

## Contrôle de cours 2 (1 heure)

### 1 Probabilités

#### Exercice 1 (5 points)

Considérons une variable aléatoire infinie  $X$  dont la loi est donnée par:

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

1. Vérifier par le calcul que  $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$ .
2. Déterminer sa fonction génératrice  $G_X(t)$ . On l'exprimera d'abord sous la forme d'une série entière, puis à l'aide des fonctions usuelles.
3. Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

### 2 Familles de vecteurs, base et dimension d'un espace vectoriel

#### Exercice 2 (8 points)

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$  une famille de  $E$ .

1. Écrire la définition de : " $\mathcal{F}$  est une famille libre".
2. Écrire la définition de : " $\mathcal{F}$  est une famille liée".
3. Écrire la définition de : " $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $E$ ".
4. Dans cette question, on suppose que  $n=3$ , c'est-à-dire  $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ , et de plus que  $u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0_E$ .  
Montrer que  $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(u_1, u_3)$ .
5. Application : dans  $E = \mathbb{R}^3$ , considérons la famille  $\mathcal{F} = (u_1 = (1, -1, 1), u_2 = (5, 1, 1), u_3 = (1, 2, -1))$ .
  - (a) La famille  $\mathcal{F}$  est-elle libre ? Justifier votre réponse.
  - (b) Donner une base de  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  et en déduire sa dimension.

#### Une démonstration de cours (3 points)

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension finies  $n$  et  $p$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $F$  et  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  une base de  $G$ .

On considère la famille  $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  obtenue par concaténation des bases de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .  
Montrer que :

$$\mathcal{F} \text{ libre} \implies F \cap G = \{0_E\}$$

### 3 Applications linéaires

#### Exercice 3 (4 points)

1. Donner un exemple d'application  $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  qui n'est pas linéaire. Justifier votre réponse.
2. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -ev et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Donner les définitions mathématiques de  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .
3. Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto (3x, x - 2y + z) \end{cases}$ . Trouver une base de  $\text{Ker}(f)$  et en déduire sa dimension.