1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 1

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. On dit que λ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur v dans $\mathbb{K}^n$ non nul, tel que $Av = \lambda v$.
2. Le vecteur v est dit **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
3. L'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$ s'appelle le **spectre** de A dans $\mathbb{K}$, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Remarque 1

Un vecteur propre, par définition, est non nul. En revanche, une valeur propre peut être nulle.

2 Sous-espace propre

Définition 2

Soit λ une valeur propre de A. Alors

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n | Av = \lambda v\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, appelé **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ.

Définition 3

Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ est **stable** (ou A-stable) par A si, pour tout v dans F, $Av \in F$. On écrit $AF \subset F$.

Proposition 1

Un espace propre d'une matrice A est stable par A.

3 Somme directe de sous-espaces

Définition 4

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $F_1, F_2, \ldots, F_p$, p sous-espaces vectoriels de E.

– La partie de E, notée $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$, définie par

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_p = \Big\{v_1 + v_2 + \ldots + v_p |\ \forall i \in \{1, \ldots, p\}, \quad v_i \in F_i\Big\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, appelé somme des sous-espaces F_i.

– La somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est dite **directe** si la décomposition de tout vecteur v dans $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est **unique**, c'est-à-dire si

$$\forall v \in F_1 + \ldots + F_p,\ \exists! (v_1, \ldots, v_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p,\ v = v_1 + \ldots + v_p.$$

Notation : la somme directe des sous-espaces $F_1, F_2, \ldots, F_p$ est notée

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p.$$

Proposition 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, F_2 \ldots, F_p$ de E est directe si et seulement si, on a la propriété

$$\forall (v_1, \ldots, v_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p, \quad v_1 + \ldots + v_p = 0_E \implies \forall i \in \{1, \ldots, p\},\ v_i = 0_E.$$

Théorème 1

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes deux à deux d'une matrice carrée A. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

4 Polynômes annulateurs

Définition 5

Soit $P \in \mathbb{K}_p[X]$, qu'on écrit $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_p X^p$. Le polynôme $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_p A^p$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de A, si

$$P(A) = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

On écrit par abus $P(A) = 0$.