Metody Numeryczne – sprawozdanie

Zastosowanie rozkładu LU w rozwiązywaniu UARL

Laboratorium nr 2

Adam Młyńczak 410702, Informatyka Stosowana

1. Cel zajęć

Kolejne laboratoria miały na celu zapoznać nas z metodą rozwiązywania układów algebraicznych znaną jako metoda LU. Na zajęciach przedstawiony został sposób działania metody oraz wytłumaczone zostały poszczególne kroki w rozwiązywaniu postawionego przez prowadzącego problemu.

2. Opis problemu

Zadaniem było zbadanie, dla jakich wartości parametru *q* układ równań ma rozwiązanie. Dany układ równań:

$$\begin{bmatrix} 2q \cdot 10^{-4} & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 2 \cdot 10^{-4} & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 10 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 9 & 7 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań, mieliśmy sprawdzić dokładność otrzymanych wyników obliczając iloczyn $\vec{c} = A\vec{x}$, a następnie odchylenie *o(q)* od pierwotnego wektora $\vec{b}$ według wzoru:

$$o(q) = \frac{1}{5}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(c_i - b_i)^2}$$

Obliczenia mamy prowadzić dla $q \in \left\langle \frac{1}{5}, 5 \right\rangle$.

3. Teoria

3.1. Rozkład LU metodą Gaussa

Głównym zadaniem w tej metodzie jest przedstawienie macierzy kwadratowej *A* jako iloczyn dwóch macierzy: U (górnotrójkątnej) oraz I (dolnotrójkątnej):

$$A = L \cdot U$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Aby uzyskać macierz *U*, należy wyzerować wszystkie współczynniki poniżej przekątnej. Można to zrobić analogicznie jak w metodzie Gaussa. Zerowanie tych współczynników wykonuje się osobno dla każdej kolumny. Wyzerowanie współczynników w j-tej kolumnie wymaga odjęcia od każdego i-tego wiersza (gdzie i = j + 1, j + 2, … , n) pomnożonego przez współczynnik l, który wyliczamy ze wzoru:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

Wyliczone współczynniki *l*, wpisujemy w i-ty wiersz oraz j-tą kolumnę macierzy *L*, którą początkowo wypełniamy samymi zerami.

3.2. Rozwiązanie układu równań z macierzami L i U

Dysponując już wcześniej wyliczonymi macierzami L oraz U rozwiązujemy pierwotny układ w następujących krokach:

$$L\vec{y} = \vec{b}$$
$$U\vec{x} = \vec{y}$$

Współrzędne wektora *y* wyliczamy według wzoru:

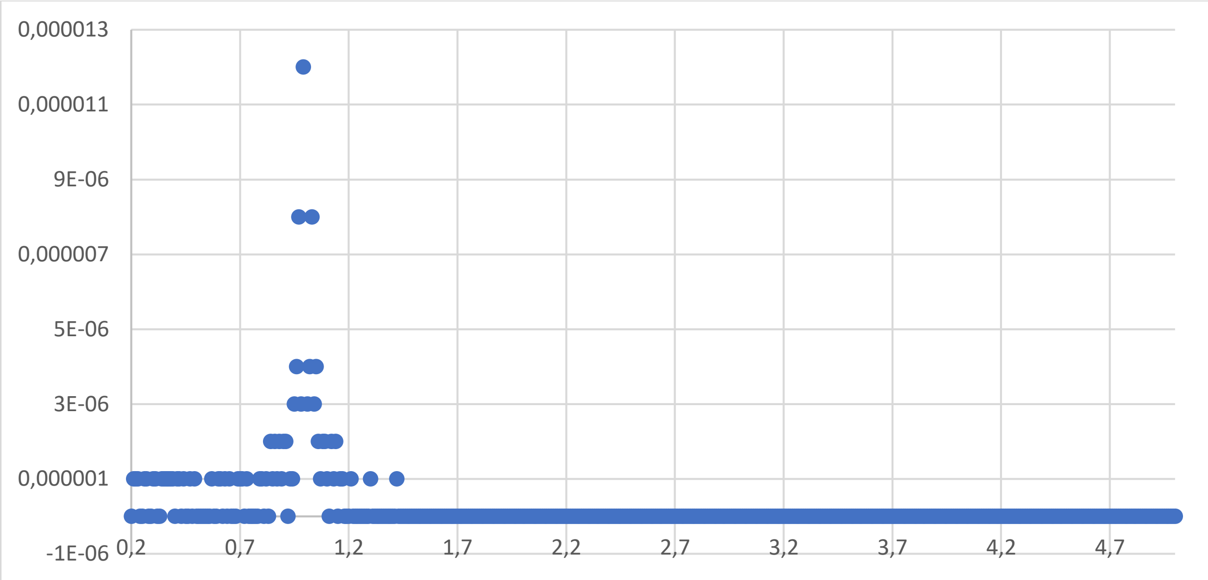
$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ y_i = \dfrac{b_i - y_{i-1} l_{i(i-1)} - \cdots - y_1 l_{i1}}{l_{ii}} \end{cases}$$

Współrzędne wektora *x* wyliczamy według wzoru:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{x_n}{u_{nn}} \\ x_i = \dfrac{y_i - x_n u_{in} - \cdots - x_{i+1} u_{i(i+1)}}{u_{ii}} \end{cases}$$

4. Wyniki obliczeń

4.1. Wykres zależności odchylenia *o* od wartości parametru *q*.



5. Interpretacja wyników

Na wykresie przedstawionym w podpunkcie 4.1 możemy zaobserwować ok. 500 punktów przedstawiających wartość odchylenia (od $q = 0.2$ do $q = 5$, ze zmianą na poziomie 0.01 miedzy dwoma wartościami).

W bliskim sąsiedztwie $q = 1$ można zobaczyć znaczne zwiększenie odchylenia, z czym im bliżej 1, tym różnice pomiędzy sąsiednimi wartościami rosną. Problem ten wynika z prostego powodu – macierz A dla $q = 1$ jest macierzą osobliwą (wyznacznik jest równy 0), więc jej dwa pierwsze wiersze są kombinacją liniową.

Dodatkową obserwacją może być również to, że dla $q<1$ jest więcej wyników różnych od zera niż dla $q>1$.

6. Podsumowanie

Rozwiązanie układów algebraicznych równań liniowych metodą rozkładu na macierz L oraz macierz U może służyć do numerycznego oraz (dla odpowiednich wartości *q*) dokładnego wyznaczenia rozwiązań. Patrząc na wyniki, które otrzymywałem, mogę stwierdzić że jest to metoda wystarczająco skuteczna.