No. 1. Diketahui $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot 4}{4}x^3 - \frac{2 \cdot 3}{3}x^2 - \frac{1 \cdot 2}{2}x + 2$$
$$f'(x) = \frac{1 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}}x^3 - \frac{2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}}x^2 - \frac{1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}x + 2$$
$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$f''(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

a. Nilai x yang memberikan titik kritis.

Titik kritis terdapat pada $f'(x) = 0$ atau $f'(x)$ tidak terdefinisi.

$f'(x)$ terdefinisi untuk semua nilai x

Cek $f'(x) = 0$

$f'(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$(x-2)(x+1)(x-1) = 0$

$x = -1, x = 2, x = 1$

$\therefore$ Nilai x yang memberikan titik kritis adalah $\{-1, 2, 1\}$

b. Menentukan di mana $f(x)$ naik dan $f(x)$ turun.

(1) $f(x)$ naik jika $f'(x) > 0$

(2) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

(3) $(x-2)(x+1)(x-1) > 0$

(4) $-1 < x < 1$ atau $x > 2$

(5) $\therefore$ Jadi, fungsi naik pada interval $(-1,\ 1) \cup (2,\ \infty)$

(1) $f(x)$ turun jika $f'(x) < 0$

(2) $x^3 - 2x^2 - x + 2 < 0$

(3) $(x-2)(x+1)(x-1) < 0$

(4) $x < -1$ atau $1 < x < 2$

(5) $\therefore$ Jadi, fungsi turun pada interval $(-\infty,\ -1) \cup (1,\ 2)$

c. Menentukan di mana $f(x)$ cekung ke atas $f(x)$ cekung ke bawah.

(1) $f(x)$ cekung ke atas jika $f''(x) > 0$

(2) $3x^2 - 4x - 1 > 0$

(3) $3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} > 0$

(4) $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 > \frac{7}{9}$

(5) $x < \frac{-\sqrt{7}+2}{3}$ atau $x > \frac{\sqrt{7}+2}{3}$

(6) $\therefore$ Jadi, fungsi cekung ke atas pada interval $\left(-\infty\,,\ \frac{-\sqrt{7}+2}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{7}+2}{3},\ \infty\right)$

(1) $f(x)$ cekung ke bawah jika $f''(x) < 0$

(2) $3x^2 - 4x - 1 < 0$

(3) $3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} < 0$

(4) $\frac{3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{3} < \frac{\frac{7}{3}}{3}$

(5) $-\sqrt{\frac{7}{9}} < x - \frac{2}{3} < \sqrt{\frac{7}{9}}$

(6) $\frac{-\sqrt{7}+2}{3} < x < \frac{\sqrt{7}+2}{3}$

(7) $\therefore$ Jadi, fungsi cekung ke bawah pada interval $\left(\frac{-\sqrt{7}+2}{3},\ \frac{\sqrt{7}+2}{3}\right)$

d. Tentukan nilai minimum dan maksimum.

Terdapat nilai minimum dan maksimum pada titik kritis $f'(x) = 0$

dari soal **a** ditemukan titik kritis pada $x \in \{-1, 2, 1\}$

$f(-1) = -\frac{31}{12}$ (Minimum lokal)

$f(1) = \frac{1}{12}$ (Maksimum lokal)

$f(2) = -\frac{1}{3}$ (Minimum lokal)

e. Titik balik terdapat pada $\left(-1,\ -\frac{31}{12}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{12}\right)$, dan $\left(2,\ -\frac{1}{3}\right)$

by Ammar Faizi

No. 2. Mencari asimtot tegak pada fungsi

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

$\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \dfrac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{x+1}} = x - 2$

$\therefore f(x)$ tidak memiliki asimtot tegak

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2}$

$\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2} = x + \dfrac{-3x - 2}{x + 2} = x - 3 + \dfrac{4}{x + 2}$

$\therefore$ Terdapat asimtot tegak $x = -2$

by Ammar Faizi

No. 3. Mencari asimtot datar pada fungsi

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$

$\therefore$ Terdapat asimtot datar $y = -1$

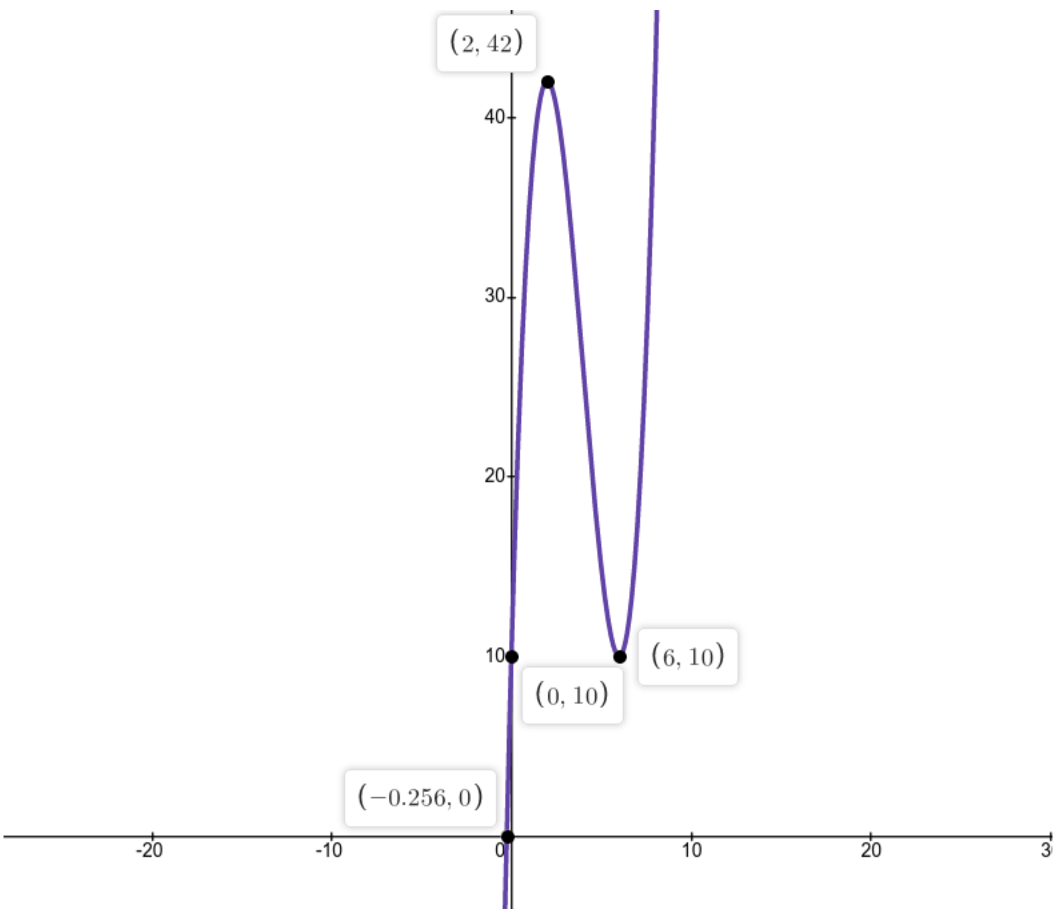
b. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

$\therefore$ Terdapat asimtot datar $y = 0$

by Ammar Faizi

No. 4. Menggambarkan fungsi

$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 10$



No. 5. Hitung limit

a. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2-4x-5} = \dfrac{(-1)^2+5(-1)+4}{(-1)^2-4(-1)-5} = \dfrac{1-5+4}{1+4-5} = \dfrac{0}{0}$ (bertemu dengan indeterminate form)

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+5x+4}{x^2-4x-5} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+4)(x+1)}{(x-5)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+4)\cancel{(x+1)}}{(x-5)\cancel{(x+1)}} = \lim_{x \to -1} \frac{x+4}{x-5} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

b. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} = \dfrac{\ln(1)}{1^2-1} = \dfrac{0}{0}$ (bertemu dengan indeterminate form)

Menggunakan aturan L'Hopital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sehingga $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}(x^2-1)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to 1} \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

c. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = \dfrac{\infty}{\ln(\infty)} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (bertemu dengan indeterminate form)

Menggunakan aturan L'Hopital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sehingga $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{\frac{d}{dx}x}{\frac{d}{dx}\ln(x)} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$

d. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+5x+4}{x^2+4x-5} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (bertemu dengan indeterminate form)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+5x+4}{x^2+4x-5}$$

$= \lim_{x \to \infty} \dfrac{2+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}$ (dibagi pangkat terbesar)

$$= \frac{2}{1} = 2$$

by Ammar Faizi