TIES411 Konenäkö ja kuva-analyysi

Tuomo Rossi ja Matti Eskelinen

Kevät 2017

Näytteistetyn signaalin integrointi

- Diracin δ auttaa muodostamaan integroituvan mallin näytteistetyistä signaaleista
- Intuitiivisesti integraali yli koko signaalin on näytepisteiden arvojen summa
- Integroituva signaali muodostuu summana siirrettyjä δ-olioita

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

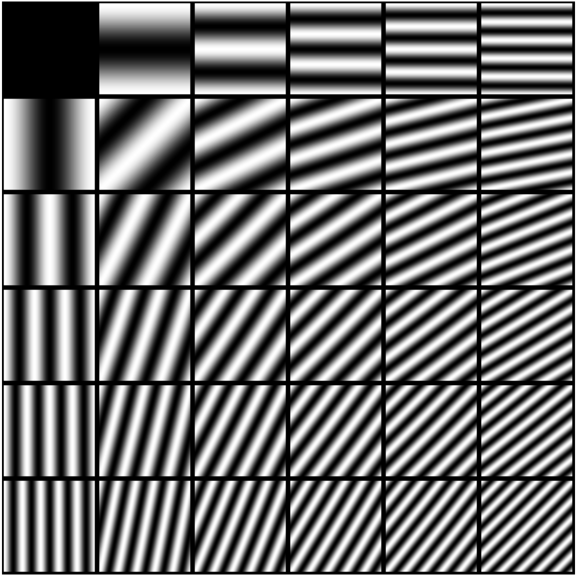
Kuvat vektoreina ja kannanvaihdot

- Aiemmin kuvailtiin kuvien *vektorimuoto*
- Kuvien kantavektorit vastaavat yksittäisiä pikseleitä
- Lineaarialgebrasta on tuttua ajatus *kannanvaihdosta*
- Yleensä tavoitteena esittää vektorit “hyödyllisemmässä” muodossa

Fourier-muunnos kannanvaihtona

- Ajatellaan siniaaltojen muodostamia kantavektoreita
- Kannanvaihto tällaiseen kantaan tuottaa tietoa kuvassa tapahtuvista *säännöllisistä muutoksista*
- Tällainen kannanvaihto voidaan tehdä *Fourier-muunnoksen* avulla
- Voidaan tehdä *mille tahansa signaalille*

Fourier-kantavektoreita



Kuva 1: Fourier-kantavektoreita

Yksiulotteinen Fourier-muunnos

- Voimassa integroituvalle funktiolle

$$F(g(x))(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi ux} dx.$$

- Huom: eksponenttilauseke on Eulerin kaava

Eulerin kaava

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= cosx + isinx \\
e^{-ix} &= cos(-x) + isin(-x) = cosx - isinx \\
&\Rightarrow e^{-i2\pi ux} = cos(2\pi ux) - isin(2\pi ux).
\end{aligned}
$$

Nämä ovat kompleksilukuja!

Diskreetti Fourier-muunnos

$$F\left(x\left(n\right)\right)\left(u\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x\left(n\right) \cdot e^{-i2\pi \frac{un}{N}}, u \in \mathbb{Z}.$$

Huom: signaali oletetaan periodiseksi.

Eulerin kaavan avulla

$$F\left(x\left(n\right)\right)\left(u\right) = \sum_{n=0}^{N-1}\left(x\left(n\right)\cdot\cos\left(2\pi\left(\frac{un}{N}\right)\right) - i\cdot x\left(n\right)\cdot\sin\left(2\pi\left(\frac{un}{N}\right)\right)\right)$$

Näitä lukuja $F\left(x\left(n\right)\right)\left(u\right)$ kutsutaan Fourier-kertoimiksi.

Käänteinen Fourier-muunnos

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(x(n))(u) \cdot e^{i2\pi \frac{un}{N}}, n \in \mathbb{Z}.$$

Eulerin kaavan avulla

$$x(n) = \sum_{u=0}^{N-1} Re\left(F\left(x\left(n\right)\right)\left(u\right)\right) \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{un}{N}\right)\right) - Im\left(F\left(x\left(n\right)\right)\left(u\right)\right) \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{un}{N}\right)\right).$$

Lopputulos on reaalinen, joten imaginaariosa voidaan olettaa nollaksi.

Kaksiulotteinen Fourier-muunnos

$$F\left(g\left(x,y\right)\right)\left(u,v\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x,y\right)\cdot e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy.$$

Nämä ovat sinitasoaaltoja eli *spatiaalisia taajuuskomponentteja*.

Kaksiulotteinen diskreetti Fourier-muunnos

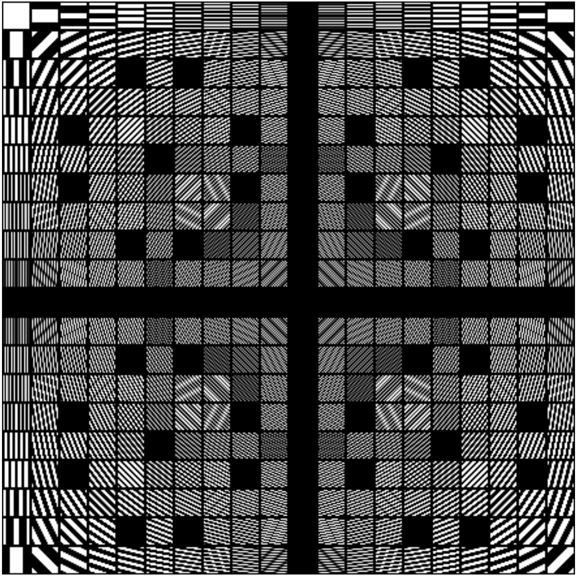
$$
\begin{aligned}
F\left(I\left(x,y\right)\right)\left(u,v\right) &= \sum_{x=0}^{W-1} e^{-i2\pi\frac{ux}{W}} \cdot \left(\sum_{y=0}^{H-1} e^{-i2\pi\frac{vy}{H}} \cdot I\left(x,y\right)\right) \\
&= \sum_{x=0}^{W-1}\sum_{y=0}^{H-1} I\left(x,y\right) \cdot e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{W}+\frac{vy}{H}\right)}.
\end{aligned}
$$

Tuloksena on kompleksiarvoinen kuva, joka on samankokoinen kuin alkuperäinen.

Käänteismuunnos

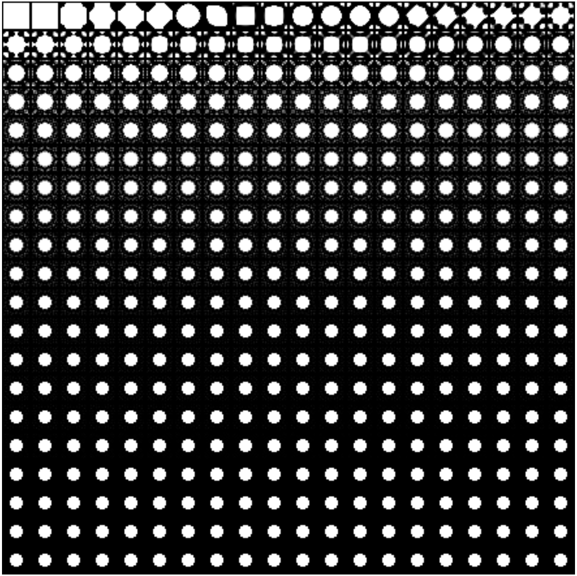
$$I(x,y) = \frac{1}{N * M} \sum_{u=0}^{W-1} \sum_{v=0}^{H-1} F(I(x,y))(u,v) \cdot e^{+i2\pi\left(\frac{ux}{W}+\frac{vy}{H}\right)}.$$

Fourier-kanta pienelle kuvalle



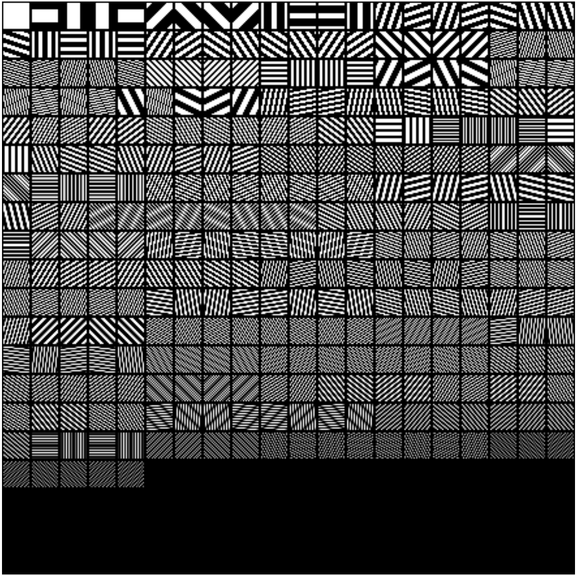
Kuva 2: Fourier-kanta

Taajuuskomponenttien vaikutus



Kuva 3: Taajuuskomponenttien vaikutus

Taajuuskomponenttien järjestys



Kuva 4: Taajuuskomponenttien järjestys

Fast Fourier Transform

- Fourier-muunnos saadaan laskemalla jokaista kerrointa ('pikseliä') kohti painotettu summa kaikista kuvan pikseleistä
- Aikavaativuus on siis $O(N^2)$ kun pikselien määrä on N
- FFT eli *Fast Fourier Transform* suoriutuu ajassa $O(N \log N)$ jakamalla ongelmaa pienempiin osiin
- Vähemmän laskutoimituksia, joten numeeriset pyöristysvirheet kertautuvat vähemmän

Konvoluutioteoreema

- Käytännön hyötyä Fourier-muunnoksesta:

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$$

- Konvoluutio muuttuu taajuustasossa *kertolaskuksi*
- Hyödyllistä, kun suodinmaski on suuri!

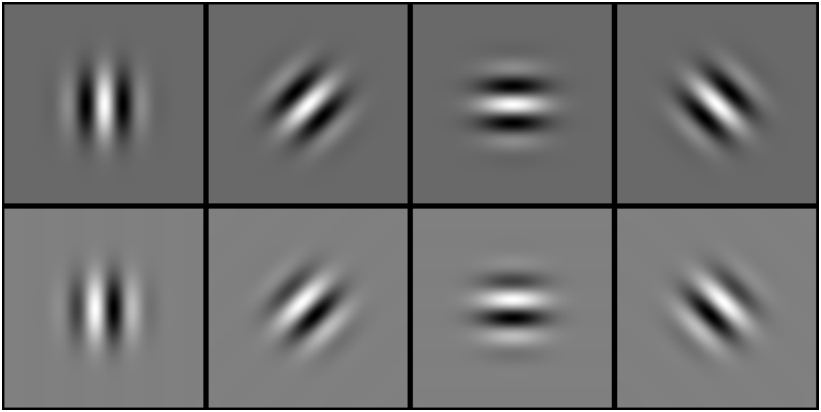
Paikallinen taajuusinformaatio

- Fourier-muunnos tuottaa globaalia tietoa kuvasta
- Käyttämällä *ikkunointifunktiota* saadaan paikallisempaa informaatiota
- Ongelmaksi tulee epätarkkuusperiaate - tarkkuus kärsii joko taajuuden tai paikan/ajan suhteen

Gaborin suotimet

- Suodinmaskeja, joilla konvolvoidaan kuvaa
- Sinitasoaaltoja, jota ikkunoidaan Gaussin funktiolla
- Reaali- ja kompleksiosa, eräänlaisia paikallisia Fourier-muunnoksia
- Muistuttaa ihmisen näköaivokuoren signaalille tekemää muunnosta

Gabor-maskit



Kuva 5: Gabor-maskit