ECUE 3 : Electrostatique et Magnétostatique – Principe de Superposition, Calcul Direct

SOMMAIRE

L. Cerdan

Introduction : Champ électrostatique $\vec{E}$ et magnétostatique $\vec{B}$, définitions

Déf. 1 : En physique, un champ est une fonction définie dans un espace. Par exemple, le champ de température, défini sur une carte géographique, ou dans un volume d'air. Dans ces deux exemples, il s'agit d'un champ **scalaire** : à tout point de l'espace, on associe un **nombre** : une température.

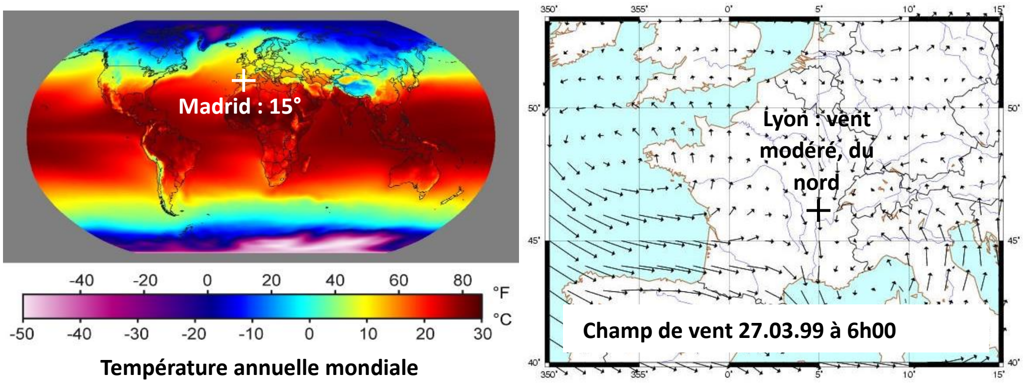


Fig. 1 : Exemples d'un champ scalaire (champ de température mondiale moyenne) et d'un champ vectoriel (force du vent en France le 27.03.99 à 6h00).

Déf. 2 : Le champ électrique est un champ **vectoriel**. On le note $\vec{E}$. C'est un champ qui se crée autour d'une particule chargée. Par exemple, autour d'un électron (de charge q = -e), ou d'un positron (q = +e), d'un ion positif ou négatif… Le champ électrique est un champ de **vecteurs** : à chaque point M de l'espace, on associe un vecteur $\overrightarrow{E(M)}$, qui possède donc une direction, un sens et une norme (représentant l'intensité du champ au point M).

On peut aussi décrire les trois composantes de $\overrightarrow{E(M)}$ dans l'espace, et ainsi parler (en coordonnées cartésiennes) du champ en M « selon Ox », « selon Oy » et « selon Oz » (trois informations en chaque point de l'espace, contrairement à un champ scalaire).

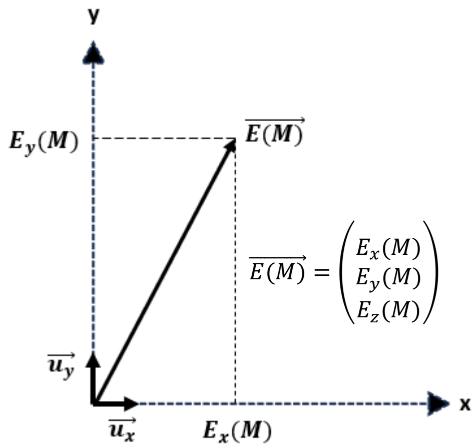


Fig. 2 : Exemple de décomposition du vecteur $\overrightarrow{E(M)}$ dans le plan

N.B 1 : Dans ce chapitre, il est nécessaire de maîtriser les **notations** pour désigner correctement les quantités et effectuer les calculs. Par exemple, ne pas confondre :

$\overrightarrow{E(M)}$ $\rightarrow$

$\left\|\overrightarrow{E(M)}\right\|$ $\rightarrow$

E_x, E_y, E_z $\rightarrow$

$\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}$ $\rightarrow$

Etc.

N.B 2 : Il est beaucoup plus intuitif de parler de **force électrique** $\overrightarrow{F_e}$, et c'est probablement de cette grandeur physique que vous avez davantage entendu parler. Il est important de ne pas confondre les deux grandeurs champ électrique et force électrique (notion ici secondaire).

Pour comprendre la différence, voici un court détour par une notion dont nous avons une expérience plus immédiate : le phénomène de gravité, décrit selon la mécanique newtonienne.

La Terre, de masse M_{Terre}, est en **interaction** gravitationnelle avec un objet de masse m, proche de sa surface, à une distance d du centre de la Terre. G est une constante.

La force attractive subie par l'objet de la part de la Terre a pour expression (vectorielle) :

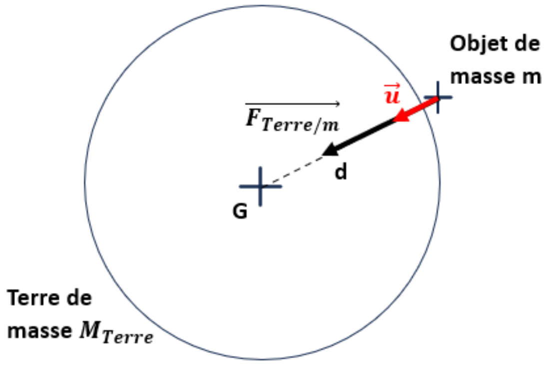


Fig. 3 : Analogie avec la gravité

$$\overrightarrow{F_{Terre/m}} = G\frac{m \times M_{Terre}}{d^2}\vec{u}$$

En raison de leur caractère constant dans ce contexte, on peut regrouper les termes encadrés ci-dessous, pour en faire une fonction mathématique vectorielle appelée **champ** de gravité terrestre près de la surface de la Terre, noté $\vec{g}$, que vous connaissez dans la formulation du poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

$$\overrightarrow{F_{Terre/m}} = m\boxed{G\frac{M_{Terre}}{d^2}\vec{u}} = m\vec{g}$$

Pour l'interaction électrique, c'est la même chose. Une particule chargée q_1 exerce sur une autre particule chargée q_2 à la distance d une force (attractive ou répulsive selon le signe des charges), d'expression :

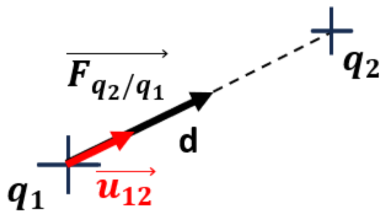


Fig. 4 : Force électrostatique

$\overrightarrow{F_{q_1/q_2}} = k\frac{q_1q_2}{d^2}\overrightarrow{u_{12}}$, où k désigne une constante électrique, la constante de Coulomb, qui vaut approximativement 8,99.10^9 U.S.I.

Là encore, on peut regrouper des termes pour former mathématiquement la grandeur que l'on désigne par $\vec{E}$, le **champ électrique**.

$$\overrightarrow{F_{q_1/q_2}} = q_2\boxed{k\frac{q_1}{d^2}\overrightarrow{u_{12}}}$$

$$= q_2\overrightarrow{E_{créé\ par\ q_1}}$$

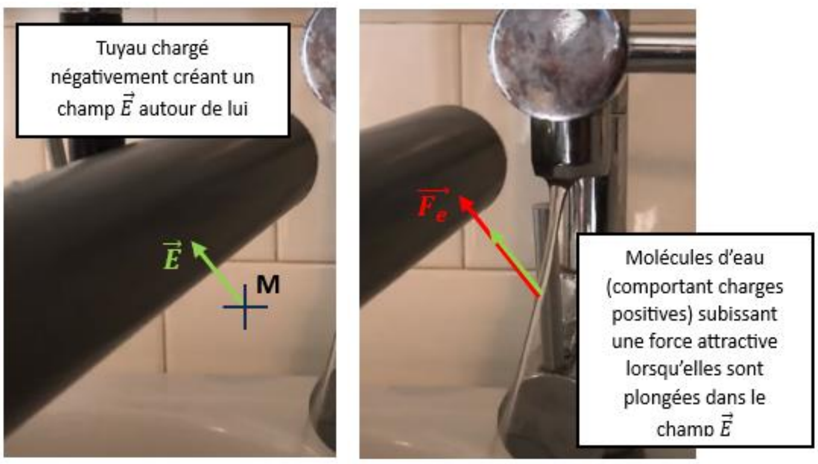


Fig. 5 : Champ électrique créé par un tuyau, et action sur un filet d'eau (Source : Youtube, Dr Nozman, *Comment courber de l'eau ?*)

N.B 3 : Nous étudierons ici des champs électriques constants au cours du temps, nous parlerons donc de champ **électrostatiques**. Mais il faut garder à l'esprit que le champ électrique en un point varie parfois au cours du temps, comme dans les phénomènes de propagation de lumière.

N.B 4 : Le champ créé par une charge q_1 n'a aucun effet sur cette même charge. Autrement dit, une particule n'est pas affectée par son propre champ. En revanche, si l'on place une charge q_2 dans le champ créé par q_1, alors q_2 perçoit ce champ, et subit donc une force électromagnétique, et réciproquement. On parle d'**interaction réciproque** (voir schéma).

Dans les exercices, il y aura donc des vecteurs qui ne nous intéresseront pas. L'on calculera d'abord le **champ** que crée autour d'elle une particule (ou un ensemble de particules). Puis, éventuellement, la force subie par une particule que l'on place ensuite dans ce champ.

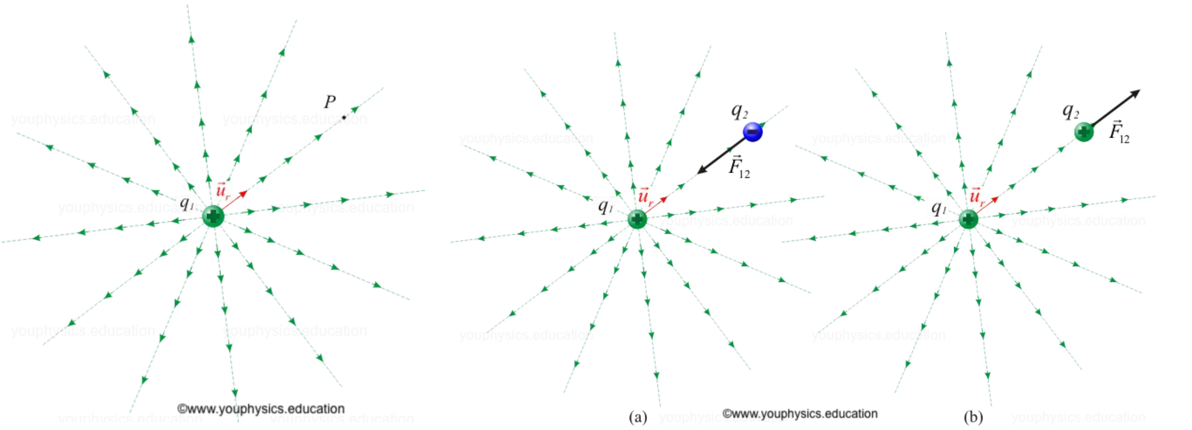


Fig. 6 : Champ créé par une charge ponctuelle positive q_1 et force créée sur une particule de charge q_2 selon son signe négatif ou positif.

Nous l'avons vu, la présence de charges fixes a pour conséquence l'apparition d'un champ électrostatique $\vec{E}$. Si l'on est cette fois en présence de charges mobiles (courants), c'est un champ magnétique $\vec{B}$ qui se crée aussi (voir plus loin loi de Biot et Savart).

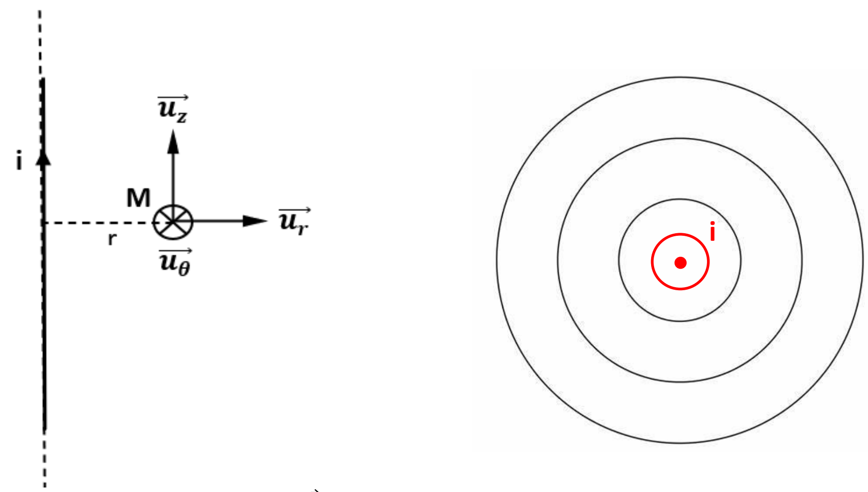


Fig. 7 : Champ magnétostatique $\vec{B}$ créé en un point M par un fil infini traversé par un courant d'intensité i, et champ magnétique créé dans tout l'espace (vue de dessus).

Le champ $\vec{B}$ a tout comme le champ $\vec{E}$ la possibilité d'agir sur des charges plongées dans ces champs. La force de Coulomb $\overrightarrow{F_E}$ a pour effet d'accélérer les charges plongées dans le champ $\vec{E}$. Quant au champ $\vec{B}$, il peut **dévier** des charges **en mouvement** par l'intermédiaire de la force de magnétique $\overrightarrow{F_B}$. L'expression complète de la force de Lorentz est : $\vec{F} = \overrightarrow{F_E} + \overrightarrow{F_B} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$.

1. Champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une distribution de charges discrètes

a. Création d'un champ électrostatique $\vec{E}$

Comme nous l'avons vu, une charge statique crée autour d'elle un champ électrostatique. Ce champ est défini sur tout l'espace (hors particule), et est de nature vectorielle. Une erreur fréquente est de représenter un vecteur *sur* la charge, alors qu'il s'agit bien d'un champ ayant une valeur vectorielle en chaque point de l'espace autour de la charge. On s'intéresse à ce qu'il se passe en un point M quelconque extérieur à la charge, pour obtenir l'expression du champ $\vec{E}$ en fonction des grandeurs du problème (valeur de la charge, distance…). Comme M est quelconque, on a donc l'expression du champ $\vec{E}$ dans tout l'espace. Par exemple, pour une charge ponctuelle positive, on a $\overrightarrow{E(M)} = \frac{kq}{r^2}\overrightarrow{u_r}$, où r est la distance entre la charge et le point M.

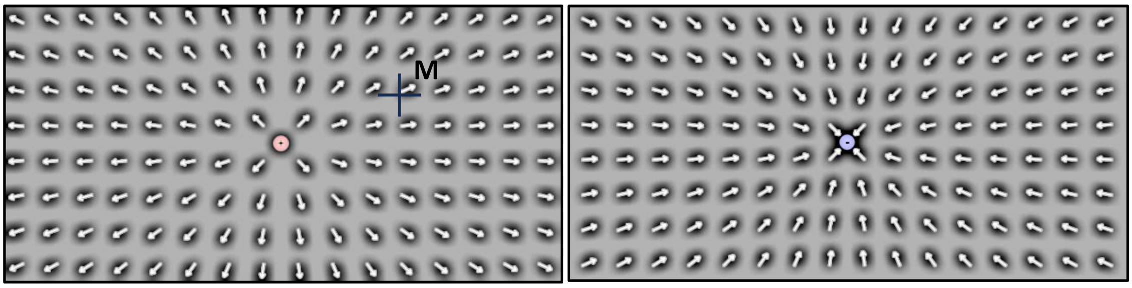


Fig. 8 : Champ créé par une particule de charge positive (sortant) ou négative (entrant).

Par convention, le champ électrique autour d'une charge positive est représenté sortant (vers l'extérieur), et entrant (vers l'intérieur) autour d'une charge négative. Le champ possède le même sens que la force qui serait appliquée à une particule chargée **positivement**.

Dans le paragraphe suivant, nous allons détailler la loi de Coulomb, qui permet de calculer le champ $\vec{E}$ créé par une particule, ou par un ensemble de particules.

b. Loi de Coulomb – Champ $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle q_p située au point P crée autour d'elle un champ électrique. On s'intéresse à l'expression de ce champ en un point M, à la distance PM de la charge, qui est la suivante :

$$\overrightarrow{E_p(M)} = \frac{kq_p}{PM^2}\overrightarrow{u_{PM}}$$

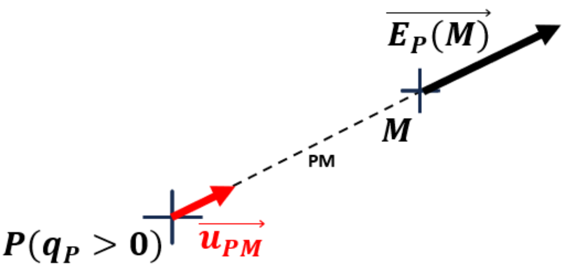


Fig. 9 : Champ créé par P ($q_P > 0$) au point M

Nous noterons ce champ $\overrightarrow{E_p(M)}$. La lettre M entre parenthèses indique que l'on calcule le champ au point M. L'indice P indique que le champ est créé par la particule au point P. Le vecteur $\overrightarrow{u_{PM}}$ est un vecteur directeur de la droite support du champ, orienté de P vers M. Selon le signe de q_p, on retrouve bien le sens conventionnel de $\overrightarrow{E_p(M)}$.

Une autre expression de $\overrightarrow{E_p(M)}$ est la suivante : $\overrightarrow{E_p(M)} = kq_p\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$. La seule différence est que l'on forme le vecteur $\overrightarrow{u_{PM}}$ à partir de $\frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$ (normalisation du vecteur $\overrightarrow{PM}$).

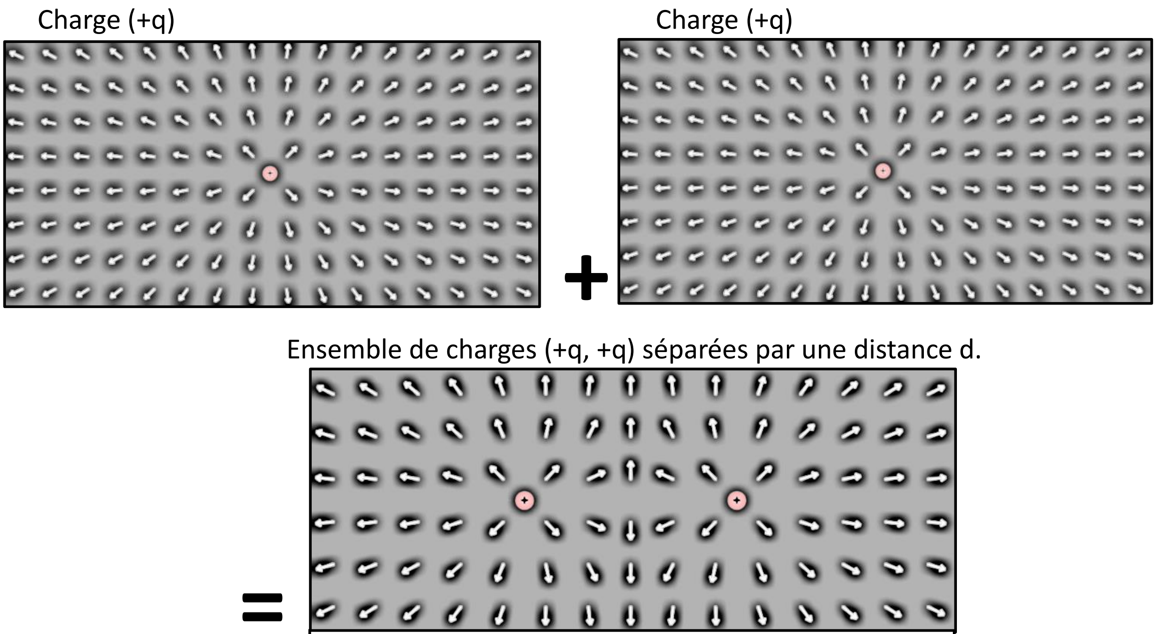
On peut utiliser l'une ou l'autre des expressions pour calculer le champ. On peut aussi se servir de l'expression de la norme du champ $\|\overrightarrow{E_p(M)}\| = \frac{kq_p}{PM^2}$ (voir TD).

c. Distributions de charges discrètes – Principe de superposition

Déf. 4 : On appelle distribution discrète de charges une répartition dans l'espace de N charges ponctuelles. Par exemple quatre charges (+q) aux quatre coins d'un carré, ou bien un dipôle électrique formé de deux charges (+q) et (-q) séparées par une distance d (Voir TD).

Chacune des charges crée un champ électrostatique vectoriel autour d'elle. On appelle **champ résultant** la somme vectorielle des champs créés par chaque particule chargée (principe de superposition). On dit que l'on « somme les contributions » au champ total de chaque particule de la distribution.

Fig. 10 : Principe de superposition - Illustration avec deux charges



Construction graphique en un point M :

d. Force électrique $\overrightarrow{F_e}$

Une fois calculé le champ créé par une particule P de charge q_P, on peut s'intéresser à la force qui s'exerce sur une autre particule M de charge q_M que l'on placerait dans ce champ, force ayant pour expression : $\overrightarrow{F_{P/M}} = \frac{kq_pq_M}{PM^2}\overrightarrow{u_{PM}}$

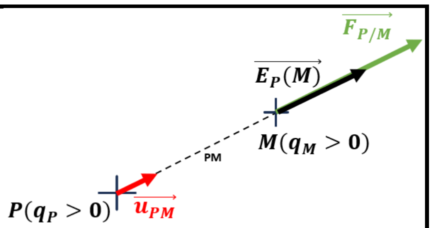


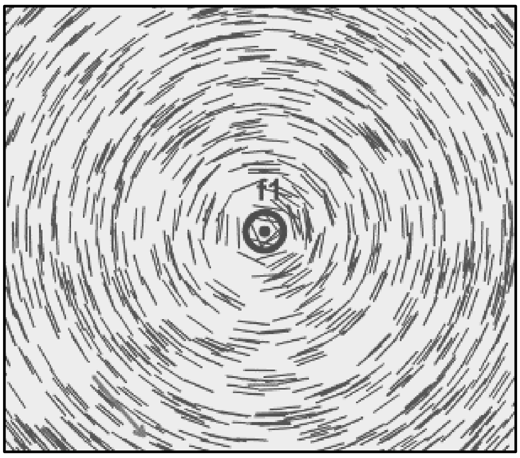
Fig. 11 : Force exercée par P $(q_P > 0)$ sur M$(q_M > 0)$

En identifiant les termes regroupés sous la grandeur $\overrightarrow{E_p(M)}$, il vient : $\overrightarrow{F_{P/M}} = q_M \overrightarrow{E_p(M)}$.
La norme de cette force est donc : $\|\overrightarrow{F_{P/M}}\| = |q_M| \|\overrightarrow{E_p(M)}\|$.

Il faut encore une fois prêter attention à la signification de chaque élément de notation, mais l'on pourra retenir « $\vec{F} = q\vec{E}$ ».

2. Champ magnétostatique créé par une distribution de courants

a. Création d'un champ magnétostatique $\vec{B}$



Comme vu précédemment, ce sont les charges en mouvement qui ont pour conséquence l'apparition d'un champ magnétique $\vec{B}$.

Ici, nous étudierons des distributions de courants d'intensité constante, créant des champs **magnétostatiques**.

L'on peut aussi (hors programme de ce chapitre) étudier les champs magnétiques créés par des matériaux ferromagnétiques (aimants), modélisables par un ensemble de « boucles de courant ».

Fig. 12 : Champ magnétostatique autour d'un fil parcouru par un courant d'intensité i.

b. Loi de Biot et Savart – Direction du champ magnétostatique

De manière analogue à la loi de Coulomb, c'est la loi de Biot et Savart qui donne le champ créé par une petite portion d'espace traversée par un courant : $\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\overrightarrow{dl} \times \vec{r}}{r^3}$. La notation $\overrightarrow{dB}$ indique qu'il s'agit du champ créé par une très petite portion de fil, un « élément » de fil parcouru par le courant I. Comme on s'intéresse à des courants formés d'une grande quantité de charges en mouvement, il faut utiliser cette approche et ne pas aborder le problème particule par particule !

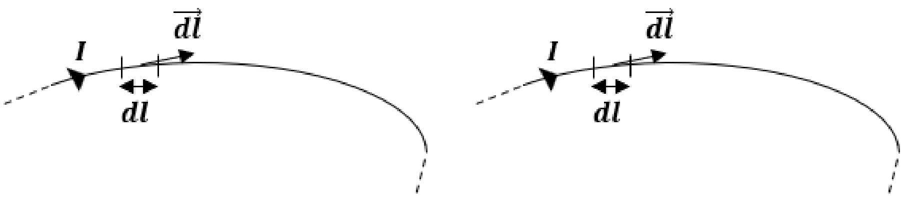


Fig. 13 : Champ $\overrightarrow{dB}$ créé par un élément $\overrightarrow{dl}$ de fil parcouru par un courant d'intensité I, et champ total créé par toute la distribution.

Le vecteur $\overrightarrow{dl}$ est un vecteur de norme dl tangent à la direction du courant.

μ_0 est une constante électromagnétique de valeur 4π.10^{-7} U.S.I.

Le produit vectoriel $\overrightarrow{dl} \times \vec{r}$ permet de déterminer la direction du champ $\overrightarrow{dB}$ créé par la portion de distribution, et c'est une utilisation importante de la loi de Biot et Savart.

Pour calculer le champ $\overrightarrow{B(M)}$ créé en un point M de l'espace par toute la distribution de courants (par exemple un fil infini parcouru par un courant d'intensité I), il faut ensuite intégrer cette expression (voir section 4.) : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\,\overrightarrow{dl} \times \vec{r}}{r^3}$

3. Eléments de symétrie

a. Symétries d'une distribution de charges statiques – Illustration par construction

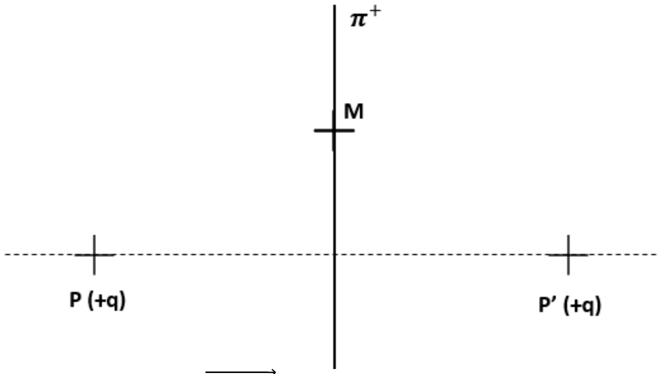


Fig. 13 : Champ $\overrightarrow{E(M)}$ dans un plan de symétrie π^+ de la distribution de charges. Conclusion :

En vue de la section suivante, nous avons besoin de comprendre comment des cas particuliers d'organisation de charges dans l'espace (distribution de charges) peuvent simplifier l'expression du champ $\overrightarrow{E(M)}$. En effet, si la distribution de charges présente des symétries, celles-ci sont transmises au champ. C'est ce qu'énonce le **Principe de Curie** : « Les conséquences ont (au moins) les symétries de leurs causes ».

Sur les deux schémas de cet encadré, on considère un point M sur un plan de symétrie π^+ (ou d'antisymétrie π^-) d'une distribution de deux charges P et P'.

Ainsi, si *a priori* le champ a trois composantes $\overrightarrow{E(M)} = \begin{pmatrix} E_x(M) \\ E_y(M) \\ E_z(M) \end{pmatrix}$, l'étude des symétries de la distribution de charges permet de simplifier des composantes, que l'on sait désormais nulles. Autrement dit, l'on connaît la direction du champ électrostatique en M.

Le sens est donné par le signe des charges, dans les cas simples, ou par le calcul.

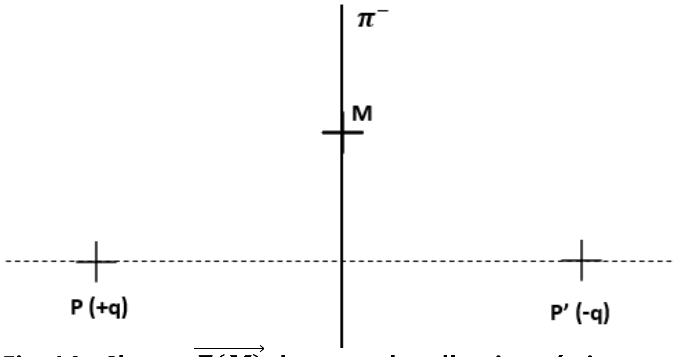


Fig. 14 : Champ $\overrightarrow{E(M)}$ dans un plan d'antisymétrie π^- de la distribution de charges. Conclusion :

b. Symétries d'une distribution de courants – Illustration par construction

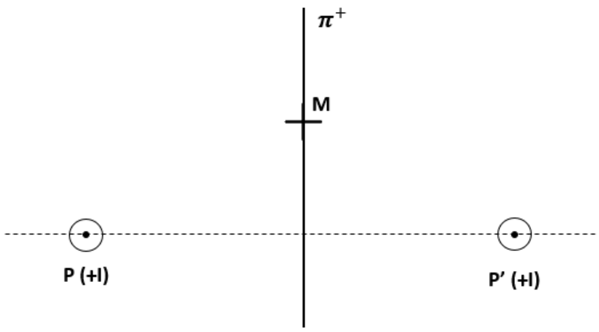


Fig. 15 : Champ $\overrightarrow{B(M)}$ dans un plan de symétrie π^+ de la distribution de courants. Conclusion :

Le même raisonnement existe avec le champ magnétostatique $\overrightarrow{B(M)}$ créé par une distribution de courants.

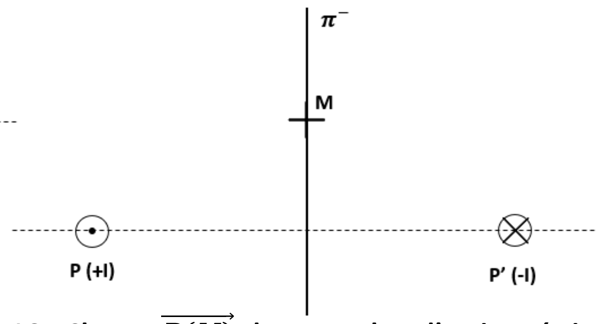


Fig. 16 : Champ $\overrightarrow{B(M)}$ dans un plan d'antisymétrie π^- de la distribution de courants. Conclusion :

On pourra donc utiliser ces quatre résultats que nous venons d'illustrer, pour simplifier l'expression des champs avant tout calcul en supprimant des composantes.

4. Distributions continues de charges et de courants – Calcul direct du champ $\vec{E}$ et du champ $\vec{B}$

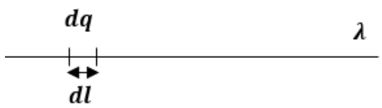
Jusqu'à maintenant, l'on a étudié le champ $\vec{E}$ créé par des distributions de charges dites « discrètes » finies, c'est-à-dire comportant un nombre fini de charges ponctuelles.

Dans cette section, on étudie des distributions dites « **continues** » :
-Distributions **linéiques** : lignes continues de charges statiques. Exemple : demi-cercle chargé.
-Distributions **surfaciques** : surfaces chargées. Exemple : sphère chargée en surface.
(-Distributions **volumiques** : portions d'espace entièrement chargés en volume. Exemple : sphère chargée en volume.)

Pour calculer le champ $\vec{E}$ résultant d'une distribution continue, le procédé est analogue au cas d'une distribution discrète : on somme les contributions de chaque élément de la distribution. Sauf que jusqu'à maintenant, il s'agissait de charges ponctuelles, donc on avait une somme de vecteurs. Là, on « découpe » mathématiquement la distribution en petits morceaux (éléments « **infinitésimaux** »), et la somme des contributions devient une **intégrale**.

Chaque petit morceau a une charge non plus ponctuelle notée q mais $\boldsymbol{dq}$, notation qui désigne la charge d'une petite portion d'espace possédant une charge continue.

***Distributions linéiques**

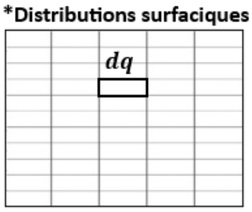


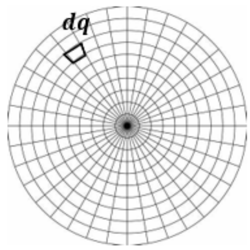
Ligne droite

Ligne courbe

L'on peut aussi définir la charge linéique λ, qui sera utile dans certains calculs $\lambda = \frac{dq}{dl}$

***Distributions surfaciques**





L'on définit la charge surfacique $\sigma = \frac{dq}{dS}$

Pour le champ $\vec{B}$, on peut procéder de même pour calculer au moyen d'une intégrale le champ total créé par une distributions de courants dans des fils (linéiques) ou des nappes de courants (surfaciques ou volumiques).

a. Principe de calcul

Pour le calcul du champ $\vec{E}$, chaque élément de la distribution crée un champ infinitésimal, d$\vec{E}$, d'expression $d\vec{E} = \frac{kdq}{r^3}\vec{r} = \frac{kdq}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ car $\frac{\vec{r}}{r} = \overrightarrow{u_r}$ (loi de Coulomb).

L'expression théorique du champ résultant de toute la distribution est donc $\vec{E} = k\int \frac{dq}{r^2}\overrightarrow{u_r}$.

De même, en intégrant la loi de Biot et Savart, on a :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\overrightarrow{dl}\times\vec{r}}{r^2} \Rightarrow \vec{B} = \int\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,\overrightarrow{dl}\times\vec{r}}{r^2}$$

En pratique, la méthode est la suivante (voir TD) :

*Trouver la direction du champ grâce à l'étude des symétries de la distribution de charges.

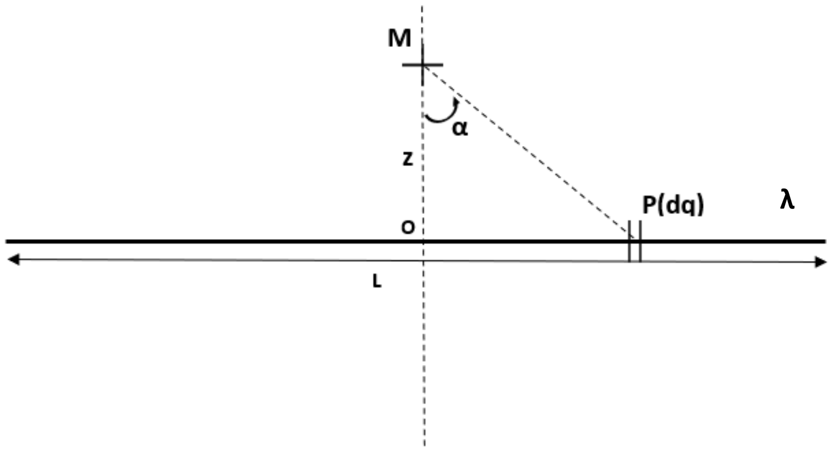
*Exprimer la norme du champ infinitésimal créé par un élément infinitésimal de la distribution.

*Intégrer l'expression sur toute la distribution.

*Exprimer vectoriellement le résultat final.

b. Exemple de cours : Calcul de $\vec{E}$ par méthode directe

On considère un segment de longueur L uniformément chargé, de densité linéique de charge λ, de milieu O. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ en un point M situé sur la médiatrice du segment.



c. Exemple de cours : Calcul de $\vec{B}$ par méthode directe

On considère un fil infini parcouru par un courant d'intensité i. Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}$ en un point M situé hors du fil.