Λυμένες ασκήσεις σε Ψηφιακή Μετάδοση

Σημείωση: Οι ασκήσεις είναι από το 1ο κεφάλαιο του βιβλίου του J. M. Cioffi.

1. **Ο πρώτος μας αστερισμός (Cioffi 1.1)**

   (α) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις βάσης $\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$ είναι ορθοκανονικές

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(2\pi t) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$\phi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin(2\pi t) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

   (β) Θεωρήστε τις παρακάτω διαμορφωμένες κυματομορφές

$$x_0(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos(2\pi t) + 3\sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(3\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_3(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(3\cos(2\pi t) + 3\sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_4(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_5(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_6(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(3\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_7(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(3\cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$x_{i+8}(t) = -x_i(t),\ \ i = 0, \ldots, 7.$$

   Σχεδιάστε τον αστερισμό χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις βάσης του Ερωτήματος (α).

   (γ) Υπολογίστε τη μέση ενέργεια $\mathcal{E}_x$ και τη μέση ενέργεια ανά διάσταση $\bar{\mathcal{E}}_x$

(i) για την περίπτωση που όλα τα σήματα είναι ισοπίθανα.

(ii) για την περίπτωση που $p(x_0) = p(x_4) = p(x_8) = p(x_{12}) = \frac{1}{8}$ και $p(x_i) = \frac{1}{24}$ για τα υπόλοιπα i.

(δ) Έστω

$$y_i(t) = x_i(t) + 4\phi_3(t), \text{ όπου}$$
$$\phi_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Υπολογίστε τη μέση ενέργεια, $\mathcal{E}_y$, του $y(t)$ όταν όλα τα σήματα εισόδου είναι ισοπίθανα.

2. **Εύρεση βάσης με χρήση MATLAB (Cioffi 1.4 – τροποποιημένη)**

Κάθε στήλη του πίνακα A που δίνεται στη συνέχεια είναι ένα σύμβολο αστερισμού το οποίο χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί η αντίστοιχη κυματομορφή από ένα σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_6(t)\}$. Το σύνολο των διαμορφωμένων κυματομορφών που αντιστοιχούν στις στήλες του A μπορεί να περιγραφεί με λιγότερες συναρτήσεις βάσης.

$$A = [\mathbf{a}_0\ \mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_7] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Τα σήματα $a_i(t)$ που μεταδίδονται αναπαρίστανται ως

$$a_i(t) = \mathbf{a}_i^* \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_6(t) \end{bmatrix} = \mathbf{a}_i^* \boldsymbol{\phi}(t),$$

όπου ο αστερίσκος (*) υποδηλώνει συζυγή ανάστροφο διανύσματος ή πίνακα. Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε, $\mathbf{a}(t) = A^* \boldsymbol{\phi}(t)$, όπου κάθε στοιχείο του $\mathbf{a}(t)$ είναι ένα από τα σήματα που ενδέχεται να εκπέμψει ο πομπός.

Υποθέτουμε ότι τα σύμβολα που μεταδίδονται είναι *ισοπίθανα.*

(α) Υπολογίστε την ενέργεια κάθε συμβόλου, καθώς και τη μέση ενέργεια του αστερισμού.

(β) Χρησιμοποιήστε τη MATLAB για να βρείτε μια ορθοκανονική βάση για τις στήλες του A. Δώστε τον πίνακα διανυσμάτων βάσης που προκύπτει. Οι εντολές `help` και orth της MATLAB ενδέχεται να σας φανούν χρήσιμες (η εντολή help orth θα σας δώσει μια περιγραφή της εντολής orth). Συγκεκριμένα, ή εντολή Q=orth(A) επιστρέφει έναν ορθογώνιο πίνακα Q τέτοιο ώστε $Q^*Q = I$ και $A^* = [A^*Q]Q^*$. Οι στήλες του Q μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως νέα βάση. Επομένως, προσπαθήστε να εκφράσετε το $\mathbf{a}(t)$ με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψει ένα νέο σύνολο συναρτήσεων βάσης και μια νέα περιγραφή των 7 πιθανών μεταδιδόμενων κυματομορφών.

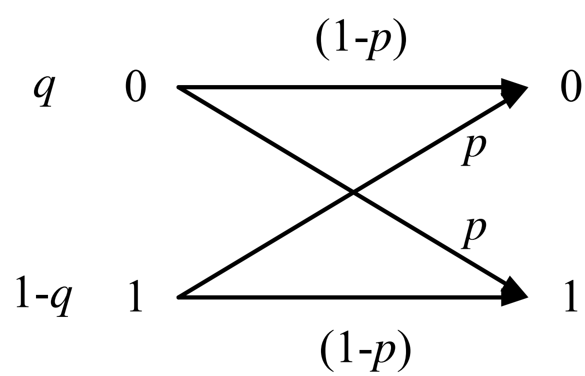
(γ) Πόσες συναρτήσεις βάσης απαιτούνται για να αναπαραστήσετε το σύνολο κυματομορφών του πομπού; Εκφράστε τις νέες συναρτήσεις βάσης με χρήση των αρχικών $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_6(t)\}$.

(δ) Βρείτε το νέο πίνακα $\hat{A}$ ο οποίος αναπαριστά τις κυματομορφές εισόδου με χρήση των νέων συναρτήσεων βάσης που βρήκατε στο Ερώτημα (β). ο $\hat{A}$ θα έχει 8 στήλες, μια για κάθε σύμβολο. Ο αριθμός γραμμών του $\hat{A}$ θα είναι ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης που βρήκατε στο Ερώτημα (β).

(ε) Υπολογίστε την ενέργεια κάθε συμβόλου όταν αυτό αναπαριστάται συναρτήσει των νέων συναρτήσεων βάσης, καθώς και τη μέση ενέργεια του αστερισμού. Σχολιάστε.

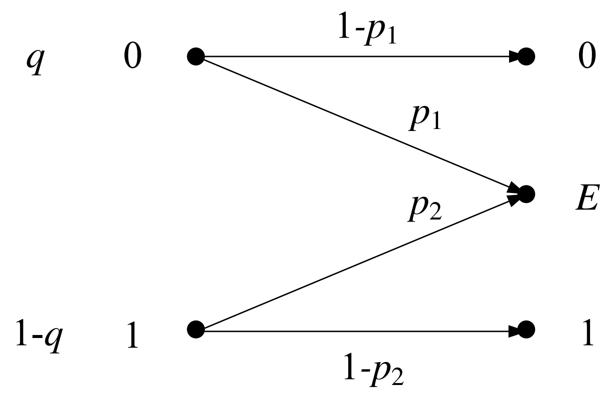
3. **Κανόνες απόφασης για δυαδικά κανάλια (Cioffi 1.5 – τροποποιημένη)**

(α) Εκφράστε τους κανόνες απόφασης MAP και ML για το δυαδικό συμμετρικό κανάλι (Binary Symmetric Channel – BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p για οποιαδήποτε κατανομή εισόδου. Το BSC έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Δυαδικό συμμετρικό κανάλι με αυθαίρετη κατανομή εισόδου

(β) Εκφράστε τους κανόνες απόφασης MAP και ML για το δυαδικό κανάλι διαγραφής (Binary Erasure Channel – BEC) με $p(Y = 0|X = 0) = 1-p_1$, $p(Y = E|X = 0) = p_1$, $p(Y = 1|X = 1) = 1 - p_2$, $p(Y = E|X = 1) = p_2$. Το BEC έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2. Η διαφορά με το BSC είναι ότι στο δέκτη γνωρίζουμε αν συμβεί σφάλμα (αλλά, αν έχει συμβεί σφάλμα, δε γνωρίζουμε ποιο ήταν το ψηφίο που έστειλε ο πομπός).



Σχήμα 2: Δυαδικό κανάλι διαγραφής με αυθαίρετη κατανομή εισόδου

4. **Περιοχές απόφασης (Cioffi 1.6)**

   Θεωρούμε το *μονοδιάστατο* διανυσματικό κανάλι

   $$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n},$$

   όπου $\mathbf{x} = \pm 1$ και $\mathbf{n}$ είναι Γκαουσιανός θόρυβος με $\sigma^2 = 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γενικότερο συμβολισμό των ποσοτήτων ως διανύσματα (παρόλο που, στη συγκεκριμένη άσκηση, ο χώρος έχει διάσταση 1).

   Οι περιοχές απόφασης του αποκωδικοποιητή ML είναι οι

   $$D_{ML,1} = [0, \infty) \text{ και } D_{ML,-1} = (-\infty, 0).$$

   Δηλαδή, εάν το $\mathbf{y}$ βρίσκεται στην περιοχή $D_{ML,1}$, $\hat{\mathbf{x}} = 1$, αλλιώς $\hat{\mathbf{x}} = -1$.

   Θεωρήστε, τώρα, ένα διαφορετικό δέκτη, R, με περιοχές απόφασης

   $$D_{R,1} = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \text{ και } D_{R,-1} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

   (α) Υπολογίστε τις $P_{e,ML}$ και $P_{e,R}$ συναρτήσει της $p_x(1) = p$ για τιμές της p στο διάστημα $[0, 1]$. Στην ίδια γραφική παράσταση σχεδιάστε την $P_{e,ML}$ και την $P_{e,R}$ ως συνάρτηση της p.

   (β) Υπολογίστε τα $\max_p P_{e,ML}$ και $\max_p P_{e,R}$. Συμφωνεί το αποτέλεσμα με το θεώρημα minimax[1], σύμφωνα με το οποίο, για άγνωστη κατανομή εισόδου και εφόσον η δεσμευμένη πιθανότητα σφάλματος $P_{e,ML|m=m_i}$ δεν εξαρτάται από το μήνυμα m_i που μεταδίδεται, ο αποκωδικοποιητής ML ελαχιστοποιεί τη μέγιστη πιθανότητα σφάλματος;

   (γ) Για ποια τιμή της p ο κανόνας MAP συμπίπτει με το δέκτη D_R;

[1] Το Θεώρημα minimax δεν περιλαμβάνεται στην ύλη του μαθήματος "Συστήματα Επικοινωνιών".

5. **Θόρθυβος στο δέκτη (Cioffi 1.9)**

Στην άσκηση αυτή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε MATLAB για τους υπολογισμούς.

Κάθε στήλη του A που δίνεται παρακάτω είναι ένα σύμβολο δεδομένων το οποίο χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί η διαμορφωμένη κυματομορφή που του αντιστοιχεί με χρήση συνόλου ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης

$$(\boldsymbol{\phi}(t))^T = [\phi_1(t)\ \phi_2(t)\ \cdots\ \phi_6(t)],$$

όπου με ^{T} συμβολίζεται η αναστροφή διανύσματος ή πίνακα.

Υποθέστε ότι όλα τα μηνύματα είναι *ισοπίθανα*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$(\mathbf{x}(t))^T = (\boldsymbol{\phi}(t))^T A = [x_0(t)\ x_1(t)\ \cdots\ x_7(t)].$$

Παρατηρήστε ότι η έκφραση για το $\mathbf{x}(t)$ είναι ισοδύναμη με αυτήν για το $\mathbf{a}(t)$ της Άσκησης 1.4. Ένα διάνυσμα θορύβου

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_6 \end{bmatrix}$$

προστίθεται στο διάνυσμα συμβόλων, $\mathbf{x}$ (το οποίο είναι μία από τις στήλες του A), ώστε

$$y(t) = (\boldsymbol{\phi}(t))^T (\mathbf{x} + \mathbf{n}),$$

όπου $n_1, n_2, \ldots, n_6$ είναι ανεξάρτητα και $n_k = \pm 1$ με ίδια πιθανότητα.

Η μεταδιδόμενη κυματομορφή $y(t)$ αποδιαμορφώνεται με χρήση αποκωδικοποιητή συσχέτισης (ή προσαρμοσμένων φίλτρων). Το πρόβλημα αυτό εξετάζει το λόγο σήματος προς θόρυβο του αποδιαμορφωμένου διανύσματος $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$.

(α) Βρείτε τα $\bar{\mathcal{E}}_x$, σ^2 και SNR$=\bar{\mathcal{E}}_x/\sigma^2$ εάν όλα τα μηνύματα είναι ισοπίθανα.

(β) Βρείτε τον ελάχιστο αριθμό διανυσμάτων βάσης και το νέο πίνακα $\hat{A}$ όπως στην Άσκηση 1.4 και υπολογίστε τα νέα $\bar{\mathcal{E}}_x$, σ^2 και SNR.

(γ) Εάν το νέο διάνυσμα εξόδου ισούται με $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}}$, είναι αμετάβλητος (invariant) ο μετασχηματισμός από το $\mathbf{y}$ στο $\tilde{\mathbf{y}}$; Με άλλα λόγια, επηρεάζεται η P_e από το μετασχηματισμό;

(δ) Συγκρίνετε τα $\bar{b}$ και $\bar{\mathcal{E}}_x$ με το προηγούμενο σύστημα. Το νέο σύστημα υπερτερεί του προηγούμενου; Γιατί ή γιατί όχι;

(ε) Το νέο σύστημα έχει τώρα 3 διαστάσεις που δε χρησιμοποιούνται. Επιθυμούμε να στείλουμε 8 επιπλέον μηνύματα δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο πίνακα $\bar{A}$:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A} \end{bmatrix}.$$

Συγκρίνετε τα $\bar{b}$ και $\bar{\mathcal{E}}_x$ με το αρχικό σύστημα 6 διαστάσεων, καθώς και με το σύστημα 3 διαστάσεων του Ερωτήματος (β).

6. **Κανάλι αποθήκευσης σε δίσκο (Cioffi 1.12)**

Η αποθήκευση *δυαδικών* δεδομένων σε δίσκο λεπτής μεμβράνης (thin-film disk) μπορεί να προσεγγιστεί από κανάλι προσθετικού Γκαουσιανού θορύβου ο οποίος εξαρτάται από την είσοδο. Συγκεκριμένα, η διασπορά του θορύβου εξαρτάται από την είσοδο (δηλαδή την τιμή που εγγράφεται στο δίσκο). Ο θόρυβος έχει την ακόλουθη κατανομή

$$p(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_1^2}} & \text{όταν} \quad x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_0^2}} & \text{όταν} \quad x = 0 \end{cases}$$

και $\sigma_1^2 = 31\sigma_0^2$. Οι είσοδοι στο κανάλι είναι *ισοπίθανες*.

(α) Για οποιαδήποτε είσοδο, η έξοδος μπορεί να έχει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Στην ίδια γραφική παράσταση σχεδιάστε τις δύο πιθανές κατανομές πυκνότητας πιθανότητας (pdfs) της εξόδου. Δηλαδή, σχεδιάστε την κατανομή εξόδου για $x = 0$ και την κατανομή εξόδου για $x = 1$. Δείξτε (προσεγγιστικά) τις περιοχές απόφασης στη γραφική παράσταση.

(β) Προσδιορίστε το βέλτιστο δέκτη συναρτήσει των σ_0 και σ_1.

(γ) Υπολογίστε τα σ_0^2 και σ_1^2 όταν SNR=15 dB. Ο SNR ορίζεται ως $\frac{1}{\sigma_0^2+\sigma_1^2}$.

(δ) Υπολογίστε την P_e όταν SNR=15 dB.

(ε) Τι συμβαίνει καθώς $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \to 0$; Μπορείτε να περιοριστείτε στη λογική (από φυσικής άποψης) περίπτωση όπου η σ_1 είναι σταθερή και πεπερασμένη και $\sigma_0 \to 0$.

7. **Σύγκριση Φραγμάτων (Cioffi 1.21)**

Θεωρούμε τον παρακάτω αστερισμό ο οποίος χρησιμοποιείται για μετάδοση σε κανάλι AWGN.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= (-1, -1) \\ \mathbf{x}_1 &= (1, -1) \\ \mathbf{x}_2 &= (-1, 1) \\ \mathbf{x}_3 &= (1, 1) \\ \mathbf{x}_4 &= (0, 3) \end{aligned}$$

Για τα Ερωτήματα (α) και (β) δώστε τις απαντήσεις συναρτήσει του σ.

(α) Υπολογίστε το union bound για την P_e όταν χρησιμοποιείται αποκωδικοποιητής ML.

(β) Υπολογίστε το nearest neighbor union bound για την P_e όταν χρησιμοποιείται αποκωδικοποιητής ML.

(γ) Εάν SNR=14 dB, βρείτε την τιμή της P_e χρησιμοποιώντας το NNUB.

Λύσεις

1. **Ο πρώτος μας αστερισμός (Cioffi 1.1)**

   (α) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις βάσης $\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$ είναι ορθοκανονικές

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(2\pi t) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$\phi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin(2\pi t) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Απάντηση

$$\int \phi_1(t)\phi_2^*(t)dt = \int_0^1 2\sin(2\pi t)\cos(2\pi t)dt = \int_0^1 \sin(4\pi t)dt =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\cos(4\pi t)\Big|_0^1 = 0.$$

Επίσης,

$$\int \phi_1(t)\phi_1^*(t)dt = \int_0^1 2\cos^2(2\pi t)dt = \int_0^1 (1+\cos(4\pi t))dt = 1 \text{ και}$$
$$\int \phi_2(t)\phi_2^*(t)dt = \int_0^1 2\sin^2(2\pi t)dt = \int_0^1 (1-\cos(4\pi t))dt = 1.$$

Επομένως, οι $\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$ είναι ορθοκανονικές.

(β) Θεωρήστε τις παρακάτω διαμορφωμένες κυματομορφές

$$x_0(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos(2\pi t) + 3\sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(3\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_3(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(3\cos(2\pi t) + 3\sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_4(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_5(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_6(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(3\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_7(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(3\cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t)\right) & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_{i+8}(t) = -x_i(t),\ i = 0, \ldots, 7.$$

Σχεδιάστε τον αστερισμό χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις βάσης του Ερωτήματος (α).

Απάντηση

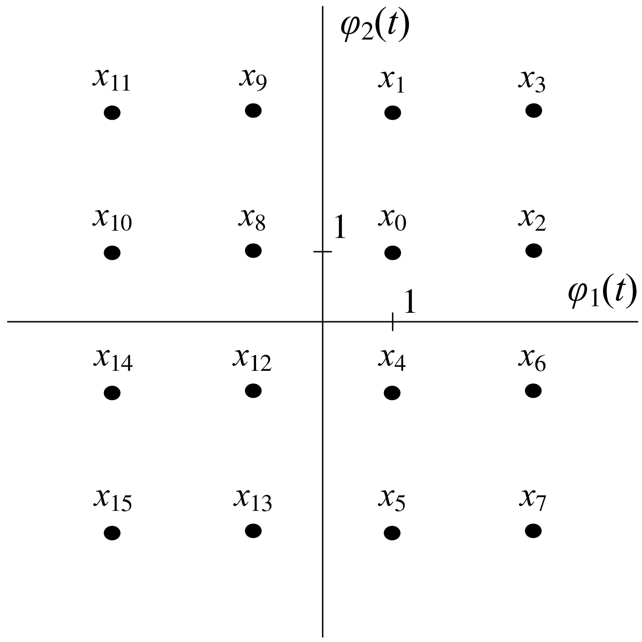
Διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= \phi_1(t) + \phi_2(t) = [1\ 1][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T, \\
x_1(t) &= \phi_1(t) + 3\phi_2(t) = [1\ 3][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T, \\
x_2(t) &= 3\phi_1(t) + \phi_2(t) = [3\ 1][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T, \\
x_3(t) &= 3\phi_1(t) + 3\phi_2(t) = [3\ 3][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T, \\
x_4(t) &= \phi_1(t) - \phi_2(t) = [1\ \ -1][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T, \\
x_5(t) &= \phi_1(t) - 3\phi_2(t) = [1\ \ -3][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T, \\
x_6(t) &= 3\phi_1(t) - \phi_2(t) = [3\ \ -1][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T, \\
x_7(t) &= 3\phi_1(t) - 3\phi_2(t) = [3\ \ -3][\phi_1(t)\ \phi_2(t)]^T \text{ και} \\
x_{i+8}(t) &= -x_i(t),\ i = 0, \ldots, 7.
\end{aligned}$$

Ο αστερισμός έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 3.

(γ) Υπολογίστε τη μέση ενέργεια $\mathcal{E}_x$ και τη μέση ενέργεια ανά διάσταση $\bar{\mathcal{E}}_x$

(i) για την περίπτωση που όλα τα σήματα είναι ισοπίθανα.



Σχήμα 3: Ο αστερισμός της Άσκησης 1.1

(ii) για την περίπτωση που $p(x_0) = p(x_4) = p(x_8) = p(x_{12}) = \frac{1}{8}$ και $p(x_i) = \frac{1}{24}$ για τα υπόλοιπα i.

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Δεδομένου ότι οι $\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$ είναι ορθοκανονικές, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση ενέργεια απευθείας από τον αστερισμό. Βλέπουμε εύκολα ότι

$$\mathcal{E}_{inner} = 2,\ \mathcal{E}_{side} = 10 \text{ και } \mathcal{E}_{corner} = 18.$$

Επομένως, για ισοπίθανα σύμβολα, $\mathcal{E}_x = \frac{1}{16}(4 \times 2 + 8 \times 10 + 4 \times 18) = 10$ και $\bar{\mathcal{E}}_x = 5$, επειδή ο αστερισμός έχει $N = 2$ διαστάσεις.

Για την κατανομή του (ii), $\mathcal{E}_x = \frac{1}{8}(4 \times 2) + \frac{1}{24}(8 \times 10 + 4 \times 18) = 1 + 19/3 = 22/3$ και $\bar{\mathcal{E}}_x = 22/6$.

Η μέση ενέργεια είναι μικρότερη στη δεύτερη περίπτωση επειδή τα εσωτερικά σημεία του αστερισμού (τα οποία έχουν και τη μικρότερη ενέργεια) χρησιμοποιούνται με μεγαλύτερη πιθανότητα από τα υπόλοιπα.

(δ) Έστω

$$y_i(t) = x_i(t) + 4\phi_3(t), \text{ όπου}$$

$$\phi_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } t \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Υπολογίστε τη μέση ενέργεια, $\mathcal{E}_y$, του $y(t)$ όταν όλα τα σήματα εισόδου είναι ισοπίθανα.

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Πρέπει, κατ' αρχάς, να δούμε αν οι $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ και $\phi_3(t)$ αποτελούν σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων.

$$\int \phi_1(t)\phi_3^*(t)dt = \int_0^1 \sqrt{2}\cos(2\pi t)dt = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sin(2\pi t)\Big|_0^1 = 0.$$

Ομοίως, $\int \phi_2(t)\phi_3^*(t)dt = 0$. Επίσης, $\int |\phi_3(t)|^2 dt = 1$. Επομένως, οι $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ και $\phi_3(t)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση.

Η ενέργεια κάθε συμβόλου είναι αυξημένη κατά 16 σε σχέση με τα προηγούμενα ερωτήματα. Επομένως, $\mathcal{E}_x = 10 + 16 = 26$ και $\bar{\mathcal{E}}_x = 26/3$.

Παρατηρήστε ότι νέος αστερισμός προκύπτει από τον προηγούμενο με προσθήκη μιας συνεχούς συνιστώσας (DC) πλάτους 4.

2. **Εύρεση βάσης με χρήση MATLAB (Cioffi 1.4 – τροποποιημένη)**

Κάθε στήλη του πίνακα A που δίνεται στη συνέχεια είναι ένα σύμβολο αστερισμού το οποίο χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί η αντίστοιχη κυματομορφή από ένα σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_6(t)\}$. Το σύνολο των διαμορφωμένων κυματομορφών που αντιστοιχούν στις στήλες του A μπορεί να περιγραφεί με λιγότερες συναρτήσεις βάσης.

$$A = [\mathbf{a}_0 \ \mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_7] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Τα σήματα $a_i(t)$ που μεταδίδονται αναπαρίστανται ως

$$a_i(t) = \mathbf{a}_i^* \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_6(t) \end{bmatrix} = \mathbf{a}_i^* \boldsymbol{\phi}(t),$$

όπου ο αστερίσκος (*) υποδηλώνει συζυγή ανάστροφο διανύσματος ή πίνακα. Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε, $\mathbf{a}(t) = A^* \boldsymbol{\phi}(t)$, όπου κάθε στοιχείο του $\mathbf{a}(t)$ είναι ένα από τα σήματα που ενδέχεται να εκπέμψει ο πομπός.

Υποθέτουμε ότι τα σύμβολα που μεταδίδονται είναι *ισοπίθανα*.

(α) Υπολογίστε την ενέργεια κάθε συμβόλου, καθώς και τη μέση ενέργεια του αστερισμού.

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Η ενέργεια του κάθε συμβόλου, i, ισούται με το τετράγωνο του μέτρου της στήλης a_i του πίνακα A. Με χρήση MATLAB, $\{\mathcal{E}_i\} = \{10, 50, 74, 150, 210, 332, 418, 566\}$. Δεδομένου ότι τα σύμβολα είναι ισοπίθανα, $\mathcal{E}_x = \frac{1}{8}\sum_i \mathcal{E}_i$. Με χρήση MATLAB, $\mathcal{E}_x = 225$.

(β) Χρησιμοποιήστε τη MATLAB για να βρείτε μια ορθοκανονική βάση για τις στήλες του A. Δώστε τον πίνακα διανυσμάτων βάσης που προκύπτει. Οι εντολές `help` και `orth` της MATLAB ενδέχεται να σας φανούν χρήσιμες (η εντολή `help orth` θα σας δώσει μια περιγραφή της εντολής `orth`). Συγκεκριμένα, ή εντολή `Q=orth(A)` επιστρέφει έναν ορθογώνιο πίνακα Q τέτοιο ώστε $Q^*Q = I$ και $A^* = [A^*Q]Q^*$. Οι στήλες του Q μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως νέα βάση. Επομένως, προσπαθήστε να εκφράσετε το $\mathbf{a}(t)$ με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψει ένα νέο σύνολο συναρτήσεων βάσης και μια νέα περιγραφή των 7 πιθανών μεταδιδόμενων κυματομορφών.

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Με χρήση της `orth` βρίσκουμε μια ορθοκανονική βάση για τις στήλες του A. Η ορθοκανονική βάση που προκύπτει είναι η

$$Q = [q_0\ q_1\ q_2] = \begin{bmatrix} -0.3394 & 0.0323 & -0.1124 \\ -0.6190 & 0.2214 & 0.3512 \\ -0.6788 & 0.0647 & -0.2249 \\ -0.0338 & -0.2450 & 0.3479 \\ -0.0677 & -0.4900 & 0.6959 \\ -0.1873 & -0.8035 & -0.4563 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{a}(t) = A^*\boldsymbol{\phi}(t) = [A^*Q]\,[Q^*\boldsymbol{\phi}(t)] = \hat{A}\boldsymbol{\psi}(t).$$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι οι $\{\psi_i(t)\}$ είναι ορθοκανονικές (αποδείξτε το ως άσκηση).

(γ) Πόσες συναρτήσεις βάσης απαιτούνται για να αναπαραστήσετε το σύνολο κυματομορφών του πομπού; Εκφράστε τις νέες συναρτήσεις βάσης με χρήση των αρχικών $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_6(t)\}$.

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Όπως φαίνεται από τον πίνακα Q, 3 συναρτήσεις αρκούν για να αναπαρασταθεί το σύνολο κυματομορφών του πομπού. Οι νέες συναρτήσεις βάσης, $\psi_i(t)$, συναρτήσει των αρχικών, ισούνται με $\mathbf{q}_i^*\boldsymbol{\phi}(t)$.

(δ) Βρείτε το νέο πίνακα $\hat{A}$ ο οποίος αναπαριστά τις κυματομορφές εισόδου με χρήση των νέων συναρτήσεων βάσης που βρήκατε στο Ερώτημα (β). ο $\hat{A}$ θα έχει 8 στήλες, μια για κάθε σύμβολο. Ο αριθμός γραμμών του $\hat{A}$ θα είναι ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης που βρήκατε στο Ερώτημα (β).

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Οι συντεταγμένες κάθε στήλης $\mathbf{a}_i$ ως προς το $j-$οστό διάνυσμα της καινούργιας βάσης μπορούν να βρεθούν προβάλλοντας κάθε στήλη στα νέα διανύσματα. Δηλαδή, βρίσκοντας το εσωτερικό γινόμενο $\beta_{i,j} = \langle a_i, q_j \rangle$. Στη MATLAB, οι συντελεστές $\beta_{i,j}$ μπορούν να βρεθούν με χρήση της εντολής `A'*Q` (η οποία υλοποιεί την πράξη A^*Q). Ο νέος πίνακας, $\hat{A}$, οι στήλες του οποίου είναι τα σύμβολα εκφρασμένα με χρήση των νέων συναρτήσεων βάσης, είναι ο

$$\hat{A} = [\hat{\mathbf{a}}_0 \; \hat{\mathbf{a}}_1 \; \cdots \; \hat{\mathbf{a}}_7] =$$
$$\begin{bmatrix} -2.6907 & -6.1696 & -8.5609 & -12.0398 & -14.4311 & -17.9100 & -20.3013 & -23.7802 \\ -1.2239 & -3.4513 & -0.0148 & -2.2422 & 1.1943 & -1.0331 & 2.4034 & 0.1760 \\ -1.1235 & -0.1561 & -0.8430 & 0.1244 & -0.5625 & 0.4049 & -0.2820 & 0.6853 \end{bmatrix}.$$

(ε) Υπολογίστε την ενέργεια κάθε συμβόλου όταν αυτό αναπαριστάται συναρτήσει των νέων συναρτήσεων βάσης, καθώς και τη μέση ενέργεια του αστερισμού. Σχολιάστε.

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Η ενέργεια κάθε συμβόλου υπολογίζεται ακριβώς όπως στο Ερώτημα (α), αυτή τη φορά με χρήση του πίνακα $\hat{A}$. Τα αποτελέσματα είναι τα ίδια. Αυτό είναι αναμενόμενο δεδομένου ότι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός δε μεταβάλλει το σχήμα του χώρου. Από τη σκοπιά των Ψηφιακών Επικοινωνιών, η ενέργεια ενός σήματος παραμένει η ίδια, ανεξαρτήτως της (ορθοκανονικής) βάσης η οποία χρησιμοποιείται για την περιγραφή του.

Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα προγράμματος MATLAB για την άσκηση.

```
% Dimitris Toumpakaris
% March 28, 2009

% clear all variables
clear all;

% define matrix A
A=[ 1 2 3 4  5  6  7  8;
    1 3 5 7  9 11 13 15;
    2 4 6 8 10 12 14 16;
    0 1 0 1  0  1  0  1;
    0 2 0 2  0  2  0  2;
    2 4 2 4  2  4  2  4];

% Find orhonormal basis for columns of A
Q=orth(A);
```

```
% Find matrix A_hat, representing the modulated
% waveforms as a function of the new basis functions

% first find transpose
A_hat = A'*Q;
% find transpose conjugate; yields matrix whose columns are the symbols
A_hat = A_hat'

% calculate energy of each symbol
% for original representation
energy_orig = sum(A.^2,1)
% for new representation
energy_new = sum(A_hat.^2,1)

% calculate average constellation energy
% for original representation
energy_ave_orig = sum(energy_orig)/size(A,2)
% for new representation
energy_ave_new = sum(energy_new)/size(A_hat,2)
```

3. **Κανόνες απόφασης για δυαδικά κανάλια (Cioffi 1.5 – τροποποιημένη)**

(α) Εκφράστε τους κανόνες απόφασης MAP και ML για το δυαδικό συμμετρικό κανάλι (Binary Symmetric Channel – BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p για οποιαδήποτε κατανομή εισόδου.

Απάντηση

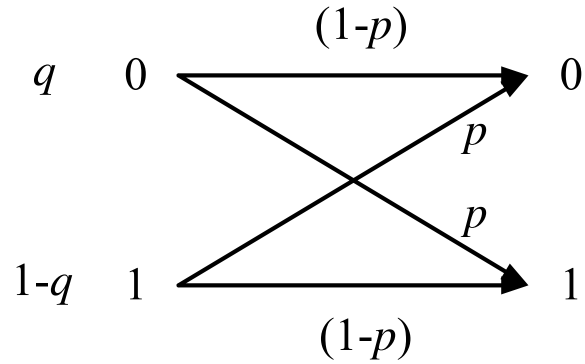
Ο κανόνας απόφασης MAP είναι ο

$$x_i = \arg\max_{x_j} p(x_j|y).$$

Θεωρούμε το δυαδικό συμμετρικό κανάλι του Σχήματος 4, όπου $\Pr\{X=0\}=q$. Παρατηρήστε ότι οι είσοδοι δεν είναι, απαραιτήτως, ισοπίθανες.

Έστω ότι $Y=0$. Ο δέκτης θα αποφασίσει ότι $X=0$ εάν $p(X=0|Y=0) > p(X=1|Y=0)$. Επομένως, αρκεί να συγκρίνουμε τις $p(x|Y=0)$ ή, ισοδύναμα, τις $p(x)p(Y=0|x)$. Επομένως, $\hat{X}=0$ εάν $p(X=0)p(Y=0|X=0) > p(X=1)p(Y=0|X=1)$ ή $q(1-p) > (1-q)p$ ή $q > p$. Συνεπώς, εάν $q > p$, κάθε φορά που ο δέκτης λαμβάνει 0 αποφασίζει 0, ενώ, αν $q \leq p$ ο δέκτης αποφασίζει 1.

Έστω, τώρα, ότι $Y=1$. $\hat{X}=0$ εάν $p(X=0)p(Y=1|X=0) > p(X=1)p(Y=1|X=1)$ ή $qp > (1-q)(1-p)$ ή $p+q > 1$. Συνεπώς, εάν $q > 1-p$, κάθε φορά που ο δέκτης λαμβάνει 1 αποφασίζει 0, ενώ, αν $q \leq 1-p$ ο δέκτης αποφασίζει 1.



Σχήμα 4: Δυαδικό συμμετρικό κανάλι με αυθαίρετη κατανομή εισόδου

Παρατηρήστε ότι, στη γενική περίπτωση, ο κανόνας απόφασης MAP δεν είναι συμμετρικός. Δηλαδή, υπάρχουν κανάλια για τα οποία πάντοτε θα αποφασίζουμε $\hat{X} = 0$ (ή $\hat{X} = 1$) οτιδήποτε και αν λάβουμε στο δέκτη. Για παράδειγμα, εάν $p = 2/3$ και $q = 5/6$, πάντα αποφασίζουμε ότι $\hat{X} = 0$, ανεξαρτήτως της εξόδου. Αυτό συμβαίνει επειδή η μετάβαση $0 \to 0$ είναι πιο πιθανή από τη μετάβαση $1 \to 0$ και, επίσης, επειδή η μετάβαση $0 \to 1$ είναι πιο πιθανή από τη μετάβαση $1 \to 1$ (επιβεβαιώστε).

Για την περίπτωση του αποκωδικοποιητή ML, αρκεί να θέσουμε $q = 1/2$. Συνεπώς, $\hat{X}(Y = 0) = 0$ όταν $p < 1/2$, αλλιώς $\hat{X}(Y = 0) = 1$. Επίσης, $\hat{X}(Y = 1) = 1$ όταν $p < 1/2$, αλλιώς $\hat{X}(Y = 1) = 0$.

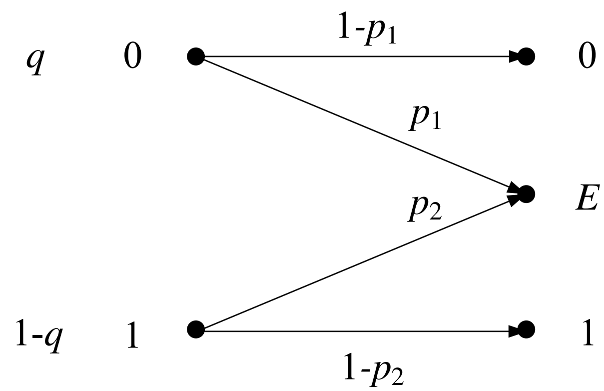
(β) Εκφράστε τους κανόνες απόφασης MAP και ML για το δυαδικό κανάλι διαγραφής (Binary Erasure Channel – BEC) με $p(Y = 0|X = 0) = 1 - p_1$, $p(Y = E|X = 0) = p_1$, $p(Y = 1|X = 1) = 1 - p_2$, $p(Y = E|X = 1) = p_2$.

Απάντηση

Το δυαδικό κανάλι διαγραφής με αυθαίρετες πιθανότητες εισόδου φαίνεται στο Σχήμα 5. Η διαφορά με το BSC είναι ότι στο δέκτη γνωρίζουμε αν συμβεί σφάλμα (αλλά, αν έχει συμβεί σφάλμα, δε γνωρίζουμε ποιο ήταν το ψηφίο που εστάλη).

Προφανώς, όταν $Y = 0$ ή $Y = 1$, τόσο ο αποκωδικοποιητής ML όσο και ο MAP αποφασίζουν $\hat{X} = 0$ και 1, αντίστοιχα. Όταν $Y = E$, $p(X = 0)p(E|X = 0) > p(X = 1)p(E|X = 1) \Rightarrow qp_1 > (1 - q)p_2$. Επομένως, $\hat{X}(E) = 0$ εάν $q > \frac{p_2}{p_1+p_2}$, αλλιώς $\hat{X}(E) = 1$.

Στην περίπτωση αποκωδικοποιητή ML, $q = 1/2$, οπότε $\hat{X}(E) = 0$ όταν $p_1 > p_2$, αλλιώς $\hat{X}(E) = 1$.



Σχήμα 5: Δυαδικό κανάλι διαγραφής με αυθαίρετη κατανομή εισόδου

4. **Περιοχές απόφασης (Cioffi 1.6)**

Θεωρούμε το *μονοδιάστατο* διανυσματικό κανάλι

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n},$$

όπου $\mathbf{x} = \pm 1$ και $\mathbf{n}$ είναι Γκαουσιανός θόρυβος με $\sigma^2 = 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γενικότερο συμβολισμό των ποσοτήτων ως διανύσματα (παρόλο που, στη συγκεκριμένη άσκηση, ο χώρος έχει διάσταση 1).

Οι περιοχές απόφασης του αποκωδικοποιητή ML είναι οι

$$D_{ML,1} = [0, \infty) \text{ και } D_{ML,-1} = (-\infty, 0).$$

Δηλαδή, εάν το $\mathbf{y}$ βρίσκεται στην περιοχή $D_{ML,1}$, $\hat{\mathbf{x}} = 1$, αλλιώς $\hat{\mathbf{x}} = -1$.

Θεωρήστε, τώρα, ένα διαφορετικό δέκτη, R, με περιοχές απόφασης

$$D_{R,1} = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \text{ και } D_{R,-1} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

(α) Υπολογίστε τις $P_{e,ML}$ και $P_{e,R}$ συναρτήσει της $p_x(1) = p$ για τιμές της p στο διάστημα $[0, 1]$. Στην ίδια γραφική παράσταση σχεδιάστε την $P_{e,ML}$ και την $P_{e,R}$ ως συνάρτηση της p.

Απάντηση

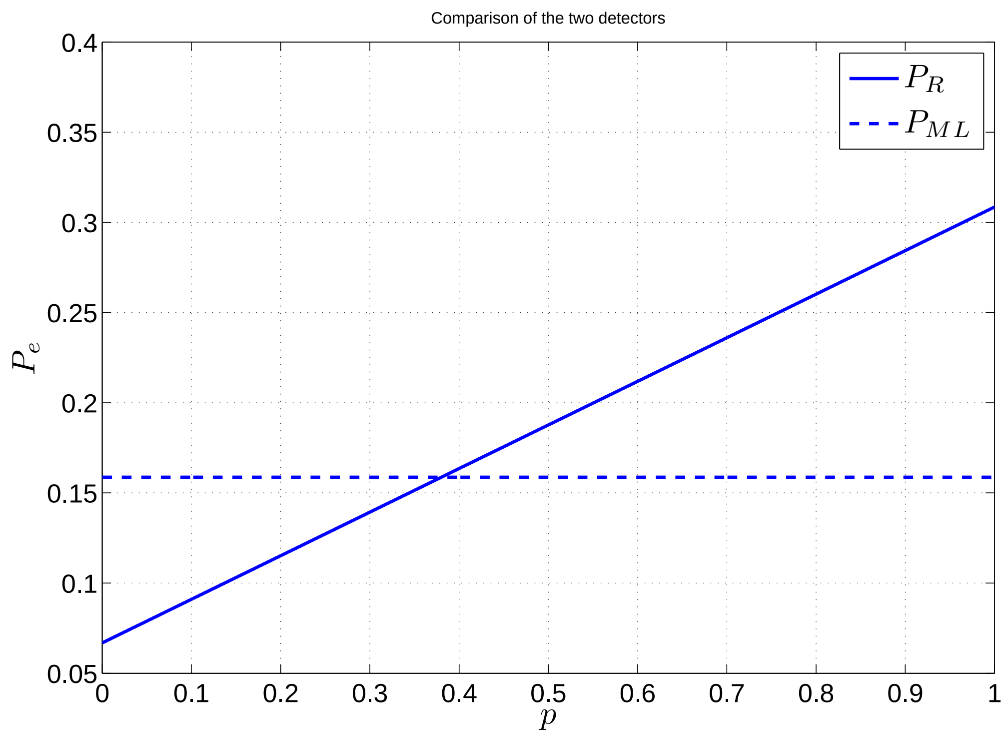
$$P_{e,ML|\mathbf{x}=+1} = \Pr\{\mathbf{y} < 0|\mathbf{x} = +1\} = \Pr\{\mathbf{n} < -1|\mathbf{x} = +1\} \overset{(\alpha)}{=} \Pr\{\mathbf{n} < -1\} = Q(1),$$
$$P_{e,ML|\mathbf{x}=-1} = \Pr\{\mathbf{y} > 0|\mathbf{x} = -1\} = \Pr\{\mathbf{n} > 1|\mathbf{x} = -1\} \overset{(\alpha)}{=} \Pr\{\mathbf{n} > 1\} = Q(1),$$

όπου το (α) ισχύει επειδή ο θόρυβος είναι ανεξάρτητος της εισόδου. Συνεπώς, $P_{e,ML} = p(\mathbf{x} = -1)P_{e,ML|\mathbf{x}=-1} + p(\mathbf{x} = +1)P_{e,ML|\mathbf{x}=+1} = Q(1)$.

Ομοίως, για την περίπτωση του δέκτη R,

$$P_{e,R|\mathbf{x}=+1} = \Pr\{\mathbf{y} < 1/2|\mathbf{x} = +1\} = \Pr\{\mathbf{n} < -1/2|\mathbf{x} = +1\} = \Pr\{\mathbf{n} < -1/2\} = Q(1/2),$$
$$P_{e,R|\mathbf{x}=-1} = \Pr\{\mathbf{y} > 1/2|\mathbf{x} = -1\} = \Pr\{\mathbf{n} > 3/2|\mathbf{x} = -1\} = \Pr\{\mathbf{n} > 3/2\} = Q(3/2).$$

Επομένως, $P_{e,R} = p(\mathbf{x} = -1)P_{e,R|\mathbf{x}=-1} + p(\mathbf{x} = +1)P_{e,R|\mathbf{x}=+1} = (1-p)Q(3/2) + pQ(1/2)$.
Οι $P_{e,ML}$ και $P_{e,R}$ έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 6 για $p \in [0, 1]$.



Σχήμα 6: Σύγκριση της πιθανότητας σφάλματος των δύο δεκτών συναρτήσει της πιθανότητας μετάδοσης του συμβόλου $\mathbf{x} = +1$.

(β) Υπολογίστε τα $\max_p P_{e,ML}$ και $\max_p P_{e,R}$. Συμφωνεί το αποτέλεσμα με το θεώρημα minimax[2], σύμφωνα με το οποίο, για άγνωστη κατανομή εισόδου και εφόσον η δεσμευμένη πιθανότητα σφάλματος $P_{e,ML|m=m_i}$ δεν εξαρτάται από το μήνυμα m_i που μεταδίδεται, ο αποκωδικοποιητής ML ελαχιστοποιεί τη μέγιστη πιθανότητα σφάλματος;

Απάντηση

Η $P_{e,ML}$ είναι σταθερή και ανεξάρτητη της p. Η $P_{e,R}$ είναι affine συνάρτηση της p και, επομένως, και κυρτή (και κοίλη). Άρα, μεγιστοποιείται σε ένα άκρο του

[2]Το Θεώρημα minimax δεν περιλαμβάνεται στην ύλη του μαθήματος "Συστήματα Επικοινωνιών".

διαστήματος $[0,1]$ ή στο σημείο για το οποίο $\frac{d}{dp}P_{e,R} = 0$. $\frac{d}{dp}P_{e,R} = Q(1/2) - Q(3/2) > 0$. Συνεπώς, η $P_{e,R}$ είναι γνησίως αύξουσα για όλα τα p και, επομένως, μεγιστοποιείται στο $p^* = 1 : \max_p P_{e,R} = Q(1/2)$. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο διαισθητικά: Το όριο των περιοχών απόφασης βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο $\mathbf{x} = +1$, με αποτέλεσμα η μετάδοση αυτού του σημείου να οδηγεί σε σφάλμα με μεγαλύτερη πιθανότητα. Επομένως, η μεγαλύτερη μέση πιθανότητα σφάλματος εμφανίζεται όταν χρησιμοποιούμε αποκλειστικά το $\mathbf{x} = +1$. Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα συμφωνεί με το θεώρημα, δεδομένου ότι $P_{e,ML|\mathbf{x}=+1} = P_{e,ML|\mathbf{x}=-1} = Q(1)$ και $\max_p P_{e,R} = Q(1/2) > Q(1) = \max_p P_{e,ML}$.

(γ) Για ποια τιμή της p ο κανόνας MAP συμπίπτει με το δέκτη D_R;

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Ο κανόνας MAP συμπίπτει με το δέκτη D_R όταν $p(\mathbf{x} = -1|\mathbf{y} = 1/2) = p(\mathbf{x} = +1|\mathbf{y} = 1/2)$. Δηλαδή, $p(\mathbf{x} = +1)p(\mathbf{y} = 1/2|\mathbf{x} = +1) = p(\mathbf{x} = -1)p(\mathbf{y} = 1/2|\mathbf{x} = -1) \Rightarrow pQ(1/2) = (1-p)Q(3/2) \Rightarrow p(Q(1/2) + Q(3/2)) = Q(3/2) \Rightarrow p = \frac{Q(3/2)}{Q(1/2)+Q(3/2)} \approx 0.187$. Στην περίπτωση αυτή, $P_{e,R} = P_{e,MAP} = 0.1098 < P_{e,ML}$.

5. **Θόρθυβος στο δέκτη (Cioffi 1.9)**

Στην άσκηση αυτή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε MATLAB για τους υπολογισμούς.

Κάθε στήλη του A που δίνεται παρακάτω είναι ένα σύμβολο δεδομένων το οποίο χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί η διαμορφωμένη κυματομορφή που του αντιστοιχεί με χρήση συνόλου ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης

$$(\boldsymbol{\phi}(t))^T = [\phi_1(t)\ \phi_2(t)\ \cdots\ \phi_6(t)],$$

όπου με ^{T} συμβολίζεται η αναστροφή διανύσματος ή πίνακα.

Υποθέστε ότι όλα τα μηνύματα είναι *ισοπίθανα*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$(\mathbf{x}(t))^T = (\boldsymbol{\phi}(t))^T A = [x_0(t)\ x_1(t)\ \cdots\ x_7(t)].$$

Παρατηρήστε ότι η έκφραση για το $\mathbf{x}(t)$ είναι ισοδύναμη με αυτήν για το $\mathbf{a}(t)$ της Άσκησης 1.4. Ένα διάνυσμα θορύβου

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_6 \end{bmatrix}$$

προστίθεται στο διάνυσμα συμβόλων, $\mathbf{x}$ (το οποίο είναι μία από τις στήλες του A), ώστε

$$y(t) = (\boldsymbol{\phi}(t))^T (\mathbf{x} + \mathbf{n}),$$

όπου $n_1, n_2, \ldots, n_6$ είναι ανεξάρτητα και $n_k = \pm 1$ με ίδια πιθανότητα.

Η μεταδιδόμενη κυματομορφή $y(t)$ αποδιαμορφώνεται με χρήση αποκωδικοποιητή συσχέτισης (ή προσαρμοσμένων φίλτρων). Το πρόβλημα αυτό εξετάζει το λόγο σήματος προς θόρυβο του αποδιαμορφωμένου διανύσματος $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$.

(α) Βρείτε τα $\bar{\mathcal{E}}_x$, σ^2 και SNR=$\bar{\mathcal{E}}_x/\sigma^2$ εάν όλα τα μηνύματα είναι ισοπίθανα.

Απάντηση

Όπως και στη 2η άσκηση, η $\bar{\mathcal{E}}_x$ μπορεί να βρεθεί από το τετράγωνο του μέτρου των στηλών του A και θέτοντας $N = 6$. $\bar{\mathcal{E}}_x = 30.1667$.

Η διασπορά του $\mathbf{n}$ ορίζεται ως $\mathbb{E}[\mathbf{n}^2 - (\mathbb{E}[\mathbf{n}])^2] = \mathbb{E}[\mathbf{n}^2] = \sum \mathbb{E}[n_i^2] = 6$, δεδομένου ότι τα n_i είναι ανεξάρτητα.

Συνεπώς, SNR=5.0278=7.0138 dB.

(β) Βρείτε τον ελάχιστο αριθμό διανυσμάτων βάσης και το νέο πίνακα $\hat{A}$ όπως στην Άσκηση 1.4 και υπολογίστε τα νέα $\bar{\mathcal{E}}_x$, σ^2 και SNR.

Απάντηση

Με τον ίδιο τρόπο όπως και στην Άσκηση 1.4, προκύπτει ότι 3 διανύσματα βάσης αρκούν για την περιγραφή των σημάτων. Ο πίνακας $\hat{A}$ είναι ο

$$\hat{A} = [\hat{\mathbf{a}}_0 \ \hat{\mathbf{a}}_1 \ \cdots \ \hat{\mathbf{a}}_7] =$$

$$\begin{bmatrix} -4.9564 & -7.3362 & -9.7160 & -12.0958 & -12.5841 & -14.9639 & -17.3437 & -19.7235 \\ -3.8839 & -3.4860 & -3.0881 & -2.6901 & 0.9914 & 1.3894 & 1.7873 & 2.1853 \\ 0.5912 & 0.1691 & -0.2530 & -0.6751 & 0.8108 & 0.3887 & -0.0335 & -0.4556 \end{bmatrix}.$$

Προκειμένου να βρούμε τους συντελεστές των σημάτων ως προς τη νέα βάση, αρκεί να τα προβάλουμε στις γραμμές του πίνακα Q^*: $\hat{A} = Q^* A$. Επομένως, ο θόρυβος μετασχηματίζεται σε $\hat{\mathbf{n}} = Q^* \mathbf{n}$ και $\hat{\sigma}^2 = \mathbb{E}\left[|\hat{\mathbf{n}}|^2\right] = \mathbb{E}[\mathbf{n}^* Q Q^* \mathbf{n}] = \mathbb{E}[\mathbf{n}^* \mathbf{n}] = \sigma^2$. Το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός είναι ορθογώνιος. Συνεπώς, όπως μπορεί να επιβεβαιωθεί και με χρήση MATLAB, η μέση ενέργεια $\mathcal{E}_x$ του αστερισμού παραμένει αναλλοίωτη.

Ωστόσο, η μέση ενέργεια του αστερισμού ανά διάσταση, $\bar{\mathcal{E}}_x$, και ο SNR αλλάζουν, δεδομένου ότι ο αριθμός των διαστάσεων είναι, πλέον, ίσος με 3 αντί για 6. Αυτό δε σημαίνει ότι άλλαξε κάτι όσον αφορά την απόδοση του αστερισμού, αφού ο μετασχηματισμός είναι ορθογώνιος και, επομένως, αντιστρέψιμος.

(γ) Εάν το νέο διάνυσμα εξόδου ισούται με $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}}$, είναι αμετάβλητος (invariant) ο μετασχηματισμός από το $\mathbf{y}$ στο $\tilde{\mathbf{y}}$; Με άλλα λόγια, επηρεάζεται η P_e από το μετασχηματισμό;

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Η P_e δεν επηρεάζεται από το μετασχηματισμό επειδή αυτός είναι αντιστρέψιμος. Συγκεκριμένα, μπορούμε να "επιστρέψουμε" στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων, δεδομένου ότι $\hat{A} = Q^* A \Rightarrow A = (Q^*)^{-1}\hat{A} = Q\hat{A}$.

(δ) Συγκρίνετε τα $\bar{b}$ και $\bar{\mathcal{E}}_x$ με το προηγούμενο σύστημα. Το νέο σύστημα υπερτερεί του προηγούμενου; Γιατί ή γιατί όχι;

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο ερώτημα, η $\bar{\mathcal{E}}_x$ είναι, τώρα, διπλάσια από την περίπτωση του Ερωτήματος (α). Ομοίως, ο αριθμός των bits/διάσταση, $\bar{b}$, ισούται με $\log_2(8) = 3/3 = 1$, αντί για 0.5. Το νέο σύστημα δεν υπερτερεί του προηγούμενου όσον αφορά την επίδοση, δεδομένου ότι ο συνολικός αριθμός μεταδιδόμενων bits, η P_e και η μέση ενέργεια σε όλες τις διαστάσεις δε μεταβάλλονται. Το δεύτερο σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί με χρήση 3 αντί για 6 προσαρμοσμένα φίλτρα το οποίο ενδέχεται να είναι προτιμότερο στην περίπτωση που οι περιοχές απόφασης είναι απλούστερες σε σχέση με το σύστημα του Ερωτήματος (α).

(ε) Το νέο σύστημα έχει τώρα 3 διαστάσεις που δε χρησιμοποιούνται. Επιθυμούμε να στείλουμε 8 επιπλέον μηνύματα δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο πίνακα $\bar{A}$:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A} \end{bmatrix}.$$

Συγκρίνετε τα $\bar{b}$ και $\bar{\mathcal{E}}_x$ με το αρχικό σύστημα 6 διαστάσεων, καθώς και με το σύστημα 3 διαστάσεων του Ερωτήματος (β).

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Η μέση ενέργεια ανά διάσταση, $\bar{\mathcal{E}}_x$, είναι ίδια με αυτή του συστήματος (α). Ωστόσο, ο αριθμός bits ανά διάσταση, $\bar{b}$, είναι τώρα 2/3 αντί για 1/2. Αυτό συμβαίνει γιατί το σύστημα μεταδίδει περισσότερα bits με την ίδια μέση ενέργεια. Το γεγονός ότι, στο σύστημα (α), τα σήματα ανήκαν σε υπόχωρο διάστασης 3 σημαίνει ότι, εάν το σύστημα (α) έχει σχεδιαστεί σωστά θα έχει καλύτερη P_e απ' ό,τι το σύστημα (ε).

Η μέση ενέργεια ανά διάσταση του συστήματος (ε) είναι η μισή απ' ό,τι αυτή του συστήματος (β). Αυτό συμβαίνει γιατί, κατά μέσο όρο, η μισή ενέργεια κατανέμεται, τώρα, στις 3 διαστάσεις που δε χρησιμοποιούσε το σύστημα (β) (και (α)). Επίσης, ο αριθμός bits ανά διάσταση ελαττώνεται.

Στη συνέχεια δίνεται κώδικας MATLAB ο οποίος υπολογίζει τις ζητούμενες ποσότητες.

```
% Dimitris Toumpakaris
% March 28, 2009

% clear all variables
```

```
clear all;

% define matrix A
A=[ 1 2 3 4  5  6  7  8;
    2 4 6 8 10 12 14 16;
    1 1 1 1  0  0  0  0;
    0 0 0 0  1  1  1  1;
    3 3 3 3  3  3  3  3;
    5 6 7 8  5  6  7  8];

% Find energy of each symbol
E_x_per_sym = sum(A.^2,1)

% Find mean energy assuming equiprobable messages
E_x = sum(E_x_per_sym)/size(A,2)

% Find energy per dimension
E_x_bar = E_x/size(A,1)

% noise variance is equal to number of dimensions, N
sigma_sq = size(A,1);

% Find SNR per dimension
SNR = E_x_bar/sigma_sq
% in dB
SNR_dB = 10*log10(SNR)

% find b_bar
b_bar = log2(size(A,2))/size(A,1)

% Find orhonormal basis for columns of A
Q=orth(A);

% express transmitted vectors with respect to new basis
A_hat = Q'*A

% Find energy of each symbol
E_x_per_sym_new = sum(A_hat.^2,1)

% Find mean energy assuming equiprobable messages
E_x_new = sum(E_x_per_sym_new)/size(A_hat,2)
```

```
% Find energy per dimension
E_x_bar_new = E_x_new/size(A_hat,1)

% find b_bar
b_bar_new = log2(size(A_hat,2))/size(A_hat,1)

% new system with 16 messages
A_bar = [A_hat zeros(size(A_hat,1),size(A_hat,2));
         zeros(size(A_hat,1),size(A_hat,2)) A_hat];

% Find energy of each symbol
E_x_per_sym_bar = sum(A_bar.^2,1)

% Find mean energy assuming equiprobable messages
E_x_bar = sum(E_x_per_sym_bar)/size(A_bar,2)

% Find energy per dimension
E_x_bar_bar = E_x_bar/size(A_bar,1)

% find b_bar
b_bar_bar = log2(size(A_bar,2))/size(A_bar,1)
```

6. **Κανάλι αποθήκευσης σε δίσκο (Cioffi 1.12)**

Η αποθήκευση *δυαδικών* δεδομένων σε δίσκο λεπτής μεμβράνης (thin-film disk) μπορεί να προσεγγιστεί από κανάλι προσθετικού Γκαουσιανού θορύβου ο οποίος εξαρτάται από την είσοδο. Συγκεκριμένα, η διασπορά του θορύβου εξαρτάται από την είσοδο (δηλαδή την τιμή που εγγράφεται στο δίσκο). Ο θόρυβος έχει την ακόλουθη κατανομή

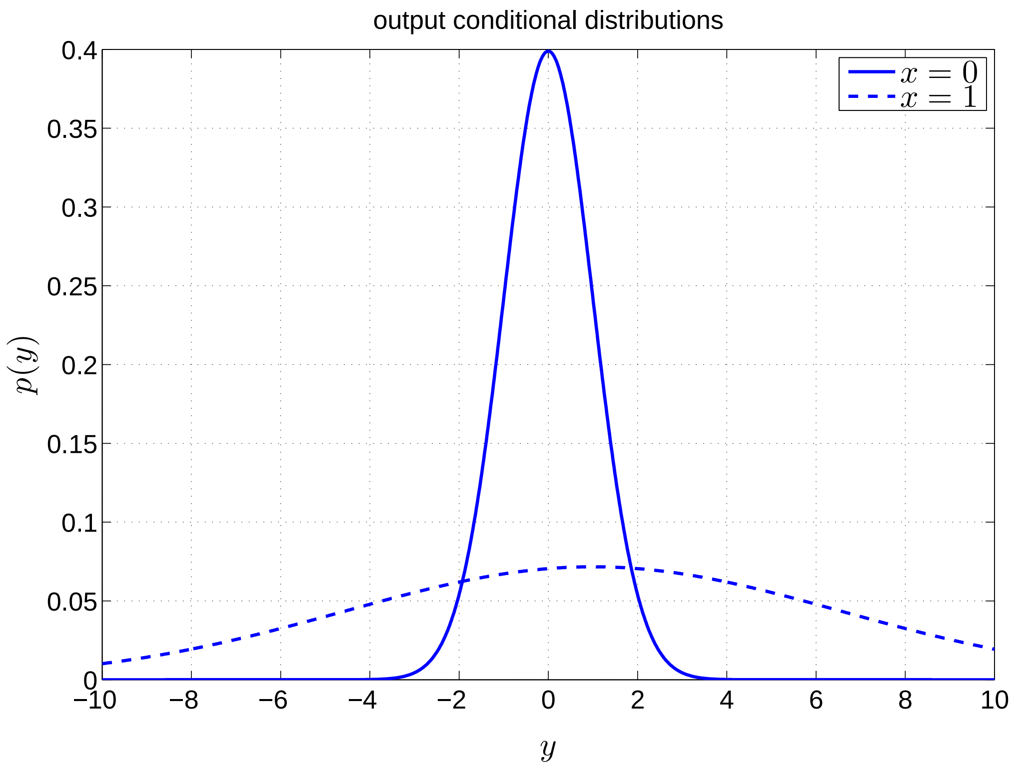
$$p(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_1^2}} & \text{όταν} \quad x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_0^2}} & \text{όταν} \quad x = 0 \end{cases}$$

και $\sigma_1^2 = 31\sigma_0^2$. Οι είσοδοι στο κανάλι είναι *ισοπίθανες*.

(α) Για οποιαδήποτε είσοδο, η έξοδος μπορεί να έχει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Στην ίδια γραφική παράσταση σχεδιάστε τις δύο πιθανές κατανομές πυκνότητας πιθανότητας (pdfs) της εξόδου. Δηλαδή, σχεδιάστε την κατανομή εξόδου για $x = 0$ και την κατανομή εξόδου για $x = 1$. Δείξτε (προσεγγιστικά) τις περιοχές απόφασης στη γραφική παράσταση.

Απάντηση

Οι δύο πιθανές κατανομές πυκνότητας πιθανότητας (pdfs) της εξόδου έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 7 για $\sigma_0^2 = 1$. Επειδή τα σύμβολα εισόδου είναι ισοπίθανα, ο ανιχνευτής ML είναι βέλτιστος. Επομένως, ο δέκτης αποφασίζει ότι το μεταδοθέν σύμβολο είναι το 0 όταν η y βρίσκεται στην περιοχή που σημειώνεται με βέλος. Αλλιώς, αποφασίζει ότι το μεταδοθέν σύμβολο είναι το 1.



Σχήμα 7: Κατανομές πυκνότητας πιθανότητας (pdfs) της εξόδου.

(β) Προσδιορίστε το βέλτιστο δέκτη συναρτήσει των σ_0 και σ_1.

Απάντηση

Ο βέλτιστος δέκτης υπολογίζει την τιμή του x η οποία μεγιστοποιεί την εκ των υστέρων πιθανότητα $p(x|y)$. $\hat{X} = 0$ όταν $p(0|y) > p(1|y) \Rightarrow p(0)p(y|0) > p(1)p(y|1) \Rightarrow p(y|0) > p(y|1)$, δεδομένου ότι οι είσοδοι είναι ισοπίθανες. Συνεπώς, $\hat{X} = 0 \Leftrightarrow p(y|0) > p(y|1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-y^2/2\sigma_0^2} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(y-1)^2/2\sigma_1^2} \Leftrightarrow e^{-y^2/2\sigma_0^2} > \frac{1}{\sqrt{31}} e^{-(y-1)^2/2\cdot 31\sigma_0^2} \Leftrightarrow -y^2/2\sigma_0^2 > -\ln(31)/2 - (y-1)^2/62\sigma_0^2 \Leftrightarrow 31y^2 < 31\ln(31)\sigma_0^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow 30y^2 + 2y - 1 - 31\ln(31)\sigma_0^2 < 0$.

Οι περιοχές απόφασης προκύπτουν από τη λύση της παραπάνω ανισότητας η οποία εξαρτάται από την τιμή της σ_0.

(γ) Υπολογίστε τα σ_0^2 και σ_1^2 όταν SNR=15 dB. Ο SNR ορίζεται ως $\frac{1}{\sigma_0^2+\sigma_1^2}$.

Απάντηση

$\frac{1}{\sigma_0^2+\sigma_1^2} = \frac{1}{32\sigma_0^2} = 10^{1.5} \approx 31.62 \approx 32$. Συνεπώς, $\sigma_0^2 = 1$ και $\sigma_1^2 = 31$.

(δ) Υπολογίστε την P_e όταν SNR=15 dB.

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Για $\sigma_0^2 = 1$ και $\sigma_1^2 = 31$, η ανισότητα για τις περιοχές απόφασης παίρνει τη μορφή $p(y|0) > p(y|1) \Leftrightarrow 30y^2 + 2y - 1 - 31\ln(31) < 0$. Οι ρίζες είναι οι -1.9262 και +1.8595. Για $y = 0$, $30y^2 + 2y - 1 - 31\ln(31) < 0$. Επομένως, ο δέκτης αποφασίζει $\hat{X} = 0$ όταν $y \in [-1.9262, +1.8595]$, αλλιώς $\hat{X} = 1$. Η πιθανότητα σφάλματος μπορεί, τώρα, να υπολογιστεί ως

$$P_e = p(1)P_{e|x=1} + p(0)P_{e|x=0} = \frac{1}{2}\left(P_{e|x=1} + P_{e|x=0}\right).$$

$$\begin{aligned}
P_{e|x=1} &= \int_{-1.9262}^{1.8595} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(y-1)^2/2\sigma_1^2} dy = \\
&= \int_{-1.9262}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(y-1)^2/2\sigma_1^2} dy - \int_{1.8595}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(y-1)^2/2\sigma_1^2} dy = \\
&= Q\left(\frac{-1.9262+1}{\sqrt{31}}\right) - Q\left(\frac{1.8595+1}{\sqrt{31}}\right) = 0.2623.
\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}
P_{e|x=0} &= \int_{-\infty}^{-1.9262} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-y^2/2\sigma_0^2} dy + \int_{1.8595}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-y^2/2\sigma_0^2} dy = \\
&= Q(1.9262) + Q(1.8595) = 0.0585.
\end{aligned}$$

Επομένως, $P_e = (0.2623 + 0.0585)/2 = 0.1604$.

(ε) Τι συμβαίνει καθώς $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \to 0$; Μπορείτε να περιοριστείτε στη λογική (από φυσικής άποψης) περίπτωση όπου η σ_1 είναι σταθερή και πεπερασμένη και $\sigma_0 \to 0$.

$\boxed{\text{Απάντηση}}$

Καθώς $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \to 0$, η $p(y|0)$ θα γίνεται όλο και πιο "στενή" γύρω από το $y = 0$. Επομένως, τα όρια της περιοχής απόφασης $\hat{X} = 0$ θα μετακινούνται προς το 0. Στο όριο, ο δέκτης αποφασίζει ότι $\hat{X} = 0$ μόνο όταν το y είναι (σχεδόν) 0, ενώ σε όλες τις άλλες περιπτώσεις αποφασίζει ότι $\hat{X} = 1$.

7. **Σύγκριση Φραγμάτων (Cioffi 1.21)**

Θεωρούμε τον παρακάτω αστερισμό ο οποίος χρησιμοποιείται για μετάδοση σε κανάλι AWGN.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_0 &= (-1, -1) \\
\mathbf{x}_1 &= (1, -1) \\
\mathbf{x}_2 &= (-1, 1) \\
\mathbf{x}_3 &= (1, 1) \\
\mathbf{x}_4 &= (0, 3)
\end{aligned}$$

Για τα Ερωτήματα (α) και (β) δώστε τις απαντήσεις συναρτήσει του σ.

(α) Υπολογίστε το union bound για την P_e όταν χρησιμοποιείται αποκωδικοποιητής ML.

Απάντηση

Ο αστερισμός έχει 5 σημεία. Η ελάχιστη απόσταση του αστερισμού ισούται με $d_{\min} = 2$. Επομένως, $P_{e,\text{UB}} = 4Q(2/2\sigma) = 4Q(1/\sigma)$.

(β) Υπολογίστε το nearest neighbor union bound για την P_e όταν χρησιμοποιείται αποκωδικοποιητής ML.

Απάντηση

Τα σημεία $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{x}_1$ έχουν 2 κοντινούς γείτονες, σε απόσταση 2. Τα σημεία $\mathbf{x}_2$ και $\mathbf{x}_3$ έχουν 3 κοντινούς γείτονες, δύο σε απόσταση 2 και έναν σε απόσταση $\sqrt{5}$. Το σημείο $\mathbf{x}_4$ έχει 2 κοντινούς γείτονες σε απόσταση $\sqrt{5}$. Επομένως, ο μέσος αριθμός γειτόνων είναι $\frac{1}{5}(2 \times 2 + 2 \times 3 + 2) = 12/5 = 2.4$ και $P_{e,\text{NNUB}} = 2.4Q(2/2\sigma) = 2.4Q(1/\sigma)$. Για τον υπολογισμό του NNUB θεωρούμε ότι όλοι οι γείτονες είναι σε απόσταση 2 (ακόμα και αυτοί που είναι σε απόσταση $\sqrt{5}$). Επομένως, το φράγμα που προκύπτει είναι άνω φράγμα της P_e και αυστηρώς μεγαλύτερο από την P_e.

(γ) Εάν SNR=14 dB, βρείτε την τιμή της P_e χρησιμοποιώντας το NNUB.

Απάντηση

Η ενέργεια των $\mathbf{x}_0$ έως $\mathbf{x}_3$ ισούται με 2, ενώ η ενέργεια του $\mathbf{x}_4$ ισούται με 9. Επομένως, $\mathcal{E}_x = \frac{1}{5}(4 \times 2 + 9) = 17/5 = 3.6$. $SNR = \mathcal{E}_x/\sigma^2 = 10^{1.4} \Rightarrow \sigma \approx 0.3786$. Συνεπώς, $P_{e,\text{NNUB}} = 2.4Q(1/2.64) \approx 10^{-2}$.