1 Calcul de la puissance d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qu'on suppose diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe deux matrices D diagonale et P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.

Lemme 1– Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale, c'est-à-dire $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$D^p = \mathrm{diag}(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_n^p).$$

– Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$A^p = PD^pP^{-1}.$$

2 Résolution d'un système de suites récurrentes

Soient $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$, qu'on suppose diagonalisable et une suite vectorielle $(U_p)_{p\in\mathbb{N}} = \left((u_p^{(i)})_{p\in\mathbb{N}}\right)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$, telles que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U_p \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(u_p^{(i)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On souhaite résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rclcl} u_{p+1}^{(1)} & = & a_{11}u_p^{(1)} + & \ldots & +a_{1n}u_p^{(n)}, \\ \vdots & & & & \vdots \\ u_{p+1}^{(n)} & = & a_{n1}u_p^{(1)} + & \ldots & +a_{nn}u_p^{(n)} \end{array}\right. \quad \text{et telles que} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u_0^{(1)} & = & b_1, \\ & \vdots & \\ u_0^{(n)} & = & b_n, \end{array}\right.$$

où les a_{ij} et les b_i, $1 \leq i,j \leq n$ sont des constantes.
Matriciellement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{p+1}^{(1)} \\ \vdots \\ u_{p+1}^{(n)} \end{pmatrix}}_{U_{p+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_p^{(1)} \\ \vdots \\ u_p^{(n)} \end{pmatrix}}_{U_p} \quad \text{et} \quad U_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On écrit chaque $u_p^{(i)}$ en fonction de p en diagonalisant A, puis on démontre aisément que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \; U_p = A^pU_0.$$

Donc, il suffit de calculer A^p (calcul de la puissance d'une matrice).

3 Système différentiel linéaire à coefficients constants

Soit le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dx_1}{dt} & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ & \vdots & \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array}\right.$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
La forme matricielle de ce système est

$$\frac{dX}{dt} = AX, \qquad \text{où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$. Comme $\dfrac{dX}{dt} = AX = PDP^{-1}X$, alors $P^{-1}\dfrac{dX}{dt} = DP^{-1}X$.

En posant $Y = P^{-1}X$, le système ci-dessus s'écrit

$$\frac{dY}{dt} = DY,$$

Résoudre le système $\frac{dY}{dt} = DY$, revient à résoudre n équations différentielles indépendantes d'ordre 1 de la forme $\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i$, pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$. Les solutions sont $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$, où les C_i sont des constantes.