Hvad er matematik
Tinne Hoff Kjeldsen

1. udgave, 1. oplag 2011

Citater fra bøger, der ikke foreligger i en officiel dansk udgave, er oversat af Tinne Hoff Kjeldsen og Marianne Holmen.

Omslag: Stoltze Design Aps
Typografisk tilrettelægning og sats: Dorte Cappelen
Sat med TheAntiquaB og Futura hos Dorte Cappelen
Forlagsredaktion: Dorte Ipsen
Tryk: Livonia Print

ISBN: 978-87-500-4104-7

www.akademisk.dk

INDHOLD

7 INDLEDNING

15 KAPITEL 1 MATEMATIKKEN I IDEERNES VERDEN?
28 KAPITEL 2 EUKLIDS ELEMENTER – BEVISER OG SIKKER VIDEN OM VERDEN
49 KAPITEL 3 BORDE, STOLE OG ØLKRUS: DET EUKLIDISKE SYNDEFALD OG NYE GEOMETRIER
72 KAPITEL 4 PARADOKSER OG MYSTERIET OM UENDELIGHEDER
91 KAPITEL 5 GRUNDLAGSKRISEN – INTUITION, LOGIK ELLER FORMALISME
107 KAPITEL 6 MATEMATIKKEN UNDER FORANDRING I DET 20. ÅRHUNDREDE – NICOLAS BOURBAKI, STRUKTURALISMEN OG »DEN NYE MATEMATIK«
124 KAPITEL 7 2. VERDENSKRIGS INDFLYDELSE PÅ UDVIKLINGEN AF NY MATEMATIK
141 KAPITEL 8 »MATEMATIKKENS URIMELIGE ANVENDELIGHED« – MODELLER OG PROCESSER

Enzensberger, H.M. (1997). *Taldjævlen. En godnatbog for alle, der er bange for matematik.* København: Gyldendal.
Hilbert, D. (1925). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95, s. 161-190.
Maor, E. (1991). *To Infinity and Beyond.* Princeton: Princeton University Press.
Purkert, W. & Ilgauds, H.J. (1987). *George Cantor 1845-1918.* Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser Verlag.
Rucker, R. (1982). *Infinity and the Mind.* Boston: Birkhäuser.
Topsøe, F. (2002). *Matematik Y: Introduktion til abstrakt matematik.* Institut for Matematisk Fag, Københavns Universitet.

KAPITEL 5

GRUNDLAGSKRISEN – INTUITION, LOGIK ELLER FORMALISME

Cantors paradis af uendelige mængder og transfinite (uendelige) tal, se kapitel 4, åbnede for en masse nye problemstillinger i matematikken, men gav også anledning til en del problemer og diskussioner. Cantor udarbejdede sin mængdelære som et fundament for matematikken, men der gik ikke ret lang tid, før man opdagede, at man kunne formulere paradoksale udsagn i Cantors mængdelære. Hvorfor er det et problem, kan man spørge, når bare det virker? Og matematikken ser jo unægteligt ud til at virke. Men det er det, fordi det udgør et erkendelsesmæssigt problem, der får matematikkens grundlag til at smuldre. Indeholder et matematisk system en inkonsistens, så kan man nemlig bevise alle udsagn – man kan for eksempel bevise at både et udsagn og dets negation gælder, og det går ikke.

Matematikkens særlige status blandt videnskaberne skyldes den sikkerhed, vores matematiske resultater hviler på. Matematikken tager ikke fejl, den leverer sand viden. Det passer også med de flestes erfaringer. At 2+2=4 er aldrig rigtigt til debat: Det var rigtigt i går, det er rigtigt i dag, og vi er 100 % sikre på, at det også er rigtigt i morgen. Det er ikke til forhandling, ligegyldigt hvordan vi vender og drejer det, så er 2+2 med tvingende nødvendighed lig med 4.

I de første kapitler så vi, hvordan man tidligere sikrede matematikkens grundlag ved at starte med aksiomer, som blev opfattet som selvindlysende sandheder om verden, hvorfra man udledte matematiske resultater ved hjælp af logisk gyldige slutningsregler. I den situation er det sådan, at hvis aksiomerne er sande, så er de erkendelser, man kan udlede fra dem via logikkens regler, også nødvendigvis sande. Dette grundlag for matematikken forlod man omkring 1900, hvor kravet om, at aksiomerne skal være selvindlysende sande, blev opgivet, bl.a. som en konsekvens af udviklingen af den ikke-euklidiske geometri, som vi så i kapitel 3. Det betød, at man begyndte at opfatte matematikken som en autonom videnskab, der er uafhængig af virkeligheden. Matematikkens sandhed står og falder dermed ikke længere med, om aksiomerne er sandheder om virkeligheden. Det afgørende kriterium er, at aksiomsystemet er modsigelsesfrit. Det er således aksiomsystemets konsistens der afgør, om vores matematiske viden er sand. Om aksiomerne har noget med virkeligheden at gøre eller ej, har i princippet ingen betydning.

Det er altså helt afgørende, at det grundlag, vi baserer vores matematiske viden på, er modsigelsesfrit. Derfor var det også problematisk, da paradoksale udsagn dukkede op i Cantors teori for uendelige mængder. Cantor var selv opmærksom på problemet. I 1899 skrev han til Dedekind, at man ikke kan tale om mængden af alle mængder uden at ende i en selvmodsigelse (Dauben 1979). Det betød, at hvis man konstruerede mængdelæren således, at det blev muligt at danne mængden af alle mængder, så ville det give anledning til paradoksale udsagn. I dette kapitel skal vi se nærmere på den grundlags-

krise, matematikken blev kastet ud i i begyndelsen af det 20. århundrede og de tre løsningsforslag, der ofte omtales som matematikkens tre grundlagsskoler: logicismen, intuitionismen og formalismen. Men først skal vi ses lidt nærmere på paradokserne, og hvordan de opstår.

PARADOKSALE UDSAGN

De paradoksale udsagn kommer, når man konstruerer sætninger, der er selv-refererende, altså sætninger, der henviser til sig selv. Et af de kendteste af sådanne udsagn er det såkaldte løgnerparadoks. Paradokset fremkommer af løgnersætningen, som siger, »denne sætning er ikke sand«. Hvis vi antager, at sætningen er sand, så kan vi slutte, at sætningen er falsk. Hvis vi omvendt antager, at sætningen er falsk, så kan vi slutte, at den er sand.

Bertrand Russell offentliggjorde i 1903 et paradoks, der påviste en modstrid i Cantors mængdelære. Cantor havde defineret en mængde M som en samling af velbestemte objekter (elementer) m af vores anskuelse eller vores tænkning. Paradokset opstår, som Russell gjorde opmærksom på, hvis man ser på mængden af alle mængder, der ikke er element i sig selv. Problemet med mængden af alle mængder, der ikke er element i sig selv, er, at mængden tilsyneladende *alligevel* er element i sig selv, hvis og kun hvis den ikke er element i sig selv.

Der findes mange versioner af Russells paradoks. Et af de mere illustrative er Ota Solgryn-pakke versionen (Topsøe 2002, s. 130), som er inspireret af billedet på Otas havregrynspakker. På billedet ser man en dreng komme løbende. Drengen har en Ota Solgryn-pakke i hånden, og på denne pakke er der selvfølgelig også et billede af en dreng, der kommer løbende med en Ota Solgryn-pakke, på hvis forside der igen er en dreng, der kommer løbende med en Ota Solgryn-pakke i hånden, osv. Selvreferencen er meget tydelig, og vi definerer nu en Ota Solgryn-mængde til at være en mængde (lad os kalde den x), der har sig selv som element; dvs. en mængde x er en Ota Solgryn-mængde, hvis x er indeholdt i sig selv. Nu er det sådan, at det ikke er alle mængder, der er Ota Solgryn-mængder. Vi kan nemlig sagtens komme i tanke om mængder, der ikke indeholder sig selv, f.eks. mængden af alle matematikere, mængden af alle filosoffer og mængden af alle logikere osv. Følger vi Cantors beskrivelse af, hvad vi skal forstå ved en mængde, så er disse alle sammen mængder, og ingen af dem indeholder sig selv som element (mængden af alle matematikere er jo ikke en matematiker).

I tanken kan vi nu forestille os alle de mængder, der ikke indeholder sig selv som element, altså vi tænker på alle de mængder, der *ikke* er Ota Solgryn-mængder. Dem kan vi sagtens tænke på som en samling, og dermed udgør de ifølge Cantors definition en mængde. Denne mængde kan vi kalde for R. R betegner altså mængden af alle mængder, der ikke indeholder sig selv som element. Det vil sige, en mængde m er element i R, hvis og kun hvis m ikke indeholder sig selv. Vi kan så spørge om R selv er en Ota Solgryn-mængde, altså om R er indeholdt i sig selv. Hvis R er indeholdt i sig selv, så er R en Ota Solgryn-mængde, og dermed er R ikke element i R, idet R jo består af alle de mængder, der *ikke* er Ota Solgryn-mængder. Vi når altså frem til, at hvis R er indeholdt i sig selv, så er R ikke indeholdt i sig selv; og omvendt, hvis R ikke er indeholdt i sig

selv, så er R ikke en Ota Solgryn-mængde, men så er R element i R, og dermed er R indeholdt i R. Konklusionen bliver altså, at R er indeholdt i sig selv, hvis og kun hvis R ikke er indeholdt i sig selv. Russell brugte ikke Ota Solgryn-pakker som illustration, men hans tankegang var den samme, og dermed havde han påvist en selvmodsigelse i Cantors mængdelære.

Paradokserne i mængdelæren gav anledning til bekymring, da de tydeligt viste, at matematikken ikke hvilede på et sikkert grundlag. Det var en af grundende til, at nogle af tidens førende matematikere og logikere i begyndelsen af det 20. århundrede for alvor begyndte at interessere sig for matematikkens grundlag. Der blev arbejdet for at skabe at sikkert grundlag på tre forskellige fronter, som vi skal se nærmere på i det følgende.

LOGICISMEN

Det logicistiske projekt gik ud på at reducere matematik til logik. Ved at definere matematikkens objekter i logiske termer, var det tanken, at de matematiske teorier kunne udledes ud fra logiske principper. Dermed ville matematikkens resultater være logiske sandheder, og matematikkens autoritet som sikker viden ville igen være hævet over enhver tvivl. I praksis gik det igennem mængdelæren, og paradokserne i mængdelæren gjorde det lysende klart, at mængdelærens eget grundlag måtte sikres. Logicisternes ide var at hele projektet kunne redes ved at formulere mængdelæren i logikkens sprog og basere den udelukkende på logiske aksiomer.

Man hævder ofte, at den logicistiske skole blev grundlagt af den tyske matematiker og filosof Gottlob Frege (1848-1925), men hans arbejde slog ikke rigtigt igennem. Det var først med

Russells arbejder små 20 år senere, at Freges ideer blev kendt gennem Russells publikationer og videreudvikling af Freges tanker. Frege forsøgte i tobindsværket *Grundgesetze der Arithmetik* at gennemføre det logicistiske program for aritmetikken, det vil sige for læren om tallene. Da bind 2 var i trykken, opdagede Russell, at den måde, Frege definerede mængder på, gav anledning til en modstrid – nemlig til Russells paradoks, som vi netop så gennemgået. Frege opfattede Russells paradoks som en sønderlemmende kritik af sin teori, et ægte dødsstød, og han kom sig aldrig rigtig over chokket. Til Russell skrev han:

> Deres opdagelse af modstriden kom som den største overraskelse for mig, ja nærmest med bestyrtelse, da det har rystet det grundlag, jeg ville bygge aritmetikken på ... [Sagen er] endog endnu mere alvorlig da ... ikke kun grundlaget for min aritmetik, men det eneste mulige grundlag for aritmetik ser ud til at forsvinde ... Under alle omstændigheder er Deres opdagelse yderst bemærkelsesværdig og vil måske forårsage store fremskridt inden for logik, hvor uvelkommen den end ved første øjekast ser ud til at være. (Citeret fra Shapiro 2000, s. 115)

Der er ikke noget værre for en forsker, end at se sit arbejde blive skudt i sænk, når man ellers var af den overbevisning, at man var færdig, og at det hele var bygget på et solidt fundament. Derfor kan det ikke undre, at Russells paradoks gav anledning til en del frustration. For Frege blev det skæbnesvangert, og førte til at han opgav projektet.

Russell mente dog ikke, at paradokset havde som konsekvens, at det eneste mulige grundlag for aritmetikken forsvandt. Russell arbejdede ufortrødent videre og forsøgte sammen med matematikeren Alfred North Whitehead (1861-1947) at indfri det logicistiske projekt i mamutværket *Principia Mathematica*. For at løse paradokset udviklede Russell sin såkaldte typeteori, hvor han konstruerede typerne således, at elementerne i en mængde er af lavere type end selve mængden. Dermed undgik han problemet med selvreference, da en mængde af elementer, ikke selv kan være element i mængden, fordi elementerne skal have en lavere type end mængden selv.

Det lykkedes imidlertid ikke Russell og Whitehead at redde det logicistiske projekt. Det viste sig nemlig, at for at få hele mængdelæren med, var de nødt til at indføre et uendeligheds-aksiom, der sikrer, at der findes uendelige mængder. Problemet er, at et sådan aksiom ikke er af logisk art. At der findes uendelige mængder følger ikke som en logisk nødvendighed, så for at sikre mængdelæren kunne man ikke nøjes med logik alene. Det lykkedes således ikke at reducere matematikken til logik.

INTUITIONISMEN

Den intuitionistiske skole blev grundlagt af den hollandske matematiker L.E.J. Brouwer (1881-1966) (Shapiro 2000, s. 173-197). Udgangspunktet for Brouwer var at sikre matematikkens fundament ved at bygge den op »fra bunden« af. For Brouwer betød det, at man først skulle sikre – konstruere – de naturlige tal og derfra udvikle – konstruere – matematikken. Det lyder jo meget fornuftigt, og hvis det kan lade sig gøre, virker det også som om, dette program kan give matematikken et sikkert grundlag. Der er dog det problem, at skal man følge Brouwers program, så er der en masse af den klassiske matematik, man bliver nødt til at give afkald på. Men det bekymrede ikke Brouwer. Hans projekt gik ikke ud på at »redde« hele den klassiske matematik, men på at give matematik et gyldigt grundlag, og så se hvilken matematik, det så viser sig, man kan konstruere.

Brouwer betragtede matematik som en mental aktivitet snarere end en teoribygning. Det enkelte individ udfører mentale konstruktioner, den ene efter den anden, og matematikkens sandhed kommer så an på, om matematikken kan konstrueres. Brouwer var, som vi skal se, ikke kun utilfreds med store dele af den klassiske matematik, også dele af den klassiske logik blev dømt ude i hans projekt.

Men lad os gå tilbage til udgangspunktet: Hvordan får vi startet? Hvor får vi de naturlige tal fra? Hvordan konstruerer vi dem? Ifølge Brouwer er vi alle udstyret med en oprindelig intuition, en urintuition. Denne del af Brouwers filosofi er noget mystisk, men den angår vores sansning af tid. I grove træk går det ud på, at som tiden går, bliver en fornemmelse i nuet afløst af en anden fornemmelse i nuet på en sådan måde, at bevidstheden bevarer den forrige som en fortidig fornemmelse. Individet skaber derved en »to-hed« af en tidligere og en nuværende fornemmelse. Det er denne intuitive bevidsthed om tid, der ifølge Brouwer gør, at vi kan konstruere de naturlige tal – det ene efter det andet. Det er ikke helt nemt at forstå, og heller ikke klart, hvad Brouwer egentlig mente her. Til gengæld er det helt klart, at følger man Brouwers program for matematikken, så kan man ikke tale om aktuelle uendeligheder. Det

eneste, man kan opnå, er det potentielt uendelige. Idet al matematik skal konstrueres, kan man kun opnå endelige segmenter, (som for eksempel: 1, 2, 3, 4, ... n), som godt nok kan blive vilkårligt lange, men man kan ikke konstruere den samlede mængde af de naturlige tal. I intuitionistisk matematik kan man således ikke, som vi så Cantor gøre i kapitel 4, gøre brug af aktuelt uendelige mængder.

Men der er andre ting i klassisk matematik, man bliver nødt til at afstå fra at bruge som konsekvens af intuitionistisk matematik. Det drejer sig om det, matematikere kalder for »rene eksistensbeviser«. Den slags beviser går ud på at bevise, at et matematisk objekt med nogle nærmere specificerede egenskaber faktisk findes. Når beviset karakteriseres som et rent eksistensbevis, betyder det som regel, at beviset er et ikke-konstruktivt bevis, i den forstand at beviset ikke giver nogen opskrift på, hvordan man finder det objekt, man leder efter. I beviset konstateres blot, at objektet med nødvendighed må findes. Hvordan kan man det? Hvordan kan man overbevise andre om, at et objekt findes, uden at man er i stand til at frembringe det? Det kan man ved at bruge *modstridsbeviser*: Man antager, at det objekt, som man ønsker at finde, faktisk *ikke* findes, og derudfra udledes en modstrid. Lykkedes det at nå frem til en modstrid, har man dermed vist, at ikke-eksistensen af objektet er en logisk umulighed, og deraf slutter man, at så må objektet jo eksistere. Vi ved godt nok ikke, hvordan vi skal finde det, men det må nødvendigvis eksistere. Den slags ikke-konstruktive beviser duer ikke i intuitionistisk matematik. Ifølge Brouwer er matematikkens sandhed betinget af, at matematikken kan konstrueres. Det har som konsekvens, at man i intuitionistisk matematik bliver nødt til at se bort fra begreber, hvis eksistens man kun kan argumentere for indirekte.

I klassisk matematik benytter man i stor udtrækning det logiske princip, der går under navnet »det udelukkende tredjes princip«. Det siger, at enhver påstand er enten sand eller falsk. Der er kun disse to muligheder; en tredje mulighed er udelukket. Arbejder vi inden for endelige mængder, er der ingen problemer med at bruge det udelukkende tredjes princip. For endelige mængder kan vi nemlig »kigge efter«. Hvis vi har en endelig mængde af elementer – for eksempel mængden bestående af tallene 2, 4, 6, 8, 10 og 13; – og vi kan vise, at ikke alle elementerne er delelige med 2, så kan vi roligt slutte, at der findes mindst et element, som ikke er deleligt med 2. Vi kan nemlig tjekke efter ved at teste alle elementerne i mængden og dermed finde det eller de elementer, som ikke er delelige med 2. Denne mulighed har vi ikke, hvis påstanden udtaler sig om uendelig mange elementer. Det betyder, at selv om man kan vise, at ikke alle elementer i en uendelig mængde har en bestemt egenskab, lad os kalde den *E*, så kan vi, ifølge Brouwers intuitionistiske matematikfilosofi, ikke deraf slutte, at der findes et element, som ikke har egenskaben *E*.

Holder man sig til det intuitionistiske program, så løber man ikke ind i de logiske vanskeligheder, som de paradokser, der opstod i Cantors mængdelære – og det lyder jo besnærende! Men alting har som bekendt sin pris, og holder man sig til intuitionistisk matematik, så må man give køb på en stor del af den klassiske matematik. Og den pris er der ikke mange matematikere, der er villige til at betale.

FORMALISMEN

Den formalistiske grundlagsskole blev udviklet af Hilbert, der, som vi så i forrige kapitel, karakteriserede Cantors teori som intet mindre end et matematisk paradis. Han var en af de mest indflydelsesrige matematikere ved overgangen til det 20. århundrede, og han bidrog med nyskabende matematik inden for mange forskellige grene af matematikken. I modsætning til Brouwer og det intuitionistiske program havde Hilbert ikke i sinde at opgive »Cantors paradis«. I stedet udviklede han et program, der går under navnet »Hilberts program«, med det formål at »fastslå en gang for alle matematiske metoders sikkerhed«, som han skrev i 1925 (Shapiro 2000, s. 140-171).

Hilberts forslag til en løsning på problemerne var at sikre matematikken gennem et formalistisk grundlag. Hans projekt gik ud på at formalisere matematikken ved at udtrykke al matematik i et formelt logisk sprog. Matematik kan dermed betragtes som en aktivitet, der går ud på at udlede visse såkaldte symbolstrenge ud fra andre strenge af symboler ved hjælp af en række givne regler. En ærke-formalist vil hævde, at det matematik går ud på, er at manipulere rundt med symboler, der i sig selv er uden mening, ved at følge et sæt af givne regler. Dermed bliver matematikken et formelt spil med symboler, der ikke handler om noget som helst uden for symbolverdenen.

Det er dog vigtigt at holde sig for øje, at Hilbert ikke mente, at formalisme var en god metode, når det gjaldt om at udvikle ny matematik. Grunden til overhovedet at give sig i kast med det formalistiske program var at sikre grundlaget. Formålet med formaliseringen af matematikken var at blive i stand til at undersøge, om de forskellige grene af matematikken er konsistente, altså om aksiomsystemerne er modsigelsesfrie. Hvis vi tænker os, at vi har en matematisk teori, og vi gerne vil være sikre på, at teorien hviler på et sikkert grundlag, så opstiller vi først et aksiomsystem for teorien – vi aksiomatiserer den. Derefter formaliserer vi den, det vil sige, vi beskriver den i et logisk sprog, der har en så præcis syntaks, at det kan studeres matematisk. Det, man er interesseret i at undersøge, er, om der er fare for at løbe ind i selvmodsigelser, hvis man udelukkende arbejder inden for det formelle sprog og kun bruger aksiomerne fra teorien, som jo altså også er formaliseret. Hvis man kan vise ved hjælp af matematikken, at man ikke risikerer at løbe ind i selvmodsigelser, ja så har man matematisk bevist, at ens teori er konsistent, og dermed har vi fast grund under fødderne. De matematiske resultater inden for teorien har dermed karakter af at være sikker viden.

For at dette projekt holder vand, skal man naturligvis sikre sig, at man ikke får smuglet de oprindelige problemer med ind ad bagvejen. Hilbert skelnede mellem den uproblematiske endelige (finite) matematik og den ideale transfinite matematik, der går ud over det endelige. Hilberts program gik så ud på at vise, at indførelsen af de ideale objekter ikke gav anledning til paradokser, at matematikken er konsistent og altså fri for modsigelser. Fremgangsmåden var som sagt at formalisere matematikken, den endelige (finite) del såvel som den problematiske transfinite del; og som noget helt essentielt at give et finitistisk bevis for, at det formelle system er modsigelsesfrit. Kunne dette lade sig gøre, mente Hilbert, at matematikkens grundlag var sikret.

Den klassiske matematik kan baseres på mængdelæren,

så hvis Hilberts program kunne gennemføres for mængdelæren, så var matematikkens grundlagsproblem løst. Det kræver i første omgang at mængdelæren aksiomatiseres. Det første egentlige forsøg på at opstille et aksiomsystem for mængdelæren blev udarbejdet af den tyske matematiker Ernst Zermelo (1871-1953). For at undgå paradokserne fra Cantors mængdelære indførte Zermelo et aksiom, der skulle begrænse mængdebegrebet på en sådan måde, at den form for mængder, der gav anledning til paradokserne, blev »dømt ude«. I 1908 offentliggjorde han sin aksiomatisering af mængdelæren, og om formålet med det hele skrev han:

> I den herværende artikel er det min hensigt at vise, at hele den teori, der blev skabt af Cantor, ... kan reduceres til nogle få definitioner og syv principper, eller aksiomer ... Det mere filosofiske spørgsmål om princippernes oprindelse, og i hvilken udstrækning de er gyldige, vil ikke blive diskuteret her.(Zermelo 1908)

På spørgsmålet om, hvorvidt hans aksiomsystem er modsigelsesfrit, skrev han:

> Det er endnu ikke lykkedes mig at bevise, at mine aksiomer er konsistente, selvom dette unægteligt er yderst essentielt; ... (Zermelo 1908)

Zermelos aksiomsystem var ikke præcist nok, og det blev senere forbedret af matematikeren Abraham Fraenkel (1891-1965). Men det løste dog ikke konsistensproblemet, som stadig hang som en truende sky over hele projektet. Hilbert var dog meget optimistisk. I 1925 skrev han i sin artikel »Om det uendelige« at:

> I geometri ... opnås konsistensbeviset ved at reducere det til konsistensen af aritmetikken. Denne metode kan selvfølgelig ikke bruges, når det gælder om at vise aritmetikkens konsistens. Idet vores ... teori ... gør dette sidste skridt muligt, udgør den det nødvendige grundprincip i matematikkens struktur. Og i særdeles kan det, vi har oplevet ... med paradokserne i mængdelæren, ikke ske igen i inden for matematikken. (Hilbert 1925)

Kunne man bevise, at aritmetikken er konsistent, så havde man også vist, at geometrien er konsistent, fordi, som Hilbert nævnte i citatet, spørgsmålet om konsistens af geometrien kan reduceres til spørgsmålet om aritmetikkens konsistens. På trods af Hilberts optimisme forblev konsistensproblemet dog uløst, og der gik ikke lang tid, før det viste sig, at der, som vi skal se om lidt, var en ganske god grund til det – og dermed forsvandt også dette håb om at levere et sikkert grundlag for matematikken.

FORMALISMENS FALD: GÖDELS SÆTNINGER

Det blev den østrigske matematiker og logiker Kurt Gödel (1906-1978), der afgjorde spørgsmålet om aritmetikkens konsistens – men på en noget overraskende måde. Ved en konference i Königsberg i Tyskland i september 1930 fremlagde Gödel det resultat, der kaldes for Gödels første ufuldstændighedssætning (Katz 1993, s. 727). Gödel viste, at et modsigelsesfrit aksiomsystem, der er stort nok til at indfange aritmetikken, er

ufuldstændigt i den forstand, at der kan formuleres udsagn inden for systemet, som ikke kan besvares; de kan hverken bevises eller modbevises inden for systemet. Gödels anden ufuldstændighedssætning siger, at et af disse udsagn, der ikke kan afgøres i et sådan formelt system, er konsistensudsagnet. Her er det vigtigt at holde sig for øje, at Gödels resultat *ikke* siger, at matematikken er inkonsistent. Det siger »blot«, at har man et aksiomsystem som for eksempel mængdelærens aksiomsystem, der er stort nok til at omfatte aritmetikken, så kan man ikke inden for systemet selv vise, at systemet er modsigelsesfrit. Det kan ganske enkelt ikke lade sig gøre.

Gödels ufuldstændighedssætninger underminerede således Hilberts program, og det fik den ungarske matematiker John von Neumann (1903-1957) til at konkludere, at der ikke findes en stringent begrundelse for den klassiske matematik. Og hermed forlader vi diskussionen om matematikken og matematikkens sikkerhed. Man kunne jo nu måske tro, at dette var et dødsstød for matematikken, at matematikere ville kaste håndklædet i ringen i desperation. Men sådan gik det ikke. Tværtimod, som vi skal se i næste kapitel, blev det 20. århundrede en »gylden tid«, hvad angår produktion af matematiske resultater. Grundlagsdiskussionen forsvandt fra main stream-matematik, og i dag er det de færreste matematikere, der bekymrer sig om matematikkens grundlag. De fleste har en grundlæggende tillid til matematikken og arbejder ufortrødent videre.

LITTERATUR

Dauben, J.W. (1979). *Georg Cantor*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Hofstadter, D.R. (1979). *Gödel, Escher, Bach*. Brighton, Sussex: The Harvester Press.

Katz, V. (1993). *A History of Mathematics. An Introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.

Mancosu, P. (1998). *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. New York, Oxford: Oxford University Press.

Rucker, R. (1982). *Infinity and the Mind*. Boston: Birkhäuser.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Topsøe, F. (2002). *Matematik Y: Introduktion til abstrakt matematik*. Institut for Matematisk Fag: Københavns Universitet.

Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 65, s. 261-281.

KAPITEL 6

MATEMATIKKEN UNDER FORANDRING I DET 20. ÅRHUNDREDE – NICOLAS BOURBAKI, STRUKTURALISMEN OG »DEN NYE MATEMATIK«

I bogen *The Mathematical Experience* fra 1981 skrev de to amerikanske matematikere Philip Davis og Reuben Hersh (1981), at vi befandt os i en gylden tid, hvad angik produktionen af matematiske resultater – hvorvidt vi også var i en gylden tid, hvad angik nye matematiske ideer, det var et helt andet og, fornemmer man, mere tvivlsomt spørgsmål. Bogen udkom på et tidspunkt, hvor der var en voksende kritik af det billede af matematikken, som var blevet dannet i løbet af det 20. århundrede, og som afveg drastisk fra tidligere tiders opfattelser af, hvad matematik er. I et essay med titlen »Where Did Twentieth-Century Mathematics Go Wrong?« gav den amerikansk-canadiske matematiker Chandler Davis udtryk for sin frustration. Han harcelerede bl.a. over, at:

> De fleste af det 20. århundredes matematikere taler, som om de har et emneområde, der ligger uden for tid og rum. Det er ikke så mærkeligt, at de virker storsnudede på andre! (Davis 1994, s. 132)

I betragtning af den rolle, matematik gennem tiderne har spillet i vores beskrivelser af rummet og vores fysiske virkelighed,