1 Exercice 1

Sur une étagère se trouvent 7 livres différents : 4 livres de mathématiques, 1 livre de philosophie et 2 livres de cuisine.
On choisit 2 livres de l'étagère.

1. Combien de choix y a-t-il ?
   L'ordre n'est pas important donc il y a 2 parmi 7 permutations possibles : $\frac{7!}{2!(7-2!)} = 21$ (Je lui laisse le raisonnement et la rédaction à faire)

2. Combien y a-t-il de choix avec 1 livre de mathématiques et 1 autre livre, choisi en dehors des Mathématiques ?
   Pour chaque livre de maths, il n'y a que 3 possibilités : philo/cuisine A, philo/cuisine B et cuisine A/cuisine B. Il y a 4 livres de maths, il y a donc $4\times3 = 12$ possibilités.

2 Exercice 2

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n^4-3n^2+1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n} \frac{1+\frac{1}{2n}}{\frac{n^3}{2}-\frac{3n}{2}+\frac{1}{2n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{2n}}{\frac{n^3}{2}-\frac{3n}{2}+\frac{1}{2n}} \\
&\text{or } \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{2}-\frac{3n}{2}+\frac{1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{2} = +\infty \\
&\implies \text{par quotient de limite (pas sûr de cette formulation) : } \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n^4-3n^2+1} = 0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right)^n &: \forall n \in \mathbb{N}, 3 < 3+\frac{1}{n} \leq 4 \text{ (je ne sais pas si elle doit expliquer pourquoi plus en détail) (la compa} \\
&\text{or } \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \\
&\implies \text{par théorème de comparaison : } \lim_{n\to+\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right)^n = +\infty
\end{aligned}$$

3 Exercice 3

1. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, n<50.
   Je la laisse faire la partie rédaction.

   - Initialisation (n=0) : $u_0 = 5 < 50$
   - Récurrence : on suppose la propriété vrai à un rang k, k$\in \mathbb{N}$.

   $$\begin{aligned} u_k < 50 &\iff 0.8u_k < 40 \ (40 = 50 \times 0.8) \\ &\iff 0.8u_k + 10 < 50 \\ &\iff u_{k+1} < 50 \end{aligned}$$

2. En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante.
   (C'est toujours la question avec laquelle j'ai du mal, je vais essayer de retrouver comme avoir la réponse.)

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente .
   La suite est strictement croissante (question précédente) et majorée (question 1) donc (u_n) est convergente.

4 Exercice 4

1. Calculer f'(x) pour tout x de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x - x)' \\ &= (e^x)' - (x') \text{ en dérivant par rapport à x on obtient :} \\ &= e^x - 1 \end{aligned}$$

2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ et en déduire que pour tout réel x : f(x)≥1.
Pour dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$, on passe par le tableau de signe de f' : $e^x - 1 < 0 \iff e^x < 1 \iff x < 0$. f'(x) est donc négative pour tout x<0 et positive pour tout x>0.
En résumé : si x<0, f'(x)<0 donc f(x) décroissante et si x>0, f'(x)>0 donc f(x) croissante.

3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = e^{u_n}$

   - (a)Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}, u_n \geq n$.
     Je la laisse se charger de la rédaction complète.
     - Initialisation (n=0) : $u_0 = 0 \iff u_0 \geq 0$
     - Hérédité : on suppose la propriété vraie à un rang réel k.

     $$\begin{aligned} u_k \geq k \iff e^{u^k} \geq e^k & \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ & \text{or, pour tout entier naturel k, } e^k \geq k+1 \text{ (cas extrême k=0 et exp(0)=1=0+1) donc} \\ & \implies e^{u_k} \geq k+1 \\ & u_{k+1} \geq k+1 \end{aligned}$$

   - (b)En déduire que la suite (u_n) est divergente.
     On a montré à la question 3.a que pour tout entier naturel n, $(u_n) \geq n$, or n diverge en $+\infty$. Par thèorème de comparaison, la suite (u_n) diverge.