Méthode Algèbre linéaire

1 Base ou non?

Soit F=$\{e_1, ..., e_n\}$ une famille d'un K-EV E. Pour déterminier si F est une base de E:

1. Si Dim(F)≠Dim(E), alors F n'est pas une base de E
2. Si Dim(F)=Dim(E) il faut vérifier si la famille F et libre ou génératrice.

2 Transformer une famille pour la rendre base

Soit F=$\{E_1, ..., e_p\}$ une famille d'un K-EV E de dimension n (n≠p). Dim(F)≠Dim(E) donc F n'est pas une base de E. On doit donc supprimer ou ajouter des vecteurs à la famille pour la transformer en base.

2.1 Suppression de vecteurs (p>n)

On pose l'ensemble $(a_1, ..., a_p)$∈ $\mathbb{R}^{'}$ tel que $a_1e_1 + ... + a_pe_p = 0_{\mathbb{R}^{'}}$. Le but de la résolution de ce système permet de savoir quel vecteur **ne pas** enlever.

2.2 Ajout de vecteurs

3 Matrice de passage

Exemple de matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

4 Déterminer la matrice d'une application linéaire

5 Trouver le noyau et l'image d'une matrice d'une application linéaire

6 Calculer le déterminant d'une matrice carré

Soit une A une matrice carrée de taille n $\mathcal{M}_\backslash$, avec n∈ $\mathbb{N}\{\nVdash,\nVdash\}$. Il y a deux situations possibles :

- n = 2 : on a dans ce A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, det(A) = ad-bc
- n>2 : on a donc la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On va procéder par étape successives. Pour calculer le déterminant de A, on va développer par rapport à une ligne ou une colonne. On notera Δ_{ij} la matrice A sans la ligne i ni la colonne j. Si on développe selon la i-ième ligne ou colonne, on aura :

$$det(A) = \Sigma_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}det(\Delta_{i,j})$$

Pour calculer det($\Delta_{i,j}$), il suffira de réitérer l'étape précédente en posant $\Delta_{i,j}$ = A' par exemple.

Pour calculer un déterminant, on pourra se servir des propriétés suivantes : (on pose A,B$\in \mathcal{M}_\backslash(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$)

- det(λA) = λ^ndet(A)
- det(AB) = det(A)det(B)
- det()
- Si une ligne/colonne est une combinaison linéaire d'autres lignes/colonnes de la matrice, alors son déterminant est nul
- Si une ligne/colonne est composée uniquement de 0, son déterminant est nul
- Si on permute 2 lignes/colonnes, le déterminant est multiplié par -1
- Si on multiplie une ligne/colonne par un scalaire λ, alors son déterminant est aussi multiplié par λ

7 Trouver les valeurs et vecteurs propres d'une matrice

Tout d'abord, soient A une matrice carré de taille n, un vecteur colonne v de taille n et un scalaire λ, on dit que v/λ est un vecteur/valeur propre de A ssi :

$$Av = \lambda v$$

7.1 Déterminer les vecteurs propres à partir d'une valeur propre λ:

L'ensemble des vecteurs propres de A par la valeur propre λ est :

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^\ltimes \| Av = \lambda v\} = Ker(A - \lambda I_n)$$

On cherche donc l'ensemble des vecteurs v tel que :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & ... & a_{1,n} \\ \vdots & a_{i,j} - \lambda & \vdots \\ a_{n,1} & ... & a_{n,n} - \lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui va nous amener à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,n}x_n = 0 \end{cases}$$

8 Les projecteurs