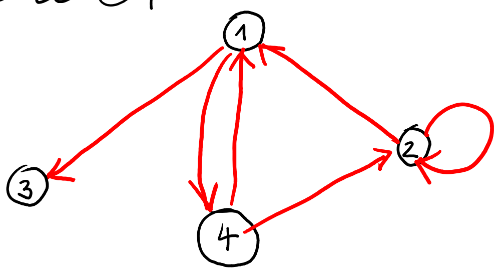
Grundbegriffe

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar (V,E). Dabei ist

V eine endliche Menge. Die Elemente heißen **Knoten** (Vertices)

$E \subseteq V^2$, die Elemente heißen **Kanten**. (Edges)

Beispiel G1



$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{(1,3), (4,1), (2,1), (4,2), (1,4), (2,2)\}$$

Ein **ungerichteter Graph** ist ein Paar (V,E). Dabei ist

V eine endliche Menge.
Die Elemente von V heißen **Knoten**.

$$E \subset \{\{x,y\} : x,y \in V \quad x \neq y\}$$

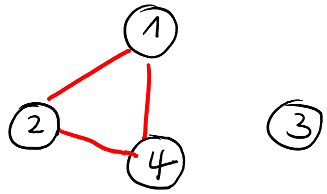
Die Elemente von E heißen **Kanten**.

$$\{1,2\} = \{2,1\}$$

$$(1,2) \neq (2,1)$$

Beispiel G2

Beispiel G2



$\{1,2\} = \{2,1\}$
$(1,2) \neq (2,1)$

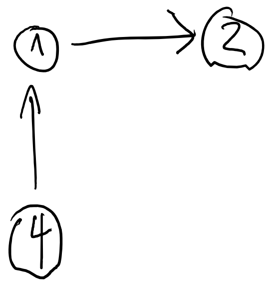
$V = \{1, 2, 3, 4\}$. $E = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}$.

Die Kante $(1,3)$ in Beispiel G1 ist für den Knoten 1 **ausgehend** und für den Knoten 3 **eingehend**. In ungerichteten Graphen ist "ausgehend" und "eingehend" dasselbe.

Ein **Pfad** in G ist eine Folge von Knoten $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ in G mit der Eigenschaft, dass

$$\left.\begin{cases} (v_{i-1}, v_i) \in E \\ \{v_{i-1}, v_i\} \in E \end{cases}\right\} \text{für } 1 \le i \le k \quad \begin{cases} \text{falls G gerichtet,} \\ \text{falls G ungerichtet.} \end{cases}$$

Hierbei ist **k** die **Länge** des Pfades.



$(4, 1, 2)$
$(4, 1) \in E$
$(1, 2) \in E$

Der Pfad heißt **einfach**, wenn die Knoten im Pfad paarweise verschieden sind. Der Knoten v ist vom Knoten u **erreichbar** wenn es einen Pfad $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ in G gibt mit $v_0 = u$

und $v_k = v$.
In einem ungerichteten Graphen heißen zwei Knoten **verbunden**, wenn der eine Knoten vom anderen erreichbar ist.

Ein **Teilpfad** von $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ ist eine zusammenhängende Teilfolge $\langle v_i, \dots, v_j \rangle$.

Ein Pfad $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ in einem gerichteten Graph heißt **Zyklus**, wenn seine Länge ≥ 1 ist und $v_0 = v_k$.
Der Zyklus ist **einfach**, wenn die Knoten $v_1, \dots, v_k$ paarweise verschieden sind.

Ein Pfad $(v_0, \dots, v_k)$ in einem ungerichteten Graph heißt **Zyklus** wenn $k \geq 3$, $v_0 = v_k$ und die Knoten $v_1, \dots, v_k$ paarweise verschieden sind.

Ein Graph ohne Zyklen heißt **azyklisch**.

Ein ungerichteter Graph G heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Knoten in G durch einen Pfad verbunden sind.

"verbunden" ist eine Äquivalenzrelation. (Übung!). Die Äquivalenzklassen heißen **Zusammenhangskomponenten**.

Ein gerichteter Graph heißt **stark zusammenhängend**, wenn je zwei Knoten voneinander erreichbar sind.

"Gegenseitige Erreichbarkeit" ist eine Äquivalenzrelation (Übung!). Die Äquivalenzklassen heißen **starke Zusammenhangskomponenten**.

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive ~~Funktion~~ $f : V \to V'$ gibt mit der Eigenschaft

$$\forall u, v \in V \left\{ \begin{matrix} (u,v) \in E \\ \{u,v\} \in E \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} (f(u), f(v)) \in E' \\ \{f(u), f(v)\} \in E' \end{matrix} \right\}$$

Sei $G = (V,E)$ ein gerichteter Graph, $u, v \in V$. Dann heißen u und v **benachbart**, wenn $u \neq v$ und $(u,v) \in E$ oder $(v,u) \in E$ bzw. $\{u,v\} \in E$.

Ein **vollständiger Graph** ist ein ungerichteter Graph, in dem je zwei Knoten zueinander benachbart sind.

Ein **bipartiter Graph** ist ein ungerichteter Graph $G = (V,E)$, für den V in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt werden kann, also $V = V_1 \dot\cup V_2$ mit der Eigenschaft

$$\{u,v\} \in E \Rightarrow (u \in V_1 \wedge v \in V_2) \vee (u \in V_2 \wedge v \in V_1).$$

Ein azyklischer, ungerichteter Graph heißt **Wald**.

Ein zusammenhängender, azyklischer, ungerichteter Graph heißt **Baum**.

Dafür gilt der folgende Satz:

Satz B.2

Sei $G = (V,E)$ ein ungerichteter Graph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. G ist ein Baum.
2. Je zwei Knoten in G sind durch einen eindeutig bestimmten, einfachen Pfad verbunden
3. G ist zusammenhängend. Aber wenn eine Kante aus E entfernt wird, ist G nicht mehr zusammenhängend.
4. G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.
5. G ist azyklisch und $|E| = |V| - 1$
6. G ist azyklisch und wenn eine Kante hinzugefügt wird, ist G nicht mehr azyklisch.

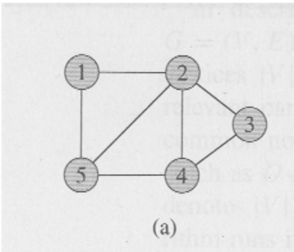
Jeder Knoten eines Baums kann zur Wurzel erklärt werden. Dann erhält man einen Baum mit Wurzel.

$G' = (V', E')$ ist Teilgraph von $G = (V, E)$, wenn $V' \subset V$, $E' \subset E$.

Für $V' \subseteq V$ und $E' = \{ \overset{\{u,v\} \in E}{(u,v)} : u, v \in V' \}$ ist (V', E') der durch V' induzierte Teilgraph von G.

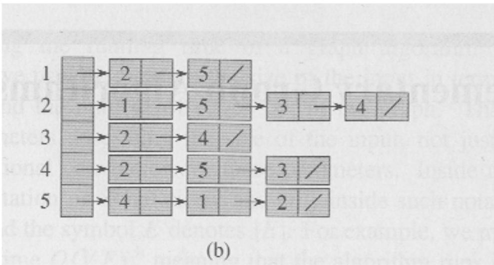
Darstellung von Graphen

Sei G ein ungerichteter Graph, $G = (V, E)$.
Zum Beispiel



(a)

Diesen Graph kann man durch eine **Adjazenzliste** darstellen:



(b)

Für jeden Knoten u enthält die Adjazenzliste ein Array $Adj[u]$.
Es enthält alle Knoten v mit $\{u,v\} \in V$.
(Oder Pointer auf diese Knoten)

Vorteil: Die Darstellung ist kompakt, wenn E wenige Kanten enthält.

Nachteil: Es ist aufwändig, zu prüfen ob $\{u,v\} \in E$ ist.

Man kann G auch als **Adjazenzmatrix** darstellen.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

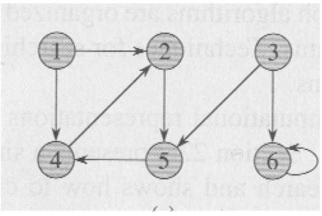
(c)

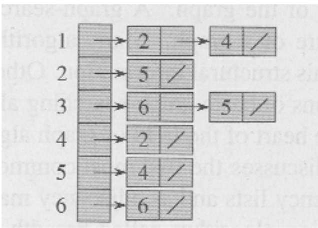
Sei $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

Es handelt sich um eine $|V| \times |V|$ Matrix. Sie hat an der Position (i, j) eine 1, wenn $\{v_i, v_j\} \in E$.

Nachteil: immer groß.
Vorteil: Prüfen, ob $\{i, j\} \in E$ ist leicht.

Das ganze kann man auch für gerichtete Graphen machen:





$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Übung

1) Geben Sie die Darstellung der beiden folgenden Graphen als Adjazenzliste und als Adjazenzmatrix an.

ein gerichteter und ein ungerichteter Graph.

2) Sei $G = (V, E)$ ~~eine~~ gerichteter Graph. Der Ausgangsgrad von $u \in V$ ist die Anzahl der Knoten $v \in V$ mit $(u, v) \in E$. Der Eingangsgrad ist die Anzahl der Knoten $v \in V$ mit $(v, u) \in E$.

a) Bestimmen Sie den Eingangs- und Ausgangsgrad aller Knoten des gerichteten Graphen aus 1).

b) Wie lange dauert die Berechnung von Eingangs- und Ausgangsgrad eines Knotens in einem gerichteten Graphen, der als Adjazenzliste gegeben ist?

22.1-3