EE725
Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών
5η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

13 Απριλίου 2011

Αντιστοιχία με βιβλιογραφία

- Cioffi: 1.3–1.7
- Barry, Lee & Messerschmitt (3rd ed.): 7.1–7.3.3, 5.1 – 5.3 (όχι τα περί ISI), 5.5, 6.1–6.3 (όχι τα περί ISI).
- Proakis & Salehi, Communication Systems Engineering (2nd ed.): 7.1 – 7.3.1, 7.3.3, 7.4–7.5.3, 7.6–7.6.2, 7.6.5.

Περιεχόμενα 5ης διάλεξης

Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN

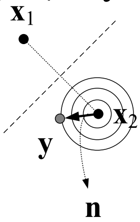
- Διανυσματικό Γκαουσιανό κανάλι: $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$.
- Πιθανότητα σφάλματος $P_e = \sum_{m=0}^{M-1} P_{e|m} p_m$, όπου
    - $P_{e|m}$ η πιθανότητα σφάλματος δεδομένου ότι μεταδόθηκε το σύμβολο m του αστερισμού και
    - p_m η πιθανότητα μετάδοσης του συμβόλου m
- $P_e = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} P_{e|m}$ όταν όλα τα σύμβολα μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα.

Περιστροφή και μετατόπιση αστερισμού στο Κανάλι AWGN

- Περιστροφή αστερισμού: Εάν ο αστερισμός περιστραφεί στον Ευκλείδειο χώρο (σε κανάλια AWGN) η P_e δεν αλλάζει, επειδή η κατανομή του θορύβου παραμένει η ίδια και οι ευκλείδειες αποστάσεις τις οποίες χρησιμοποιεί ο ανιχνευτής MAP (και ML) διατηρούνται.
- Μετατόπιση αστερισμού: Η P_e παραμένει αμετάβλητη όταν ο αστερισμός μετατοπίζεται στον Ευκλείδειο χώρο.
- Για ένα δεδομένο αστερισμό, για να ελαχιστοποιήσουμε τη μέση ισχύ του, εάν $\mathbb{E}[\mathbf{x}] \neq 0$ τον μετατοπίζουμε ώστε $\mathbb{E}[\mathbf{x}] = 0$.
- Για λεπτομέρειες/αποδείξεις, βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1.

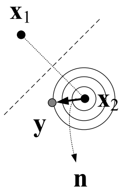
P_e για δυαδική μετάδοση

- Έστω ένας αστερισμός στο $N-$διάστατο χώρο με δύο σύμβολα και κανάλι AWGN. Ο ανιχνευτής ML θα επιλέξει το $\mathbf{x}_i$ με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το $\mathbf{y}$. Ισοδύναμα, όπως είδαμε, μπορεί να χρησιμοποιήσει την προβολή του $\mathbf{y}$ στην κατεύθυνση $\mathbf{x_2} - \mathbf{x}_1$



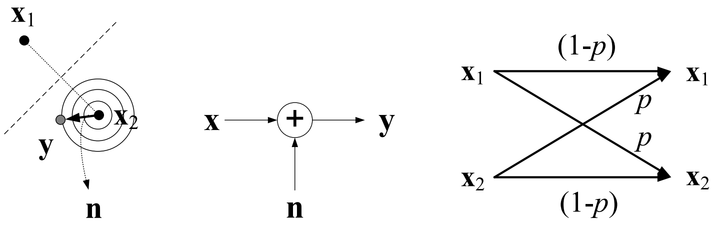
- Εάν προβάλουμε τον Γκαουσιανό θόρυβο επάνω στη διεύθυνση $\mathbf{x_1} - \mathbf{x}_2$ παραμένει Γκαουσιανός.
- Επομένως, δεδομένου ότι μεταδόθηκε το $\mathbf{x}_2$, σφάλμα θα συμβεί όταν $\langle \mathbf{n}, \phi \rangle > \frac{\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x}_2\|}{2}$, όπου ϕ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

P_e για δυαδική μετάδοση (2)



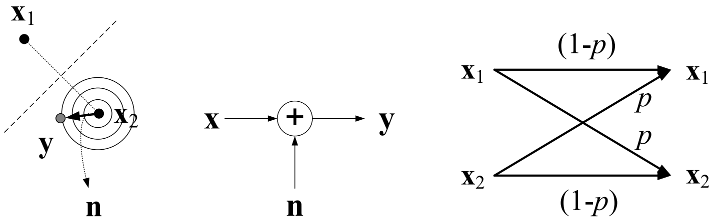
- Επομένως, εάν $\|\mathbf{x_2} - \mathbf{x}_1\| = d$, $P_e = \Pr\left\{\langle \mathbf{n}, \phi \rangle \triangleq \tilde{n} > \frac{d}{2}\right\}$.
- $P_{e|\mathbf{x}_1} = P_{e|\mathbf{x}_2} = P_e = \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} f_{\tilde{N}}(n)dn = \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn$ $= \int_{\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \Rightarrow \boxed{P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right),}$ όπου $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ η συνάρτηση Q.
- Υπενθυμίζεται ότι η $Q(x) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ δεν έχει αναλυτική έκφραση, αλλά μπορεί να προσεγγιστεί με φράγματα (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1 Appendix B, Lee & Messerschmitt Ch. 1).

P_e για δυαδική μετάδοση (3)



- Για τον υπολογισμό της P_e χρησιμοποιήσαμε Γκαουσιανό κανάλι με 2 μεταδιδόμενα σήματα: $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$.
- Διανυσματικό Γκαουσιανό κανάλι: $f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}}$, $i = 1$ και 2.

P_e για δυαδική μετάδοση (4)



- Εάν εκτιμήσουμε το κανάλι με κανόνα ML: $p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i|\mathbf{x}_i) = 1 - P_e = 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$. $p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2) = P_e \Rightarrow$ Το κανάλι από το $\mathbf{x}$ στο $\hat{\mathbf{x}}$ όταν χρησιμοποιείται δέκτης ML είναι το δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με $p = P_e$!
- Επομένως, ένα σύστημα μπορεί να περιγράφεται από διαφορετικά μοντέλα αναλόγως με την υλοποίηση και τα σήματα που χρησιμοποιούμε για τη μετάδοση.

Ελάχιστη απόσταση αστερισμού

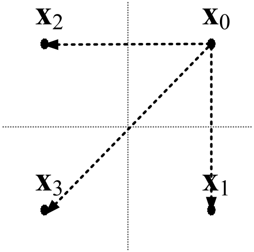
Η ελάχιστη απόσταση αστερισμού ορίζεται ως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συμβόλων του αστερισμού.

Ελάχιστη απόσταση αστερισμού (ορισμός)

$$d_{\min} \triangleq \min_{i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|.$$

Όπως θα δούμε σύντομα, η πιθανότητα σφάλματος στο δέκτη εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την $d_{\min}$ του αστερισμού.

Union Bound



- Υποθέτουμε ότι έχει μεταδοθεί το $\mathbf{x}_0$. Επομένως, η πιθανότητα σφάλματος ισούται με

$$P_{e|0} \overset{\text{γιατί;}}{=} \sum_{i=1}^{3} \Pr\{\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i | \mathbf{x} = \mathbf{x}_0\} \overset{\text{γιατί;}}{<} \sum_{i=1}^{3} Q\left(\frac{d_{0,i}}{2\sigma}\right)$$

$$\overset{\text{γιατί;}}{<} \sum_{i=1}^{3} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) = 3Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right).$$

Union Bound (2)

- Ομοίως, για τα υπόλοιπα $\mathbf{x}_i$, $P_{e|i} < 3Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$.

Union bound

$$P_e < (N-1)Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right),$$

όπου N ο αριθμός των σημάτων του αστερισμού.

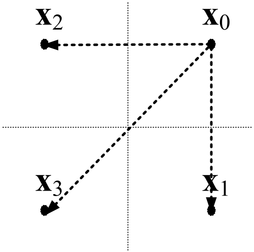
- Άνω φράγμα, αλλά σπανίως ακριβές. Πολλές φορές απέχει πολύ από την πραγματική P_e.
- Καλύτερο φράγμα: Nearest Neighbor Union Bound (NNUB).

Nearest Neighbor Union Bound (NNUB)

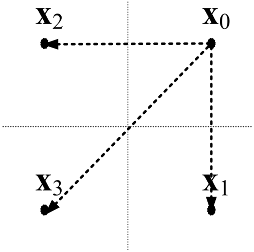
Nearest Neighbor Union bound

$$P_e \leq N_e Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right),$$

όπου $N_e = \sum_{m=0}^{M-1} N_m p_m$, N_m ο αριθμός των συμβόλων του αστερισμού των οποίων οι περιοχές απόφασης εφάπτονται με αυτή του $\mathbf{x}_m$.



Nearest Neighbor Union Bound (NNUB) (2)



- Στο σχήμα, εάν ο θόρυβος διασχίσει την οριζόντια ή την κάθετη γραμμή θα έχουμε σφάλμα μετάδοσης. Επομένως, $P_e \overset{\text{γιατί;}}{<} 2Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$. Παρατηρήστε ότι $N_e = 2$ (έχουμε υποθέσει ότι τα μεταδιδόμενα σήματα είναι ισοπίθανα).

Nearest Neighbor Union Bound (NNUB) (3)

- Συχνά, για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού γειτόνων, $N_e = \sum_{m=0}^{M-1} N_m p_m$, χρησιμοποιούνται μόνο οι γείτονες κάθε συμβόλου $\mathbf{x}_m$ οι οποίοι απέχουν την ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση $d_{\min}$.
- Στην περίπτωση αυτή το *προσεγγιστικό* NNUB που προκύπτει ενδέχεται να μην είναι άνω φράγμα της P_e.
- Ωστόσο, στην πράξη, αποτελεί συνήθως καλή προσέγγιση της P_e με αποτέλεσμα πολλές φορές όταν σχεδιαστές αναφέρονται στο NNUB να εννοούν το προσεγγιστικό NNUB.

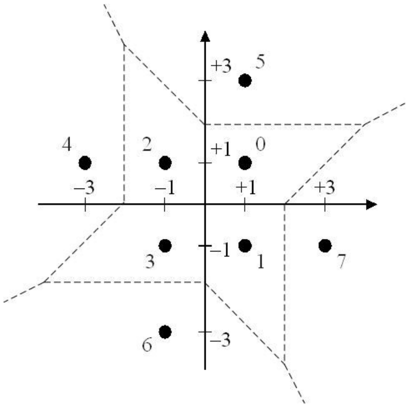
$\bar{P}_e$: Πιθανότητα σφάλματος ανά διάσταση

- Η σύγκριση συστημάτων με βάση την P_e δεν είναι πάντα δίκαιη. Για παράδειγμα, σε ένα κανάλι AWGN ένα σύστημα QPSK υπόκειται σε θόρυβο σε δύο διαστάσεις, ενώ ένα σύστημα BPSK σε θόρυβο σε μία διάσταση.
- Επιπλέον, το σύστημα BPSK μεταδίδει 1 ψηφίο ανά χρήση του καναλιού, ενώ το σύστημα QPSK 2 ψηφία ανά χρήση του καναλιού (άρα 1 ψηφίο ανά διάσταση).
- Επομένως, ένα πιο δίκαιο μέτρο σύγκρισης είναι η πιθανότητα σφάλματος ανά διάσταση: $\bar{P}_e = \frac{P_e}{N}$.
- Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την πιθανότητα σφάλματος ανά αριθμό μεταδιδόμενων ψηφίων: $\frac{P_e}{b} = \frac{P_e}{\log_2 M}$.

Ρυθμός Σφάλματος Ψηφίων (Bit Error Rate -- BER)

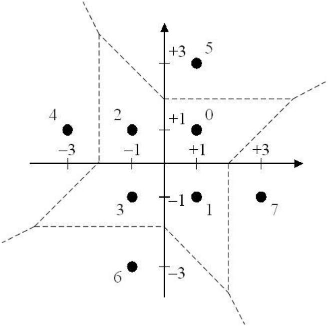
- Όταν μας ενδιαφέρει η πιθανότητα εσφαλμένης μετάδοσης ψηφίων (bits) η P_e δεν αρκεί πάντα από μόνη της για την περιγραφή της απόδοσης ενός συστήματος.
- Έστω, για παράδειγμα, ένα σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί μόνο 2 σήματα (π.χ. BPSK) και ένα άλλο το οποίο χρησιμοποιεί 64 πιθανά σήματα (π.χ. 64-QAM όπως θα δούμε αργότερα). Σε ένα σύστημα BPSK όταν συμβεί σφάλμα στο σήμα που αποκωδικοποιείται προκύπτει αυτόματα και σφάλμα στο ψηφίο. Ωστόσο, σε ένα καλά σχεδιασμένο σύστημα 64-QAM ακόμα και αν συμβεί σφάλμα στην ανίχνευση του σήματος στο δέκτη, κάποια από τα ψηφία ενδέχεται να αποκωδικοποιηθούν σωστά.
- Υπάρχουν διάφοροι παρόμοιοι ορισμοί για το BER. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε BER = $\Pr\{$αντιστροφή ψηφίου στο δέκτη$\}$ (το οποίο από κάποιους ονομάζεται πιθανότητα σφάλματος ψηφίου $\bar{P}_b$).

Παράδειγμα: VDSL2 ``8-QAM''



Στο σχήμα, $d_{\min} = 2$. Ο αριθμός σε κάθε σήμα δηλώνει το αντίστοιχο μήνυμα. Για παράδειγμα, το σήμα $(+1, +3)$ αντιστοιχεί στο m_5 ή στην ακολουθία ψηφίων $1\ 0\ 1$.

Παράδειγμα: VDSL2 ``8-QAM'' (2)



- Μέση ενέργεια του αστερισμού: $\mathcal{E}_x = \sum_m \|\mathbf{x}_m\|^2 p_m$ $= \frac{1}{8}\left(4\frac{d_{\min}^2}{2} + 4\frac{5d_{\min}^2}{2}\right) = \frac{3}{2}d_{\min}^2 = 6$. $\bar{\mathcal{E}}_x = 3$.
- Εάν ο δέκτης χρησιμοποιεί προσαρμοσμένο φίλτρο: SNR $= \frac{\mathcal{E}_x}{\sigma^2} = \frac{3d_{\min}^2}{2\sigma^2}$.

Παράδειγμα: VDSL2 ``8-QAM'' (3)

- Union bound: $P_e < 7Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e = \frac{P_e}{2} = 3.5Q(d_{\min}/2\sigma)$.
- Nearest neighbors: Όλα τα σήματα έχουν 4 γείτονες.
  - Τα $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και $\mathbf{x}_3$ έχουν 3 γείτονες σε απόσταση $d_{\min} = 2$ και 1 γείτονα σε απόσταση $2\sqrt{2}$.
  - Τα $\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$ και $\mathbf{x}_7$ έχουν 1 γείτονα σε απόσταση $d_{\min} = 2$, 1 γείτονα σε απόσταση $2\sqrt{2}$ και 2 γείτονες σε απόσταση $2\sqrt{5}$.
  - NNUB: $P_e < 4Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e < 2Q(d_{\min}/2\sigma)$.
  - Εάν κρατήσουμε μόνο τους πιο κοντινούς γείτονες κάθε σήματος: $P_e \approx \sum_{m=0}^{3} \frac{1}{8} 3Q(d_{\min}/2\sigma) + \sum_{m=4}^{7} \frac{1}{8} Q(d_{\min}/2\sigma) = 2Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow$ $\bar{P}_e \approx Q(d_{\min}/2\sigma)$.
- Παρατηρούμε ότι τα εξωτερικά σήματα του αστερισμού είναι λιγότερο επιρρεπή σε σφάλμα μετάδοσης από τα εσωτερικά.

Παράδειγμα: VDSL2 ``8-QAM'' (4)

- Έστω ότι μεταδόθηκε το $\mathbf{x}_0$. Θεωρούμε μόνο τους γείτονές του σε απόσταση $d_{\min}$. Εάν αντί για $\mathbf{x}_0$ ο δέκτης αποφασίσει $\mathbf{x}_1$ ή $\mathbf{x}_2$ θα εμφανιστεί σφάλμα (αναστροφή) σε 1 από τα 3 ψηφία. Εάν αποφασίσει $\mathbf{x}_5$ θα εμφανιστεί σφάλμα σε 2 ψηφία. Επομένως, ο μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων όταν συμβεί σφάλμα κατά την αποκωδικοποίηση του $\mathbf{x}_0$ ισούται <u>προσεγγιστικά</u> με $n_b(0) \approx \frac{4}{3}$. Παρομοίως, $n_b(1) = n_b(2) = n_b(3) \approx \frac{4}{3}$.
- Έστω, τώρα, ότι μεταδίδεται το $\mathbf{x}_5$. Εάν αντί για $\mathbf{x}_5$ ο δέκτης αποφασίσει $\mathbf{x}_0$ θα εμφανιστεί σφάλμα (αναστροφή) σε 2 από τα 3 ψηφία. Συνεπώς, $n_b(5) = n_b(6) = n_b(7) = n_b(8) \approx 2$.

Παράδειγμα: VDSL2 ``8-QAM'' (5)

- Μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων δεδομένου ότι συνέβη σφάλμα: $N_b \approx \frac{5}{3}$.
- Μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων: $P_b \approx N_b Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) \approx \frac{5}{3} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$ (δεν είναι πιθανότητα – ενδέχεται να υπερβαίνει το 1).
- BER = $\bar{P}_b = \frac{P_b}{b} \approx \frac{5}{9} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$.
- Συνήθως, η ποσότητα που καθορίζει την P_e και το BER είναι το όρισμα της $Q()$ η οποία ελαττώνεται (σχεδόν) εκθετικά. Ο αριθμός των γειτόνων ή το N_b επιδρά σημαντικά μόνο όταν έχει μεγάλη τιμή ή σε χαμηλούς SNR.

Πώς συγκρίνουμε διαφορετικές διαμορφώσεις μεταξύ τους;

- Για να υλοποιήσουμε τις συναρτήσεις βάσης οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση χρησιμοποιούμε τους πόρους του καναλιού: χρόνο, συχνότητα και χώρο (σε συστήματα πολλαπλών κεραιών). Κάθε μία από τις N διαστάσεις έχει κόστος γιατί απαιτεί χρήση κάποιων από τους πόρους του συστήματος.
- Για παράδειγμα, ένα σύστημα 2 διαστάσεων μπορεί να υλοποιείται με εναλλάξ μετάδοση στο χρόνο κάθε διάστασης ή με χρήση δύο περιοχών συχνοτήτων.

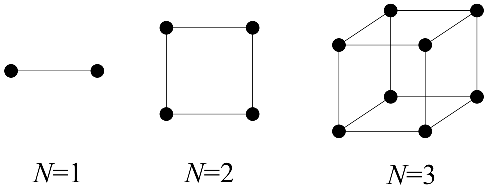
Πώς συγκρίνουμε διαφορετικές διαμορφώσεις μεταξύ τους; (συνέχεια)

- Για δίκαιη σύγκριση συστημάτων, πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όλες οι παρακάτω ποσότητες:
  1. Ο ρυθμός μετάδοσης R.
  2. Η χρησιμοποιούμενη ισχύς P_x.
  3. Το συνολικό εύρος ζώνης W που χρησιμοποιεί το σύστημα.
  4. Η περίοδος T_s που διαρκεί η μετάδοση κάθε συμβόλου.
  5. Το BER ή η P_e.
- Αν οι παραπάνω ποσότητες κανονικοποιηθούν κατάλληλα, 3 ποσότητες αρκούν για σύγκριση συστημάτων:
  1. Ο αριθμός ψηφίων ανά διάσταση $\bar{b} = \frac{b}{N}$,
  2. Η ενέργεια ανά διάσταση $\bar{\mathcal{E}}_x = \frac{\mathcal{E}_x}{N}$ και
  3. Η κανονικοποιημένη πιθανότητα σφάλματος $\bar{P}_e = \frac{P_e}{N}$.

Κατηγορίες Αστερισμών

Κυβικοί Αστερισμοί (Cubic Constellations)

- Αριθμός διαστάσεων N = αριθμός bits b.
- Αντιστοιχία μίας συνάρτησης βάσης ϕ_m σε κάθε bit.
- Γραμμική διαμόρφωση.
- Χρησιμοποιούνται συχνά σε απλά κανάλια.



Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα (1) - Binary Antipodal

Binary Antipodal: 2 σήματα ($N = 1$), $x_0(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x}\phi(t) = -x_1(t)$.

- Binary Phase Shift Keying (BPSK):
  $\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad t \in [0, T]$, 0 αλλού.
- Bipolar (NRZ): $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad t \in [0, T]$, 0 αλλού.
- Κωδικοποίηση Manchester (Bi-phase level):

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [\frac{T}{2}, T] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Τι εύρος ζώνης απαιτεί κάθε μία από τις παραπάνω $\phi(t)$;

Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα (2) - On-Off Keying

On-Off Keying (OOK): 2 σήματα ($N = 1$),
$x_0(t) = \sqrt{2\mathcal{E}_x}\phi(t)$. $x_1(t) = 0$.

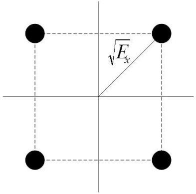
- $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad t \in [0, T]$, 0 αλλού.
- Υποδεέστερη κατά 3 dB σε σχέση με αστερισμούς binary antipodal (γιατί;)
- Χρησιμοποιείται σε οπτικά συστήματα, αν και στο μέλλον αυτό αναμένεται να αλλάξει.

Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα (3) – QPSK

- Quadrature Phase Shift Keying (QPSK): 4 σήματα (2 bits $\to N = 2$).
- $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού.

  $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού.
- $$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2] = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[-1 \quad -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[-1 \quad +1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[+1 \quad -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}}[+1 \quad +1] \end{cases}$$
- Ίδιο εύρος ζώνης με τη BPSK. $d^2_{\min,\text{BPSK}} = 2d^2_{\min,\text{QPSK}}$. Ωστόσο, εάν η ενέργεια *ανά διάσταση* της QPSK ισούται με την ενέργεια της BPSK η $\bar{P}_e$ της QPSK ισούται με την P_e της BPSK.

QPSK: Υπολογισμός P_e



- Θεωρούμε ότι όλα τα σήματα μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα.
- Πιθανότητα σωστής λήψης: $P_c = \sum_{i=0}^{3} P_{c|i} p_{\mathbf{x}_i} = P_{c|i}$
  $\overset{\text{γιατί;}}{=} \left(1 - Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right)\left(1 - Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right) = 1 - 2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] + \left(Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right)^2.$
- Πιθανότητα σφάλματος: $P_e = 1 - P_c = 2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] - \left(Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right)^2 <$
  $2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]$ (NNUB) $\Rightarrow \bar{P}_e \approx Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] = Q\left[\frac{\sqrt{2\mathcal{E}_x}}{2\sigma}\right] = Q\left[\frac{2\sqrt{\bar{\mathcal{E}}_x}}{2\sigma}\right] =$
  $Q\left[\frac{d_{\min,\text{BPSK}}}{2\sigma}\right].$

Ορθογώνιοι Αστερισμοί (Orthogonal Constellations)

- Για τους κυβικούς αστερισμούς είδαμε ότι $N = b$.
- Στους ορθογώνιους αστερισμούς, ο αριθμός σημάτων, M, είναι ανάλογος της διάστασης. Επομένως, $M = \alpha N \Rightarrow b = \log_2 M = \log_2 \alpha N \Rightarrow \bar{b} = \frac{b}{N} = \frac{\log_2 \alpha N}{N}$.
- Ο αριθμός των bits ανά διάσταση ελαττώνεται όσο αυξάνει το N!

Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών

- Block orthogonal: $M = N \Rightarrow$ Μία συνάρτηση βάσης για κάθε σήμα (μήνυμα).
  - $\mathbf{x}_i = [0 \ \ldots \ 0 \ \sqrt{\mathcal{E}_x} \ 0 \ldots \ 0]$. $x_i(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x}\phi_i(t)$.
  - Frequency Shift Keying (FSK):
    $\phi_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{m\pi t}{T}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού.
  - Ποιά είναι η $d_{\min}$ των block orthogonal;
  - P_e του αστερισμού block orthogonal (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1):
    $P_e = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\sqrt{\mathcal{E}_x})^2} [1 - Q(u/\sigma)]^{N-1} du.$
  - Η $\mathbb{E}[\mathbf{x}]$ του αστερισμού block orthogonal είναι μη μηδενική (και ίση με $(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1 \ 1 \ \ldots \ 1]$).
- Αστερισμός simplex: Block orthogonal μετατοπισμένος κατά $-(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1 \ 1 \ \ldots \ 1])$ ώστε η $\mathbb{E}[\mathbf{x}]$ να ισούται με 0 (και να ελαχιστοποιηθεί, έτσι, η μέση ενέργεια).
  Τα σήματα δεν είναι, πλέον, ορθογώνια μεταξύ τους.

Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών (2)

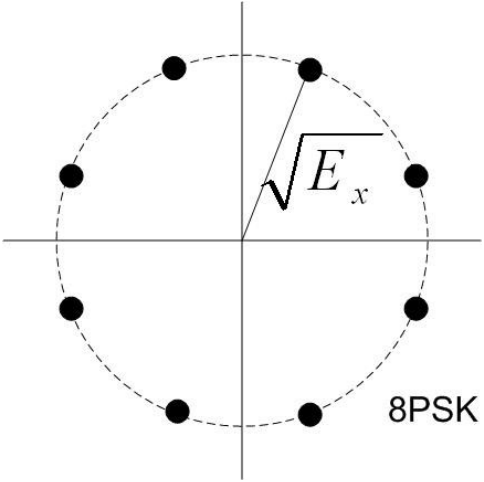
- Biorthogonal αστερισμοί: Προκύπτουν από τους ορθογώνιους αστερισμούς με προσθήκη του αντίθετου σήματος $-\mathbf{x}$ για κάθε σήμα $\mathbf{x}$.
    - $P_{e,\text{biorthogonal}} = 1 - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\sqrt{\mathcal{E}_x})^2} [1-2Q(u/\sigma)]^{N-1} du.$
- Pulse Position Modulation (PPM): Παλμοί σε διαφορετική θέση στο χρόνο.
- Pulse Duration Modulation (PDM): Παλμοί διαφορετικής διάρκειας. Τα σήματα δεν είναι ορθογώνια. Χρήση σε οπτική αποθήκευση δεδομένων (π.χ. CD).

Κυκλικοί Αστερισμοί (Circular Constellations) – MPSK

- Τα σήματα του αστερισμού τοποθετούνται επάνω σε κύκλο ακτίνας $\sqrt{\mathcal{E}_x}$, και σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις. $N = 2$.
- Μόνο η φάση των σημάτων διαφέρει $\Rightarrow$ MPSK κατάλληλη για διαμόρφωση σε κανάλια με μη γραμμική παραμόρφωση πλάτους (π.χ. κανάλια διαλείψεων (fading)).
- NNUB:

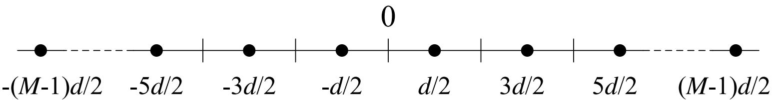
$$P_e < 2Q\left[\frac{\sqrt{\mathcal{E}_x}\sin\frac{\pi}{M}}{\sigma}\right].$$

Παράδειγμα: 8-PSK



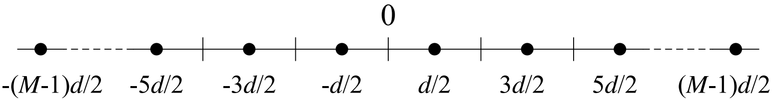
PAM και QAM

Διαμόρφωση Πλάτους Παλμού
Pulse Amplitude Modulation -- PAM



- $N = 1$ διάσταση. M σύμβολα $\Rightarrow$ $\log_2 M$ bits /μετάδοση.
- Θεωρητικά $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$. Στην πράξη, συνήθως raised cosine (περισσότερα σε επόμενη διάλεξη).
- $d_{\min} = d$.

Pulse Amplitude Modulation -- PAM (2)



- Με πράξεις (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1): $\boxed{\mathcal{E}_x = \bar{\mathcal{E}}_x = \frac{d^2}{12}[M^2 - 1]} \Rightarrow$

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{12\mathcal{E}_x}{M^2 - 1}}} \Rightarrow M = \sqrt{\frac{12\mathcal{E}_x}{d^2} + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \log_2 M = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{12\mathcal{E}_x}{d^2} + 1\right)}$$

Pulse Amplitude Modulation -- PAM (3)

- $\mathcal{E}_x(b+1) = 4\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{4}$. Για αρκούντως μεγάλες τιμές του b απαιτείται 4πλάσια ενέργεια ($\sim$ 6 dB επιπλέον) για τη μετάδοση ενός επιπλέον bit.
- Το ίδιο μας λέει και ο Shannon όταν στέλνουμε με κώδικα που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα καναλιού:

$$C = \frac{1}{2}\log_2(1 + \text{SNR}) \Rightarrow \text{SNR} = 2^{2C} - 1.$$

- Επομένως, για μεγάλα SNR, για να αυξήσουμε τη χωρητικότητα κατά 1 bit πρέπει να τετραπλασιάσουμε το SNR.

Pulse Amplitude Modulation -- PAM (4)

Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος:

- Για τα $M-2$ εσωτερικά σημεία: $P_{c|i} = 1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$.
- Για τα 2 εξωτερικά σημεία: $P_{c|i} = 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$.
- Επομένως, $P_c = \frac{M-2}{M}\left(1-2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) + \frac{2}{M}\left(1-Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) = 1 - 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \Rightarrow \boxed{P_e = \bar{P}_e = 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) < 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)}$
- Η προσέγγιση (NNUB) γίνεται πιο ακριβής καθώς $M \to \infty$.
- Με χρήση σχέσεων προηγούμενης διαφάνειας,

P_e της PAM

$$P_e = 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\text{SNR}}\right)$$

Pulse Amplitude Modulation -- PAM (5)

Στον πίνακα (βλ. επίσης Cioffi Ch. 1) έχει υπολογιστεί ο απαιτούμενος SNR για σταθερή $P_e = 10^{-6}$ και διαφορετικό αριθμό bits/μετάδοση. Επίσης, έχει υπολογιστεί η τιμή του SNR η οποία απαιτείται ώστε η χωρητικότητα του καναλιού AWGN να ισούται με b bits/μετάδοση. Παρατηρούμε ότι η διαμόρφωση PAM για $P_e = 10^{-6}$ έχει απώλειες περίπου 9 dB σε σχέση με τη βέλτιστη κωδικοποίηση με την οποία επιτυγχάνεται ρυθμός μετάδοσης ίσος με τη χωρητικότητα του καναλιού.

b	M	$\frac{d}{2\sigma}$ για $P_e = 10^{-6}$ (dB)	SNR (dB)	αύξηση του SNR (dB)	$2^{2b} - 1$ (dB)
1	2	13.53	13.53	–	4.77
2	4	13.69	20.68	7.15	11.76
3	8	13.75	26.97	6.29	17.99
4	16	13.77	33.06	6.09	24.07
5	32	13.78	39.10	6.04	30.10
6	64	13.79	45.14	6.04	36.12

Η προσέγγιση Gap

- Είδαμε ότι $P_e = 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\text{SNR}}\right)$.
- Επομένως,

$$\frac{MP_e}{2(M-1)} = Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\text{SNR}}\right) \Rightarrow$$

$$\left[Q^{-1}\left(\frac{MP_e}{2(M-1)}\right)\right]^2 = \frac{3}{M^2-1}\text{SNR} \Rightarrow$$

$$M^2 = \left(2^b\right)^2 = 1 + \frac{3\text{SNR}}{\left[Q^{-1}\left(\frac{MP_e}{2(M-1)}\right)\right]^2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\text{SNR}}{\Gamma_{\text{PAM}}(P_e, M)}\right),$$

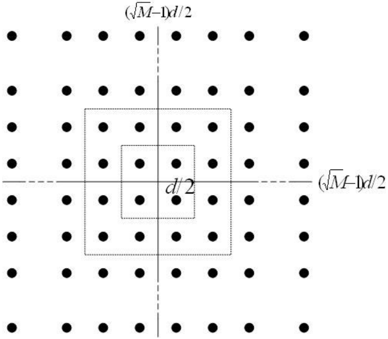
όπου $\Gamma_{\text{PAM}}(P_e, M) = \frac{3}{\left[Q^{-1}\left(\frac{MP_e}{2(M-1)}\right)\right]^2}$ είναι το Gap.

Η προσέγγιση Gap (2)

$$b_{\mathsf{PAM}} = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\mathsf{SNR}}{\Gamma_{\mathsf{PAM}}(P_e, M)}\right), \ \Gamma_{\mathsf{PAM}}(P_e, M) = \frac{3}{\left[Q^{-1}\left(\frac{MP_e}{2(M-1)}\right)\right]^2}$$

- Η προσέγγιση Gap προτάθηκε από τον D. Forney.
- Το Gap ισούται με το "πρόστιμο" που πρέπει να καταβάλουμε σε ενέργεια επειδή χρησιμοποιούμε υποβέλτιστο τρόπο μετάδοσης στο κανάλι AWGN.
- Η προσέγγιση είναι ακριβής για $b \geq 1$ και, επομένως, για PAM και QAM.
- Παρατηρήστε ότι εξαρτάται από την P_e και, επίσης, ότι $\Gamma_{\mathsf{PAM}}(P_e) \rightarrow \frac{3}{[Q^{-1}(P_e/2)]^2}$ για $M \rightarrow \infty$. Για $P_e = 10^{-6}$, $\Gamma_{\mathsf{PAM}} \rightarrow 9$ dB.
- Η προσέγγιση Gap απλοποιεί το σχεδιασμό και την ανάλυση συστημάτων, αφού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Shannon για τη χωρητικότητα.
- Επεκτείνεται και σε περιπτώσεις όπου χρησιμοποιείται κωδικοποίηση. Στην περίπτωση αυτή $\Gamma = \Gamma_{\mathsf{PAM}}/\gamma_{\mathsf{code}} < \Gamma_{\mathsf{PAM}}$.

Διαμόρφωση Πλάτους με Ορθογωνισμό Φάσης Quadrature Amplitude Modulation -- QAM



- Γενίκευση της PAM σε $N = 2$ διαστάσεις.
- Στο σχήμα απεικονίζεται ο αστερισμός Square QAM (SQ-QAM) ο οποίος αντιστοιχεί σε άρτιο αριθμό bits, b.

Quadrature Amplitude Modulation -- QAM (2)

- Ως συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιούνται (θεωρητικά) οι $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$ και $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\sin(2\pi f_c t) \rightarrow$ ζωνοπερατή (bandpass) μετάδοση.
- Μέση ενέργεια αστερισμού SQ-QAM: Με πράξεις (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1), $\mathcal{E}_{M-\text{QAM}} = 2\mathcal{E}_{\sqrt{M}-\text{PAM}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{M-\text{QAM}} = d^2\frac{M-1}{6}} \Rightarrow$ $\bar{\mathcal{E}}_{M-\text{QAM}} = d^2\frac{M-1}{12} \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{\frac{6\mathcal{E}_x}{M-1}}} \Rightarrow M = \frac{6\mathcal{E}_x}{d^2} + 1 \Rightarrow$ $\boxed{\bar{b} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{6\mathcal{E}_x}{d^2} + 1\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{12\bar{\mathcal{E}}_x}{d^2} + 1\right)}$, ίσο με την PAM (λογικό – γιατί;)

Quadrature Amplitude Modulation -- QAM (3)

- $\mathcal{E}_x(b+1) = 2\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{6}$. Για αρκούντως μεγάλες τιμές του b απαιτείται διπλάσια ενέργεια (~ 3 dB επιπλέον) για τη μετάδοση ενός επιπλέον bit (ανά διδιάστατο σύμβολο).
- Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος:
  - Για τα 4 γωνιακά σημεία: $P_{c|i} = \left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^2$
  - Για τα $(\sqrt{M}-2)^2$ εσωτερικά σημεία: $P_{c|i} = \left(1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^2$
  - Για τα $4(\sqrt{M}-2)$ πλευρικά σημεία: $P_{c|i} = \left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)\left(1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)$

Quadrature Amplitude Modulation -- QAM (4)

- Με πράξεις,

P_e της QAM

$$P_e = 2\bar{P}_e = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 \left(Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^2$$

$$\bar{P}_e < 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\text{SNR}}\right)$$

- Το SNR είναι ανά διάσταση ($= \bar{\mathcal{E}}_x/\sigma^2$).
- Η προσέγγιση (NNUB) γίνεται πιο ακριβής καθώς $M \to \infty$.

Quadrature Amplitude Modulation -- QAM (5)

Στον πίνακα (βλ. επίσης Cioffi Ch. 1) έχει υπολογιστεί ο απαιτούμενος SNR (*ανά διάσταση*) για σταθερή $\bar{P}_e = 10^{-6}$ και διαφορετικό αριθμό bits/μετάδοση. Επίσης, έχει υπολογιστεί η τιμή του SNR η οποία απαιτείται ώστε η χωρητικότητα του καναλιού AWGN να ισούται με b bits/μετάδοση. Παρατηρούμε ότι η διαμόρφωση QAM για $P_e = 10^{-6}$ έχει απώλειες περίπου 9 dB (το Gap) σε σχέση με τη βέλτιστη διαμόρφωση με την οποία επιτυγχάνεται ρυθμός μετάδοσης ίσος με τη χωρητικότητα του καναλιού.

$b = 2\bar{b}$	M	$\frac{d}{2\sigma}$ για $\bar{P}_e = 10^{-6}$ (dB)	SNR (dB)	αύξηση του SNR ανά bit (dB)	$2^{2\bar{b}} - 1$ (dB)
2	4	13.53	13.53	–	4.77
4	16	13.69	20.68	3.58	11.76
6	64	13.75	26.97	3.15	17.99
8	256	13.77	33.06	3.05	24.07
10	1024	13.78	39.10	3.02	30.10
12	2048	13.79	45.14	3.02	36.12

PAM ή QAM;

- Είδαμε ότι, για δεδομένη ενέργεια ανά διάσταση, η $d_{\min}$ της BPSK ισούται με τη $d_{\min}$ της QPSK. Επομένως, η QPSK απαιτεί διπλάσια συνολική ενέργεια για να μεταδώσει διπλάσια bits από ό,τι η BPSK.
- Τι θα συνέβαινε, όμως, εάν χρησιμοποιούσαμε μία διάσταση (δηλαδή 4-PAM) για να μεταδώσουμε 2 ψηφία;
- Από τις σχέσεις για την PAM (ή χρησιμοποιώντας το Gap) προκύπτει ότι χρειαζόμαστε $\mathcal{E}_{\text{4-PAM}} = \frac{5}{4} d_{\min}^2$.
- Αντίθετα, $\mathcal{E}_{\text{QPSK}} = \frac{1}{2} d_{\min}^2$.
- Συνεπώς, $\mathcal{E}_{\text{4-PAM}} / \mathcal{E}_{\text{QPSK}} = 5/2 \approx 4$ dB!

PAM ή QAM; (2)

- Το αποτέλεσμα αυτό, ότι δηλαδή συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε QPSK αντί για 4-PAM για δεδομένη διαθέσιμη συνολική ισχύ στον πομπό, αποτελεί ειδική περίπτωση μιας πολύ σημαντικής ιδιότητας της γεωμετρίας που ονομάζεται sphere packing.
- Σύμφωνα με την ιδιότητα sphere packing, σφαίρες δεδομένης ακτίνας, r, "γεμίζουν" καλύτερα έναν υπόχωρο δεδομένης ακτίνας R όσο η διάσταση, N, του υποχώρου αυξάνει.
- Εδώ ο υπόχωρος περιλαμβάνει όλα τα πιθανά σήματα που λαμβάνονται στον πομπό. Το κέντρο κάθε σφαίρας είναι το σύμβολο που μεταδόθηκε, ενώ η ακτίνα της, r, ισούται με την τιμή του θορύβου που υπερτίθεται στο σήμα. Η ακτίνα, R, του υποχώρου είναι της τάξης $\sqrt{\mathcal{E}_x} + \sigma$ (αλλά, θεωρητικά, άπειρη).

PAM ή QAM; (3)

- Επομένως, για δεδομένη διαθέσιμη ισχύ στην είσοδο, ο αριθμός των μηνυμάτων που μπορούμε να μεταδώσουμε σε ένα κανάλι AWGN δεδομένης διασποράς θορύβου αυξάνει καθώς αυξάνει ο αριθμός των διαστάσεων, N.
- Η ιδιότητα αυτή αποτελεί τη βάση της απόδειξης του Θεωρήματος Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι.

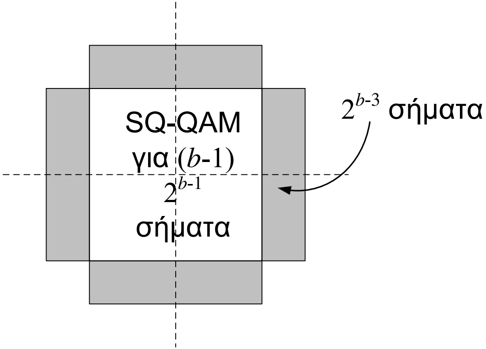
PAM ή QAM; (4)

- Επομένως, στις ψηφιακές επικοινωνίες ενδείκνυται να χρησιμοποιούμε όσο περισσότερες διαστάσεις μπορούμε.
  - Εάν έχουμε διαθέσιμες θυρίδες στο χρόνο (TDMA), είναι καλύτερα να μεταδώσουμε μικρούς αστερισμούς σε πολλές θυρίδες, παρά μεγάλους αστερισμούς σε λίγες.
  - Εάν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερες από μία περιοχή συχνοτήτων (FDMA), είναι καλύτερα να "σπάσουμε" τα δεδομένα μας σε περισσότερες από μία ροές μικρότερου ρυθμού.
- Διαισθητικά: Για χαμηλά SNR η χωρητικότητα του καναλιού αυξάνει (σχεδόν) γραμμικά, ενώ για μεγάλα SNR η αύξηση είναι λογαριθμική. Επομένως, σε χαμηλά SNR, δεδομένη αύξηση της ισχύος οδηγεί σε μεγαλύτερη αύξηση της χωρητικότητας (αναλογικά).
- Μια άλλη οπτική: Η πιθανότητα ο θόρυβος να είναι μακριά από τη μέση τιμή του και στις N διαστάσεις (με αποτέλεσμα να βρεθούμε πιο κοντά σε άλλη σφαίρα) είναι μικρότερη από την πιθανότητα ο θόρυβος να είναι μεγάλος σε $n < N$ διαστάσεις (από το νόμο των μεγάλων αριθμών).

Παράδειγμα: Ψηφιακή Δορυφορική Εκπομπή (Cioffi 1.6.3)

- Διαμόρφωση: 4-QAM.
- 20 φέρουσες, μεταξύ 12.2 και 12.7 GHz.
- Ρυθμός μετάδοσης συμβόλου (symbol rate): $\frac{1}{T} = 19.151$ MHz.
- Εύρος ζώνης: 24 MHz. Γιατί δεν είναι ίσο με $\frac{1}{T}$;
- Επομένως, ρυθμός μετάδοσης δεδομένων (data rate): $R = 38.302$ Mbps σε κάθε φέρουσα.
- Για τη μετάδοση video απαιτούνται περίπου 2-3 Mbps $\rightarrow$ έως 16 κανάλια ανά φέρουσα.
- Για τα αναλογικά κανάλια χρησιμοποιείται κανάλι 24 MHz. Επομένως, με την ψηφιακή μετάδοση έχουμε εξοικονόμηση φάσματος. Αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη συμπίεση του video.
- Παρατηρήστε ότι ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων εξαρτάται από το εύρος ζώνης, αλλά δεν ισούται με αυτό. Η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που στέλνεται 1 bit/μετάδοση.

Μετάδοση περιττού b: Cross QAM -- CR-QAM



- Για τους αστερισμούς CR-QAM ισχύουν τα παρακάτω:
$\mathcal{E}_x = \frac{d^2}{6}\left(\frac{31}{32}M - 1\right), d = \sqrt{\frac{6\mathcal{E}_x}{\frac{31}{32}M-1}}, \bar{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{32}{31}\frac{6\mathcal{E}_x}{d^2} + 1\right).$

Cross QAM (2)

- $\mathcal{E}_x(b+1) = 2\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{6}$.
- Πιθανότητα Σφάλματος (προσέγγιση):

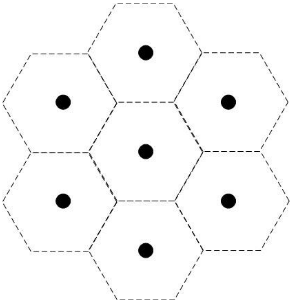
P_e CR-QAM

$$P_e < 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{P}_e \approx 2\left(1 - \frac{1}{2^{\bar{b}+0.5}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\text{SNR}}{\frac{31}{32}M - 1}}\right).$$

- Υπάρχουν και άλλοι τρόποι να κατασκευαστεί αστερισμός QAM για περιττό b, αλλά ο CR-QAM υπερτερεί σε εξοικονόμηση ενέργειας.

Εξαγωνικοί Αστερισμοί



- Επιτυγχάνουν τη βέλτιστη εκμετάλλευση του χώρου στις 2 διαστάσεις. Μπορεί να αποδειχθεί ότι υπερτερούν κατά 0.625 dB σε σχέση με τους αστερισμούς QAM.
- Μειονέκτημα: Μεγαλύτερη πολυπλοκότητα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης.

Έγχρωμος (colored) προσθετικός θόρυβος

Έγχρωμος (colored) προσθετικός θόρυβος

- Σε πολλές περιπτώσεις ο θόρυβος ενδέχεται να μην είναι λευκός, δηλαδή, $R_n(\tau) \neq \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(\tau)$.
- Στην περίπτωση αυτή ο θόρυβος ονομάζεται έγχρωμος (colored).
- Ο έγχρωμος θόρυβος μπορεί να οφείλεται σε
  - Φίλτρα στο δέκτη τα οποία μεταβάλλουν το φάσμα του λευκού θορύβου
  - Ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές από άλλα συστήματα (RF Ingress)
  - Διαφωνία (crosstalk)
- Η σχεδίαση συστημάτων για Προσθετικό Έγχρωμο Γκαουσιανό Θόρυβο (ACGN) μπορεί να γίνει με λεύκανση του έγχρωμου θορύβου εφόσον γνωρίζουμε την αυτοσυσχέτισή του, $R_n(\tau)$ (ή τη φασματική πυκνότητα ισχύος $S_n(f)$).

Φίλτρο Λεύκανσης για το διανυσματικό μοντέλο καναλιού (Whitening Filter)

- Έστω το διανυσματικό μοντέλο καναλιού N διαστάσεων $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$, όπου $\mathbf{n}$ ACGN με $\mathbf{R}_n = E[\mathbf{n}\mathbf{n}^*] = \mathbf{R}_n = \bar{\mathbf{R}}_n \sigma^2$.
- Επομένως, εάν $\mathbf{R}_n \neq \mathbf{I}$, οι συνιστώσες του θορύβου στις διαφορετικές διαστάσεις είναι συσχετισμένες.
- Ο πίνακας $\bar{\mathbf{R}}_n$ είναι $N \times N$ και θετικά ορισμένος (Positive Definite), δηλαδή $\mathbf{z}^T \bar{\mathbf{R}}_n \mathbf{z} > 0$ για οποιοδήποτε $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^N$.
- Παραγοντοποίηση Cholesky: Ένας PD πίνακας $\mathbf{P}$ μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{L}\mathbf{L}^*$, όπου $\mathbf{L}$ κάτω τριγωνικός πίνακας (ο οποίος αποτελεί και τετραγωνική ρίζα, $\mathbf{P}^{1/2}$, του $\mathbf{P}$). Συνεπώς, $\bar{\mathbf{R}}_n = \bar{\mathbf{R}}_n^{1/2} \bar{\mathbf{R}}_n^{*/2}$, όπου $\bar{\mathbf{R}}_n^{1/2}$ κάτω τριγωνικός.

Φίλτρο Λεύκανσης για το διανυσματικό μοντέλο καναλιού (Whitening Filter) (2)

- Ορίζουμε $\tilde{\mathbf{y}} \triangleq \left(\bar{\mathbf{R}}_n^{1/2}\right)^{-1} \mathbf{y} = \bar{\mathbf{R}}_n^{-1/2}\mathbf{y} = \bar{\mathbf{R}}_n^{-1/2}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{R}}_n^{-1/2}\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}}$.
- $E[\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}}^*] = E[\bar{\mathbf{R}}^{-1/2}\mathbf{n}\mathbf{n}^* \left(\bar{\mathbf{R}}^{-1/2}\right)^*] = \bar{\mathbf{R}}^{-1/2}E[\mathbf{n}\mathbf{n}^*]\bar{\mathbf{R}}^{-*/2} = \bar{\mathbf{R}}^{-1/2}\bar{\mathbf{R}}^{1/2}\bar{\mathbf{R}}^{*/2}\bar{\mathbf{R}}^{-*/2} = \mathbf{I}_N$.
- Επομένως, το κανάλι που προέκυψε από τον αντιστρέψιμο μετασχηματισμό του $\mathbf{y}$ στο $\tilde{\mathbf{y}}$ είναι AWGN.
- Έχουμε δει ότι η απόδοση του ανιχνευτή MAP (και ML) δεν επηρεάζεται από αντιστρέψιμους μετασχηματισμούς.
- Επομένως, στο δέκτη μπορούμε να δουλέψουμε με το κανάλι AWGN $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}}$.

Φίλτρο Λεύκανσης για το διανυσματικό μοντέλο καναλιού (Whitening Filter) (3)

- Ένα σύστημα με έγχρωμο θόρυβο ενδέχεται να έχει καλύτερη απόδοση από ένα σύστημα με λευκό θόρυβο. Βλ. π.χ. Cioffi Παράδειγμα 1.7.1., όπου ένα σύστημα QPSK με έγχρωμο θόρυβο χαρακτηρίζεται από μικρότερη πιθανότητα σφάλματος από ένα σύστημα με λευκό θόρυβο ίσης μέσης ισχύος.
- Αρκεί, βέβαια, ο δέκτης να είναι σχεδιασμένος για το σωστό κανάλι.