Correction TD1 Physique quantique

Exercice de cours : Catastrophe ultraviolette

Le corps noir est l'objet théorique suivant : il absorbe parfaitement la totalité de l'énergie électromagnétique qu'il reçoit et, atteignant l'équilibre thermique à une température T, la restitue entièrement sous forme d'un rayonnement thermique constitué d'un spectre de longueurs d'onde λ, rayonnées chacune à une intensité, donnée par la fonction u(λ, T), appelée densité spectrale d'énergie.

La thermodynamique classique a proposé de décrire le rayonnement du corps noir en considérant les molécules comme de petits oscillateurs, rayonnant chacun une énergie E avec une certaine probabilité. La physique classique propose que l'énergie rayonnée E prend ses valeurs dans $[0;+\infty]$; des valeurs donc continues. On note <E> l'énergie moyenne d'un oscillateur.

Partie 1 : Descritpion par la loi de Rayleigh-Jeans (Énergie continue)

Dans le cadre de la thermodynamique classique, la loi de Rayleigh-Jeans aboutit à l'expression suivante pour la densité spectrale d'énergie:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi}{c\lambda^2}$$

- u: densité spectrale (W·m^3)
- c: célérité de la lumière dans le vide (3×10^8m·s−1)

L'énergie moyenne <E> d'un oscillateur se calcule de la manière suivante:

$$\langle E\rangle = \frac{\int_0^{+\infty} Ee^{-\frac{E}{k_BT}}dE}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{E}{k_BT}}dE}$$

- k_B: constante thermodynamique
- T : température du rayonnement

Le numérateur représente l'intégrale de la densité de probabilité de l'énergie E, et le dénominateur permet de normaliser le résultat.

1. Montrer que le terme $\langle E \rangle$ a pour valeur $k_B T$, en utilisant une intégration par parties.
   Posons Nm et D tel que $\langle E \rangle = \frac{Nm}{D}$

$$D = \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE = [-k_B T \times e^{-\frac{E}{k_B T}}]_0^{\infty} = -k_B T(0-1) = k_B T$$

Nm

Nm

Donc $\langle E \rangle = \frac{Nm}{D} = \frac{(k_B T)^2}{k_B T} = k_B$T

L'énergie totale du rayonnement émis par le corps noir est donnée par l'intégration de la densité d'énergie sur toutes les longueurs d'ondes:

$$U(\lambda, T) = \int_0^{+\infty} u(\lambda, T) d\lambda$$

U(λ,T) est l'intensité rayonnée par le corps noir (en W·m^2)

2. Expliquer à partir de cette intégrale pourquoi la loi de Rayleigh-Jeans a marqué un tournant nommé "Catastrophe ultraviolette".

$\Longrightarrow \lambda \to 0 \Longrightarrow$ U(λ,T) diverge.

Partie 2: Descritpion par la loi de Planck (Énergie discontinue)
Nous allons maintenant nous intéresser à la loi de Planck, qui a proposé de corriger la loi de Rayleigh-Jeans en introduisant la quantification de l'énergie du système corps noir : le terme <E> est alors calculé en supposant que l'énergie E d'un oscillateur ne peut prendre qu'un nombre discret de valeurs, multiples d'une énergie E_0.

3. Réécrire la relation donnant $\langle E \rangle$ dans ces conditions.
   Proposition de Max-Planck: E = nE_0 (quantificateur de l'énergie) qui corrige la divergence de la densité spectrale u(λ,T) pour les faibles longueurs d'ondes (UV).
$$\langle E \rangle = \frac{\Sigma_{n=0}^{+\infty} E_0 \times e^{-\frac{E_0}{k_B T}}}{\Sigma_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{E_0}{k_B T}}}$$

4. Calculer ce terme, en utilisant un résultat sur les suites géométriques au numérateur, puis en remarquant un lien de dérivation entre le dénominateur et le numérateur.
   Calcul de ⟨E⟩:
$$\langle E \rangle = \frac{\Sigma_{n=0}^{+\infty} E_0 \times e^{-\frac{E_0}{k_B T}}}{\Sigma_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{E_0}{k_B T}}} = \frac{Nm}{D}$$

   D

   $D = 1\frac{}{1-e^{-}}$

   On a donc $E = \frac{Nm}{D} = E_0 e^{-}$

$\frac{}{(1-e^{-\frac{E_0}{k_B T}})^2} \frac{}{\frac{1}{1-e^{-}}}$

On obtient donc la densité spectrale d'énergie suivante :

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi}{c\lambda^2} < E >= \frac{8\pi}{c\lambda^2} \times \frac{E_0}{e^{\frac{E_0}{k_B T}} - 1}$$

avec E_0 un quanta (plus petite quantité indivisible d'énergie)
Pour corriger la loi de R-J, il faut corriger la divergence u(λ,T) pour les petites longueurs d'ondes.
Justifier la proposition de Planck: $E_0 = \frac{hc}{\lambda}$ avec h la constante de Planck.

catastrophe_ultraviolette.png

Figure 1: Spectre du rayonnement du corps noir (intensité du rayonnement en fonction de la longueur d'onde) pour des températures données (couleurs : modèle de Planck ; noir : modèle de Rayleigh-Jeans)

Remarques:Avec la loi de Planck, l'on trouve une énergie totale rayonnée $U(T)\alpha T^4$ *, ce qui est en accord avec les observations, et revient à la loi de Stefan-Boltzman, antérieure à la catastrophe ultraviolette.*