Metody Numeryczne - sprawozdanie

Metoda Potęgowa z Redukcją Hotellinga

Laboratorium nr 4

Adam Młyńczak 410702, Informatyka Stosowana

1. Cel zajęć

Na czwartych zajęciach laboratoryjnych naszym zadaniem było zaimplementowanie programu do wyznaczenia wartości własnych macierzy. Dany program miał używać metody potęgowej z redukcją Hotellinga – znanej krócej jako metoda potęgowa. Prowadzący przedstawił nam zasady działania tegoż sposobu, a następnie zaczęliśmy tworzyć nasze rozwiązania.

2. Opis problemu

Dana nam jest macierz ***A*** – macierz symetryczna o wymiarach 7×7. Elementy tej macierzy wyznaczamy według wzoru:

$$A_{ij} = \sqrt{i+j},$$

gdzie *i* oraz *j* oznaczają wiersze i kolumny naszej macierzy (zatem *i, j = 1, 2, … , 7*). Naszym zadaniem było wyznaczenie wartości własnych oraz wektorów własnych tejże macierzy *A*.

3. Teoria

Za pomocą metody potęgowej można wyznaczyć największą co do modułu wartość własną oraz przypisany do niej wektor własny. Do rozwiązanie potrzebne jest przejście po kolejnych krokach:

1) Definiujemy początkowy wektor własny $x_0 = [1, 1, 1, \dots , 1]$.
2) Dla każdej iteracji obliczamy wektor k+1 iteracji według wzoru:
$$x_{k+1} = W_i x_k,$$
gdzie W_i to macierz, dla której wyznaczamy wektory oraz wartości własne. Dla pierwszej wartości przyjmujemy, że $W_0 = A$.
3) Wartość własną wyliczamy za pomocą wzoru:
$$\lambda_k = \frac{x_{k+1}^T x_k}{x_k^T x_k}.$$
4) Normalizujemy otrzymany wektor x_{k+1}. Otrzymany wektor jest wektorem własnym macierzy W_i.
5) Należy wykonać tyle iteracji wyznaczenia x_{k+1}, aby $\|x_{k+1} - x_2\| < TOL$. *TOL* to wymagana własność wyznaczenia wartości własnej (prowadzący kazał przyjąć, że 8 iteracji starczy).
6) Następnie należy dokonać redukcji Hotellinga dla macierzy (w celu wyznaczenia szukanych wartości). Redukcji dokonujemy za pomocą wzoru:
$$W_{i+1} = W_i - \lambda x^T x.$$
λ to usuwana wartość własna, *x* to przypisany do niej wektor własny macierzy W_i.

4. Opracowanie wyników

4.1. Wartości własne

Uruchamiając napisanych przeze mnie program, otrzymuje następujące wielkości dla wartości własnych (zapis do 5 miejsc znaczących):

$$\lambda_1 = 19.78617$$
$$\lambda_2 = -0.71234$$
$$\lambda_3 = -0.013317$$
$$\lambda_4 = -0.00033540$$
$$\lambda_5 = -0.0000065887$$
$$\lambda_6 = -0.000000081864$$
$$\lambda_7 = -0.00000000047124$$

4.2. Wektory własne

Uruchamiając ten sam program, oto otrzymane wektory własne (zapis wartości w wektorze do 5 miejsc znaczących):

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.29797 \\ 0.32721 \\ 0.35372 \\ 0.37820 \\ 0.40110 \\ 0.42269 \\ 0.44319 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0.68867 \\ 0.40604 \\ 0.18140 \\ -0.0069977 \\ -0.17042 \\ -0.31549 \\ -0.44647 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} -0.59187 \\ 0.25768 \\ 0.44993 \\ 0.36287 \\ 0.14367 \\ -0.14074 \\ -0.45688 \end{bmatrix},$$

$$x_4 = \begin{bmatrix} 0.28092 \\ -0.64784 \\ -0.078445 \\ 0.35344 \\ 0.40875 \\ 0.12049 \\ -0.43442 \end{bmatrix}, x_5 = \begin{bmatrix} 0.086033 \\ -0.45893 \\ 0.56072 \\ 0.21219 \\ -0.35872 \\ -0.40357 \\ 0.36194 \end{bmatrix}, x_6 = \begin{bmatrix} 0.017631 \\ -0.17346 \\ 0.52911 \\ -0.53964 \\ -0.14756 \\ 0.56155 \\ -0.24759 \end{bmatrix}, x_7 = \begin{bmatrix} 0.0022075 \\ -0.035651 \\ 0.19751 \\ -0.51389 \\ 0.68694 \\ -0.45744 \\ 0.12032 \end{bmatrix}.$$

5. Podsumowanie

Przedstawiona nam na zajęciach metoda jest jednym z przykładów metod iteracyjnych, które pomagają w rozwiązywaniu wielu problemów numerycznie. Dzięki metodzie potęgowej z redukcją Hotellinga możemy wyznaczyć wektory własne danej macierzy z dosyć dużą dokładnością (dokładnością, którą potrzebujemy w danej sytuacji).