

22Υ604 - Συστήματα Επικοινωνιών Επαναληπτική Εξέταση Σεπτεμβρίου

Όνομα: _____ Α.Μ.: _____

- Διάρκεια Εξέτασης: 2 1/2 ώρες. 3 ασκήσεις (το φυλλάδιο έχει 6 σελίδες – ελέγξτε το!)
- Βαθμός εξέτασης = $\min\{\text{μονάδες}/10, 10\}$. Σύνολο μονάδων: 105. 10 μονάδες επιπλέον για όσες/όσους συγκεντρώσουν τουλάχιστον 15 μονάδες σε κάθε μία από τις 3 ασκήσεις.
- Δε θα επιτραπεί η έξοδος από την αίθουσα πριν περάσει 1 ώρα από την έναρξη του διαγωνίσματος.
- Τα θέματα θα είναι διαθέσιμα στο eclass σύντομα. Οι λύσεις θα είναι διαθέσιμες μετά την ανακοίνωση των βαθμολογιών.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

1. Μετάδοση AM και εξοικονόμηση φάσματος (30 μονάδες)

Όπως είδαμε στο μάθημα, για να μεταδώσουμε ένα σήμα βασικής ζώνης με χρήση AM-DSB πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το διπλάσιο εύρος ζώνης από αυτό του σήματος. Στη συνέχεια, σας ζητείται να εξετάσετε δύο τρόπους με τους οποίους μπορούμε να εξοικονομήσουμε εύρος ζώνης.

Θα θεωρήσουμε ότι θέλουμε να μεταδώσουμε δύο *πραγματικά* σήματα πληροφορίας *βασικής ζώνης* $m_1(t)$ και $m_2(t)$. Για διευκόλυνσή σας μπορείτε να υποθέσετε ότι τα σήματα είναι ντετερμινιστικά σήματα ενέργειας, με *πραγματικά* φάσματα $M_1(f)$ και $M_2(f)$ που δίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Φάσματα των σημάτων $m_1(t)$ και $m_2(t)$.

(α) (5 μονάδες)

Μπορεί ένα *πραγματικό* σήμα $m(t)$ να έχει αμιγώς πραγματικό μετασχηματισμό Fourier $M(f)$;

Αν ναι

- πότε; (δηλαδή, τι πρέπει να ισχύει για το σήμα;)
- ποια είναι τα σήματα $m_1(t)$ και $m_2(t)$ με τους μετασχηματισμούς Fourier του Σχήματος 1;

(β) (12 μονάδες)

Έστω ότι για τη μετάδοση διατίθεται η περιοχή συχνοτήτων $[f_c - W, f_c + W]$, $f_c \gg W$. Ένας τρόπος μετάδοσης και των δύο σημάτων στην περιοχή αυτή είναι διαμορφώνοντας το σήμα $m_1(t)$ κατά AM-LSSB και το σήμα $m_2(t)$ κατά AM-USSB.

Θα θεωρήσουμε ότι στη διαμόρφωση δε χρησιμοποιείται (μη διαμορφωμένη) φέρουσα και ότι ο δέκτης γνωρίζει επακριβώς τη συχνότητα f_c .

i. (4 μονάδες)

Σχεδιάστε τα δομικά διαγράμματα (block diagrams) των δύο διαμορφωτών (AM-LSSB και AM-USSB). Στα διαγράμματα θα πρέπει να σημειώσετε λεπτομερώς τις συχνότητες που χρησιμοποιούν οι ταλαντωτές, τις συχνότητες αποκοπής τυχόν φίλτρων κτλ. Μπορείτε να θεωρήσετε ότι διαθέτετε ιδανικά φίλτρα.

ii. (4 μονάδες)

Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος $x_{LSSB}(t) + x_{USSB}(t)$, όπου $x_{LSSB}(t)$ ($x_{USSB}(t)$) είναι το σήμα που προκύπτει από τη διαμόρφωση AM-LSSB (AM-USSB) του $m_1(t)$ ($m_2(t)$). Αν μέρος του φάσματος είναι φανταστικό, χρησιμοποιήστε διακεκομμένη γραμμή.

iii. (4 μονάδες)

Σχεδιάστε τα δομικά διαγράμματα (block diagrams) των δύο αποδιαμορφωτών. Η είσοδος του πρώτου αποδιαμορφωτή είναι το σήμα $x_{LSSB}(t) + x_{USSB}(t)$ και έξοδός του το σήμα $m_1(t)$. Αντιστοίχως, η είσοδος του δεύτερου αποδιαμορφωτή είναι το σήμα $x_{LSSB}(t) + x_{USSB}(t)$ και έξοδός του το σήμα $m_2(t)$. Και σε αυτήν την περίπτωση σημειώστε λεπτομερώς τις συχνότητες που χρησιμοποιούν οι ταλαντωτές, τις συχνότητες αποκοπής τυχόν φίλτρων κτλ. Μπορείτε να θεωρήσετε ότι διαθέτετε ιδανικά φίλτρα. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι θεωρούμε ότι οι δέκτες γνωρίζουν τη φέρουσα συχνότητα f_c .

(γ) (13 μονάδες)

Έστω, τώρα, ότι διαμορφώνουμε τα δύο σήματα ως εξής:

$$x_1(t) = A_c m_1(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$x_2(t) = A_c m_2(t) \sin(2\pi f_c t)$$

i. (3 μονάδες)

Πόσο φάσμα καταλαμβάνει το κάθε σήμα $x_i(t)$, $i = 1, 2$; Είναι εφικτή η μετάδοση και των δύο σημάτων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ ταυτοχρόνως μέσα στο διαθέσιμο εύρος ζώνης $[f_c - W, f_c + W]$;

Υπόδειξη: Αν προτιμάτε, μπορείτε να απαντήσετε στο ερώτημα μέσω των απαντήσεών σας στα Ερωτήματα ii. και iii. που ακολουθούν.

ii. (5 μονάδες)

Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος $x_1(t) + x_2(t)$. Αν μέρος του φάσματος είναι φανταστικό, χρησιμοποιήστε διακεκομμένη γραμμή.

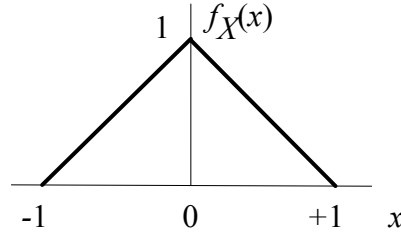
iii. (5 μονάδες)

Σχεδιάστε τα δομικά διαγράμματα (block diagrams) των δύο αποδιαμορφωτών. Η είσοδος του πρώτου αποδιαμορφωτή είναι το σήμα $x_1(t) + x_2(t)$ και έξοδός του το σήμα $m_1(t)$. Αντιστοίχως, η είσοδος του δεύτερου αποδιαμορφωτή είναι το σήμα $x_1(t) + x_2(t)$ και έξοδός του το σήμα $m_2(t)$. Και σε αυτήν την περίπτωση σημειώστε λεπτομερώς τις συχνότητες που χρησιμοποιούν οι ταλαντωτές, τις συχνότητες αποκοπής τυχόν φίλτρων κτλ.

2. Κβάντιση σήματος με τριγωνική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (30 μονάδες)

Επιθυμούμε να κβαντίσουμε στοχαστικό σήμα συνεχών τιμών διακριτού χρόνου X_n . Θεωρούμε ότι τα X_n είναι ανεξάρτητα και ομοίως κατανομημένα (i.i.d.) και ότι κάθε δείγμα X_n ακολουθεί την τριγωνική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) $f_{X_n}(x) = f_X(x)$ του Σχήματος 2.

Θα χρησιμοποιήσουμε κβαντιστή 4 επιπέδων (2 bits).

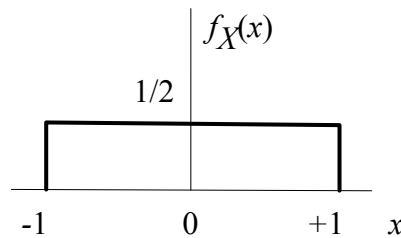


Σχήμα 2: σ.π.π των τιμών του σήματος που επιθυμούμε να κβαντίσουμε.

Θα δείξουμε, κατ' αρχάς, ότι αν χρησιμοποιήσουμε ομοιόμορφο κβαντιστή 4 επιπέδων, η μέση τετραγωνική παραμόρφωση των δειγμάτων ισούται με την περίπτωση που η κατανομή των X_n είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[-1, +1]$. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε αν μπορούμε να ελαττώσουμε τη μέση τετραγωνική παραμόρφωση με χρήση μη ομοιόμορφου κβαντιστή.

(α) (7 μονάδες)

Έστω ότι τα δείγματα X_n ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-1, +1]$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Δείξτε τις περιοχές κβάντισης και τα επίπεδα κβάντισης $\hat{x}_i, i = 1, \dots, 4$ του ομοιόμορφου κβαντιστή 4 επιπέδων (3 μονάδες) και υπολογίστε τη μέση τετραγωνική παραμόρφωση $\mathbb{E} \left[(X - \hat{X})^2 \right]$, όπου $\hat{x} = q(x)$ η έξοδος του κβαντιστή σε είσοδο x (4 μονάδες).



Σχήμα 3: Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-1, +1]$.

(β) (13 μονάδες)

Έστω, τώρα, ότι χρησιμοποιούμε τον ίδιο κβαντιστή με αυτόν του Ερωτήματος (α) (ομοιόμορφο, 4 επιπέδων) για να κβαντίσουμε το σήμα με δείγματα που ακολουθούν την τριγωνική σ.π.π. του Σχήματος 2. Δείξτε ότι η μέση τετραγωνική παραμόρφωση $\mathbb{E}[(X - \hat{X})^2]$ ισούται με αυτήν του Ερωτήματος (α).

Υπόδειξη: Παρατηρήστε, κατ' αρχάς, ότι μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία της κατανομής και του κβαντιστή γύρω από το 0:

$$\mathbb{E} \left[(X - \hat{X})^2 \right] = \int_{-1}^{+1} f_X(x) (x - q(x))^2 dx = 2 \int_0^{+1} f_X(x) (x - q(x))^2 dx.$$

Ωστόσο, και πάλι, ο υπολογισμός της μέσης τετραγωνικής παραμόρφωσης με χρήση της παραπάνω σχέσης είναι αρκετά χρονοβόρος.

Αν προτιμάτε, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον παρακάτω, πιο γρήγορο τρόπο.

- Περιοριστείτε στο διάστημα $[0, +1]$.
- Βρείτε όλες τις τιμές $x \in [0, +1]$ που οδηγούν σε δεδομένη τετραγωνική παραμόρφωση, έστω y , δηλαδή $y = (x - q(x))^2$. Αν προτιμάτε, δεν είναι ανάγκη να εκφράσετε τις x συναρτήσει της y . Μπορείτε να τις σχεδιάσετε σε ένα σχήμα.
- Αθροίστε τις πυκνότητες πιθανότητας $f(x)$ όλων των x που οδηγούν σε αυτή τη δεδομένη τιμή, y . Δηλαδή, $g(y) = \sum_{x:(x-q(x))^2=y} f(x)$.
- Κάντε το ίδιο για την περίπτωση που η κατανομή της x είναι η ομοιόμορφη και δείξτε ότι η $g(y)$ είναι ίδια.
- Επομένως, η πυκνότητα πιθανότητας δεδομένης τετραγωνικής παραμόρφωσης είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις και, συνεπώς, και η τιμή του ολοκληρώματος

$$\mathbb{E} \left[(X - \hat{X})^2 \right] = 2 \int_0^{+1} f_X(x) (x - q(x))^2 dx \text{ είναι ίδια.}$$

(γ) (10 μονάδες)

Τέλος, σας ζητείται να δείξετε ότι ο ομοιόμορφος κβαντιστής δεν είναι ο βέλτιστος κβαντιστής για την τριγωνική κατανομή του Σχήματος 2. Επομένως, μπορούμε να ελαττώσουμε τη μέση τετραγωνική παραμόρφωση σε σχέση με την τιμή του Ερωτήματος (α).

Κατ' αρχάς, λόγω της συμμετρίας, θα ασχοληθούμε και πάλι με το διάστημα $[0, +1]$. Επομένως, μας ενδιαφέρει το όριο μεταξύ των περιοχών κβάντισης το οποίο βρίσκεται στο διάστημα $(0, +1)$.

Εφαρμόστε το πρώτο βήμα του αλγορίθμου Lloyd-Max και δείξτε ότι το όριο, έστω a_3 , πρέπει να μετακινηθεί σε σχέση με την τιμή που έχει όταν ο κβαντιστής είναι ομοιόμορφος. Προς τα πού μετακινείται το a_3 ; Μπορείτε να εξηγήσετε διαισθητικά γιατί το a_3 μετακινείται προς αυτήν την κατεύθυνση;

Δε χρειάζεται να υπολογίσετε τη νέα τιμή της $\mathbb{E}[(X - \hat{X})^2]$.

Υπόδειξη: Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό δε χρειάζεται η απάντηση στο Ερώτημα (β). Σε αυτό το ερώτημα θα χρειαστούν κάποιες πράξεις. Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις της Διαφάνειας 30 της 12ης εβδομάδας για να υπολογίσετε τα δύο επίπεδα κβάντισης, έστω \hat{x}_3 και \hat{x}_4 , που βρίσκονται στο διάστημα $[0, +1]$. Στη συνέχεια, υπολογίστε τη νέα τιμή του ορίου a_3 (Διαφάνεια 29) και συγκρίνετε με την αρχική του τιμή (την οποία θέσαμε υποθέτοντας ομοιόμορφο κβαντιστή).

3. Επανάληψη μετάδοσης (45 μονάδες)

Σε αυτή την άσκηση θα εξετάσουμε έναν απλό τρόπο για να βελτιώσουμε την αξιοπιστία της μετάδοσης μηνυμάτων με επανάληψη της μετάδοσης.

Θα θεωρήσουμε ότι θέλουμε να στείλουμε ένα από $M = 4$ μηνύματα (δηλαδή 2 bits). Υποθέτουμε κανάλι Λευκού Προσθετικού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN) δίπλευρης φασματικής πυκνότητας ισχύος $\frac{N_0}{2}$. Η μετάδοση πραγματοποιείται στη βασική ζώνη με χρήση διαμόρφωσης PAM. Ως βάση θα χρησιμοποιήσουμε τον (κανονικοποιημένο) τετραγωνικό παλμό διάρκειας T s.

(α) (10 μονάδες)

Έστω ότι μεταδίδουμε το μήνυμα μία φορά και ότι για τη μετάδοση διαθέτουμε (μέση) ενέργεια \mathcal{E}_x .

(i) (5 μονάδες)

Σχεδιάστε τον αστερισμό PAM που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για τη μετάδοση 2 bits (4 μηνυμάτων). Στο σχήμα θα πρέπει να σημειώσετε τις ακριβείς θέσεις των σημάτων συναρτήσει της ενέργειας \mathcal{E}_x .

(ii) (5 μονάδες)

Δώστε μια έκφραση για την πιθανότητα σφάλματος συμβόλου, P_e , συναρτήσει των \mathcal{E}_x και N_0 . Θεωρούμε ότι όλα τα μηνύματα είναι ισοπίθανα και ότι ο δέκτης είναι βέλτιστος.

Προκειμένου να ελαττώσουμε την πιθανότητα σφάλματος, επαναλαμβάνουμε τη μετάδοση άλλη μία φορά. Θεωρούμε ότι η δεύτερη μετάδοση αρχίζει αμέσως μόλις τελειώσει η πρώτη (αν και τα αποτελέσματα εξακολουθούν να ισχύουν ακόμα και αν αυτό δεν ισχύει).

Στη δεύτερη μετάδοση εκπέμπουμε το ίδιο σήμα με την πρώτη. Επίσης, για τη δεύτερη μετάδοση χρησιμοποιούμε την ίδια (μέση) ενέργεια με την πρώτη, δηλαδή η συνολική (μέση) ενέργεια είναι, τώρα, $2\mathcal{E}_x$.

(β) (10 μονάδες)

Θα υποθέσουμε, αρχικά, ότι ο δέκτης αποκωδικοποιεί ξεχωριστά το σύμβολο κάθε μετάδοσης (hard decoding). Επομένως, για να μην προκύψει σφάλμα πρέπει ο αποκωδικοποιητής να εκτιμήσει το ίδιο μήνυμα και στις δύο μεταδόσεις και το μήνυμα που εκτιμά να είναι το ίδιο με αυτό που έστειλε ο πομπός. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση θεωρούμε ότι η μετάδοση αποτυγχάνει (είτε λόγω σφάλματος το οποίο δεν αντιλαμβάνεται ο δέκτης ή λόγω αντικρουόμενων αποκωδικοποιημένων συμβόλων το οποίο αντιλαμβάνεται).

Υπολογίστε την πιθανότητα αποτυχίας μετάδοσης μηνύματος P_f και συγκρίνετε με την τιμή P_e του Ερωτήματος (α). Μπορείτε να θεωρήσετε ότι ο λόγος σήματος προς θόρυβο (SNR) είναι αρκετά μεγάλος και, επομένως, να αγνοήσετε όρους 2ης τάξης.

Υπόδειξη: Είναι πιο εύκολο να εκφράσετε την P_f ως $P_f = 1 - P_c$, όπου P_c η πιθανότητα επιτυχούς μετάδοσης και να υπολογίσετε την P_c λαμβάνοντας υπόψη ότι οι τιμές του θορύβου σε κάθε μετάδοση είναι ανεξάρτητες. Επίσης, ενδέχεται η P_f σε αυτό το ερώτημα να είναι μεγαλύτερη από την P_e στο Ερώτημα (α).

(γ) (10 μονάδες)

Θεωρήστε, τώρα, τον εξής τρόπο αποκωδικοποίησης (ο οποίος αποδεικνύεται ότι είναι βέλτιστος). Αφού και τις δύο φορές στέλνουμε το ίδιο σύμβολο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι χρησιμοποιούμε PAM με παλμούς διπλάσιας διάρκειας (και διπλάσιας ενέργειας) σε σχέση με το Ερώτημα (α), αλλά με τον ίδιο αριθμό μηνυμάτων $M = 4$. Επομένως, σχεδιάζουμε ένα δέκτη που αποκωδικοποιεί υποθέτοντας μία χρήση του καναλιού για μετάδοση με παλμούς PAM διπλάσιας διάρκειας και διπλάσιας μέσης ενέργειας.

Με βάση τα παραπάνω υπολογίστε την πιθανότητα σφάλματος αποκωδικοποίησης μηνύματος στο δέκτη. Συγκρίνετε με την απάντησή σας στο Ερώτημα (α).

(δ) (12 μονάδες)

Ένας άλλος, επίσης ισοδύναμος, τρόπος αποκωδικοποίησης (soft decoding) είναι ο εξής: Έστω ότι χρησιμοποιούμε τον απόδιαμορφωτή του Ερωτήματος (α). Στο τέλος κάθε μετάδοσης, i , η έξοδος του αποδιαμορφωτή ισούται με $y_i = x + n_i$, $i = 1, 2$. Σχηματίζουμε το σήμα $y = y_1 + y_2$ και το στέλνουμε στον αποκωδικοποιητή (που έχει σχεδιαστεί για μετάδοση όπως στο Ερώτημα (α)). Συγκρίνετε το λόγο σήματος προς θόρυβο (SNR) του y με τον SNR των y_1 και y_2 . Τι συμπεραίνετε; Τι συνεπάγεται αυτό για την πιθανότητα σφάλματος; (9 μονάδες)

Υπόδειξη: Υπενθυμίζεται ότι ο SNR στο δέκτη ορίζεται ως ο λόγος της μέσης ενέργειας του *χρήσιμου* σήματος στο δέκτη ως προς τη μέση ενέργεια του θορύβου στο δέκτη. Επίσης, $\mathbb{E}[n_1 \cdot n_2] = 0$.

Μπορείτε να γενικεύσετε για την περίπτωση που η μετάδοση επαναλαμβάνεται L φορές; (3 μονάδες)

(ε) (3 μονάδες)

Όποια και αν ήταν η απάντησή σας στα Ερωτήματα (β)–(δ), από την άποψη της αξιοπιστίας δε χάνουμε κάτι γιατί, ακόμα και αν η επανάληψη της μετάδοσης οδηγεί σε μεγαλύτερη πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με το Ερώτημα (α) μπορούμε να αγνοήσουμε μία από τις δύο μεταδόσεις. Υπάρχουν αρνητικές επιπτώσεις στο σύστημα από την επανάληψη της μετάδοσης;