

Correction TD1 Physique quantique

Exercice de cours : Catastrophe ultraviolette

Le corps noir est l'objet théorique suivant : il absorbe parfaitement la totalité de l'énergie électromagnétique qu'il reçoit et, atteignant l'équilibre thermique à une température T , la restitue entièrement sous forme d'un rayonnement thermique constitué d'un spectre de longueurs d'onde λ , rayonnées chacune à une intensité, donnée par la fonction $u(\lambda, T)$, appelée densité spectrale d'énergie.

La thermodynamique classique a proposé de décrire le rayonnement du corps noir en considérant les molécules comme de petits oscillateurs, rayonnant chacun une énergie E avec une certaine probabilité. La physique classique propose que l'énergie rayonnée E prend ses valeurs dans $[0; +\infty]$; des valeurs donc continues. On note $\langle E \rangle$ l'énergie moyenne d'un oscillateur.

Partie 1 : Description par la loi de Rayleigh-Jeans (Énergie continue)

Dans le cadre de la thermodynamique classique, la loi de Rayleigh-Jeans aboutit à l'expression suivante pour la densité spectrale d'énergie:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi}{c\lambda^2} \langle E \rangle$$

- u : densité spectrale ($\text{W}\cdot\text{m}^3$)
- c : célérité de la lumière dans le vide ($3\times 10^8 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)

L'énergie moyenne $\langle E \rangle$ d'un oscillateur se calcule de la manière suivante:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} E e^{-\frac{E}{k_B T}} dE}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE}$$

- k_B : constante thermodynamique
- T : température du rayonnement

Le numérateur représente l'intégrale de la densité de probabilité de l'énergie E , et le dénominateur permet de normaliser le résultat.

1. Montrer que le terme $\langle E \rangle$ a pour valeur $k_B T$, en utilisant une intégration par parties.

Posons Nm et D tel que $\langle E \rangle = \frac{Nm}{D}$

$$D = \int_0^\infty e^{-\frac{E}{k_B T}} dE = [-k_B T \times e^{-\frac{E}{k_B T}}]_0^\infty = -k_B T(0 - 1) = k_B T$$

$$\begin{aligned} Nm &= \int_0^\infty E \times e^{-\frac{E}{k_B T}} dE, \text{ par intégration par parties, on obtient} \\ &= \left[-k_B T \times E \times e^{-\frac{E}{k_B T}} \right]_0^\infty - \left(\int_0^\infty -k_B T \times e^{-\frac{E}{k_B T}} dE \right) \\ &= k_B T \left[-E e^{-\frac{E}{k_B T}} \right]_0^\infty + k_B T \left[-k_B T e^{-\frac{E}{k_B T}} \right]_0^\infty \\ &= k_B T[0 - 0] - (k_B T)^2 \left[e^{-\frac{E}{k_B T}} \right]_0^\infty \\ &= -(k_B T)^2 [e^{-\infty} - e^0] \\ &= -(k_B T)^2 (0 - 1) \\ Nm &= (k_B T)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \langle E \rangle = \frac{Nm}{D} = \frac{(k_B T)^2}{k_B T} = k_B T$$

L'énergie totale du rayonnement émis par le corps noir est donnée par l'intégration de la densité d'énergie sur toutes les longueurs d'ondes:

$$U(\lambda, T) = \int_0^{+\infty} u(\lambda, T) d\lambda$$

$U(\lambda, T)$ est l'intensité rayonnée par le corps noir (en $\text{W} \cdot \text{m}^2$)

2. Expliquer à partir de cette intégrale pourquoi la loi de Rayleigh-Jeans a marqué un tournant nommé "Catastrophe ultraviolette".

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u(\lambda, T) d\lambda &= \int_0^\infty \frac{8\pi}{c\lambda^2} \times k_B T d\lambda \\ &= \frac{8\pi}{c} \times k_B T \times \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} d\lambda \\ &= \frac{8\pi}{c} \times k_B T \times \left[\frac{-1}{\lambda} \right]_0^\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda \rightarrow 0 \Rightarrow U(\lambda, T)$ diverge.

Partie 2: Description par la loi de Planck (Énergie discontinue)

Nous allons maintenant nous intéresser à la loi de Planck, qui a proposé de corriger la loi de Rayleigh-Jeans en introduisant la quantification de l'énergie du système corps noir : le terme $\langle E \rangle$ est alors calculé en supposant que l'énergie E d'un oscillateur ne peut prendre qu'un nombre discret de valeurs, multiples d'une énergie E_0 .

3. Réécrire la relation donnant $\langle E \rangle$ dans ces conditions.

Proposition de Max-Planck: $E = nE_0$ (quantificateur de l'énergie) qui corrige la divergence de la densité spectrale $u(\lambda, T)$ pour les faibles longueurs d'ondes (UV).

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} nE_0 e^{-\frac{nE_0}{k_B T}}}{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{nE_0}{k_B T}}}$$

4. Calculer ce terme, en utilisant un résultat sur les suites géométriques au dénominateur, puis en remarquant un lien de dérivation entre le dénominateur et le numérateur.

Calcul de $\langle E \rangle$:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} nE_0 e^{-\frac{nE_0}{k_B T}}}{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{nE_0}{k_B T}}} = \frac{Nm}{D}$$

$$\begin{aligned} D &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{nE_0}{k_B T}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-\frac{E_0}{k_B T}} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \quad (\text{avec } q = e^{-\frac{E_0}{k_B T}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} \\ D &= \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{E_0}{k_B T}}} \end{aligned}$$

5. On obtient donc la densité spectrale d'énergie suivante :

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi}{c\lambda^2} \langle E \rangle = \frac{8\pi}{c\lambda^2} \times \frac{E_0}{e^{\frac{E_0}{k_B T}} - 1}$$

avec E_0 un quanta (plus petite quantité indivisible d'énergie)

Pour corriger la loi de R-J, il faut corriger la divergence $u(\lambda, T)$ pour les petites longueurs d'ondes.

Justifier la proposition de Planck: $E_0 = \frac{hc}{\lambda}$ avec h la constante de Planck.

Remarques: Avec la loi de Planck, l'on trouve une énergie totale rayonnée $U(T) \propto T^4$, ce qui est en accord avec les observations, et revient à la loi de Stefan-Boltzman, antérieure à la catastrophe ultraviolette.

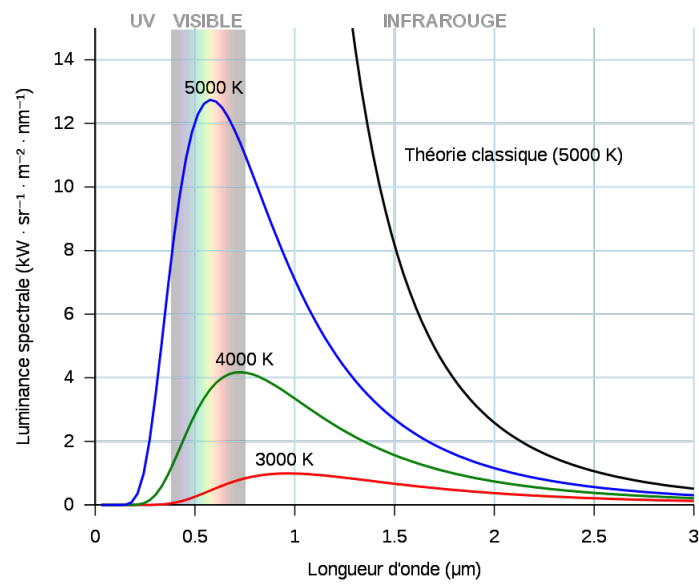


Figure 1: Spectre du rayonnement du corps noir (intensité du rayonnement en fonction de la longueur d'onde) pour des températures données (couleurs : modèle de Planck ; noir : modèle de Rayleigh-Jeans)