Contrôle de cours 2 (1 heure)

1 Probabilités

Exercice 1 (5 points)
Considérons une variable aléatoire infinie X dont la loi est donnée par:

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

1. Vérifier par le calcul que $\Sigma_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{n=1}^{+\infty} P(X = n) &= \Sigma_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \Sigma_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2}{3} \Sigma_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Déterminer sa fonction génératrice $G_X(t)$. On l'exprimera d'abord sous la forme d'une série entière, puis à l'aide des fonctions usuelles.

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \Sigma_{n=1}^{+\infty} P(X = n) t^n \\
&= \Sigma_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} t^n \\
&= \frac{2}{3} t \Sigma_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^{n} \\
&= \frac{2}{3} t \frac{1}{1 - \frac{t}{3}} \\
&= \frac{2t}{3 - t}
\end{aligned}$$

3. Calculer l'espérance et la variance de X.
$G'_X(t) = \frac{2(3-t)-(-1)(2t)}{(3-t)^2} = \frac{6}{(3-t)^2}$
$G''_X(t) = (6 \times (3-t)^{-2})' = 6 \times (-2) \times (-1) \times (3-t)^{-3} = \frac{12}{(3-t)^3}$

$E(X) = G'_X(1) = \frac{6}{(3-1)^2} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} V(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) + \left(G'_X(1)\right)^2 \\ &= \frac{12}{(3-1)^3} + \frac{6}{(3-1)^2} - \left(\frac{6}{(3-1)^2}\right)^2 \\ &= \frac{12}{8} + \frac{6}{4} - \frac{36}{16} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2 Familles de vecteurs, base et dimension d'un espace vectoriel

Exercice 2 (8 points)
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ une famille de E.

1. Écrire la définition de : "$\mathcal{F}$ est une famille libre".
   $\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 u_1 + ... + \lambda n u_n = 0_E \Longrightarrow (\lambda_1, ..., \lambda n) = (0, ..., 0)$
2. Écrire la définition de : "$\mathcal{F}$ est une famille liée".
   $\exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 u_1 + ... + \lambda n u_n = 0_E$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) = (0, ..., 0)$
3. Écrire la définition de : "$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E".
   $\forall u \in E, \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$
4. Dans cette question, on suppose que n=3, c'est-à-dire $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$, et de plus que $u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0_E$.
   Montrer que $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(u_1, u_3)$.
5. Application : dans E $= \mathbb{R}^3$, considérons la famille $\mathcal{F} = (u_1 = (1, -1, 1), u_2 = (5, 1, 1), u_3 = (1, 2, -1))$.
   (a) La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Justifier votre réponse.
   (b) Donner une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et en déduire sa dimension.

Une démonstration de cours (3 points)
Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finies n et p, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de F et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ une base de G.
On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_n, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ obtenue par concaténation des bases de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Montrer que :

$$\mathcal{F} \text{ libre } \Longrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

3 Applications linéaires

Exercice 3 (4 points)

1. Donner une exemple d'application $f : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui n'est pas linéaire. Justifier votre réponse.

2. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Donner les définitions mathématiques de Ker(f) et Im(f).
   $Ker(f) = \{u \in E, f(u) = 0_E\}$
   $Im(f) = \{v \in F, \exists x \in E \text{ tel que } v = f(u)\}$

3. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x, x-2y+z) \end{array} \right.$. Trouver une base de Kerf(f) et en déduire sa dimension.

   $Ker(f) = \{u \in E, f(u) = 0_E\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f((x,y,z)) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 3x = 0, x-2y+z = 0\}$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}z \end{array} \right.$$

   $\Longrightarrow$ Ker(f) = Vect((0,$\frac{1}{2}$,1)) $\neq$ ((0,0,0)).
   On a donc Ker(f) = Vect((0,$\frac{1}{2}$,1)) et (0,$\frac{1}{2}$,1) $\neq$ (0,0,0) donc Dim(Ker(f)) = 1.