Metody Numeryczne – sprawozdanie

Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur Gaussa

Laboratorium nr 13

Adam Młyńczak 410702, Informatyka Stosowana

1. Cel ćwiczenia

Na laboratorium obliczaliśmy wartości całek. Ćwiczenie to miało nas zaznajomić z metodą kwadratur Gaussa – kolejną metodą numerycznego wyznaczenia wartości całki.

2. Opis problemu

Obliczenie przy użyciu odpowiednich kwadratur wartości całki:

1) Przy użyciu kwadratury Gaussa-Legandre'a:

$$c_1 = \int_0^2 \frac{x}{4x^2+1} dx$$

Do wyznaczenia dokładnej wartości całki korzystamy z rozwiązania analitycznego:

$$c_{1,a} = \int \frac{x}{a^2x^2 \pm c^2} dx = \frac{1}{2a^2} \ln|a^2x^2 \pm c^2|$$

2) Przy użyciu kwadratury Gaussa-Laguerre'a:

$$c_2 = \int_0^\infty x^k \exp(-x)\, dx$$

Do wyznaczenia dokładnej wartości całki korzystamy z rozwiązania analitycznego:

$$c_{2,a} = \int_0^\infty x^k \exp(-x)\, dx = k!$$

3) Przy użyciu kwadratury Gaussa-Hermite'a:

$$c_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} sin^2 x\, sin^4 y \exp(-x^2 - y^2)\, dxdy$$

3. Teoria

Pracujemy na N+1 węzłach. Kwadraturę Gaussa-Legandre'a definiujemy jako:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{N} A_k f(t_k)$$

$$A_k = -\frac{2}{(N+2)P_{N+2}(x_k)P'_{N+2}(x_k)},$$

gdzie x_k to zera wielomianu Lagandre'a (*P*).

Kwadraturę Gaussa-Laguerre'a definiujemy jako:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)dx = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k)$$

$$A_k = \frac{((N+1)!)^2}{L'_{N+1}(x_k)L_{N+2}(x_k)},$$

gdzie x_k to zera wielomianu Laguerre'a (*L*).

Kwadraturę Gaussa-Hermite'a definiujemy jako:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k)$$

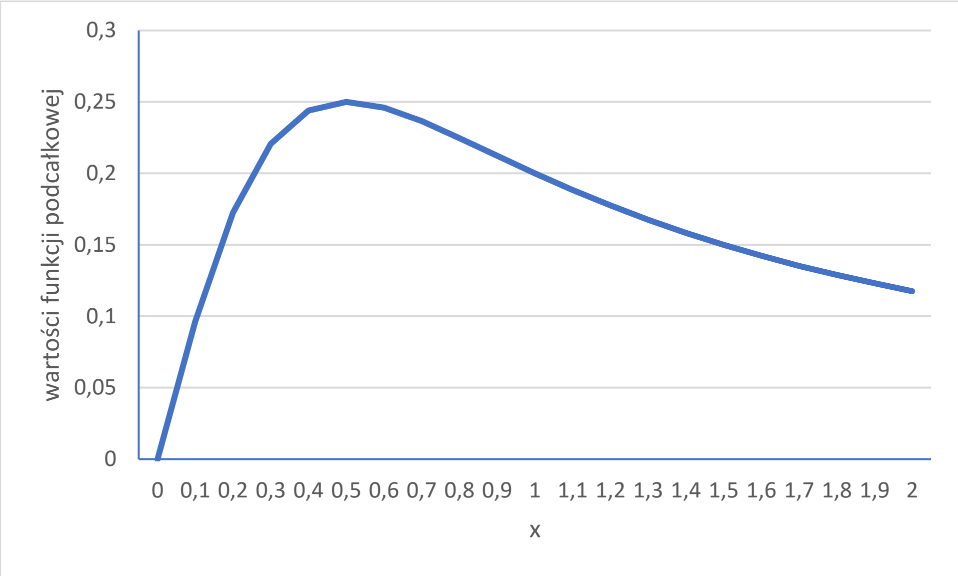
$$A_k = \frac{2^N (N+1)! \sqrt{\pi}}{(N+1)^2 H_N(x_k)^2},$$

gdzie x_k to zera wielomianu Hermite'a (*H*).

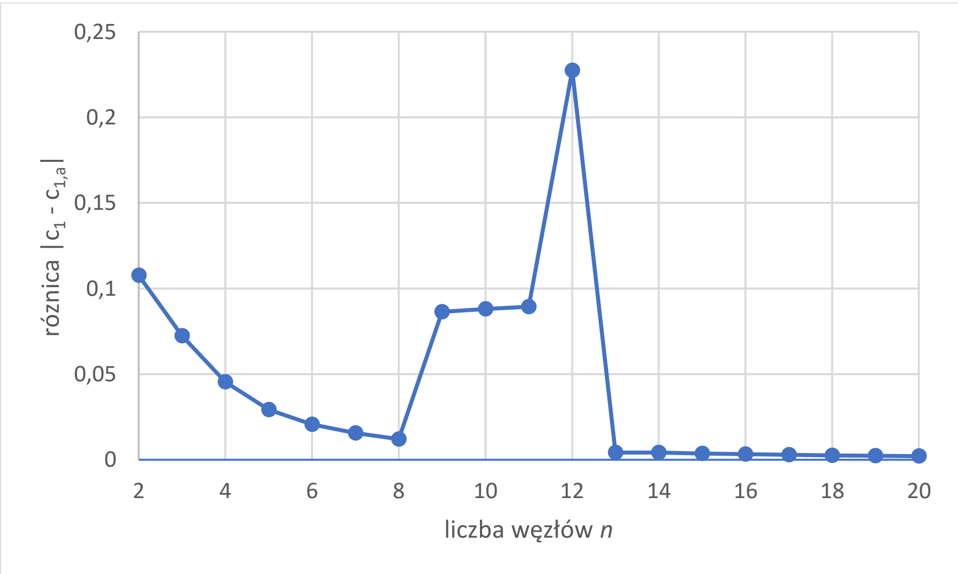
4. Wyniki

4.1. Całka pierwsza

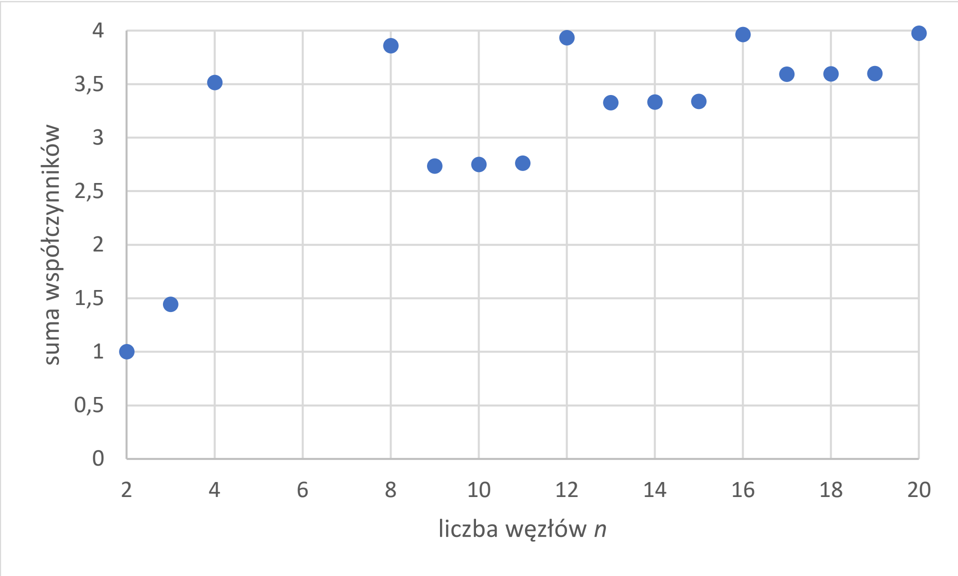
4.1.1. Wykres funkcji podcałkowej



4.1.2. Błąd wyznaczenia całki

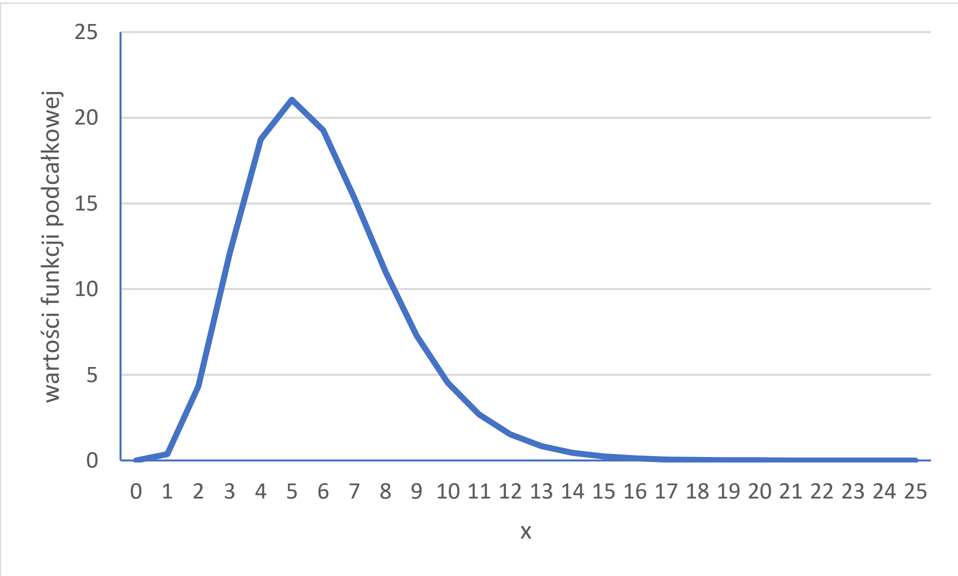


4.1.3. Suma współczynników kwadratury dla każdego *n*

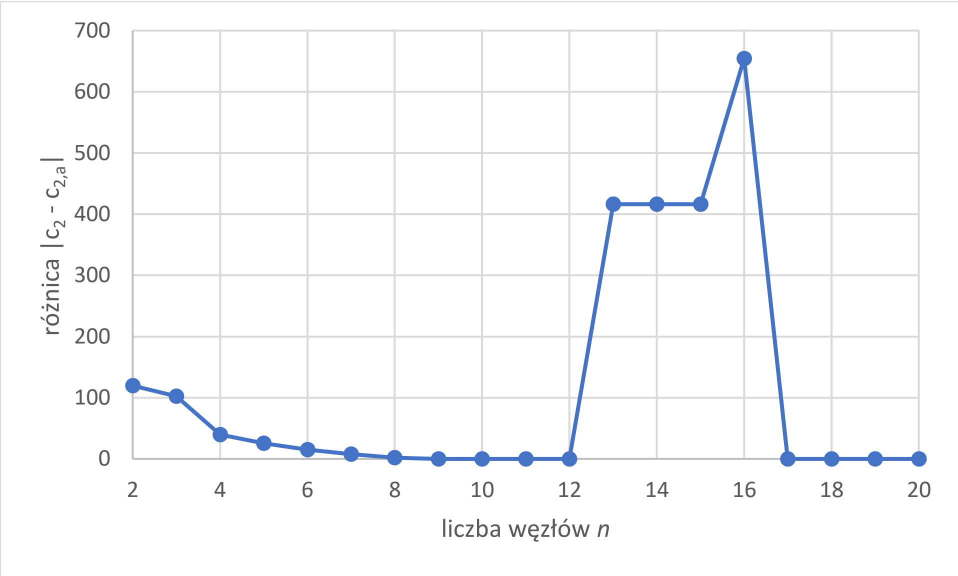


4.2. Druga całka – *k = 5*

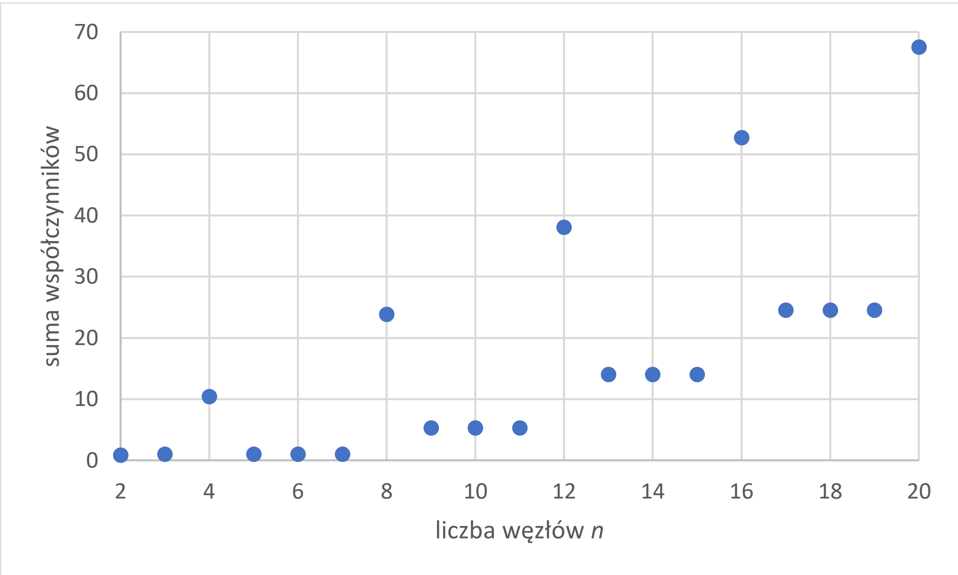
4.2.1. Wykres funkcji podcałkowej



4.2.2. Błąd wyznaczenia całki

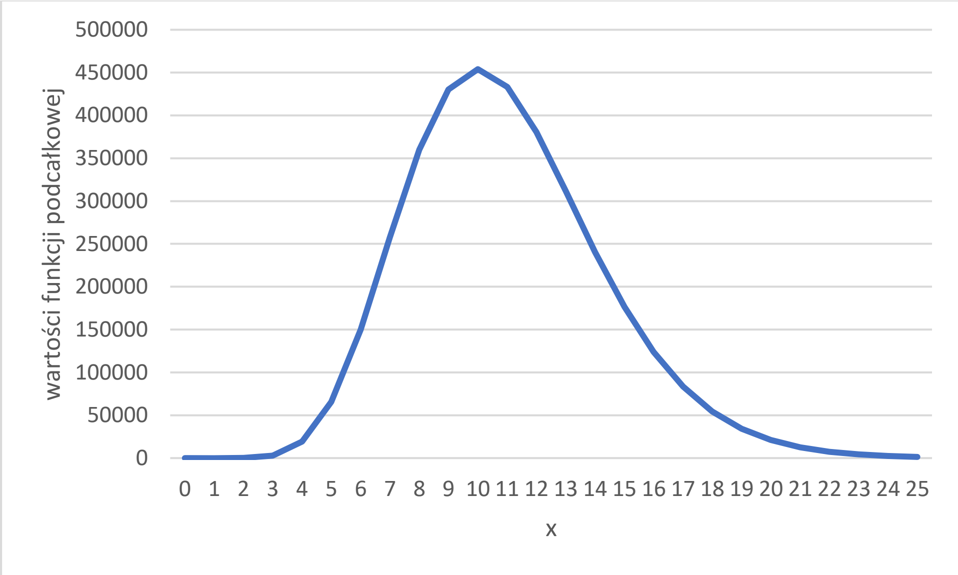


4.2.3. Suma współczynników dla każdego *n*

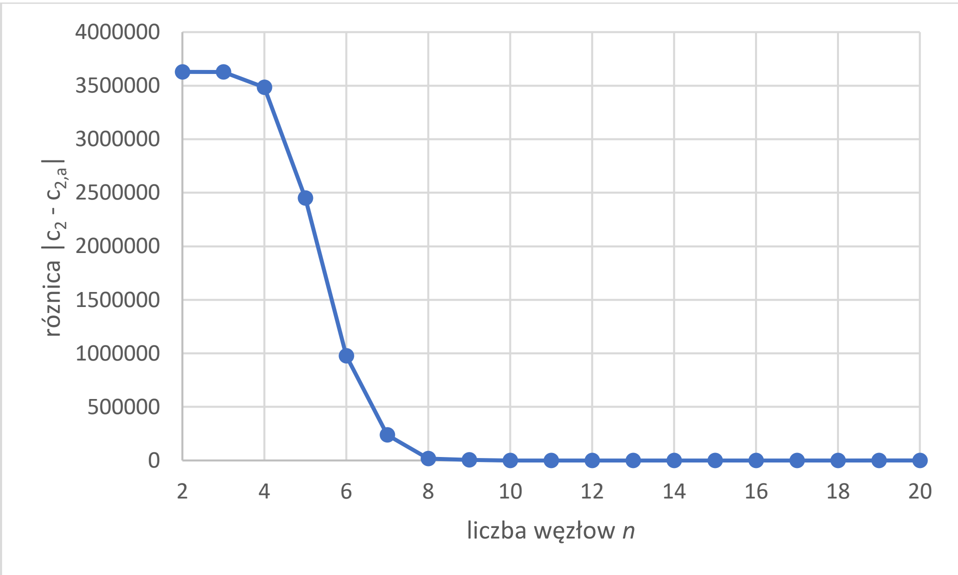


4.3. Druga całka – *k* = 10

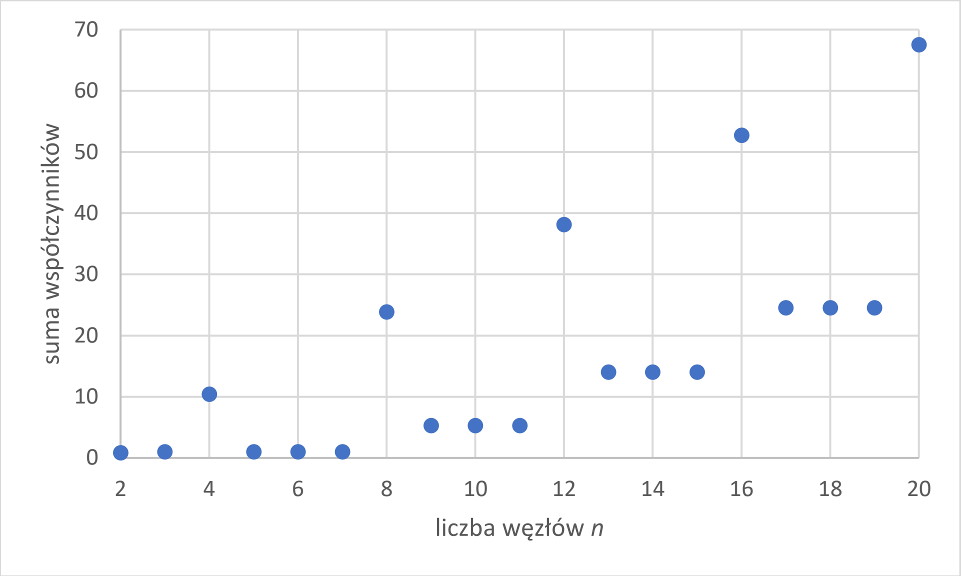
4.3.1. Wykres funkcji podcałkowej



4.3.2. Błąd wyznaczenia całki

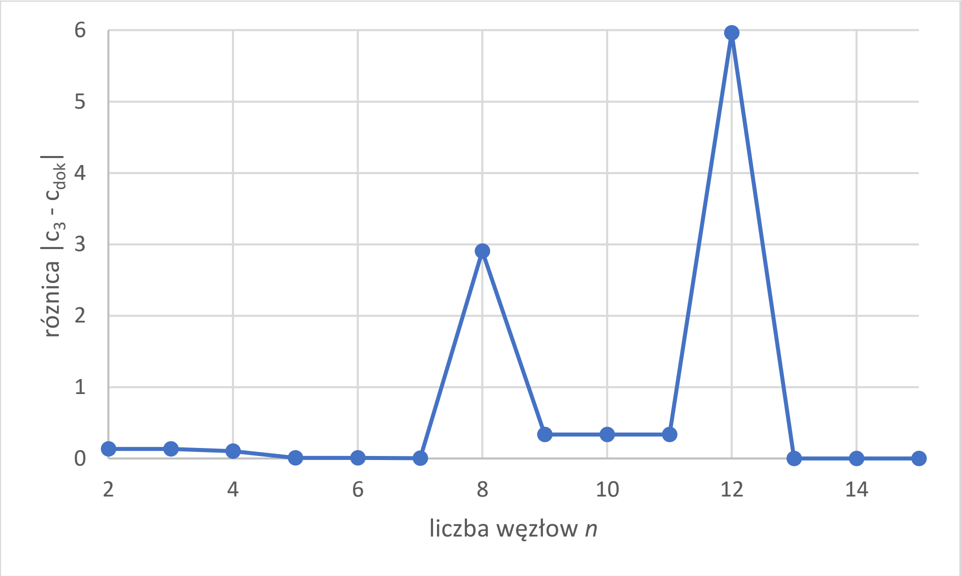


4.3.3. Suma współczynników dla każdego *n*



4.4. Trzecia całka (podwójna)

4.4.1. Błąd wyznaczenia całki



5. Interpretacja wyników

Dla coraz większej liczby węzłów, w każdym z przypadków, błąd wyznaczenia całki malał – z wyjątkiem paru punków w których wyniki „skakały" (być może jest to spowodowane jakimś błędem w implementacji metody). Przez coraz mniejszy błąd i co za tym idzie coraz większa zbieżność tegoż błędu do 0, po pewnym czasie nie opłaca się zwiększać liczby węzłów *n* – wydłuża czas obliczeń bez znacznej zmiany wyniku.

6. Podsumowanie

Obliczanie całek przy pomocy metody kwadratur Gaussa jest dosyć proste w użyciu. Nie jest to jednak metoda uniwersalna w zastosowaniu, jeśli potrzebujemy bardzo dokładnych obliczeń.