Contrôle de cours 2 (1 heure)

1 Probabilités

Exercice 1 (5 points)
Considérons une variable aléatoire infinie X dont la loi est donnée par:

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

1. Vérifier par le calcul que $\Sigma_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$.
2. Déterminer sa fonction génératrice $G_X(t)$. On l'exprimera d'abord sous la forme d'une série entière, puis à l'aide des fonctions usuelles.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

2 Familles de vecteurs, base et dimension d'un espace vectoriel

Exercice 2 (8 points)
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ une famille de E.

1. Écrire la définition de : "$\mathcal{F}$ est une famille libre".
2. Écrire la définition de : "$\mathcal{F}$ est une famille liée".
3. Écrire la définition de : "$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E".
4. Dans cette question, on suppose que n=3, c'est-à-dire $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$, et de plus que $u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0_E$.
   Montrer que $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(u_1, u_3)$.
5. Application : dans E = $\mathbb{R}^3$, considérons la famille $\mathcal{F} = (u_1 = (1, -1, 1), u_2 = (5, 1, 1), u_3 = (1, 2, -1))$.
   (a) La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Justifier votre réponse.
   (b) Donner une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et en déduire sa dimension.

Une démonstration de cours (3 points)
Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finies n et p, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de F et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ une base de G.
On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_n, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ obtenue par concaténation des bases de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Montrer que :

$$\mathcal{F} \text{ libre } \implies F \cap G = \{0_E\}$$

3 Applications linéaires

Exercice 3 (4 points)

1. Donner une exemple d'application $f : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui n'est pas linéaire. Justifier votre réponse.

2. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner les définitions mathématiques de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x, x - 2y + z) \end{array} \right.$. Trouver une base de $\mathrm{Kerf}(f)$ et en déduire sa dimension.