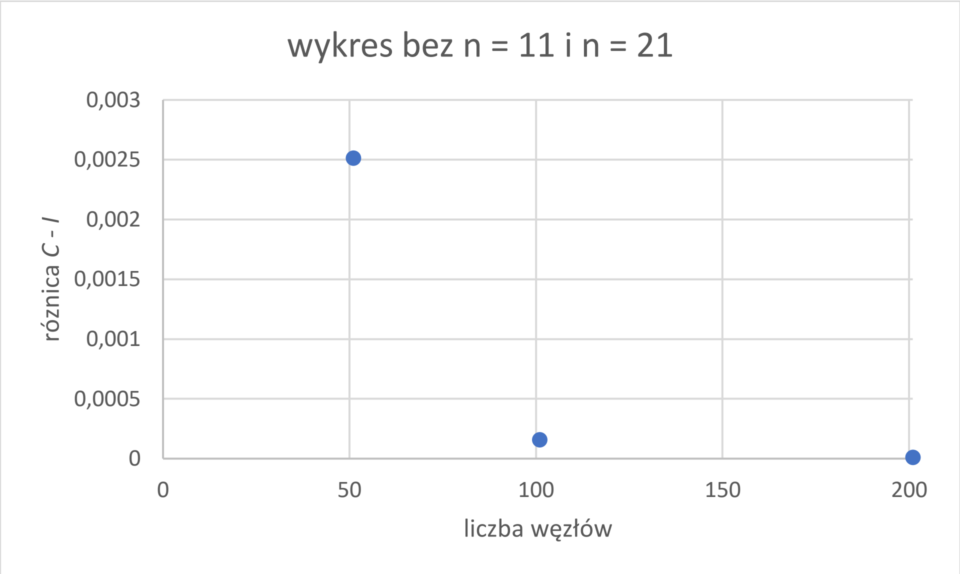
0,00018
0,00016
0,00014
0,00012
0,0001
0,00008
0,00006
0,00004
0,00002
0
różnica C - I
0
50
100
150
200
liczba węzłów



wykres bez n = 11 (dla wyraźniejszego obrazu)
0,000012
0,00001
0,000008
0,000006
0,000004
0,000002
0
różnica C - I
0
50
100
150
200
liczba węzłów

4.3.3. *m = 5, k = 5*





5. Podsumowanie

Metoda Simpsona jest prostą w implementacji oraz skuteczną metodą obliczania wartości całki oznaczonej. Jak mogliśmy zauważyć, wraz ze zwiększeniem liczby węzłów możemy zmniejszyć błąd wyznaczenia całki. Jako dodatkowy plus dal tej metody można przyjąć szybkość jej implementacji. Dzięki temu wszystkiemu jest ona bardzo użyteczna.