Metody Numeryczne - sprawozdanie

Wyznaczanie pierwiastków równania nieliniowego metodą Newtona

Laboratorium nr 6

Adam Młyńczak 410702, Informatyka Stosowana

1. Cel zajęć

Na kolejnych zajęciach laboratoryjnych nauczyliśmy się korzystać z nowej metody wyznaczania pierwiastków równań nieliniowych – Metody Newtona. Prowadzący przedstawił nam zasady działania tego sposobu oraz opowiedział o wymaganiach co do programu oraz sprawozdania.

2. Opis problemu

2.1. Funkcja

Naszym zadaniem było wyznaczenie wszystkich pierwiastków równania nieliniowego:

$$f(x) = \ln(x) \cdot (x-2)^2$$

Do rozwiązania problemu mieliśmy użyć przedstawionej nam metody Newtona.

2.2. Wykres (przedział $\langle 0.5, 2.4 \rangle$)

Na podstawie tego wykresu możemy określić istnienie dwóch pierwiastków: w *x = 1* pierwiastek jednokrotny i w *x = 2* pierwiastek o krotności równej 2.

3. Teoria

3.1. Wyznaczanie pierwiastków metodą Newtona

Metoda ta polega na kolejnym wyznaczaniu przybliżeń szukanych pierwiastków. Na początku bierzemy dane x_0 i liczymy wartość funkcji oraz wartość pierwszej pochodnej w tym punkcie; następnie wyliczamy wartość x_i ze wzoru:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \tag{1}$$

a następnie powtarzamy te operacje przypisując $x_i = x_{i+1}$. Operacje wykonujemy do momentu, w którym $\varepsilon = |x_{i+1} - x_i| < 10^{-6}$. Na koniec powinniśmy otrzymać dokładną (lub bardzo bliską dokładności) wartość pierwiastka danej funkcji.

3.2. Modyfikowana metoda Newtona – znajomość krotności pierwiastków.

Dzięki znajomości krotności pierwiastka można z większą łatwością znajdować pierwiastki o danej krotności. Cały sposób działania algorytmu działa tak samo jak w metodzie niemodyfikowanej, z tą różnicą, że wartość x_{i+1} oblicza się używając wzoru:

$$x_{i+1} = x_i - r \cdot \frac{f(x_i)}{f'(x_{i+1})}, \tag{2}$$

gdzie r to krotność szukanego pierwiastka.

3.3. Modyfikowana metoda Newtona – zastąpienie funkcji *f(x)*

W tym przypadku modyfikacja ponownie polega na innym sposobie wyliczenia x_{i+1}. Tym razem korzystamy ze wzoru:

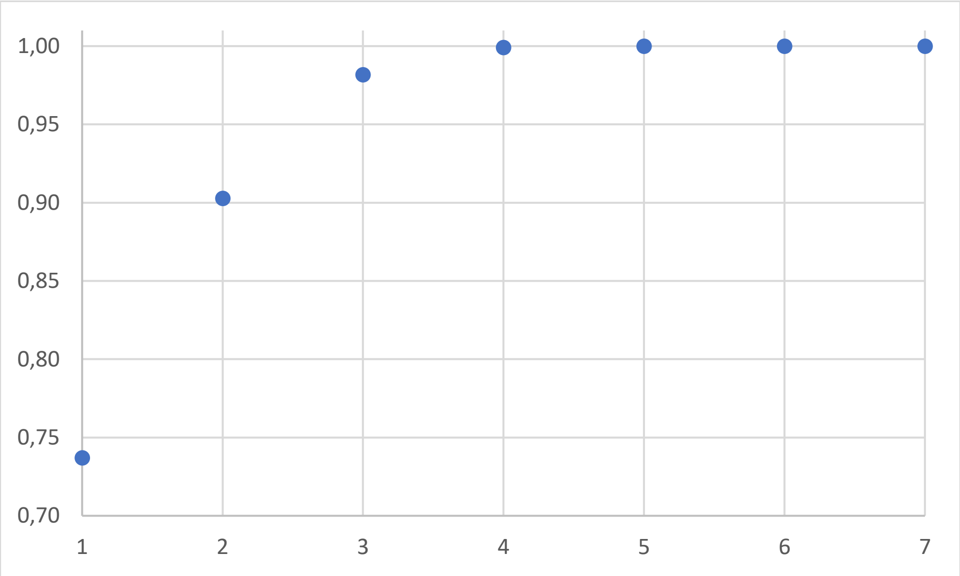
$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_{i+1})}, \tag{3}$$

gdzie $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.

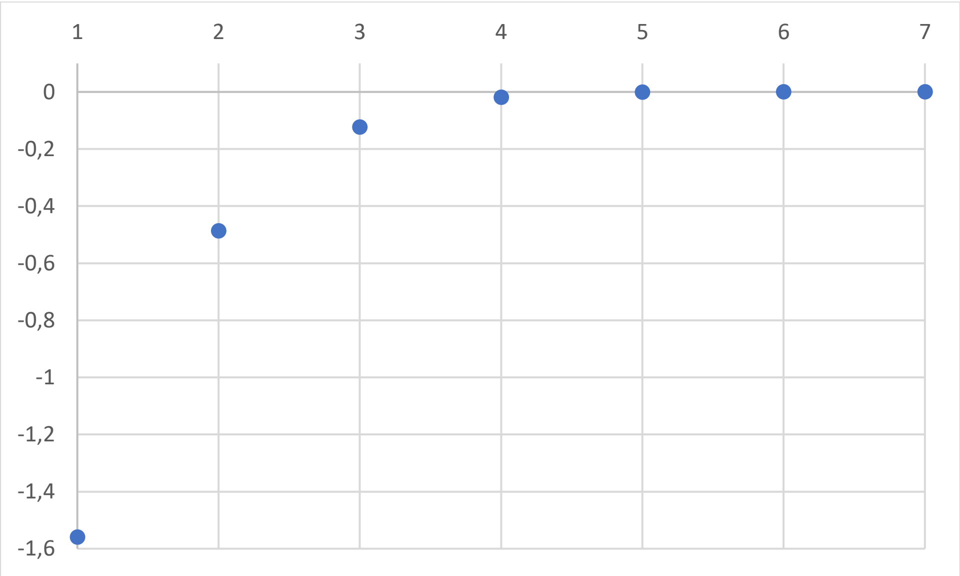
4. Wyniki obliczeń

4.1. Metoda niemodyfikowana – szukanie *x = 1*.

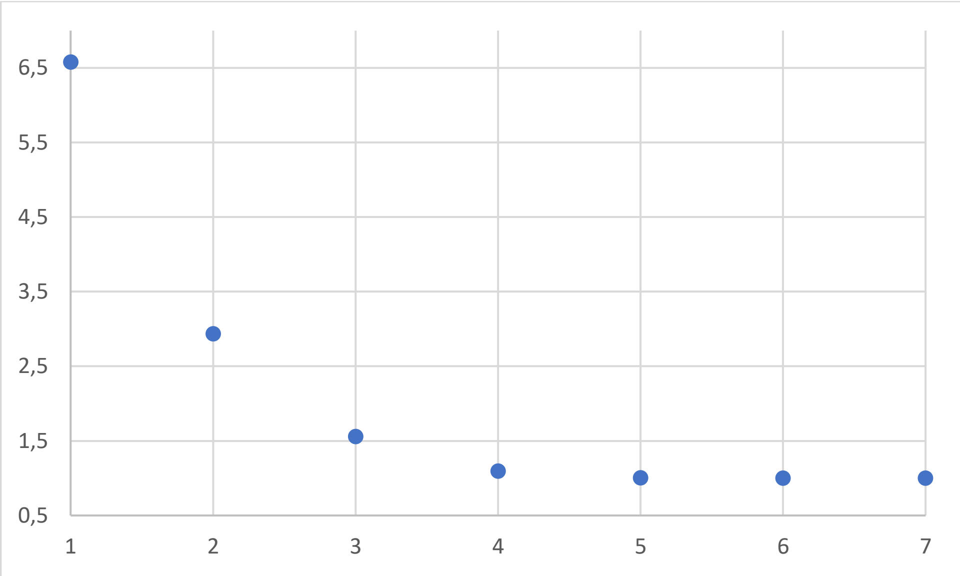
4.1.1. Wartość x_i od iteracji



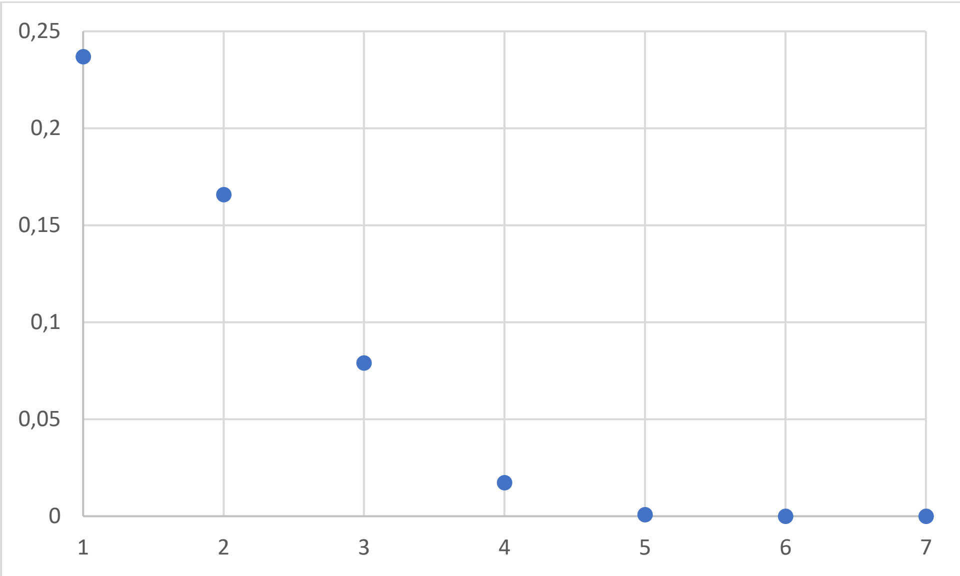
4.1.2. Wartość funkcji od iteracji



4.1.3. Wartość pierwszej pochodnej od iteracji

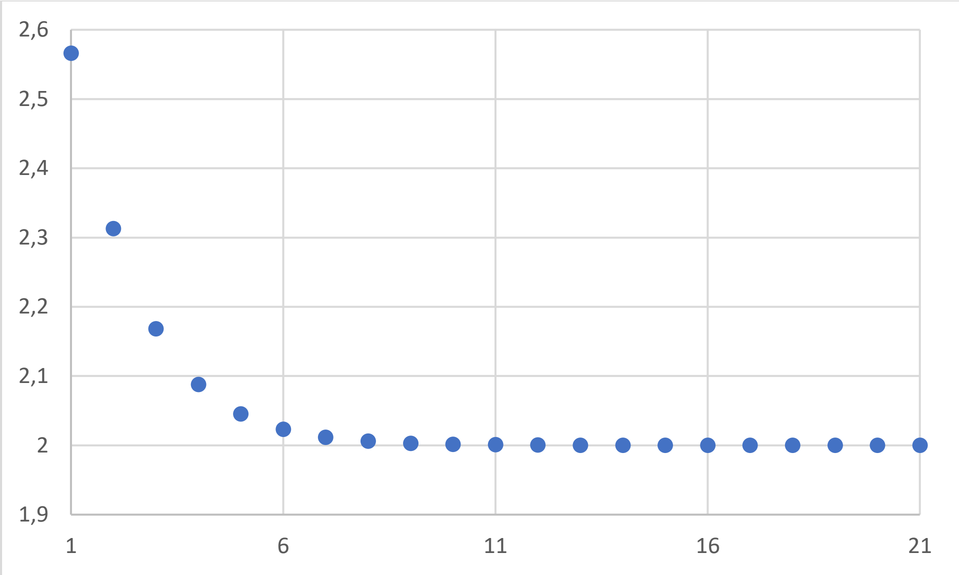


4.1.4. Wartość ε od iteracji

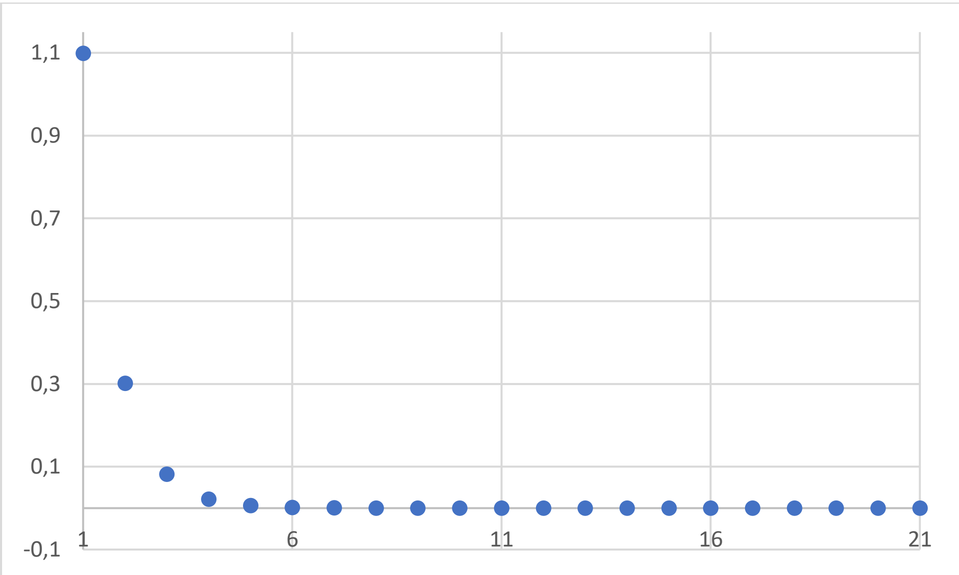


4.2. Metoda niemodyfikowana – szukanie *x = 2*

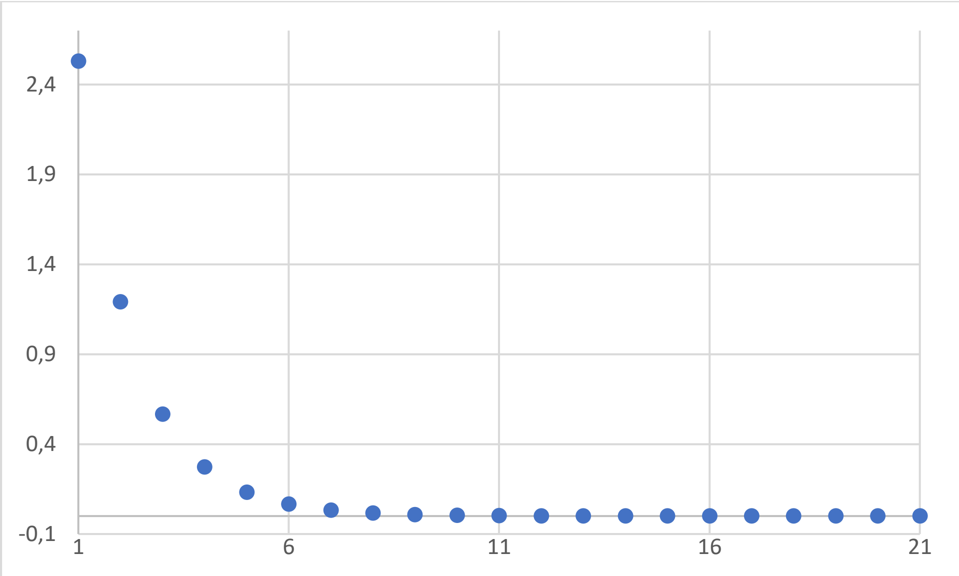
4.2.1. Wartość x_i od iteracji



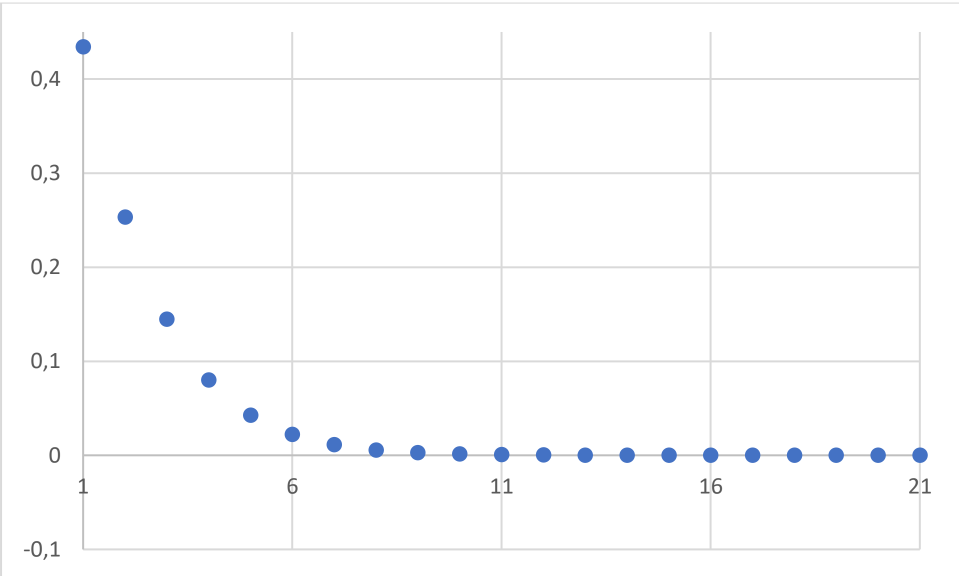
4.2.2. Wartość funkcji od iteracji



4.2.3. Wartość pierwszej pochodnej od iteracji

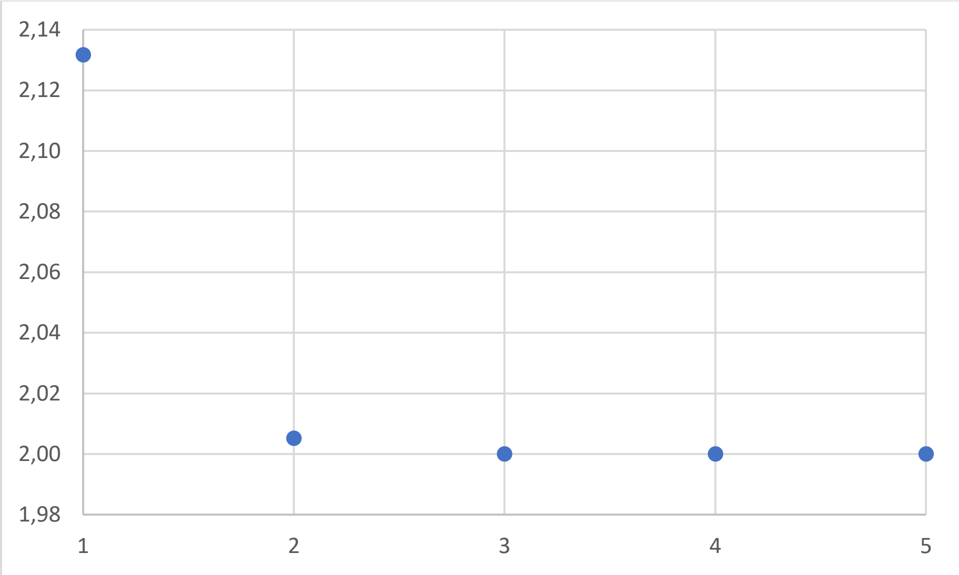


4.2.4. Wartość ε od iteracji

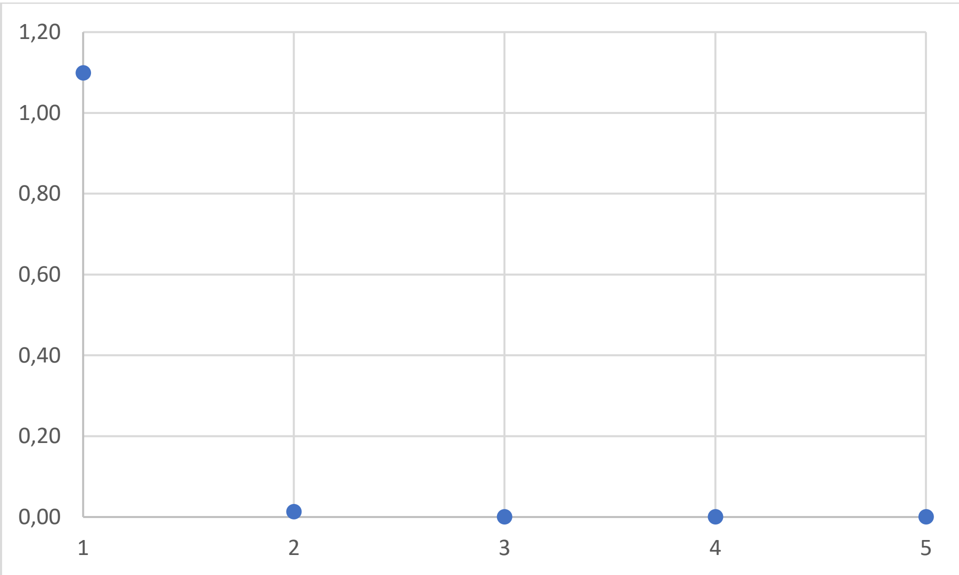


4.3. Pierwsza modyfikacja – znajomość krotności pierwiastka

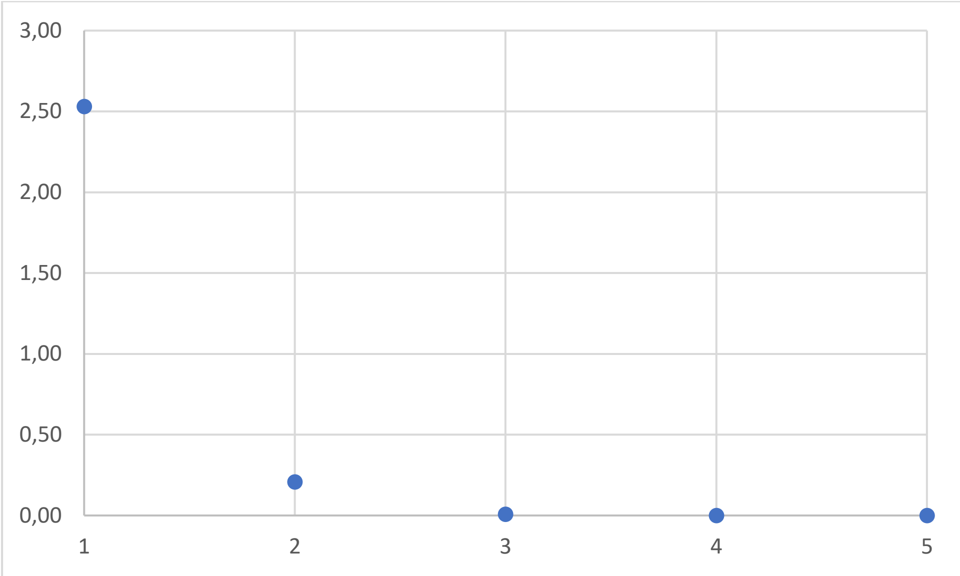
4.3.1. Wartość x_i od iteracji



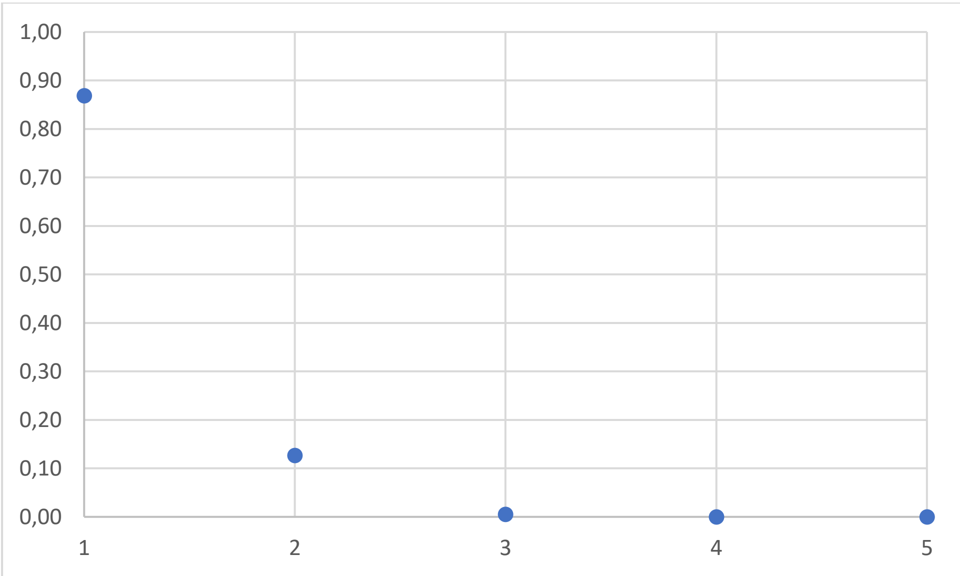
4.3.2. Wartość funkcji od iteracji



4.3.3. Wartość pierwszej pochodnej od iteracji

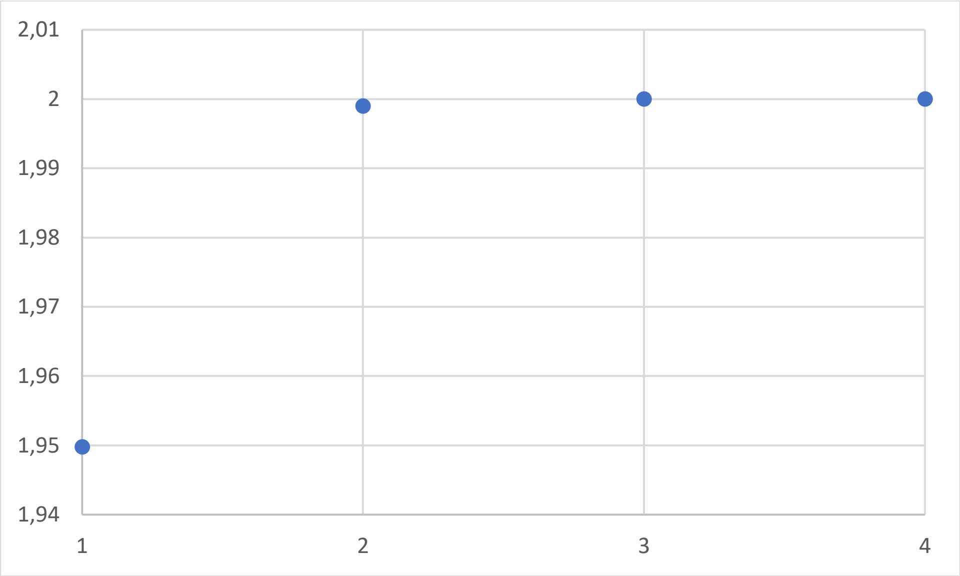


4.3.4. Wartość ε od iteracji

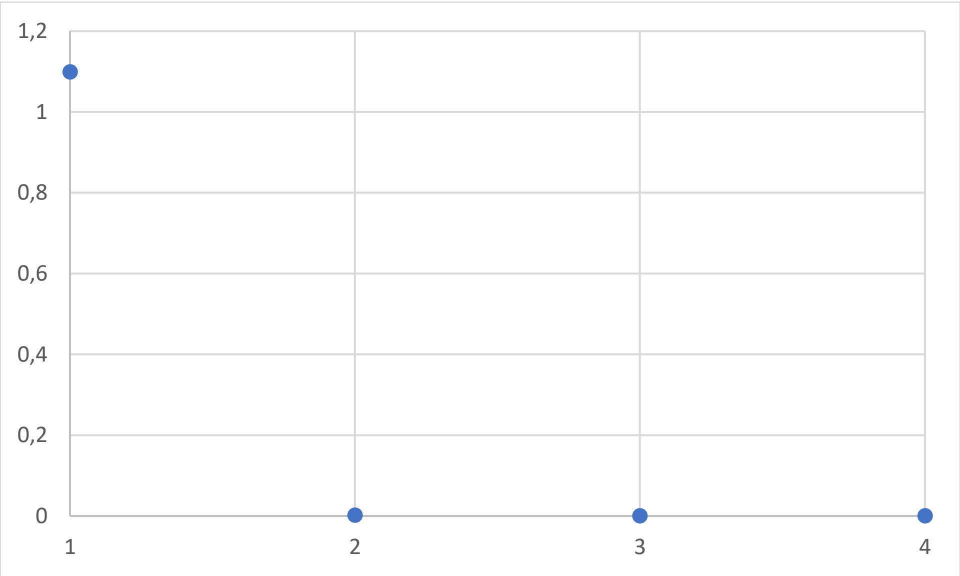


4.4. Druga modyfikacja – funkcja *u(x)*

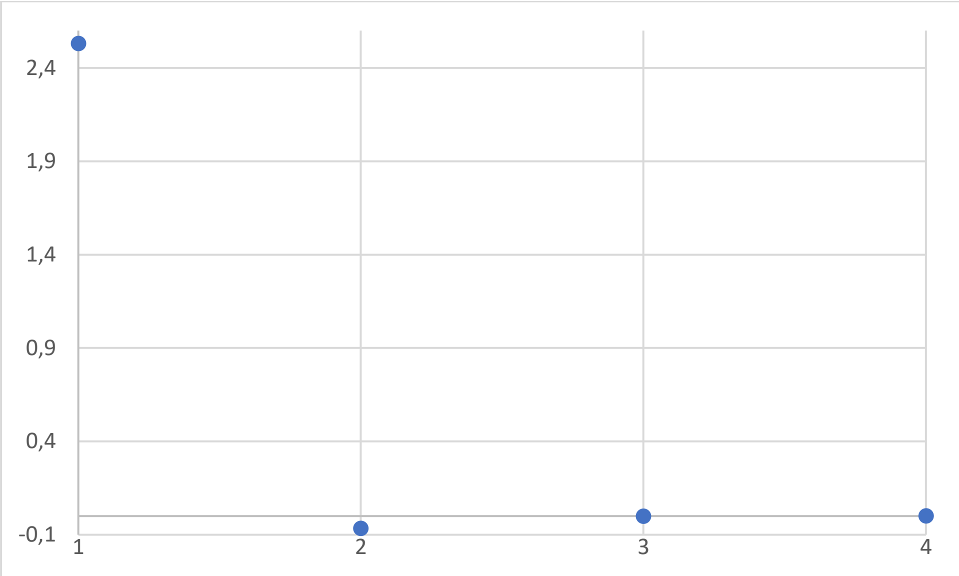
4.4.1. Wartość x_i od iteracji



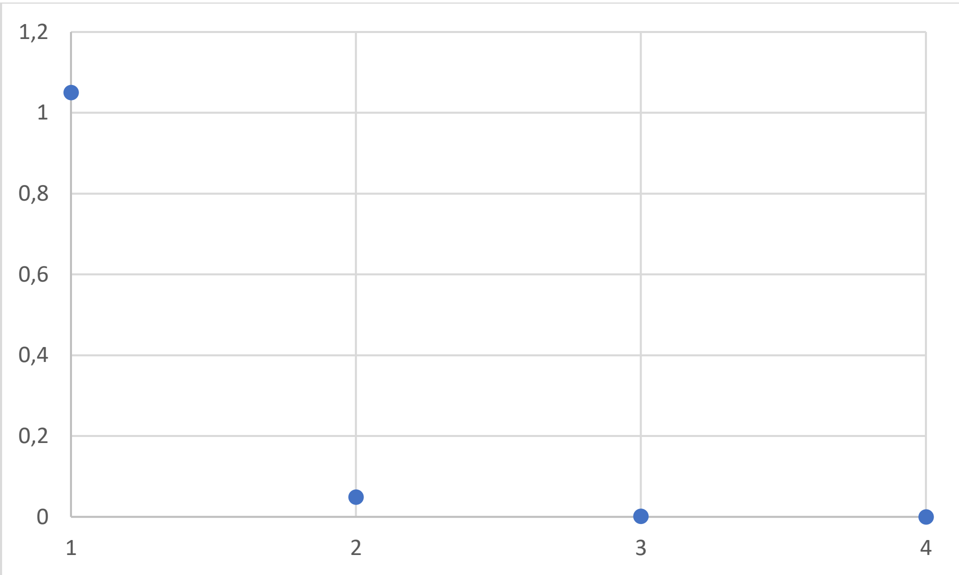
4.4.2. Wartość funkcji od iteracji



4.4.3. Wartość pierwszej pochodnej od iteracji



4.4.4. Wartość ε od iteracji



5. Podsumowanie

Wyznaczanie pierwiastków równania nieliniowego metodą Newtona jest bardzo przydatne w sytuacji, gdy potrzebujemy numerycznego wyznaczenia tychże pierwiastków znając jedynie okolice ich położenia (np. widzieliśmy wykres danej funkcji). Patrząc na wynik działania programu, który napisałem, stwierdzam, że ta metoda jest wystarczająco skuteczna.