

Realismedebatten med udgangspunkt i Maddy, Shapiro og Field

Introduktion.

Et af de spørgsmål som diskuteres i matematikkens filosofi i dag er spørgsmålet vedrørende eksistensen af matematikkens objekter. Der er både filosoffer som mener at matematikkens objekter eksisterer og de som mener at de ikke eksisterer. Vi vil nedenunder skitsere positionerne fra tre af bidragsyderne i denne debat, P. Maddy, S. Shapiro samt H. Field. (For mere udtørlige beskrivelser, henvises til bidragsyderne selv.) Før vi går i gang med dette skal vi dog først præsentere nogle begreber. Derefter vil vi se på nogle motivationer for at tro på at matematikkens objekter eksisterer eller ikke eksisterer. Endeligt vil vi betragte nogle af de argumenter som gives for og i mod realisme.

Spørgsmål om eksistens og naturen af det værende hører som bekendt under den disciplin af filosofien der kaldes ontologi. Indenfor matematikkens filosofi benævnes det at mene at matematikkens objekter eksisterer uafhængigt af mennesker oftest realisme eller Platonisme. Den modsatte position der benægter eksistens af matematikkens objekter kaldes anti-realisme. Der er mange forskellige positioner som hører under realisme-positioner (og anti-realisme). Det vil blive klart senere når vi gennemgår de forskellige positioner. De er alle enige om at matematikkens objekter eksisterer uafhængigt af mennesker, men derudover kan de eksistere på forskellige måder, eller sagt på en anden måde: deres natur kan være forskellig. Realisme kan også indeholde forskellige filosofiske komponenter. Det at sige at matematikkens objekter eksisterer uafhængigt af mennesker er en ontologisk komponent. Men ofte lægger filosoffer mere i realisme begrebet, som f.eks.

- en erkendelsesteoretisk påstand om at vi har mulighed for at vide noget om objekterne
- en semantisk påstand om at matematikkens sætninger er sande eller falske uafhængigt af vores viden om det.

Motivationer og argumenter for realisme/antirealisme.

Det næste tema som vi vil tage op er begrundelser for at være realist eller antirealist. Det påstås at mange matematikere er realister. Bl. a. i følgende citat:¹

The main point in favor of the realistic approach to mathematics is the instinctive certainty of most everybody who has ever tried to solve a problem that he is thinking about 'real objects', whether they are sets, numbers, or whatever...

¹ Moschovakis: *Descriptive Set theory*. Amsterdam: North Holland, 1980, p. 605.

Begrundelsen synes at være at det for matematikere føles som om de "opdager" snarere end opfinder matematikken. Desuden opdages der nogle gange uventede sammenhænge i matematikken som kunne tyde på at matematikken er der uafhængig af os.

En anden begrundelse for at være realist er at matematikkens sætninger anses for at være sande. Men hvis sætningerne er sande må de være sande *om* noget. Ligesom hvis vi siger at "Der sidder en kat på måten" er sand, så må det være fordi at der sidder en kat på måten. Dvs. at der findes en kat og en måde og de forholder sig som sætningen siger. På samme måde må der så gælde at hvis vi siger at $2+2=4$ er sandt, så må der gælde at 2 og 4 findes og at de forholder sig som sætningen siger.

Det fremhæves også tit at det at matematikken kan bruges i virkeligheden indikerer at den også er virkelig. Dette giver anledning til uundværlighedsargumentet som i moderne tid er blevet fremsat af den (nu afdøde) amerikanske filosof Quine. Dette argument ser vi på i næste afsnit.

Endeligt er det også blevet fremhævet som begrundelse for realisme at der har været multiple opdagelser i matematikken. F.eks. "opdagede" både Newton og Leibniz uafhængigt af hinanden infinitesimalregningen. Et andet eksempel er fremkomsten af ikke-Euklidisk geometri. Denne blev fremsat nogenlunde samtidigt af Gauss, Lobachevsky og Bolyai. Mod denne begrundelse kan det siges at i begge tilfælde var tiden moden for fremkomsten af teorierne og at de alle byggede videre på tidligere matematikers arbejder. Mht. fremkomsten af infinitesimalregningen kan man se at selvom vi i dag siger at begge teorier er Infinitesimal-regning, så er de temmeligt forskellige, hvilket igen afspejler de forskellige forudsætninger som Newton og Leibniz arbejdede ud fra. Mht. den Ikke-Euklidiske geometri, så er spørgsmålet også hvorvidt opdagelserne virkelig var uafhængige. Disse betragtninger er dog af historisk karakter og kunne i sig selv udgøre en mindre afhandling. Det falder således udenfor denne tekst.

Hvis man skal nævne begrundelser for at være anti-realist så kan man igen tage fat der hvor vi slap i betragtningerne vedr. sandhed af de matematiske sætninger. Vi skrev at hvis $2+2=4$ er sandt, så må der gælde at 2 og 4 findes og at de forholder sig som sætningen siger. Men hvis vi tænker nærmere over dette, må man spørge: Hvor findes de så? De kan vel ikke være fysiske objekter (som borde og stole)? En realist vil måske sige at de er abstrakte objekter som eksisterer udenfor rum og tid, mens en anti-realist vil synes at det er en for vidtgående påstand at der skulle findes sådanne objekter. Et andet problem som en anti-realist vil fremhæve er hvorledes vi kan have adgang til abstrakte objekter. Det vil til gengæld være noget som en realist vil skulle gøre rede for. Vi nærmer os her temaet for en berømt artikel af Benacerraf, 'Mathematical Truth' (1973), som vi nu præsenterer.

Benacerrafs 'Mathematical Truth'

I 'Mathematical Truth' opstiller Benacerraf to krav som han mener enhver filosofisk teori om matematikken skal opfylde. Det ene krav er kravet om at en teori for sandhed om de matematiske sætninger skal være den samme som teorien for sandhed som bruges for vores almindelige sprog. Dette krav benævnes kravet om uniform semantik. Det andet

krav er at en teori for erkendelse ikke skal gøre erkendelsen af de matematiske sætninger til et mysterium. Benacerrafs påstand er at alle filosofiske teorier højt opfylder en af disse krav på bekostning af det andet krav. Vi skal her kun beskrive opfyldelsen af det ene krav, da det har mest relevans for realisme-debatten.

En position som opfylder det første krav, skriver Benacerraf, er Platonisme. Dvs. en teori der siger at matematikkens objekter eksisterer uafhængigt af mennesker lige som fysiske objekter. En sandhedsteori som således kan bruges er den vi har beskrevet ovenover. Det vil sige at hvis vi siger "Der eksisterer 2 primtal større end 7" eller "Der eksisterer 2 storbyer større end New York", så vil begge være sande hvis vi kan finde i første tilfælde 2 tal som er større end 7 og som begge er primtal, og i andet tilfælde 2 byer som begge er større end New York. En sandhedsteori som denne kaldes for en korrespondence-teori for sandhed. Problemet med denne teori, mener Benacerraf, er at den gør det uforståeligt hvordan vi kan opnå viden i matematikken. Hvis vi på den ene side mener at matematikkens objekter eksisterer som uafhængige, udenfor tid og rum så er det uforståeligt hvordan vi kan have kontakt til dem. En vigtig præmis som Benacerraf bruger her er den såkaldte kausale teori for erkendelse. En vigtig komponent i denne teori er at for at en person kan vide noget om P, så skal denne person stå i kausal kontakt, dvs. fysisk kontakt, med P. Men dette er jo ikke muligt med matematikkens objekter hvis de ikke eksisterer i rum-tid!

Dette problem har ført til at nogle filosoffer som beskrevet ovenfor har erklæret Platonismen for uholdbar og derfor vendt sig mod anti-realismen. Eller omvendt, hvis man af andre grunde insisterer på at være realist, må man således beskrive hvorledes det er muligt at opnå erkendelse af de matematiske objekter. Som vi skal se nedenunder giver Maddy og Shapiro meget forskellige bud på dette problem.

Argument fra sandhed

Som vi har antydnet ovenover kan man argumentere fra det at matematikkens sætninger er sande til at matematikkens objekter eksisterer. Argumentet starter ud fra den præmis at matematikkens sætninger er sande. En anden præmis kunne være korrespondence-teorien for sandhed som beskrevet ovenfor. Hvis vi så siger at 'Enhver differentiable funktion er kontinuer' er sand, så må der findes funktioner som denne sætning udtaler sig om. Bemærk at man ikke behøver et så stærkt sandhedsbegreb for at få realisme. Hvis vi f.eks. siger at 'Der eksisterer primtal større end 2' er sand, så vil nogle filosoffer hævde at vi allerede har udtrykt at der eksisterer matematiske objekter, nemlig primtal.

'Uundværlighedsargumentet'

I dag findes der forskellige versioner af uundværlighedsargumentet, som stadig er genstand for filosofernes diskussion. Man siger oftest at argumentet stammer fra to amerikanske filosoffer, Quine og Putnam², men versioner af argumentet kan også spores længere tilbage. Argumentet har simpelt sagt to væsentlige præmisser:

² Se for eksempel W. V. O. Quine: 'Two dogmas of empiricism' og 'On what there is' i *From a logical point of view*. Cambridge: Harvard University Press, 1980 og H. Putnam: *Philosophy of Logic*. Harper & Row, 1971.

1. Uundværlige entiteter i vores bedste naturvidenskabelige teorier eksisterer.
2. Matematikken er en uundværlig del af vores naturvidenskabelige teorier.

Der skal selvfølgelig begrundelser til for begge af disse præmisser. Men hvis vi tager disse for givet ser det ud til at eksistensen af de matematiske objekter følger (invert fald de som bruges i vores naturvidenskabelige teorier – og dem findes der jo en del af). Vi kan ikke her gennemgå alle de argumenter der gives for disse præmisser – litteraturen er for omfattende – men vi vil antyde en begrundelse, som Quine giver for den første præmis. Denne beror på at vi må være konsistente i vores antagelser og tage de ting alvorligt som vi dagligt tager for givet. Quine beskriver at vi ordner og simplificerer strømmen af vores observationer i dagligdagen i genstande. F.eks. kan jeg observere koppen ved siden af mig fra forskellige sider, jeg kan tage den op og kigge under den, ned i den, osv.. For at samle alle disse sansende-indtryk kan jeg sige at de alle stammer fra en genstand, nemlig koppen. På samme måde kan jeg ordne observationer af alle "medium" størrelse genstande. Dette fortsætter med mikroskopiske og makroskopiske genstande, som for eksempel elektroner og quarker. Problemet er at gøre rede for hvorfor vi nødvendigvis må acceptere at disse genstande som samler vores teorier omkring eksisterer. Et af de svar man kan komme med er at den bedste forklaring på at en teori "virker" er at de entiteter som indgår i teorien faktisk eksisterer. Dvs. hvis vi bruger en teori til at forklare visse (fysiske) fænomener, så ville det ikke være rationelt at antage at genstandene som ingår i teorien ikke eksisterer. Det er her også vigtigt at fremhæve at det kun er entiteterne i vores *bedste* teorier som eksisterer. Man kunne f.eks. også forklare visse fænomener, som f.eks. torden, ved at som i gamle dage henvise til de Nordiske guder. Men dette ville netop ikke være rationelt, da vi i dag har bedre videnskabelige teorier til at forklare disse ting.

Realisme

Da vi har tidligere nævnt Platonisme et par gange er det her på sin plads at sige lidt mere om hvad denne position indebærer. Positionen er selvfølgelig inspireret af Platon og hans filosofi om ide-verdenen, men det kan diskuteres hvorvidt de moderne filosoffer som kalder sig Platonisme stemmer overens med Platons opfattelse af matematik. Platonisme i matematikken indebærer oftest en opfattelse af de matematiske objekter som eksisterende uafhængigt af mennesker, eksisterende udenfor rum og tid – og derfor evigt, som værende uforanderlige og eksisterende med nødvendighed. Som vi skal se behøver man ikke at holde på alle disse komponenter for at være realist. Platon havde en teori om at menneskenes sjæl besidder viden om ideerne, men at man ved sin genfødsel glemmer den viden som sjælen besidder. Denne viden kan dog på passende vis senere bringes frem igen. Dvs. at viden af de matematiske ideer sker ved gen-erindring. Denne erkendelsesteori er der dog næppe nogen filosoffer som vil påberåbe sig idag.

Maddy

Vi skal se på to filosoffer som kalder sig realister. Vi starter med P. Maddy (1990) hvis position kan benævnes 'Mængde-teoretisk realisme' eller 'kompromis-Platonisme'. Mængde-teoretisk realisme fordi at hun koncentrerer sig om at beskrive hvad mængder er

for nogle størrelser. Dette gør hun af to grunde. Den første er at hun skriver at der ellers ville være alt for mange forskellige objekter som hun skulle gøre rede for. Den anden begrundelse er at resten af matematikkens objekter kan reduceres til mængder. Dvs. at hvis man har gjort rede for hvad mængde-teori er så har man også delvis gjort rede for resten af matematikken. Benævnelsen 'Kompromis-Platonisme' hentyder til at Maddy gør brug af to forskellige argumenter for sin realisme. Hun bruger dels Quine-Putnams uundværlighedsargument som beskrevet ovenfor og dels et argument inspireret af logikeren Gödel. Hun bruger uundværlighedsargumentet til at argumentere generelt for eksistensen af matematiske objekter, men bemærker at argumentet har to svagheder, eller to forhold der ikke synes at stemme overens med praksis i matematikken. Det ene punkt er at det kun er de objekter som direkte bruges som opnår eksistens ved dette argument. Det andet kritik-punkt går på at matematikere sjældent venter på at deres resultater bruges for at resultaterne skal anerkendes. Desuden findes der resultater som er så indlysende i sig selv, at det ville være tåbeligt at hævde at de skulle begrundes ved deres anvendelser. For at svare på denne kritik bruger Maddy to argumenter hentet fra Gödel. Gödel hævder i et berømt citat at vi har en intuition som fortæller os at visse resultater fra matematikken må være sande.³

But despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true.

På den anden side vil visse axiomer vise sig at være så attraktive p.gr.a. deres anvendelser at de må anses for at være sande. Et godt eksempel på et sådant axiom er udvalgsaxiomet. Man kan således sige at Gödel begrundet de matematiske sætninger/axiomer ud fra intuition og success.

Maddy gennemgår desuden Benacerrafs problem for Platonister og konkluderer at den sædvanlige form for Platonisme ikke er holdbar. Hendes løsning er derfor at lade mængderne blive til "rum-tidslige" objekter. Som sådanne, nemlig som eksisterende i rum-tid, kan vi nemlig erkende disse ved vores sædvanlige sanse-erfaring. Det vil sige at vi kan erkende de matematiske objekter på samme måde som fysiske objekter.

Vi vil i det følgende se lidt nærmere på Maddys position. Maddy beskriver først hvorledes vi er i stand til at referere til mængder på samme måde som vi refererer til fysiske objekter. Maddys position går ud på at (små) mængder består af mængder af fysiske genstande, og hun forestiller sig at en mængde bestående af f.eks. bøgerne i min reol er placeret der hvor bøgerne i min reol er.

Der næst beskriver hun hvorledes det er muligt at vi kan have perceptuel viden om mængderne. Hun benytter sig her af en filosofisk teori (af Pitcher) som siger at en person P sanser A ved en lokalitet L, hvis følgende betingelser er opfyldte:

1. A er lokaliseret ved L
2. P har perceptuelle opfattelser af A
3. Objektet A spiller en kausal rolle i disse opfattelser.

³ Gödel: What is Cantor's continuum problem? (1964). In Feferman et al. (eds.) *Collected Works Vol II*, Oxford University Press 1990, n. 268.

For eksempel, så giver det mening at sige at jeg ved at 'der sidder en edderkop (A) på bladet (L)', hvis det er sandt at der sidder en edderkop på bladet. Men for at kunne hævde at jeg ved det, skal jeg jo også på en eller anden måde tænke på at dette er tilfældet, eller med andre ord have en opfattelse af edderkoppen og bladet. Desuden skal min perception spille en rolle i at jeg har opfattelsen.

Traditionelt har man hævdet at 1 og 2 var nok til at hævde at personen P ved A. Men nogle filosoffer har fundet på modeksampler hvor 1 og 2 holder, men hvor man ikke med rimelighed vil kunne hævde at personen ved at A. Modeksamplerne kan reparerer hvis man samtidig hævder at 3 skal gøre sig gældende. Denne teori kan på grund af 3 benævnes en kausal teori om perception.

Maddy skal således redegøre for at disse tre betingelser kan være opfyldte for mængder. For at gøre dette forestiller hun sig en person, Steve, som skal bruge nogle æg til en kage. Han åbner køleskabet og tager bakken med æg ud og synes at det virker lidt for let. Men til hans lettelse er der 3 æg i bakken, hvilket er nok til hans kage. Maddy argumenterer nu for at Steve på denne måde sanser at der er en mængde med 3 objekter i ægebakken. Vi skal ikke gøre rede for alle detaljer i dette argument, men skitsere hvorledes hun gør rede for at Steve har en perceptuel optelse af en mængde. Maddy henviser her bl.a. til neurofysiologiske studier af Hebb som forklarer hvorledes gentagne perceptioner af bestemte objekter fører til en 'celle-samling' i vores hjerne som gør det muligt at genkende visse strukturer. F.eks. fører gentagne perceptioner af en trekant til at der dannes en celle-samling', dvs. en række celler som er vant til at kommunikere med hinanden i vores hjerne som gør os i stand til at genkende en trekant.

Hvis vi skal summere op, så er Maddy realist med hensyn til eksistens af matematiske objekter (eller mængder) og også med hensyn til vores viden om dem. Maddy er dog ikke traditionel Platonist, idet hun lader mængder eksistere i rum-tid ligesom fysiske objekter således at de kan erkendes ved hjælp af sædvanlig sanse-erfaring.

Shapiro

S. Shapiro er også realist og det som man kalder en strukturalist. (Bemærk at man også kan være anti-realist og strukturalist.) Ifølge Shapiro består matematik af et studie af strukturer. Strukturalismen har forskellige motivationer. En af motivationerne kommer fra en anden kendt artikel af Benacerraf 'What numbers could not be' fra 1965. Men mere generelt kan man sige at matematikken på et tidspunkt omkr. 1900 skiftede karakter, således at man holdt op med at tale om objekter hvor disse snarere blev defineret ved hjælp af nogle axiomsystemer. På denne måde definerer man ikke for eksempel hvad et punkt og en linie er, men opstiller nogle axiomer som gør rede for hvilke relationer disse må have indbyrdes. Således holder teorien for alle de objekter som opfylder axiomerne.⁴

Vi skal i det følgende se på hvad Shapiro mener strukturer er. Han skelner først mellem systemer og strukturer. Systemer består af genstande og deres indbyrdes relationer. Det

⁴ Hilbert er berømt for at have sagt (i 1891) om de axiomer som han formulerede for geometrien, at de kunne beskrive hvad som helst selv havde stole og ælkrus hvis bare de opfyldte de opstillede relationer.

kunne f.eks. være en familie og deres indbyrdes relationer, et bestemt fodboldholds forsvær og deres relationer eller et skakspil. Når vi så kigger på en struktur, så ser man kun på de indbyrdes relationer mellem objekter og abstraherer bort de egenskaber ved objekterne som ikke vedrører de indbyrdes relationer. Et af standard eksemplerne indenfor matematik er de naturlige tals struktur. Her betragtes de naturlige tal som bestående af et begyndelsesobjekt (0 eller 1) og genereret af efterfølgerfunktionen. Givet en struktur, så kan man også fylde dens pladser ud med givne objekter. F.eks. når vi tæller, putter vi jo konkrete objekter ind i tallenes struktur. En samling af objekter kan således eksemplificere eller instantiere en given struktur. Tilsvarende vil Shapiro sige at systemet af en struktur er en instantiering af strukturen.

Shapiro sætter strukturalismen op som kontrast til Platonismen. F.eks. tallene i strukturalisme kan ikke betragtes isoleret. Tallene eksisterer kun som pladser i denne struktur og kun som en helhed. I Platonismen kan det derimod godt give mening at, f.eks. tallet 2 kan betragtes uafhængigt af de andre tal. "Tallene har hver deres plads i den Platoniske himmel".

En struktur beskrives oftest som en samling pladser hvorpå der er defineret en række relationer. Shapiros påstand er således at al matematik er studiet af sådanne strukturer. Vi har allerede antydnet at der således i strukturalisme er to forskellige størrelser, pladser og strukturer. Vi vil næmest se hvilken ontologisk status Shapiro tillægger disse. Vi starter med strukturerne. Det problematiske med disse er at de jo kan betragtes som abstraktioner af nogle konkrete objekter.

Spørgsmålet er således hvorvidt strukturerne eksisterer i sig selv eller kun i kraft af deres instanser. På samme måde diskuterer man i filosofien hvorvidt farver, f.eks. farven rød, eksisterer i sig selv eller om den kun eksisterer i kraft af at der findes røde ting.

Der er mange forskellige bud på dette spørgsmål. Shapiro vælger det svar, at strukturer eksisterer i sig selv, dvs uafhængigt af om der findes systemer som eksemplificerer dem eller ej. Shapiro betegner dette som Ante rem strukturalisme. Det modsatte, in re strukturalisme, siger at strukturerne kun eksisterer som generalisationer af de systemer som eksemplificerer dem. Spørgsmålet er nu hvilke strukturer som eksisterer. Shapiro løber her ind i et problem, da han skriver at alle de strukturer som har en kohærent beskrivelse eksisterer. Men han vælger at lade kohærent være en primitiv term, dvs. en som ikke defineres yderligere. Han forklarer at man skal tænke på kohærens som en model i logik, dvs. at et formelt system er konsistent hvis det har en model. Denne sætning gælder dog kun i første ordens logik og af forskellige grunde vælger Shapiro et andet ordens baggrundssprog.

Hvis vi går videre til pladserne, så er det Shapiros holdning at pladserne, eller objekterne, kun eksisterer *relativt* til den struktur de er pladser i. Desuden kan de ikke have identificerende egenskaber udover de relationer som er knyttet til den struktur som de er pladser i.

Shapiro giver også et bud på hvorledes vi opnår erkendelse af strukturer. Han giver tre forskellige forklaringer. Jeg vil kun nævne de to, da disse er mest relevante. I følge den første beskriver Shapiro hvorledes vi kan komme til at erkende strukturer ud fra nogle af deres eksemplificeringer. Han beskriver hvordan vi kunne opnå en erkendelse af de naturlige tals struktur. Som børn lærer vi om tallene ved at tælle små mængder af

genstande. Senere opnår vi evnen til at indse at der må være tal svarende til f.eks. 10.000 uden at vi behøver at have en klasse af 10.000 objekter foran os. Endeligt indser vi at strukturen I, II, III fortsætter og vi bliver i stand til at forestille os den som en helhed. Således er vi kommet frem til en erkendelse af de naturlige tals struktur. Shapiro fremhæver at selvom de første erkendelser baserer sig på sanse-erfaring, så er denne ikke nok til at erkende hele de naturlige tals struktur. Når vi foretager det sidste skridt, skriver Shapiro, så bruger vi en a priori erkendelse.

Den anden form for erkendelse af strukturer benævner Shapiro implicit beskrivelse. Denne form for erkendelse mener han passer særligt godt sammen med strukturalismen. Implicit beskrivelse går ud på at man giver en bekræftelse af strukturen. F.eks. kunne vi beskrive de naturlige tals struktur som den struktur der indeholder et første-element og genereres af en efterfølger-funktion. De reelle tals struktur kan beskrives som et fuldstændigt ordnet legeme.

Anti-realisme

Der er selvfølgelig også mange forskellige versioner af anti-realisme. Vi vil nøjes med at se på en af disse, nemlig Fields position, for at få en ide om hvordan sådan en kunne se ud. Fælles for mange anti-realistiske positioner er at filosofferne forsøger at omskrive de matematiske teorier således at de ikke refererer til matematiske objekter.⁵ Field, som vi skal se vælger en lidt anden vej.

Field

Field tager i artiklen 'Realism and anti-realism about mathematics' udgangspunkt i argumentet fra sandhed. Da han insisterer på at være anti-realist konkluderer han at han således ikke kan sige at matematikkens sætninger er sande. Han efterlyser derfor andre kvaliteter som matematikkens sætninger kan have. Han forsøger først med at matematikkens sætninger (eller teorier) skal være konsistente, men finder at dette kriterium er for svagt. Fields krav er at teorierne skal stemme overens med virkeligheden. Det kriterium som han finder frem til er at matematikkens teorier, for at være gode, skal være konservative. Dette definerer han på følgende måde:

En matematisk teori M er konservativ over en naturvidenskabelig teori T hvis der ikke kan udledes noget fra M+T som ikke allerede kan udledes fra T.

Dette kriterium lyder nok umiddelbart lidt underligt og afføder følgende spørgsmål.

1. Hvad er pointen med at bruge matematik i naturvidenskabelige teorier hvis ikke de bibringer noget nyt til teorien?
2. Gælder det faktisk for matematiske teorier at de ikke tilføjer noget nyt til vores naturvidenskabelige teorier?

Fields svar på det første spørgsmål er at selvom matematikken ikke kommer med nye ting, så ligger dens værdi i at den mange gange gør udledninger nemmere. F.eks. hvis vi

⁵ Det gør for eksempel Kitcher i *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford University Press, 1984 og Chihara i *Constructibility and Mathematical Existence*. Oxford University Press, 1990.

har en matematisk teori som fortæller os at $4 \cdot 6 = 24$, så kan vi hurtigt konkludere at hvis der er 6 blade og der sidder 4 biller på hvert blad, så er der 24 biller i alt.

Det andet spørgsmål leder os hen til uundværlighedsargumentet. Dette argument sagde jo netop at matematikkens sætninger (eller objekter) er uundværlige i naturvidenskabene. Men dette stemmer næppe overens med at matematikkens teorier ikke tilføjer noget nyt. Field er således nødt til at redegøre for at denne præmis i uundværlighedsargumentet ikke holder. (Således får han jo også argumenteret mod realisme. Han bemærker at uundværlighedsargumentet er det mest overbevisende argument for realisme.) Field har skrevet en hel bog for at tilbagevise det at matematikken skulle være uundværlig i naturvidenskabene (Field, 1980). Hans strategi er at vise at mekanikken (dvs. en del af fysik) kan omskrives således at den ikke refererer til matematiske objekter. I stedet for således at referere til abstrakte objekter, indfører han nogle objekter som han kalder 'rum-tids områder' som skulle være fundamentale størrelser. Disse er uendeligt små, men til forskel fra abstrakte objekter, så eksisterer de i rum-tid. Herved undgås også problemene med reference og viden om objekter som ikke eksisterer i rum-tid, jvf. Benacerrafs artikel.

Balaguers: Er der en løsning?

Balaguers (1998) bidrag til realismedebatten er at beskrive to positioner, en realisme-position og en anti-realisme position, som han mener begge er holdbare. Desuden postulerer han at de er de eneste to som er holdbare. Hans konklusion på baggrund af dette er at realisme-antirealisme problemet ikke har nogen løsning, dvs. at vi aldrig vil kunne afgøre hvorvidt den ene eller den anden retning er korrekt.

Balaguers anti-realistiske position stammer i det væsentligste fra Field. Hans forslag til en realistisk position er lidt mere interessant. Han foreslår en variant af platonisme som han kalder "Full Blooded Platonism" (FBP), der går ud på at antage at alle de objekter som muligvis kunne eksistere, eksisterer. På denne måde mener han at få løst Benacerrafs problem om viden om de matematiske objekter. Fordi al den viden vi kunne frembringe vil på denne måde være viden om et muligt objekt og dermed et eksisterende objekt.

Littertur:

- Balaguer, M. 1998: *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford University Press.
- Benacerraf, P. 1973: Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy* 70, 661-679.
- Field, H. 1980: *Science Without Numbers*. Princeton University Press.
- Field, H. 1989: Realism and anti-realism about mathematics in: *Realism, Mathematics and Modality*. Basil Blackwell.
- Maddy, M. 1990: *Realism in Mathematics*, Oxford University Press.
- Shapiro, S. 1997: *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*. Oxford University Press.

end den de empiriske videnskaber modtager fra.

Tese om homogenitet: Den matematiske erkendelse er af samme karakter som anden videnskabelig erkendelse. At den matematiske erkendelse fremstår anderledes skyldes alene disciplinens fremtrædelsesform, men har ingen basis i noget epistemisk særtræk.

Dualitetstesen kan virke umiddelbar rimelig, idet den modsvarer oplevelsen, at matematiske sætninger kan bevises endegyldigt, hvilket ikke er tilfældet med empiriske påstande. En argumentation for dualitetstesen kan hæftes op på en antagelse angående objekterne for de matematiske teorier, således som tilfældet vil være i en platonisme, eller den kan hæftes op på overvejelser angående den formelle karakter af selve matematikkens sprog.

Argumenterne for en dualitetstese er ofte sammenvævet med en produkttankegang. I denne del I vil vi prøve at få øje på nogle af de sider af matematikken dette perspektiv kan afsløre. Og samtidig ledes vi rundt om tesen om dualitet. Det argument for dualitetstesen vi vil se på tager udgangspunkt i en kritik af den empiristiske tolkning af matematikken. Derfor først en beskrivelse af denne.

FRA: SKOVSMOSE, Ud over matematikken

Kapitel 1

En empirisk matematikopfattelse

I "A System of Logic" fra 1843 diskuterer John Stuart Mill (1806-1873) former for videnskabelig erkendelse, og i forbindelse hermed også den matematiske erkendelses natur. Mill tilhører den empiriske tradition i engelsk filosofi, hvis mest betydningsfulde repræsentanter er Francis Bacon (1561-1626), John Locke (1632-1704), Georg Berkeley (1685-1753) og David Hume (1711-1776). Kernepunktet i den empiristiske tankegang angår "erkendelsens kilde". Det hævdes at kilden til erkendelse er sanseerfaringen, og at begreber og tankeformer der ikke kan føres tilbage til denne kilde må forkastes som "illusioner".

Ifølge Hume kan vore oplevelser (perceptions) opdeles i to typer: indtryk (impressions) som er klare og kraftige, og forestillinger (ideas) som er mindre distinkte. Alle vore forestillinger er afledt af vore indtryk. De begreber som ikke er afledt af indtryk er ugyldige; der kan ikke opbygges nogen sand erkendelse på basis af sådanne. Dette fører bl.a. Hume til at forkaste årsagsbegrebet som "illusorisk". Ifølge Hume er der to elementer involveret i en årsagspåstand af formen: "A er årsag til B", nemlig: (1) at der foreligger en korrelation mellem fænomenerne A og B, og (2) at der findes en indre nødvendig sammenhæng mellem A og B. Ifølge Hume er det kun det der bygger på sanseerfaring vi kan have viden om. Vi kan iagttage (1), vi kan have indtryk (impressions) af en korrelation. Men (2) er ifølge Hume alene udtryk for en persons egen vaneforestilling. Vore forestillinger (ideas) om en

175

grad af nødvendighed kan ikke være afledt af noget indtryk. Ingen har perciperet andet end en korrelation – aldrig nogen nødvendig sammenhæng.

Ifølge Hume, og empirismen iøvrigt, er der ingen forskel på en tings væsen og dens fremtrædelsesform. Undersøger vi en genstand må vi gøre det ved hjælp af sanserne – eventuelt deres "forlængelser" i form af mikroskoper og lignende. Men der skjuler sig ikke bag rækken af fænomener noget principielt uagttageligt, der er årsag til fænomenerne, og som definerer deres væsen. Dette er empirismens fænomenologiske aspekt. Som iøvrigt modsvares af en nominalisme, ifølge hvilken viden, formuleret i almen-begreber, i sidste instans kun kan referere til individuelle konkrete fænomener. Altså: erkendelse bygger i sidste ende på en sammenknytning af konkrete enkelt-iagttagelser.

Hume hævder i konsekvens heraf at der må optræde en kløft mellem det deskriptive og det normative. Han noterer at i de moralteorier, han har stiftet bekendtskab med, indledes med redegørelser for en række faktiske sammenhænge. Derefter sker der en umærkelig overgang, idet sætninger indeholdende "er" og "er ikke" efterhånden erstattes af sætninger indeholdende "bør" og "bør ikke". Men Hume fremhæver at man umuligt kan udlede en bør-sætning fra en er-sætning.

Matematisk viden indtager en særstilling hos Hume, idet matematik angår relationer mellem ideer. Matematik får således en anden status end de øvrige erkendeområder. Matematisk viden har ikke en basis i sanseerfaringen. I "Enquiry Concerning the Human Understanding", der udkom første gang i 1748, formulerer Hume meget klart denne tese om dualitet: "All the objects of human reason or enquiry may naturally be divided into two kinds, to wit, relations of ideas, and matters of fact. Of the first kind are the sciences of geometry, algebra and arithmetic, and in short, every affirmation which is either intuitively or demonstratively certain ... Propositions of this kind are discoverable by the mere operation of thought, without dependence on what is anywhere existent in the universe ... Matters of fact, which are the second objects of human reason, are not ascertained in the same manner; nor is our evidence of their truth, however great, of a like nature with the foregoing. The contrary of every matter of fact is still possible; ..." (Hume, 1970, p. 25).

"Enquiry Concerning the Human Understanding" afslutter iøvrigt med følgende meget skarpe formulering af Humes erkendelseskritik: "If we take in our hand any volume; of divinity or school metaphysics, for instance; let us ask. Does it contain any abstract reasoning concerning quantity or number? No. Does it contain any experimental reasoning concerning matter of fact and existence? No. Commit it then to the flames; for it can contain nothing but sophistry and illusion." (Hume, 1970, p. 165).

Mill fortsætter den empiriske tradition, og i "A System of Logic" når han til den konklusion at deduktive videnskaber, alle uden undtagelse, må betragtes som induktive, og at deres grundlag til syvende og sidst er erfaringen. I Bog II, kapitel 6 ser han specielt på matematikken, idet han naturligt nok finder at denne videnskab vanskeligst kan opfattes som funderet på induktion og erfaring. Underforstået, at når argumentationen er gennemført på matematik, så er der argumenteret til bunds med hensyn til induktionstolkningen af videnskaben. Mill ønsker således at skærpe Humes empirisme, idet denne netop ikke opfatter matematikken som en empirisk videnskab. Mill afviser en dualitetsopfattelse og ønsker at underbygge tesen om homogenitet.

Mill henviser til den opfattelse at matematiske sandheder er verbale sandheder og at matematiske ræsonnementer blot består i sproglige transformationer. Ifølge en sådan opfattelse vil eksempelvis påstanden $1 + 2 = 3$ være sand alene fordi den udtrykker en konvention angående brugen af talordene 1, 2 og 3. Matematiske sætninger er derfor ikke sandheder om noget. Hvorfor det egentligt også vil være misvisende overhovedet at tillægge dem en sandhedsværdi. De er alene sproglige konventioner. En sprogkonventionalistisk tolkning af matematikken udgør således et iøjnefaldende modekseksempel til en empiristisk matematiktolkning. Dette er dog ikke tilfældet, ifølge Mill, idet han skriver: "Nevertheless, it will appear on consideration, that this apparently so decisive instance is no instance at all; that there is in every step of an arithmetical or algebraical calculation a real induction, a real inference of facts from facts; and that what disguises the induction is simply its comprehensive nature and the consequent extreme generality of the language. All numbers must be numbers of something; there are no such things as numbers in the abstract."

176

(Mill, 1970, p. 167).

Han hævder direkte at matematikken har et genstandsområde. Den handler om noget, på samme måde som andre (empiriske) videnskaber. Som specifikation af de størrelser matematikken handler om fortsætter Mill: "Ten must mean ten bodies, or ten sounds, or ten beatings of the pulse. But though numbers must be numbers of something, they may be numbers of anything. Propositions, therefore, concerning numbers have the remarkable peculiarity that they are propositions concerning all things whatever; all objects, all existences of every kind, known to our experience." (Mill, 1970, p. 167).

Genstandene for matematikken må tilhøre erfaringen. Men derudover er der ingen begrænsninger angående det matematikken kan handle om. Det særlige ved matematikken er netop at den kan referere til hvad som helst (empirisk). Tal refererer til "something" givet via sanserne, men tal kan være antal af "anything". At matematikken handler om noget, får Mill til at bemærke følgende angående de sædvanlige regneregler for manipulation af ligninger – for sådanne regneregler kan Mill heller ikke opfatte som alene symbolmanipulation eller som sproglige konventioner: "These are not properties of language, or of signs as such, but of magnitudes, which is as much as to say, of all things. The inferences, therefore, which are successively drawn, are inferences concerning things, not symbols; though as any things whatever will serve the turn, there is no necessity for keeping the idea of the thing at all distinct ..." (Mill, 1970, p. 168).

Inden Mill kan formulere sin hovedtese indskyder han en vigtig pointe angående matematiske sætninger. En påstand som $1 + 2 = 3$ udtrykker en identitet. Der hævdes tilsyneladende blot at den størrelse som '1 + 2' refererer til er den samme som den størrelse '3' refererer til, hvilket synes at implicere at matematiske påstande trods alt blot er verbale konventioner. Men Mill hævder: "This, however, though it looks so plausible, will not bear examination. The expression 'two pebbles and one pebble', and the expression 'three pebbles', stand indeed for the same aggregation of objects, but they by no means stand for the same physical fact. They are names of the same objects, but of those objects in two different states: though they denote the same things, their connotation is different." (Mill, 1970, p. 168). Det er forskellige

sanseindtryk vi modtager, afhængig af om vi ser de tre sten under et, eller om vi ser dem i to portioner på henholdsvis to og en. Og den matematiske påstand $1 + 2 = 3$ hævder, at gennem et omarrangement af stenene kan vi enten opnå det ene eller det andet sanseindtryk.

Mill er nu nået frem til at kunne formulere sin hovedtese angående en elementær matematisk påstand som f. eks. $1 + 2 = 3$: "It is a truth known to us by early and constant experience – an inductive truth: and such truths are the foundation of the science of numbers. The fundamental truths of that science all rest on the evidence of sense; they are proved by showing to our eyes and our fingers that any given number of objects, ten balls, for example, may by separation and rearrangement exhibit to our senses all the different sets of numbers the sum of which is equal to ten." (Mill, 1970, p. 169).

Mill hævder således, dels at matematikkens aksiomer (her forstået som basale sandheder) bygger på sanseerfaringer, og ikke eksempelvis på en intuitiv afdækning af de matematiske størrelsers nødvendige indbyrdes relationer (en fortolkning som f. eks. den euklidiske geometri har lagt op til), og dels at de matematiske ræsonnementer bygger på empiri. Med disse to påstande har vi fået en afrundet empiristisk matematikfortolkning.¹

Hermed har vi også et bud på hvorledes matematikkens grundlagsproblemer kan diskuteres. Det emneområde Mill griber til er psykologien. Vel at mærke ikke forstået som den videnskab vi kender i dag. Den aktivitet der foregår når sanseindtryk opstår og bearbejdes beskrives associationspsykologisk i den klassiske engelske empirisme. Og Mill tilslutter sig i denne sammenhæng traditionen.² Der ligger ikke noget specielt i at diskutere et fag-

¹Denne tolkning fastholder Mill dog ikke ganske konsekvent i sin fremstilling. Eksempelvis skriver han (i samme kapitel som de foregående citater er hentet fra): "It appears, therefore, that the method of all deductive sciences is hypothetical. They proceed by tracing the consequences of certain assumptions: leaving for separate consideration whether the assumptions are true or not, and if not exactly true, whether they are sufficiently near approximation to the truth." (Mill, 1970, p. 170). Det er helt åbenlyst nødvendigt at få præciseret hvilken forskel der måtte ligge i at hævde, at en videnskab er hypotetisk, og at den handler om sanseerfaringen. Men Mills diskussion forbliver uklar.

²Når den senere logiske positivisme benytter betegnelsen 'logisk' sker det netop for at tage afstand fra den 'psykologiske' empirisme/positivisme.

177

område, dets begreber og dets grundlag, ud fra et andet fagområde. Det særlige ved Mill er hans bud på at matematikkens grundlag må diskuteres (associations)psykologisk. Det er denne *psykologisme* som andre matematikfilosoffer reagerer så heftigt på.

I forlængelse af sin matematiske erkendelsesteori drager Mill iøvrigt konsekvenser angående matematikundervisningen. Det virker også naturligt at konkludere pædagogisk ud fra den påstand, at matematik bygger på sanseerfaring: "All the improved methods of teaching arithmetic to children proceed on a knowledge of this fact. All who wish to carry the child's mind along with them in learning arithmetic; all who wish to teach numbers, and not mere ciphers – now teach it through the evidence of the senses, in the manner we have described." (Mill, 1970, p. 169). En udtalelse som falder helt i tråd med hvad matematikpædagoger i dag ofte hævder.

Kapitel 2

Kritik af empirismen

"Die Grundlagen der Arithmetik" fra 1884 indeholder dels Gottlob Freges (1848-1925) kritik af en række matematikopfattelser og dels en præsentation af Freges egen grundopfattelse. Denne udarbejder han senere i "Die Grundgesetze der Arithmetik" (bind 1, 1893 og bind 2, 1903) i tekniske detaljer. Bertrand Russell (1872-1970) og Alfred N. Whiteheads (1861-1947) værk "Principia Mathematica" (3 bind, 1910-1913) bygger direkte på Freges arbejde, men indeholder samtidig en omfattende reformulering af Freges oprindelige notation til en langt mere tilgængelig.

I "Die Grundlagen der Arithmetik" foretager Frege intet mindre end et gennemgribende opgør med tidligere matematikfilosofi, som han kun kan karakterisere som alt for overfladisk. Men ikke blot dette. Der føres efter Freges opfattelse en helt misforstået analyse af matematikkens grundlagsproblemer. Frege ønsker med sin kritik at bane vejen for sit eget forslag der helt revolutionerer grundlagsdiskussionen.

Men selv om Frege afviser en række filosoffer, afviser han dog ikke alle de termer og distinktioner der har spillet en rolle i matematikfilosofien. Bl. a. benytter han sig af distinktionerne syntetisk/analytisk og a posteriori/a priori. Med Immanuel Kants (1724-1804) arbejde kommer disse begrebspår til at indtage en central plads i matematisk erkendelsesteori. Og vi kaster et hurtigt blik på Kants matematiktolkning. En påstand betegnes som a priori, hvis gyldigheden kan bestemmes forud for og uafhængigt af erfaringen. Et eksempel kunne være: "enten er A identisk med B, eller også er A forskellig fra B". Verifikationen eller falsifikation

172

tionen af denne og tilsvarende påstande kræver ingen empiri. En bestemmelse af gyldigheden af en a posteriori påstand forudsætter derimod empiri; et eksempel kunne være: "jerns vægtfylde er større end kobbers".

Bestemmelsen af begreberne analytisk/syntetisk er hos Kant mere uklar. Ser vi på en subjekt-prædikat påstand (som af Kant opfattes som paradigmeeksemplet på en påstand), f. eks. "alle A er B", hvor A er subjektet og B er prædikatet, betegnes denne som analytisk hvis prædikatet allerede er "indeholdt i" subjektet. En analytisk påstand tilskrives således ikke subjektet nogen essentiel ny egenskab via prædikatet. Det traditionelle eksempel er "alle ungkarle er ugifte"; det ligger allerede i begrebet ungkarl at der er tale om en ugift person. I den syntetiske påstand, derimod, tilskrives prædikatet subjektet en ny egenskab. En sådan påstand bliver dermed "oplysende".¹ De to distinktioner, apriori/a posteriori og syntetisk/analytisk kan nu sammenkobles som vist i skemaet figur 1.

	analytisk	syntetisk
a priori	(1)	(2)
a posteriori		(3)

Figur 1.

¹I indledningen til "Kritik der reinen Vernunft" fra 1781 definerer Kant begreberne således: "In allen Urteilen, worinnen das Verhältnis eines Subjekts zum Prädikat gedacht wird, ... ist dieses Verhältnis auf zweierlei Art möglich. Entweder das Prädikat B gehört zum Subjekt A als etwas, was in diesem Begriffe A (versteckterweise) enthalten ist; oder B liegt ganz ausser dem Begriffe A, ob es zwar mit demselben in Verknüpfung steht. Im ersten Fall nenne ich das Urteil analytisch, im andern synthetisch." (Kant, 1956, pp. 45).

Det er klart at der ikke findes påstande der er analytiske og samtidig a posteriori, og altså kræver et empirisk check. Det er ligeledes klart at der findes a priori analytiske påstande ("alle røde genstande er farvede") og a posteriori syntetiske påstande ("nogle danskere er højere end 2,13 m"). Det problematiske og interessante er, om der findes påstande der er a priori og samtidig syntetiske.

Kants opfattelse er at dette ikke er en tom kategori. Som eksempel angiver han bl. a. "rummet har tre og kun tre dimensioner". Generelt hævder han at matematikken udtrykker a priori og samtidig syntetiske påstande. Matematikken placeres altså af Kant i box (2) på fig. 1. De matematiske påstande er syntetiske fordi de handler om rummet og tiden. Rummet og tiden (samt årsagspåstanden) er former gennem hvilke subjektet strukturerer sine erfaringer, de udgør nødvendige mulighedsbetingelser for erfaring. Dermed bliver matematiske påstande samtidig a priori, ifølge Kant.

Vi skal ikke forsøge at gå nærmere ind på Kants meget omfattende erkendelsesteoretiske argumentation, således som den bliver udviklet i "Kritik der reinen Vernunft". Men i "Prolegomena zu einer jeden kunftigen Metaphysik" fra 1783 resumerer Kant nogle af sine synspunkter, og om matematikken hedder der: "Det for al ren matematisk erkendelse væsentlige og særegne i modsætning til al anden erkendelse a priori er, at den ingenlunde fremgår af begreber, men altid finder sted ved konstruktion af begreber. Da den altså i sine sætninger må gå ud over begrebet til det, som indeholdes i dettes tilsvarende anskuelse, så kan og skal dens sætninger aldrig fremkomme ved optrævelse af begreberne, dvs. analytisk, og de er derfor altid syntetiske." (Citeret efter den danske oversættelse, pp. 16-17).²

Mill placerer konsekvent nok matematikken i box (3). Den tolkes netop som en empirisk videnskab, idet den fremstår via induktion ud fra nogle, ganske vist meget "prægnante", invarianser i vore sanseoplevelser. Det er præcis denne placering af matematikken som Frege i "Die Grundlagen der Arithmetik" afviser.

²Karakteristisk for konstruktiv matematik, omfattende intuitionismen grundlagt af L. E. J. Brouwer, er at den også placerer matematikken i box (2) på fig. 1. I den konstruktive matematik genfinder man derfor flere af Kants synspunkter.

Iøvrigt finder han heller ikke Kants tolkning tilfredstillende, men her koncentrerer vi os om hans angreb på Mill.

Først bemærker Frege at Mill i en bestemt formulering synes at basere matematikken på definitioner³, derpå konstaterer Frege, "but this spark of sound sense is no sooner lit than extinguished, thanks to his preconception that all knowledge is empirical" (Frege, 1978, p. 9).⁴ Dernæst noterer Frege at matematiske påstande og begreber ifølge Mill udtrykker visse fakta angående sanseerfaringen. Derpå følgende ironiske kommentar: "But what in the world can be the observed fact, or the physical fact (to use another of Mill's expressions), which is asserted in the definition of the number 777684? Of all the whole wealth of physical facts in his apocalypse, Mill names for us only a solitary one, the one which he holds is asserted in the definition of the number 3. It consists, according to him, in this, that collections of objects exist, which while they impress the senses thus, 000, may be separated into two parts, thus, 00 0. What a mercy, then, that not everything in the world is nailed down: for if it were, we should not be able to bring off this separation, and $2 + 1$ would not be 3! What a pity that Mill did not also illustrate the physical facts underlying the numbers 0 and 1!" (Frege, 1978, p. 9). Lidt senere hedder det: "If the definition of each individual number did really assert a special physical fact, then we should never be able sufficiently to admire, for his knowledge of nature, a man who calculates with nine-figure numbers." (Frege, 1978, p. 10). Og hvis nogen undervejs skulle have glemt at Mill er håbløs inkonsistent, kommenterer Frege lidt senere igen taldefinitionerne hos Mill, byggende på manipulation med objekter. Er det nødvendigt at kunne observere 000 og 00 0 for at opnå definitionen ' $3 = 2 + 1$ '? "If it were, the number 0 would be a puzzle; for up to now on one, I take it, has ever seen or touched 0 pebbles. Mill, of course, would explain 0 as something that has no sense ..." (Frege, 1978, p. 11).

Et par linier senere vender Frege igen tilbage til spørgsmålet angående definitionen af store tal, denne gang et tal med 18 cifre. Skal dette have mening må det ifølge Mill bygge på en sanseer-

faring. Frege foreslår at Mills position kunne modificeres til at store tal konstrueres (logisk) ud fra mindre tal som så funderes empirisk. Men hvis eksempelvis 11 kan defineres ud fra 10 og 1 uden brug af empiriske fakta, kan 2 (vel?) også konstrueres ud fra 1 og 1, hvorfor Mills empirisme igen afsløres som uigennemtænkt.

Frege konkluderer som resultat af sin Mill-kritik, at numeriske formler synes at kunne eftervises ud fra definitionerne af de enkelte tal ved hjælp af få generelle love, og at disse love hverken bygger på iagttagne fakta eller forudsætter gyldigheden af sådanne. Det næste bliver at se på nogle af de "generelle love" der er involveret. Mill hævder at de ræsonnementer som benyttes i matematikken også repræsenterer generaliseret sanseerfaring, hvilket hænger sammen med den ide at det matematiske ræsonnement handler om noget. Men Frege finder at "Mill always confuses the applications that can be made of an arithmetical proposition, which often are physical and do presuppose observed facts, with the pure mathematical proposition itself" (Frege, 1978, p. 13). Og Frege afviser helt at matematiske ræsonnementer bygger på empiriske generalisationer.

Frege har hermed fået gjort op med den ide at matematiske sætninger skulle være a posteriori og dermed med basisforudsætningen for Mills homogenitetstese. Tilbage bliver så spørgsmålet om de er a priori-analytiske eller a priori-syntetiske. Her foretager Frege en overraskende sontring mellem geometri og aritmetik. Frege begrænser hele sin argumentation til aritmetikken. Og resten af "Die Grundlagen der Arithmetik" består i en argumentation for at aritmetikken er analytisk (og dermed a priori); mens geometrien efter Freges opfattelse kan opfattes på samme måde som Kant opfattede hele matematikken, nemlig som syntetisk (og a priori). I næste kapitel ser vi på Freges talopfattelse der direkte fører til en dualitetstolkning.

180

³Frege henviser til "A System of Logic". Bog III, kapitel 24, §5.

⁴Dette og de følgende citater er fra J. L. Austins oversættelse i den tyske engelske paralleludgave af "Die Grundlagen der Arithmetik".

Socialkonstruktivisme

Virkeligheden eksisterer ikke uafhængigt af og forud for menneskers bestræbelser på at erkende og beskrive den. Det er en indsigel, som kan udlægges radikalt og mere moderat, konstaterer filosofen Finn Collin

Er videnskabelige teorier en afspejling af en objektiv ydre virkelighed, eller er de snarere et produkt af sociale aspekter af selve videnskabsprocessen? Er der overhovedet en objektiv ydre virkelighed, eller er denne snarere genereret af den videnskabelige erkendelsesproces? Dette er spørgsmål som stilles af socialkonstruktivisme. Og socialkonstruktivismens svar er, at virkeligheden, eller i det mindste vores videnskabelige model af den, er en social konstruktion.

Socialkonstruktivismen er den mest radikale fløj af den ny videnssociologi, som voksede frem i begyndelsen af 1970'erne i stærk opposition til traditionel videnskabssociologi og videnskabsfilosofi. Fremtrædende repræsentanter for socialkonstruktivismen er Harry M. Collins, David Bloor og Barry Barnes i England, Bruno Latour, Michel Callon og Pierre Bourdieu i Frankrig, Karin Knorr-Cetina i Tyskland og Steve Fuller i USA. Disse indlægger på talrige punkter indbyrdes forskellige standpunkter, men har alle besvaret de spørgsmål, der blev stillet i indledningen, på en måde, som besemner dem som socialkonstruktivister.

Socialkonstruktivismen er for tiden et meget omdebatteret standpunkt inden for talrige humanistiske og samfundsvidenskabelige discipliner. De følgende refleksioner udspringer af forfatterens studier i socialkonstruktivisme i forbindelse med det forskningsrådsstøttede projekt "Teoretiske og empiriske undersøgelser i videnssociologien med særligt henblik på samfundsforskningens kvalitets-spørgsmål", et projekt der forener forskere fra Københavns Universitet og Handelshøjskolen i København.

Der må skeles mellem en erkendelsesepistemisk og en ontologisk version af socialkonstruktivisme: den sidstnævnte er mere radikal, og podtages ikke af alle konstruktivister. Den erkendelsesteoretiske version går ud på, at videnskabelige teorier ikke er formet af universelle, evige metodeforskrifter, men hovedsageligt af diverse kulturelle og sociale faktorer. Specielt råder videnskaben ikke over rationelle procedurer, hvorved vi systematisk kan tilnærme vores teorier til den ydre virkelighed; derfor kan videnskabelige teorier og begreber ikke i nogen forstand siges at give en repræsentation af virkeligheden.

Den ontologiske version tilføjer, at den virkelighed, som videnskaben beskriver sig med, er skabt af selve den videnskabelige proces. Videnskabelige facts findes ikke førend og uafhængigt af den erkendelsesproces, ved hvilken de "opdages", men er tværtimod et produkt af selve denne proces.

Socialkonstruktivisme har interessante erkendelsesteoretiske indsigter, men de forplumrer dem ved at bevæge sig videre til det mere radikale, ontologiske standpunkt. Jeg vil først se kritisk på den radikale tese, og dernæst tage stilling til den mere moderate version.

Socialkonstruktivisme ønsker at gøre op med realismen, dvs. den opfatteise, at virkeligheden eksisterer uafhængigt af og forud for menneskers bestræbelser på at erkende og beskrive den. Imidlertid opstiller de hypotetisk en ren strømånd som mål for denne kritik, nemlig den position, at der findes én og kun én korrekt beskrivelse af virkeligheden. Dette er imidlertid ikke realisme, men derimod *essentialisme*, altså den tese, at enhver ting fundamentalt har én bestemt "korrekt" klassifikation. Socialkonstruktivisme har ikke svar på at gen-drive denne position, men derved genlægger de kun hvad der har været filosofisk standarddoktrin i det mindste siden empirismens genembrud i 1700-tallet, hvor filosofierne opgav forestillingen om at ting har essenser. I stedet opstod den indsigel, at ting klassificeres af mennesker, ud fra begreber som er menneskelige dannelser og som afspejler menneskelige interesser. Enhver ting har uendelig mange lig-hedspunkter med enhver anden ting, som de kan klassificeres efter; vi klassificerer da ud fra de lighedspunkter, som er af betydning for os. I denne forstand er begreber og klassifikationer menneskeskabte. Men der findes ikke nogen gyldig sluttning herfra til at tingene selv er menneskeskabte, blotte produkter af den proces gennem hvilken de erkendes. For lighedspunkterne findes uafhængigt af vores beskrivelse.

Visse socialkonstruktivister vil gå videre end den traditionelle nominalisme, idet de vil benægte, at ting overhovedet har ligheder, uafhængigt af den måde vi klassificerer dem på. Et simpelt eksempel kan illustrere pointen. Farvevirksomheden kan opdeles på uendelig mange måder, og der er ingen objektiv målestok for, om to farver ligner hinanden så meget, at de bør betegnes med samme term eller med forskellige. En konstruktivist vil sige at det er os der skaber ligheder ved at betegne visse farver med samme ord i vores sprog, som f.eks. "grøn".

Samme sprog drager grænsen mellem farver andetsteds og skaber derved andre ligheder. Dette argument slår sig selv for munden: Hvis der ikke findes objektive ligheder i verden, findes der heller ingen ligheder mellem to ytringer af samme ord, som f.eks. "grøn". Derfor kan ikke alle ligheder være skabt af sproget (eller andre klassificerende praksiser); sproget ligheder må i det mindste forudsættes i sproget (og i de klassificerende praksiser). I modsat fald opløses forestillingen om klassifikation overhovedet og dermed tænkning. Den radikale version af socialkonstruktivismen underminerer sig selv.

Der findes andre argumenter for den ontologiske socialkonstruktivisme; men vi har ikke mulighed for at tage stilling til dem her. I stedet vil jeg vende mig mod den mere moderate version af konstruktivisme, der rummer en kritik af traditionel videnskabsfilosofi, men som dog ikke hævder, at virkeligheden skabes

af forskningsprocessen. Det traditionelle videnskabsfilosofiske billede går ud på, at det er muligt at opstille en strengt formel, rationel videnskabsmetodologi; et sæt af fremgangsmåder, der effektivt upeger den bedste videnskabelige teori på baggrund af en given mængde data. I deres angreb på denne forestilling har konstruktivisme haft betydelig gennemslagskraft, idet de har kunnet trække på videnskabsfilosofiernes egen indbyrdes kritik og selvkritik. Det er ikke mindst Thomas Kuhns og Paul Feyerabendts arbejder, der har spillet en rolle her.

Ifølge socialkonstruktivisme er filosofiernes refleksioner over videnskabens væsen helt uden realitetsforbindelse; den er en rationalistisk fiktion. Undersøgelsen af videnskaben bør i stedet ene og alene være et videnskabeligt anliggende, som skal gennemføres med de sædvanlige empiriske metoder. Videnskabens natur skal blotlægges gennem en sociologisk undersøgelse.

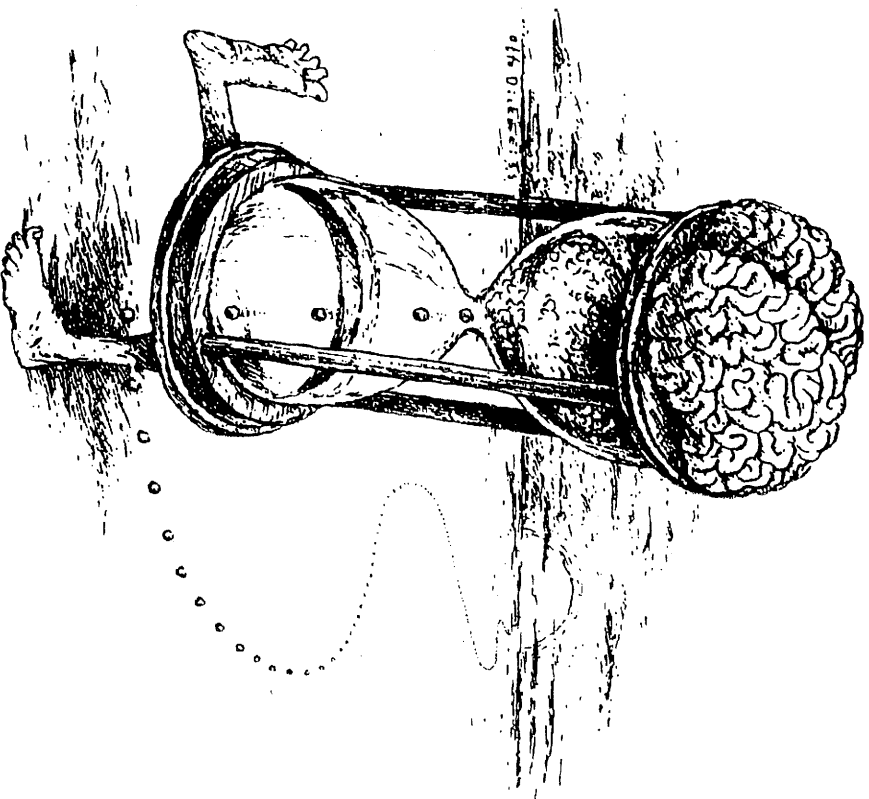
Vi er dermed nået frem til socialkonstruktivismens positive program, ambitionen om at opstille en videnskabssociologi der i detaljer kan forklare videnskabelige teoretisk indhold og fremkomst ud fra sociale faktorer.

Her skal det først bemærkes, at der er et betragteligt skridt fra det negative program til det positive. Kritiken af det traditionelle rationalistiske billede af videnskaben viser naturligvis ikke i sig selv, at en positiv videnssociologi er mulig. Uheldigvis synes meget af diskussionen om dette spørgsmål, både hos tilhængere og kritikere af den nye videnssociologi, at være præget af en simpel dikotomi mellem det rationelle og det sociale, således at påpejgningen af, at den videnskabelige proces ikke er rationel, i det mindste rationel ifølge filosofernes traditionelle målestokke, umiddelbart tages som bevis for at den så er socialt bestemt. Men dette er naturligvis en fejlslutning. Der kunne være tale om andre forklaringer; nævner, som f.eks. det psykologiske.

På dette punkt henviser socialkonstruktivisme imidlertid til et antal overbevisende case-studier, hvoraf det synes at fremgå, at sociale faktorer faktisk har afgørende betydning. Et yndet eksempel er Paul Formans studie i kvantefysikkens fremkomst, hvori det sandsynliggøres, at opslutningen i Tyskland omkring kvantemekanikken i tiden umiddelbart efter Første Verdenskrig skyldes visse generelle antiderministiske tanker i tiden, ikke at teorien var objektivt velbegrunder.

Socialkonstruktivismen repræsenterer en omvæltning af alle traditionelle forestillinger om, hvad videnskab er, og naturligvis har den ikke fået umodsigende. Her vil jeg udelukkende beskæftige mig med kritik af mere filosofisk art.

En gængs kritik har vedrørt mistanken om, at der er en eller anden form for cirkularitet i det socialkonstruktivistiske projekt. Iflg. socialkonstruktivismen skal videnskaben selv at forstå sig selv ved videnskabelige metoder. Men leder dette ikke til paradokset, idet vi her har en erkendelsesart, der undersøger sig selv?



de der leder til god videnskab. Men at man kan gøre dele af videnskabsmetodologien empirisk forkommer at være en korrekt og konsvensrig observation.

Socialkonstruktivismen kan altså ikke forkastes ud fra en argumentation om, at enhver empirisk undersøgelse af videnskab må lede til cirkularitet eller anden inkohærens. På den anden side undgås inkohærens kun, hvis socialkonstruktivismen opgiver den "demaskerende" bestræbelse, som prægede mange af socialkonstruktivisternes tidlige arbejder. Den må erstattes af en holdning, som ser videnssociologiens funktion som den af give et kritisk korrektiv til videnskabsprocessen.

Lad os til slut vende tilbage til den radikale, ontologiske version af socialkonstruktivismen. Den påstand, at virkeligheden skabes af vores videnskabelige diskurs, er så kontraintuitiv, at det kræver en forklaring af den i dag accepteres af så mange. Det kunne være fristende afslutningsvis at vende socialkonstruktivismes redskaber mod den selv for at søge at besvare dette spørgsmål. Hvis det altid er væsentlige social determinanter for enhver videnskabelig retning, hvad er det da for sociale faktorer, der har gjort socialkonstruktivismen til en modetring lige nu?

Et svar kunne være et behov fra den akademiske verdens side for at fastholde den teoretiske virksomheds afgørende betydning for hvad der sker i resten af verden, herunder i samfundet - uden at skulle påtage sig de anstrengelser som universitetsmarxisterne gjorde i 70'erne. Marx fastslog, at filosofierne (videnskabsmændene) blot havde fortolket verden, og at det nu er på tide at forandre den. Det forsøg på at ændre verden, der udgik fra universitetsmiljøerne, vakte ikke gyldenlig interesse i det øvrige samfund og ebbede hurtigt ud; retrospektivt indrømmer mange af dens ophavsmand i dag, at det ikke fortjente bedre. Nu siger tænkerne i stedet, at det at (om)fortolke verden gennem videnskabelig tænkning er at ændre den - på en måde, som kræver langt mindre indsats på barrikaderne, og som i kraft af sin usynlighed ikke løber nogen større risiko for at blive gendrevet af den ydre verdens handlinger. Ikke underligt, hvis konstruktivismen er akademikkens "spontane metafysik".



Dr. phil. Folan Collins, Institut for Filosofi, Pædagogik og Retorik ved KU. Han er pt. involveret i forskningsprojektet "Videnssociologi" med særligt blik på kvaliteter i samfundsforskningen sammen med psykologen Bo Jacobsen, datalogen Jan Preiss-Heje og sociologen Heine Andersen. Det er projektets sigte at "undersøge betydningen af sociologiske faktorer for forskningskvalitet og kvalitetsoptimerelser".

Dette spørgsmål bliver især presserende, fordi så mange af socialkonstruktivisternes arbejder synes at sigte mod at underminere videnskabens sandhedskrav. Et motiv hos mange af socialkonstruktivisterne har været at sætte spørgsmålstegn ved naturvidenskabens enorme prestige i moderne vestlige samfund. De har set den store samfundsmæssige rolle, som naturvidenskab og dens præsteskab af eksperter spillede, som en fare for demokratiet, og har betragtet den af naturvidenskabens afledte teknologi som en trussel mod mennesket og miljøet. Siget med den videnssociologiske indsats var at vise, at videnskabens ikke nyder nogen privilegeret rationalitet eller besidder nogen særligt udmærket metode. Specielt er videnskaben som alt menneskeligt altid politisk, hvorfor der bør stilles politiske spørgsmål til alle videnskabelige teorier og teknologier: Hvem har fremsat dem, hvem støtter dem, og hvem vil få gavn af det, hvis de opnår almindelig tilslutning?

En sådan position er, hvis den formuleres radikalt, næppe koherente. Det er jo unødige-ligt, at denne kritik på et tidspunkt vendes mod videnssociologien selv. Hvis videnssociologi-ens sigte er at underminere naturvidenskabens, så vil samfundsvidenskabens, herunder hvis de sociologien, selv blive undermineret hvis de samme argumenter uden videre lader sig overføre.

Den eneste måde at afbøde denne kritik på, inden for den "devaluerende" anvendelse af videnssociologien, er at hævde, at der er en afgørende forskel på naturvidenskab og samfundsvidenskab. Man hævder med andre ord, at naturvidenskabelige resultater er "sociale konstruktioner", der afspejler træk ved erkendelsesprocessen som socialt fænomen snarere end den ydre virkelighed, men at samfundsvi-

denskab, herunder videnssociologi, derimod giver en korrekt repræsentation af den sociale virkelighed. Dette har faktisk været hævdet af nogle socialkonstruktivister, såsom Harry Collins. Men det synes meget vanskeligt at begrunde, at de indvendinger, som har været rejst mod naturvidenskabens som en repræsentation af virkeligheden, skulle gælde mindre for samfundsvidenskaberne.

Der er imidlertid en anden måde at fortolke socialkonstruktivismens resultater, som bl.a. repræsenteres af Steve Fuller. Den deler det kritiske perspektiv på videnskaben, idet den hævder, at en videnssociologisk undersøgelse undertiden underminerer den undersøgte teoris troværdighed. Men i modsætning til den første fortolkning ser den en sådan opdagelse som udgangspunkt for en bestræbelse på at forbedre den videnskabelige praksis, ikke som basis for en forkastelse af den pågældende teori eller af videnskabelig tænkning som sådan. Videnskabssociologien skal altså bruges som et redskab til videnskabens selvforkendelse, selvkritik og selvforbedring. Videnskabssociologien kan bevare de normative spørgsmål vedrørende den rette måde at bedrive videnskab på, som videnskabsfilosofien måtte give op over for. Ikke mindst kan den bruges til at tage politisk stilling til videnskabelige forskningsprojekter og deres ønsketværdighed.

Tanken om at bruge videnssociologien til videnskabens forbedring leder ikke til refleksive paradokser eller regresser. Dog kan denne naturaliserende videnskabsmetodologi ikke stå alene: For at man kan komme i gang med den selvforbedrende proces, som skitseres, må man jo dog have visse a priori - dvs. uafhængige og på forhånd fastsliggende - ideer om, hvad god videnskab er. Ellers er det ikke muligt at fastslå empirisk, hvilken fremgangsmå-