Correction TD1 Physique quantique

Exercice de cours : Catastrophe ultraviolette

Le corps noir est l'objet théorique suivant : il absorbe parfaitement la totalité de l'énergie électromagnétique qu'il reçoit et, atteignant l'équilibre thermique à une température T, la restitue entièrement sous forme d'un rayonnement thermique constitué d'un spectre de longueurs d'onde λ, rayonnées chacune à une intensité, donnée par la fonction u(λ, T), appelée densité spectrale d'énergie.

La thermodynamique classique a proposé de décrire le rayonnement du corps noir en considérant les molécules comme de petits oscillateurs, rayonnant chacun une énergie E avec une certaine probabilité. La physique classique propose que l'énergie rayonnée E prend ses valeurs dans $[0; +\infty]$; des valeurs donc continues. On note <E> l'énergie moyenne d'un oscillateur.

Partie 1 : Descritpion par la loi de Rayleigh-Jeans (Énergie continue)

Dans le cadre de la thermodynamique classique, la loi de Rayleigh-Jeans aboutit à l'expression suivante pour la densité spectrale d'énergie:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi}{c\lambda^2}\langle E\rangle$$

- u: densité spectrale (W·m^3)
- c: célérité de la lumière dans le vide (3×10^8m·s-1)

L'énergie moyenne <E> d'un oscillateur se calcule de la manière suivante:

$$\langle E\rangle = \frac{\int_0^{+\infty} E e^{-\frac{E}{k_B T}} dE}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE}$$

- k_B: constante thermodynamique
- T : température du rayonnement

Le numérateur représente l'intégrale de la densité de probabilité de l'énergie E, et le dénominateur permet de normaliser le résultat.

1. Montrer que le terme $\langle E \rangle$ a pour valeur $k_B T$, en utilisant une intégration par parties.
   Posons Nm et D tel que $\langle E \rangle = \frac{Nm}{D}$

$$D = \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE = [-k_B T \times e^{-\frac{E}{k_B T}}]_0^{\infty} = -k_B T(0-1) = k_B T$$

$$\begin{aligned}
Nm &= \int_0^{\infty} E \times e^{-\frac{E}{k_B T}} dE, \text{ par intégration par parties, on obtient} \\
&= \left[-k_B T \times E \times e^{-\frac{E}{k_B T}}\right]_0^{\infty} - \left(\int_0^{\infty} -k_B T \times e^{-\frac{E}{k_B T}} dE\right) \\
&= k_B T \left[-E e^{-\frac{E}{k_B T}}\right]_0^{\infty} + k_B T \left[-k_B T e^{-\frac{E}{k_B T}}\right]_0^{\infty} \\
&= k_B T[0-0] - (k_B T)^2 \left[e^{-\frac{E}{k_B T}}\right]_0^{\infty} \\
&= -(k_B T)^2 [e^{-\infty} - e^0] \\
&= -(k_B T)^2 (0-1) \\
Nm &= (k_B T)^2
\end{aligned}$$

Donc $\langle E \rangle = \frac{Nm}{D} = \frac{(k_B T)^2}{k_B T} = k_B$T

L'énergie totale du rayonnement émis par le corps noir est donnée par l'intégration de la densité d'énergie sur toutes les longueurs d'ondes:

$$U(\lambda, T) = \int_0^{+\infty} u(\lambda, T) d\lambda$$

U(λ,T) est l'intensité rayonnée par le corps noir (en W·m^2)

2. Expliquer à partir de cette intégrale pourquoi la loi de Rayleigh-Jeans a marqué un tournant nommé "Catastrophe ultraviolette".

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} u(\lambda, T) d\lambda &= \int_0^{\infty} \frac{8\pi}{c\lambda^2} \times k_B T d\lambda \\
&= \frac{8\pi}{c} \times k_B T \times \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} d\lambda \\
&= \frac{8\pi}{c} \times k_B T \times \left[\frac{-1}{\lambda}\right]_0^{\infty}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \lambda \to 0 \Longrightarrow$ U(λ,T) diverge.

Partie 2: Descritpion par la loi de Planck (Énergie discontinue)
Nous allons maintenant nous intéresser à la loi de Planck, qui a proposé de corriger la loi de Rayleigh-Jeans en introduisant la quantification de l'énergie du système corps noir : le terme <E> est alors calculé en supposant que l'énergie E d'un oscillateur ne peut prendre qu'un nombre discret de valeurs, multiples d'une énergie E_0.

3. Réécrire la relation donnant $\langle E \rangle$ dans ces conditions.
   Proposition de Max-Planck: E = nE_0 (quantificateur de l'énergie) qui corrige la divergence de la densité spectrale u(λ,T) pour les faibles longueurs d'ondes (UV).

$$\langle E \rangle = \frac{\Sigma_{n=1}^{+\infty} nE_0 e^{-\frac{nE_0}{k_B T}}}{\Sigma_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{nE_0}{k_B T}}}$$

4. Calculer ce terme, en utilisant un résultat sur les suites géométriques au dénominateur, puis en remarquant un lien de dérivation entre le dénominateur et le numérateur.
   <u>Calcul de $\langle$E$\rangle$:</u>

$$\langle E \rangle = \frac{\Sigma_{n=1}^{+\infty} nE_0 e^{-\frac{nE_0}{k_B T}}}{\Sigma_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{nE_0}{k_B T}}} = \frac{Nm}{D}$$

$$\begin{aligned} D &= \Sigma_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{nE_0}{k_B T}} = \Sigma_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-\frac{E_0}{k_B T}}\right)^n \\ &= \lim_{N \to +\infty} \Sigma_{n=1}^{N} q^n \text{ (avec } q = e^{-\frac{E_0}{k_B T}}\text{)} = \lim_{N \to +\infty} 1 \times q^n \\ &= \lim_{N \to +\infty} \frac{1-q^n}{1-q} \\ D &= \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-\frac{E_0}{k_B T}}} \end{aligned}$$

On va dériver le numérateur par rapport à E_0.

$$
\begin{aligned}
Nm &= \Sigma_{n=1}^{+\infty} nE_0 e^{-\frac{nE_0}{k_BT}} \\
&= E_0(k_BT)\left(\Sigma_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{-k_BT}nE_0e^{-\frac{E_0}{k_BT}}\right) \\
&= E_0(k_BT)\frac{d}{dE_0}\Sigma_{n=1}^{+\infty}nE_0e^{-\frac{E_0}{k_BT}} \\
&= E_0(k_BT)\frac{d}{dE_0}\times D \\
&= -E_0k_BT\frac{d}{dE_0}\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{E_0}{k_BT}}}\right) \\
&= -E_0k_BT\left(\frac{\frac{1}{k_BT}e^{-\frac{E_0}{k_BT}}}{\left(1-e^{-\frac{E_0}{k_BT}}\right)^2}\right) \\
Nm &= \frac{-E_0e^{-\frac{E_0}{k_BT}}}{\left(1-e^{-\frac{E_0}{k_BT}}\right)^2}
\end{aligned}
$$

On a donc :

$$\langle E\rangle = \frac{Nm}{D} = \frac{\left(\frac{-E_0e^{-\frac{E_0}{k_BT}}}{\left(1-e^{-\frac{E_0}{k_BT}}\right)^2}\right)}{\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{E_0}{k_BT}}}\right)} = \frac{E_0}{e^{\frac{E_0}{k_BT}}-1}$$

5. On obtient donc la densité spectrale d'énergie suivante :

   $u(\lambda,T) = \dfrac{8\pi}{c\lambda^2} < E >= \dfrac{8\pi}{c\lambda^2}\times\dfrac{E_0}{e^{\frac{E_0}{k_BT}}-1}$ avec E_0 un quanta (plus petite quantité indivisible d'énergie)

   Pour corriger la loi de R-J, il faut corriger la divergence u(λ,T) pour les petites longueurs d'ondes.
   Justifier la proposition de Planck: $E_0 = \frac{hc}{\lambda}$ avec h la constante de Planck.
   (Pas compris)

   Remarques:Avec la loi de Planck, l'on trouve une énergie totale rayonnée U(T)αT^4 , ce qui est en accord avec les observations, et revient à la loi de Stefan-Boltzman, antérieure à la catastrophe ultraviolette.

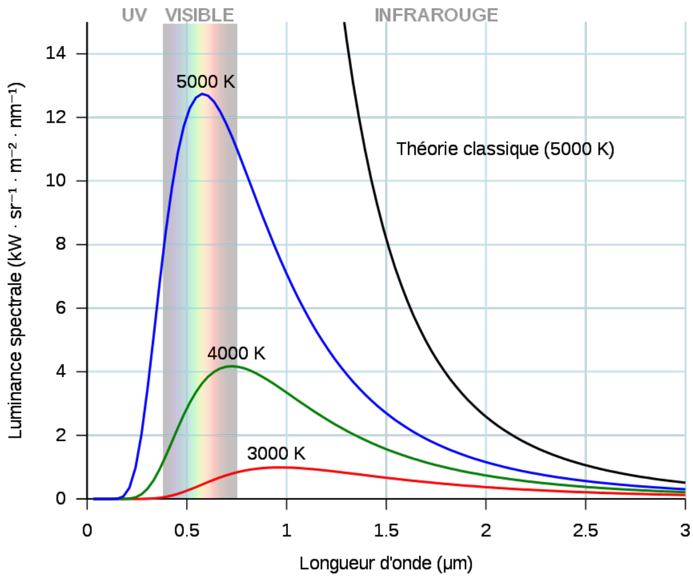

Figure 1: Spectre du rayonnement du corps noir (intensité du rayonnement en fonction de la longueur d'onde) pour des températures données (couleurs : modèle de Planck ; noir : modèle de Rayleigh-Jeans)