

TD 2 Expressions rationnelles

Version du 22 juillet 2022

Exercice 1 – Opérateurs basiques

Dans cet exercice nous ne considérons que les opérateurs basiques suivants :

- le choix ($e_1 + e_2$)
- la concaténation ($e_1 e_2$)
- la répétition (e^*)

On pourra omettre les parenthèses superflues en respectant les priorités classiques de ces opérateurs (répétition plus prioritaire que la concaténation elle-même plus prioritaire que le choix).

Soit $\Sigma = \{-, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$. Proposez des expressions rationnelles reconnaissant les sous-langages de Σ^* qui suivent.

1. Les entiers signés en base 10. C'est-à-dire avec le « $-$ » en première position s'il apparaît, et pas de 0 en tête (sauf pour représenter 0).
2. Les nombres à virgule.
3. Les développements décimaux d'un nombre réel, comme 3.141592, -318.29 ou 42. Trois contraintes pour corser :
 - on n'acceptera pas un point qui n'est pas suivi de chiffre,
 - à nouveau la partie entière ne peut pas commencer par 0 sauf pour les nombres compris entre -1 et 1,
 - on n'acceptera pas -0 .
4. Tous les entiers naturels multiples de 20.

Exercice 2 – Sucre syntaxique

Autorisons-nous les opérateurs suivants en plus des opérateurs basiques.

- Pour une expression rationnelle e , $e^?$ est l'abréviation de $(\varepsilon + e)$.
- Pour une expression rationnelle e , e^+ est l'abréviation de ee^* .
- Pour des symboles s_1, s_2, \dots, s_n , $[s_1 s_2 \dots s_n]$ désigne l'un de ces symboles. Cet opérateur peut facilement se réécrire avec l'opérateur $+$. Par exemple si $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$, on a $[aeiou] = (a + e + i + o + u)$.
- Si les symboles de Σ sont ordonnés (par exemple les chiffres ou notre alphabet latin) $[s_1 - s_2]$ représente un symbole parmi tous ceux compris entre le symbole s_1 et le symbole s_2 (inclus). Cet opérateur peut lui aussi se réécrire, par exemple si $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$, on a $[a - e] = (a + b + c + d + e)$.

1. Simplifiez toutes les expressions de l'exercice précédent avec ces opérateurs.
 2. Avec $\Sigma = \{-, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ., e\}$, proposez une expression rationnelle reconnaissant un nombre décimal en notation scientifique, c'est-à-dire de la forme $-1.234e56$ où
 - « $-$ » est le signe, il peut être absent
 - « 1.234 » est la mantisse, comprise entre 0 et 9.99999...
 - « $e56$ » est l'exposant, il est facultatif et s'interprète comme 10^{56} . L'exposant est un nombre entier qui peut être signé, par exemple $2e-3$ représente 0.002.
- On s'autorise les 0 superflus, ainsi que -0 , vous avez compris que c'était suffisamment pénible à gérer.

Exercice 3 – Simplification et équivalences

Pour chaque entrée de la liste suivante, dites si le langage dénoté par l'expression rationnelle e est égal, inclus, contenant, ou incomparable à celui dénoté par l'expression rationnelle f pour l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Proposez des contre-exemples quand les langages sont différents.

e	f
$a^*b(ab)^*$	$a^*(bab)^*$
$a(bb)^*$	ab^*
$a(a+b)^*b$	$a^*(a+b)^*b^*$
$abc+acb$	$a(b+c)(c+b)$
a^*bc+a^*cb	$a^*(bc+a^*cb)$
$(abc+acb)^*$	$((abc)^*(acb)^*)^*$
$(abc+acb)^+$	$((abc)^*(acb)^*)^+$
$(abc+acb)^*$	$(abc(acb)^*)^*$
$(abc+acb)^*$	$(a(bc)^*(cb)^*)^*$

Exercice 4 – Intersection de langages

1. L'intersection de deux langages rationnels est-elle un langage rationnel?
2. Soient L_1 et L_2 les langages respectivement dénotés par $ab+bc^+$ et $a^*b^*c^*$. Proposez une expression rationnelle dénotant le langage $L_1L_2 \cap L_2L_1$.

Exercice 5

Parmi les langages suivants, déterminez ceux qui sont égaux.

$$(L \cup M)^* \quad (LM)^*L \quad L(LM)^* \quad (L^* \cup M)^* \quad (M^* \cup L)^* \quad (L^*M^*)^* \quad (M^*L^*)^* \quad (L^* \cup M^*)^*$$