1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition 1

On appelle déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, noté $\det(A)$, le scalaire défini par

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Définition 2

On appelle déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, noté $\det(A)$, le scalaire défini par

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}. \end{aligned}$$

3 Mineur et cofacteur

Définition 3

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On appelle **mineur** d'indice (i, j) le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice A.
- On appelle **cofacteur** d'indice (i, j) et on note A_{ij} le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

4 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de la matrice A est

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}$$

si on développe par rapport à la j-ième colonne et

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}$$

si on développe par rapport à la i-ième ligne.

5 Propriétés du déterminant

Proposition 1

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
- $\det(A) = \det({}^tA)$, où ${}^tA$ est la matrice transposée de A.

6 Condition nécessaire & suffisante d'inversibilité d'une matrice

Définition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

Proposition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. De plus,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

L'ensemble des matrices inversibles est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

7 Méthodes de calcul du déterminant

Théorème 1

1. Un déterminant ayant deux colonnes (resp. lignes) identiques est nul.
2. Un déterminant qui a une colonne (resp. ligne) combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) est nul.
3. Un déterminant dont une colonne (resp. ligne) est formée de 0 est nul.
4. On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne (resp. ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).
5. Si on permute deux colonnes (resp. lignes) d'un déterminant, le déterminant est multiplié par -1.
6. Si on multiplie une colonne (resp. ligne) par un scalaire λ, on multiplie le déterminant par λ.

Ce théorème peut s'écrire, en remplaçant la matrice A par l'écriture en colonne $(C_1, \cdots, C_n)$

1. $\det(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_i, \cdots, C_n) = 0$,
2. $\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k C_k, C_{i+1}, \cdots, C_n) = 0$, où $\lambda_k \in \mathbb{K}$,
3. $\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, 0_{\mathbb{K}^n}, C_{i+1}, \cdots, C_n) = 0$,
4. $\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k C_k, C_{i+1}, \cdots, C_n) = \det(C_1, \cdots, C_n)$,
5. $\det(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_j, \cdots, C_n) = -\det(C_1, \cdots, C_j, \cdots, C_i, \cdots, C_n)$,
6. $\det(C_1, \cdots, \lambda C_i, \cdots, C_n) = \lambda \det(C_1, \cdots, C_n)$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

8 Déterminant par blocs

Proposition 3

Si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, alors

$$\det(M) = \det(A)\det(C).$$

En particulier, $\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \times & \cdots & \times & \alpha \end{array}\right) = \alpha \det(A)$, où $\alpha \in \mathbb{K}$.

9 Déterminant de quelques matrices particulières

9.1 Matrice diagonale

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, c'est-à-dire,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

alors

$$\det(D) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

9.2 Matrice triangulaire supérieure

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire,

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

alors

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

9.3 Matrice triangulaire inférieure

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure, c'est-à-dire,

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

alors

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$