Contrôle de cours 2 (1 heure)

1 Probabilités

Exercice 1 (5 points)
Considérons une variable aléatoire infinie X dont la loi est donnée par:

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

1. Vérifier par le calcul que $\Sigma_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{n=1}^{+\infty} P(X=n) &= \Sigma_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \Sigma_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2}{3} \Sigma_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Déterminer sa fonction génératrice $G_X(t)$. On l'exprimera d'abord sous la forme d'une série entière, puis à l'aide des fonctions usuelles.

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \Sigma_{n=1}^{+\infty} P(X=n) t^n \\
&= \Sigma_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} t^n \\
&= \frac{2}{3} t \Sigma_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^{n} \\
&= \frac{2}{3} t \frac{1}{1-\frac{t}{3}} \\
&= \frac{2t}{3-t}
\end{aligned}$$

3. Calculer l'espérance et la variance de X.
$G'_X(t) = \frac{2(3-t)-(-1)(2t)}{(3-t)^2} = \frac{6}{(3-t)^2}$
$G''_X(t) = (6 \times (3-t)^{-2})' = 6 \times (-2) \times (-1) \times (3-t)^{-3} = \frac{12}{(3-t)^3}$

$E(X) = G'_X(1) = \frac{6}{(3-1)^2} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} V(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) + (G'_X(1))^2 \\ &= \frac{12}{(3-1)^3} + \frac{6}{(3-1)^2} - \left(\frac{6}{(3-1)^2}\right)^2 \\ &= \frac{12}{8} + \frac{6}{4} - \frac{36}{16} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2 Familles de vecteurs, base et dimension d'un espace vectoriel

Exercice 2 (8 points)
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ une famille de E.

1. Écrire la définition de : "$\mathcal{F}$ est une famille libre".
   $\forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 u_1 + ... + \lambda n u_n = 0_E \Longrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda n) = (0, ..., 0)$

2. Écrire la définition de : "$\mathcal{F}$ est une famille liée".
   $\exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 u_1 + ... + \lambda n u_n = 0_E$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) = (0, ..., 0)$

3. Écrire la définition de : "$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E".
   $\forall u \in E, \exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$

4. Dans cette question, on suppose que n=3, c'est-à-dire $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$, et de plus que $u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0_E$. Montrer que Vect$(\mathcal{F})$ = Vect(u_1, u_3).
   $\mathcal{F}$=Vect$(u_1, u_2, u_3) \Longrightarrow \forall u \in \mathcal{F}, \exists(_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$:

   $$\begin{aligned} u &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \text{ or } u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0_E \Longleftrightarrow \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_3 = u_2 \\ &= \lambda_1 u_1 + \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_3 + \lambda_3 u_3 \\ &= (\frac{1}{2} + \lambda_1)u_1 + (\frac{3}{2} + \lambda_3)u_3 \\ &= \lambda'_1 u_1 + \lambda'_3 u_3; (\lambda'_1, \lambda'_3) \in \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(u_1, u_3) \end{aligned}$$

5. Application : dans E = $\mathbb{R}^3$, considérons la famille $\mathcal{F} = (u_1 = (1, -1, 1), u_2 = (5, 1, 1), u_3 = (1, 2, -1))$.

   (a) La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Justifier votre réponse.
   On peut voir une solution évidente : $-3u_1 + u_2 - 2u_3 = 0_E \Longrightarrow \mathcal{F}$ n'est pas libre.
   (Si jamais vous ne voyez pas la solution dite évidente tout de suite :)
   $\mathcal{F}$ libre ssi $\forall(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On cherche donc à vérifier que $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0_E \Longrightarrow x = y = z = 0$
   $\Longrightarrow \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ En résolvant ce système, on obtient $\begin{cases} x = -3y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -2y \end{cases}$
   Ainsi, $\mathcal{F}$ est liée.

(b) Donner une base de Vect($\mathcal{F}$) et en déduire sa dimension.
Vect(F) = Vect(u_1, u_2) or u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc (u_1, u_2) est libre et génératrice par la définition de Vect. C'est donc une base de Vect(F).
Dim(Vect(F)) = 2.

Une démonstration de cours (3 points)
Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finies n et p, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de F et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ une base de G.
On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_n, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ obtenue par concaténation des bases de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Montrer que :

$$\mathcal{F} \text{ libre } \Longrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

(Cf polycopié des démonstrations d'algèbre linéaire à connaitre)

3 Applications linéaires

Exercice 3 (4 points)

1. Donner une exemple d'application $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui n'est pas linéaire. Justifier votre réponse. (Ce n'est pas la seule réponse possible)
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \rightarrow & (P(1), 1, P(1)) \end{array} \right.$
Preuve : $f(2P) = (2P(1), 1, 2P(1)) \neq 2(P(1), 1, P(1)) = 2f(P)$

2. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner les définitions mathématiques de Ker(f) et Im(f).
$Ker(f) = \{u \in E, f(u) = 0_E\}$
$Im(f) = \{v \in F, \exists x \in E \text{ tel que } v = f(u)\}$

3. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x, x - 2y + z) \end{array} \right.$. Trouver une base de Kerf(f) et en déduire sa dimension.

$Ker(f) = \{u \in E, f(u) = 0_E\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x = 0, x{-}2y{+}z = 0\}$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}z \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow$ Ker(f) = Vect((0,$\frac{1}{2}$,1)) $\neq$ ((0,0,0)).
On a donc Ker(f) = Vect((0,$\frac{1}{2}$,1)) et (0,$\frac{1}{2}$,1) $\neq$ (0,0,0) donc Dim(Ker(f)) = 1.