## Correction TD1 Physique quantique

## Exercice de cours : Catastrophe ultraviolette

Le corps noir est l'objet théorique suivant : il absorbe parfaitement la totalité de l'énergie électromagnétique qu'il reçoit et, atteignant l'équilibre thermique à une température T, la restitue entièrement sous forme d'un rayonnement thermique constitué d'un spectre de longueurs d'onde  $\lambda$ , rayonnées chacune à une intensité, donnée par la fonction  $\mathbf{u}(\lambda, T)$ , appelée densité spectrale d'énergie.

La thermodynamique classique a proposé de décrire le rayonnement du corps noir en considérant les molécules comme de petits oscillateurs, rayonnant chacun une énergie E avec une certaine probabilité. La physique classique propose que l'énergie rayonnée E prend ses valeurs dans  $[0;+\infty]$ ; des valeurs donc continues. On note <E> l'énergie moyenne d'un oscillateur.

## Partie 1 : Descritpion par la loi de Rayleigh-Jeans (Énergie continue)

Dans le cadre de la thermodynamique classique, la loi de Rayleigh-Jeans aboutit à l'expression suivante pour la densité spectrale d'énergie:

$$u(\lambda,T) = \frac{8\pi}{c\lambda^2}$$
 • u: densité spectrale (W·m³)   
• c: célérité de la lumière dans le vide (3×10<sup>8</sup>m·s−1)

L'énergie moyenne <E> d'un oscillateur se calcule de la manière suivante:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} E e^{-\frac{E}{k_B T}} dE}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE}$$
 •  $k_B$ : constant thermodynamique •  $T$ : température du rayonnement

Le numérateur représente l'intégrale de la densité de probabilité de l'énergie E, et le dénominateur permet de normaliser le résultat.

1. Montrer que le terme  $\langle E \rangle$  a pour valeur  $k_B T$ , en utilisant une intégration par parties.

Posons Nm et D tel que  $\langle E \rangle = \frac{Nm}{D}$ 

$$D = \int_0^\infty e^{-\frac{E}{k_B T}} dE = \left[ -k_B T \times e^{-\frac{E}{k_B T}} \right]_0^\infty = -k_B T (0 - 1) = k_B T$$

Nm

Nm

Donc 
$$\langle E \rangle = \frac{Nm}{D} = \frac{(k_B T)^2}{k_B T} = k_B T$$

L'énergie totale du rayonnement émis par le corps noir est donnée par l'intégration de la densité d'énergie sur toutes les longueurs d'ondes:

$$U(\lambda, T) = \int_0^{+\infty} u(\lambda, T) d\lambda$$

 $\mathrm{U}(\lambda,\mathrm{T})$  est l'intensité rayonnée par le corps noir (en  $\mathrm{W}{\cdot}\mathrm{m}^2$ )

2. Expliquer à partir de cette intégrale pourquoi la loi de Rayleigh-Jeans a marqué un tournant nommé "Catastrophe ultraviolette".

 $\Longrightarrow \lambda \to 0 \Longrightarrow U(\lambda,T)$  diverge.

## Partie 2: Descritpion par la loi de Planck (Énergie discontinue)

Nous allons maintenant nous intéresser à la loi de Planck, qui a proposé de corriger la loi de Rayleigh-Jeans en introduisant la quantification de l'énergie du système corps noir : le terme <E> est alors calculé en supposant que l'énergie E d'un oscillateur ne peut prendre qu'un nombre discret de valeurs, multiples d'une énergie  $E_0$ .

3. Réécrire la relation donnant  $\langle E \rangle$  dans ces conditions. Proposition de Max-Planck:  $E = nE_0$  (quantificateur de l'énergie) qui corrige la divergence de la densité spectrale  $u(\lambda,T)$  pour les faibles longueurs d'ondes (UV).

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} E_0 \times e^{-\frac{E_0}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{E_0}{k_B T}}}$$

4. Calculer ce terme, en utilisant un résultat sur les suites géométriques au numérateur, puis en remarquant un lien de dérivation entre le dénominateur et le numérateur.

Calcul de  $\langle E \rangle$ :

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} E_0 \times e^{-\frac{E_0}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{E_0}{k_B T}}} = \frac{Nm}{D}$$

D

$$D = 1_{\overline{1-e^-}}$$

On a donc 
$$E = \frac{Nm}{D} = E_0 e^{-\frac{E_0}{(1-e^{-\frac{E_0}{k_B T}})^2}} \frac{1}{1-e^{-\frac{E_0}{k_B T}}}$$

On obtient donc la densité spectrale d'énergie suivante :

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi}{c\lambda^2} \langle E \rangle = \frac{8\pi}{c\lambda^2} \times \frac{E_0}{e^{\frac{E_0}{k_BT}} - 1}$$

avec  $E_0$  un quanta (plus petite quantité indivisible d'énergie)

Pour corriger la loi de R-J, il faut corriger la divergence  $u(\lambda,T)$  pour les petites longueurs d'ondes.

Justifier la proposition de Planck:  $E_0 = \frac{hc}{\lambda}$  avec h la constante de Planck.

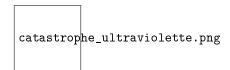


Figure 1: Spectre du rayonnement du corps noir (intensité du rayonnement en fonction de la longueur d'onde) pour des températures données (couleurs : modèle de Planck ; noir : modèle de Rayleigh-Jeans)

Remarques: Avec la loi de Planck, l'on trouve une énergie totale rayonnée  $U(T)\alpha T^4$ , ce qui est en accord avec les observations, et revient à la loi de Stefan-Boltzman, antérieure à la catastrophe ultraviolette.