Introduction au traitement du signal

Amnézic

S5 Ing1

Table des matières

1 Énergie et puissance d'un signal

Signal

Un signal x est une fonction $\mathbb{C}^{\mathbb{R}} : t \rightarrow x(t)$ qui vérifie
- x est continue ou discontinue par morceaux dénombrables
- x est de module borné : $\exists M \in \mathbb{R}^{+}$ tel que $|x(t)| < M, \forall t \in I$

On note $\mathcal{L}^{n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des signaux de carré intégrable n fois sur $\mathbb{R}$.

Une mesure importante d'un signal est sa norme [1], que l'on mesure grâce au **produit scalaire**. On note E_x la norme du signal d'énergie finie tel que

$$\begin{aligned} E_x &= ||x||^2 \\ &= \langle x, x \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x(t)}dt^{\,2} \text{ or } t \in \mathbb{R} \text{ donc } \overline{x(t)} = x(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit que :
- signal à support borné → énergie finie ($E_x < +\infty$), le signal n'existe que sur un intervall de temps limité
- signal à support non borné → énergie infinie ($E_x = +\infty$)

Puissance moyenne d'un signal

On appelle **puissance moyenne d'un signal** x la moyenne temporelle de l'énergie :

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

On note $\mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R})$ l'espace des signaux de puissance moyenne finie.

Un signal $x \in \mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R})$ est un signal d'énergie infinie donc de puissance moyenne non nulle tandis qu'un signal $y \in \mathcal{L}^{2}(\mathbb{R})$ est un signal d'énergie finie et donc de puissance moyenne nulle. On a donc $\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R})$.

1. on se concentre sur les signaux d'énergie finie pour le moment

2 Corrélation et convolution

2.1 Autocorrélation

Autocorrélation

L'autocorrélation Γ [a] d'un signal $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ d'un "temps" τ [b] représente la ressemblance de x avec x décalé d'un facteur τ. On note :

$$\Gamma_{xx} : \tau \rightarrow \langle x(t), x(t-\tau)\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x(t-\tau)}dt$$

a. prononcé "gamma"
b. prononcé "tau"

Elle **doit** vérifier ces 2 propriétés :

— $\Gamma_{xx}(0) = \begin{cases} E_x \text{ : énergie du signal si } x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \\ P_x \text{ : puissance maximale du signal si } x \in \mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R}) \end{cases}$

— si $x \in \begin{cases} \mathbb{C} : \Gamma_{xx}(-\tau) = \overline{\Gamma_{xx}(\tau)} \text{ (symétrie hermitienne)} \\ \mathbb{R} : \text{ paire } \forall \tau \in \mathbb{R} \end{cases}$

Attention : si $x \in \mathcal{L}^{pm}$, l'intégrale n'est plus convergente donc on utilise la formule suivante :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\overline{x(t-\tau)}dt$$

mais les propriétés précédentes sont toujours valables. De plus, si x est T-périodique, on peut enlever la limite.

2.2 Intercorrélation

Intercorrélation

L'intercorrélation Γ entre deux signaux $x, y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ d'un "temps" τ représente la ressemblance de x avec y au fur et à mesure du temps. On note :

$$\Gamma_{xy} : \tau \rightarrow \langle x(t), y(t-\tau)\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t-\tau)}dt$$

L'intercorrélation permet la reconnaissance de motif en signal.

De la même manière, si $x, y \in \mathcal{L}^{pm}$, on a :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\overline{y(t-\tau)}dt$$

On peut enlever la limite si les deux signaux sont de même période.

2.3 Convolution

Convolution

Le produit de convolution entre deux signaux x et y correspond à la fonction de la moyenne pondérée glissante [a] généralisée d'une fonction vue au travers d'une autre :

$$(x * y)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(\tau - t)dt$$

a. appelée parfois *moyenne mobile*

D'un point de vu graphique, cela consiste à :

1. prendre la symétrie, par rapport à l'axe des ordonnées, du signal y, noté y^-
2. faire glisser y^- au fur et à mesure du temps jusqu'à τ
3. calculer le produit de l'aire entre $x(t)$ et $y(\tau - t)$ pour chaque τ

Quelques propriétés sur le produit de convolution :

1. existence : si $x, y \in \mathcal{L}^1$ alors $(x * y)$ existe et il appartient à $\mathcal{L}^1$
2. commutativité
3. bilinéarité : $x * (y + \lambda z) = x * y + \lambda(x * y)$
4. associativité
5. élément neutre
6. parité : si $x * y$ est pair (resp. impair), alors x et y sont de mêmes (resp. opposées) parité
7. dérivation : $(x * y)' = (x' * y) = (x * y')$

Remarque : Si x et y appartiennent à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, alors $\Gamma_{xy} = (x * \overline{y^-})$.

3 Séries de Fourier

Le signal suit le **principe de superposition**[3] qui le décrit comme une *somme de plusieurs excitations qui est la somme des réponses qui auraient été causées par chaque excitation prise individuellement.*

Rappel :
Soit x un signal T-périodique, donc de puissance finie ($x \in \mathcal{L}^{pm}$), alors x est caractrisé par :

- sa période T
- sa fréquence $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$
- sa pulsation $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$

Série de Fourier

La réprésentation temporelle d'un signal $x \in \mathcal{L}^{pm}$ dérivable par morceaux[a] peut être modélisée par une série de Fourier[b] :

$$x(t) \simeq a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) \right)$$

avec $\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T x(t)dt \text{ est appelée moyenne du signal sur une période} \\ a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T x(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T}\right) dt \ (= 0 \text{ si } x(t) \text{ est impair}) \\ b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T x(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T}\right) dt \ (= 0 \text{ si } x(t) \text{ est pair}) \end{cases}$

Globalement, les séries de Fourier permettent de décomposer un signal périodique en une somme de signaux sinusoïdaux périodiques.

D'après le théorème de Dirichlet : en tout point de continuité de x, cette série converge vers $x(t)$ ou $\dfrac{1}{2}(x(t^-) + x(t^+))$.

a. qu'on peut noter $x \in \mathcal{C}^1_{pm}$
b. on notera cette série S_N pour la suite

3. ne s'applique qu'aux signaux périodiques

Phénomène de Gibbs

Lors de l'étude des séries et transformées de Fourier, on peut parfois observer un effet de bord qui se produit à proximité d'une discontinuité du signal lors de l'analyse d'une fonction dérivable par morceaux. Cette déformation du signal est appelé *phénomène de Gibbs*. En d'autres termes, le phénomène de Gibbs explique pourquoi l'oscillation devient de plus en plus forte aux points de discontinuité au fur et à mesur que l'on augment l'ordre d'approximation de la série de Fourier.

Égalite de Parseval

L'égalité de Parseval est une propriété fondamentale des séries de Fourier. Elle permet de calculer l'énergie d'un signal à partir de sa série de Fourier.

— énergie temporelle : soit $x \in \mathcal{L}^2([0,T])$ [4], alors son énergie temporelle $E_x = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt$

— énergie spectrale : correspond à la somme des énergies de toutes les harmoniques de x, $E_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_{x_n} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n e^{i2\pi\frac{n}{T}t}|^2$

Égalité de Parseval

$$E_x = E_s \Longleftrightarrow \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

4. ensemble des signaux d'énergie finie **sur une période**

4 La transformée de Fourier

L'étude de signaux via les séries de Fourier est limitée aux signaux périodiques (infini donc théorique). La *transformée de Fourier*[5] permet de généraliser aux signaux non périodiques les outils introduits avec les séries de Fourier.
Reprenons le théorème de Dirichlet :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi \frac{n}{T} t}$$

qui nous permet d'avoir le gap de fréquence entre deux harmoniques

$$\Delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

c'est à dire que ce gap se réduit au fur et à mesure que la période du signal augmente.

Transformée de Fourier

La TDF d'un signal x est définie par la fonction

$$X = \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \nu \mapsto \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \end{cases}$$

La TDF est une décomposition du signal en série de Fourier dans laquelle les harmoniques varient de manière continue. $e^{-i2\pi\nu t}$ est appelé *noyau de la transformation*. Pour qu'un signal ait une TDF, il suffit que ce signal soit intégrable.

La TDF admet une fonction inverse appelé "TDF inverse" définie par :

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

La TDF permet de calculer la représentation fréquentielle d'un signal et de faire le lien entre cette dernière et sa représentation temporelle.
Propriété :

$$\mathcal{X}(\nu) = 0 \Rightarrow x \text{ est un signal à bande limitée}$$

Delta de Dirac

On appelle *delta de Dirac* la fonction

$$\alpha\delta(t - t_0) = \begin{cases} \alpha \times +\infty \text{ si } t = t_0 \\ 0 \text{ sinon} \\ \int_{\mathbb{R}} \delta(t - t_0) dt = \alpha \text{ appelé } \textit{masse de Dirac} \end{cases}$$

δ est une distribution et se représente graphiquement par une flèche verticale égale à sa masse en $t = 0$. Cet objet sera très utile pour l'échantillonage (5.1).

5. que l'on notera TDF pour le nom et $\mathcal{F}$ pour la fonction à partir de maintenant

Quelques propriétés du delta de Dirac :
- $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$
- δ et l'élément neutre du produit de convolution : $(x * \delta) = (x * \delta) = x$
- $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$
- $\mathcal{F}(\delta(t)) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t)e^{-i2\pi\nu t}dt = 1$: le δ de Dirac est une superposition de toutes les fréquences avec la même amplitude

Quelques propriétés de la TDF :
- X est à symétrie hermitienne si $x \in \mathbb{R}$: $X(-\nu) = \overline{X(\nu)}$
  $\rightarrow$ x pair : X réelle et paire
  $\rightarrow$ x impair : X imaginaire et impaire
- décaler un signal temporel de t_0 revient à multiplier sa TDF par $e^{-i2\pi\nu t_0}$

Notion de module et de phase

- Le module/spectre de la TDF donne la distribution d'amplitude des fréquences
- La phase de la TDF donne la localisation temporelle des fréquences dans le signal
- un décalage temporel correspond à un déphasage fréquentiel
- un déphasage temporel correspond à un décalage fréquentiel

Théorème de Plancherel

Soit $x, y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),$ alors $x * y = z \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et on note $\mathcal{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ les TDF de respectivement z, x et y et on obtient :

$$\mathcal{F}(x * y) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y) = \mathcal{X}\mathcal{Y} = (\mathcal{X} * \mathcal{Y})(\nu) = \mathcal{Z}(\nu)$$

Ainsi, la TDF transforme le produit de convolution en un produit algébrique.

Produit algébrique et produit de convolution sont duaux pour la TDF

Théorème de Bernstein :

Soit x un signal à bande limitée de fréquence max B et X sa TDF alors

$$x(t) = \int_{-B}^{B} X(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$$

$x'(t)$ correspond à la vitesse de variation instantanée du signal x à l'instant t

$$\Rightarrow \begin{cases} B \text{ petit } \Leftrightarrow \text{vitesse de variation maximale faible } \Leftrightarrow x \text{ ne contient que des basses fréquences} \\ B \text{ grand } \Leftrightarrow \text{vitesse de variation maximale maximale } \Leftrightarrow x \text{ ne contient que des hautes fréquences} \end{cases}$$

Un signal dont la TDF a un support borné dans le domaine fréquentiel est qualifié de **signal à bande limitée**. Autement dit, un signal à bande limitée ne contient aucune fréquence en dehors d'un certain intervalle.

5 Du signal analogique au signal numérique

Un signal analogique est un signal pour lequel on possède un nombre "infini" de valeurs au cours du temps, raison pour laquelle il peut aussi être caractérisé de continu. On cherche, afin de passer à un signal numérique, à discrétiser les valeurs de ce signal.
Un signal analogique est continu aussi bien dans ses variables que dans ces valeurs, tandis qu'un signal numérique est discret pour ses variables et ses valeurs.
Le $\mathbb{F}$ fait référence à un ensemble de valeurs discrètes.

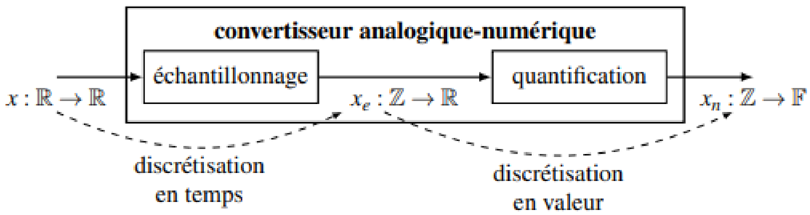


FIGURE 1 – Schéma résumant le Convertisseur Analogique-Numérique (CAN)

5.1 Échantillonage

La phase d'échantillonage consiste à prélever des valeurs de x à des instants réguliers, notés $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Réaliser un échantillonage consiste juste à produire une suite de valeurs discrètes $x(t_n)$ appelés **échantillons**.

Une approche simplificatrice serait d'avoir des intervalles de temps réguliers entre t_i et $t_{i'}$ et ainsi avoir $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = nT_e$ avec T_e la période d'échantillonage.

Une autre méthode utilise l'outil δ de Dirac pour récupérer les valeurs de x à des instants t_n. Il nous permet de récupérer facilement autant de valeurs que nécessaire. C'est ce qu'on appelle le *peigne de Dirac*.

Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac, notée III [a] (ou fonction d'échantillonage) de période T_e la distribution :

$$III_{T_e(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

On obtiendrait ainsi le signal échantillonné $x_e(t) = x(t)III_{T_e(t)}$

a. normalement notée par la lettre sha de l'alphabet cyrilique dont je ne dispose pas

Propriété :

Le peigne de Dirac de période T_e admet une TDF qui une peigne de Dirac de période $\dfrac{1}{T_e}$:

$$\mathcal{F}(III_{T_e}(t)) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T_e}\right)$$

Ces deux méthodes d'échantillonage posent un problème : comment choisir la meilleure fréquence d'échantillonage ν_e ?

$$T_e \begin{cases} \text{trop grande} \rightarrow \text{sous-échantillonage donc perte d'informations} \\ \text{trop petite} \rightarrow \text{sur-échantillonage donc gaspillage de mémoire} \end{cases}$$

La période d'échantillonage doit être en lien avec le vitesse de variation maximale du signal x à échantilloner.

Échantillonner dans le domaine temporel revient à périodiser dans le domaine fréquentiel

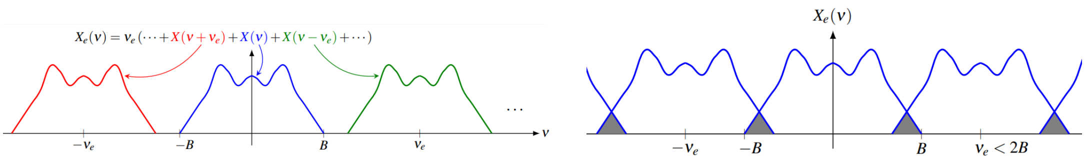
5.2 Théorème de Shannon

Théorème de Shannon

L'échantillonage d'un signal à bande limitée de fréquence max ν_{max} se fait sans perte d'information si la fréquence d'échantillonage $\nu_e \geq 2\nu_{max}$ [a].

[a]. aussi appelée *condition de Nyquist*

FIGURE 2 – Spectre d'un signal



(a) sans recouvrement (b) avec recouvrement

Lorsqu'il y a recouvrement, on parle alors de *repliement spectral* (ou aliasing).

Ainsi, d'après le théorème de Shannon, on peut échantillonner un signal à bande limitée sans perte si $\nu_e \geq 2\nu_{max}$.

5.3 Quantification (vide)

(je le remplirais plus tard)