Metody Numeryczne – sprawozdanie

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

Laboratorium nr 8

Adam Młyńczak 410702, Informatyka Stosowana

1. Cel zajęć

Na zajęciach po raz kolejny zajęliśmy się problemem interpolacji funkcji. Na podstawie paru węzłów danej funkcji przeprowadzaliśmy interpolację funkcjami sklejanymi w celu zbadania dokładności przybliżenie tejże funkcji.

2. Opis problemu

Dane mamy dwie funkcje:

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$
$$f_2(x) = \cos 2x.$$

Naszym zadaniem jest, przyjmując drugą pochodną równą 0 na obu krańcach (α = 0 i β = 0), zaimplementować program mający na celu przeprowadzić interpolację funkcji. Mamy tego dokonać w przedziale $[-5, 5]$, dla liczby węzłów równej *n = 5, 8, 21*. Dla każdego przypadku mamy sporządzić wykresy. Dodatkowo dla funkcji $f_1(x)$ i *n = 10* mieliśmy wyznaczyć przybliżone wartości drugich pochodnych i porównać je z wartościami, które wyliczaliśmy ze wzoru:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2}, \tag{1}$$

dla Δx = 0,01.

3. Teoria

3.1. Sposób przeprowadzania interpolacji

Aby rozwiązać dany problem, należy rozwiązać układ równań liniowych postaci:

$$A\vec{m} = \vec{d},$$
$$gdzie\ d_i = \mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1}.$$

m_i to wartości drugich pochodnych, a λ oraz μ obliczamy według wzorów:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \tag{2}$$
$$\mu_i = 1 - \lambda_i \tag{3}$$
$$h_i = x_i - x_{i-1} \tag{4}$$

Elementy wektora wyrazów wolnych obliczam ze wzoru:

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) \tag{5}$$

Po tych wszystkim, równanie przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu tego układu wyznaczam wartości funkcji interpolującej *s(x)* według wzoru:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i, \tag{6}$$

gdzie współczynniki *A* oraz *B* obliczamy według:

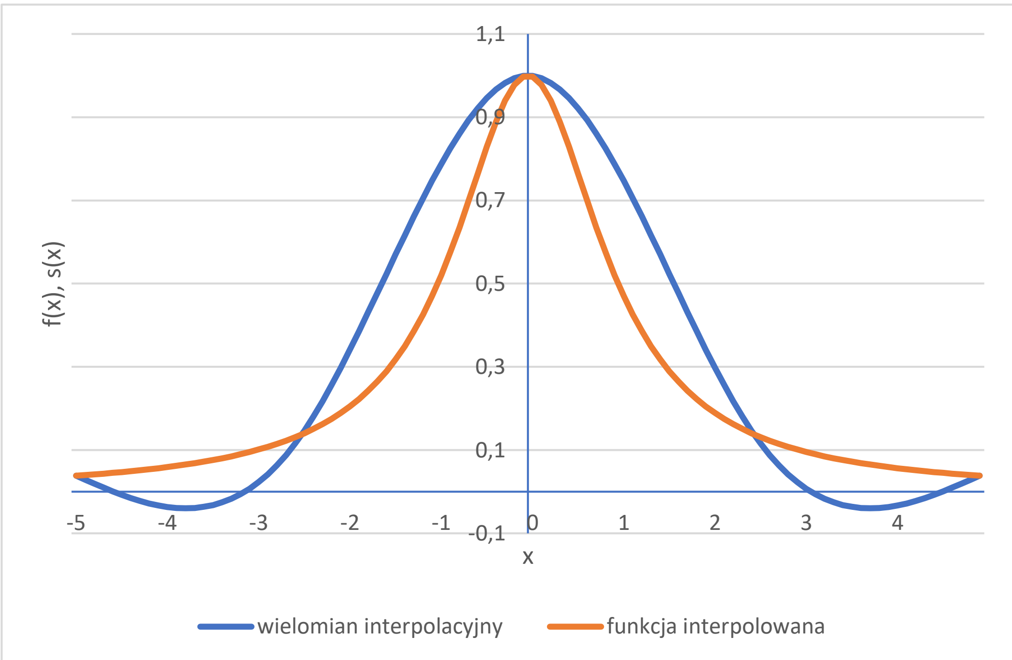
$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1}) \tag{7}$$

$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1}\frac{h_i^2}{6} \tag{8}$$

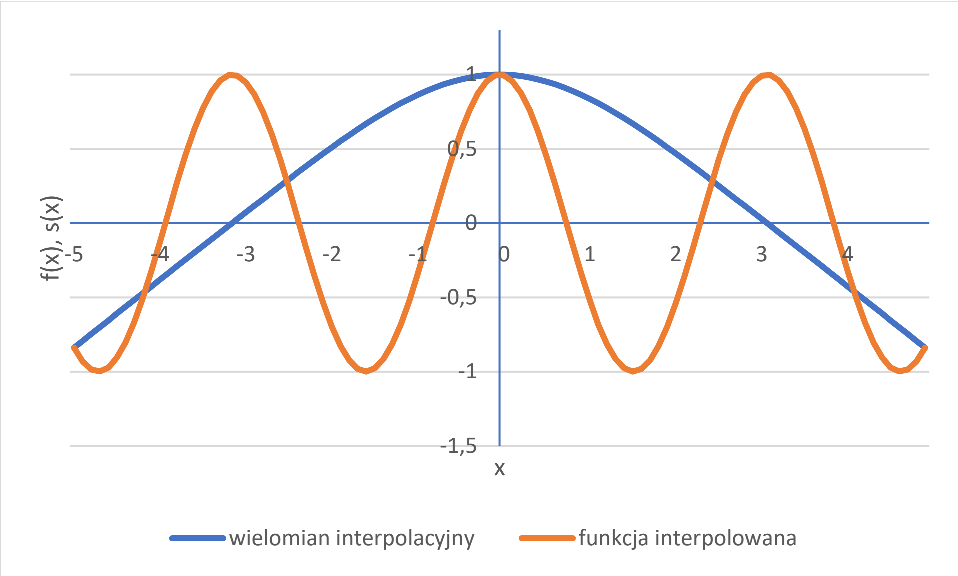
4. Wyniki obliczeń

4.1. Rozwiązanie dla *n = 5* (liczba węzłów)

4.1.1. *$f_1(x)$*

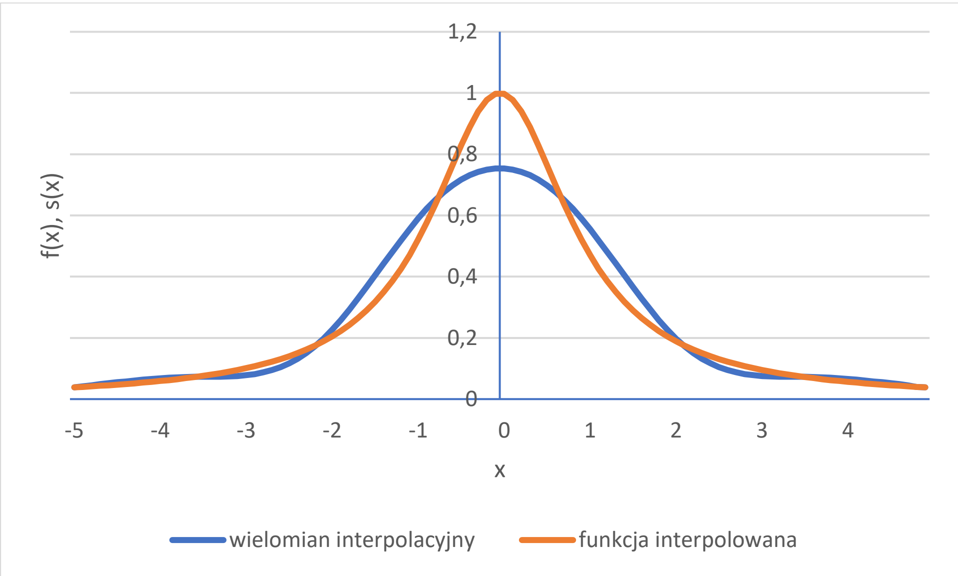


4.1.2. $f_2(x)$

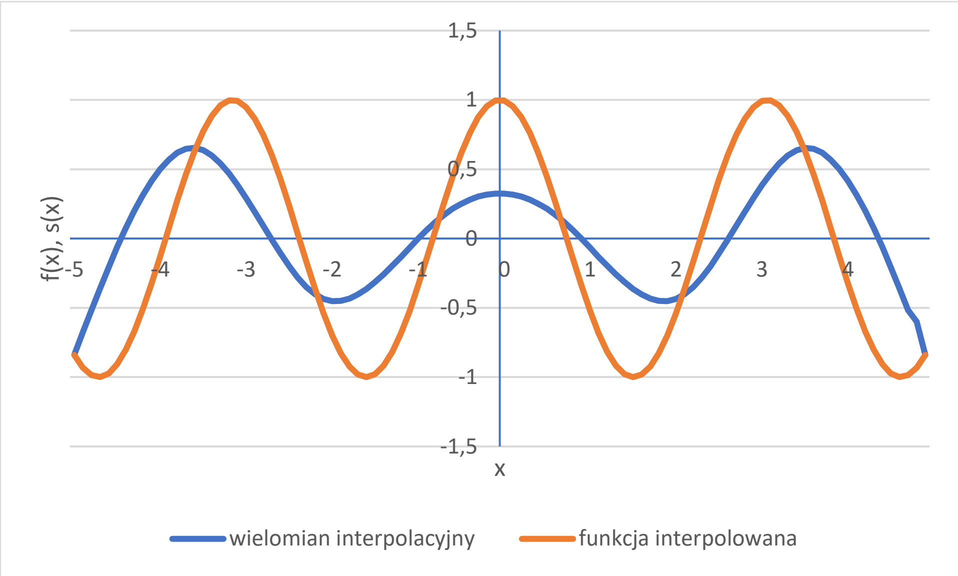


4.2. rozwiązanie dla $n = 8$

4.2.1. $f_1(x)$

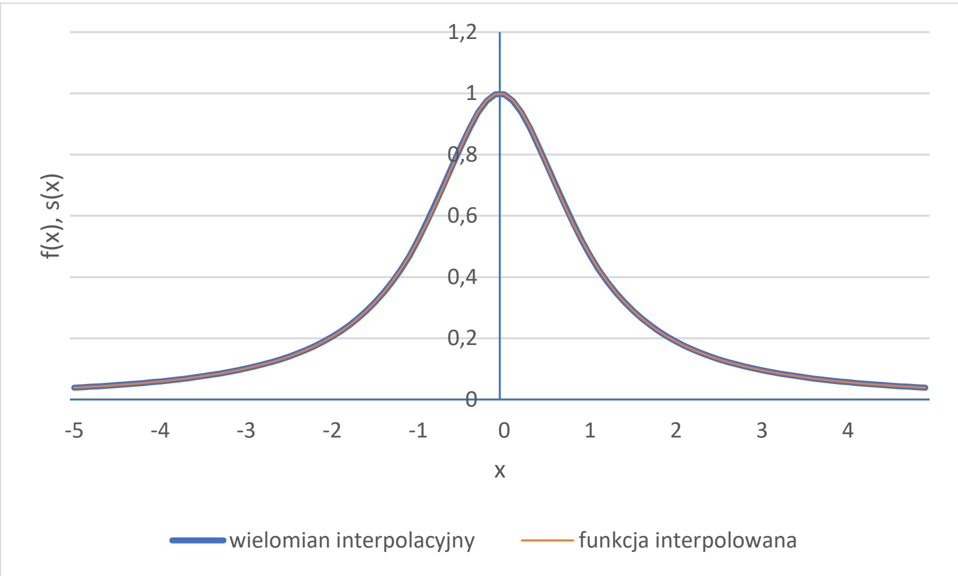


4.2.2. $f_2(x)$

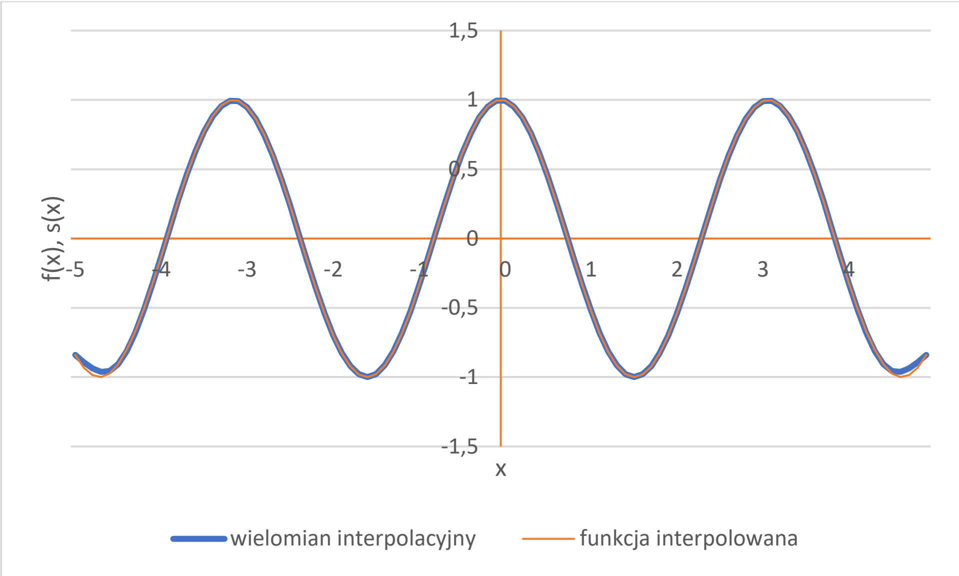


4.3. rozwiązania dla *n = 21*

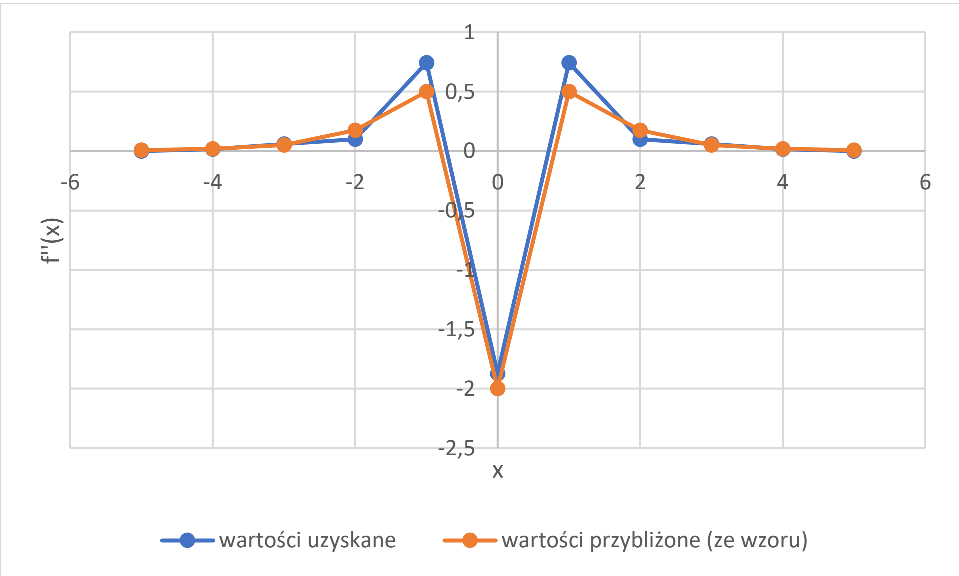
4.3.1. $f_1(x)$



4.3.2. *$f_2(x)$*



4.4. Porównanie wartości drugich pochodnych



5. Podsumowanie

Interpolacja poprzez funkcje sklejane (poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach) okazuje się być bardzo skuteczną metodą przy odpowiedniej liczbie węzłów (nie koniecznie dużej). Jednakże, metoda ta niekoniecznie sprawdza się w wyznaczaniu wartości tychże drugich pochodnych. Nie zmienia to faktu, że ta metoda może być bardzo przydatna w wielu sytuacjach.