Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων σε Δειγματοληψία και Κβάντιση

1. **Άσκηση 5-1 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη (τροποποιημένη)**

Το σήμα

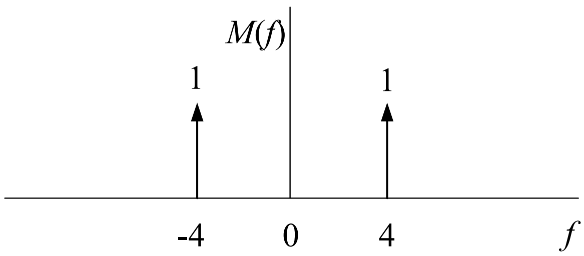
$$m(t) = 2\cos(2\pi 4t)$$

δειγματοληπτείται με 6 samples/s. Να σχεδιαστεί το φάσμα του $m(t)$ και το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος και να σχολιαστεί – αν υφίσταται – το φαινόμενο aliasing.

Τι θα συμβεί αν υποθέσουμε ότι η συχνότητα Nyquist δεν υπερβαίνει τα 6 samples/s και επιχειρήσουμε να ανακατασκευάσουμε το $m(t)$ με χρήση ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου εύρους ζώνης 3 Hz;

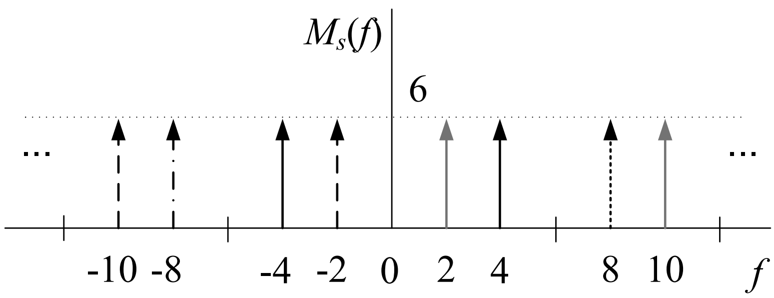
Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι $f_c = 4$ Hz. Το φάσμα του $m(t)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: $M(f)$.

Επειδή η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 6 Hz, το φάσμα του αρχικού σήματος $m(t)$ επαναλαμβάνεται ανά 6 Hz. Το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος, έστω $m_s(t)$, σχεδιάζεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Φάσμα δειγματοληπτημένου σήματος $m_s(t)$.

Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται aliasing. Από το Σχήμα 2 βλέπουμε, επίσης, ότι αν επιχειρήσουμε να ανακατασκευάσουμε το $m(t)$ με χρήση ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου εύρους ζώνης 3 Hz θα προκύψει το σήμα $A\cos(2\pi 2t)$ (το A εξαρτάται από το κέρδος του φίλτρου). Δηλαδή, δε θα ανακτήσουμε το αρχικό σήμα.

2. **Άσκηση 5-2 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη**

Ένα αναλογικό σήμα $m(t)$ διέρχεται από ένα φίλτρο anti-aliasing η συχνότητα αποκοπής του οποίου ισούται με f_h. Στη συνέχεια δειγματοληπτείται με συχνότητα $f_s = 2f_h$. Έστω $y_1(t)$ το σήμα που ανακτάται στο δέκτη με χρήση ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου εύρους ζώνης f_h και

$$e_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} [m(t) - y_1(t)]^2 \, dt.$$

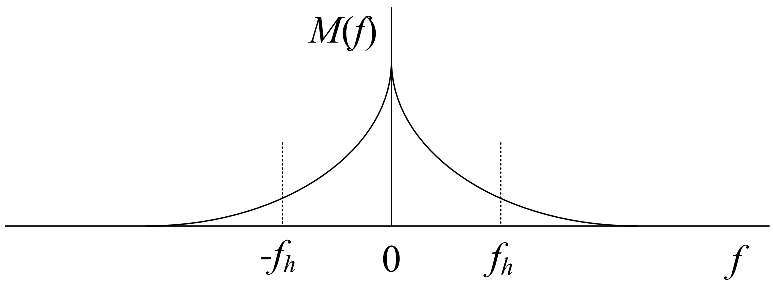
Αν $y_2(t)$ είναι το σήμα που ανακτάται στο δέκτη εάν δε χρησιμοποιηθεί φίλτρο anti-aliasing στον πομπό (αλλά χρησιμοποιηθεί ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο εύρους ζώνης f_h στο δέκτη) και

$$e_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [m(t) - y_2(t)]^2 \, dt,$$

να δείξετε ότι $e_2 \geq e_1$.

Απάντηση:

Έστω ότι το φάσμα του $m(t)$ έχει τη μορφή του Σχήματος 3. Παρόλο που στο σχήμα έχει γίνει η υπόθεση ότι το φάσμα μηδενίζεται μετά από κάποια συχνότητα, δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιείται αυτή η συνθήκη.



Σχήμα 3: Φάσμα του σήματος $m(t)$ για την Άσκηση 5-2.

Έστω ότι το σήμα $m(t)$ διέρχεται από φίλτρο anti-aliasing με συχνότητα αποκοπής f_h. Αν υποθέσουμε ότι το φίλτρο anti-aliasing αποκόπτει πλήρως όλες τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από την f_h, για το φάσμα της εξόδου του φίλτρου, έστω $m_a(t)$, μπορούμε να γράψουμε

$$M_a(f) = \begin{cases} M(f) & \text{για } |f| < f_h \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η μεγαλύτερη συχνότητα του σήματος $M_a(f)$ είναι η f_h. Επομένως, αν δειγματοληπτήσουμε με συχνότητα $f_s = 2f_h$ και στο δέκτη χρησιμοποιήσουμε ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο εύρους ζώνης f_h, μπορούμε να ανακτήσουμε ακριβώς το $m_a(t)$. Δηλαδή, $y_1(t) = m_a(t)$. Συνεπώς, αν $d_1(t) = m(t) - y_1(t)$, για το φάσμα του $d_1(t)$ ισχύει

$$D_1(f) = \begin{cases} 0 & \text{για } |f| < f_h \\ M(f) & \text{αλλού} \end{cases}$$

Από το θεώρημα Parseval,

$$e_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} [m(t) - y_1(t)]^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} d_1^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |D_1(f)|^2 \, df = 2 \int_{f_h}^{+\infty} |M(f)|^2 \, df,$$

όπου υποθέσαμε, επίσης, ότι το $m(t)$ είναι πραγματικό σήμα (και, επομένως, το φάσμα του παρουσιάζει συζυγή συμμετρία ως προς το 0).

Έστω, τώρα, ότι δε χρησιμοποιούμε φίλτρο anti-aliasing και ότι το σήμα έχει μη μηδενική ενέργεια στις συχνότητες $|f| > f_h$. Επομένως, λόγω δειγματοληψίας, μέρος του φάσματος του αρχικού σήματος $m(t)$ θα αναδιπλωθεί στις συχνότητες $|f| < f_h$. Η αναδίπλωση μπορεί να προκαλείται όχι μόνο από τις δύο γειτονικές νησίδες (με κέντρο τις συχνότητες $\pm 2f_h$) αλλά και από άλλες νησίδες εάν $M(f) \neq 0$ για κάποιες συχνότητες $|f| > 3f_h$. Έστω $\tilde{M}(f)$ το μέρος του φάσματος του δειγματοληπτημένου σήματος στις συχνότητες $|f| < f_h$ που οφείλεται σε αναδίπλωση. Δηλαδή, έστω ότι, για $|f| < f_h$, $M_s(f) = M(f) + \tilde{M}(f)$, όπου $M_s(f)$ είναι το φάσμα του σήματος $m(t)$ μετά τη δειγματοληψία. Συνεπώς, αν $d_2(t) = m(t) - y_2(t)$,

$$D_2(f) = \begin{cases} \tilde{M}(f) & \text{για } |f| < f_h \\ M(f) & \text{αλλού} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας, και πάλι, το θεώρημα Parseval,

$$\begin{aligned} e_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} [m(t) - y_2(t)]^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} d_2^2(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |D_2(f)|^2 \, df = 2 \int_{f_h}^{+\infty} |M(f)|^2 \, df + \int_{-f_h}^{+f_h} \left|\tilde{M}(f)\right|^2 df \\ &= e_1 + \int_{-f_h}^{+f_h} \left|\tilde{M}(f)\right|^2 df \geq e_1. \end{aligned}$$

3. ***Δειγματοληψία ζωνοπερατών σημάτων (Bandpass Sampling Theorem)**

Όπως έχουμε αναφέρει στο μάθημα, η δειγματοληψία με συχνότητα μεγαλύτερη ή ίση της συχνότητας Nyquist είναι *ικανή* (sufficient), αλλά όχι *αναγκαία* (necessary) συνθήκη για να μπορούμε να ανακατασκευάσουμε ένα σήμα από τα δείγματά του. Σε αυτή την άσκηση θα δούμε ότι, σε πολλές περιπτώσεις, μπορούμε να δειγματοληπτήσουμε ζωνοπερατά σήματα με συχνότητα μικρότερη από τη συχνότητα Nyquist. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το αρχικό σήμα αρκεί να δειγματοληπτήσουμε με συχνότητα στο διάστημα

$$\left[\frac{2f_h}{\rho}, \frac{2f_l}{\rho - 1}\right],$$

όπου f_l kai f_h η μικρότερη και μεγαλύτερη (μη μηδενική) συχνότητα του σήματος, αντίστοιχα, και $\rho = \left\lfloor \frac{f_h}{W} \right\rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει το x – `floor` στη Matlab).

i. Υποθέτουμε αυθαίρετη συχνότητα δειγματοληψίας f_s. Παρατηρήστε ότι οι νησίδες που δημιουργούνται λόγω της επανάληψης του φάσματος του αρχικού σήματος στην περιοχή $[-f_h, -f_l]$ βρίσκονται στα διαστήματα $[-f_h + kf_s, -f_l + kf_s]$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, για να μη δημιουργείται aliasing στην περιοχή $[f_l, f_h]$ θα πρέπει, γα κάποιο ακέραιο $\rho > 0$ η νησίδα $[-f_h + (\rho - 1)f_s, -f_l + (\rho - 1)f_s]$ να βρίσκεται αριστερά από την περιοχή $[f_l, f_h]$, ενώ η νησίδα $[-f_h + \rho f_s, -f_l + \rho f_s]$ δεξιά και να μην υπάρχει καθόλου επικάλυψη. Λόγω συμμετρίας, οι απαιτήσεις είναι ίδιες και για τις νησίδες που οφείλονται στην περιοχή φάσματος $[f_l, f_h]$ του αρχικού σήματος.

   Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις βρείτε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα για την f_s συναρτήσει του ρ.

   Απάντηση:

   Για να μην υπάρχει επικάλυψη πρέπει, για κάποιο ακέραιο $\rho > 0$,

$$f_h \leq -f_h + \rho f_s \Rightarrow f_s \geq \frac{2f_h}{\rho}.$$

   Επίσης, πρέπει να ισχύει

$$f_l \geq -f_l + (\rho - 1)f_s \to f_s \leq \frac{2f_l}{\rho - 1}.$$

ii. Δείξτε ότι πρέπει, επίσης, να ισχύει $f_s \geq 2W = 2(f_h - f_l)$.

   Απάντηση:

   Προσθέτοντας τις ανισότητες

$$\begin{aligned} f_h &\leq -f_h + \rho f_s \text{ και} \\ -f_l + (\rho - 1)f_s &\leq f_l \end{aligned}$$

   προκύπτει ότι

$$2(f_h - f_l) \leq f_s \Rightarrow f_s \geq 2W.$$

iii. Με χρήση του κάτω φράγματος για την f_s που βρήκατε στο i. και της σχέσης $f_s \geq 2W$, δείξτε ότι η μέγιστη τιμή του ρ που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι $\rho = \left\lfloor \frac{f_h}{W} \right\rfloor$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Από τη σχέση $f_s \geq 2W$ και από το κάτω φράγμα για την f_s του ερωτήματος i,

$$\frac{2f_h}{\rho} \geq 2W \Rightarrow \rho \leq \frac{f_h}{W}.$$

Επομένως, η μέγιστη τιμή του ρ που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι $\rho = \left\lfloor \frac{f_h}{W} \right\rfloor$.

iv. Αντικαταστήστε στα φράγματα που βρήκατε το i. για να καταλήξετε στο διάστημα επιτρεπτών τιμών της f_s.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Αντικαθιστώντας στα φράγματα του Ερωτήματος i,

$$f_s \in \left[\frac{2f_h}{\rho}, \frac{2f_l}{\rho - 1}\right],$$

όπου $\rho = \left\lfloor \frac{f_h}{W} \right\rfloor$.

v. Πώς πρέπει να γίνει η ανακατασκευή του ζωνοπερατού σήματος; Τι φίλτρο πρέπει να χρησιμοποιηθεί;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Για να ανακατασκευάσουμε το σήμα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο το οποίο έχει επίπεδη απόκριση (και γραμμική φάση) στο διάστημα $[f_l, f_h]$ και αποκόπτει πλήρως τις συχνότητες $|f| < -f_l + (\rho - 1)f_s$ και $|f| > -f_h + \rho f_s$.

4. **Άσκηση 5-4 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη (τροποποιημένη)**

Έστω το πραγματικό ζωνοπερατό σήμα $x(t)$ με φασματικό περιεχόμενο στην περιοχή $[f_l, f_h]$, όπου $f_l = 3$ MHz και $f_h = 5$ MHz. Το σήμα μεταδίδεται χρησιμοποιώντας PCM σε κανάλι που μπορεί να υποστηρίξει ρυθμό μετάδοσης 7 MBytes/s. Μην ασχοληθείτε με τις λεπτομέρειες. Υποθέστε ότι, με κάποιο τρόπο, το κανάλι μπορεί να μεταδώσει 7 MBytes/s που του παρέχονται σε κάποια μορφή από τον κβαντιστή (π.χ. ως ακολουθία bits). Υποθέστε, επίσης, ότι τα δείγματα του $x(t)$ είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα στο διάστημα [−2V, +2V].

i. Βρείτε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ώστε να είναι εφικτή η ανακατασκευή του σήματος.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, $\rho = \left\lfloor \frac{f_h}{W} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$. Συνεπώς, $f_{s,\min} = \frac{2f_h}{\rho} = \frac{2 \cdot 5}{2}$ MHz $= 5$ MHz.

ii. Χρησιμοποιούμε τη συχνότητα δειγματοληψίας του προηγούμενου ερωτήματος και, στη συνέχεια, κβαντίζουμε τα δείγματα με χρήση *ομοιόμορφου* κβαντιστή. Ο αριθμός επιπέδων του κβαντιστή ισούται με $M = 2^{\nu}$, ν ακέραιος, και θέλουμε το σφάλμα κβάντισης να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε κάθε περιοχή κβάντισης. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του ν που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε; Πόσα είναι τα επίπεδα κβάντισης; Ποια είναι τα επίπεδα κβάντισης;

Απάντηση:

Για να μπορέσουμε να ανακτήσουμε το σήμα στο δέκτη χωρίς aliasing πρέπει να στέλνουμε με ρυθμό τουλάχιστον 5 Msamples/s. Δεδομένου ότι το κανάλι μπορεί να μεταφέρει έως και 7 MBytes/s = 56 Mbits/s, μπορούμε να περιγράψουμε κάθε δείγμα με $\nu_{\max} = 11$ bits (θεωρούμε ότι χρησιμοποιούμε πάντοτε τον ίδιο, βαθμωτό, κβαντιστή). Επομένως, διαθέτουμε $2^{11} = 2048$ επίπεδα κβάντισης.

Τα επίπεδα κβάντισης είναι τα

$$-2 + k\Delta + \frac{\Delta}{2} \ \text{ V}, \ k = 0, 1, \ldots, 2^{11} - 1,$$

όπου $\Delta = \frac{2-(-2)}{2^{11}} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$.

iii. Υπολογίστε τον SQNR για την τιμή του ν που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Απάντηση:

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, επειδή η είσοδος είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη (στο διάστημα $[-2, +2]$) και το σφάλμα κβάντισης $E[n] = X[n] - \hat{X}[n]$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο (στο διάστημα $\left[-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}\right]$. Επομένως,

$$\mathbb{E}\left[E^2[n]\right] = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Επίσης,

$$\mathbb{E}\left[X^2[n]\right] = \int_{-2}^{+2} \frac{1}{4} s^2 ds = 2\frac{1}{4}\int_{0}^{+2} s^2 ds = \frac{1}{2}\left.\frac{s^3}{3}\right|_{s=0}^{s=+2} = \frac{4}{3}.$$

Επομένως,

$$\mathsf{SQNR} = \frac{\mathbb{E}\left[X^2[n]\right]}{\mathbb{E}\left[E^2[n]\right]} = \frac{16}{\Delta^2} = \frac{2^4}{2^{-18}} = 2^{22}.$$

Συνεπώς,

$$\mathsf{SQNR}\ [\text{dB}] = 10\log_{10}\left(2^{22}\right) = 220\log_{10}(2) \approx 220 \cdot 0.3 = 66 \text{ dB}.$$

iv. Ποια είναι η τιμή του SQNR αν δειγματοληπτήσουμε με τη συχνότητα Nyquist 10 MHz (και επανασχεδιάσουμε τον κβαντιστή);

Απάντηση:

Αν δειγματοληπτήσουμε με συχνότητα 10 MHz, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε 5 bits/sample (αντί για 11). Συνεπώς, $\Delta = \frac{2-(-2)}{2^5} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ και

$$\mathsf{SQNR} = \frac{\mathbb{E}\left[X^2[n]\right]}{\mathbb{E}\left[E^2[n]\right]} = \frac{16}{\Delta^2} = \frac{2^4}{2^{-6}} = 2^{10} \approx 30 \text{ dB}.$$

Παρατηρούμε σημαντική μείωση του SQNR και, επομένως, της ποιότητας του σήματος. Όταν δειγματοληπτούμε με 10 MHz τα δείγματα είναι περισσότερο συσχετισμένα σε σχέση με τη δειγματοληψία με 5 MHz. Επομένως, "κατανέμουμε" τα bits που διαθέτουμε ανά δευτερόλεπτο σε περισσότερα δείγματα χωρίς αυτό να χρειάζεται, αφού δειγματοληψία με 5 MHz επαρκεί. Δηλαδή κβαντίζουμε δείγματα που μοιάζουν αρκετά μεταξύ τους και τα κβαντίζουμε με λιγότερα bits. Το καλύτερο είναι να κβαντίσουμε λιγότερα δείγματα και να χρησιμοποιήσουμε περισσότερα bits για το κάθε δείγμα.

v. Αν έχετε στη διάθεσή σας ιδανικό μείκτη στον πομπό και έναν ιδανικό μείκτη στο δέκτη με συχνότητα της επιλογής σας, καθώς και ιδανικά φίλτρα της επιλογής σας, μπορείτε να αυξήσετε περαιτέρω τον SQNR σε σύγκριση με το Ερώτημα iii;

Απάντηση:

Αν διαθέτουμε ιδανικό μείκτη και ιδανικά φίλτρα στον πομπό μπορούμε να μετακινήσουμε το σήμα στη βασική ζώνη (0-2 MHz). Επομένως, μπορούμε να δειγματοληπτήσουμε με συχνότητα 4 MHz και να χρησιμοποιήσουμε κβαντιστή 14 bits. Αυτό οδηγεί σε περαιτέρω αύξηση του SQNR. Στο δέκτη θα πρέπει, με χρήση ιδανικού μείκτη και φίλτρων να επαναδιαμορφώσουμε το σήμα στην περιοχή $[3, 5]$ MHz.

Μπορούμε να μεταφέρουμε το σήμα ακόμα πιο χαμηλά, δηλαδή στην περιοχή $[-1, 1]$ MHz. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει μιγαδικό σήμα (δεδομένου ότι το το φάσμα του αρχικού ζωνοπερατού σήματος δεν είναι, απαραιτήτως, συμμετρικό ως προς τα 3 MHz). Επομένως, παρόλο που μπορούμε να δειγματοληπτήσουμε με συχνότητα 2 MHz, το σήμα είναι μιγαδικό, δηλαδή χρειαζόμαστε 2 πραγματικές τιμές ανά δείγμα, με αποτέλεσμα να χρειαζόμαστε, και πάλι, 4×10^6 πραγματικές τιμές ανά s.