Il temperamento matematico: aritmetica e scale musicali

Stefano Isola

Università di Camerino

stefano.isola@unicam.it

https://unicam.it/∼stefano.isola/index.html

Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi

Leibniz (1646-1716)

Il suono

Il suono

Qual'è la natura del suono?

Il suono

Qual'è la natura del suono? La percezione delle oscillazioni trasmesse all'aria (o ad altro mezzo elastico) da un corpo in vibrazione.

Il suono

Qual'è la natura del suono? La percezione delle oscillazioni trasmesse all'aria (o ad altro mezzo elastico) da un corpo in vibrazione.

Se una corda viene messa in vibrazione produce un'onda sonora di una certa frequenza (numero di oscillazioni per unità di tempo) ω e una certa ampiezza (pressione sonora).

Il suono

Qual'è la natura del suono? La percezione delle oscillazioni trasmesse all'aria (o ad altro mezzo elastico) da un corpo in vibrazione.

Se una corda viene messa in vibrazione produce un'onda sonora di una certa frequenza (numero di oscillazioni per unità di tempo) ω e una certa ampiezza (pressione sonora).

Il suono

Qual'è la natura del suono? La percezione delle oscillazioni trasmesse all'aria (o ad altro mezzo elastico) da un corpo in vibrazione.

Se una corda viene messa in vibrazione produce un'onda sonora di una certa frequenza (numero di oscillazioni per unità di tempo) ω e una certa ampiezza (pressione sonora).

Più grande è la frequenza, più acuto è il suono.

Il suono

Qual'è la natura del suono? La percezione delle oscillazioni trasmesse all'aria (o ad altro mezzo elastico) da un corpo in vibrazione.

Se una corda viene messa in vibrazione produce un'onda sonora di una certa frequenza (numero di oscillazioni per unità di tempo) ω e una certa ampiezza (pressione sonora).

Più grande è la frequenza, più acuto è il suono.

Altra caratteristica delle onde sonore è la forma d'onda, che rende ragione del timbro.

Il suono

Qual'è la natura del suono? La percezione delle oscillazioni trasmesse all'aria (o ad altro mezzo elastico) da un corpo in vibrazione.

Se una corda viene messa in vibrazione produce un'onda sonora di una certa frequenza (numero di oscillazioni per unità di tempo) ω e una certa ampiezza (pressione sonora).

Più grande è la frequenza, più acuto è il suono.

Altra caratteristica delle onde sonore è la forma d'onda, che rende ragione del timbro. La vibrazione di una corda è in generale una sovrapposizione di tante vibrazioni elementari, con diverse ampiezze e con frequenze multiple della frequenza base (armoniche) :

Il suono

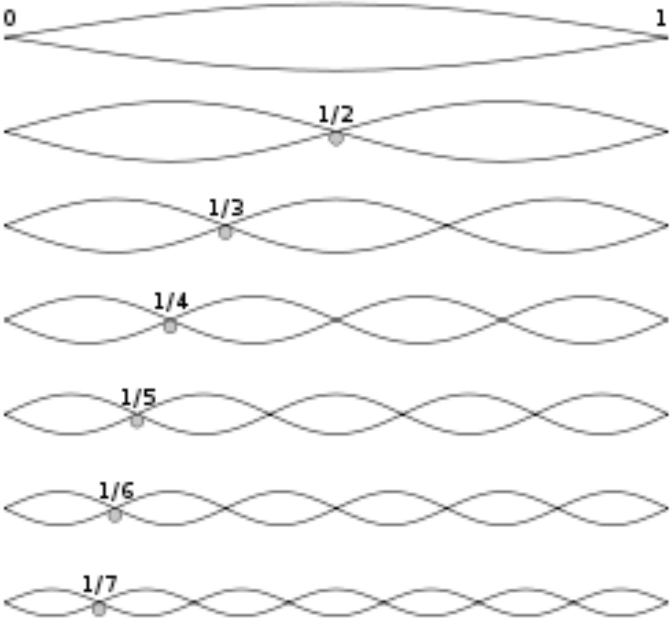
Qual'è la natura del suono? La percezione delle oscillazioni trasmesse all'aria (o ad altro mezzo elastico) da un corpo in vibrazione.

Se una corda viene messa in vibrazione produce un'onda sonora di una certa frequenza (numero di oscillazioni per unità di tempo) ω e una certa ampiezza (pressione sonora).

Più grande è la frequenza, più acuto è il suono.

Altra caratteristica delle onde sonore è la forma d'onda, che rende ragione del timbro. La vibrazione di una corda è in generale una sovrapposizione di tante vibrazioni elementari, con diverse ampiezze e con frequenze multiple della frequenza base (armoniche) :

$$\omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad 4\omega, \quad 5\omega, \quad 6\omega, \quad 7\omega \quad \dots$$


0
1
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
1/7

Suoni e intervalli

Suoni e intervalli

Nella pratica musicale ha poca importanza la capacità di associare ad una data nota la frequenza corretta (orecchio assoluto).

Suoni e intervalli

Nella pratica musicale ha poca importanza la capacità di associare ad una data nota la frequenza corretta (orecchio assoluto). Molto più importante è quella di riconoscere l'intervallo formato tra due note consecutive,

Suoni e intervalli

Nella pratica musicale ha poca importanza la capacità di associare ad una data nota la frequenza corretta (orecchio assoluto). Molto più importante è quella di riconoscere l'intervallo formato tra due note consecutive, per utilizzare la sua qualità di essere consonante o dissonante.

Suoni e intervalli

Nella pratica musicale ha poca importanza la capacità di associare ad una data nota la frequenza corretta (orecchio assoluto). Molto più importante è quella di riconoscere l'intervallo formato tra due note consecutive, per utilizzare la sua qualità di essere consonante o dissonante.

L'uso di questi termini ha elementi di soggettività, ma esistono anche precise basi fisiche e fisiologiche che fanno sì che tutte le civiltà, in luoghi e tempi diversi, abbiano individuato alcuni intervalli privilegiati.

Suoni e intervalli

Nella pratica musicale ha poca importanza la capacità di associare ad una data nota la frequenza corretta (orecchio assoluto). Molto più importante è quella di riconoscere l'intervallo formato tra due note consecutive, per utilizzare la sua qualità di essere consonante o dissonante.

L'uso di questi termini ha elementi di soggettività, ma esistono anche precise basi fisiche e fisiologiche che fanno sì che tutte le civiltà, in luoghi e tempi diversi, abbiano individuato alcuni intervalli privilegiati.

Primo fra tutti per consonanza è l'intervallo di ottava:

Suoni e intervalli

Nella pratica musicale ha poca importanza la capacità di associare ad una data nota la frequenza corretta (orecchio assoluto). Molto più importante è quella di riconoscere l'intervallo formato tra due note consecutive, per utilizzare la sua qualità di essere consonante o dissonante.

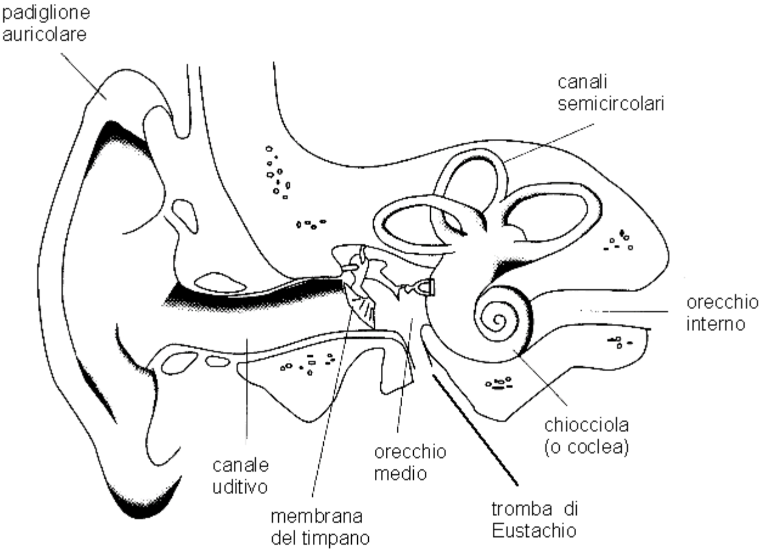
L'uso di questi termini ha elementi di soggettività, ma esistono anche precise basi fisiche e fisiologiche che fanno sì che tutte le civiltà, in luoghi e tempi diversi, abbiano individuato alcuni intervalli privilegiati.

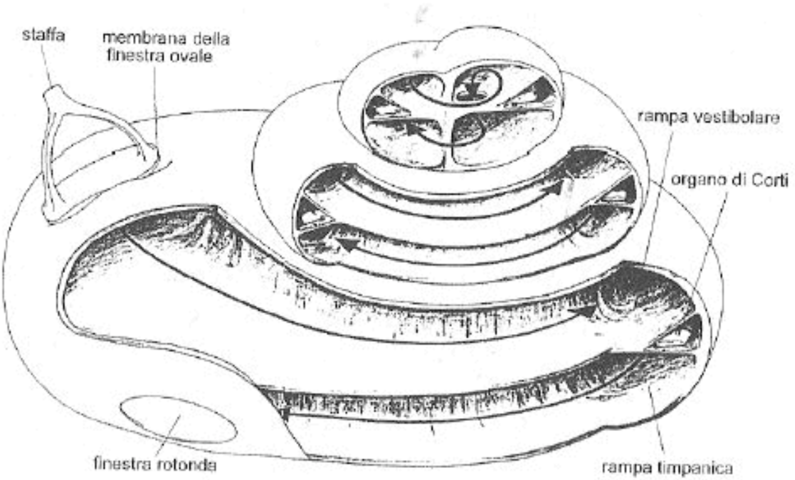
Primo fra tutti per consonanza è l'intervallo di ottava:

se una corda di lunghezza ℓ produce un suono di frequenza $\omega = 512$ Hz, una corda di lunghezza $\ell/2$ ne produce uno di frequenza doppia $2\,\omega = 1024$ Hz.

Ma come avviene la percezione del suono ?

Ma come avviene la percezione del suono ?




staffa
membrana della
finestra ovale
rampa vestibolare
organo di Corti
finestra rotonda
rampa timpanica

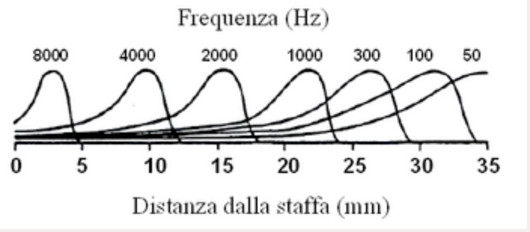
La teoria posizionale di Helmholtz

La teoria posizionale di Helmholtz

Hermann von Helmholtz (1821-1894) ne *La teoria delle sensazioni tonali come base fisiologica della teoria musicale* (1863) sostenne che il meccanismo di discriminazione delle frequenze fosse di tipo posizionale: suoni di frequenze diverse mettono in moto regioni diverse della membrana basilare.

La teoria posizionale di Helmholtz

Hermann von Helmholtz (1821-1894) ne *La teoria delle sensazioni tonali come base fisiologica della teoria musicale* (1863) sostenne che il meccanismo di discriminazione delle frequenze fosse di tipo posizionale: suoni di frequenze diverse mettono in moto regioni diverse della membrana basilare.



Ciò dà conto di alcuni fenomeni percettivi fondamentali:

Ciò dà conto di alcuni fenomeni percettivi fondamentali:

◇ l’esistenza di un intervallo di frequenze udibili,

Ciò dà conto di alcuni fenomeni percettivi fondamentali:

◇ l'esistenza di un intervallo di frequenze udibili,

◇ la percezione degli intervalli musicali come rapporti di frequenze (e non come differenze).

Ciò dà conto di alcuni fenomeni percettivi fondamentali:

◇ l'esistenza di un intervallo di frequenze udibili,

◇ la percezione degli intervalli musicali come rapporti di frequenze (e non come differenze).

Infatti, se l'ampiezza della regione riservata ad ogni ottava è costante, verranno percepiti come identici intervalli che hanno la stessa distanza lungo la membrana basilare.

Ciò dà conto di alcuni fenomeni percettivi fondamentali:

◇ l'esistenza di un intervallo di frequenze udibili,

◇ la percezione degli intervalli musicali come rapporti di frequenze (e non come differenze).

Infatti, se l'ampiezza della regione riservata ad ogni ottava è costante, verranno percepiti come identici intervalli che hanno la stessa distanza lungo la membrana basilare.

Dunque nel confronto tra due suoni diversi il nostro orecchio percepisce non la differenza tra due frequenze ma la differenza tra i loro logaritmi (largezza dell'intervallo).

Ciò dà conto di alcuni fenomeni percettivi fondamentali:

◇ l'esistenza di un intervallo di frequenze udibili,

◇ la percezione degli intervalli musicali come rapporti di frequenze (e non come differenze).

Infatti, se l'ampiezza della regione riservata ad ogni ottava è costante, verranno percepiti come identici intervalli che hanno la stessa distanza lungo la membrana basilare.

Dunque nel confronto tra due suoni diversi il nostro orecchio percepisce non la differenza tra due frequenze ma la differenza tra i loro logaritmi (largezza dell'intervallo).

La base b del logaritmo viene scelta in modo che l'ottava abbia largezza unitaria:

$$\log_b(2\omega : \omega) = \log_b 2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad b = 2$$

Intervalli e scale

Intervalli e scale

Il problema centrale in musica è quello di organizzare sistemi di suoni (scale) che diano una percezione di consonanza, armonia, gradevolezza, ecc.

Intervalli e scale

Il problema centrale in musica è quello di organizzare sistemi di suoni (scale) che diano una percezione di consonanza, armonia, gradevolezza, ecc.

Chiamiamo intervallo la distanza tra due note misurata per mezzo del rapporto delle loro frequenze.

Intervalli e scale

Il problema centrale in musica è quello di organizzare sistemi di suoni (scale) che diano una percezione di consonanza, armonia, gradevolezza, ecc.

Chiamiamo intervallo la distanza tra due note misurata per mezzo del rapporto delle loro frequenze.

Il rapporto $2:1$ corrispondente all'intervallo $[\omega, 2\omega]$ si chiama ottava.

Intervalli e scale

Il problema centrale in musica è quello di organizzare sistemi di suoni (scale) che diano una percezione di consonanza, armonia, gradevolezza, ecc.

Chiamiamo intervallo la distanza tra due note misurata per mezzo del rapporto delle loro frequenze.

Il rapporto $2:1$ corrispondente all'intervallo $[\omega, 2\omega]$ si chiama ottava.

Il rapporto $3:2$ corrispondente alla metà dell'intervallo $[\omega, 2\omega]$ si chiama quinta giusta.

Intervalli e scale

Il problema centrale in musica è quello di organizzare sistemi di suoni (scale) che diano una percezione di consonanza, armonia, gradevolezza, ecc.

Chiamiamo intervallo la distanza tra due note misurata per mezzo del rapporto delle loro frequenze.

Il rapporto $2:1$ corrispondente all'intervallo $[\omega, 2\omega]$ si chiama ottava.

Il rapporto $3:2$ corrispondente alla metà dell'intervallo $[\omega, 2\omega]$ si chiama quinta giusta.

Il rapporto $4:3$ corrispondente ad un terzo dell'intervallo $[\omega, 2\omega]$ si chiama quarta giusta.

Intervalli e scale

Il problema centrale in musica è quello di organizzare sistemi di suoni (scale) che diano una percezione di consonanza, armonia, gradevolezza, ecc.

Chiamiamo intervallo la distanza tra due note misurata per mezzo del rapporto delle loro frequenze.

Il rapporto $2:1$ corrispondente all'intervallo $[\omega, 2\omega]$ si chiama ottava.

Il rapporto $3:2$ corrispondente alla metà dell'intervallo $[\omega, 2\omega]$ si chiama quinta giusta.

Il rapporto $4:3$ corrispondente ad un terzo dell'intervallo $[\omega, 2\omega]$ si chiama quarta giusta.

Osserviamo che: $\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{1}$ (quarta + quinta = ottava).

La legge della consonanza

La legge della consonanza

Un intervallo risulta consonante se è rappresentato dal rapporto di due numeri interi piccoli: più semplice è il rapporto, più consonanti sono le note che formano l'intervallo.

La legge della consonanza

Un intervallo risulta consonante se è rappresentato dal rapporto di due numeri interi piccoli: più semplice è il rapporto, più consonanti sono le note che formano l'intervallo.

Si tratta del primo esempio di "legge naturale" espressa per mezzo dell'aritmetica dei numeri interi.

La legge della consonanza

Un intervallo risulta consonante se è rappresentato dal rapporto di due numeri interi piccoli: più semplice è il rapporto, più consonanti sono le note che formano l'intervallo.

Si tratta del primo esempio di “legge naturale" espressa per mezzo dell'aritmetica dei numeri interi.

Tale legge, insieme alla scoperta delle consonanze fondamentali ottava, quinta giusta e quarta giusta, fu stabilita nell'antica Grecia dai **pitagorici** (VI-IV sec a.C.), attraverso vari esperimenti (monocordo).


IV BAL
PYTAGORA
PITAGORAS
PYTAGORA
PHYLOLAVS

La legge della consonanza si comprende con gli “armonici in comune".

La legge della consonanza si comprende con gli “armonici in comune".

ESEMPIO:

La legge della consonanza si comprende con gli “armonici in comune".

ESEMPIO:

$220, 440, 660, 880, 1100, 1320, 1760, 1980, 2200, 2420, 2640 \ldots$

La legge della consonanza si comprende con gli “armonici in comune".

ESEMPIO:

220, 440, 660, 880, 1100, 1320, 1760, 1980, 2200, 2420, 2640 ...

330, 660, 990, 1320, 1650, 1980, 2310, 2640 ...

La legge della consonanza si comprende con gli “armonici in comune".

ESEMPIO:

$220, 440, 660, 880, 1100, 1320, 1760, 1980, 2200, 2420, 2640 \ldots$

$330, 660, 990, 1320, 1650, 1980, 2310, 2640 \ldots$

$440, 880, 1320, 1760, 2200, 2640 \ldots$

La legge della consonanza si comprende con gli “armonici in comune".

ESEMPIO:

$220, 440, 660, 880, 1100, 1320, 1760, 1980, 2200, 2420, 2640 \ldots$

$330, 660, 990, 1320, 1650, 1980, 2310, 2640 \ldots$

$440, 880, 1320, 1760, 2200, 2640 \ldots$

Il tipo di armonici condivisi dà il "carattere" della consonanza:

La legge della consonanza si comprende con gli “armonici in comune".

ESEMPIO:

220, 440, 660, 880, 1100, 1320, 1760, 1980, 2200, 2420, 2640 . . .

330, 660, 990, 1320, 1650, 1980, 2310, 2640 . . .

440, 880, 1320, 1760, 2200, 2640 . . .

Il tipo di armonici condivisi dà il "carattere" della consonanza:

l’ottava è *sdolcinata troppo e senza brio*

La legge della consonanza si comprende con gli “armonici in comune".

ESEMPIO:

220, 440, 660, 880, 1100, 1320, 1760, 1980, 2200, 2420, 2640 . . .

330, 660, 990, 1320, 1650, 1980, 2310, 2640 . . .

440, 880, 1320, 1760, 2200, 2640 . . .

Il tipo di armonici condivisi dà il "carattere" della consonanza:

l’ottava è *sdolcinata troppo e senza brio*

ma la quinta *fa una titillazione ed un solletico tale sopra la cartilagine del timpano, che temperando la dolcezza con uno spruzzo d’acrimonia, par che insieme soavemente baci e morda.*

La legge della consonanza si comprende con gli “armonici in comune".

ESEMPIO:

220, 440, 660, 880, 1100, 1320, 1760, 1980, 2200, 2420, 2640 . . .

330, 660, 990, 1320, 1650, 1980, 2310, 2640 . . .

440, 880, 1320, 1760, 2200, 2640 . . .

Il tipo di armonici condivisi dà il "carattere" della consonanza:

l’ottava è *sdolcinata troppo e senza brio*

ma la quinta *fa una titillazione ed un solletico tale sopra la cartilagine del timpano, che temperando la dolcezza con uno spruzzo d’acrimonia, par che insieme soavemente baci e morda.*

(**Galileo Galilei**, *Discorsi intorno a due nuove scienze*, 1638)

La musica delle sfere

La musica delle sfere

I pitagorici pensavano che la stessa aritmetica dei rapporti tra piccoli numeri interi governasse l'intero universo ed in particolare il moto dei pianeti.

La musica delle sfere

I pitagorici pensavano che la stessa aritmetica dei rapporti tra piccoli numeri interi governasse l'intero universo ed in particolare il moto dei pianeti.

La musica delle sfere indicava appunto il suono inaudibile prodotto dal moto dei pianeti ed ha attratto curiosità ed interesse fino al XVII secolo (**Keplero**, **Fludd**, **Mersenne**, **Kircher**) per poi sparire del tutto dall'astronomia moderna.

La musica delle sfere

I pitagorici pensavano che la stessa aritmetica dei rapporti tra piccoli numeri interi governasse l'intero universo ed in particolare il moto dei pianeti.

La musica delle sfere indicava appunto il suono inaudibile prodotto dal moto dei pianeti ed ha attratto curiosità ed interesse fino al XVII secolo (**Keplero**, **Fludd**, **Mersenne**, **Kircher**) per poi sparire del tutto dall'astronomia moderna.

Alcuni esempi:

La musica delle sfere

I pitagorici pensavano che la stessa aritmetica dei rapporti tra piccoli numeri interi governasse l'intero universo ed in particolare il moto dei pianeti.

La musica delle sfere indicava appunto il suono inaudibile prodotto dal moto dei pianeti ed ha attratto curiosità ed interesse fino al XVII secolo (**Keplero**, **Fludd**, **Mersenne**, **Kircher**) per poi sparire del tutto dall'astronomia moderna.

Alcuni esempi:

◇ Per Mercurio il rapporto tra i periodi di rotazione e di rivoluzione attorno al Sole è 3 : 2 (quinta)

La musica delle sfere

I pitagorici pensavano che la stessa aritmetica dei rapporti tra piccoli numeri interi governasse l'intero universo ed in particolare il moto dei pianeti.

La musica delle sfere indicava appunto il suono inaudibile prodotto dal moto dei pianeti ed ha attratto curiosità ed interesse fino al XVII secolo (**Keplero**, **Fludd**, **Mersenne**, **Kircher**) per poi sparire del tutto dall'astronomia moderna.

Alcuni esempi:

◇ Per Mercurio il rapporto tra i periodi di rotazione e di rivoluzione attorno al Sole è 3 : 2 (quinta)

◇ Per la Luna il rapporto tra i periodi di rotazione e di rivoluzione attorno alla Terra è 1 : 1 (unisono)

La musica delle sfere

I pitagorici pensavano che la stessa aritmetica dei rapporti tra piccoli numeri interi governasse l'intero universo ed in particolare il moto dei pianeti.

La musica delle sfere indicava appunto il suono inaudibile prodotto dal moto dei pianeti ed ha attratto curiosità ed interesse fino al XVII secolo (**Keplero**, **Fludd**, **Mersenne**, **Kircher**) per poi sparire del tutto dall'astronomia moderna.

Alcuni esempi:

◇ Per Mercurio il rapporto tra i periodi di rotazione e di rivoluzione attorno al Sole è $3:2$ (quinta)

◇ Per la Luna il rapporto tra i periodi di rotazione e di rivoluzione attorno alla Terra è $1:1$ (unisono)

◇ Le lune galileiane Ganimede, Europa e Io hanno una risonanza orbitale $1:2:4$ attorno a Giove (ottave)

Il temperamento pitagorico

Il temperamento pitagorico

Un temperamento è un criterio per costruire le scale a partire da alcuni intervalli di riferimento.

Il temperamento pitagorico

Un temperamento è un criterio per costruire le scale a partire da alcuni intervalli di riferimento.

Il temperamento pitagorico consiste nell'ottenere le note della scala partendo dai soli due intervalli di quinta giusta e di ottava.

Il temperamento pitagorico

Un temperamento è un criterio per costruire le scale a partire da alcuni intervalli di riferimento.

Il temperamento pitagorico consiste nell'ottenere le note della scala partendo dai soli due intervalli di quinta giusta e di ottava. Così, usando il rapporto $3 : 2$ due volte si ottiene l'intervallo $9 : 4$ che è di poco superiore all'ottava.

Il temperamento pitagorico

Un temperamento è un criterio per costruire le scale a partire da alcuni intervalli di riferimento.

Il temperamento pitagorico consiste nell'ottenere le note della scala partendo dai soli due intervalli di quinta giusta e di ottava. Così, usando il rapporto $3:2$ due volte si ottiene l'intervallo $9:4$ che è di poco superiore all'ottava. Riportando all'ottava iniziale si ottiene l'intervallo $9:8 = 3^2 : 2^3$.

Il temperamento pitagorico

Un temperamento è un criterio per costruire le scale a partire da alcuni intervalli di riferimento.

Il temperamento pitagorico consiste nell'ottenere le note della scala partendo dai soli due intervalli di quinta giusta e di ottava. Così, usando il rapporto $3 : 2$ due volte si ottiene l'intervallo $9 : 4$ che è di poco superiore all'ottava. Riportando all'ottava iniziale si ottiene l'intervallo $9 : 8 = 3^2 : 2^3$. Usando ancora il rapporto $3 : 2$ arriviamo a $27 : 16 = 3^3 : 2^4$ e così via.

Il temperamento pitagorico

Un temperamento è un criterio per costruire le scale a partire da alcuni intervalli di riferimento.

Il temperamento pitagorico consiste nell'ottenere le note della scala partendo dai soli due intervalli di quinta giusta e di ottava. Così, usando il rapporto $3:2$ due volte si ottiene l'intervallo $9:4$ che è di poco superiore all'ottava. Riportando all'ottava iniziale si ottiene l'intervallo $9:8 = 3^2:2^3$. Usando ancora il rapporto $3:2$ arriviamo a $27:16 = 3^3:2^4$ e così via.

NOTE	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
SCALA PITAGORICA	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Vi sono solo due intervalli tra note successive:

Vi sono solo due intervalli tra note successive:
la seconda maggiore (tono intero T) di $9 : 8 = 3^2 : 2^3$

Vi sono solo due intervalli tra note successive:
la seconda maggiore (tono intero T) di $9 : 8 = 3^2 : 2^3$
la seconda minore (semitono S) di $256 : 243 = 2^8 : 3^5$

Vi sono solo due intervalli tra note successive:
la seconda maggiore (tono intero T) di $9 : 8 = 3^2 : 2^3$
la seconda minore (semitono S) di $256 : 243 = 2^8 : 3^5$
alternate come T-T-S-T-T-T-S (scala maggiore diatonica).

Vi sono solo due intervalli tra note successive:
la seconda maggiore (tono intero T) di $9 : 8 = 3^2 : 2^3$
la seconda minore (semitono S) di $256 : 243 = 2^8 : 3^5$
alternate come T-T-S-T-T-T-S (scala maggiore diatonica).

Un semitono non è proprio la metà di un tono, ma quasi:

Vi sono solo due intervalli tra note successive:
la seconda maggiore (tono intero T) di $9 : 8 = 3^2 : 2^3$
la seconda minore (semitono S) di $256 : 243 = 2^8 : 3^5$
alternate come T-T-S-T-T-T-S (scala maggiore diatonica).

Un semitono non è proprio la metà di un tono, ma quasi:
il sistema pitagorico si basa su fatto che

$$3^{12} \approx 2^{19} \quad \text{o} \quad 531441 \approx 524288$$

Vi sono solo due intervalli tra note successive:
la seconda maggiore (tono intero T) di $9 : 8 = 3^2 : 2^3$
la seconda minore (semitono S) di $256 : 243 = 2^8 : 3^5$
alternate come T-T-S-T-T-T-S (scala maggiore diatonica).

Un semitono non è proprio la metà di un tono, ma quasi:
il sistema pitagorico si basa su fatto che

$$3^{12} \approx 2^{19} \quad \text{o} \quad 531441 \approx 524288$$

ovvero salire 12 quinte e ridiscendere 7 ottave riporta quasi al punto di partenza.

Vi sono solo due intervalli tra note successive:
la seconda maggiore (tono intero T) di $9 : 8 = 3^2 : 2^3$
la seconda minore (semitono S) di $256 : 243 = 2^8 : 3^5$
alternate come T-T-S-T-T-T-S (scala maggiore diatonica).

Un semitono non è proprio la metà di un tono, ma quasi:
il sistema pitagorico si basa su fatto che

$$3^{12} \approx 2^{19} \quad \text{o} \quad 531441 \approx 524288$$

ovvero salire 12 quinte e ridiscendere 7 ottave riporta quasi al punto di partenza. La piccola differenza, cioè il rapporto

$$3^{12} : 2^{19} = 1,013643...$$

Vi sono solo due intervalli tra note successive:
la seconda maggiore (tono intero T) di $9 : 8 = 3^2 : 2^3$
la seconda minore (semitono S) di $256 : 243 = 2^8 : 3^5$
alternate come T-T-S-T-T-T-S (scala maggiore diatonica).

Un semitono non è proprio la metà di un tono, ma quasi:
il sistema pitagorico si basa su fatto che

$$3^{12} \approx 2^{19} \quad \text{o} \quad 531441 \approx 524288$$

ovvero salire 12 quinte e ridiscendere 7 ottave riporta quasi al punto di partenza. La piccola differenza, cioè il rapporto

$$3^{12} : 2^{19} = 1,013643...$$

si chiama comma pitagorico (poco più di un nono di tono).

Vi sono solo due intervalli tra note successive:
la seconda maggiore (tono intero T) di $9 : 8 = 3^2 : 2^3$
la seconda minore (semitono S) di $256 : 243 = 2^8 : 3^5$
alternate come T-T-S-T-T-T-S (scala maggiore diatonica).

Un semitono non è proprio la metà di un tono, ma quasi:
il sistema pitagorico si basa su fatto che

$$3^{12} \approx 2^{19} \quad \text{o} \quad 531441 \approx 524288$$

ovvero salire 12 quinte e ridiscendere 7 ottave riporta quasi al punto di partenza. La piccola differenza, cioè il rapporto

$$3^{12} : 2^{19} = 1,013643...$$

si chiama comma pitagorico (poco più di un nono di tono).

Questa piccola differenza genera tuttavia alcuni problemi ....

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \le r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \le r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$\frac{128}{81}$ $A\flat$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \rightarrow \frac{32}{27}\, E\flat$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \le r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \to \frac{32}{27}\, E\flat \to \frac{16}{9}\, B\flat$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \le r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \to \frac{32}{27}\, E\flat \to \frac{16}{9}\, B\flat \to \frac{4}{3}\, F$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \rightarrow \frac{32}{27}\, E\flat \rightarrow \frac{16}{9}\, B\flat \rightarrow \frac{4}{3}\, F \rightarrow \frac{1}{1}\, C$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \rightarrow \frac{32}{27}\, E\flat \rightarrow \frac{16}{9}\, B\flat \rightarrow \frac{4}{3}\, F \rightarrow \frac{1}{1}\, C \rightarrow \frac{3}{2}\, G$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \to \frac{32}{27}\, E\flat \to \frac{16}{9}\, B\flat \to \frac{4}{3}\, F \to \frac{1}{1}\, C \to \frac{3}{2}\, G \to \frac{9}{8}\, D$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \le r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \to \frac{32}{27}\, E\flat \to \frac{16}{9}\, B\flat \to \frac{4}{3}\, F \to \frac{1}{1}\, C \to \frac{3}{2}\, G \to \frac{9}{8}\, D$$

$$\to \frac{27}{16}\, A$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \to \frac{32}{27}\, E\flat \to \frac{16}{9}\, B\flat \to \frac{4}{3}\, F \to \frac{1}{1}\, C \to \frac{3}{2}\, G \to \frac{9}{8}\, D$$

$$\to \frac{27}{16}\, A \to \frac{81}{64}\, E$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \to \frac{32}{27}\, E\flat \to \frac{16}{9}\, B\flat \to \frac{4}{3}\, F \to \frac{1}{1}\, C \to \frac{3}{2}\, G \to \frac{9}{8}\, D$$

$$\to \frac{27}{16}\, A \to \frac{81}{64}\, E \to \frac{243}{128}\, B$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \le r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \to \frac{32}{27}\, E\flat \to \frac{16}{9}\, B\flat \to \frac{4}{3}\, F \to \frac{1}{1}\, C \to \frac{3}{2}\, G \to \frac{9}{8}\, D$$

$$\to \frac{27}{16}\, A \to \frac{81}{64}\, E \to \frac{243}{128}\, B \to \frac{729}{512}\, F\sharp$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \to \frac{32}{27}\, E\flat \to \frac{16}{9}\, B\flat \to \frac{4}{3}\, F \to \frac{1}{1}\, C \to \frac{3}{2}\, G \to \frac{9}{8}\, D$$

$$\to \frac{27}{16}\, A \to \frac{81}{64}\, E \to \frac{243}{128}\, B \to \frac{729}{512}\, F\sharp \to \frac{2187}{2048}\, C\sharp$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \le r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \to \frac{32}{27}\, E\flat \to \frac{16}{9}\, B\flat \to \frac{4}{3}\, F \to \frac{1}{1}\, C \to \frac{3}{2}\, G \to \frac{9}{8}\, D$$

$$\to \frac{27}{16}\, A \to \frac{81}{64}\, E \to \frac{243}{128}\, B \to \frac{729}{512}\, F\sharp \to \frac{2187}{2048}\, C\sharp \to \frac{6561}{4096}\, G\sharp$$

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \rightarrow \frac{32}{27}\, E\flat \rightarrow \frac{16}{9}\, B\flat \rightarrow \frac{4}{3}\, F \rightarrow \frac{1}{1}\, C \rightarrow \frac{3}{2}\, G \rightarrow \frac{9}{8}\, D$$

$$\rightarrow \frac{27}{16}\, A \rightarrow \frac{81}{64}\, E \rightarrow \frac{243}{128}\, B \rightarrow \frac{729}{512}\, F\sharp \rightarrow \frac{2187}{2048}\, C\sharp \rightarrow \frac{6561}{4096}\, G\sharp$$

$A\flat$ e $G\sharp$ formano una coppia enarmonica le cui frequenze differiscono appunto per un comma pitagorico:

Poniamo

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

per $n = -4, -3, \ldots, 7, 8$ si trovano i valori di r_n:

$$\frac{128}{81}\, A\flat \to \frac{32}{27}\, E\flat \to \frac{16}{9}\, B\flat \to \frac{4}{3}\, F \to \frac{1}{1}\, C \to \frac{3}{2}\, G \to \frac{9}{8}\, D$$

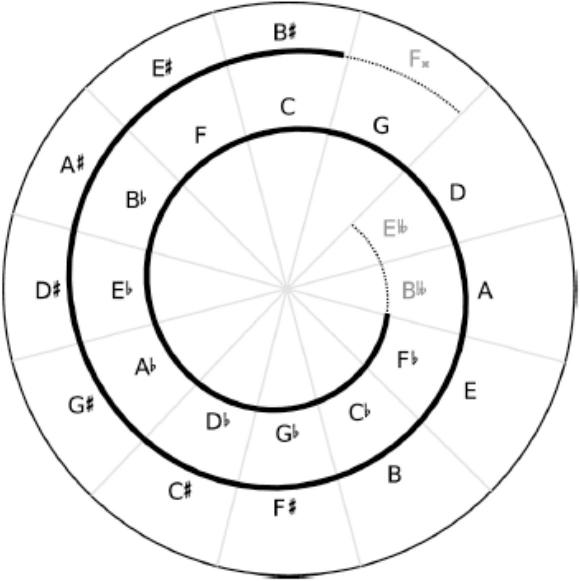
$$\to \frac{27}{16}\, A \to \frac{81}{64}\, E \to \frac{243}{128}\, B \to \frac{729}{512}\, F\sharp \to \frac{2187}{2048}\, C\sharp \to \frac{6561}{4096}\, G\sharp$$

$A\flat$ e $G\sharp$ formano una coppia enarmonica le cui frequenze differiscono appunto per un comma pitagorico:

$$\frac{6561/4096}{128/81} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1,013643...$$

La spirale delle quinte

La spirale delle quinte



Problema:

Problema: la spirale si richiude prima o poi?

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta:

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta: No, la spirale è infinita...

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta: No, la spirale è infinita...

Dimostrazione:

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta: No, la spirale è infinita...

Dimostrazione: ricordiamo che $z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n$

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta: No, la spirale è infinita...

Dimostrazione: ricordiamo che $z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n$ e dunque

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \quad \text{con} \quad \alpha = \log_2(3/2)$$

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta: No, la spirale è infinita...

Dimostrazione: ricordiamo che $z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n$ e dunque

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \quad \text{con} \quad \alpha = \log_2(3/2)$$

Se la spirale si chiudesse allora vi sarebbero due numeri interi n_1 e n_2 tali che $n_1 \neq n_2$ e $r_{n_1} = r_{n_2}$.

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta: No, la spirale è infinita...

Dimostrazione: ricordiamo che $z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n$ e dunque

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \quad \text{con} \quad \alpha = \log_2(3/2)$$

Se la spirale si chiudesse allora vi sarebbero due numeri interi n_1 e n_2 tali che $n_1 \neq n_2$ e $r_{n_1} = r_{n_2}$. In tal caso avremmo che $n_1\alpha - k_1 = n_2\alpha - k_2$

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta: No, la spirale è infinita...

Dimostrazione: ricordiamo che $z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n$ e dunque

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \quad \text{con} \quad \alpha = \log_2(3/2)$$

Se la spirale si chiudesse allora vi sarebbero due numeri interi n_1 e n_2 tali che $n_1 \neq n_2$ e $r_{n_1} = r_{n_2}$. In tal caso avremmo che $n_1\alpha - k_1 = n_2\alpha - k_2$ e quindi

$$\alpha = \frac{k_1 - k_2}{n_1 - n_2} \equiv \frac{p}{q}$$

cioè α sarebbe un numero razionale.

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta: No, la spirale è infinita...

Dimostrazione: ricordiamo che $z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k r_n$ e dunque

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \quad \text{con} \quad \alpha = \log_2(3/2)$$

Se la spirale si chiudesse allora vi sarebbero due numeri interi n_1 e n_2 tali che $n_1 \neq n_2$ e $r_{n_1} = r_{n_2}$. In tal caso avremmo che $n_1\alpha - k_1 = n_2\alpha - k_2$ e quindi

$$\alpha = \frac{k_1 - k_2}{n_1 - n_2} \equiv \frac{p}{q}$$

cioè α sarebbe un numero razionale.

Ma allora si avrebbe $3/2 = 2^{p/q}$ ovvero $3^q = 2^{p-q}$.

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta: No, la spirale è infinita...

Dimostrazione: ricordiamo che $z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k r_n$ e dunque

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \quad \text{con} \quad \alpha = \log_2(3/2)$$

Se la spirale si chiudesse allora vi sarebbero due numeri interi n_1 e n_2 tali che $n_1 \neq n_2$ e $r_{n_1} = r_{n_2}$. In tal caso avremmo che $n_1\alpha - k_1 = n_2\alpha - k_2$ e quindi

$$\alpha = \frac{k_1 - k_2}{n_1 - n_2} \equiv \frac{p}{q}$$

cioè α sarebbe un numero razionale.

Ma allora si avrebbe $3/2 = 2^{p/q}$ ovvero $3^q = 2^{p-q}$.

D'altra parte il primo termine è sempre dispari mentre il secondo è sempre pari !

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta: No, la spirale è infinita...

Dimostrazione: ricordiamo che $z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n$ e dunque

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \quad \text{con} \quad \alpha = \log_2(3/2)$$

Se la spirale si chiudesse allora vi sarebbero due numeri interi n_1 e n_2 tali che $n_1 \neq n_2$ e $r_{n_1} = r_{n_2}$. In tal caso avremmo che $n_1\alpha - k_1 = n_2\alpha - k_2$ e quindi

$$\alpha = \frac{k_1 - k_2}{n_1 - n_2} \equiv \frac{p}{q}$$

cioè α sarebbe un numero razionale.

Ma allora si avrebbe $3/2 = 2^{p/q}$ ovvero $3^q = 2^{p-q}$.

D'altra parte il primo termine è sempre dispari mentre il secondo è sempre pari !

In particolare α è un numero irrazionale

Problema: la spirale si richiude prima o poi? se sì, quando?

Risposta: No, la spirale è infinita...

Dimostrazione: ricordiamo che $z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k\, r_n$ e dunque

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \quad \text{con} \quad \alpha = \log_2(3/2)$$

Se la spirale si chiudesse allora vi sarebbero due numeri interi n_1 e n_2 tali che $n_1 \neq n_2$ e $r_{n_1} = r_{n_2}$. In tal caso avremmo che $n_1\alpha - k_1 = n_2\alpha - k_2$ e quindi

$$\alpha = \frac{k_1 - k_2}{n_1 - n_2} \equiv \frac{p}{q}$$

cioè α sarebbe un numero razionale.

Ma allora si avrebbe $3/2 = 2^{p/q}$ ovvero $3^q = 2^{p-q}$.

D'altra parte il primo termine è sempre dispari mentre il secondo è sempre pari !

In particolare α è un numero irrazionale (orrore dei pitagorici...)

Osservazione: se α fosse razionale, cioè $\alpha = p/q$, allora da

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2$$

con la scelta $n = q$ si avrebbe che $r_q = 1$ e dunque la spirale si richiuderebbe dopo esattamente q ‘passi’.

In effetti vedremo come $\alpha = 0,584963\ldots$ si può approssimare bene con alcuni numeri razionali, ad esempio:

Osservazione: se α fosse razionale, cioè $\alpha = p/q$, allora da

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \quad , \quad 1 \leq r_n < 2$$

con la scelta $n = q$ si avrebbe che $r_q = 1$ e dunque la spirale si richiuderebbe dopo esattamente q ‘passi’.

In effetti vedremo come $\alpha = 0,584963\ldots$ si può approssimare bene con alcuni numeri razionali, ad esempio:

$$\frac{3}{5} = 0,6 \qquad \frac{7}{12} = 0,583333\ldots \qquad \frac{31}{53} = 0.584906\ldots$$

in modo da costruire sistemi “chiusi" con $5, 12, 53, \ldots$ toni.

Il sistema pitagorico rimase in uso fino al basso Medioevo, soddisfacendo le esigenze della composizione monodica e della polifonia medievale, in cui gli accordi conclusivi contenevano solo ottave e quinte.

Il sistema pitagorico rimase in uso fino al basso Medioevo, soddisfacendo le esigenze della composizione monodica e della polifonia medievale, in cui gli accordi conclusivi contenevano solo ottave e quinte.
Ma nel corso del XV secolo si affermò un uso sempre più frequente degli intervalli di terza e sesta, che nella scala pitagorica risultano poco consonanti.

Il sistema pitagorico rimase in uso fino al basso Medioevo, soddisfacendo le esigenze della composizione monodica e della polifonia medievale, in cui gli accordi conclusivi contenevano solo ottave e quinte.
Ma nel corso del XV secolo si affermò un uso sempre più frequente degli intervalli di terza e sesta, che nella scala pitagorica risultano poco consonanti.
Nel 1558 il teorico musicale **Gioseffo Zarlino** (riprendendo **Tolomeo**, II sec d.C) propose una costruzione della scala musicale che includesse anche i rapporti 5:4 e 6:5 (terza maggiore e minore) come intervalli fondamentali (temperamento naturale).

Il sistema pitagorico rimase in uso fino al basso Medioevo, soddisfacendo le esigenze della composizione monodica e della polifonia medievale, in cui gli accordi conclusivi contenevano solo ottave e quinte.
Ma nel corso del XV secolo si affermò un uso sempre più frequente degli intervalli di terza e sesta, che nella scala pitagorica risultano poco consonanti.
Nel 1558 il teorico musicale **Gioseffo Zarlino** (riprendendo **Tolomeo**, II sec d.C) propose una costruzione della scala musicale che includesse anche i rapporti 5:4 e 6:5 (terza maggiore e minore) come intervalli fondamentali (temperamento naturale).
Nei secoli XVII e XVIII diversi autori (**Cartesio**, **Mersenne**, **Rameau**, **d'Alembert**) posero a fondamento della teoria musicale la spiegazione scientifica della "giustezza" degli intervalli basati su rapporti semplici.

Temperamenti naturali

Temperamenti naturali

Il temperamento naturale è un sistema aperto che consiste nel prendere un certo numero di armoniche

$$\omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad 4\omega, \quad 5\omega, \quad 6\omega, \quad 7\omega \ \ldots$$

di una nota fondamentale ω e riportarle all'ottava di partenza.

Temperamenti naturali

Il temperamento naturale è un sistema aperto che consiste nel prendere un certo numero di armoniche

$$\omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad 4\omega, \quad 5\omega, \quad 6\omega, \quad 7\omega \ \ldots$$

di una nota fondamentale ω e riportarle all'ottava di partenza.

In questo modo otteniamo i rapporti

Temperamenti naturali

Il temperamento naturale è un sistema aperto che consiste nel prendere un certo numero di armoniche

$$\omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad 4\omega, \quad 5\omega, \quad 6\omega, \quad 7\omega \ \ldots$$

di una nota fondamentale ω e riportarle all'ottava di partenza.

In questo modo otteniamo i rapporti

$1 : 1$ per la prima, seconda, quarta, ottava, ..., armonica

Temperamenti naturali

Il temperamento naturale è un sistema aperto che consiste nel prendere un certo numero di armoniche

$$\omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad 4\omega, \quad 5\omega, \quad 6\omega, \quad 7\omega \ \ldots$$

di una nota fondamentale ω e riportarle all'ottava di partenza.

In questo modo otteniamo i rapporti

$1:1$ per la prima, seconda, quarta, ottava, $\ldots$, armonica

$3:2$ per la terza, sesta, dodicesima, $\ldots$, armonica

Temperamenti naturali

Il temperamento naturale è un sistema aperto che consiste nel prendere un certo numero di armoniche

$$\omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad 4\omega, \quad 5\omega, \quad 6\omega, \quad 7\omega \ \dots$$

di una nota fondamentale ω e riportarle all'ottava di partenza.

In questo modo otteniamo i rapporti

$1:1$ per la prima, seconda, quarta, ottava, . . . , armonica

$3:2$ per la terza, sesta, dodicesima, . . . , armonica

$5:4$ per la quinta, decima, . . . , armonica

Temperamenti naturali

Il temperamento naturale è un sistema aperto che consiste nel prendere un certo numero di armoniche

$$\omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad 4\omega, \quad 5\omega, \quad 6\omega, \quad 7\omega \; \ldots$$

di una nota fondamentale ω e riportarle all'ottava di partenza.

In questo modo otteniamo i rapporti

$1:1$ per la prima, seconda, quarta, ottava, $\ldots$, armonica

$3:2$ per la terza, sesta, dodicesima, $\ldots$, armonica

$5:4$ per la quinta, decima, $\ldots$, armonica

$7:4$ per la settima, quattordicesima, $\ldots$, armonica

Temperamenti naturali

Il temperamento naturale è un sistema aperto che consiste nel prendere un certo numero di armoniche

$$\omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad 4\omega, \quad 5\omega, \quad 6\omega, \quad 7\omega \ \ldots$$

di una nota fondamentale ω e riportarle all'ottava di partenza.

In questo modo otteniamo i rapporti

$1 : 1$ per la prima, seconda, quarta, ottava, $\ldots$, armonica

$3 : 2$ per la terza, sesta, dodicesima, $\ldots$, armonica

$5 : 4$ per la quinta, decima, $\ldots$, armonica

$7 : 4$ per la settima, quattordicesima, $\ldots$, armonica

e così via.

Temperamenti naturali

Il temperamento naturale è un sistema aperto che consiste nel prendere un certo numero di armoniche

$$\omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad 4\omega, \quad 5\omega, \quad 6\omega, \quad 7\omega \ \ldots$$

di una nota fondamentale ω e riportarle all'ottava di partenza.

In questo modo otteniamo i rapporti

$1:1$ per la prima, seconda, quarta, ottava, ..., armonica

$3:2$ per la terza, sesta, dodicesima, ..., armonica

$5:4$ per la quinta, decima, ..., armonica

$7:4$ per la settima, quattordicesima, ..., armonica

e così via. Dalla terza serie otteniamo le terze maggiori ($5:4$) e minori ($6:5$), e le complementari seste minori ($8:5$) e maggiori ($5:3$).

Temperamenti naturali

Il temperamento naturale è un sistema aperto che consiste nel prendere un certo numero di armoniche

$$\omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad 4\omega, \quad 5\omega, \quad 6\omega, \quad 7\omega \ \ldots$$

di una nota fondamentale ω e riportarle all'ottava di partenza.

In questo modo otteniamo i rapporti

$1:1$ per la prima, seconda, quarta, ottava, $\ldots$, armonica

$3:2$ per la terza, sesta, dodicesima, $\ldots$, armonica

$5:4$ per la quinta, decima, $\ldots$, armonica

$7:4$ per la settima, quattordicesima, $\ldots$, armonica

e così via. Dalla terza serie otteniamo le terze maggiori ($5:4$) e minori ($6:5$), e le complementari seste minori ($8:5$) e maggiori ($5:3$). Osserviamo che $\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$ (terza maggiore + terza minore = quinta giusta).

Otteniamo così

Nota	Do_1	Re_1	Mi_1	Fa_1	Sol_1	La_1	Si_1	Do_2
Frequenza (scala naturale)	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Frequenza (scala pitagorica)	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Otteniamo così

Nota	Do_1	Re_1	Mi_1	Fa_1	Sol_1	La_1	Si_1	Do_2
Frequenza (scala naturale)	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Frequenza (scala pitagorica)	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Vi sono due intervalli di tono: maggiore (9:8) e minore (10:9),

Otteniamo così

Nota	Do_1	Re_1	Mi_1	Fa_1	Sol_1	La_1	Si_1	Do_2
Frequenza (scala naturale)	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Frequenza (scala pitagorica)	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Vi sono due intervalli di tono: maggiore (9:8) e minore (10:9), ed un semitono diatonico (16:15).

Otteniamo così

Nota	Do_1	Re_1	Mi_1	Fa_1	Sol_1	La_1	Si_1	Do_2
Frequenza (scala naturale)	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Frequenza (scala pitagorica)	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Vi sono due intervalli di tono: maggiore (9:8) e minore (10:9), ed un semitono diatonico (16:15).

Il rapporto

$$\frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{27}{16} : \frac{5}{3} = \frac{243}{128} : \frac{15}{8} = \frac{81}{80}$$

si chiama comma sintonico (poco più di un decimo di tono), molto vicino al comma pitagorico 531441/524288.

Otteniamo così

Nota	Do_1	Re_1	Mi_1	Fa_1	Sol_1	La_1	Si_1	Do_2
Frequenza (scala naturale)	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Frequenza (scala pitagorica)	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Vi sono due intervalli di tono: maggiore (9:8) e minore (10:9), ed un semitono diatonico (16:15).

Il rapporto

$$\frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{27}{16} : \frac{5}{3} = \frac{243}{128} : \frac{15}{8} = \frac{81}{80}$$

si chiama comma sintonico (poco più di un decimo di tono), molto vicino al comma pitagorico 531441/524288.

Il loro rapporto si chiama schisma e vale 32805/32768 = 1,001129150... (tre quinte giuste + una terza maggiore - cinque quarte giuste).

Temperamento mesotonico

Un problema (soprattutto per l'accordatura degli strumenti) è che nel temperamento naturale non tutti gli intervalli di quinta sono giusti:

$[Re, La]$ vale $40/27$ e $(3/2) : (40/27) = 81/80$

Temperamento mesotonico

Un problema (soprattutto per l'accordatura degli strumenti) è che nel temperamento naturale non tutti gli intervalli di quinta sono giusti:

$[Re, La]$ vale $40/27$ e $(3/2) : (40/27) = 81/80$

L'esistenza del comma sintonico fa sì che uno strumento ad intonazione fissa accordato secondo la scala naturale di Do suona bene solo nella tonalità di Do. Per cambiare la tonica (modulazione) bisogna cambiare strumento, o riaccordarlo.

Temperamento mesotonico

Un problema (soprattutto per l'accordatura degli strumenti) è che nel temperamento naturale non tutti gli intervalli di quinta sono giusti:

$[Re, La]$ vale $40/27$ e $(3/2) : (40/27) = 81/80$

L'esistenza del comma sintonico fa sì che uno strumento ad intonazione fissa accordato secondo la scala naturale di Do suona bene solo nella tonalità di Do. Per cambiare la tonica (modulazione) bisogna cambiare strumento, o riaccordarlo.

Lo stesso Zarlino introdusse la variante del temperamento mesotonico (o del tono medio), in seguito generalizzata da vari autori (**Praetorius**, **Mersenne**, **Werckmeister**, ecc), in cui si tiene fisso il rapporto di 5:4 per le terze maggiori e i restanti intervalli si interpolano rendendoli più omogeni possibile.

Ne risulta una scala con cinque toni uguali di rapporto $\sqrt{5} : 2$ e due semitoni uguali ciascuno pari a

$$\sqrt{2/(\sqrt{5}/2)^5} : 1 = 8 : 5^{5/4}$$

Ne risulta una scala con cinque toni uguali di rapporto $\sqrt{5} : 2$ e due semitoni uguali ciascuno pari a

$$\sqrt{2/(\sqrt{5}/2)^5} : 1 = 8 : 5^{5/4}$$

L'intervallo di quinta si abbassa di un quarto di comma sintonico, cioè di $(81/80)^{1/4} = (2/3)5^{1/4}$, diventando $5^{1/4} : 1$.

Ne risulta una scala con cinque toni uguali di rapporto $\sqrt{5} : 2$ e due semitoni uguali ciascuno pari a

$$\sqrt{2/(\sqrt{5}/2)^5} : 1 = 8 : 5^{5/4}$$

L'intervallo di quinta si abbassa di un quarto di comma sintonico, cioè di $(81/80)^{1/4} = (2/3)5^{1/4}$, diventando $5^{1/4} : 1$.

$\diamond$ In questo modo si mette a posto il comma sintonico e si riescono a fare cambiamenti di tonalità (modulazioni) in un certo numero di chiavi.

Ne risulta una scala con cinque toni uguali di rapporto $\sqrt{5} : 2$ e due semitoni uguali ciascuno pari a

$$\sqrt{2/(\sqrt{5}/2)^5} : 1 = 8 : 5^{5/4}$$

L'intervallo di quinta si abbassa di un quarto di comma sintonico, cioè di $(81/80)^{1/4} = (2/3)5^{1/4}$, diventando $5^{1/4} : 1$.

$\diamond$ In questo modo si mette a posto il comma sintonico e si riescono a fare cambiamenti di tonalità (modulazioni) in un certo numero di chiavi.

$\diamond$ Ma il comma pitagorico resta: tentando di chiudere la spirale delle quinte ci si imbatte nella quinta del lupo (es. $[\mathit{La}\,\flat, \mathit{Do}\,\sharp]$ è stonata di circa un quarto di tono).

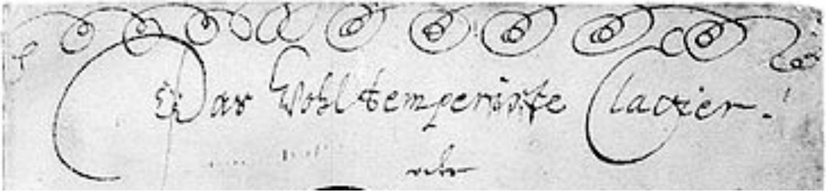
Temperamenti irregolari

Temperamenti irregolari

Si tratta di scale di dodici note ottenute modificando in modo irregolare la scala mesotonica per farla funzionare su tutte le dodici chiavi, eliminando la quinta del lupo.

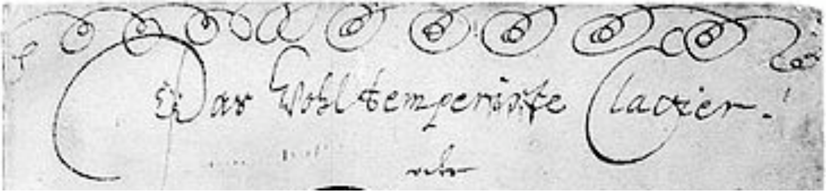
Temperamenti irregolari

Si tratta di scale di dodici note ottenute modificando in modo irregolare la scala mesotonica per farla funzionare su tutte le dodici chiavi, eliminando la quinta del lupo.



Temperamenti irregolari

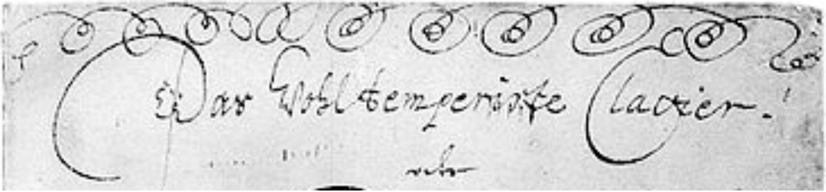
Si tratta di scale di dodici note ottenute modificando in modo irregolare la scala mesotonica per farla funzionare su tutte le dodici chiavi, eliminando la quinta del lupo.



J. S. Bach, *Das Wohltemperirte Clavier* (1722, 1744)

Temperamenti irregolari

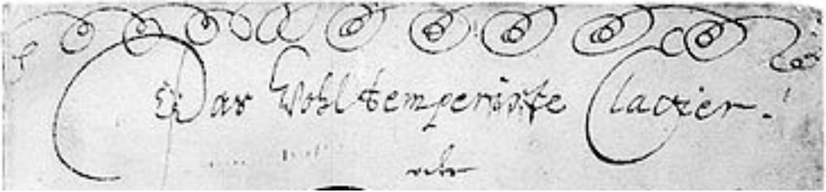
Si tratta di scale di dodici note ottenute modificando in modo irregolare la scala mesotonica per farla funzionare su tutte le dodici chiavi, eliminando la quinta del lupo.



J. S. Bach, *Das Wohltemperirte Clavier* (1722, 1744)
La serie di riccioli sopra il titolo codifica le istruzioni per costruire il temperamento.

Temperamenti irregolari

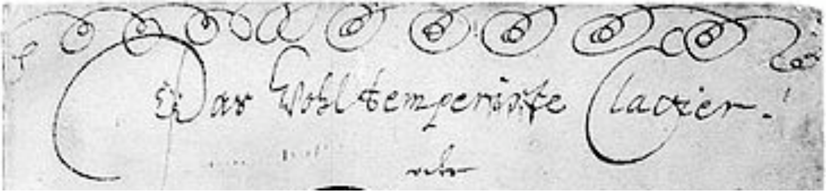
Si tratta di scale di dodici note ottenute modificando in modo irregolare la scala mesotonica per farla funzionare su tutte le dodici chiavi, eliminando la quinta del lupo.



J. S. Bach, *Das Wohltemperirte Clavier* (1722, 1744)
La serie di riccioli sopra il titolo codifica le istruzioni per costruire il temperamento. Ad esempio in ogni ricciolo vi sono 0, 1 o 2 circoletti, nella sequenza: 1-1-1-0-0-0-2-2-2-2.

Temperamenti irregolari

Si tratta di scale di dodici note ottenute modificando in modo irregolare la scala mesotonica per farla funzionare su tutte le dodici chiavi, eliminando la quinta del lupo.



J. S. Bach, *Das Wohltemperirte Clavier* (1722, 1744)
La serie di riccioli sopra il titolo codifica le istruzioni per costruire il temperamento. Ad esempio in ogni ricciolo vi sono 0, 1 o 2 circoletti, nella sequenza: 1-1-1-0-0-0-2-2-2-2.
Potrebbe indicare all'accordatore quanto rendere le undici quinte vicine alla quinta giusta (la dodicesima non dovendo essere specificata).

Temperamento naturale e numeri primi

Moltiplicando i rapporti della scala naturale $\frac{1}{1}, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, \frac{2}{1}$ per il m.c.m. dei loro denominatori, cioè 24, otteniamo la sequenza:

Temperamento naturale e numeri primi

Moltiplicando i rapporti della scala naturale $\frac{1}{1}, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, \frac{2}{1}$ per il m.c.m. dei loro denominatori, cioè 24, otteniamo la sequenza:

Do	$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
Re	$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$
Mi	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
Fa	$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Sol	$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
La	$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$
Si	$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$
Do	$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Temperamento naturale e numeri primi

Moltiplicando i rapporti della scala naturale $\frac{1}{1}, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, \frac{2}{1}$ per il m.c.m. dei loro denominatori, cioè 24, otteniamo la sequenza:

Do	$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
Re	$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$
Mi	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
Fa	$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Sol	$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
La	$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$
Si	$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$
Do	$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Le sette note del genere diatonico si possono ricavare usando i primi tre numeri primi 2, 3 e 5. Applicando il 3 e il 5 (modulo 2) si ottengono le quinte giuste e le terze maggiori rispettivamente.

Con queste note *“si è già in grado di comporre bellissime e variatissime melodie, la cui bellezza è fondata unicamente sulla semplicità dei numeri che hanno fornito questi toni*" (**Eulero**, *Sui dodici toni del clavicembalo*, 1768).

Con queste note *“si è già in grado di comporre bellissime e variatissime melodie, la cui bellezza è fondata unicamente sulla semplicità dei numeri che hanno fornito questi toni*" (**Eulero**, *Sui dodici toni del clavicembalo*, 1768).

D’altra parte, con gli stessi tre numeri primi, possiamo ottenere una scala cromatica di dodici note.

Con queste note *"si è già in grado di comporre bellissime e variatissime melodie, la cui bellezza è fondata unicamente sulla semplicità dei numeri che hanno fornito questi toni*" (**Eulero**, *Sui dodici toni del clavicembalo*, 1768).

D'altra parte, con gli stessi tre numeri primi, possiamo ottenere una scala cromatica di dodici note.

Applicando il 5 al Re otteniamo il nuovo tono Fa$\sharp = 45/32$

Con queste note *"si è già in grado di comporre bellissime e variatissime melodie, la cui bellezza è fondata unicamente sulla semplicità dei numeri che hanno fornito questi toni*" (**Eulero**, *Sui dodici toni del clavicembalo*, 1768).

D'altra parte, con gli stessi tre numeri primi, possiamo ottenere una scala cromatica di dodici note.

Applicando il 5 al Re otteniamo il nuovo tono Fa$\sharp = 45/32$

Applicando ancora il 5 a Mi, La, Fa$\sharp$ e Si otteniamo i nuovi toni

Sol$\sharp = 25/16$, Do$\sharp = 25/24$, La$\sharp = 225/128$ e Re$\sharp = 75/64$

Con queste note *“si è già in grado di comporre bellissime e variatissime melodie, la cui bellezza è fondata unicamente sulla semplicità dei numeri che hanno fornito questi toni*" (**Eulero**, *Sui dodici toni del clavicembalo*, 1768).

D’altra parte, con gli stessi tre numeri primi, possiamo ottenere una scala cromatica di dodici note.

Applicando il 5 al Re otteniamo il nuovo tono Fa$\sharp = 45/32$

Applicando ancora il 5 a Mi, La, Fa$\sharp$ e Si otteniamo i nuovi toni

Sol$\sharp = 25/16$, Do$\sharp = 25/24$, La$\sharp = 225/128$ e Re$\sharp = 75/64$

Osservazione. Ci sono tre quinte "stonate":
$[Re, La]$ e $[Fa\,\sharp, Do\,\sharp]$ $(40 : 27)$ e $[La\,\sharp, Fa]$ $(1024 : 675)$.

Con queste note *"si è già in grado di comporre bellissime e variatissime melodie, la cui bellezza è fondata unicamente sulla semplicità dei numeri che hanno fornito questi toni*" (**Eulero**, *Sui dodici toni del clavicembalo*, 1768).

D'altra parte, con gli stessi tre numeri primi, possiamo ottenere una scala cromatica di dodici note.

Applicando il 5 al Re otteniamo il nuovo tono Fa$\sharp = 45/32$

Applicando ancora il 5 a Mi, La, Fa$\sharp$ e Si otteniamo i nuovi toni

Sol$\sharp = 25/16$, Do$\sharp = 25/24$, La$\sharp = 225/128$ e Re$\sharp = 75/64$

Osservazione. Ci sono tre quinte "stonate":
$[Re, La]$ e $[Fa\sharp, Do\sharp]$ $(40:27)$ e $[La\sharp, Fa]$ $(1024:675)$.

Il rapporto (1024/675):(3/2)= 2048:2025 si chiama diaschisma (quattro quinte giuste + due terze maggiori - tre ottave).

Se ora procediamo come sopra con il m.c.m. 384 si ottiene

Se ora procediamo come sopra con il m.c.m. 384 si ottiene

Do	$384 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
Do $\sharp$	$400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$
Re	$432 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
Re $\sharp$	$450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
Mi	$480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
Fa	$512 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Fa $\sharp$	$540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
Sol	$576 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
Sol $\sharp$	$600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
La	$640 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$
La $\sharp$	$675 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
Si	$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
Do	$768 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Se ora procediamo come sopra con il m.c.m. 384 si ottiene

Do	$384 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
Do $\sharp$	$400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$
Re	$432 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
Re $\sharp$	$450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
Mi	$480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
Fa	$512 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Fa $\sharp$	$540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
Sol	$576 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
Sol $\sharp$	$600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
La	$640 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$
La $\sharp$	$675 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
Si	$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
Do	$768 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

“Si vede di qui come le differenze fra questi toni non siano affatto uguali fra loro, ma alcune siano più grandi e altre più piccole, proprio come esige la vera armonia".

“Molti musicisti vogliono considerarle effettivamente eguali, quantunque questo sia contrario ai principi dell’armonia, perché a questa maniera nessuna quinta, nessuna terza è esatta e l’effetto che se ne ottiene è come se questi toni non fossero bene accordati. Convengono anche che si deve rinunciare all’esattezza di questi accordi in cambio del vantaggio dell’eguaglianza di tutti i semitoni, di modo che la trasposizione di un tono in un altro qualsiasi non cambi nulla nelle melodie [...] ma è chiaro che, quantunque i musicisti si sforzino di renderli uguali, non tutti i semitoni lo sono effettivamente, opponendosi la vera armonia alla riuscita di un simile progetto che le è contrario".

“Molti musicisti vogliono considerarle effettivamente eguali, quantunque questo sia contrario ai principi dell’armonia, perché a questa maniera nessuna quinta, nessuna terza è esatta e l’effetto che se ne ottiene è come se questi toni non fossero bene accordati. Convengono anche che si deve rinunciare all’esattezza di questi accordi in cambio del vantaggio dell’eguaglianza di tutti i semitoni, di modo che la trasposizione di un tono in un altro qualsiasi non cambi nulla nelle melodie [...] ma è chiaro che, quantunque i musicisti si sforzino di renderli uguali, non tutti i semitoni lo sono effettivamente, opponendosi la vera armonia alla riuscita di un simile progetto che le è contrario".

“Ecco dunque la vera origine dei toni oggi in uso: essi sono ricavati dai numeri 2, 3 e 5. Se poi si volesse ancora introdurre il numero 7, il numero dei toni in un’ottava si accrescerebbe e tutta la musica verrebbe portata a un più alto grado di perfezione. Ma è qui che la matematica abbandona l’armonia alla musica".

Se p è un numero primo, una scala di ordine p è una scala che usa solo numeri razionali il cui numeratore e denominatore si fattorizzano per mezzo di numeri primi minori o uguali a p (eventualmente ripetuti).

Se p è un numero primo, una scala di ordine p è una scala che usa solo numeri razionali il cui numeratore e denominatore si fattorizzano per mezzo di numeri primi minori o uguali a p (eventualmente ripetuti).

QUALCHE ESEMPIO:

Se p è un numero primo, una scala di ordine p è una scala che usa solo numeri razionali il cui numeratore e denominatore si fattorizzano per mezzo di numeri primi minori o uguali a p (eventualmente ripetuti).

QUALCHE ESEMPIO:

◇ La scala pitagorica è una scala di ordine 3.

Se p è un numero primo, una scala di ordine p è una scala che usa solo numeri razionali il cui numeratore e denominatore si fattorizzano per mezzo di numeri primi minori o uguali a p (eventualmente ripetuti).

QUALCHE ESEMPIO:

◇ La scala pitagorica è una scala di ordine 3.

◇ La scala indiana **Shruti** è una scala naturale di ordine 5 con ventidue toni:

$$\frac{1}{1}, \frac{256}{243}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{27}{20}, \frac{45}{32}, \frac{729}{512}, \frac{3}{2}, \frac{128}{81}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{27}{16}, \frac{16}{9}, \frac{9}{5}, \frac{15}{8}, \frac{243}{128}, \frac{2}{1}$$

Se p è un numero primo, una scala di ordine p è una scala che usa solo numeri razionali il cui numeratore e denominatore si fattorizzano per mezzo di numeri primi minori o uguali a p (eventualmente ripetuti).

QUALCHE ESEMPIO:

◇ La scala pitagorica è una scala di ordine 3.

◇ La scala indiana **Shruti** è una scala naturale di ordine 5 con ventidue toni:

$$\frac{1}{1}, \frac{256}{243}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{27}{20}, \frac{45}{32}, \frac{729}{512}, \frac{3}{2}, \frac{128}{81}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{27}{16}, \frac{16}{9}, \frac{9}{5}, \frac{15}{8}, \frac{243}{128}, \frac{2}{1}$$

◇ La cornamusa scozzese è accordata su una scala naturale di ordine 7 con dieci toni.

Se p è un numero primo, una scala di ordine p è una scala che usa solo numeri razionali il cui numeratore e denominatore si fattorizzano per mezzo di numeri primi minori o uguali a p (eventualmente ripetuti).

QUALCHE ESEMPIO:

◇ La scala pitagorica è una scala di ordine 3.

◇ La scala indiana **Shruti** è una scala naturale di ordine 5 con ventidue toni:

$$\frac{1}{1}, \frac{256}{243}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{27}{20}, \frac{45}{32}, \frac{729}{512}, \frac{3}{2}, \frac{128}{81}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{27}{16}, \frac{16}{9}, \frac{9}{5}, \frac{15}{8}, \frac{243}{128}, \frac{2}{1}$$

◇ La cornamusa scozzese è accordata su una scala naturale di ordine 7 con dieci toni.

◇ **Harry Partch** (1901-1974) ha costruito una scala naturale di ordine 11 con 43 toni e l'ha usata in numerose sue composizioni (con strumenti spesso costruiti appositamente).

Temperamento equabile e frazioni continue

Temperamento equabile e frazioni continue

Il temperamento equabile è il sistema musicale per la costruzione della scala fondato sulla suddivisione dell'ottava in intervalli tra di loro uguali.

Temperamento equabile e frazioni continue

Il temperamento equabile è il sistema musicale per la costruzione della scala fondato sulla suddivisione dell'ottava in intervalli tra di loro uguali. Nell'uso più frequente, l'ottava è suddivisa in 12 parti.

Temperamento equabile e frazioni continue

Il temperamento equabile è il sistema musicale per la costruzione della scala fondato sulla suddivisione dell'ottava in intervalli tra di loro uguali. Nell'uso più frequente, l'ottava è suddivisa in 12 parti. Già descritto da **Aristosseno di Taranto** nel IV secolo a.C., questo sistema fu ripreso nel XVI secolo da numerosi autori, tra cui il discepolo "rinnegato" di Zarlino **Vincenzo Galilei** (1520-1591), il filosofo e matematico veneziano **Giovanni Battista Benedetti** (1530-1590) e il matematico fiammingo **Simone Stevino** (1548-1620).

Temperamento equabile e frazioni continue

Il temperamento equabile è il sistema musicale per la costruzione della scala fondato sulla suddivisione dell'ottava in intervalli tra di loro uguali. Nell'uso più frequente, l'ottava è suddivisa in 12 parti. Già descritto da **Aristosseno di Taranto** nel IV secolo a.C., questo sistema fu ripreso nel XVI secolo da numerosi autori, tra cui il discepolo "rinnegato" di Zarlino **Vincenzo Galilei** (1520-1591), il filosofo e matematico veneziano **Giovanni Battista Benedetti** (1530-1590) e il matematico fiammingo **Simone Stevino** (1548-1620).

Tuttavia la sua adozione fu molto graduale, sia per resistenze di natura estetica e filosofica che continuano ancora oggi ad alimentare accese controversie, sia a causa delle difficoltà nell'accordatura degli strumenti (per mancanza di intervalli giusti di riferimento).

Dividendo l'ottava in dodici semitoni uguali, l'ampiezza a di ciascuno deve soddisfare

Dividendo l’ottava in dodici semitoni uguali, l’ampiezza a di ciascuno deve soddisfare

$$a^{12} = 2 : 1$$

Dividendo l'ottava in dodici semitoni uguali, l'ampiezza a di ciascuno deve soddisfare

$$a^{12} = 2 : 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2^{1/12} : 1$$

Dividendo l'ottava in dodici semitoni uguali, l'ampiezza a di ciascuno deve soddisfare

$$a^{12} = 2 : 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2^{1/12} : 1$$

Poiché $2^{1/12} \simeq 1,059$, un semitono equabile è appena più grande del semitono pitagorico $256/243 \simeq 1,053$.

Dividendo l'ottava in dodici semitoni uguali, l'ampiezza a di ciascuno deve soddisfare

$$a^{12} = 2 : 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2^{1/12} : 1$$

Poiché $2^{1/12} \simeq 1,059$, un semitono equabile è appena più grande del semitono pitagorico $256/243 \simeq 1,053$.
Il tono $2^{2/12} \simeq 1,122$ è invece più piccolo di quello naturale-pitagorico $9/8 \simeq 1,125$.

Dividendo l'ottava in dodici semitoni uguali, l'ampiezza a di ciascuno deve soddisfare

$$a^{12} = 2 : 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2^{1/12} : 1$$

Poiché $2^{1/12} \simeq 1,059$, un semitono equabile è appena più grande del semitono pitagorico $256/243 \simeq 1,053$.
Il tono $2^{2/12} \simeq 1,122$ è invece più piccolo di quello naturale-pitagorico $9/8 \simeq 1,125$.
Anche la quinta $2^{7/12} \simeq 0.583$ è un po' più piccola di $3/2$.

Dividendo l'ottava in dodici semitoni uguali, l'ampiezza a di ciascuno deve soddisfare

$$a^{12} = 2 : 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2^{1/12} : 1$$

Poiché $2^{1/12} \simeq 1,059$, un semitono equabile è appena più grande del semitono pitagorico $256/243 \simeq 1,053$.
Il tono $2^{2/12} \simeq 1,122$ è invece più piccolo di quello naturale-pitagorico $9/8 \simeq 1,125$.
Anche la quinta $2^{7/12} \simeq 0.583$ è un po' più piccola di $3/2$.

Più in generale, il problema del temperamento equabile è quello di fare in modo che le scale risultino il più consonanti possibile su tutte le tonalità.

Dividendo l'ottava in dodici semitoni uguali, l'ampiezza a di ciascuno deve soddisfare

$$a^{12} = 2 : 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2^{1/12} : 1$$

Poiché $2^{1/12} \simeq 1,059$, un semitono equabile è appena più grande del semitono pitagorico $256/243 \simeq 1,053$.
Il tono $2^{2/12} \simeq 1,122$ è invece più piccolo di quello naturale-pitagorico $9/8 \simeq 1,125$.
Anche la quinta $2^{7/12} \simeq 0.583$ è un po' più piccola di $3/2$.

Più in generale, il problema del temperamento equabile è quello di fare in modo che le scale risultino il più consonanti possibile su tutte le tonalità.

Essendo l'intervallo di quinta giusta il più consonante (dopo l'ottava), si cerca di dividere l'immagine logaritmica di un'ottava in un numero di parti uguali in modo tale che il numero irrazionale

$$\log_2(3/2) = 0,584962500721\ldots$$

sia ben approssimato.

Una frazione continua è un'espressione del tipo

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \equiv [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 1$ per $i \geq 1$.

Una frazione continua è un'espressione del tipo

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \equiv [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 1$ per $i \geq 1$. Ogni numero reale ammette un unico sviluppo in frazione continua, che si arresta se e solo se il numero è razionale.

Una frazione continua è un'espressione del tipo

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \equiv [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 1$ per $i \geq 1$. Ogni numero reale ammette un unico sviluppo in frazione continua, che si arresta se e solo se il numero è razionale. Ad esempio

$$\frac{7}{12} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = [0; 1, 1, 2, 2]$$

Una frazione continua è un'espressione del tipo

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \equiv [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 1$ per $i \geq 1$. Ogni numero reale ammette un unico sviluppo in frazione continua, che si arresta se e solo se il numero è razionale. Ad esempio

$$\frac{7}{12} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = [0; 1, 1, 2, 2]$$

Ma $1/2 = 1/(1 + \frac{1}{1})$: per un numero razionale $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ lo sviluppo è unico con $a_n > 1$.

In generale, come si fa a calcolare lo sviluppo in frazione continua di un numero reale x?

In generale, come si fa a calcolare lo sviluppo in frazione continua di un numero reale x?

Chiamiamo $[a]$ la parte intera del numero a (cioè il più grande intero minore o uguale ad a).

In generale, come si fa a calcolare lo sviluppo in frazione continua di un numero reale x?

Chiamiamo $[a]$ la parte intera del numero a (cioè il più grande intero minore o uguale ad a).

Allora se poniamo $a_0 = [x_0]$ si ha

$$x = a_0 + x_0 \quad \text{con} \quad 0 \leq x_0 < 1$$

In generale, come si fa a calcolare lo sviluppo in frazione continua di un numero reale x?

Chiamiamo $[a]$ la parte intera del numero a (cioè il più grande intero minore o uguale ad a).

Allora se poniamo $a_0 = [x_0]$ si ha

$$x = a_0 + x_0 \quad \text{con} \quad 0 \leq x_0 < 1$$

Poi scriviamo

$$\frac{1}{x_0} = a_1 + x_1 \quad \text{con} \quad a_1 = [1/x_0] \quad \text{e} \quad 0 \leq x_1 < 1$$

In generale, come si fa a calcolare lo sviluppo in frazione continua di un numero reale x?

Chiamiamo $[a]$ la parte intera del numero a (cioè il più grande intero minore o uguale ad a).

Allora se poniamo $a_0 = [x_0]$ si ha

$$x = a_0 + x_0 \quad \text{con} \quad 0 \leq x_0 < 1$$

Poi scriviamo

$$\frac{1}{x_0} = a_1 + x_1 \quad \text{con} \quad a_1 = [1/x_0] \quad \text{e} \quad 0 \leq x_1 < 1$$

e

$$\frac{1}{x_1} = a_2 + x_2 \quad \text{con} \quad a_2 = [1/x_1] \quad \text{e} \quad 0 \leq x_2 < 1$$

e così via, fintanto che $x_n \neq 0$.

In generale, come si fa a calcolare lo sviluppo in frazione continua di un numero reale x?

Chiamiamo $[a]$ la parte intera del numero a (cioè il più grande intero minore o uguale ad a).

Allora se poniamo $a_0 = [x_0]$ si ha

$$x = a_0 + x_0 \quad \text{con} \quad 0 \leq x_0 < 1$$

Poi scriviamo

$$\frac{1}{x_0} = a_1 + x_1 \quad \text{con} \quad a_1 = [1/x_0] \quad \text{e} \quad 0 \leq x_1 < 1$$

e

$$\frac{1}{x_1} = a_2 + x_2 \quad \text{con} \quad a_2 = [1/x_1] \quad \text{e} \quad 0 \leq x_2 < 1$$

e così via, fintanto che $x_n \neq 0$. Si arriva a $x_n = 0$ per qualche n precisamente quando x è razionale.

Se il numero è irrazionale lo sviluppo è infinito.

Se il numero è irrazionale lo sviluppo è infinito. Ad esempio

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots] = 3,14159265358979323 8\dots$$

Per ottenere buone approssimazione razionali possiamo troncare lo sviluppo subito prima di grandi quozienti parziali a_n.

Se il numero è irrazionale lo sviluppo è infinito. Ad esempio

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots] = 3,141592653589793238\dots$$

Per ottenere buone approssimazione razionali possiamo troncare lo sviluppo subito prima di grandi quozienti parziali a_n. Ad esempio arrestandosi prima del 15 si ottiene
$\pi \approx 3 + 1/7 = 22/7$.

Se il numero è irrazionale lo sviluppo è infinito. Ad esempio

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots] = 3,141592653589793238\dots$$

Per ottenere buone approssimazione razionali possiamo troncare lo sviluppo subito prima di grandi quozienti parziali a_n. Ad esempio arrestandosi prima del 15 si ottiene $\pi \approx 3 + 1/7 = 22/7$. Arrestandosi prima del 292 si ottiene

$$\pi \approx 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3,1415929\dots$$

nota ai matematici cinesi fin dal V secolo a.C.

Se il numero è irrazionale lo sviluppo è infinito. Ad esempio

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots] = 3,14159265358979323 8\dots$$

Per ottenere buone approssimazione razionali possiamo troncare lo sviluppo subito prima di grandi quozienti parziali a_n.
Ad esempio arrestandosi prima del 15 si ottiene
$\pi \approx 3 + 1/7 = 22/7$. Arrestandosi prima del 292 si ottiene

$$\pi \approx 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3,1415929\dots$$

nota ai matematici cinesi fin dal V secolo a.C.
Le approssimazioni razionali ottenute troncando lo sviluppo in frazione continua si chiamano convergenti.

Se il numero è irrazionale lo sviluppo è infinito. Ad esempio

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots] = 3,14159265358979323 8\dots$$

Per ottenere buone approssimazione razionali possiamo troncare lo sviluppo subito prima di grandi quozienti parziali a_n. Ad esempio arrestandosi prima del 15 si ottiene $\pi \approx 3 + 1/7 = 22/7$. Arrestandosi prima del 292 si ottiene

$$\pi \approx 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3,1415929\dots$$

nota ai matematici cinesi fin dal V secolo a.C.
Le approssimazioni razionali ottenute troncando lo sviluppo in frazione continua si chiamano convergenti. Quelli di π sono

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{103993}{33102}, \quad \frac{104348}{33215}, \quad \dots$$

I convergenti si possono calcolare dai quozienti parziali mediante una formula ricorsiva, per mezzo della quale si dimostra anche il

I convergenti si possono calcolare dai quozienti parziali mediante una formula ricorsiva, per mezzo della quale si dimostra anche il

Teorema Se x è un numero irrazionale con frazione continua $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ e convergenti $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ allora

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2} \quad , \quad n \geq 1$$

I convergenti si possono calcolare dai quozienti parziali mediante una formula ricorsiva, per mezzo della quale si dimostra anche il

Teorema Se x è un numero irrazionale con frazione continua $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ e convergenti $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ allora

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2} \quad , \quad n \geq 1$$

Se se si sceglie un denominatore q 'a caso' allora il meglio che possiamo fare (variando p) è $|x - p/q| \leq 1/2q$. Dunque i convergenti danno approssimazioni molto migliori di quelle con denominatori casuali.

I convergenti si possono calcolare dai quozienti parziali mediante una formula ricorsiva, per mezzo della quale si dimostra anche il

Teorema Se x è un numero irrazionale con frazione continua $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ e convergenti $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ allora

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2} \quad , \quad n \geq 1$$

Se se si sceglie un denominatore q 'a caso' allora il meglio che possiamo fare (variando p) è $|x - p/q| \leq 1/2q$. Dunque i convergenti danno approssimazioni molto migliori di quelle con denominatori casuali. In effetti, è vero molto di più.

Teorema Tra le frazioni p/q con $q \leq q_n$, la più vicina a x è p_n/q_n.

Tornando al temperamento equabile, si ha

$$\log_2(3/2) = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, \dots]$$

e i suoi convergenti sono

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{24}{41}, \quad \frac{31}{53}, \quad \frac{179}{306}, \quad \frac{389}{665}, \quad \dots$$

Ciascuna di queste approssimazioni divide l'ottava in intervalli uguali, in numero pari al suo denominatore, in modo che una quinta corrisponda ad un numero di intervalli pari al suo numeratore.

Tornando al temperamento equabile, si ha

$$\log_2(3/2) = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, \dots]$$

e i suoi convergenti sono

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{24}{41}, \quad \frac{31}{53}, \quad \frac{179}{306}, \quad \frac{389}{665}, \quad \dots$$

Ciascuna di queste approssimazioni divide l'ottava in intervalli uguali, in numero pari al suo denominatore, in modo che una quinta corrisponda ad un numero di intervalli pari al suo numeratore.

◇ L'approssimazione $7/12$ divide l'ottava in 12 semitoni e 7 di essi corrispondono a una quinta.

Tornando al temperamento equabile, si ha

$$\log_2(3/2) = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, \dots]$$

e i suoi convergenti sono

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{24}{41}, \quad \frac{31}{53}, \quad \frac{179}{306}, \quad \frac{389}{665}, \quad \dots$$

Ciascuna di queste approssimazioni divide l'ottava in intervalli uguali, in numero pari al suo denominatore, in modo che una quinta corrisponda ad un numero di intervalli pari al suo numeratore.

$\diamond$ L'approssimazione $7/12$ divide l'ottava in 12 semitoni e 7 di essi corrispondono a una quinta.

$\diamond$ L'approssimazione $3/5$ è usata nella musica orientale (scale pentatoniche).

Tornando al temperamento equabile, si ha

$$\log_2(3/2) = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, \ldots]$$

e i suoi convergenti sono

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{24}{41}, \quad \frac{31}{53}, \quad \frac{179}{306}, \quad \frac{389}{665}, \quad \ldots$$

Ciascuna di queste approssimazioni divide l'ottava in intervalli uguali, in numero pari al suo denominatore, in modo che una quinta corrisponda ad un numero di intervalli pari al suo numeratore.

◇ L'approssimazione $7/12$ divide l'ottava in 12 semitoni e 7 di essi corrispondono a una quinta.

◇ L'approssimazione $3/5$ è usata nella musica orientale (scale pentatoniche).

◇ Altre approssimazioni interessanti sono $31/53$ e $389/665$ (subito prima di grandi denominatori).

L'armonium di **Bosanquet** con 53 note per ottava (1876).

Tutto questo solo per la quinta...

Tutto questo solo per la quinta... che ne è delle altre consonanze?

Tutto questo solo per la quinta... che ne è delle altre consonanze?

Gli intervalli considerati più consonanti sono:

$2:1$ (ottava), $3:2$ (quinta giusta), $4:3$ (quarta giusta), $5:4$ (terza maggiore), $6:5$ (terza minore), $8:5$ (sesta minore), $5:3$ (sesta maggiore).

Tutto questo solo per la quinta... che ne è delle altre consonanze?

Gli intervalli considerati più consonanti sono:

2 : 1 (ottava), 3 : 2 (quinta giusta), 4 : 3 (quarta giusta),
5 : 4 (terza maggiore), 6 : 5 (terza minore),
8 : 5 (sesta minore), 5 : 3 (sesta maggiore).

Tali rapporti formano la sequenza

$$\frac{1}{1} < \frac{6}{5} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{5}{3} < \frac{2}{1}$$

e soddisfano

$$\frac{5}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2 \quad , \quad \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$$

Tutto questo solo per la quinta... che ne è delle altre consonanze?

Gli intervalli considerati più consonanti sono:

2 : 1 (ottava), 3 : 2 (quinta giusta), 4 : 3 (quarta giusta),
5 : 4 (terza maggiore), 6 : 5 (terza minore),
8 : 5 (sesta minore), 5 : 3 (sesta maggiore).

Tali rapporti formano la sequenza

$$\frac{1}{1} < \frac{6}{5} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{5}{3} < \frac{2}{1}$$

e soddisfano

$$\frac{5}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2 \quad , \quad \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$$

dunque i logaritmi (binari) di questi intervalli sono combinazioni lineari di 1, $\log_2(3/2)$ e $\log_2(5/4)$ con coefficienti $\{0, 1, -1\}$,

Tutto questo solo per la quinta... che ne è delle altre consonanze?

Gli intervalli considerati più consonanti sono:

2 : 1 (ottava), 3 : 2 (quinta giusta), 4 : 3 (quarta giusta),
5 : 4 (terza maggiore), 6 : 5 (terza minore),
8 : 5 (sesta minore), 5 : 3 (sesta maggiore).

Tali rapporti formano la sequenza

$$\frac{1}{1} < \frac{6}{5} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{5}{3} < \frac{2}{1}$$

e soddisfano

$$\frac{5}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2 \quad , \quad \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$$

dunque i logaritmi (binari) di questi intervalli sono combinazioni lineari di 1, $\log_2(3/2)$ e $\log_2(5/4)$ con coefficienti $\{0, 1, -1\}$, e l'errore nell'approssimazione con la scala uniforme non supera il massimo tra gli errori per $\log_2(3/2)$ e $\log_2(5/4)$.

D'altra parte

$$\log_2(5/4) = 0,3219280... = [0; 3, 9, 2, 2, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 18, \dots]$$

e i suoi convergenti sono

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{9}{28}, \quad \frac{19}{59}, \quad \frac{47}{146}, \quad \frac{207}{643}, \quad \frac{1289}{4004}, \quad \frac{2785}{8651}, \quad \dots$$

D'altra parte

$$\log_2(5/4) = 0,3219280... = [0; 3, 9, 2, 2, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 18, \dots]$$

e i suoi convergenti sono

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{9}{28}, \quad \frac{19}{59}, \quad \frac{47}{146}, \quad \frac{207}{643}, \quad \frac{1289}{4004}, \quad \frac{2785}{8651}, \quad \dots$$

Pertanto si ha

$$\log_2(3/2) \simeq \frac{7}{12} \quad , \quad \log_2(5/4) \simeq \frac{4}{12}$$

D'altra parte

$$\log_2(5/4) = 0,3219280... = [0; 3, 9, 2, 2, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 18, \dots]$$

e i suoi convergenti sono

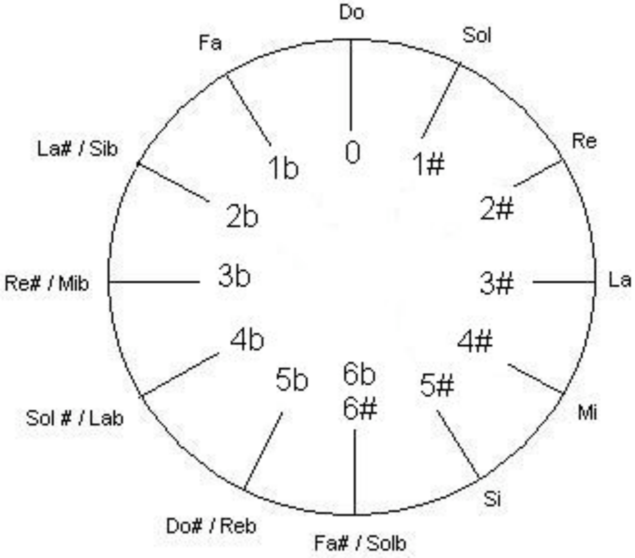
$$\frac{1}{3}, \quad \frac{9}{28}, \quad \frac{19}{59}, \quad \frac{47}{146}, \quad \frac{207}{643}, \quad \frac{1289}{4004}, \quad \frac{2785}{8651}, \quad \dots$$

Pertanto si ha

$$\log_2(3/2) \simeq \frac{7}{12} \quad , \quad \log_2(5/4) \simeq \frac{4}{12}$$

Ciò garantisce che il temperamento equabile di dodici semitoni uguali dà una buona approssimazione razionale simultanea dei due intervalli fondamentali 3 : 2 e 5 : 4 e dunque dell'intera serie dei sette intervalli consonanti.

La spirale si chiude: il circolo delle quinte



Bibliografia

David J. Benson, *MUSIC. A Mathematical Offering*, Cambridge University Press 2007

E. G. Donne, M. McConnell, *Pianos and Continued Fractions*, Mathematics Magazine, vol. 72, no. 2 (1999), 104-115.

Eulero, *Lettere a una principessa tedesca (1768)*, (ristampato da Bollati Boringhieri, Torino, 2007, 2 vol.)

J. Fauvel, R. Flood, R. Wilson Eds., *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals*, Oxford University Press 2003

G. Galilei, *Discorsi intorno a due nuove scienze (1638)*, (ristampato da UTET, Torino, 2005)

S. Isacoff, *Temperamento*, (trad. it. EDT, Torino 2005)

G. Loy, *Musimathics. The mathematical foundations of music*, 2 vol., The MIT Press, 2006