

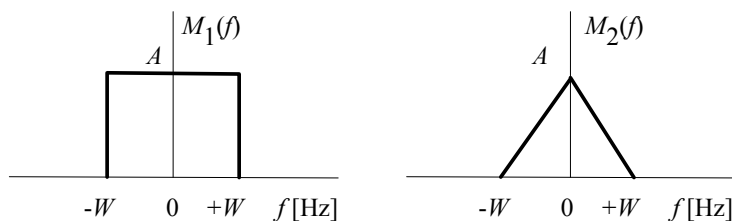
22Y604 - Συστήματα Επικοινωνιών

Ενδεικτικές λύσεις ασκήσεων επαναληπτικής εξέτασης Σεπτεμβρίου

1. Μετάδοση AM και εξοικονόμηση φάσματος (30 μονάδες)

Όπως είδαμε στο μάθημα, για να μεταδώσουμε ένα σήμα βασικής ζώνης με χρήση AM-DSB πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το διπλάσιο εύρος ζώνης από αυτό του σήματος. Στη συνέχεια, σας ζητείται να εξετάσετε δύο τρόπους με τους οποίους μπορούμε να εξοικονομήσουμε εύρος ζώνης.

Θα θεωρήσουμε ότι θέλουμε να μεταδώσουμε δύο *πραγματικά* σήματα πληροφορίας *βασιικής ζώνης* $m_1(t)$ και $m_2(t)$. Για διευκόλυνσή σας μπορείτε να υποθέσετε ότι τα σήματα είναι ντετερμινιστικά σήματα ενέργειας, με *πραγματικά* φάσματα $M_1(f)$ και $M_2(f)$ που δίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Φάσματα των σημάτων $m_1(t)$ και $m_2(t)$.

(α) (5 μονάδες)

Μπορεί ένα *πραγματικό* σήμα $m(t)$ να έχει αμιγώς πραγματικό μετασχηματισμό Fourier $M(f)$;

Αν ναι

- πότε; (δηλαδή, τι πρέπει να ισχύει για το σήμα;)
- ποια είναι τα σήματα $m_1(t)$ και $m_2(t)$ με τους μετασχηματισμούς Fourier του Σχήματος 1;

Απάντηση:

Ένα πραγματικό σήμα έχει πραγματικό μετασχηματισμό Fourier όταν είναι άρτιο. (Διαφάνειες 8 και 28, 4η εβδομάδα ή Proakis & Salehi 2.2.1 ή Παράδειγμα 2.9 Γ. Καραγιαννίδη) Ένας άλλος τρόπος να το δείτε είναι αναλύοντας το $e^{j2\pi ft}$ σε $\cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft)$. Για να είναι ο μετασχηματισμός Fourier πραγματικός πρέπει οι συντελεστές μπροστά από τους όρους $j \sin(2\pi ft)$ να ισούνται με 0 και, επομένως, το σήμα να είναι ολοκλήρωμα όρων της μορφής $\cos(2\pi f_c t)$ μόνο και, άρα, άρτιο.

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier,

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \Pi(f) \} = \text{sinc}(t) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} \left\{ A \Pi \left(\frac{f}{2W} \right) \right\} = 2W A \text{sinc}(2Wt)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \Lambda(f) \} = \text{sinc}^2(t) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} \left\{ A \Lambda \left(\frac{f}{W} \right) \right\} = W A \text{sinc}^2(Wt)$$

(β) (12 μονάδες)

Έστω ότι για τη μετάδοση διατίθεται η περιοχή συχνοτήτων $[f_c - W, f_c + W]$, $f_c \gg W$. Ένας τρόπος μετάδοσης και των δύο σημάτων στην περιοχή αυτή είναι διαμορφώνοντας το σήμα $m_1(t)$ κατά AM-LSSB και το σήμα $m_2(t)$ κατά AM-USSB.

Θα θεωρήσουμε ότι στη διαμόρφωση δε χρησιμοποιείται (μη διαμορφωμένη) φέρουσα και ότι ο δέκτης γνωρίζει επακριβώς τη συχνότητα f_c .

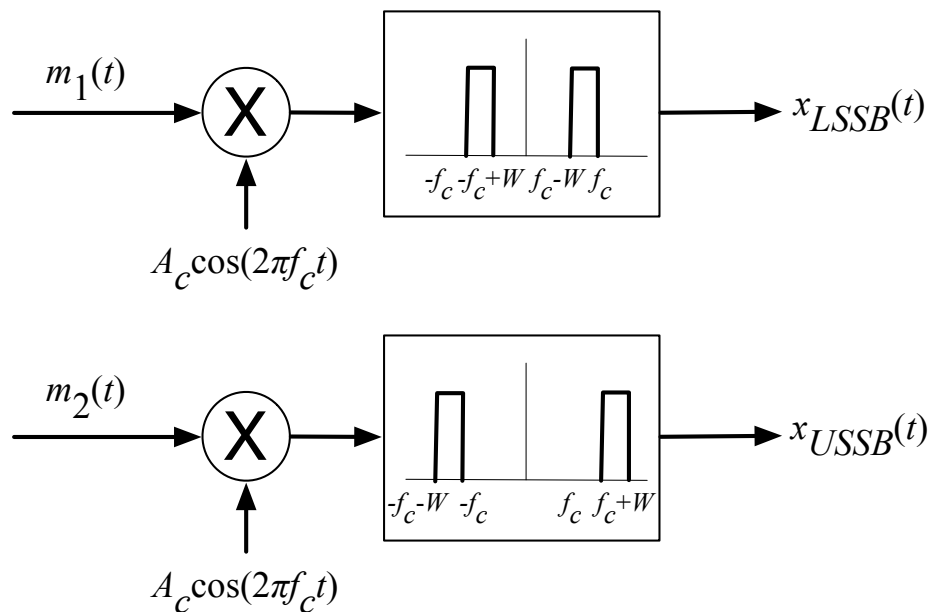
i. (4 μονάδες)

Σχεδιάστε τα δομικά διαγράμματα (block diagrams) των δύο διαμορφωτών (AM-LSSB και AM-USSB). Στα διαγράμματα θα πρέπει να σημειώσετε λεπτομερώς τις συχνότητες που χρησιμοποιούν οι ταλαντωτές, τις συχνότητες αποκοπής τυχόν φίλτρων κτλ. Μπορείτε να θεωρήσετε ότι διαθέτετε ιδανικά φίλτρα.

Απάντηση:

Από την υπόθεση ότι διαθέτουμε ιδανικά φίλτρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους διαμορφωτές του Σχήματος 2 (με βάση π.χ. το Σχήμα 3.9 του βιβλίου των Proakis & Salehi ή τη Διαφάνεια 15 της 7ης εβδομάδας). Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής f_c για τον πρώτο διαμορφωτή και υψιπερατό φίλτρο για το δεύτερο, αν και λόγω θορύβου είναι επιθυμητό το εύρος ζώνης του φίλτρου να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο.

Σωστές απαντήσεις με βάση το μετασχηματισμό Hilbert (π.χ. με βάση το Σχήμα 3.8 του βιβλίου των Proakis & Salehi) γίνονται, επίσης, δεκτές.



Σχήμα 2: Διαμορφωτές AM-LSSB και AM-USSB.

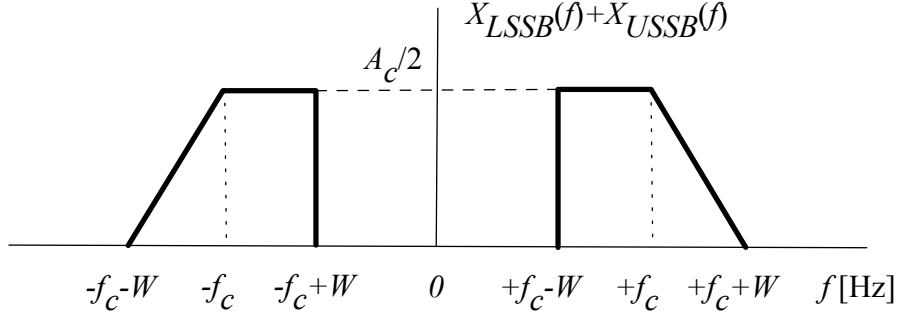
ii. (4 μονάδες)

Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος $x_{LSSB}(t) + x_{USSB}(t)$, όπου $x_{LSSB}(t)$ ($x_{USSB}(t)$) είναι το σήμα που προκύπτει από τη διαμόρφωση AM-LSSB (AM-USSB) του

$m_1(t)$ ($m_2(t)$). Αν μέρος του φάσματος είναι φανταστικό, χρησιμοποιήστε διακεκομμένη γραμμή.

Απάντηση:

Το φάσμα του σήματος $x_{LSSB}(t) + x_{USSB}(t)$ το οποίο είναι πραγματικό (αν χρησιμοποιηθούν πραγματικά φίλτρα στους διαμορφωτές) έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 3. Έχει υποτεθεί ότι τα κέρδη των φίλτρων του Σχήματος 2 είναι μοναδιαία.



Σχήμα 3: Φάσμα του σήματος $x_{LSSB}(t) + x_{USSB}(t)$.

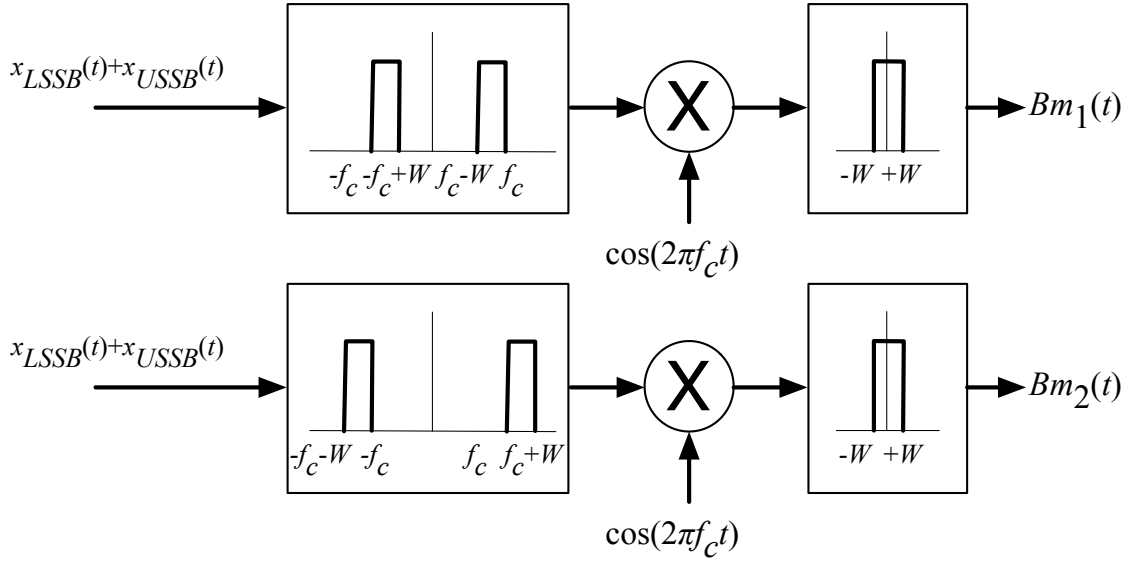
iii. (4 μονάδες)

Σχεδιάστε τα δομικά διαγράμματα (block diagrams) των δύο αποδιαμορφωτών. Η είσοδος του πρώτου αποδιαμορφωτή είναι το σήμα $x_{LSSB}(t) + x_{USSB}(t)$ και έξοδός του το σήμα $m_1(t)$. Αντιστοίχως, η είσοδος του δεύτερου αποδιαμορφωτή είναι το σήμα $x_{LSSB}(t) + x_{USSB}(t)$ και έξοδός του το σήμα $m_2(t)$. Και σε αυτήν την περίπτωση σημειώστε λεπτομερώς τις συχνότητες που χρησιμοποιούν οι ταλαντωτές, τις συχνότητες αποκοπής τυχόν φίλτρων κτλ. Μπορείτε να θεωρήσετε ότι διαθέτετε ιδανικά φίλτρα. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι θεωρούμε ότι οι δέκτες γνωρίζουν τη φέρουσα συχνότητα f_c .

Απάντηση:

Επειδή οι δέκτες γνωρίζουν την f_c , μπορούν να προβούν σε σύμφωνη αποδιαμόρφωση. Η αποδιαμόρφωση μπορεί να γίνει όπως και στην περίπτωση σημάτων AM-DSB, αφού, πρώτα, απομονωθεί το σήμα που ενδιαφέρει το δέκτη ($x_{LSSB}(t)$ ή $x_{USSB}(t)$). Τα δομικά διαγράμματα των αποδιαμορφωτών έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 4. Η μόνη διαφορά από τη Διαφάνεια 27 της 7ης εβδομάδας ή το Σχήμα 3.22 των Proakis & Salehi είναι ότι δε χρειαζόμαστε κύκλωμα εκτίμησης της f_c γιατί θεωρήσαμε ότι ο δέκτης τη γνωρίζει και ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε φίλτρο στην είσοδο του αποδιαμορφωτή για να απομονώσουμε το σήμα που μας ενδιαφέρει ($x_{LSSB}(t)$ ή $x_{USSB}(t)$).

Η τιμή της σταθεράς B εξαρτάται από τα κέρδη των φίλτρων. Αν τα κέρδη είναι μοναδιαία, $B = \frac{A_c}{4}$. Επίσης, δεν είναι απαραίτητο τα βαθυπερατά φίλτρα μετά τον ταλαντωτή να είναι ιδανικά. Αρκεί να είναι έχουν σταθερό μέτρο $|H(f)|$ και γραμμική φάση $\angle H(f)$ στο διάστημα $[-W, +W]$. Ωστόσο, είναι καλό να έχουν όσο γίνεται πιο στενό εύρος ζώνης ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο θόρυβος στην έξοδό τους.



Σχήμα 4: Αποδιαμορφωτές AM-LSSB και AM-USSB.

(γ) (13 μονάδες)

Έστω, τώρα, ότι διαμορφώνουμε τα δύο σήματα ως εξής:

$$x_1(t) = A_c m_1(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$x_2(t) = A_c m_2(t) \sin(2\pi f_c t)$$

i. (3 μονάδες)

Πόσο φάσμα καταλαμβάνει το κάθε σήμα $x_i(t)$, $i = 1, 2$; Είναι εφικτή η μετάδοση και των δύο σημάτων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ ταυτοχρόνως μέσα στο διαθέσιμο εύρος ζώνης $[f_c - W, f_c + W]$;

Υπόδειξη: Αν προτιμάτε, μπορείτε να απαντήσετε στο ερώτημα μέσω των απαντήσεών σας στα Ερωτήματα ii. και iii. που ακολουθούν.

Απάντηση:

Το Ερώτημα (γ) ήταν αυτούσιες οι διαφάνειες 21–24 της 6ης εβδομάδας διαλέξεων ή η πολυπλεξία QCM στην Ενότητα 4.6 του βιβλίου του Γ. Καραγιαννίδη (Σχήμα 4.40).

Το κάθε σήμα καταλαμβάνει όλο το εύρος ζώνης $[f_c - W, f_c + W]$. Ωστόσο, τα δύο σήματα $m_1(t)$ και $m_2(t)$ έχουν διαμορφωθεί με συναρτήσεις που είναι μεταξύ τους ορθογώνιες, δηλαδή μπορούμε να ανακτήσουμε το κάθε σήμα $m_i(t)$ χωρίς παρεμβολή από το άλλο σήμα $m_j(t)$, $j \neq i$. Οι λεπτομέρειες της αποδιαμόρφωσης αναλύονται στο Ερώτημα iii.

ii. (5 μονάδες)

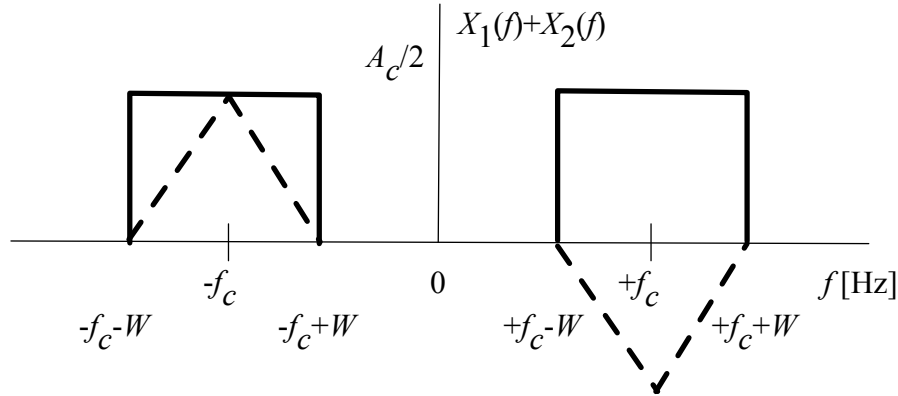
Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος $x_1(t) + x_2(t)$. Αν μέρος του φάσματος είναι φανταστικό, χρησιμοποιήστε διακεκομμένη γραμμή.

Απάντηση:

Το φάσμα του σήματος $x_1(t) + x_2(t)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 5. Έχει χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier, καθώς

και ο μετασχηματισμός Fourier του ημιτόνου

$$\sin(2\pi f_c t) \supset \frac{1}{2j} \{\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)\} = \frac{j}{2} \{\delta(f + f_c) - \delta(f - f_c)\}$$



Σχήμα 5: Φάσμα του σήματος $x_1(t) + x_2(t)$.

iii. (5 μονάδες)

Σχεδιάστε τα δομικά διαγράμματα (block diagrams) των δύο αποδιαμορφωτών. Η είσοδος του πρώτου αποδιαμορφωτή είναι το σήμα $x_1(t) + x_2(t)$ και έξοδός του το σήμα $m_1(t)$. Αντιστοίχως, η είσοδος του δεύτερου αποδιαμορφωτή είναι το σήμα $x_1(t) + x_2(t)$ και έξοδός του το σήμα $m_2(t)$. Και σε αυτήν την περίπτωση σημειώστε λεπτομερώς τις συχνότητες που χρησιμοποιούν οι ταλαντωτές, τις συχνότητες αποκοπής τυχόν φίλτρων κτλ.

Απάντηση:

$$x_1(t) + x_2(t) = A_c m_1(t) \cos(2\pi f_c t) + A_c m_2(t) \sin(2\pi f_c t).$$

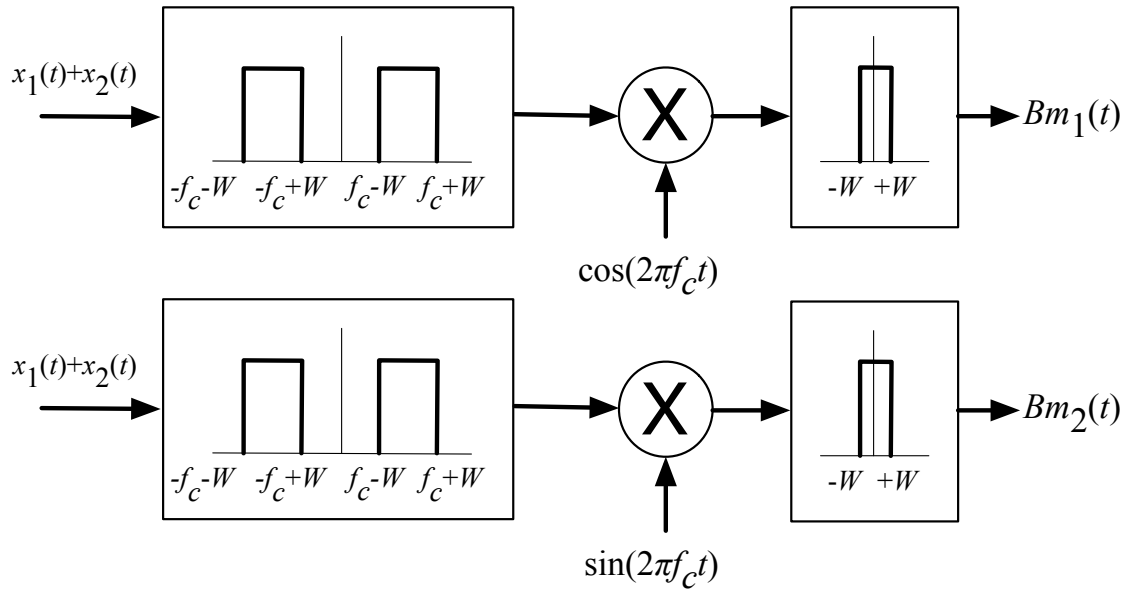
Στο πεδίο του χρόνου,

$$\begin{aligned} & (x_1(t) + x_2(t)) \cos(2\pi f_c t) \\ &= A_c m_1(t) \cos^2(2\pi f_c t) + A_c m_2(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) \\ &= \frac{A_c}{2} m_1(t) \frac{1 + \cos(4\pi f_c t)}{2} + \frac{A_c}{2} m_2(t) \sin(4\pi f_c t). \end{aligned}$$

Με χρήση βαθυπερατού φίλτρου μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα $\frac{A_c}{2} m_1(t)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.

Εναλλακτικά, αν δουλέψουμε στο πεδίο της συχνότητας, παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε το σήμα $x_1(t) + x_2(t)$ με $\cos(2\pi f_c t)$, οι δύο φανταστικές τριγωνικές νησίδες του Σχήματος 5 αναιρούνται στο διάστημα $[-W, +W]$ και παραμένει μόνο το φάσμα του $m_1(t)$. Οι νησίδες που δημιουργούνται γύρω από τις συχνότητες $\pm f_c$ απαλείφονται με χρήση βαθυπερατού φίλτρου.

Με ανάλογο τρόπο υλοποιείται και ο αποδιαμορφωτής για το $m_2(t)$.

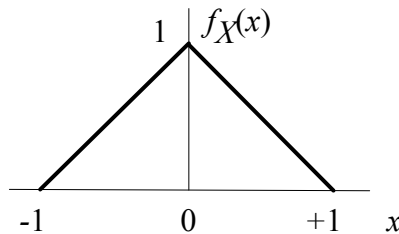


Σχήμα 6: Αποδιαμορφωτές για ορθογωνίως διαμορφωμένα σήματα AM-DSB.

2. Κβάντιση σήματος με τριγωνική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (30 μονάδες)

Επιθυμούμε να κβαντίσουμε στοχαστικό σήμα συνεχών τιμών διακριτού χρόνου X_n . Θεωρούμε ότι τα X_n είναι ανεξάρτητα και ομοίως κατανομημένα (i.i.d.) και ότι κάθε δείγμα X_n ακολουθεί την τριγωνική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) $f_{X_n}(x) = f_X(x)$ του Σχήματος 7.

Θα χρησιμοποιήσουμε κβαντιστή 4 επιπέδων (2 bits).



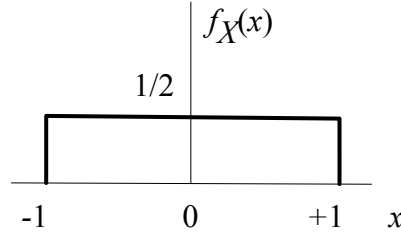
Σχήμα 7: σ.π.π των τιμών του σήματος που επιθυμούμε να κβαντίσουμε.

Θα δείξουμε, κατ' αρχάς, ότι αν χρησιμοποιήσουμε ομοιόμορφο κβαντιστή 4 επιπέδων, η μέση τετραγωνική παραμόρφωση των δειγμάτων ισούται με την περίπτωση που η κατανομή των X_n είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[-1, +1]$. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε αν μπορούμε να ελαττώσουμε τη μέση τετραγωνική παραμόρφωση με χρήση μη ομοιόμορφου κβαντιστή.

(α) (7 μονάδες)

Έστω ότι τα δείγματα X_n ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-1, +1]$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8. Δείξτε τις περιοχές κβάντισης και τα επίπεδα κβάντισης

$\hat{x}_i, i = 1, \dots, 4$ του ομοιόμορφου κβαντιστή 4 επιπέδων (3 μονάδες) και υπολογίστε τη μέση τετραγωνική παραμόρφωση $\mathbb{E} \left[(X - \hat{X})^2 \right]$, όπου $\hat{x} = q(x)$ η έξοδος του κβαντιστή σε είσοδο x (4 μονάδες).

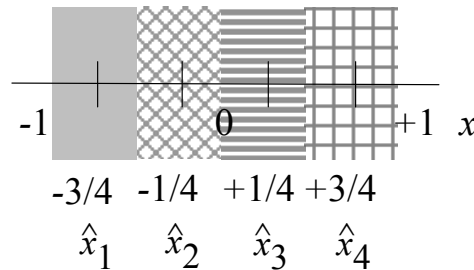


Σχήμα 8: Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-1, +1]$.

Απάντηση:

Οι περιοχές κβάντισης και τα επίπεδα κβάντισης έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 9. Η μέση τετραγωνική παραμόρφωση μπορεί να υπολογιστεί απευθείας με χρήση της σχέσης (Διαφάνεια 24, 12η εβδομάδα διαλέξεων ή βιβλίο Γ. Καραγιαννίδη, Σχέση 5.43)

$$\mathbb{E} \left[(X - \hat{X})^2 \right] = \frac{x_{\max}^2}{3 \cdot 2^{2\nu}} = \frac{1}{48}.$$



Σχήμα 9: Περιοχές και επίπεδα κβάντισης του ομοιόμορφου κβαντιστή 4 επιπέδων.

(β) (13 μονάδες)

Έστω, τώρα, ότι χρησιμοποιούμε τον ίδιο κβαντιστή με αυτόν του Ερωτήματος (α) (ομοιόμορφο, 4 επιπέδων) για να κβαντίσουμε το σήμα με δείγματα που ακολουθούν την τριγωνική σ.π.π. του Σχήματος 7. Δείξτε ότι η μέση τετραγωνική παραμόρφωση $\mathbb{E}[(X - \hat{X})^2]$ ισούται με αυτήν του Ερωτήματος (α).

Υπόδειξη: Παρατηρήστε, κατ' αρχάς, ότι μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία της κατανομής και του κβαντιστή γύρω από το 0:

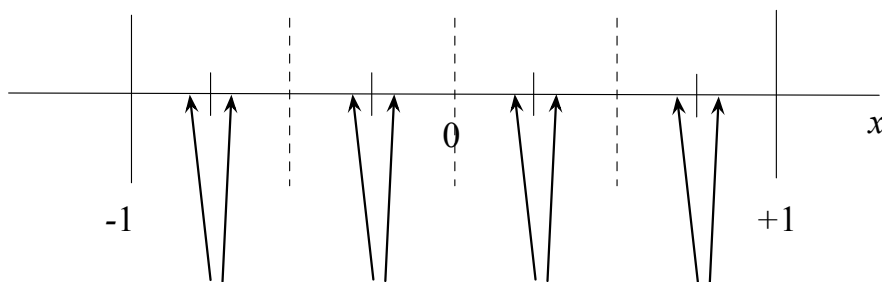
$$\mathbb{E} \left[(X - \hat{X})^2 \right] = \int_{-1}^{+1} f_X(x) (x - q(x))^2 dx = 2 \int_0^{+1} f_X(x) (x - q(x))^2 dx.$$

Ωστόσο, και πάλι, ο υπολογισμός της μέσης τετραγωνικής παραμόρφωσης με χρήση της παραπάνω σχέσης είναι αρκετά χρονοβόρος.

Αν προτιμάτε, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον παρακάτω, πιο γρήγορο τρόπο.

- Περιοριστείτε στο διάστημα $[0, +1]$.
- Βρείτε όλες τις τιμές $x \in [0, +1]$ που οδηγούν σε δεδομένη τετραγωνική παραμόρφωση, έστω y , δηλαδή $y = (x - q(x))^2$. Αν προτιμάτε, δεν είναι ανάγκη να εκφράσετε τις x συναρτήσει της y . Μπορείτε να τις σχεδιάσετε σε ένα σχήμα.
- Αθροίστε τις πυκνότητες πιθανότητας $f(x)$ όλων των x που οδηγούν σε αυτή τη δεδομένη τιμή, y . Δηλαδή, $g(y) = \sum_{x:(x-q(x))^2=y} f(x)$.
- Κάντε το ίδιο για την περίπτωση που η κατανομή της x είναι η ομοιόμορφη και δείξτε ότι η $g(y)$ είναι ίδια.
- Επομένως, η πυκνότητα πιθανότητας δεδομένης τετραγωνικής παραμόρφωσης είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις και, συνεπώς, και η τιμή του ολοκληρώματος $\mathbb{E} \left[\left(X - \hat{X} \right)^2 \right] = 2 \int_0^{+1} f_X(x) (x - q(x))^2 dx$ είναι ίδια.

Απάντηση:



Σχήμα 10: x για τα οποία $(x - q(x))^2 = y$.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 10 και στον Πίνακα 1, τα x που οδηγούν σε συγκεκριμένη τετραγωνική παραμόρφωση y είναι αυτά των οποίων η απόσταση από τα επίπεδα κβάντισης ισούται με \sqrt{y} . Λόγω συμμετρίας, επικεντρωνόμαστε μόνο στο διάστημα $[0, +1]$. Τα ίδια ισχύουν και για το διάστημα $[-1, 0]$.

x	τριγωνική $f_X(x)$	ομοιόμορφη $f_X(x)$
$\frac{1}{4} - \sqrt{y}$	$\frac{3}{4} + \sqrt{y}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4} + \sqrt{y}$	$\frac{3}{4} - \sqrt{y}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4} - \sqrt{y}$	$\frac{1}{4} + \sqrt{y}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4} + \sqrt{y}$	$\frac{1}{4} - \sqrt{y}$	$\frac{1}{2}$
Άθροισμα	2	2

Πίνακας 1: Τιμές των x για τα οποία $(x - q(x))^2 = y$ και αντίστοιχες τιμές της σ.π.π.

Αν αθροίσουμε τις σ.π.π. παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις το άθροισμα ισούται με 2. Επομένως, και τα ολοκληρώματα $2 \int_0^{+1} f_X(x) (x - q(x))^2 dx$ είναι ίδια.

Σημείωση: Γενικά χρειάζεται προσοχή όταν αλλάζουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης από x σε \sqrt{y} . Σε αυτήν την άσκηση αρκεί να αθροίσουμε τις σ.π.π. επειδή $\sqrt{y} = ax + b$ και $a = 1$.

Εναλλακτική λύση (από συνάδελφό σας!)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[(X - \hat{X})^2 \right] &= \int_{-1}^{+1} f_X(x) (x - q(x))^2 dx = 2 \int_0^{+1} f_X(x) (x - q(x))^2 dx \\
 &= 2 \int_0^{+\frac{1}{2}} (1-x) \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 dx + 2 \int_{+\frac{1}{2}}^{+1} (1-x) \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 dx \\
 &= 2 \int_0^{+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - x\right) \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 dx \\
 &\quad + 2 \int_{+\frac{1}{2}}^{+1} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - x\right) \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 dx \\
 &= -2 \int_0^{+\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{4}\right)^3 dx - 2 \int_{+\frac{1}{2}}^{+1} \left(x - \frac{3}{4}\right)^3 dx \\
 &\quad + 2 \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 dx + 2 \int_{+\frac{1}{2}}^{+1} \frac{1}{4} \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} +2 \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 dx + 2 \int_{+\frac{1}{2}}^{+1} \frac{1}{4} \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 dx \\
 &\stackrel{y=x-\frac{1}{4}, z=x-\frac{3}{4}}{=} +2 \int_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{4}} \frac{3}{4} y^2 dy + 2 \int_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{4}} \frac{1}{4} z^2 dz \\
 &= 2 \int_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{4}} z^2 dz = 2 \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{4}} = \frac{1}{48}.
 \end{aligned}$$

(a) λόγω συμμετρίας γύρω από το $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$, αντίστοιχα.

(γ) (10 μονάδες)

Τέλος, σας ζητείται να δείξετε ότι ο ομοιόμορφος κβαντιστής δεν είναι ο βέλτιστος κβαντιστής για την τριγωνική κατανομή του Σχήματος 7. Επομένως, μπορούμε να ελαττώσουμε τη μέση τετραγωνική παραμόρφωση σε σχέση με την τιμή του Ερωτήματος (α).

Κατ' αρχάς, λόγω της συμμετρίας, θα ασχοληθούμε και πάλι με το διάστημα $[0, +1]$. Επομένως, μας ενδιαφέρει το όριο μεταξύ των περιοχών κβάντισης το οποίο βρίσκεται στο διάστημα $(0, +1)$.

Εφαρμόστε το πρώτο βήμα του αλγορίθμου Lloyd-Max και δείξτε ότι το όριο, έστω a_3 , πρέπει να μετακινηθεί σε σχέση με την τιμή που έχει όταν ο κβαντιστής είναι ομοιόμορφος. Προς τα πού μετακινείται το a_3 ; Μπορείτε να εξηγήσετε διαισθητικά γιατί το a_3 μετακινείται προς αυτήν την κατεύθυνση;

Δε χρειάζεται να υπολογίσετε τη νέα τιμή της $\mathbb{E}[(X - \hat{X})^2]$.

Υπόδειξη: Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό δε χρειάζεται η απάντηση στο Ερώτημα (β). Σε αυτό το ερώτημα θα χρειαστούν κάποιες πράξεις. Χρησιμοποιήστε τις

σχέσεις της Διαφάνειας 30 της 12ης εβδομάδας για να υπολογίσετε τα δύο επίπεδα κβάντισης, έστω \hat{x}_3 και \hat{x}_4 , που βρίσκονται στο διάστημα $[0, +1]$. Στη συνέχεια, υπολογίστε τη νέα τιμή του ορίου a_3 (Διαφάνεια 29) και συγκρίνετε με την αρχική του τιμή (την οποία θέσαμε υποθέτοντας ομοιόμορφο κβαντιστή).

Απάντηση:

Αρχικά υπολογίζουμε τα \hat{x}_3 και \hat{x}_4 ως τα κέντρα βάρους των περιοχών κβάντισης $[0, +\frac{1}{2}]$ και $(+\frac{1}{2}, +1]$, αντιστοίχως.

$$\begin{aligned}\hat{x}_3 &= \frac{1}{\frac{(1+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{2}} \int_0^{+\frac{1}{2}} x(1-x)dx = \frac{8}{3} \int_0^{+\frac{1}{2}} (x-x^2)dx = \frac{8}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) = \frac{8}{3} \frac{1}{12} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_4 &= \frac{1}{\frac{\frac{1}{2}}{2}} \int_{+\frac{1}{2}}^{+1} x(1-x)dx = 8 \int_{+\frac{1}{2}}^{+1} (x-x^2)dx = 8 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{+\frac{1}{2}}^{+1} \\ &= 8 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η νέα τιμή του ορίου μεταξύ των περιοχών κβάντισης είναι η

$$a_3 = \frac{\hat{x}_3 + \hat{x}_4}{2} = \frac{1}{2} \frac{8}{9} = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}.$$

Επομένως, ο κβαντιστής με $a_3 = \frac{1}{2}$ δεν είναι βέλτιστος και το όριο μεταξύ των περιοχών απόφασης πρέπει να μετακινηθεί προς τα αριστερά.

Διαισθητικά ο λόγος είναι ο εξής: Η pdf της X αυξάνει καθώς πλησιάζουμε στο 0. Επομένως, είναι προτιμότερο να βελτιώσουμε την κβάντιση για τιμές της X κοντά στο 0 (δηλαδή να ελαττώσουμε το σφάλμα κβάντισης). Το σφάλμα κβάντισης θα αυξηθεί για τιμές της X μακριά από το 0, αλλά αυτές οι τιμές έχουν μικρότερη πιθανότητα. Το κέρδος από την καλύτερη κβάντιση κοντά στο 0 είναι μεγαλύτερο από την απώλεια λόγω χειρότερης κβάντισης μακριά από το 0.

Γενικά η εύρεση των ορίων των περιοχών κβάντισης και των επιπέδων κβάντισης σε κλειστή μορφή δεν είναι εύκολη. Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα επίπεδα κβάντισης ισούνται με $\pm \frac{a_3}{2}$ και $\pm \frac{1+a_3}{2}$. Η τιμή a_3 μπορεί να βρεθεί με αριθμητική επίλυση της εξίσωσης

$$\int_0^{a_3} (1-x) \left(x - \frac{a_3}{2} \right)^2 dx = \int_{a_3}^1 (1-x) \left(x - \frac{1+a_3}{2} \right)^2 dx$$

Προκύπτει ότι, για το βέλτιστο κβαντιστή, $a_3 \approx 0.38$.

3. Επανάληψη μετάδοσης (45 μονάδες)

Σε αυτή την άσκηση θα εξετάσουμε έναν απλό τρόπο για να βελτιώσουμε την αξιοπιστία της μετάδοσης μηνυμάτων με επανάληψη της μετάδοσης.

Θα θεωρήσουμε ότι θέλουμε να στείλουμε ένα από $M = 4$ μηνύματα (δηλαδή 2 bits). Υποθέτουμε κανάλι Λευκού Προσθετικού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN) δίπλευρης φασματικής πυκνότητας ισχύος $\frac{N_0}{2}$. Η μετάδοση πραγματοποιείται στη βασική ζώνη με χρήση διαμόρφωσης PAM. Ως βάση θα χρησιμοποιήσουμε τον (κανονικοποιημένο) τετραγωνικό παλμό διάρκειας T s.

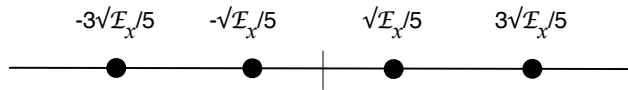
(α) (10 μονάδες)

Έστω ότι μεταδίδουμε το μήνυμα μία φορά και ότι για τη μετάδοση διαθέτουμε (μέση) ενέργεια \mathcal{E}_x .

(i) (5 μονάδες)

Σχεδιάστε τον αστερισμό PAM που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για τη μετάδοση 2 bits (4 μηνυμάτων). Στο σχήμα θα πρέπει να σημειώσετε τις ακριβείς θέσεις των σημάτων συναρτήσει της ενέργειας \mathcal{E}_x .

Απάντηση:



Σχήμα 11: Αστερισμός 4-PAM.

Ο αστερισμός έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 11. Για να βρούμε τις ακριβείς θέσεις των σημάτων πρέπει να υπολογίσουμε την ελάχιστη απόσταση του αστερισμού.

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{4} \left\{ 2 \left(\frac{d_{\min}}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{3d_{\min}}{2} \right)^2 \right\} = \frac{5d_{\min}^2}{4} \Rightarrow$$

$$d_{\min} = 2\sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{5}}.$$

Εναλλακτικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε απευθείας την έκφραση για τη d_{\min} του αστερισμού M -PAM στη Διαφάνεια 35 της 15ης εβδομάδας ή να επιλύσετε τη Σχέση 7.2.17 των Proakis & Salehi ως προς \mathcal{E}_g ή να χρησιμοποιήσετε τη Σχέση 7.15 του βιβλίου του Γ. Καραγιαννίδη.

(ii) (5 μονάδες)

Δώστε μια έκφραση για την πιθανότητα σφάλματος συμβόλου, P_e , συναρτήσει των \mathcal{E}_x και N_0 . Θεωρούμε ότι όλα τα μηνύματα είναι ισοπίθανα και ότι ο δέκτης είναι βέλτιστος.

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι, για μετάδοση PAM σε κανάλια AWGN (Διαφάνεια 37, 15η εβδομάδα ή Proakis & Salehi 7.6.33 ή Γ. Καραγιαννίδη 7.26),

$$P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{M} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{M^2 - 1} \frac{\mathcal{E}_x}{N_0/2}} \right).$$

Επομένως, για $M = 4$,

$$P_e = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_x}{5\mathcal{N}_0}}\right).$$

Προκειμένου να ελαττώσουμε την πιθανότητα σφάλματος, επαναλαμβάνουμε τη μετάδοση άλλη μία φορά. Θεωρούμε ότι η δεύτερη μετάδοση αρχίζει αμέσως μόλις τελειώσει η πρώτη (αν και τα αποτελέσματα εξακολουθούν να ισχύουν ακόμα και αν αυτό δεν ισχύει). Στη δεύτερη μετάδοση εκπέμπουμε το ίδιο σήμα με την πρώτη. Επίσης, για τη δεύτερη μετάδοση χρησιμοποιούμε την ίδια (μέση) ενέργεια με την πρώτη, δηλαδή η συνολική (μέση) ενέργεια είναι, τώρα, $2\mathcal{E}_x$.

(β) (10 μονάδες)

Θα υποθέσουμε, αρχικά, ότι ο δέκτης αποκωδικοποιεί ξεχωριστά το σύμβολο κάθε μετάδοσης (hard decoding). Επομένως, για να μην προκύψει σφάλμα πρέπει ο αποκωδικοποιητής να εκτιμήσει το ίδιο μήνυμα και στις δύο μεταδόσεις και το μήνυμα που εκτιμά να είναι το ίδιο με αυτό που έστειλε ο πομπός. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση θεωρούμε ότι η μετάδοση αποτυγχάνει (είτε λόγω σφάλματος το οποίο δεν αντιλαμβάνεται ο δέκτης ή λόγω αντικρουόμενων αποκωδικοποιημένων συμβόλων το οποίο αντιλαμβάνεται).

Υπολογίστε την πιθανότητα αποτυχίας μετάδοσης μηνύματος P_f και συγκρίνετε με την τιμή P_e του Ερωτήματος (α). Μπορείτε να θεωρήσετε ότι ο λόγος σήματος προς θόρυβο (SNR) είναι αρκετά μεγάλος και, επομένως, να αγνοήσετε όρους 2ης τάξης. *Υπόδειξη:* Είναι πιο εύκολο να εκφράσετε την P_f ως $P_f = 1 - P_c$, όπου P_c η πιθανότητα επιτυχούς μετάδοσης και να υπολογίσετε την P_c λαμβάνοντας υπόψη ότι οι τιμές του θορύβου σε κάθε μετάδοση είναι ανεξάρτητες. Επίσης, ενδέχεται η P_f σε αυτό το ερώτημα να είναι μεγαλύτερη από την P_e στο Ερώτημα (α).

Απάντηση:

$$\begin{aligned} P_c &= \Pr\{\text{πρώτη μετάδοση επιτυχής}\} \cdot \Pr\{\text{δεύτερη μετάδοση επιτυχής}\} = \\ &= P_{c,1} \cdot P_{c,2} = \\ &= (1 - P_{e,1})(1 - P_{e,2}) = \\ &= \left(1 - \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_x}{5\mathcal{N}_0}}\right)\right)^2 \\ &= 1 - 3Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_x}{5\mathcal{N}_0}}\right) + \left(Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_x}{5\mathcal{N}_0}}\right)\right)^2 \\ &\approx 1 - 3Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_x}{5\mathcal{N}_0}}\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$P_f \approx 3Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_x}{5\mathcal{N}_0}}\right),$$

διπλάσια από την πιθανότητα σφάλματος του Ερωτήματος (α)!

Τι συνέβη; Παρόλο που χρησιμοποιήσαμε διπλάσια ενέργεια, ζητήσαμε να συμφωνούν και οι δύο τιμές των αποκωδικοποιημένων μηνυμάτων. Παρόλο που η πιθανότητα να είναι και τα δύο αποκωδικοποιημένα μηνύματα λανθασμένα ελαττώνεται, η πιθανότητα τουλάχιστον ένα αποκωδικοποιημένο μήνυμα να είναι λανθασμένο αυξάνει όσο περισσότερες φορές εκπέμπουμε το ίδιο σύμβολο. Το πρόβλημα με τη μέθοδο hard decoding είναι ότι ακόμα και αν το σήμα που λαμβάνουμε στο δέκτη είναι κοντά στο όριο της περιοχής απόφασης (και, επομένως, είναι αναξιόπιστο) το αποκωδικοποιημένο μήνυμα συμμετέχει στη λήψη της τελικής απόφασης με την ίδια βαρύτητα με την περίπτωση σήματος που βρίσκεται πολύ κοντά σε σημείο του αστερισμού. Δηλαδή χάνουμε την (soft) πληροφορία σχετικά με το πόσο αξιόπιστο είναι το σύμβολο y που λαμβάνουμε στο δέκτη.

Γενικά, παρόλο που η χρήση hard decoding είναι υποβέλτιστη, η επανάληψη μετάδοσης σε συνδυασμό με χρήση hard decoding οδηγεί σε ελάττωση της πιθανότητας σφάλματος, αλλά χρειαζόμαστε τουλάχιστον 3 μεταδόσεις ώστε να μπορούμε να αποφασίσουμε κατά πλειοψηφία (majority decoding).

(γ) (10 μονάδες)

Θεωρήστε, τώρα, τον εξής τρόπο αποκωδικοποίησης (ο οποίος αποδεικνύεται ότι είναι βέλτιστος). Αφού και τις δύο φορές στέλνουμε το ίδιο σύμβολο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι χρησιμοποιούμε PAM με παλμούς διπλάσιας διάρκειας (και διπλάσιας ενέργειας) σε σχέση με το Ερώτημα (α), αλλά με τον ίδιο αριθμό μηνυμάτων $M = 4$. Επομένως, σχεδιάζουμε ένα δέκτη που αποκωδικοποιεί υποθέτοντας μία χρήση του καναλιού για μετάδοση με παλμούς PAM διπλάσιας διάρκειας και διπλάσιας μέσης ενέργειας.

Με βάση τα παραπάνω υπολογίστε την πιθανότητα σφάλματος αποκωδικοποίησης μηνύματος στο δέκτη. Συγκρίνετε με την απάντησή σας στο Ερώτημα (α).

Απάντηση:

Ο αστερισμός εξαρτάται μόνο από την ενέργεια και όχι από τη διάρκεια των σημάτων. Επομένως, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση για την πιθανότητα σφάλματος του αστερισμού 4-PAM με ενέργεια $2\mathcal{E}_x$.

$$P_e = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{4\mathcal{E}_x}{5\mathcal{N}_0}}\right).$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα σφάλματος ελαττώνεται. Ισοδύναμα, ο SNR στο δέκτη διπλασιάζεται.

(δ) (12 μονάδες)

Ένας άλλος, επίσης ισοδύναμος, τρόπος αποκωδικοποίησης (soft decoding) είναι ο εξής: Έστω ότι χρησιμοποιούμε τον απόδιαμορφωτή του Ερωτήματος (α). Στο τέλος κάθε μετάδοσης, i , η έξοδος του αποδιαμορφωτή ισούται με $y_i = x + n_i$, $i = 1, 2$. Σχηματίζουμε το σήμα $y = y_1 + y_2$ και το στέλνουμε στον αποκωδικοποιητή (που έχει σχεδιαστεί για μετάδοση όπως στο Ερώτημα (α)). Συγκρίνετε το λόγο σήματος προς θόρυβο (SNR) του y με τον SNR των y_1 και y_2 . Τι συμπεραίνετε; Τι συνεπάγεται αυτό για την πιθανότητα σφάλματος; (9 μονάδες)

Υπόδειξη: Υπενθυμίζεται ότι ο SNR στο δέκτη ορίζεται ως ο λόγος της μέσης ενέργειας του *χρήσιμου* σήματος στο δέκτη ως προς τη μέση ενέργεια του θορύβου στο δέκτη. Επίσης, $\mathbb{E}[n_1 \cdot n_2] = 0$.

Μπορείτε να γενικεύσετε για την περίπτωση που η μετάδοση επαναλαμβάνεται L φορές; (3 μονάδες)

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι $y_i = x + n_i$. Επομένως,

$$y = 2x + n_1 + n_2.$$

Ο SNR ισούται με

$$\frac{\mathbb{E}[4x^2]}{\mathbb{E}[(n_1 + n_2)^2]} \stackrel{(a)}{=} \frac{\mathbb{E}[4x^2]}{\mathbb{E}[n_1^2] + \mathbb{E}[n_2^2]} = \frac{4\mathcal{E}_x}{2\sigma^2} = 2\frac{\mathcal{E}_x}{\sigma^2}.$$

$$(a) \mathbb{E}[n_1 \cdot n_2] = 0$$

Επομένως, η χρήση soft decoding διπλασιάζει τον SNR στο δέκτη. Αυτό συμβαίνει γιατί το κομμάτι του σήματος προστίθεται με σύμφωνο τρόπο (coherently), ενώ ο θόρυβος με ασύμφωνο τρόπο (non-coherently). Ένας άλλος, πιο διαισθητικός τρόπος, είναι να παρατηρήσετε ότι, καθώς $L \rightarrow \infty$, από το νόμο των μεγάλων αριθμών $\frac{1}{L}(n_1 + n_2 + \dots + n_L) \rightarrow \mathbb{E}[n] = 0$ και, επομένως, $\frac{y}{L} = x + \frac{1}{L} \sum n_l \rightarrow x$.

Στην περίπτωση που η μετάδοση επαναλαμβάνεται L φορές, ο SNR αυξάνει κατά παράγοντα L και, συνεπώς,

$$P_e = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2L\mathcal{E}_x}{5\mathcal{N}_0}}\right) = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{L}\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_x}{5\mathcal{N}_0}}\right).$$

(ε) (3 μονάδες)

Όποια και αν ήταν η απάντησή σας στα Ερωτήματα (β)–(δ), από την άποψη της αξιοπιστίας δε χάνουμε κάτι γιατί, ακόμα και αν η επανάληψη της μετάδοσης οδηγεί σε μεγαλύτερη πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με το Ερώτημα (α) μπορούμε να αγνοήσουμε μία από τις δύο μεταδόσεις. Υπάρχουν αρνητικές επιπτώσεις στο σύστημα από την επανάληψη της μετάδοσης;

Απάντηση:

Χρειαζόμαστε διπλάσια ενέργεια για τη μετάδοση του μηνύματος. Ισοδύναμα, για να στείλουμε 2 bits χρησιμοποιούμε το κανάλι 2 φορές. Επομένως, μεταδίδουμε 1 bit/χρήση του καναλιού, δηλαδή ο ρυθμός μετάδοσης ελαττώνεται.

Όσο μικρότερη θέλουμε να γίνει η πιθανότητα σφάλματος τόσο μικραίνει ο ρυθμός μετάδοσης (και τείνει στο 0 για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων L). Υπάρχει τρόπος να επιτύχουμε *αυθαίρετα* μικρή πιθανότητα σφάλματος για ρυθμό μετάδοσης $R > c > 0$; Ναι, αλλά ο τρόπος δεν είναι προφανής (απαιτείται κωδικοποίηση στον πομπό).