Probabilités

Amnézic

Contents

1 Définition

Définition

Soit X une variable aléatoire finie entière. On note $X(\Omega)$ = [0,n] l'ensemble de ses valeurs possibles. Sa fonction génératrice est alors la fonction G_X définie pour tout $t \in R$ par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k$$

Remarques

1. La fonction G_X est un polynôme en t :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k = p_0 + p_1 t + ... + p_n t^n$$

2. Si $\forall$k $\in$ [O,n], P(X=k)=P(Y=k) $\Longrightarrow$ X = Y

2 Calculs de l'espérance et de la variance

Théorème

Soient X une variable aléatoire finie entière et G_X sa fonction génératrice. On a alors :

- $G_X(1) = 1$
- E(X) = G_X'(1)
- Var(X) = G_X"(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2

La fonction G_X contient toute l'information donnée par la loi de X. En particulier, on peut en déduire l'espérance et la variance de X.

3 Somme de variables aléatoire

3.1 Fonction génératrice d'une somme

Théorème Soient 2 variables aléatoires finies entières X et Y **indépendantes**, de fonctions génératrices G_X(t) et G_Y(t). La somme $X + Y$ admet alors une fonction génératrice :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$$

4 Cas de la loi binomiale:

Rappels

> Soient des nombres p $\in$ [0,1] et n $\in$ N. une variable binomiale Y de paramètres (n,p) est une somme de n variables de Bernouill indépendantes X_i, i$\in$[[1,n]] de paramètres p :
> Y = $X_1 = X_2 + ... + Xn$ avec $\forall$i$\in$[[1,n]], P(X_i=1)=p et P(X_i=0)=(1-p)

Fonction génératrice et loi de Y:

5 Séries entières

5.1 Définition

Soit x$\in$ R. Une série entière est une série $\Sigma a_n x^n$ où $(a_n)_{n\in N}$ est une suite réelle.Le terme général de la série est donc une fonction de x de la forme u_n(x) = $a_n x^n$

Remarques

1. La série est toujours convergente en x=0. En effet, pour cette valeur de x, les termes u_n(x)=$a_n x^n$ sont tous nuls sauf u_0(x)=a_0 donc la série converge vers a_0.

2. Si la série converge en d'autres valeurs de x, alors sa limite dépend de x et on peut définir f(x) = $\Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série converge est le domaine de convergence de la série. C'est aussi le domaine de définition D_f de la fonction f.

5.2 Rayon de convergence

Définiton

> Soient (a_n) une suite réelle, $\Sigma a_n x^n$ la série entière définie par cette suite et la fonction f(x) = $\Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
> Alors il existe $R \in R_+ \cup +\infty$ tel que :
>
> 1. $\forall$x$\in$ R tel que |x|<R, la série converge absolument.
> 2. $\forall$x$\in$ R tel que |x|>R, la série diverge.

R est appelé "rayon de convergence" de la série entière et l'ensemble x$\in$ R, |x|<R = $]-R;R[$ est apellé disque ouvert de convergence de la série.

5.3 Propriétés de la fonction somme: continuité, dérivé et intégration

Soit $\Sigma a_n x^n$ une série entière.
Série dérivée

> Sa série dérivée est la série $\Sigma n a_n x^{n-1}$. Son terme général, qui est non nul à partir du rang n=1, est égal à la dérivée du monôme $a_n x^n$.
> La série dérivée est aussi une série entière: en posant: b_n= (n+1)a_{n+1}, elle s'écrit $\Sigma b_n x^n$.

Série intégrée

> Sa série intégrée est la série $\Sigma a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. on parle de série intégrée car son terme génral est la primitive de $a_n x^n$ qui vaut 0 en x=0.
> La série intégrée est aussi une série entière: en posant $c_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, elle s'écrit $\Sigma c_n x^n$.

Le théorème dit simplement que la fonction somme de la série peut se dériver et s'intégrer de la même manière qu'un polynôme. La série entière se manipule comme un polynôme de degré infini. Mais il y a une contrainte : il faut que x∈]-R;R[!

5.4 Fonctions de référence

1. $e^x = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$: R = $+\infty$
2. ln(1+x) = $\Sigma_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$: R = 1
3. (1+x)$^\alpha$ = $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$: R = $+\infty$ is n>0, 1 sinon
4. $\frac{1}{1 \pm x} = \Sigma_{n=0}^{+\infty} (\pm 1)^n x^n$: R = 1
5. $\sin(x) et \cos(x)$: R = $+\infty$