En Videnskabelig duo:

Matematikkens samspil med fysik 1809 – 1950[1]

Af Jesper Lützen
Matematisk afdeling, KU
email: lutzen@math.ku.dk

Indledning

Samspillet mellem matematik og fysik opfattes ofte som en "anvendelse" af et stykke færdigudviklet matematik indenfor fysik, en anvendelse hvis effektivitet Eugin Wigner i 1960 betegnede som "unreasonable". Det urimelige skulle bestå i at matematik, som er undfanget af den ubesmittede menneskelige tanke, kan bruges til at beskrive den fysiske natur og endog forudsige dens virkemåde. En historisk analyse af vekselvirkningen mellem de to fag viser imidlertid at matematik og fysik i historiens løb har vekselvirket på mere nuancerede måder end ideen om "anvendelse" af matematik i fysik lader ane. Vekselvirkningen har i de fleste tilfælde været meget mere intim, idet mødet mellem fagene har beriget dem begge og ofte har været afgørende for begges videre udvikling. Det kan ikke afvises at der findes eksempler på at ren matematik har vist sig umiddelbart anvendelig inden for en gren af fysikken, i stil med den rene talteoris anvendelse i kryptografi, men det hører til sjældenhederne. Oftest vil ufærdig matematik og ufærdig fysik mødes og under en kompliceret proces berige hinanden så der til sidst fremkommer en tilfredsstillende matematisk beskrivelse (model, forklaring) af det fysiske fænomen eller område.

I denne artikel vil jeg fremdrage nogle eksempler på denne proces. I de fleste tilfælde vil jeg fokusere på hvordan matematikken er blevet påvirket af mødet med fysik. Andre artikler i dette nummer af Matilde giver eksempler på hvad fysik kan få ud af mødet.

Jeg vil især hente eksemplerne fra min egen forskning i Liouvilles matematik (1809-1882), Hertz' mekanik (1894) og distributionsteoriens forhistorie (?-1950)

Liouvilles matematik

Liouville blev bl.a. ved École Polytechnique opdraget i en matematiktradition, hvori de vigtigste emner var udsprunget direkte af fysiske problemstillinger. Han tilsluttede sig med glæde denne tradition og understregede senere i livet at de fleste vigtige matematiske discipliner står i stor gæld til fysikken, især mekanikken. Han bidrog som bekendt selv meget til videreudvikling af den analytiske mekanik og andre oplagt fysisk inspirerede discipliner som potentialteori, og selv hans bidrag til mere "rene" matematiske områder var ofte direkte eller indirekte udsprunget af fysik. For eksempel beviste han sin sætning om konforme afbildninger af rummet i forbindelse med en analyse af William Thomsons (Lord Kelvins) ideer om elektriske billeder. Liouville udviklede også en meget interessant, men for størstedelen upubliceret spektralteori for en speciel type integraloperatorer, som var direkte inspireret af hans arbejde med ligevægtsfigurer for roterende væskeplaneter.

Mere overraskende er det måske at Liouvilles teori for differentiation af arbitrær orden, d.v.s. af ikke-heltallig orden, havde sine rødder i fysik. Hans notesbøger afslører at han udviklede teorien for at kunne løse visse integralligninger, som er principielt vigtige i det fysiske forskningsprogram, som Laplace havde lanceret. Laplace havde foreslået, at ligesom himmellegemernes bevægelser kunne forklares ud fra Newtons gravitationskræfter mellem materiens dele, så skulle alle andre fysiske fænomener forklares ved fjernkræfter mellem disse dele og eventuelle vægtløse fluida. I tråd hermed havde Ampère foreslået at elektrodynamiske kræfter skulle kunne føres tilbage til en elementarkraft mellem to infinitesimale lederelementer. Liouville, som var Ampères studerende, påpegede at hvis størrelsen af denne elementarkraft skal deduceres fra makroskopiske eksperimenter, blev man ledt til en integralligning, som kunne løses ved differentiation af ikke-heltallig orden. Det fysiske udgangspunkt for Liouvilles teori viser sig i den færdige teori, bl.a. ved at definitionen af de ikke-heltallige afledede kun virker efter hensigten, hvis de betragtede funktioner går mod nul i uendeligt, sådan som kræfter og potentialer gør.

Eksemplet viser at noget så uhåndgribeligt som et fysisk forskningsprogram (her den Laplacianske fysik) kan have direkte indflydelse på hvilke matematiske teorier der udvikles og endog på teoriernes udformning.

Et knapt så overraskende, men langt vigtigere eksempel på et stykke fysiskinspireret matematik er den teori for differentialligninger, som Liouville udviklede i samarbejde med sin ven Sturm, og som senere kom til at bære deres navne. De var begge stærkt interesserede i Fouriers og Poissons teori for varmeledning i homogene materialer (og den dertil udviklede teori for trigonometriske rækker) og forsøgte at generalisere teorien til varmeledning i heterogene materialer. I det generelle tilfælde kunne de dog ikke finde brugbare eksplicitte udtryk for løsningerne (egenfunktionerne), hvorfor de måtte "nøjes" med, ud fra selve ligningen, at undersøge kvalitative egenskaber ved løsningerne, så som antallet og opførslen af deres nulpunkter (Sturms sammenlignings- og oscillatonssætninger)[2]. På grundlag af Sturms resultater lykkedes det for Liouville at bevise konvergensen af den generaliserede Fourierrække for en "arbitrær" funktion.

Det var således generaliteten af det fysiske problem, som tvang de to venner til at tage et stort skridt hen imod en kvalitativ teori for differentialligninger. En sådan udvikling fra en formelbaseret kvantitativ matematik hen mod en mere kvalitativ begrebsorienteret matematik er ofte blevet fremhævet som et vigtigt kendetegn ved matematikkens udvikling i 1800-tallet. Vi ser altså her et eksempel på at en fysisk teori har været medvirkende til et fundamentalt kursskifte i matematikken.[3]

Hertz' mekanik

I løbet af 1800-tallet forskød det matematiske tyngdepunkt sig mod Tyskland, hvor en neohumanistisk opfattelse af matematik som et produkt af den menneskelige ånd overskyggede matematikkens anvendelighed. Det førte til en større opsplitning mellem ren og anvendt matematik, som dog nok er blevet overdrevet af mange matematikhistorikere. For selv om matematikken opnåede en større autonomi i forhold til sine anvendelser, så vedblev anvendelser, og især anvendelser i fysik, at være en stor inspirationskilde for matematikken. Når det for eksempel ofte fremstilles, som om ikke-euklidisk og Riemannsk geometri kom til verden som resultat af en ren matematisk analyse af aksiomssystemet for geometrien og især parallelaksiomets stilling, giver det et helt skævt billede af det faktiske historiske forløb. De centrale aktører i historien: Gauss, Lobachevski, Riemann og Helmholtz var ikke interesserede i aksiomssystemer, men ville undersøge det fysiske rums natur, ved først at undersøge de matematisk mulige geometrier for dernæst empirisk at undersøge, hvilket rum vi virkelig lever i.

Da den ny ikke-euklidiske geometri i sin riemannske differentialgeometriske form blev alment kendt omkring 1870 benyttede matematikere som Lipschitz og Darboux den øjeblikkeligt til en ny differentialgeometrisk formulering af mekanikken. Også her gav den ny fysiske situation anledning til indførelse af ny matematiske begreber og resultater. Også fysikeren Heinrich Hertz tog (stort set uafhængigt af sine matematikkolleger) et lignende skridt. I de sidste tre år af sit liv skrev han bogen *Prinzipien der Mechanik* (1894), hvori han formulerede et grundlag for mekanikken, som ikke opererede med kræfter eller energi som fundamentale begreber, og som var formuleret i differentialgeometriske termer. I indledningen til bogen skrev Hertz at den matematiske form og det fysiske indhold af bogen i princippet er uafhængige af hinanden, om end de gensidigt støtter hinanden. Hans efterladte noter og kladder til bogen afslører dog, at medens Hertz arbejdede med bogen smittede matematikken og fysikken af på hinanden på mere afgørende vis end den færdige bog lader ane. Et sted, hvor fysikken smittede afgørende af på den matematiske form var i Hertz' definition af "den reducerede komponent af en vektorstørrelse i en given retning". Dette begreb, som svarer til den covariante komponent af vektoren, indførte Hertz i sine manuskripter fordi han ønskede at Lagranges og Hamiltons ligninger skulle have det sædvanlige udseende. Her er altså et eksempel på at et vigtigt differentialgeometrisk begreb blev indført af fysiske årsager.

Det modsatte findes der også eksempler på i Hertz' mekanik. For eksempel opstillede Hertz et billede (en model) af materien som bestående af uendelig små ens massedele. Filosoffer har været interesserede i dette billede af materien, fordi det senere blev inspirationskilde til visse elementer i Wittgensteins *Tractatus*. Nu viser Hertz' kladder at de infinitesimale massedele blev indført fordi de tillod Hertz at udlede det for ham så fundamentale ikke-euklidiske linieelement i konfigurationsrummet ud fra den euklidiske afstand mellem massedelene. Massedelene blev altså indført for at få den matematiske formalisme til at passe.

Hertz indførte nok den differentialgeometriske formalisme i konfigurationsrummet fordi den tillod ham at behandle mekaniske systemer under ét på linie med den sædvanlige behandling af en enkelt punktmasse. Men som indførelsen af massedelene viser, virkede den matematiske formalisme tilbage på det fysiske billede. Hertz' billede af materien fik ikke nogen betydning for fysikkens videre udvikling, men der er mange betydningsfulde eksempler på at den matematiske formalisme ud over at levere et kvantitativt sprog til at formulere sammenhænge mellem fysiske størrelser også er medvirkende ved *dannelsen* af de fundamentale størrelser og begreber. Ja, bortset fra begreberne tid, sted og masse er de fleste fysiske størrelser nok begrebsliggjort eller i hvert fald kvantificeret med matematikkens hjælp. Selv et begreb som hastighed blev først et brugbart kvantificeret begreb i sammenhæng med differentialregningens udvikling, og energibegrebet blev først dannet efter at matematiske fysikere havde opdaget at newtonske kræfter kunne deduceres som gradienten af et potential. I begyndelsen var potentialet blot en matematisk hjælpestørrelse, men gradvist og især takket være Helmholtz skiftede den karakter (og fortegn) og blev til en potentiel energi, som sammen med varme mm. udgjorde en bevaret størrelse: energi.

Distributionsteori

Indtil ca. 1900 var matematik filosofisk set tæt koblet til virkeligheden. Platon betragtede matematik som en beskrivelse af den ideelle virkelighed, Aristoteles betragtede den som en abstrakt beskrivelse af virkeligheden medens Kant argumenterede for at matematik var en a priori forudsætning for vores beskrivelse af virkeligheden. Men bl.a. som følge af opdagelsen af den ikke-euklidiske geometri opstod den formalistiske matematikfilosofi, ifølge hvilken matematik beskæftiger sig med logiske deduktioner fra et sæt konsistente men i øvrigt vilkårligt valgte aksiomer. Matematikken blev dermed i princippet helt uafhængig af den virkelighed, som fysikken prøver at beskrive. Det var først i denne forbindelse at det faldt nogen ind at undre sig over "the unreasonable effectiveness of mathematics".

Der ligger givetvis et dybt filosofisk problem begravet i denne effektivitet, men jeg mener man overspiller problemet, hvis man ud fra en formalistisk matematikfilosofi slutter at matematikken i det 20. århundrede har udviklet sig ubesmittet af den omgivne verden og videnskab. Matematiske aksiomssystemer og strukturer bliver jo ikke til ved at en matematiker opfinder dem vilkårligt. De er en del af den dynamik som driver matematikken videre, hvor samspil med andre fag ikke mindst fysik stadig spiller en væsentlig rolle. Som et eksempel kan nævnes distributionsteoriens tilblivelse.

Allerede i 1822 i forbindelse med sit studium af varmeledning ombyttede Fourier integration og summation i udtrykket for Fourierrækken for en vilkårlig funktion og konkluderede derfra, at funktionen

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx\right)$$

havde den egenskab, at hvis den blev ganget med *f(x)* og integreret mellem $-\pi$ og π ville resultatet blive *f(0)*. Efter at uendelige størrelser og divergente rækker blev helt bandlyst i matematikken og det nu accepterede funktionsbegreb blev generelt accepteret, måtte en sådan funktion imidlertid afvises. Da Darboux udgav Fouriers samlede værker tilføjede han således en fodnote, hvori han erklærede at den ovenstående sum ikke havde nogen mening.

Funktioner med lignende egenskaber dukkede dog op i forskellige områder af fysikken. I ellæren var det svært at undgå sådanne funktioner i forbindelse med punktladninger og mere generelt i forbindelse med Greens funktion. Kirchhoff indførte eksplicit funktionen i 1882 og den indgik centralt i Heavisides analyse af telegrafi og elektriske netværk. Her blev den defineret som den afledede af Heavisides stepfunktion. Sit navn fik funktionen dog først i 1926 af Dirac, som benyttede den på afgørende vis i sin fremstilling af kvantemekanikken. Alle disse anvendelser af deltafunktionen skete dog uden for den etablerede matematik. Ja, von Neumann nævner selv at det var denne funktions illegitimitet, som ansporede ham til at udvikle sin egen version af kvantemekanikken.

Laurent Schwartz var som bekendt den første som fandt en legitim indførelse af deltafunktionen inden for distributionsteorien. Han var dog nok så meget inspireret til sin udvidelse af funktionsbegrebet af overvejelser omkring generaliserede løsninger til differentialligninger. I klassisk stringent analyse kan $f(x-t)$ kun være løsning til bølgeligningen, hvis f er to gange differentiabel. Dette er uheldigt, da man jo sagtens kan forestille sig bølger med kanter. Fra slutningen af 1800-tallet opstod der derfor forskellige metoder til at generalisere løsningsbegrebet, så også ikke-differentiable funktioner kan siges at være løsninger til for eksempel bølgeligningen.

Schwartz fortæller i sin selvbiografi at han ikke var helt tilfreds med de eksisterende generalisationer, fordi det forblev et mysterium hvad de afledede af funktionerne var. Det var dette spørgsmål han fik afklaret med sin distributionsteori udviklet i perioden 1945 – 50.

Hvor problemerne, som ledte til distributionsteorien således bl.a. kom fra fysik så kom løsningen fra den netop udviklede funktionalanalyse. Denne teori var nok udviklet som en ren matematisk disciplin, om end anvendelsen af Hilbertrum inden for kvantemekanikken givetvis havde givet feltet ekstra liv. Men som det ofte sker, viste anvendelsen af funktionalanalysen inden for distributionsteorien sig at åbne nye veje inden for den anvendte disciplin (funktionalanalyse). Dieudonné påpegede nemlig over for Schwartz, at det ville være ønskværdigt, hvis han kunne udlede det limesbegreb, han havde indført i distributionsrummene, fra en egentlig topologi. Det gav ophav til L-F topologierne.

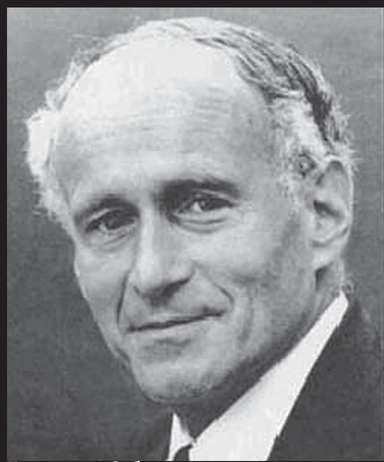
Igen ser vi hvordan fysikken (her ellære, kvantemekanik og bølgeudbredelse) gav anledning til fundamentale matematiske begreber.

Konklusion

I de godt 100 år, der gik mellem Liouville og Schwartz, ændredes samspillet mellem matematik og fysik sig både sociologisk og filosofisk. Sociologisk set er det værd at bemærke at medens 1800-tallets videnskabsmand meget ofte var matematiker og fysiker i samme person, så blev det matematiske og det fysiske samfund stort set disjunkte i det 20. århundrede. For eksempel tilbragte Fourier megen tid i laboratoriet, hvor han eksperimenterede med de varmeledningsfænomener, hvis matematiske beskrivelse ledte ham til Fourier-rækker og deltafunktionen, hvorimod Schwartz kun kendte de fysiske problemer på anden hånd. Filosofisk set havde matematikken på Liouvilles tid sin rod i virkeligheden, medens den på Schwartz' tid var helt frigjort fra virkeligheden. Alligevel fortsatte det komplicerede samspil mellem de to fag gennem hele perioden i en form, som var til stor gavn for dem begge. Denne gensidige berigelse er utvivlsomt en afgørende forudsætning for matematikkens effektivitet i naturbeskrivelsen.


Heinrich Hertz


Joseph Liouville


Laurent Schwartz

Noter

1 Artiklen er en forkortet udgave af forfatterens tiltrædelsesforelæsning

2 Det kan nævnes at Sturms sætning om antallet af reelle rødder af et polynomium på et interval også var et resultat af disse undersøgelser. Den kan opfattes som en diskret udgave af Sturm's oscillationssætning.

3 Senere skubbede problemet om solsystemets stabilitet i samme retning.