Description

```
Un graphe G = \langle S, A \rangle est constitué de
```

- $\triangleright S$: un ensemble de **sommets**, |S| = n est l'**ordre** du graphe;
- \triangleright A : un ensemble de **liaisons**, des paires de sommets.

Si le graphe est valué (pondéré), il se note alors $G = \langle S, A, C \rangle$ avec

 $\triangleright C$: une fonction de coût représentant les valeurs (ou coûts, poids) des liaisons $(C:A\mapsto \mathbb{R})$.

Graphes non orientés

Graphes orientés

Une liaison est une arête : $\{x,y\}$ ou x-y.

Une liaison est un arc : (x,y) ou $x \to y$. $x \to x$ est $y \to x$ est $y \to y$ est successeur $y \to$

- ▶ Une **boucle** est une liaison ² dont les deux extrémités coïncident.
- ▷ Deux liaisons avec une extrémité commune sont adjacentes

- ▷ Un sommet de degré nul est dit **isolé**.
- \triangleright Un graphe est **complet** si $\forall (x,y), \exists$ une liaison de x à y.

Liaisons multiples

On parle de **liaisons multiples** lorsque deux sommets sont reliés par plusieurs liaisons (qui peuvent avoir des coûts différents dans le cas valué). Dans ce cas, l'ensemble A admet la redondance (on parle de famille).

Un graphe non orienté sans boucles ni arêtes multiples est un **graphe simple**, dans le cas contraire c'est un **multigraphe**.

Cas orienté : Dans un p-graphe, il ne peut y avoir plus de p arcs d'extrémités identiques. Un 1-graphe est donc un graphe sans arcs multiples.

^{1.} Abus de langage : successeur est également utilisé à la place de voisin dans le cas non orienté.

^{2.} Dans certaines définitions, les boucles sont interdites dans les graphes non orientés.

^{3.} La définition $d^{\circ}(x) = |\omega(x)|$ est valide si on n'autorise pas les boucles, qui comptent double dans le calcul du degré lorsqu'elles sont autorisées.

Parties de graphes

Soit $G = \langle S, A \rangle$.

- \triangleright Le sous-graphe de G engendré par $S' \subseteq S$ est le graphe G' dont les sommets sont ceux de S' et dont les liaisons sont celles de A ayant leurs deux extrémités dans S' ($G' = \langle S', A' \rangle$ tel que A' est l'ensemble des liaisons de A dont les deux extrémités sont dans S').
- \triangleright Le graphe partiel de G engendré par $A' \subseteq A$ est le graphe $\langle S, A' \rangle$.

Chemins et connexités

- Dans un graphe orienté (resp. non orienté) $G = \langle S, A \rangle$, on appelle **chemin** (resp. chaîne) de **longueur** k d'un sommet s_0 vers un sommet s_k ($s_0 \leadsto s_k$), une suite de sommets (s_0, s_1, \cdots, s_k) de S tels que $\forall i, 0 \leq i < k, s_i \rightarrow s_{i+1}$ est un arc (resp. $s_i s_{i+1}$ est une arête) de A.
- Un chemin (resp. une chaîne) est dit élémentaire s'il ne contient pas plusieurs fois le même sommet.
- Dans un graphe orienté (resp. non orienté), un chemin (resp. une chaîne) dont tous les arcs (resp. les arêtes) sont distincts et dont les deux extrémités coïncident est un circuit (resp. cycle).
- Un graphe non orienté est dit **connexe** si pour toute paire de sommets distincts x et y, il existe une chaîne reliant x à y.

Un graphe orienté est dit fortement connexe si pour toute paire ordonnée de sommets distincts x et y, il existe un chemin de x vers y et de y vers x.

• On appelle **composante connexe** d'un graphe non orienté un sous-graphe connexe maximal, c'est à dire qui n'est pas strictement contenu dans un autre sous-graphe connexe.

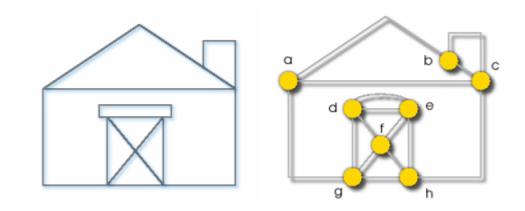
De même pour un graphe orienté, on appelle **composante fortement connexe** un sous-graphe fortement connexe maximal.

Utilisation des graphes

Pour de nombreuses applications, et en premier lieu les parcours, il est nécessaire de numéroter les sommets (de 1 à N, ou de 0 à N-1, avec N l'ordre du graphe).

Le **type abstrait donné en annexe** présente donc les deux opérations, qui permettent de passer du sommet à son numéro et inversement.

Dans la suite, pour simplifier, un sommet sera bien souvent représenté directement par son numéro (comme dans les exemples donnés dans les vidéos).



2