TAREA_1

November 15, 2020

[1]:
```julia
using PyPlot # Este es el paquete que uso para graficar
```

0.1 Euler

Mi Euler va a calcular la solucion desde $x = 0$ hasta $x = 1$, por simplicidad (para calcular la convergencia del método y estudiar los errores).

Entonces mi tamaño de paso va a ser $h = \frac{1}{N}$, N es el número de pasos.

El intervalo $[0, 1]$ va a estar dividido en N partes iguales. Podemos llamar a cada uno de estos puntos $j = 0, 1, 2, ..., N$. El punto $j = 0$ va a ser el punto $x = 0$. En este punto conocemos la solución y, va ser $y(t_0) = y_0$, la condición inicial.

El objetivo va a ser calcular la solución en los otros puntos $j = 1, 2, ..., N$

[2]:
```julia
function Euler(f, t0, y0, N) #mi función se llama Euler, le doy como entradas␣
↪función, tiempo inic., condición inicial y número de pasos
    h=1/N  #Definiendo h así, estoy diciendo que el intervalo de solucion va a␣
↪ser [0,1]
    ts = Float64[] #Arreglos de tiempos y de solucion aprox. Son arreglos vacíos
    ys = Float64[]
    t_actual = t0 #Como primer dato le doy el tiempo inicial
    y_actual = y0 #doy como primer dato la condición inicial evaluada en el␣
↪tiempo inicial (un nuúmero)
    push!(ts, t_actual) #Empujo mi primer dato al arreglo de los tiempos (que␣
↪antes de hacer esto estaba vacío)
    push!(ys, y_actual) #Empujo mi primer dato al arreglo de las soluciones␣
↪aprox (que antes de hacer esto estaba vacío)
    for j in 1:N # voy a hacer exactamente lo mismo en los puntos que en los␣
↪que NO CONOZCO LA SOLUCIÓN
        t_nueva = t_actual + h #actualizo el tiempo, le sumo un h
        y_nueva = y_actual + f(t_actual, y_actual)*h #Calculo la aproximación a␣
↪la solución (EN ESTA PARTE USO EULER)
        push!(ts, t_nueva) #empujo los nuevos datos (tiempos y solucion aprox)␣
↪a los arreglos
        push!(ys, y_nueva)
        t_actual = t_nueva #actualizo los datos para volver a empezar el ciclo
        y_actual = y_nueva
    end
```

```
    ts, ys #al final devuelve 2 arreglos, los tiempos y la solución en estos␣
  ↪tiempos
end
```

[2]: Euler (generic function with 1 method)

Defino mi función de prueba f, con esta voy a trabajar

[3]:
```
f(t, y) = 2y -1 #esta es mi función de prueba
```

[3]: f (generic function with 1 method)

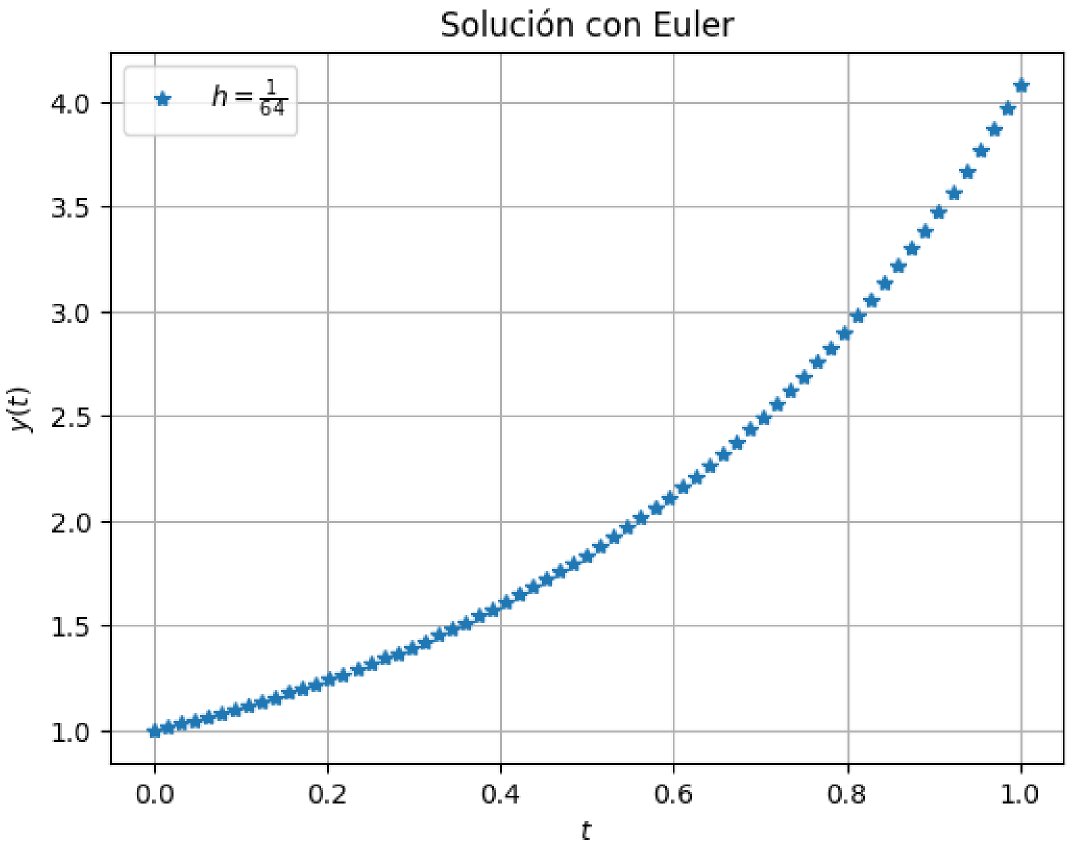
0.2 Gráfica de la solución aproximada (obtenida por Euler)

[4]:
```
Datos = Euler(f, 0, 1, 2^6) #Aplico mi función Euler al punto t0 = 0, y0 = 1.␣
  ↪El resultado lo guardo en el arreglo Datos
```

[4]:
```
([0.0, 0.015625, 0.03125, 0.046875, 0.0625, 0.078125, 0.09375, 0.109375, 0.125,
0.140625  …  0.859375, 0.875, 0.890625, 0.90625, 0.921875, 0.9375, 0.953125,
0.96875, 0.984375, 1.0], [1.0, 1.015625, 1.03173828125, 1.0483551025390625,
1.0654911994934082, 1.0831627994775772, 1.1013866369612515, 1.1201799693662906,
1.1395605934089872, 1.159546861953018  …  3.2163635240291315, 3.301249884155042,
3.388788943034887, 3.479063597504727, 3.57215933492675, 3.668164314143211,
3.7671694489601864, 3.8692684942401923, 3.974558134685198, 4.0831380763941105])
```

[5]:
```
plot(Datos[1], Datos[2], "*", label=L"h=\frac{1}{64}")
title("Solución con Euler")
xlabel(L"t")
ylabel(L"y(t)")
legend()
grid("on");
```

[5]:



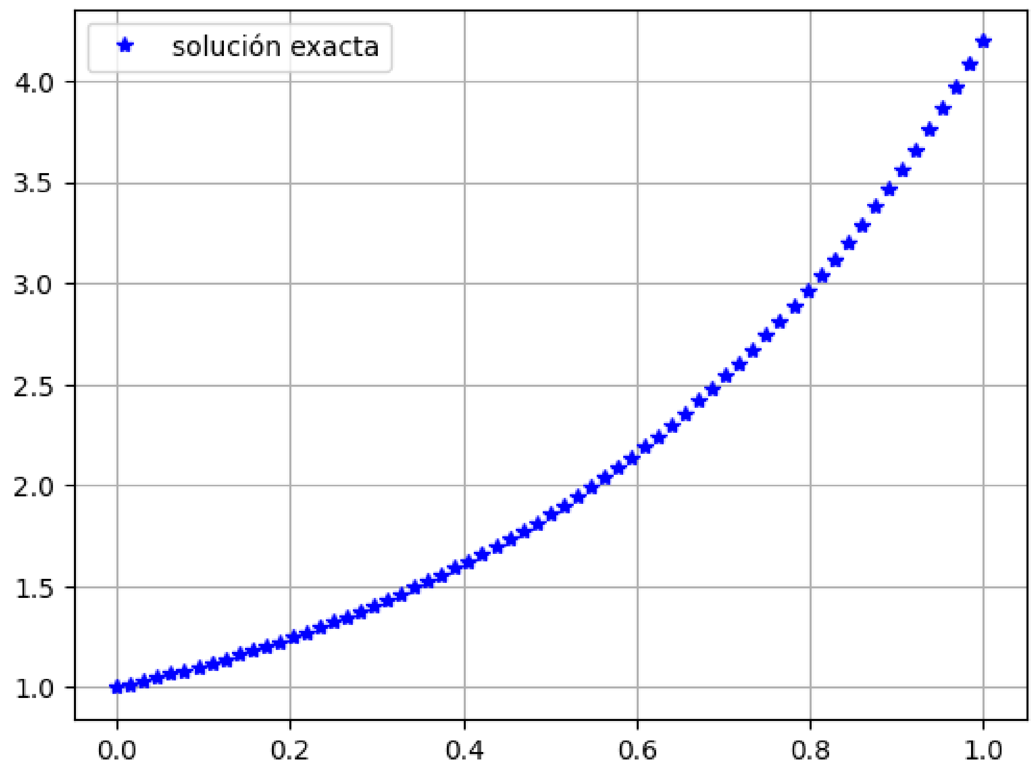
0.3 Solución Exacta

Vamos a graficar la solución exacta (que se obtiene por separación de variables).

[6]:
```
N = 64
us = range(0, stop=1, length=N+1) #Aquí length es el número total de puntos␣
 ↪j=0,1,2,...,N (SON N+1 PUNTOS)
vs = [0.5 + 0.5*exp(2x) for x in us];
```

[7]:
```
plot(us, vs, "b*", label="solución exacta")
grid("on")
legend();
```

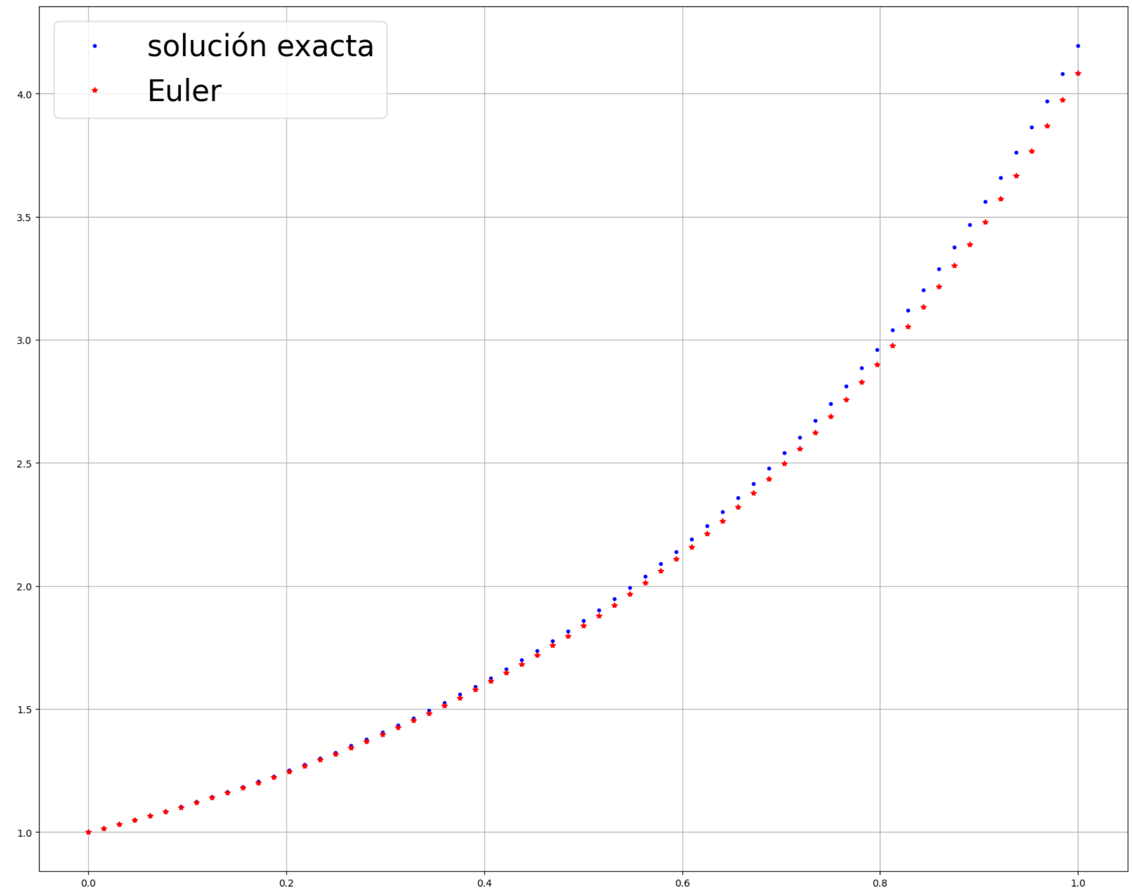
[7]:



0.4 Comparaciones

[8]:
```
figure(figsize=(20, 16))
plot(us, vs, "b.", label = "solución exacta")
plot(Datos[1], Datos[2], "*r", label = "Euler")
legend(fontsize=30)
grid("on");
```

[8]:



0.5 Error vs tamaño de pasos (o número)

El tamaño del error en el Método de Euler para un problema de valor inicial está en proporción al tamaño de paso, o en otras palabras, es inversamente proporcional al numero de pasos que usamos sobre un intervalo fijo.

Es decir

$$error \leq C(h)^1$$

Que de hecho, se escribe

$$error = O(h) \quad \text{como} \quad N \to \infty$$

Nótese que la potencia de h es uno. Decimos que el método de Euler es de orden uno.

0.5.1 Comparaciones para checar que el método de Euler es de orden uno.

En este punto tengo que escoger una norma para comparar, puedo elegir por ejemplo el máximo sobre **cada punto** el intervalo $x \in [0, 1]$

Pero voy a elegir como norma **la diferencia entre la solución exacta y la solución por Euler al tiempo** $t = 1$

Entonces voy a crear una función `Euler2`, que solo me devuelve el punto $y(1)$. `Euler2` solo va a depender del número N en que dividí el intervalo.

También hago una función que calcule la solución exacta en el intervalo $[0, 1]$ usando $N + 1$ puntos. (Dividí al intervalo en N partes iguales). El punto 1 va a ser $x = 0$, el punto $N + 1$ va a ser $x = 1$. Pero solo nos interesa la solución en el punto $x = 1$

[9]:
```
function Euler2(f, t0, y0, N)
    h=1/N
    ts = Float64[]
    ys = Float64[]
    t_actual = t0
    y_actual = y0
    push!(ts, t_actual)
    push!(ys, y_actual)
    for j in 1:N
        t_nueva = t_actual + h
        y_nueva = y_actual + f(t_actual, y_actual)*h
        push!(ts, t_nueva)
        push!(ys, y_nueva)
        t_actual = t_nueva
        y_actual = y_nueva
    end
    m = length(ys)
    ys[m]
end
```

[9]:
```
Euler2 (generic function with 1 method)
```

[10]:
```
function solucion_exacta(N)
    us = range(0, stop=1, length=N+1) #Aquí length es el número total de puntos␣
 ↪j=0,1,2,...,N (SON N+1 PUNTOS)
    vs = [0.5 + 0.5*exp(2x) for x in us]
    m = length(vs)
    vs[m]
end
```

[10]:
```
solucion_exacta (generic function with 1 method)
```

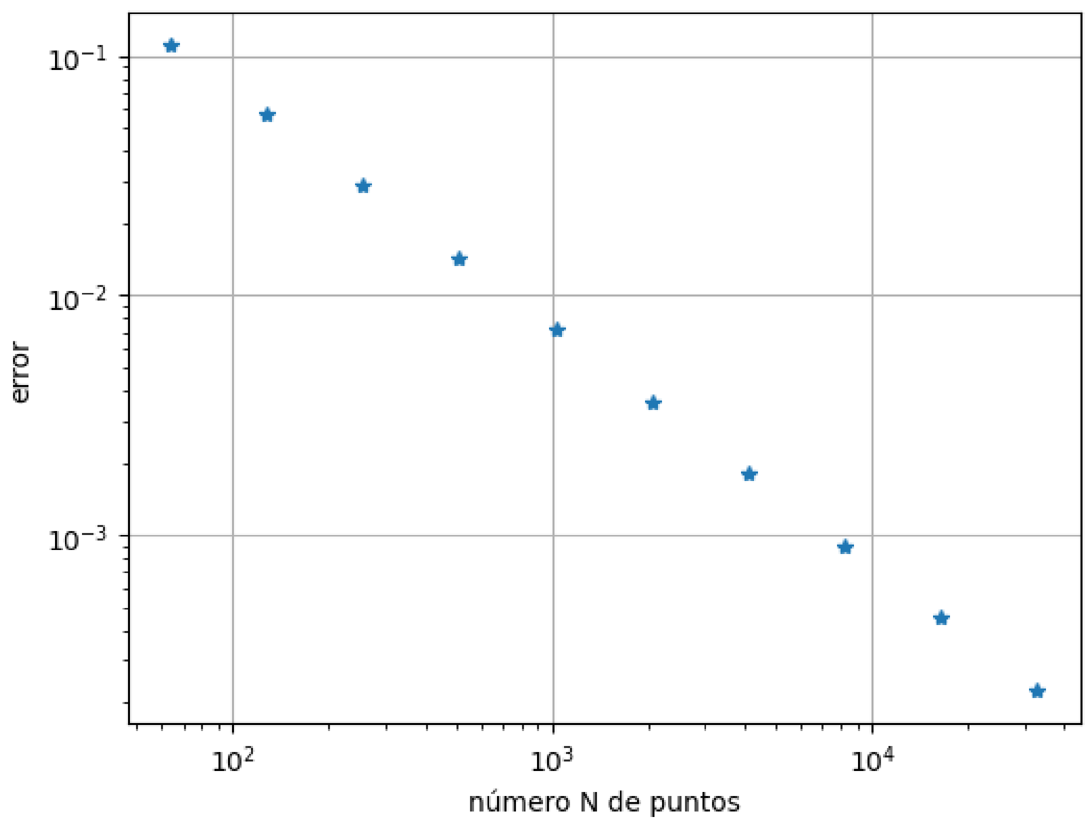
[11]:
```
NS = [2^x for x in 6:15]
ΔS = [abs(Euler2(f, 0, 1, x) - solucion_exacta(x)) for x in NS]
```

[11]:
```
10-element Array{Float64,1}:
 0.11138997307121468
 0.05669315290111676
 0.02860275009480251
 0.0143662728306726
 0.007199469294396188
```

```
0.003603831525062162
0.0018029416958302846
0.0009017275458775842
0.00045092797429280296
0.00022548004089184566
```

[12]:
```
plot(NS, ΔS, "*")
xscale("log")
yscale("log")
xlabel("número N de puntos")
ylabel("error")
grid("on");
```

[12]:



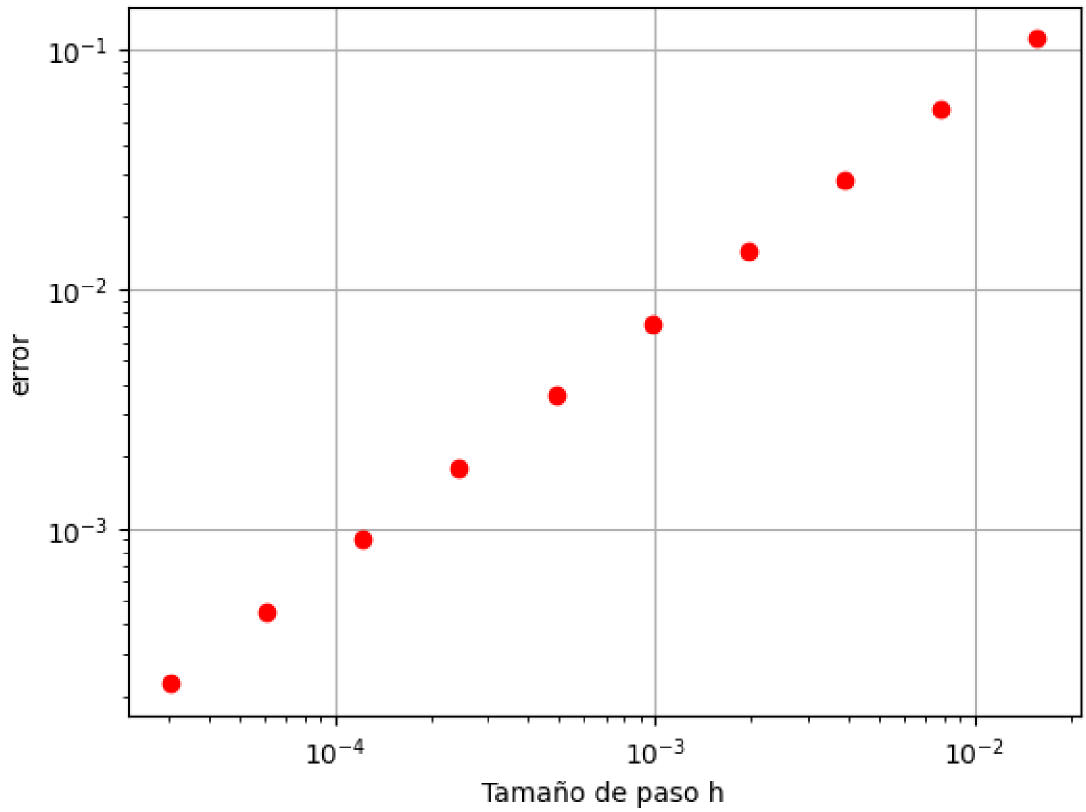
[13]:
```
HS = [1/(2^x) for x in 6:15]
ERROR = [abs(Euler2(f, 0, 1, x) - solucion_exacta(x)) for x in NS]
```

[13]:
```
10-element Array{Float64,1}:
 0.11138997307121468
 0.05669315290111676
 0.02860275009480251
 0.0143662728306726
```

```
0.007199469294396188
0.003603831525062162
0.0018029416958302846
0.0009017275458775842
0.00045092797429280296
0.0002254800408918456
```

[14]:
```
plot(HS, ERROR, "ro")
xscale("log")
yscale("log")
xlabel("Tamaño de paso h")
ylabel("error")
grid("on");
```

[14]:



0.6 Conclusión.

Vemos que la gráfica (con escala logarítmica) de los errores (en el punto $x = 1$) es una función lineal, así que el método de Euler es de orden uno.

vemos que el error está arbitrariamente cerca de cero como aumentamos el número de pasos N