Description

Un graphe $G = < S, A >$ est constitué de

- ▷ S : un ensemble de **sommets**, $|S| = n$ est l'**ordre** du graphe ;
- ▷ A : un ensemble de **liaisons**, des paires de sommets.

Si le graphe est **valué** (**pondéré**), il se note alors $G = \ < S, A, C >$ avec

- ▷ C : une **fonction de coût** représentant les valeurs (ou coûts, poids) des liaisons ($C : A \mapsto \mathbb{R}$).

Graphes non orientés

Une liaison est une **arête** : $\{x, y\}$ ou x—y.

- ▷ x et y sont les **extrémités** de l'arête.
- ▷ x et y sont **voisins** / **adjacents**

Graphes orientés

Une liaison est un **arc** : (x, y) ou $x \to y$.

- ▷ x est l'**extrémité initiale**
- ▷ y est l'**extrémité terminale (finale)**
- ▷ x est **prédécesseur** de y
- ▷ y est **successeur**[1] de x / **adjacent à** x

▷ Une **boucle** est une liaison[2] dont les deux extrémités coïncident.

▷ Deux liaisons avec une extrémité commune sont **adjacentes**

Graphes non orientés :

- ▷ $\Gamma(x)$: voisins de x
- ▷ $\omega(x)$: arêtes **incidentes** (dont x est une extrémité)
- ▷ $d^\circ(x) = |\omega(x)|$: **degré**[3]

Graphes orientés :

- ▷ $\Gamma(x)$: successeurs de x
- ▷ $\Gamma^{-1}(x)$: prédécesseurs de x
- ▷ $\omega^+(x)$: arcs **incidents à** x **vers l'extérieur**
- ▷ $\omega^-(x)$: arcs **incidents à** x **vers l'intérieur**
- ▷ $\omega(x) = \omega^-(x) \cup \omega^+(x)$
- ▷ $d^{\circ+}(x) = |\omega^+(x)|$: **demi-degré extérieur** / degré sortant
- ▷ $d^{\circ-}(x) = |\omega^-(x)|$: **demi-degré intérieur** / degré entrant
- ▷ $d^\circ(x) = d^{\circ-}(x) + d^{\circ+}(x) = |\omega(x)|$: **degré**

▷ Un sommet de degré nul est dit **isolé**.

▷ Un graphe est **complet** si $\forall(x, y), \exists$ une liaison de x à y.

Liaisons multiples

On parle de **liaisons multiples** lorsque deux sommets sont reliés par plusieurs liaisons (qui peuvent avoir des coûts différents dans le cas valué). Dans ce cas, l'ensemble A admet la redondance (on parle de *famille*).

Un graphe non orienté sans boucles ni arêtes multiples est un **graphe simple**, dans le cas contraire c'est un **multigraphe**.

Cas orienté : Dans un ***p*-graphe**, il ne peut y avoir plus de p arcs d'extrémités identiques. Un **1-graphe** est donc un graphe sans arcs multiples.

1. Abus de langage : **successeur** est également utilisé à la place de **voisin** dans le cas non orienté.
2. Dans certaines définitions, les boucles sont interdites dans les graphes non orientés.
3. La définition $d^\circ(x) = |\omega(x)|$ est valide si on n'autorise pas les boucles, qui comptent double dans le calcul du degré lorsqu'elles sont autorisées.

Parties de graphes

Soit $G =< S, A >$.

▷ Le **sous-graphe** de G **engendré par** $S' \subseteq S$ est le graphe G' dont les sommets sont ceux de S' et dont les liaisons sont celles de A ayant leurs deux exttrémités dans S' ($G' = < S', A' >$ tel que A' est l'ensemble des liaisons de A dont les deux extrémités sont dans S').

▷ Le **graphe partiel** de G **engendré par** $A' \subseteq A$ est le graphe $< S, A' >$.

Chemins et connexités

- Dans un graphe orienté (resp. non orienté) $G =< S, A >$, on appelle **chemin** (resp. **chaîne**) de **longueur** k d'un sommet s_0 vers un sommet s_k ($s_0 \rightsquigarrow s_k$), une suite de sommets $(s_0, s_1, \cdots, s_k)$ de S tels que $\forall i, 0 \leq i < k$, $s_i \rightarrow s_{i+1}$ est un arc (resp. $s_i — s_{i+1}$ est une arête) de A.
- Un chemin (resp. une chaîne) est dit **élémentaire** s'il ne contient pas plusieurs fois le même sommet.
- Dans un graphe orienté (resp. non orienté), un chemin (resp. une chaîne) dont tous les arcs (resp. les arêtes) sont distincts et dont les deux extrémités coïncident est un **circuit** (resp. **cycle**).
- Un graphe non orienté est dit **connexe** si pour toute paire de sommets distincts x et y, il existe une chaîne reliant x à y.

  Un graphe orienté est dit **fortement connexe** si pour toute paire ordonnée de sommets distincts x et y, il existe un chemin de x vers y et de y vers x.
- On appelle **composante connexe** d'un graphe non orienté un sous-graphe connexe maximal, c'est à dire qui n'est pas strictement contenu dans un autre sous-graphe connexe.

  De même pour un graphe orienté, on appelle **composante fortement connexe** un sous-graphe fortement connexe maximal.

Utilisation des graphes

Pour de nombreuses applications, et en premier lieu les parcours, il est nécessaire de numéroter les sommets (de 1 à N, ou de 0 à $N - 1$, avec N l'ordre du graphe).

Le **type abstrait donné en annexe** présente donc les deux opérations, qui permettent de passer du sommet à son numéro et inversement.

Dans la suite, pour simplifier, un sommet sera bien souvent représenté directement par son numéro (comme dans les exemples donnés dans les vidéos).