EPITA / InfoS3 Décembre 2023

NOM : .... Prénom : .... Groupe : ....

Examen Physique : *Mécanique quantique*

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Le barème est donné à titre indicatif.

Réponses exclusivement sur le sujet. Si vous manquez de place, vous pouvez utiliser le verso des pages.

Exercice 1. Questions de cours (5 points – pas de points négatifs pour le QCM)

Document 1 : Niveaux d'énergie associés à l'atome d'hydrogène

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_∞
$-13{,}6\ eV$	$-3{,}4\ eV$	$-1{,}51\ eV$	$-0{,}850\ eV$	$-0{,}54\ eV$	$-0{,}37\ eV$	$0\ eV$

Le document 1 est utile pour les questions 1 à 4.

1. **Pour passer du niveau 4 au niveau 3 :**
   a. L'électron a besoin de recevoir de l'énergie sous forme de photon.
   b. L'électron cède de l'énergie sous forme de photon.

2. **L'énergie à fournir pour passer de l'état fondamental à l'orbite n = 5 est égale à :**
   a. 13,06 eV
   b. 12,06 eV
   c. -13,06 eV
   d. 14,14 eV

3. **La longueur d'onde correspondant à une transition de l'état n = 3 vers l'état n' = 2 vaut :**
   a. $\lambda = hc\ |\Delta E_{3\to 2}|$
   b. $\lambda = hc\ \Delta E_{3\to 2}$
   c. $\lambda = \frac{hc}{|\Delta E_{3\to 2}|}$
   d. $\lambda = \frac{hc}{\Delta E_{3\to 2}}$

4. **Si on fournit une énergie de 14 eV à l'électron dans son état fondamental,**
   a. Rien ne se passe
   b. L'atome est ionisé, l'électron s'échappe avec une vitesse non nulle
   c. L'électron à une énergie cinétique de 0,4 eV
   d. L'électron à une énergie cinétique de -0,4 eV

5. **Le spectre du rayonnement d'un corps noir est le graphe de :**
   a. La densité d'énergie rayonnée en fonction de la température T.
   b. La température T en fonction de la densité d'énergie rayonnée.
   c. La densité d'énergie rayonnée en fonction de la longueur d'onde λ.
   d. Aucune de ces réponses.

3. En utilisant l'expression contenue dans le troisième postulat du modèle de Bohr ainsi que l'expression que vous venez de trouver, établir un système de deux équations puis exprimer les rayons r_n des orbites successives accessibles à l'électron en fonction de leur nombre quantique **n**, c'est-à-dire le numéro de la couche électronique, de **m**, **e** et **Z** (2pts)

4. Quel est le plus petit rayon possible pour l'ion hélium (Z=2) et l'ion lithium (Z=3) ? On donne $\frac{\hbar^2}{me^2} = 5.10^{-11}\ m.$ Commenter la vraisemblance du résultat. (0,5pt)

5. L'énergie de l'électron d'un hydrogénoïde est donne par :

$$E_n = -\frac{Z^2me^4}{2\hbar^2n^2} = -13{,}6\ \frac{Z^2}{n^2}\ (eV)$$

Quelle est l'énergie fondamentale dans le cas de l'ion Hélium et de l'ion Lithium ? Les valeurs expérimentales sont respectivement -54.42 eV et -122.45 eV. Commenter la vraisemblance du résultat en comparant l'énergie d'ionisation de l'hydrogène, de l'ion ~~hélion~~ et de l'ion lithium. (1pt)

Hélium

Exercice 3 : Boite quantique 1D et 2D (9pts)

I. Particule dans une boite 1D :

Document 1 : Niveaux d'énergie associés à l'atome d'hydrogène

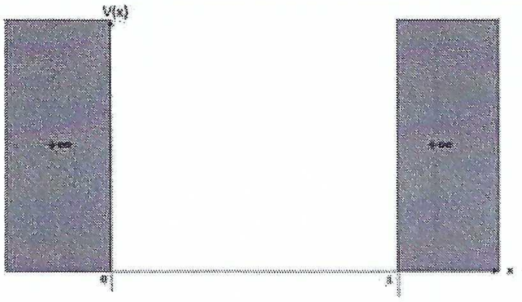

Fig. 1 : Puits de potentiel infini de largeur L

Dans cette première partie, on étudie une particule piégée dans une boîte à une dimension et de longueur L, modélisée de la manière suivante (voir schéma ci-contre).

Le potentiel V vaut :

- $+\infty$ en dehors de $[0; L]$
- 0 pour $x \in [0; L]$

1. Pour $x \in [0; L]$, donner l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde en fonction de la constante de Planck **h**, de la masse **m** et de l'énergie **E** de la particule. (1pt)

Les solutions générales $\psi(x)$ de l'équation de Schrödinger pour $x \in [0; L]$ sont de la forme :

$\psi(x) = A.\sin(kx) + B.\cos(kx)$ Avec A et B des constantes à déterminer.

2. Quelles sont les conditions aux limites $\psi(0)$ et $\psi(L)$? (0,5pt)

3. Utiliser la condition concernant $\psi(0)$ pour déterminer une des constantes. (0,5pt)

4. Utiliser la condition concernant $\psi(L)$ afin de montrer qu'il y a quantification. Déterminer la condition à vérifier par **k.** (1pt)

On donne la relation suivante :

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

5. Montrer que l'énergie est elle aussi quantifiée. Déterminer l'expression des niveaux d'énergies en en fonction de $\hbar$, **n, L** et **m**. (1 pt)

Intéressons-nous maintenant à une particule piégée dans une boîte à deux dimensions. La modélisation est similaire, et les solutions obtenues sont du type :

$$\psi_{n_x,n_y}(x,y) = \sqrt{\frac{4}{a.b}}\sin\left(\frac{n_x\,.\pi.x}{a}\right)\sin\left(\frac{n_y\,.\pi.y}{b}\right) \qquad et \qquad E_{n_x,n_y} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x{}^2}{a^2}+\frac{n_y{}^2}{b^2}\right)$$

6. A partir de maintenant, et pour toutes les questions suivantes, nous considèreront le cas où a=b=1, donner l'expression du plus petit niveau d'énergie, noté E_{min}. (1pt)

7. En quoi ce résultat est surprenant par rapport à la mécanique classique ? (1pt)

8. Que peut-on dire des niveaux d'énergies (2,1) et (1,2). Comment appelle-t-on cette situation ? (2pts)

9. Donner l'expression du sixième niveau d'énergie en fonction de E_{min}. Pour quel couple (n_x,n_y) est-il atteint ? (1pts)