Kokonvergenan, Hukum Bilangan Besar, Teorema Limit Pusat

Ayunda Afiani Rosita, Muhammad Ammar Sahab

## Motivasi

Untuk meningkatkan kualitas suatu penduga, dapat dilakukan peningkatan ukuran sampel. Jika ukuran sampel ditingkatkan, biasanya ragam dari penduga akan berkurang, nilai tengah penduga akan mendekati nilai parameter, dan beberapa sebaran dapat diaproksimasi dengan sebaran yang lebih mudah. Dalam pertemuan ini, akan dipelajari dasar teori mengenai perubahan perilaku suatu penduga saat ukuran sampel besar.

## Kekonvergenan

### Konvergensi dalam Peluang

Jika adalah suatu barisan peubah acak ( dengan ukuran sampel adalah i) dan X adalah peubah acak, maka **konvergen dalam peluang** ke X jika untuk tiap ,

Atau,

Dinotasikan:

### Beberapa Teorema Berguna

Ada beberapa teorema yang digunakan dalam menyelesaikan masalah kekonvergenan. Pertama, ada **Pertidaksamaan Chebysheff**:

Atau, dengan substitusi :

Teorema ini cukup sering digunakan karena menghubungkan jarak antara suatu peubah acak dengan rataannya dengan probabilitas, yang berguna dalam membuktikan konvergensi dalam peluang.

Lalu, ada teorema mengenai sifat-sifat kekonvergenan. Teorema pertama: jika dan maka . Bukti teorema sebagai berikut; pertama, perhatikan bahwa sehinga . Oleh karena itu:

Sehingga dan:

Note, ini berarti . Note bahwa jika , , sehingga

Lalu, perhatikan bahwa jika , maka syaratnya adalah atau . Jika syarat tersebut tidak terpenuhi, maka tidak mungkin . Namun, jika syarat tersebut terpenuhi belum tentu . Maka:

Yang diketahui bahwa saat , dan menuju 0.

Teorema kedua: jika dan suatu konstanta, maka . Buktinya untuk adalah:

Karena diketahyu saat pernyataan tersebut benar untuk semua , maka akan benar untuk semua .

Teorema ketiga. Jika dan fungsi kontinu di . Maka . Karena kontinu di , maka ada agar jika . Teorema ini dapat digunakan untuk membuktikan konvergensi fungsi kuadrat, pecahan, akar.

#### Contoh Soal

* Let denote a random variable with mean and variance , where , and are constants (not functions of n). Prove that converges in probability to .

Dengan pertidaksamaan Chebysheff, buat :

Ambil limit jika , pasti akan 0.

* Let , show that converges in probability to 0.

Dua soal ini menunjukkan dua pendekatan membuktikan konvergensi dalam peluang. Pertama, menggunakan pertidaksamaan Chebysheff dan kedua, menggunakan fkp.

#### Latihan Soal

Sebuah peubah acak menyebar . Buktikan:

1. konvergen dalam peluang ke .
2. konvergen dalam peluang ke .
3. konvergen dalam peluang ke

Hint:

### Konvergensi dalam Distribusi

Dinotasikan , dengan definisi:

Jika adalah suatu barisan peubah acak ( dengan ukuran sampel adalah i) dan X adalah peubah acak, maka **konvergen dalam distribusi** ke X jika:

Di semua titik kontinu.

#### Contoh Soal

* memiliki fungsi kumulatif:

Dengan menggunakan substitusi , maka sehingga:

Sehingga:

Maka, konvergen dalam distribusi ke:

Karena tak kontinu di .

* Diberikan:

Di mana suatu konstanta. Tunjukkan konvergen dalam distribusi ke Poisson().

Sehingga:

Yang tidak lain merupakan fungsi kumulatif dari Poisson:

#### Latihan Soal

* Diberikan:

Tunjukkan konvergen dalam distribusi ke

* Let denote the minimum of a random sample of size n from a distribution that has pdf zero elsewhere. Let . Investigate the limiting distribution of