EE725
Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών
8η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

19 Μαΐου 2011

Αντιστοιχία με βιβλιογραφία

- Cioffi: 3.1 – 3.3.1
- Proakis & Salehi, Communication Systems Engineering (2nd ed.): 8.1, 8.2.1, 8.3.1, 8.6.1

Μοντέλο Καναλιού με Διασυμβολική Παρεμβολή

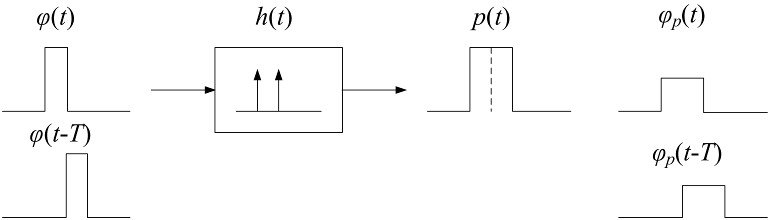
- Στα επόμενα θα θεωρήσουμε ότι $N = 1$ διάσταση (για απλούστευση). Τα αποτελέσματα γενικεύονται εύκολα σε 2 διαστάσεις με χρήση μιγαδικών ποσοτήτων.
- Επίσης, υπενθυμίζεται μια βασική υπόθεση που έχουμε κάνει έως τώρα (και που θα συνεχίσουμε να κάνουμε σε αυτό το μάθημα): Τα μεταδιδόμενα σήματα x_k είναι ανεξάρτητα και ομοίως κατανεμημένα (i.i.d.).

■ Απόκριση Παλμού (pulse response) $p(t) \triangleq \phi(t) * h(t)$, όπου $\phi(t)$ η συνάρτηση βάσης που χρησιμοποιείται για τη μετάδοση.

- Επομένως, η έξοδος του καναλιού ισούται με $y(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k \phi(t-kT) * h(t) + n(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k p(t-kT) + n(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k \|p\| \phi_p(t-kT) + n(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_{p,k} \phi_p(t-kT) + n(t)$, όπου $\phi_p(t) = p(t)/\|p\|$ η κανονικοποιημένη απόκριση παλμού, $x_{p,k} = \|p\| x_k$ και $\|p\|^2 = \langle p(t), p(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) p^*(t) dt$.
- Η συνάρτηση $\phi_p(t)$ είναι κανονικοποιημένη, αλλά όχι κατ' ανάγκη ορθογώνια με τις μετατοπίσεις της, $\phi_p(t-kT)$.

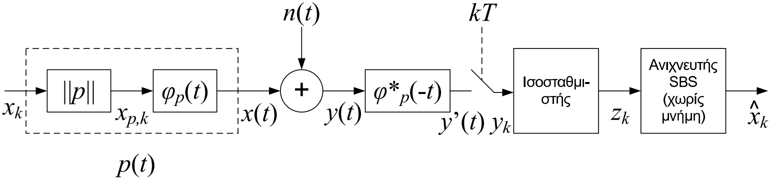
Παράδειγμα (Cioffi 3.1.2)

- Θεωρούμε διαμόρφωση με χρήση της $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t) - u(t-T))$ (τετραγωνικός παλμός) και κανάλι με $h(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$.
- Η απόκριση παλμού ισούται με $p(t) = \phi(t) * h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t) - u(t-T)) + \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t-T) - u(t-2T)) = \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t) - u(t-2T))$.
- $\phi_p(t) = \frac{p(t)}{\|p\|} = \frac{1}{\sqrt{2T}}(u(t) - u(t-2T))$.
- Παρόλο που οι $\phi(t)$ και $\phi(t-T)$ είναι ορθογώνιες, οι $\phi_p(t)$ και $\phi_p(t-T)$ δεν είναι.

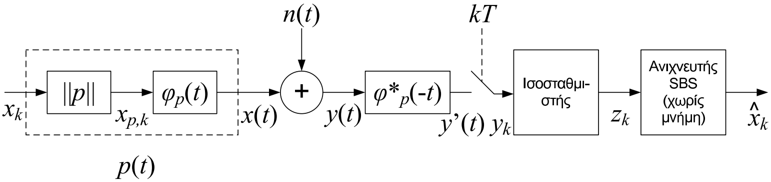


Μοντέλο Καναλιού με Διασυμβολική Παρεμβολή (2)

- Είδαμε ότι το λαμβανόμενο σήμα στο δέκτη ισούται με $y(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_{p,k}\phi_p(t - kT) + n(t)$.
- Στα επόμενα θεωρούμε θόρυβο AWGN (στην περίπτωση θορύβου ACGN μπορούμε να τον μετατρέψουμε σε ισοδύναμο θόρυβο AWGN όπως περιγράφηκε προηγουμένως).
- Στο δέκτη χρησιμοποιούμε ανιχνευτή προσαρμοσμένου φίλτρου $\phi_p^*(-t)$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπενθύμιση: Η $\phi_p(t)$ εμπεριέχει και το κανάλι.
- Αποδεικνύεται ότι τα δείγματα y_k περιέχουν όλη την πληροφορία του $y(t)$ που σχετίζεται με την ανίχνευση των x_k, αρκεί $\|p\| < \infty$.

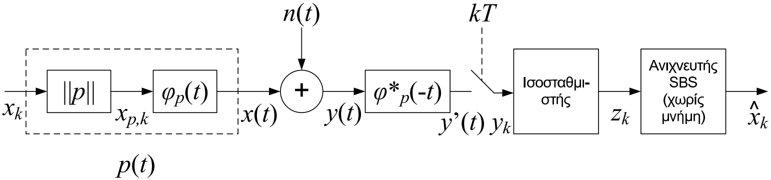


Μοντέλο Καναλιού με Διασυμβολική Παρεμβολή (3)



- $y'(t) = y(t) * \phi_p^*(-t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_{p,k}\phi_p(t-kT) * \phi_p^*(-t) + n(t) * \phi_p^*(-t) = \sum_{k=0}^{K-1} \|p\| x_k q(t-kT) + n'(t)$,
  όπου $q(t) \triangleq \phi_p(t) * \phi_p^*(-t) = \frac{p(t)*p^*(-t)}{\|p\|^2}$.
- Αποδεικνύεται εύκολα ότι $q^*(-t) = q(t)$ και $q(0) = 1$.

Μοντέλο Καναλιού με Διασυμβολική Παρεμβολή (4)



Έστω $y_k \triangleq y(kT)$, $q_k \triangleq q(kT)$ και $n'_k \triangleq n'(kT)$.

Μοντέλο ISI διακριτού χρόνου (στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου)

$$y_k = \underbrace{\|p\| x_k}_{\text{επιθυμητό σήμα (με διαφορετικό πλάτος)}} + \underbrace{\|p\| \sum_{m \neq k} x_m q_{k-m}}_{\text{ISI}} + \underbrace{n'_k}_{\text{θόρυβος}}$$

Κριτήριο Μέγιστης Παραμόρφωσης

$$y_k = \|p\| x_k + \|p\| \sum_{m \neq k} x_m q_{k-m} + n'_k.$$

- Κριτήριο Μέγιστης Παραμόρφωσης (Peak Distortion Criterion): $\mathcal{D}_p \triangleq |x|_{\max} \|p\| \sum_{m \neq 0} |q_m|$.
- Αντιστοιχεί στο χειρότερο σενάριο που μπορεί να συμβεί σε ένα κανάλι ISI (όλα τα παρεμβαλλόμενα σύμβολα να έχουν το μέγιστο δυνατό πλάτος).
- $P_e \leq N_e Q\left(\frac{\|p\| \frac{d_{\min}}{2} - \mathcal{D}_p}{\sigma}\right)$ (εάν $2\mathcal{D}_p \leq \|p\| d_{\min}$).
- Συνήθως η ακραία αυτή περίπτωση εμφανίζεται σπάνια με αποτέλεσμα ο χαρακτηρισμός του ISI με χρήση της $\mathcal{D}_p$ να οδηγεί σε πολύ απαισιόδοξες εκτιμήσεις.

Μέση Τετραγωνική Παραμόρφωση

$$y_k = \|p\| x_k + \|p\| \sum_{m \neq k} x_m q_{k-m} + n'_k.$$

- Εάν τα διαδοχικά σήματα x_k είναι ανεξάρτητα και ομοίως κατανεμημένα (i.i.d.), η μέση τετραγωνική παραμόρφωση (Mean-Square Distortion) ορίζεται ως
$$\mathcal{D}_{ms} \triangleq \mathbb{E}\left\{\left|\sum_{m\neq k} \|p\| x_m q_{k-m}\right|^2\right\} = \mathcal{E}_x \|p\|^2 \sum_{m\neq 0} |q_m|^2.$$
- Όταν χρησιμοποιούμε τη μέση τετραγωνική παραμόρφωση για το χαρακτηρισμό του ISI υποθέτουμε ότι η διασυμβολική παρεμβολή ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή και ότι είναι ασυσχέτιστη με το θόρυβο n'_k. Η προσέγγιση είναι πιο ακριβής σε συστήματα με μεγάλους αστερισμούς και κωδικοποίηση.
- $P_e \approx N_e Q\left(\frac{\|p\| d_{\min}}{2\sqrt{\sigma^2 + \mathcal{D}_{ms}}}\right)$.

Φράγμα Προσαρμοσμένου Φίλτρου – Matched Filter Bound

- Δεδομένης της απόκρισης παλμού, $p(t)$, και του αστερισμού $\{x_k\}$, ο λόγος σήματος προς θόρυβο φράγματος προσαρμοσμένου φίλτρου $\mathrm{SNR_{MFB}}$ ορίζεται ως $\boxed{\mathrm{SNR_{MFB}} = \frac{\bar{\mathcal{E}}_x \|p\|^2}{\frac{\mathcal{N}_0}{2}},}$ δηλαδή ως ο λόγος σήματος προς θόρυβο στο δέκτη όταν το κανάλι με ISI χρησιμοποιείται για τη μετάδοση ενός μόνο συμβόλου (με αποτέλεσμα να μην εμφανίζεται ISI).
- Δεδομένου ότι η μετάδοση περισσότερων του ενός συμβόλων θα δημιουργήσει διασυμβολική παρεμβολή (εκτός εάν τα μεταδιδόμενα σύμβολα είναι συσχετισμένα και λαμβάνεται υπόψη το κανάλι), ο $\mathrm{SNR_{MFB}}$ είναι ο μέγιστος δυνατός SNR που μπορεί να εμφανιστεί στο δέκτη όταν τα x_k είναι i.i.d.

Φράγμα Προσαρμοσμένου Φίλτρου – Matched Filter Bound (2)

- Συχνά, η επίδοση των ισοσταθμιστών συγκρίνεται με τον $\mathrm{SNR}_{\mathrm{MFB}}$ ο οποίος αποτελεί άνω φράγμα (για i.i.d. x_k). Ωστόσο αυτό δε σημαίνει ότι σε ένα κανάλι ISI μπορούμε πάντα να φτάσουμε τον $\mathrm{SNR}_{\mathrm{MFB}}$.
- Ωστόσο, εάν βελτιστοποιήσουμε και το μεταδιδόμενο σήμα (transmit optimization) με αποτέλεσμα, στη γενική περίπτωση, τα x_k να μην είναι πλέον i.i.d., ενδέχεται να μπορούμε να υπερβούμε τον $\mathrm{SNR}_{\mathrm{MFB}}$).

Κριτήριο Nyquist

1. Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή (συνέχεια)
   - Μοντέλο Καναλιού με Διασυμβολική Παρεμβολή
   - Κριτήρια Παραμόρφωσης και MFB
2. Κριτήριο Nyquist

Κριτήριο Nyquist

- Είδαμε ότι $y_k = \|p\| x_k + \|p\| \sum_{m \neq k} x_m q_{k-m} + n'_k$
$= \|p\| \sum_{\text{all } m} x_m q_{k-m} + n'_k$.
- Κριτήριο Nyquist: Σε ένα κανάλι με παλμική απόκριση $p(t)$ δεν εμφανίζεται ISI όταν $q_k = \delta_k$ ή, ισοδύναμα, όταν
$Q(e^{-j\omega T}) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k e^{-j\omega kT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right) = 1$.
$Q(\omega) = \mathcal{F}\{q(t)\}$.
- Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν το κριτήριο Nyquist ονομάζονται παλμοί Nyquist.
- Παράδειγμα: $q(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \to \phi_p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$
$q(t) = \phi_p(t) * \phi_p^*(-t) \Rightarrow Q(f) = |\Phi_p(f)|^2 \Rightarrow |\Phi_p(f)|^2 = \mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T\Pi(fT) \Rightarrow \Phi_p(f) = \sqrt{T}\Pi(fT) \Rightarrow \phi_p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$.

Κριτήριο Nyquist (2)

- Όπως είδαμε, δεδομένου ότι $p(t) = \phi(t) * h(t)$, οι $q(t)$ και $\phi_p(t)$ εξαρτώνται από τη συνάρτηση βάσης $\phi(t)$ <u>και</u> από το κανάλι $h(t)$. Επομένως η $\phi(t)$ πρέπει να επιλεγεί με βάση το κανάλι $h(t)$.
- Πολλές φορές τα συστήματα επικοινωνιών χρησιμοποιούν συναρτήσεις Nyquist (ή σχεδόν Nyquist) ως συναρτήσεις βάσης $\phi(t)$. Αυτό δε σημαίνει, κατ' ανάγκη, ότι ικανοποιείται το κριτήριο Nyquist στο δέκτη.