Corrigé de l'exo I, TD3

Mécanique - Quantique. 1

Ex1 : Fonction d'onde, Probabilité de présence.

on a $\begin{cases} \text{Fonction d'onde } \psi(x) = \psi_0 e^{-\frac{x}{x_0}}. \\ x \in [0, +\infty[ \qquad x_0 = \text{cste}. \end{cases}$

1) Fonction de répartition de probabilité de présence de la particule pour $x \in [0, +\infty[$.

est : $P = \int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$

avec $|\psi(x)|^2$ = densité de probabilité de présence.

$$P = \int_0^{\infty} \psi_0^2 e^{-\frac{2x}{x_0}} dx = \psi_0^2 \cdot \left[ -\frac{x_0}{2} e^{-\frac{2x}{x_0}} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \psi_0^2 \left(-\frac{x_0}{2}\right) \left( \underbrace{\lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{2x}{x_0}}}_{=0} - \underbrace{e^0}_{=1} \right)$$

$$P = \psi_0^2 \left(-\frac{x_0}{2}\right)(0 - 1) \Rightarrow \boxed{\psi_0^2 \cdot \frac{x_0}{2} = P}$$

2) Condition de normalisation.

$P = 1$ (dans l'espace $[0, +\infty[$).

2

ce qui donne : $\Psi_0^2 \cdot \frac{x_0}{2} = 1$

$$\Psi_0^2 = \frac{2}{x_0} \underset{(x_0>0)}{\Longrightarrow} \boxed{\Psi_0 = \sqrt{\frac{2}{x_0}}}$$

3) Probabilité de trouver la particule dans l'espace $[0, A]$ est :

$$\boxed{P_{[0,A]} = \int_0^A |\Psi(x)|^2 dx}$$

$$= \int_0^A \Psi_0^2 e^{-\frac{2x}{x_0}} dx = \int_0^A \frac{2}{x_0} e^{-\frac{2x}{x_0}} dx.$$

$$= \frac{2}{x_0} \left[ -\frac{x_0}{2} \left( e^{-\frac{2x}{x_0}} \right) \right]_0^A.$$

$$= -1 \left[ e^{-\frac{2A}{x_0}} - 1 \right]$$

$$\boxed{P_{[0,A]} = 1 - e^{-2A/x_0}}.$$

4) $\boxed{P \geq 95\%} \Rightarrow P \geq 0{,}95.$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{2A}{x_0}} \geq 0{,}95 \Rightarrow e^{-\frac{2A}{x_0}} - 1 \leq -0{,}95.$$

$$e^{-2A/x_0} \leq 1 - 0{,}95 \Rightarrow e^{-\frac{2A}{x_0}} \leq 0{,}05.$$

$$\ln\left(e^{-2A/x_0}\right) \leq \ln(0{,}05) \quad (\text{avec } \ln(0{,}05) = -3)$$

$$-\frac{2A}{x_0} \leq -3 \Rightarrow A \geq \frac{3x_0}{2}$$

$$\boxed{A \simeq \frac{3x_0}{2}}$$