EE725
Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών
3η και 4η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

6 Απριλίου 2011

Αντιστοιχία με βιβλιογραφία

- Cioffi: 1.2–1.5
- Barry, Lee & Messerschmitt (3rd ed.): 7.1–7.3.3
- Proakis & Salehi, Communication Systems Engineering (2nd ed.): 7.1, 7.5–7.5.3

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

1. Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες
   - Εισαγωγή και Λευκός Θόρυβος
   - Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος (AWGN)
   - Θόρυβος σε συστήματα επικοινωνιών
2. Αποδιαμόρφωση και αποκωδικοποίηση παρουσία θορύβου
   - Μεγιστοποίηση SNR στο δέκτη
   - Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)
3. Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
   - Διανυσματικό μοντέλο καναλιού AWGN
   - Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

Θόρυβος

- Ο θόρυβος είναι ένα άγνωστο σήμα.
- Μπορεί να οφείλεται σε φυσικά φαινόμενα (π.χ. θερμικός θόρυβος, ηλεκτρικές εκκενώσεις), στον ανθρώπινο παράγοντα (π.χ. κινητήρες, παρεμβολές στις ραδιοσυχνότητες) ή στα συστήματα επικοινωνιών (διαφωνία, θόρυβος κβαντισμού).
- Κατηγορίες θορύβου
  - Ανάλογα με το πώς υπερτίθεται στο σήμα: Αθροιστικός / Πολλαπλασιαστικός / Θόρυβος φάσης.
  - Ανάλογα με τη στατιστική του κατανομή: στάσιμος, μη στάσιμος, κρουστικός (impulse/burst).
- Το ποσό της πληροφορίας που μπορούμε να μεταδώσουμε εξαρτάται (και) από το θόρυβο.

Λευκός Θόρυβος (White Noise)

- Ας περιοριστούμε, προς το παρόν, στην κατηγορία του WSS προσθετικού θορύβου.
- Παρόλο που δε γνωρίζουμε τις ακριβείς τιμές του θορύβου, ενδέχεται να γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητές του (π.χ. μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση).
- Έστω η στοχαστική διαδικασία WSS διακριτού χρόνου $\{n_k\}$ με $m = 0$ και $K_{NN}(l) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta_l$ (δέλτα του Kronecker).
  - Η $\{n_k\}$ εξελίσσεται όσο πιο τυχαία γίνεται στο χρόνο k (γιατί;)
  - Η PSD είναι επίπεδη. Διαισθητικά, η $\{n_k\}$ μπορεί να μεταβληθεί εξίσου πιθανά με οποιαδήποτε 'ταχύτητα'.
- Μια στοχαστική διαδικασία με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυνδιασπορά (ή αυτοσυσχέτιση) $K_{XX}(t_1, t_2) = K\delta(t_1 - t_2)$ ονομάζεται <u>λευκή</u> (white) (σε αναλογία με το λευκό φως το οποίο περιέχει όλες τις συχνότητες του ορατού φάσματος).

Λευκός Θόρυβος (White Noise) (2)

- Όπως έχουμε αναφέρει, μηδενική αυτοσυνδιασπορά δε συνεπάγεται και ανεξαρτησία.
- Όταν οποιαδήποτε δύο δείγματα στοχαστικής διαδικασίας είναι ανεξάρτητα, η ανέλιξη ονομάζεται *αυστηρώς λευκή* (strictly stationary).
- Όπως θα δούμε στα επόμενα, ο Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος (AWGN noise) είναι αυστηρώς λευκός.

Λευκός Θόρυβος (White Noise) (3)

- Έστω, τώρα, η στοχαστική διαδικασία WSS συνεχούς χρόνου $\{n(t)\}$ με $m = 0$ και $K_{XX}(\tau) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(\tau)$.
- Στη φύση είναι αδύνατο να υπάρχει τέτοιο σήμα (συνεχής λευκός θόρυβος) (γιατί;)
- Ας υποθέσουμε, όμως, ότι η $\{n(t)\}$ έχει επίπεδη PSD στις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν. Εάν γίνει δειγματοληψία σε αυτές τις συχνότητες (μετά, βέβαια, από κατάλληλο βαθυπερατό φίλτρο), η διακριτή στοχαστική διαδικασία $\{n_k\}$ που προκύπτει έχει επίπεδη PSD. Άρα, στο ψηφιακό πεδίο η $\{n_k\}$ είναι λευκή.

Θερμικός θόρυβος (Johnson)

- Οφείλεται στη θερμική κίνηση των ηλεκτρονίων. Εμφανίζεται σε οποιοδήποτε σύστημα λειτουργεί σε μη μηδενική θερμοκρασία. Η (μονόπλευρη) PSD του θερμικού θορύβου ισούται με

$$S(f) = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT_n}} - 1},$$

  όπου h η σταθερά του Planck, k η σταθερά του Boltzmann ($= 1.38 \cdot 10^{-23}$ Joules ανά βαθμό Kelvin) και T_n η θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin.

- Η (μονόπλευρη) PSD για συχνότητες έως και τα 300, περίπου, GHz ισούται με kT_n (επίπεδη). Επομένως, στο ψηφιακό πεδίο, και εφόσον η δειγματοληψία γίνεται κάτω από τα 300 GHz, ο θερμικός θόρυβος μπορεί να θεωρηθεί λευκός με πολύ καλή προσέγγιση.

- Στην ουσία, ο θερμικός θόρυβος μεταβάλλεται εξίσου πιθανά στην περιοχή 'ταχυτήτων' έως και 300 GHz. Για τα ψηφιακά συστήματα τα οποία λειτουργούν κάτω από τα 300 GHz ο θόρυβος μεταβάλλεται εξίσου πιθανά σε όλες τις χρησιμοποιούμενες συχνότητες.

Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος (AWGN)

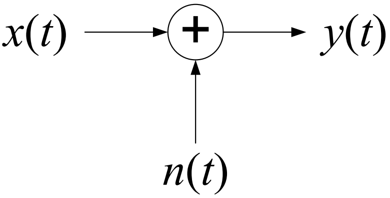
- Το γεγονός ότι η αυτοσυσχέτιση του λευκού θορύβου ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(t)$ δε δίνει καμια πληροφορία για την κατανομή των τιμών του. Για παράδειγμα, μια λευκή στοχαστική διαδικασία ενδέχεται να παίρνει τιμές μόνο 0 και 1 (Bernoulli).
- Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος: Λευκός θόρυβος τα δείγματα του οποίου είναι ανεξάρτητες ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) γκαουσιανές μεταβλητές.

Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος (AWGN) (συνέχεια)

- Ο AWGN είναι το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο θορύβου. Ο λόγος είναι ότι μοντελοποιεί πολύ καλά ένα μεγάλο ποσοστό κυματομορφών θορύβου που εμφανίζονται στις Ψηφιακές Επικοινωνίες.
  - Λευκότητα: Αποτέλεσμα της τυχαιότητας της κίνησης των ηλεκτρονίων.
  - Γκαουσιανός: Δικαιολογείται από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα: Ο συνολικός θόρυβος είναι αποτέλεσμα της αθροιστικής συμβολής ενός πολύ μεγάλου αριθμού (i.i.d.) πηγών θορύβου.
  - Ο θερμικός θόρυβος μοντελοποιείται ως AWGN.
- Έγχρωμος (colored) Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος: Η PSD δεν είναι επίπεδη. Μοντελοποιεί θόρυβο λόγω διαφωνίας (crosstalk) ή λόγω φίλτρων.
- Για άλλα είδη θορύβου (π.χ. violet noise) και ηχητικά δείγματα πατήστε εδώ.

Θερμικός θόρυβος σε μικροκυματικά συστήματα

- Στα μικροκυματικά συστήματα διακρίνουμε δύο πηγές θορύβου: την κεραία και τα εσωτερικά κυκλώματα του δέκτη.
  - Ο θόρυβος λόγω της κεραίας εξαρτάται από το φυσικό περιβάλλον και από τον προσανατολισμό της κεραίας.
  - Ο θόρυβος λόγω των κυκλωμάτων του δέκτη εξαρτάται από τη σχεδίασή τους (και τα υλικά που χρησιμοποιούν).
- Συνήθως ο συνολικός θερμικός θόρυβος του δέκτη ανάγεται στην είσοδό του, όπως φαίνεται στο σχήμα (όπου δεν εμφανίζεται η επίδραση του καναλιού).



Σημείωση σχετικά με τις Οπτικές Επικοινωνίες

Στις οπτικές συχνότητες ο θερμικός θόρυβος είναι αμελητέος. Επομένως, σε συστήματα οπτικών επικοινωνιών ο θερμικός θόρυβος εμφανίζεται κυρίως σε μεταγενέστερα στάδια επεξεργασίας στο δέκτη όπου το σήμα έχει μεταφερθεί σε χαμηλότερες συχνότητες (για παράδειγμα στο στάδιο προενίσχυσης του σήματος στην έξοδο του φωτοανιχνευτή).

Τα οπτικά συστήματα υπόκεινται, επιπλέον, σε πολλαπλασιαστικό θόρυβο βολής. Στο μάθημα δε θα ασχοληθούμε αναλυτικά με οπτικά συστήματα. Παρόλο που η σχεδίαση οπτικών συστημάτων διαφέρει από αυτή των μικροκυματικών και βαθυπερατών συστημάτων (εν μέρει λόγω του διαφορετικού θορύβου) υπάρχουν κάποιες βασικές αρχές οι οποίες διέπουν όλα τα συστήματα επικοινωνιών. Επομένως, κάποια από τα θέματα που θα καλύψουμε εφαρμόζονται και σε οπτικά συστήματα (ιδιαίτερα στο κομμάτι μετά το φωτοανιχνευτή).

Σημείωση σχετικά με τα Μαγνητικά Κανάλια

Τα μαγνητικά συστήματα υπόκεινται σε προσθετικό και σε πολλαπλασιαστικό θόρυβο, καθώς και σε θόρυβο χρονισμού (jitter). Ο προσθετικός θόρυβος οφείλεται στην επίδραση των μαγνητικών διπόλων στην κεφαλή ανάγνωσης/εγγραφής. Ο πολλαπλασιαστικός θόρυβος οφείλεται σε ανομοιογένειες της πυκνότητας του υλικού οι οποίες προκαλούν μεταβολή του πλάτους του σήματος. Τέλος, ο θόρυβος χρονισμού προκαλείται από τη μεταβολή της απόστασης μεταξύ της κεφαλής και της επιφάνειας εγγραφής. Επιπρόσθετα, στα μαγνητικά συστήματα εμφανίζεται διαφωνία (crosstalk) λόγω παρεμβολών από γειτονικά κανάλια.

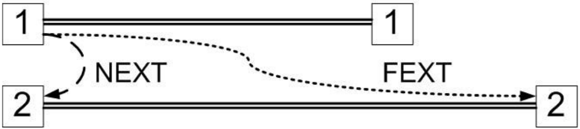
Όπως και στην περίπτωση οπτικών συστημάτων, δε θα ασχοληθούμε με τα μαγνητικά κανάλια. Ωστόσο, πολλές από τις αρχές και τις τεχνικές σχεδίασης ψηφιακών συστημάτων εφαρμόζονται και σε αυτά τα συστήματα.

Θόρυβος σε τηλεφωνικά κανάλια

- Επιπλέον του θερμικού θορύβου, άλλες πηγές θορύβου σε τηλεφωνικά κανάλια είναι:
  - Θόρυβος από γειτονικά κανάλια λόγω διαφωνίας (crosstalk)
  - Θόρυβος λόγω κβάντισης (quantization noise)
  - Κρουστικός θόρυβος (impulse noise)
  - Θόρυβος λόγω παρεμβολών σε ραδιοσυχνότητες (Radio Frequency Ingress - RFI)

Διαφωνία (Crosstalk)

- Οφείλεται σε παρεμβολές από γειτονικά κανάλια. Αποτελεί πρόβλημα σε συνεστραμμένα ζεύγη (twisted pairs) χαλκού τα οποία ανήκουν σε ομάδες καλωδίων (binders).
- Προκειμένου να μειωθεί η επίδραση της διαφωνίας, πολλές φορές χρησιμοποιείται διαφορική μετάδοση (π.χ. DSL), δηλαδή το μεταδιδόμενο σήμα ισούται με τη διαφορά τάσης μεταξύ δύο γραμμών.
- Διακρίνεται σε παραδιαφωνία (Near-End Crosstalk -- NEXT) και τηλεδιαφωνία (Far-End Crosstalk -- FEXT).



- Τα στατιστικά της διαφωνίας εξαρτώνται από τη διαμόρφωση που χρησιμοποιούν οι γραμμές που παρεμβάλλονται στο υπό εξέταση κανάλι και στην απόστασή τους από αυτό.

Διαφωνία (2)

- Σε πολλές περιπτώσεις, η παραδιαφωνία μοντελοποιείται με αρκετή ακρίβεια από τη σχέση

$$S_{NEXT}(j\omega) = K_{NEXT}|\omega|^{1.5} S_{\text{interf}}(j\omega),$$

όπου $S_{\text{interf}}(j\omega)$ η PSD του σήματος από το οποίο προέρχεται η παρεμβολή. Ο συντελεστής K_{NEXT} εξαρτάται από το περιβάλλον στο οποίο βρίσκεται το κανάλι (π.χ. δομή του binder). Παρατηρούμε ότι η παραδιαφωνία αποτελεί μεγαλύτερο πρόβλημα στις υψηλές συχνότητες.

- Αντίστοιχα, η τηλεδιαφωνία μοντελοποιείται από τη σχέση

$$S_{FEXT}(j\omega) = K_{FEXT} \cdot d \cdot |\omega|^2 |H(j\omega)|^2 S_{\text{interf}}(j\omega).$$

d είναι το μήκος της γραμμής. Σε κανάλια συνεστραμμένων ζευγών ο θόρυβος λόγω τηλεδιαφωνίας αρχικά αυξάνει με τη συχνότητα, αλλά στη συνέχεια μειώνεται λόγω του πολλαπλασιασμού με την $|H(j\omega)|^2$ η οποία είναι φθίνουσα (στα συνεστραμμένα ζεύγη η απόσβεση αυξάνεται με τη συχνότητα).

Θόρυβος λόγω κβαντισμού (Quantization noise)

- Για να μεταδώσουμε ένα αναλογικό σήμα (π.χ. φωνή) με χρήση ενός ψηφιακού συστήματος αναγκαστικά πρέπει να περιορίσουμε (να κβαντίσουμε) τις πιθανές τιμές του σήματος.
- Η κβάντιση παραμορφώνει το σήμα.
- Μερικές φορές, και για ορισμένες περιοχές λόγου ισχύος σήματος προς θόρυβο (SNR), η παραμόρφωση λόγω κβάντισης μοντελοποιείται ικανοποιητικά ως προσθετικός θόρυβος κβάντισης και η απόδοση του συστήματος εξετάζεται με χρήση του λόγου σήματος ως προς θόρυβο κβάντισης (SQNR).
- Τα χαρακτηριστικά του θορύβου κβάντισης διαφέρουν από το θερμικό θόρυβο. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε π.χ. Lee & Messerschmitt 2nd ed. Ch. 5.

Κρουστικός Θόρυβος (Impulse/Burst Noise)

- Εμφανίζεται με τη μορφή ξαφνικών και σύντομων κυματομορφών με μεγάλη, πολλές φορές, ενέργεια.
- Οφείλεται σε φυσικά φαινόμενα (π.χ. κεραυνοί), σε ανθρώπινη δραστηριότητα (π.χ. κινητήρες, άνοιγμα διακοπτών), στο τηλεφωνικό δίκτυο (π.χ. μηχανικοί διακόπτες).
- Είναι μη στάσιμος και δε μοντελοποιείται εύκολα. Έχουν προταθεί διάφορα μοντέλα (π.χ. παλμός Cook), αλλά κανένα μοντέλο λογικής πολυπλοκότητας δεν περιγράφει με ακρίβεια την επίδρασή του κρουστικού θορύβου στα κανάλια.
- Στα συστήματα DSL αντιμετωπίζεται με χρήση κωδίκων διόρθωσης σφαλμάτων (Error-Correcting Codes).

Θόρυβος φάσης/χρονισμού

- Δεν είναι προσθετικός.
- Είναι μια άγνωστη διαταραχή του χρονισμού του σήματος (timing jitter) ή της φάσης του (phase jitter).
- Μια από τις αιτίες του jitter είναι το μη τέλειο ρολόι που χρησιμοποιεί ο δέκτης για αποδιαμόρφωση και για δειγματοληψία.
- Αντιμετωπίζεται με χρήση κυκλωμάτων στο δέκτη (π.χ. Phase-Locked Loops (PLLs) σε συνδυασμό με φίλτρα). Η αντιμετώπισή του είναι πιο εύκολη όταν έχει σχετικά μικρό εύρος ζώνης (δηλαδή όταν διαδοχικές τιμές του jitter είναι συσχετισμένες).

Επίδραση καναλιού στο μεταδιδόμενο σήμα

Το μεταδιδόμενο σήμα δέχεται τόσο την επίδραση του θορύβου όσο και την επίδραση του καναλιού. Η τιμή του θορύβου είναι άγνωστη. Αντίθετα, σε μερικές περιπτώσεις (όχι, όμως, πάντα) ο τρόπος που επιδρά το κανάλι στο σήμα ενδέχεται να περιγράφεται με ακρίβεια από κάποιο μοντέλο. Παραθέτουμε, χωρίς να τους αναλύσουμε, μερικούς από τους τρόπους με τους οποίους επιδρά το κανάλι στο μεταδιδόμενο σήμα. Θα επανέλθουμε σε κάποιους από αυτούς σε επόμενα μαθήματα.

- Απόσβεση
- Καθυστέρηση
- Παραμόρφωση (πλάτους/φάσης)
- Απόκλιση φάσης/συχνότητας (phase/frequency offset), φαινόμενο doppler
- Διαλείψεις (fading), σκίαση (shadowing)
- Διασυμβολική παρεμβολή (Inter-Symbol Interference - ISI)
- Ηχώ

Αποδιαμόρφωση και αποκωδικοποίηση παρουσία θορύβου

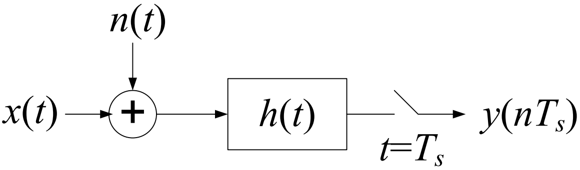
1. Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες
   - Εισαγωγή και Λευκός Θόρυβος
   - Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος (AWGN)
   - Θόρυβος σε συστήματα επικοινωνιών
2. Αποδιαμόρφωση και αποκωδικοποίηση παρουσία θορύβου
   - Μεγιστοποίηση SNR στο δέκτη
   - Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)
3. Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
   - Διανυσματικό μοντέλο καναλιού AWGN
   - Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

Λόγος Σήματος προς Θόρυβο στο Δέκτη (Receiver SNR)

- SNR στην έξοδο του δέκτη (τόσο για διακριτές όσο και για συνεχείς στοχαστικές ανελίξεις):

$$\text{SNR} = \frac{\text{μέση ενέργεια διαμορφωμένου σήματος}}{\text{μέση τετραγωνική τιμή θορύβου}}.$$

- Στο δέκτη του σχήματος θέλουμε να βρούμε το φίλτρο $h(t)$ που μεγιστοποιεί τον SNR στην έξοδο τη χρονική στιγμή T_s κατά την οποία γίνεται η δειγματοληψία. Ο θόρυβος είναι AWGN.
- Εδώ θεωρούμε ντετερμινιστικό $x(t)$ (θα γενικεύσουμε αργότερα).



Μεγιστοποίηση SNR του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο

- Ενέργεια δείγματος σήματος τη χρονική στιγμή T_s:

$$|y(T_s)|^2 = |x(t) * h(t)|_{t=T_s}|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau|_{t=T_s} \right|^2$$
$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(T_s-\tau)d\tau \right|^2 = |\langle x(t), h^*(T_s-t)\rangle|^2$$

- Μέση ενέργεια δείγματος θορύβου στην έξοδο του $h(t)$:

$$\mathbb{E}[|\tilde{n}(T_s)|^2] = \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(T_s-\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} n^*(\tau')h^*(T_s-\tau')d\tau'\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(\tau-\tau')h(T_s-\tau)h^*(T_s-\tau')d\tau d\tau'\right]$$
$$= \frac{\mathcal{N}_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |h(T_s-\tau)|^2 d\tau = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\langle h(t), h(t)\rangle = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\|\mathbf{h}\|^2.$$

Μεγιστοποίηση SNR του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο (2)

- Επομένως, $\mathrm{SNR} = \frac{2}{\mathcal{N}_0} \frac{|\langle x(t), h^*(T_s - t)\rangle|^2}{\|\mathbf{h}\|^2}$.
- Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, $|\langle x(t), h^*(T_s - t)\rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{h}\|^2$, με $=$ όταν $x(t) = kh^*(T_s - t)$ ή, ισοδύναμα, $h(t) = Kx^*(t - T_s)$. (γιατί $\langle h(T_s - t), h(T_s - t)\rangle = \langle h(t), h(t)\rangle$;)
- Συνεπώς, $\mathrm{SNR}\max = \frac{2}{\mathcal{N}_0} \frac{K^2\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{x}\|^2}{K^2\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{2}{\mathcal{N}_0}\|\mathbf{x}\|^2$, όταν το φίλτρο $h(t)$ είναι προσαρμοσμένο στο σήμα $x(t)$.
- Όπως θα δούμε αργότερα, η πιθανότητα σφάλματος P_e στο δέκτη εξαρτάται από τον SNR. Επομένως, με χρήση δέκτη προσαρμοσμένων φίλτρων βελτιστοποιούμε την απόδοση του συστήματος.
- Το προσαρμοσμένο φίλτρο μας λέει, στην ουσία, ότι όταν ξέρουμε ότι κάποιο διάνυσμα βρίσκεται πάνω σε μια κατεύθυνση (στη συγκεκριμένη περίπτωση $\mathbf{h}$) το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να 'κοιτάξουμε' σε εκείνη την κατεύθυνση.

Μεγιστοποίηση SNR του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο (3)

- Έστω, τώρα, ότι το σήμα $x(t)$ είναι τυχαίο. Αν χρησιμοποιούμε γραμμική διαμόρφωση, οποιοδήποτε $x(t)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $x(t) = \sum_{n=1}^{N} x_n \phi_n(t)$.
- Για να μεγιστοποιήσουμε τον SNR σε κάθε διάσταση, n, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το προσαρμοσμένο φίλτρο $\phi_n^*(-t)$.
- Συνεπώς, ο αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων μεγιστοποιεί το SNR ανά διάσταση και, επομένως, και το συνολικό SNR.
- Θα δούμε, επίσης, ότι, με χρήση του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένων φίλτρων διατηρείται όλη η πληροφορία που απαιτείται για την ανίχνευση του $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_N]$. Δηλαδή, δεν υπάρχει απώλεια επίδοσης του δέκτη.

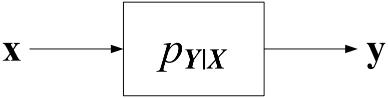
Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)

1. Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες
   - Εισαγωγή και Λευκός Θόρυβος
   - Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος (AWGN)
   - Θόρυβος σε συστήματα επικοινωνιών
2. Αποδιαμόρφωση και αποκωδικοποίηση παρουσία θορύβου
   - Μεγιστοποίηση SNR στο δέκτη
   - Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)
3. Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
   - Διανυσματικό μοντέλο καναλιού AWGN
   - Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων

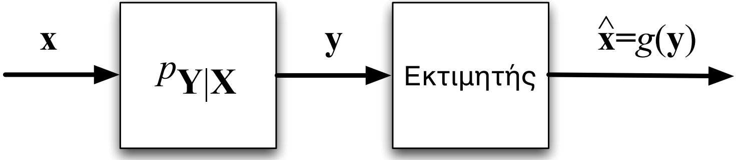
- Στην πράξη, η λαμβανόμενη κυματομορφή $y(t)$ στο δέκτη *δεν* ισούται με την κυματομορφή $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, M$ που μεταδίδεται από τον πομπό (λόγω θορύβου και καναλιού).
- Σκοπός της ανίχνευσης είναι να βρεθεί ποια κυματομορφή $x_i(t)$ (και άρα ποιο διάνυσμα $\mathbf{x}_i$ ή, ισοδύναμα, ποιο μήνυμα m_i) έστειλε ο δέκτης.
- Για την ανάλυση της ανίχνευσης θα δουλέψουμε με διανύσματα. Θα θεωρήσουμε, δηλαδή, ότι, με χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου N κλάδων, η κυματομορφή $y(t)$ έχει αναλυθεί (αποδιαμορφωθεί) σε συνιστώσες $y_1, y_2, \ldots, y_N$.
- Επομένως, το πρόβλημα είναι το εξής: Δεδομένου του ληφθέντος διανύσματος $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_N]$ να βρεθεί το μεταδοθέν διάνυσμα $\mathbf{x}_i$.

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων (2)



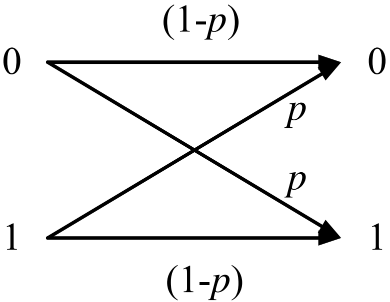
- Για την ανάλυση και τη σχεδίαση του ανιχνευτή χρησιμοποιούμε το διανυσματικό μοντέλο καναλιού του σχήματος.
- Η $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ χαρακτηρίζει πλήρως το διακριτό κανάλι. Εξαρτάται από το κανάλι, από το θόρυβο, από τις κυματομορφές που χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση και από τη σχεδίαση του συστήματος.
- Θα θεωρήσουμε, προς το παρόν, ότι γνωρίζουμε την $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$. Αργότερα θα δούμε παραδείγματα συστημάτων και υπολογισμού της $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$.

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων (3)



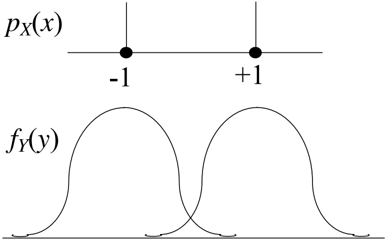
- Ο ανιχνευτής/εκτιμητής έχει ως είσοδο το $\mathbf{y}$ και ως έξοδο την εκτίμηση, $\hat{\mathbf{x}}$, του σήματος που μεταδόθηκε. Επειδή η σχέση μηνύματος m_i και διανύσματος $\mathbf{x}_i$ στον πομπό είναι 1-προς-1, ο δέκτης μπορεί να εκτιμήσει από το $\hat{\mathbf{x}}$ ποιο μήνυμα $\hat{m}$ μεταδόθηκε.
- Σφάλμα μετάδοσης εμφανίζεται όταν $\hat{m} = m_j, j \neq i$, όπου m_i το μήνυμα που μεταδόθηκε (ισοδύναμα, όταν $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}_i$).

Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (Binary Symmetric Channel)



- $p_{Y|X}(0|1) = p_{Y|X}(1|0) = p$ (αναστροφή ψηφίου)
- $p_{Y|X}(0|0) = p_{Y|X}(1|1) = 1 - p$
- Ένα από τα πιο χρήσιμα μοντέλα στις Ψηφιακές Επικοινωνίες.

Δυαδική μετάδοση που υπόκειται σε γκαουσιανό θόρυβο



- Υποθέτουμε ότι $y = x + n$, όπου $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Επομένως, $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y - x)$.
- $f_{Y|X}(y|x = -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}}, f_{Y|X}(y|x = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θα το χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον

Κατανομή ληφθέντος σήματος, Πιθανότητα Σφάλματος

- Από τον κανόνα Bayes, εάν ο αστερισμός αποτελείται από M σύμβολα, το καθένα από τα οποία μεταδίδεται με πιθανότητα $p_X(x_m)$,

$$p_Y(y) = \sum_{m=0}^{M-1} p_{Y|X}(y|x_m)p_X(x_m)$$

$$\text{ή } f_Y(y) = \sum_{m=0}^{M-1} f_{Y|X}(y|x_m)p_X(x_m).$$

- Πιθανότητα Σφάλματος (Probability of Error): $P_e \triangleq \Pr\{\hat{m} \neq m\}$.
- Πιθανότητα σωστής λήψης: $P_c = 1 - P_e = \Pr\{\hat{m} = m\}$.

Πιθανότητα σωστής λήψης (συνέχεια)

- Σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα σωστής λήψης.
- Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας,

$$P_c = \sum_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}) P_{c|\mathbf{y}} \text{ ή } P_c = \int f(\mathbf{y}) P_{c|\mathbf{y}},$$

  αναλόγως αν η έξοδος παίρνει μετρήσιμες ή συνεχείς τιμές, αντίστοιχα.
- Συνεπώς, για να μεγιστοποιήσουμε την P_c πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την $P_{c|\mathbf{y}}$ για κάθε $\mathbf{y}$.

Ανίχνευση Μέγιστης εκ των Υστέρων Πιθανότητας (Maximum a posteriori probability (MAP) detection)

- Έστω ότι ο πομπός εκπέμπει το μήνυμα m_i και ότι ο δέκτης λαμβάνει σήμα $\mathbf{y}$. $P_{c|\mathbf{y}} = \Pr(\hat{m} = m_i | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = p_{M|\mathbf{Y}}(m_i|\mathbf{y}) = p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})$ (γιατί;)

Ορισμός. Ο ανιχνευτής MAP επιλέγει το σήμα $\mathbf{x}_i$ που μεγιστοποιεί την εκ των υστέρων πιθανότητα $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})$ δεδομένου ότι ελήφθη το σήμα $\mathbf{y}$.

Κανόνας Ανίχνευσης MAP

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}}(\mathbf{y}) = \arg\max_{\mathbf{x}} p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$$

Ανίχνευση MAP (συνέχεια)

- Έστω ότι οι έξοδοι $\mathbf{y}$ είναι μετρήσιμες.
- Από το θεώρημα Bayes, $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y}) = \frac{p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}$.
- Δεδομένου ότι ο παρονομαστής $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ είναι κοινός για όλες τις $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})$, ο ανιχνευτής MAP μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής:

Κανόνας Ανίχνευσης MAP

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \; \forall j \neq i.$$

- Για συνεχείς εξόδους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε $f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)$ αντί για $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)$.

Ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood (ML) detection)

- Εάν όλα τα μεταδιδόμενα σύμβολα (και μηνύματα) είναι ισοπίθανα: $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{M},\ i = 0, 1, \ldots, M-1$, ο κανόνας ανίχνευσης MAP απλοποιείται στον κανόνα ανίχνευσης ML

Κανόνας Ανίχνευσης ML

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)\ \forall j \neq i.$$

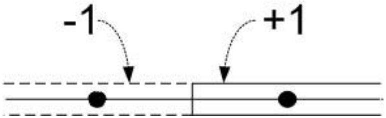
- Ο ανιχνευτής ML χρησιμοποιείται συχνά σε Ψηφιακά Συστήματα. Ωστόσο, μερικές φορές η εύρεση αναλυτικής έκφρασης για τις $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ ενδέχεται να είναι αδύνατη ή οι εκφράσεις μπορεί να είναι πολύπλοκες. Για το λόγο αυτό πολλοί δέκτες χρησιμοποιούν προσεγγιστικούς κανόνες (με αποτέλεσμα να αυξάνει η πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με την ανίχνευση ML).

Περιοχές Αποφάσεων (Decision (Voronoi) Regions)

- Προκειμένου να μην υπολογίζεται η τιμή των συναρτήσεων $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ (ή του γινομένου τους με τις $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)$) στο δέκτη κάθε φορά που λαμβάνεται ένα σήμα $\mathbf{y}$, μπορεί να έχει προσδιοριστεί εκ των προτέρων το σήμα $\mathbf{x}_i$ που προκύπτει από τον κανόνα ML (ή MAP) για κάθε πιθανή τιμή του λαμβανόμενου σήματος $\mathbf{y}$.
- Ο δέκτης προσδιορίζει την περιοχή του Ευκλείδειου χώρου (περιοχή απόφασης) στην οποία ανήκει το $\mathbf{y}$ το οποίο λαμβάνει και αποφασίζει για το μεταδοθέν σήμα με βάση την περιοχή.

Περιοχές Αποφάσεων (2)

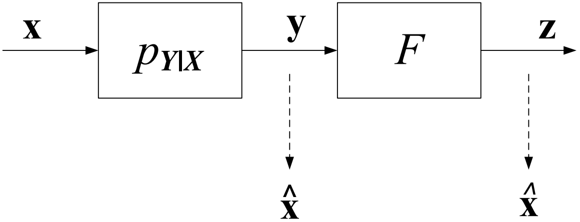
- Οι περιοχές απόφασης για το δέκτη ML του καναλιού με δυαδική μετάδοση και Γκαουσιανό θόρυβο που εξετάσαμε ενωρίτερα φαίνονται στο σχήμα. Μαθηματικά, εάν $y < 0 \rightarrow x = -1$, ενώ εάν $y \geq 0 \rightarrow x = +1$.



- Θα δούμε στη συνέχεια ότι, στην περίπτωση Γκαουσιανού καναλιού, οι κανόνες MAP και ML απλοποιούνται σημαντικά σε σχέση με τη γενική τους μορφή.

Θεώρημα Αντιστρεψιμότητας (Reversibility Theorem)

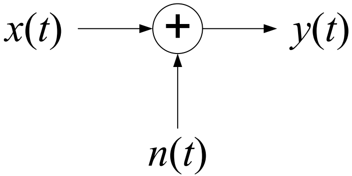
- Η εφαρμογή αντιστρέψιμου μετασχηματισμού στο διάνυσμα εξόδου $\mathbf{y}$ του καναλιού δεν επηρεάζει την απόδοση του ανιχνευτή MAP.
- Επομένως, στο σχήμα, εφόσον ο μετασχηματισμός F είναι αντιστρέψιμος, η εκτίμηση MAP που βασίζεται στο $\mathbf{y}$ θα είναι ίδια με την εκτίμηση MAP που βασίζεται στο $\mathbf{z}$.
- Φυσικά, οι περιοχές απόφασης των δύο ανιχνευτών MAP θα είναι, στη γενική περίπτωση, διαφορετικές.



Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)

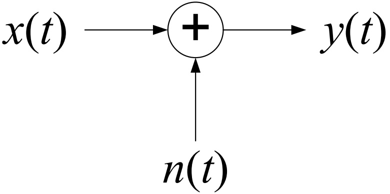
1. Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες
   - Εισαγωγή και Λευκός Θόρυβος
   - Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος (AWGN)
   - Θόρυβος σε συστήματα επικοινωνιών
2. Αποδιαμόρφωση και αποκωδικοποίηση παρουσία θορύβου
   - Μεγιστοποίηση SNR στο δέκτη
   - Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)
3. Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
   - Διανυσματικό μοντέλο καναλιού AWGN
   - Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

Το κανάλι AWGN



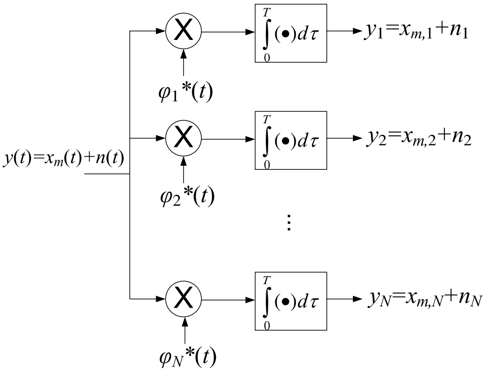
- Ο $\{n(t)\}$ είναι Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος με $R_n(\tau) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(\tau)$ και $\mathbb{E}[n(t)] = 0$. Τα δείγματά του (μετά από ιδανικό φίλτρο και δειγματοληψία) ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0, \frac{\mathcal{N}_0}{2})$.
- Εάν υποθέσουμε ότι η μετάδοση διαρκεί T s,
  $y(t) = x(t) + n(t),\ t \in [0, T]$.
- Υποθέτουμε, επίσης, ότι το μεταδιδόμενο σήμα $x(t)$ ανήκει σε υπόχωρο $\mathcal{V}$ του $\mathcal{L}_2[0, T]$ διάστασης N. Άρα, μπορεί να εκφραστεί με χρήση των συναρτήσεων βάσης του $\mathcal{V}$: $x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i\phi_i(t)$.

Το κανάλι AWGN (2)



- Ο θόρυβος $n(t)$ είναι, στη γενική περίπτωση, άπειρης διάστασης. Επομένως, οι N συναρτήσεις βάσης $\phi_i(t)$ δεν αρκούν για την περιγραφή του: $n(t) = \sum_{i=1}^{N} n_i \phi_i(t) + n'(t)$, όπου $n'(t) \in \mathcal{V}^{\perp}$.

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή



$$y_i = \int_0^T y(\tau)\phi_i^*(\tau)d\tau = \int_0^T (x_m(\tau) + n(\tau))\phi_i^*(\tau)d\tau = x_{m,i} + n_i.$$

Το ίδιο αποτέλεσμα, προφανώς, προκύπτει εάν χρησιμοποιήσουμε προσαρμοσμένα φίλτρα.

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή (2)

- $n_i = \int_0^T n(\tau)\phi_i^*(\tau)d\tau$.
  - Η τ.μ. n_i είναι Γκαουσιανή (ως γραμμικός συνδυασμός Γκαουσιανών μεταβλητών) με μέση τιμή 0.
  - Επίσης, όπως ήδη έχουμε δείξει, $\mathbb{E}[n_i n_j^*] = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta_{ij} = \sigma^2\delta_{ij}$ (Στην απόδειξη μεγιστοποίησης του SNR από το προσαρμοσμένο φίλτρο θεωρήστε τετριμμένο φίλτρο με $h(t) = 1$).
- Επομένως, οι συνιστώσες n_i του διανύσματος θορύβου $\mathbf{n}$ το οποίο υπερτίθεται στο διάνυσμα $\mathbf{x}_m$ είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστες και, επομένως, ανεξάρτητες (γιατί;).
- Σημείωση: Στην περίπτωση μιγαδικού θορύβου (στην οποία δεν έχουμε αναφερθεί ακόμη) για να είναι οι n_i ανεξάρτητες πρέπει, επιπλέον, ο (μιγαδικός) θόρυβος $n(t)$ να είναι *κυκλικώς συμμετρικός* (circularly symmetric).
- Παρατηρήστε ότι οι $\mathbf{n}_i$ είναι Γκαουσιανές ανεξαρτήτως των συναρτήσεων βάσης, $\phi_i(t)$, που χρησιμοποιούμε για τη διαμόρφωση!

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή (3)

- Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) = \prod_{i=1}^{N} p(y_i|x_{m,i}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_i - x_{m,i})^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_{m,i})^2}{2\sigma^2}}.$$

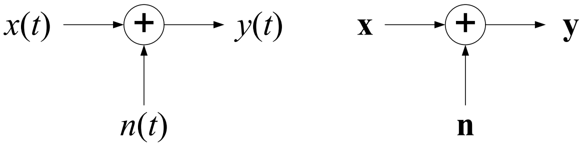
- Υπολογίσαμε, λοιπόν, την $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ για το διανυσματικό μοντέλο του καναλιού AWGN!
- Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει το κανάλι μεταξύ της εισόδου του διαμορφωτή και της εξόδου του αποδιαμορφωτή για *οποιεσδήποτε* συναρτήσεις βάσης $\phi_i(t)$.

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή (4)

- Επομένως, αντί για το Γκαουσιανό κανάλι αριστερά μπορούμε, ισοδύναμα, να χρησιμοποιούμε το διανυσματικό Γκαουσιανό κανάλι δεξιά, όπου το $\mathbf{n}$ είναι ένα τυχαίο Γκαουσιανό διάνυσμα N διαστάσεων με μηδενική μέση τιμή, ασυσχέτιστες μεταξύ τους συνιστώσες n_i και κατανομή

$$p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\pi\mathcal{N}_0)^{N/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{N} |n_i|^2}{\mathcal{N}_0}} = \frac{1}{(\pi\mathcal{N}_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{\mathcal{N}_0}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma^2}}.$$



Irrelevance του $n'(t)$

- Δεν έχουμε, ακόμα, απαντήσει στο εξής ερώτημα: Η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου και, στη συνέχεια, του διανυσματικού μοντέλου καναλιού για να εκτιμήσουμε το μεταδοθέν μήνυμα στο κανάλι AWGN, είναι ισοδύναμη με την εκτίμηση του m απευθείας από την $y(t)$ ή κατά τη μετατροπή έχει χαθεί κάποια πληροφορία;
- Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}[n'(t)y_i] = 0$ (π.χ. Proakis Ch.5). Επομένως, το $n'(t)$ είναι ανεξάρτητο (γιατί;) των συνιστωσών του $\mathbf{y}$ και, συνεπώς, δεν προσφέρει καμια πληροφορία για την εκτίμηση του $\mathbf{x}$.
- Θυμηθείτε και το θεώρημα προβολής: Δεδομένου ότι το σήμα $\mathbf{x}_m$ ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ διάστασης N, για να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης πρέπει να βρούμε την προβολή του $\mathbf{y}$ στον $\mathcal{V}$. Αυτό ακριβώς κάνουν ο αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων και ο αποδιαμορφωτής συσχέτισης.

Irrelevance του $n'(t)$ (συνέχεια)

- Άρα, η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου (ή αποδιαμορφωτή συ-σχέτισης) διατηρεί όλη την πληροφορία που σχετίζεται με την α-νίχνευση των $x_{m,i}$.
- Για την ολοκληρωμένη απόδειξη με χρήση του ότι το $n'(t)$ είναι irrelevant βλ. Cioffi Ch. 1.

Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

- Είδαμε ότι, για το Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι,

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}}.$$

- Επομένως, ο κανόνας ανίχνευσης MAP για το Γκαουσιανό κανάλι μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \;\forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \;\forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \;\forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)\} \leq \|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j)\} \;\forall j \neq i$$

Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι (2)

Κανόνας MAP για το διανυσματικό κανάλι AWGN

$\hat{m} = m_i$ εάν

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)\} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j)\} \ \forall\, j \neq i$$

Κανόνας ML για το διανυσματικό κανάλι AWGN (γιατί;)

$\hat{m} = m_i$ εάν $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 \ \forall\, j \neq i$

- Άρα, ο ανιχνευτής ML επιλέγει το διάνυσμα $\mathbf{x}_i$ με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το διάνυσμα $\mathbf{y}$ στην έξοδο του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένου φίλτρου. Ο ανιχνευτής MAP χρησιμοποιεί την απόσταση σε συνδυασμό με μια σταθερά που εξαρτάται από την κατανομή των $\mathbf{x}_i$.

Log-Likelihood Ratio (LLR)

- Είδαμε ότι ο κανόνας ML για το διανυσματικό κανάλι AWGN έχει τη μορφή

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 \; \forall j \neq i$$

- Στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε μόνο 2 μηνύματα, m_1 και m_2,

$$\hat{m} = \begin{cases} m_1 & \text{εάν} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\|^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\|^2 \\ m_2 & \text{εάν} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\|^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\|^2 \end{cases}$$

- Επομένως, μπορούμε να αποφασίσουμε ποιο μήνυμα μεταδόθηκε από την τιμή του λόγου πιθανοφανειών (Likelihood ratio)

$$\text{LR}(\mathbf{y}) \triangleq \frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1)}{f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_2)} = \exp\left\{ \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\|^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Log-Likelihood Ratio (LLR) (2)

- Ισοδύναμα, μπορούμε να αποφασίσουμε χρησιμοποιώντας το πρόσημο του λογαρίθμου του λόγου πιθανοφανειών (Log-Likelihood Ratio - LLR)

$$\mathrm{LLR}(\mathbf{y}) \triangleq \ln \mathrm{LR}(\mathbf{y}) = \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_2\|^2 - \|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1\|^2}{2\sigma^2}$$

Κανόνας ML στη δυαδική περίπτωση

$$\hat{m} = \begin{cases} m_1 & \text{εάν} \quad \mathrm{LLR}(\mathbf{y}) \geq 0 \\ m_2 & \text{εάν} \quad \mathrm{LLR}(\mathbf{y}) < 0 \end{cases}$$

Log-Likelihood Ratio (LLR) (3)

- Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}
\mathsf{LLR}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2\sigma^2}\left(\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_2\|^2 - \|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1\|^2\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\rangle + \frac{\|\mathbf{x}_2\|^2 - \|\mathbf{x}_1\|^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\rangle}{2}\right) \\
&= \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}{\sigma^2}\left(\left\langle \mathbf{y}, \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}\right\rangle - \frac{\left\langle \mathbf{x}_1, \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}\right\rangle + \left\langle \mathbf{x}_2, \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}\right\rangle}{2}\right) \\
&= \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}{\sigma^2}\left(\langle \mathbf{y}, \phi\rangle - \frac{\langle \mathbf{x}_1, \phi\rangle + \langle \mathbf{x}_2, \phi\rangle}{2}\right),
\end{aligned}$$

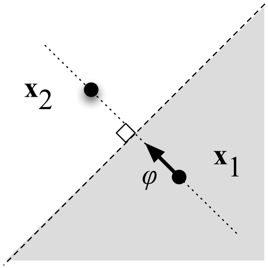
όπου $\phi \triangleq \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}$ το κανονικοποιημένο διάνυσμα από το $\mathbf{x}_2$ στο $\mathbf{x}_1$.

Log-Likelihood Ratio (LLR) (4)

- Επομένως,

$$\mathrm{LLR}(\mathbf{y}) > 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{y}, \phi \rangle > \frac{\langle \mathbf{x}_1, \phi \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \phi \rangle}{2}$$

- Συνεπώς, για την ανίχνευση ML, αρκεί να ελέγξουμε πού βρίσκεται η προβολή του ληφθέντος διανύσματος $\mathbf{y}$ σε σχέση με τη μεσοκάθετο των $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$.



Log-Likelihood Ratio (LLR) (5)

- Στην περίπτωση που τα μεταδιδόμενα σύμβολα δεν είναι ισοπίθανα, αποδεικνύεται εύκολα ότι, για ανίνευση MAP,

$$\mathrm{LLR}(\mathbf{y}) > 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{y}, \phi \rangle > \frac{\langle \mathbf{x}_1, \phi \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \phi \rangle}{2} + \frac{\sigma^2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \ln \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_2)}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1)}.$$

- Επομένως, το όριο μεταξύ των δύο περιοχών απόφασης δεν ταυτίζεται, πλέον, με τη μεσοκάθετο, αλλά είναι πιο κοντά στο πιο πιθανό (a priori) σύμβολο.
- Παρατηρήστε ότι, όταν τα μεταδιδόμενα σύμβολα είναι ισοπίθανα, ο κανόνας ML δεν επηρεάζεται από τη διασπορά του θορύβου, σ^2.

Sufficient Statistics

- Είδαμε ότι ένας τρόπος υλοποίησης του αποκωδικοποιητή ML όταν έχουμε 2 πιθανά μεταδιδόμενα σύμβολα είναι με προβολή στην ευθεία που ενώνει τα δύο σύμβολα και σύγκριση με ένα όριο.
- Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι, για περισσότερα σύμβολα πομπού, μπορούμε να επαναλάβουμε έως ότου βρούμε το σύμβολο το οποίο βρίσκεται πιο κοντά στην προβολή του $\mathbf{y}$.
- Παρόλο που προβάλαμε το $\mathbf{y}$ σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις με αποτέλεσμα να προκληθεί απώλεια πληροφορίας, δε χάσαμε τίποτα όσον αφορά την ποιότητα εκτίμησης του $\mathbf{x}$.
- Σε περιπτώσεις όπως αυτή που εξετάσαμε, λέμε ότι ο μετασχηματισμός του ληφθέντος σήματος, $\mathbf{y}$, είναι ικανή στατιστική (sufficient statistics) όσον αφορά την εκτίμηση του $\mathbf{x}$.

Sufficient Statistics (2)

- Γενικώς, ο μετασχηματισμός $T(\mathbf{y})$ της $\mathbf{y}$ είναι ικανή στατιστική για την εκτίμηση της $\mathbf{x}$ όταν για κάθε ζεύγος $i \neq j$ υπάρχει νομοτελειακή συνάρτηση $\zeta_{i,j}()$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)}{f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)} = \zeta_{i,j}\left(T(\mathbf{y})\right).$$

- Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι με χρήση της ικανής στατιστικής $T(\mathbf{y})$ και των νομοτελειακών συναρτήσεων $\zeta_{i,j}()$ προκύπτουν οι ίδιες τιμές LLR με την περίπωση που χρησιμοποιούμε απευθείας τις $f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$. Επομένως, δεν έχουμε καμία απώλεια στην ποιότητα της εκτίμησης.
- Στα παραπάνω έχουμε παραλείψει πολλές λεπτομέρειες σχετικά με το σωστό μαθηματικό ορισμό της ικανής στατιστικής. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε π.χ. Lapidoth Ch. 20 & 21 ή βιβλία Hypothesis Testing.

Ένα τελευταίο σχόλιο

- Είδαμε ότι, για να αποφασίσουμε ανάμεσα σε δύο σύμβολα, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την προβολή της $\mathbf{y}$ στην ευθεία που ενώνει τα δύο σύμβολα
    - Αφού γνωρίζουμε ότι τα σήματα βρίσκονται στον υπόχωρο διάστασης 1 που αναπτύσσεται από τη $\phi = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}$, ο εκτιμητής του $\mathbf{x}$ που ελαχιστοποιεί τη μέση τετραγωνική απόσταση από το πραγματικό $\mathbf{x}$ είναι η προβολή του $\mathbf{y}$ στην κατεύθυνση ϕ.
    - Ισοδύναμα,σύμφωνα με την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για να μεγιστοποιήσουμε τον SNR πρέπει να προβάλουμε το $\mathbf{y} = x_i\phi + \mathbf{n}$ στο διάνυσμα ϕ^*.
- Ωστόσο, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι έχουμε υποθέσει AWGN.

Ανίχνευση ML με χρήση συσχέτισης (correlation)

- Επιστρέφοντας και πάλι στην έκφραση του LLR,

$$\begin{aligned}\text{LLR}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2\sigma^2}\left(\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_2\|^2 - \|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2\sigma^2}\left(\left\{-2\Re(\mathbf{y}^*\mathbf{x}_2) + \|\mathbf{x}_2\|^2\right\} - \left\{-2\Re(\mathbf{y}^*\mathbf{x}_1) + \|\mathbf{x}_1\|^2\right\}\right)\end{aligned}$$

- Επομένως, ένας τρόπος να κάνουμε ανίχνευση ML είναι συγκρίνοντας τη συσχέτιση του $\mathbf{y}$ με τα πιθανά σύμβολα πηγής $\mathbf{x}_i$. Για τη σύγκριση απαιτείται και μια κανονικοποίηση ίση με την ενέργεια του κάθε συμβόλου.
- Εάν, επιπλέον, όλα τα $\mathbf{x}_i$ έχουν την ίδια ενέργεια,

$$\text{LLR}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\Re(\mathbf{y}^*\mathbf{x}_1) - \Re(\mathbf{y}^*\mathbf{x}_2)\right)$$