UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
FAKULTAS
MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

GEOGRAPHICALY WEIGHTED REGRESSION

YEKTI WIDYANINGSIH

FMIPA

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

OUTLINE

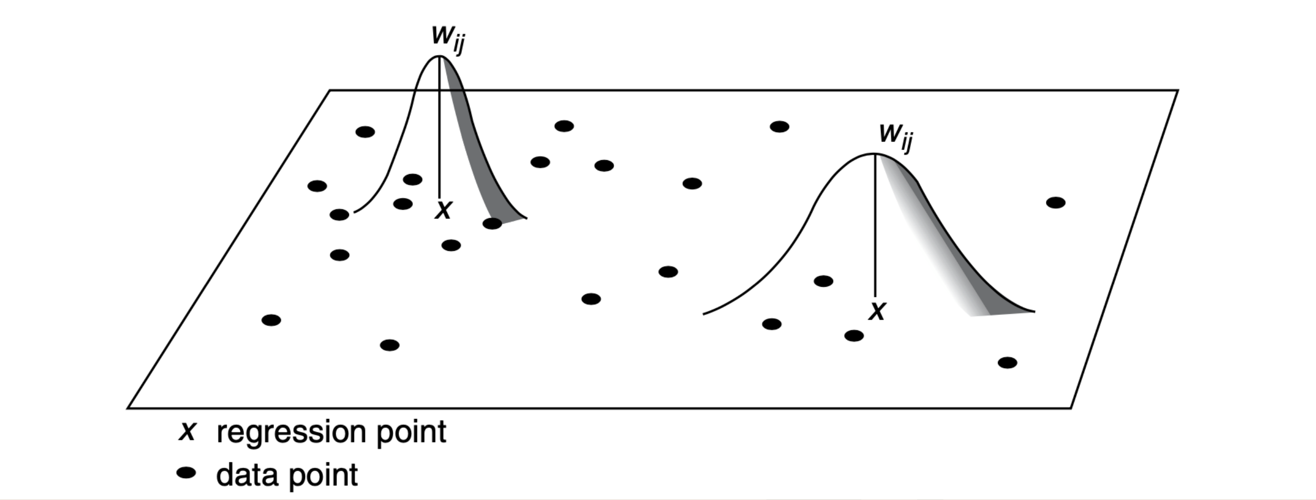
- INTRODUCTION
- MODEL GWR
- PENDUGAAN PARAMETER
- MATRIKS PEMBOBOT SPASIAL
- FUNGSI PEMBOBOT SPASIAL
- BANDWIDTH
- PEMILIHAN VARIABEL BEBAS
- PENGUJIAN HIPOTESIS
- PENILAIAN KUALITAS MODEL

introduction

Model regresi linier yang dipelajari pada mata kuliah MOLIN disebut sebagai regresi linier global karena nilai dugaan parameter yang didapatkan berlaku untuk semua lokasi observasi data. *Geographically Weighted Regression* (GWR) adalah pengembangan dari model regresi dimana setiap parameter dihitung pada setiap lokasi observasi, sehingga di setiap lokasi mempunyai nilai parameter model GWR yang berbeda-beda.

Introduction ...

Parameter yang dihasilkan pada model GWR akan berbeda-beda pada masing-masing lokasi, sehingga terdapat sebanyak $n \times (\boldsymbol{p} + \mathbf{1})$ parameter yang harus diestimasi, dimana n adalah jumlah lokasi pengamatan dan p adalah jumlah peubah bebas. Analisis data spasial dilakukan menggunakan metode GWR ketika dideteksi terdapat efek heterogenitas spasial.



MODEL GWR

Model *Geographically Weighted Regression* (GWR) adalah sebagai berikut.

$$Y_i = \beta_0(u_i, v_i) + \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i) X_{ik} + \varepsilon_i \ , i = 1,2, \dots , n.$$

Keterangan:

Y_i : nilai peubah terikat pada lokasi ke-i

X_{ik} : nilai peubah bebas ke-k pada lokasi observasi ke-i

(u_i, v_i) : koordinat lokasi observasi ke-i

$\beta_0(u_i, v_i)$: Konstanta model GWR pada lokasi ke-i

$\beta_k(u_i, v_i)$: Parameter model GWR ke-k pada lokasi ke-i

ε_i : galat pada lokasi ke-i (Fotheringham, 2002).

FMIPA

UNIVERSITAS INDONESIA

Pendugaan Parameter Model GWR

Pendugaan Parameter Model GWR

Pendugaan parameter model *Geographically Weighted Regression* dilakukan dengan metode ***Weighted Least Squares*** **(WLS)** yaitu dengan memberikan pembobot yang berbeda untuk setiap lokasi dimana data diamati.
Pemberian bobot ini sesuai dengan Hukum I Tobler:
"*Everything is related to everything else, but near things are more related than distant things*" yang diterjemahkan dalam Bahasa Indonesia menjadi segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lainnya, tetapi sesuatu yang dekat mempunyai pengaruh lebih besar dibandingkan sesuatu yang jauh.

Pendugaan Parameter ...

Pada model GWR diasumsikan bahwa daerah yang dekat dengan lokasi pengamatan ke-*i* mempunyai pengaruh yang lebih besar terhadap estimasi parameternya dari pada daerah yang lebih jauh (Anselin L, 1988).

Pendugaan parameter dilakukan dengan meminimumkan Jumlah Kuadrat Galat Terboboti (JKGT). Jumlah kuadrat galat terboboti pada model GWR di lokasi ke-*i* dirumuskan sebagai berikut.

$$JKGT = \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i, v_i)\varepsilon_i^2 \qquad (3.2)$$

Persamaan 3.2 dapat dinyatakan dalam bentuk lain pada persamaan 3.3 yang dijabarkan sebagai berikut.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(u_i, v_i)\varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i, v_i)\left[y_i - \beta_0(u_i, v_i) - \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik}\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i, v_i)\left[y_i - \beta_0(u_i, v_i) - \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik}\right]\left[y_i - \beta_0(u_i, v_i) - \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i, v_i)\left[y_i^2 - y_i\beta_0(u_i, v_i) - y_i \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik} - y_i\beta_0(u_i, v_i) + \beta_0^2(u_i, v_i) + \beta_0(u_i, v_i)\sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik} - y_i \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik} + \beta_0(u_i, v_i)\sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik} + \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik}\right)^2\right]$$

UNIVERSITAS INDONESIA

FMIPA

Pendugaan Parameter …

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i,v_i)\Big[y_i^2 - 2y_i\beta_0(u_i,v_i) - 2y_i\sum_{k=1}^{p}\beta_k(u_i,v_i)x_{ik} + \beta_0^2(u_i,v_i) + 2\beta_0(u_i,v_i)\sum_{k=1}^{p}\beta_k(u_i,v_i)x_{ik} + \Big(\sum_{k=1}^{p}\beta_k(u_i,v_i)x_{ik}\Big)^2\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i,v_i)\Big[y_i^2 - 2y_i\Big(\beta_0(u_i,v_i) + \sum_{k=1}^{p}\beta_k(u_i,v_i)x_{ik}\Big)\Big(\beta_0(u_i,v_i) + \sum_{k=1}^{p}\beta_k(u_i,v_i)x_{ik}\Big)^2\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i,v_i)\Big[y_i^2 - 2y_i\Big(\beta_0(u_i,v_i) + \sum_{k=1}^{p}\beta_k(u_i,v_i)x_{ik}\Big)\Big(\beta_0(u_i,v_i) + \sum_{k=1}^{p}\beta_k(u_i,v_i)x_{ik}\Big)^2\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i,v_i)\, y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} w_i(u_i,v_i)y_i\Big(\beta_0(u_i,v_i) + \sum_{k=1}^{p}\beta_k(u_i,v_i)x_{ik} + \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i,v_i)\,\Big(\beta_0(u_i,v_i) + \sum_{k=1}^{p}\beta_k(u_i,v_i)x_{ik}\Big)^2$$

UNIVERSITAS INDONESIA
FMIPA

Pendugaan Parameter ...

Sampai tahap ini diketahui bahwa bentuk lain persamaan 3.2 adalah

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(u_i, v_i)\varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i, v_i)\, y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} w_i(u_i, v_i) y_i(\beta_0(u_i, v_i) + \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik} + \sum_{i=1}^{n} w_i(u_i, v_i)\left(\beta_0(u_i, v_i) + \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik}\right)^2 \quad (3.3)$$

Persamaan 3.3 dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{W}(u_i, v_i)\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{W}(u_i\,, v_i)\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}'(u_i, v_i)\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}(u_i, v_i)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'(u_i, v_i)\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}(u_i, v_i)\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i). \quad (3.4)$$

FMIPA
UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

Pendugaan Parameter ...

Taksiran $\hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i)$diperoleh ketika Jumlah Kuadrat Galat Terboboti (JKGT) mencapai nilai minimum sehingga taksiran $\hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i)$ diperoleh ketika turunan JKGT terhadap $\beta(u_i, v_i)$ sama dengan nol.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \beta(u_i, v_i)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{y}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)} - \frac{\partial 2\boldsymbol{\beta}'(u_i, v_i) \boldsymbol{X}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)} + \frac{\boldsymbol{\beta}'(u_i, v_i) \boldsymbol{X}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{X} \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - 2\boldsymbol{X}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{y} \boldsymbol{X} \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow - 2\boldsymbol{X}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{y} \boldsymbol{X} \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\boldsymbol{X}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{y} \boldsymbol{X} \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) = 2\boldsymbol{X}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{y}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{X}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{y} \boldsymbol{X} \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) = \boldsymbol{X}' \boldsymbol{W}(u_i, v_i) \boldsymbol{y}$$

UNIVERSITAS INDONESIA FMIPA

Pendugaan Parameter ...

$$\Leftrightarrow \left[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u_i},\boldsymbol{v_i})\boldsymbol{X}\right]^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}(u_i,v_i)\boldsymbol{y}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i) = \left[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u_i},\boldsymbol{v_i})\boldsymbol{X}\right]^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}(u_i,v_i)\boldsymbol{y}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}(u_i,v_i) = \left[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u_i},\boldsymbol{v_i})\boldsymbol{X}\right]^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}(u_i,v_i)\boldsymbol{y}$$

Penduga parameter GWR pada lokasi ke-i adalah

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}(u_i,v_i) = [\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u_i},\boldsymbol{v_i})\boldsymbol{X}]^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}(u_i,v_i)\boldsymbol{y} \qquad (3.5)$$

dengan $\boldsymbol{W}(u_i,v_i)$ adalah matriks pembobot spasial

Matriks Pembobot Spasial

Matriks Pembobot Spasial

Matriks Pembobot Spasial berupa matrik diagonal berukuran $(n \times n)$ dengan elemen diagonal $w_j(u_i, v_i)$, yaitu bobot untuk titik observasi ke-j pada saat pembentukan model GWR di lokasi (u_i, v_i).

$$\boldsymbol{W}(u_i, v_i) = \begin{bmatrix} w_1(u_i, v_i) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & w_2(u_i, v_i) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{n-1}(u_i, v_i) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & w_n(u_i, v_i) \end{bmatrix}$$

UNIVERSITAS INDONESIA
FMIPA

Matriks Pembobot ...

- Nilai pembobot spasial $w_1(u_i, v_i), w_2(u_i, v_i), \ldots, w_n(u_i, v_i)$ didapatkan menggunakan fungsi pembobot spasial.
- Fungsi pembobot spasial akan memberikan nilai bobot antara 0 sampai 1 berdasarkan jarak antar titik dibangunnya model dengan titik observasi.
- Ketika titik dibangunnya model sama dengan titik observasi maka fungsi pembobot spasial akan memberikan nilai bobot maksimal yaitu 1. Semakin jauh titik observasi dengan titik dibangunnya model maka nilai bobot akan semakin kecil.

UNIVERSITAS INDONESIA FMIPA

Matriks Pembobot ...

- Misalkan d_{ij} menyatakan jarak *Euclidean* titik observasi i dan j dengan rumus $d_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}$ maka bobot titik observasi ke-j untuk model pada lokasi ke-i $w_j(u_i, v_i) = K(d_{ij})$ dengan $K(d_{ij})$ adalah fungsi pembobot spasial.

UNIVERSITAS INDONESIA

FMIPA

Fungsi Pembobot Spasial

Fungsi Pembobot Spasial

- Menurut Fotheringham, (2002), salah satu penentu hasil analisis GWR adalah pemilihan fungsi pembobot.
- Peran pembobot pada model *GWR* sangat penting karena nilai bobot mewakili jarak antar titik obeservasi.
- Fungsi pembobot spasial digunakan untuk menentukan elemen matriks pembobot spasial dimana matriks tersebut digunakan untuk melakukan pendugaan parameter dalam model GWR.
- Akan diperhatikan fungsi pembobot spasial Kernel Gaussian dan Kernel Bisquare.

UNIVERSITAS INDONESIA FMIPA

Fungsi Pembobot ...

- Fungsi Kernel Gaussian: $\boldsymbol{K_G(d_{ij}) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right]}$

- Fungsi Kernel Bisquare: $K_B(d_{ij}) = \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right)^2$

Pada fungsi Kernel Bisquare, bobot titik observasi yang jaraknya melebihi nilai *bandwidth* optimum adalah nol.

Keterangan:

d_{ij} : jarak antara lokasi dibangunnya model GWR (i) dan lokasi observasi lainnya (j)

b : nilai *bandwidth* optimum.

Fungsi pembobot spasial yang baik akan memenuhi tiga sifat berikut.

a. $K(0) = 1$

b. $\lim_{d_{ij} \to \infty} K(d_{ij}) = 0$

c. $K(d_{ij})$ adalah fungsi yang monoton turun (Brunsdon, 1998).

FMIPA

BANDWIDTH

- *Bandwidth* atau lebar jendela optimum merupakan suatu jarak optimum yang masih memungkinkan respon suatu wilayah berpengaruh kuat terhadap wilayah lainnya. Penentuan nilai *bandwidth* optimum menggunakan kalibrasi nilai *cross-validation* yang dirumuskan sebagai berikut.

$$CV = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{y}_{\neq i}(b)]^2$$

- dengan y_i adalah nilai peubah terikat ke-i dan $\hat{y}_{\neq i}$ adalah nilai estimasi untuk peubah terikat selain ke-i. Kalibrasi dilakukan dengan cara memasukkan berbagai nilai *bandwidth* ke dalam rumus CV sampai ditemukan nilai CV yang paling kecil. Nilai *bandwidth* (b) dikatakan optimum jika nilai CV minimum (Fotheringham, 2002).

Pemilihan Variabel Bebas

Pemilihan Variabel Bebas

Misalkan ada lima peubah bebas yang disiapkan, akan diputuskan peubah mana saja yang akan dilibatkan dalam membentuk model GWR dengan metode *pseudo-stepwise*.

Langkah-langkah metode:

1. Membuat model GWR antara peubah terikat dengan sebuah peubah bebas satu per satu.
2. Pilih peubah bebas yang menghasilkan model terbaik berdasarkan nilai Cross Validation (CV) dan ikut sertakan peubah bebas tersebut dalam membangun model berikutnya.

UNIVERSITAS INDONESIA
FMIPA

Pemilihan ...

3. Membuat model GWR dengan melibatkan peubah bebas yang terpilih pada langkah 2 ditambah sebuah peubah bebas yang lain satu per satu kemudian pilih peubah bebas yang baru ditambahkan yang menghasilkan model terbaik berdasarkan nilai CV.
4. Ulangi langkah 3 hingga seluruh peubas bebas terlibat dalam model GWR.
5. Analisis grafik nilai CV tiap langkah. Jika langkah penambahan peubah bebas baru tidak mengakibatkan penurunan nilai CV maka peubah bebas tersebut tidak dilibatkan dalam model GWR final (Gollini I, et al, 2015).

UNIVERSITAS INDONESIA FMIPA

Pengujian Hipotesis

Pengujian Hipotesis untuk Parameter Model GWR

Adanya heterogenitas spasial mengakibatkan peubah bebas yang berpengaruh signifikan terhadap peubah tetap berbeda-beda di setiap lokasi. Uji ini dilakukan untuk mengetahui peubah mana saja yang berpengaruh secara signifikan di suatu lokasi.

$H_0: \beta_k(u_i, v_i) = 0$
$H_1: \beta_k(u_i, v_i) \neq 0$

Statistik uji yang digunakan: $t_k(u_i, v_i) = \dfrac{\hat{\beta}_k(u_i,v_i)}{Se\left(\hat{\beta}_k(u_i,v_i)\right)}$

dengan $Se\left(\hat{\beta}_k(u_i, v_i)\right) = \sqrt{CC^T\sigma^2}$

$C = \left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i)\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i)$

Pengujian Hipotesis …

Kriteria menolak H_0:

$$|t_k(u_i, v_p)| > t_{n-m-1,\frac{\alpha}{2}} \text{ atau } p\text{-}value < 0{,}05$$

Keterangan:

$Se\left(\hat{\beta}_k(u_i, v_i)\right)$: Standar galat untuk pendugaan parameter peubah bebas ke-k pada lokasi ke-i.

n : jumlah titik lokasi yang dianalisis

m : jumlah peubah bebas (Nekaya et al. 2005).

Penilaian Kualitas Model

Penilaian Kualitas Model

Ada beberapa cara menilai kualitas model. Pada bagian ini model GWR dengan fungsi pembobot spasial Kernel Gaussian dan Kernel Bisquare akan dibandingkan menurut skor AIC dan koefisien determinasi (R^2).

FMIPA

UNIVERSITAS INDONESIA

Penilaian Kualitas ...

1. Akaike Information Criterion (AIC)

AIC adalah sebuah ukuran relatif kualitas suatu model statistik terhadap model statistik lain. Model dengan skor AIC lebih kecil dianggap sebagai model yang lebih baik. Skor AIC suatu model dihitung dengan rumus sebagai berikut.

$$AIC = e^{\frac{2k}{n}} \frac{\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon_i}^2}{n}$$

Keterangan:

k : Jumlah parameter

n : Jumlah observasi

$\widehat{\varepsilon_i}$: Galat pada observasi ke-i (Fathurahman, 2016).

2. **Koefisien Determinasi (R^2)**

Koefisien determinasi adalah suatu ukuran variasi peubah terikat yang dapat diprediksi oleh peubah bebas. Semakin besar skor R^2 suatu model maka model dianggap semakin baik. Koefisien determiniasi dihitung dengan rumus sebagai berikut.

$$R^2 = 1 - \frac{JKG}{JKT}$$

Keterangan:

JKG : Jumlah kuadrat galat ($JKG = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^{\,2}$)
JKT : Jumlah kuadrat total ($JKT = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$)
y_i : data observasi ke-i
$\bar{y}$: mean data observasi (Montgomery, 2012).

FMIPA

thank you

RICHARD BRANSON

“Business opportunities are like buses. There's always another one coming.”