22Y604 - Συστήματα Επικοινωνιών
Ενδεικτικές λύσεις τελικής εξέτασης

Σημείωση: Οι λύσεις είναι προσωρινές και ενδέχεται να περιέχουν παροράματα. Οι τελικές λύσεις θα σας δοθούν όταν ανακοινωθούν οι βαθμοί.

1. **Διαμόρφωση AM (25 μονάδες)**

   Σε αυτή την άσκηση θα εξετάσουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή διαμόρφωσης ενός σήματος AM από την περιβάλλουσά του.

   Θα υποθέσουμε ότι το σήμα πληροφορίας $m(t)$ είναι συμμετρικό και κανονικοποιημένο έτσι ώστε $\max\{m(t)\} = |\min\{m(t)\}| = 1$.

   Το διαμορφωμένο σήμα δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = A_c\,[1 + \mu m(t)] \cos(2\pi f_c t).$$

   Θέλουμε να υπολογίσουμε το μ από την περιβάλλουσα του $x(t)$.

(α) **(10 μονάδες)**

Θεωρούμε, αρχικά, ότι το σήμα $x(t)$ είναι *υποδιαμορφωμένο*, ότι, δηλαδή, $\mu < 1$.

Εάν A είναι η μέγιστη και B η ελάχιστη (θετική) τιμή της περιβάλλουσας, αντίστοιχα, εκφράστε το μ συναρτήσει των A και B **(7 μονάδες)**.

Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα για να υπολογίσετε το μ για το $x_1(t)$ του Σχήματος 1(α). Επίσης, σημειώστε τα A και B επάνω στο σχήμα **(3 μονάδες)**.

Υποθέτουμε ότι στο παράθυρο παρατήρησης που μας έχει δοθεί εμφανίζονται η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της περιβάλλουσας, δηλαδή ότι έχουν συμπεριληφθεί τιμές του t για τις οποίες $m(t) = \max\{m(t)\} = +1$ και $m(t) = \min\{m(t)\} = -1$. Δε χρειάζεται να βρείτε τις ακριβείς τιμές των A και B. Μία καλή προσέγγιση με βάση το σχήμα αρκεί.

Απάντηση:

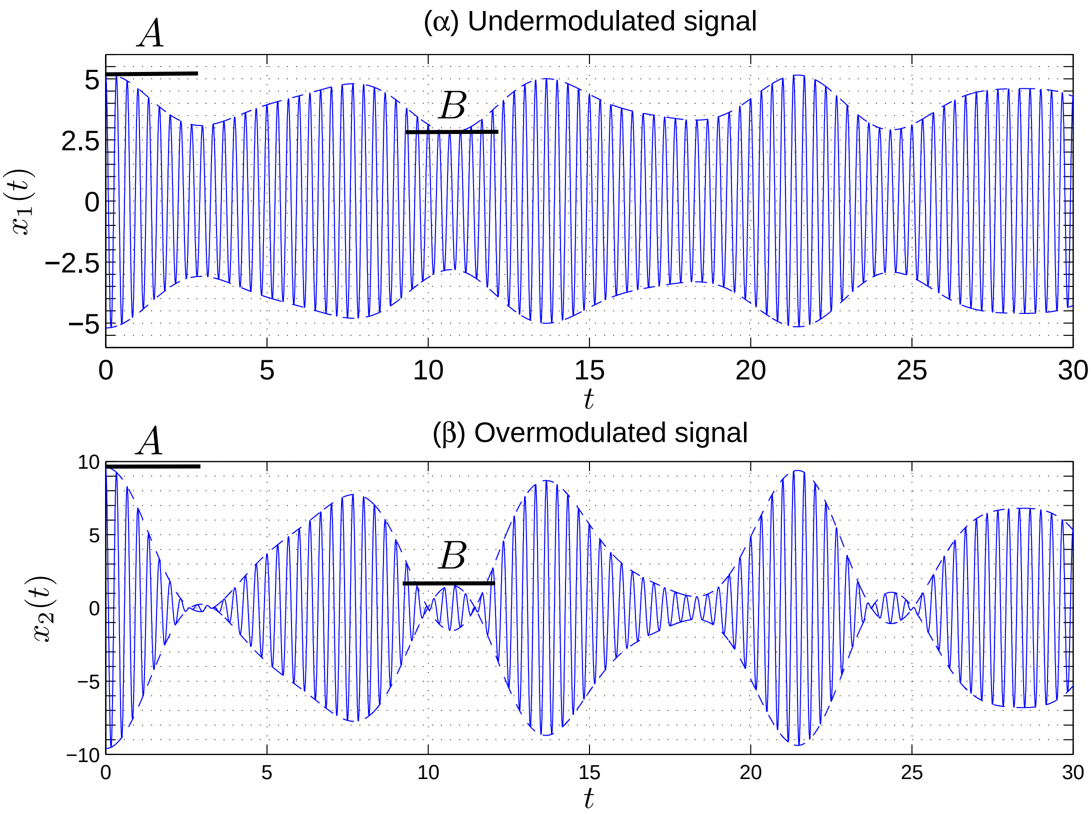
Η μέγιστη τιμή της περιβάλλουσας ισούται με $A = A_c[1+\mu]$, ενώ η ελάχιστη με $B = A_c[1-\mu]$.

Επομένως,

$$\frac{A}{B} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \Rightarrow \mu = \frac{A-B}{A+B}.$$

Για το σήμα $x_1(t)$ του Σχήματος 1(α), $A \approx 5.2$ και $B \approx 2.8$. Επομένως,

$$\mu \approx \frac{5.2-2.8}{5.2+2.8} = \frac{1}{3}.$$



Σχήμα 1: Σήματα AM.

Παρατήρηση: Πολλοί χρησιμοποίησαν τη σχέση (4.9) του βιβλίου του Γ. Καραγιαννίδη:

$$\mu \triangleq \frac{|\min\{m(t)\}|}{A_c}.$$

Ωστόσο, η (4.9) ισχύει όταν το σήμα γράφεται στη μορφή (4.6)

$$x(t) = [A_c + m(t)]\cos(2\pi f_c t)$$

και όχι στη μορφή που δινόταν στην άσκηση. Όπως πολύ σωστά αναφέρεται στο βιβλίο του Γ. Καραγιαννίδη, "*ως δείκτης διαμόρφωσης ορίζεται ο λόγος της απόλυτης ελάχιστης τιμής του σήματος πληροφορίας προς το πλάτος του φέροντος*". Όταν

$$x(t) = A_c\,[1 + \mu m(t)]\cos(2\pi f_c t),$$

και $\min\{m(t)\} = -1$ η απόλυτη ελάχιστη τιμή του σήματος πληροφορίας ισούται με $A_c\mu$. Επομένως, ο δείκτης διαμόρφωσης ισούται με μ και όχι με $\frac{1}{A_c}$. Η έκφραση

$$x(t) = A_c\,[1 + \mu m(t)]\cos(2\pi f_c t),$$

δόθηκε σε αυτή τη μορφή για να σας διευκολύνει.

(β) **(10 μονάδες)**

Βρείτε μία έκφραση για την περίπτωση που το σήμα είναι *υπερδιαμορφωμένο*, δηλαδή $\mu > 1$.

Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί. Θα υποθέσουμε, και πάλι, ότι οι $\max\{m(t)\}$ και $\min\{m(t)\}$ που αντιστοιχούν στο A και στο B, αντίστοιχα, εμφανίζονται στο παράθυρο παρατήρησης. Ωστόσο, το B δεν είναι, πλέον, η ελάχιστη (θετική) τιμή της περιβάλλουσας. Η ελάχιστη (θετική) τιμή είναι το 0.

Δείξτε, κατ' αρχάς, ότι $A > B$. Επομένως, το A είναι το μέγιστο της περιβάλλουσας. *Προσοχή:* Η περιβάλλουσα είναι πάντοτε **μη** αρνητική ποσότητα. **(2 μονάδες)**

Εκφράστε, τώρα, το μ συναρτήσει των A και B. **(5 μονάδες)**

Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα για να υπολογίσετε (προσεγγιστικά) το μ για το $x_2(t)$ του Σχήματος 1(β). Επίσης, σημειώστε τα A και B επάνω στο σχήμα. Παρατηρήστε ότι το A είναι το μέγιστο της περιβάλλουσας και είναι αυστηρώς μεγαλύτερο από το B. Για να βρούμε το B πρέπει να βρούμε το μέγιστο της περιβάλλουσας μεταξύ όλων των τοπικών μεγίστων τα οποία χωρίζονται από το A με *περιττό* αριθμό μηδενισμών της περιβάλλουσας. **(3 μονάδες)**

Απάντηση:

Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, $A = A_c[1+\mu]$. Ωστόσο, $B = A_c\,|1-\mu| = A_c[\mu - 1]$, δεδομένου ότι $\mu > 1$.

Για οποιοδήποτε $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu + 1 > \mu - 1$. Επομένως, $A > B$.

Τέλος, με παρόμοιο τρόπο όπως και στο Ερώτημα (α),

$$\frac{A}{B} = \frac{1+\mu}{\mu-1} \Rightarrow \mu = \frac{A+B}{A-B}.$$

Για το σήμα $x_2(t)$ του Σχήματος 1(β), $A \approx 9.6$ και $B \approx 1.5$. Επομένως,

$$\mu \approx \frac{9.6+1.5}{9.6-1.5} \approx 1.4.$$

(γ) **(5 μονάδες)**

Θεωρούμε, και πάλι, ότι το $x(t)$ είναι *υποδιαμορφωμένο*, δηλαδή $\mu < 1$. Ωστόσο, αυτή τη φορά δε γνωρίζουμε αν το $m(t)$ παίρνει τις τιμές $\max\{m(t)\}$ ή/και $\min\{m(t)\}$. Δηλαδή, ενδέχεται πάντοτε $m(t) < +1$ ή/και $m(t) > -1$. Ισοδύναμα, μπορείτε να θεωρήσετε ότι δε γνωρίζουμε τις τιμές των $\max\{m(t)\}$ και $\min\{m(t)\}$ (αλλά γνωρίζουμε ότι βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[-1, +1]$).

Υπολογίστε ένα *κάτω* φράγμα, μ_{LB}, για την τιμή του μ.

Απάντηση:

$$\begin{aligned} 0 < A &= A_c[1 + \mu \max\{m(t)\}] \leq A_c[1+\mu] \\ B &= A_c[1 + \mu \min\{m(t)\}] \geq A_c[1-\mu] > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{B} \leq \frac{1}{A_c[1-\mu]} \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο εκφράσεις,

$$\frac{A}{B} \leq \frac{1+\mu}{1-\mu} \Rightarrow \mu \geq \frac{A-B}{A+B} = \mu_{\text{LB}}.$$

Διαισθητικά, υπάρχει περίπτωση το "πραγματικό" A να είναι ακόμα μεγαλύτερο από την τιμή που παρατηρούμε (οπότε η πραγματική τιμή του μ να είναι ακόμα μεγαλύτερη, δεδομένου ότι $\frac{\partial}{\partial A}\frac{A-B}{A+B} = \frac{2B}{(A+B)^2} > 0$ για όλα τα $A > 0$ και $B > 0$) ή το "πραγματικό" B να είναι ακόμα μικρότερο (οπότε η πραγματική τιμή του μ να είναι ακόμα μεγαλύτερη, δεδομένου ότι $\frac{\partial}{\partial B}\frac{A-B}{A+B} = -\frac{2A}{(A+B)^2} < 0$ για όλα τα $A > 0$ και $B > 0$).

Ένας άλλος τρόπος που χρησιμοποίησαν αρκετοί είναι ο εξής: Έστω c το $\max\{m(t)\}$ που βρίσκεται στο παράθυρο παρατήρησης και d το $\min\{m(t)\}$ που βρίσκεται στο παράθυρο παρατήρησης. Προφανώς, $c \leq +1$ και $d \geq -1$. $A = A_c[1+\mu c]$ και $B = A_c[1+\mu d]$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{1+\mu c}{1+\mu d} \Rightarrow \\ A + A\mu d &= B + B\mu c \Rightarrow \\ \mu(Bc - Ad) &= A - B \Rightarrow \\ \mu &= \frac{A-B}{Bc-Ad}.\end{aligned}$$

Το μ ελαχιστοποιείται όταν $c = \max\{c\} = +1$ και $d = \min\{d\} = -1$. Επομένως, $\mu \geq \frac{A-B}{A+B}$.

2. **Καλύτερη Κβάντιση ή Καλύτερη Δειγματοληψία; (35 μονάδες)**

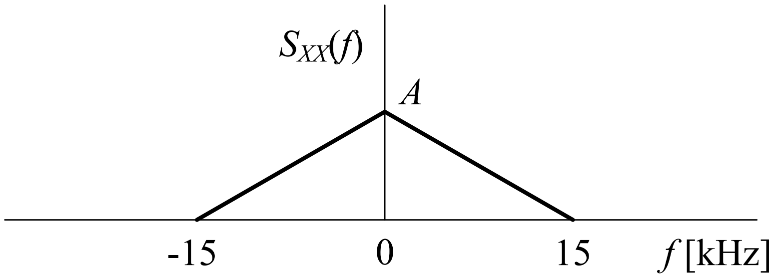
   Σε αυτό το πρόβλημα θα συγκρίνουμε δύο προσεγγίσεις για τη μετάδοση ενός σήματος ήχου με όσο το δυνατόν μεγαλύτερο λόγο σήματος προς θόρυβο (SNR). Συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε ένα σήμα με φασματική πυκνότητα ισύχος τριγωνικής μορφής. Θα εξετάσουμε αν είναι προτιμότερο να δειγματοληπτήσουμε το σήμα όσο μπορούμε πιο γρήγορα ή αν, αντιθέτως, είναι προτιμότερο να κβαντίσουμε με όσο το δυνατόν περισσότερα bits και να ελαττώσουμε το ρυθμό δειγματοληψίας.

   Θεωρούμε ένα *τυχαίο* σήμα ήχου βασικής ζώνης $X(t)$, με τη φασματική πυκνότητα ισχύος τριγωνικής μορφής του Σχήματος 2. Θεωρούμε ότι, εκτός από το τυχαίο σήμα $X(t)$, δεν υπάρχει θόρυβος.

   Θέλουμε να μεταδώσουμε το $X(t)$ σε ένα κανάλι με ρυθμό μετάδοσης $R = 420$ kbits/s. Οι λεπτομέρειες της μετάδοσης στο κανάλι δε μας ενδιαφέρουν σε αυτή την άσκηση. Θα υποθέσουμε, απλώς, ότι *δεν* μπορούμε να μεταδώσουμε περισσότερα από $R = 420$ kbits/s.

   (α) **(3 μονάδες)**

   Βρείτε την *ελάχιστη* συχνότητα δειγματοληψίας, f_s, που απαιτείται ώστε να μπορούμε να ανακατασκευάσουμε επακριβώς το σήμα $X(t)$ από τα δείγματά του στην περίπτωση που *δεν* κβαντίζουμε τα δείγματα. Σημειώνεται ότι, επειδή



Σχήμα 2: Φασματική Πυκνότητα Ισχύος, $S_{XX}(f)$ του σήματος ήχου $X(t)$.

το $X(t)$ είναι τυχαίο, επακριβώς εδώ σημαίνει ότι $\mathbb{E}\left[(X(t) - X_r(t))^2\right] = 0$, όπου $X_r(t)$ είναι το σήμα που ανακατασκευάζεται από τα δείγματα του $X(t)$.

Υποθέτουμε ομοιόμορφη δειγματοληψία.

Απάντηση:

Επειδή η μεγαλύτερη συχνότητα για την οποία $S_{XX}(f) \neq 0$ είναι η $|f| = 15$ kHz, η ελάχιστη συχνότητα με την οποία μπορούμε να δειγματοληπτήσουμε είναι η συχνότητα Nyquist $f_s = 30$ kHz.

(β) **(4 μονάδες)**

Έστω ότι δειγματοληπτούμε το σήμα ομοιόμορφα με τη συχνότητα $f_s = \frac{1}{T_s}$ του Ερωτήματος (α) και, στη συνέχεια, το κβαντίζουμε με χρήση *ομοιόμορφου* κβαντιστή 2^ν επιπέδων. Να βρεθεί ο αριθμός, ν, των bits που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για την κβάντιση έτσι ώστε

- Να μεγιστοποιείται ο SQNR του σήματος στην έξοδο του κβαντιστή.
- Να μπορούμε να μεταδώσουμε το κβαντισμένο σήμα που προκύπτει στο κανάλι με $R = 420$ kbits/s.

Χρησιμοποιούμε τον ίδιο αριθμό bits, ν, για την κβάντιση κάθε δείγματος $X(nT_s)$.

Απάντηση:

Μετά τη δειγματοληψία προκύπτουν 30 ksamples/s. Εάν ν είναι ο αριθμός των bits που χρησιμοποιούμε για να κβαντίσουμε κάθε δείγμα, θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το μεγαλύτερο ν που ικανοποιεί τη σχέση

$$30\nu \leq R = 420 \Rightarrow \nu \leq 14 \text{ bits}.$$

Επομένως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κβαντιστή $\nu_{\max} = 14$ bits ή $2^{14} = 16 \times 1024 = 16384$ επιπέδων.

(γ) **(4 μονάδες)**

Εάν υποθέσουμε, επίσης, ότι τα δείγματα της $X(t)$ ακολουθούν *ομοιόμορφη* κατανομή, να υπολογιστεί (σε dB) ο SQNR που αντιστοιχεί στον κβαντιστή του Ερωτήματος (β).

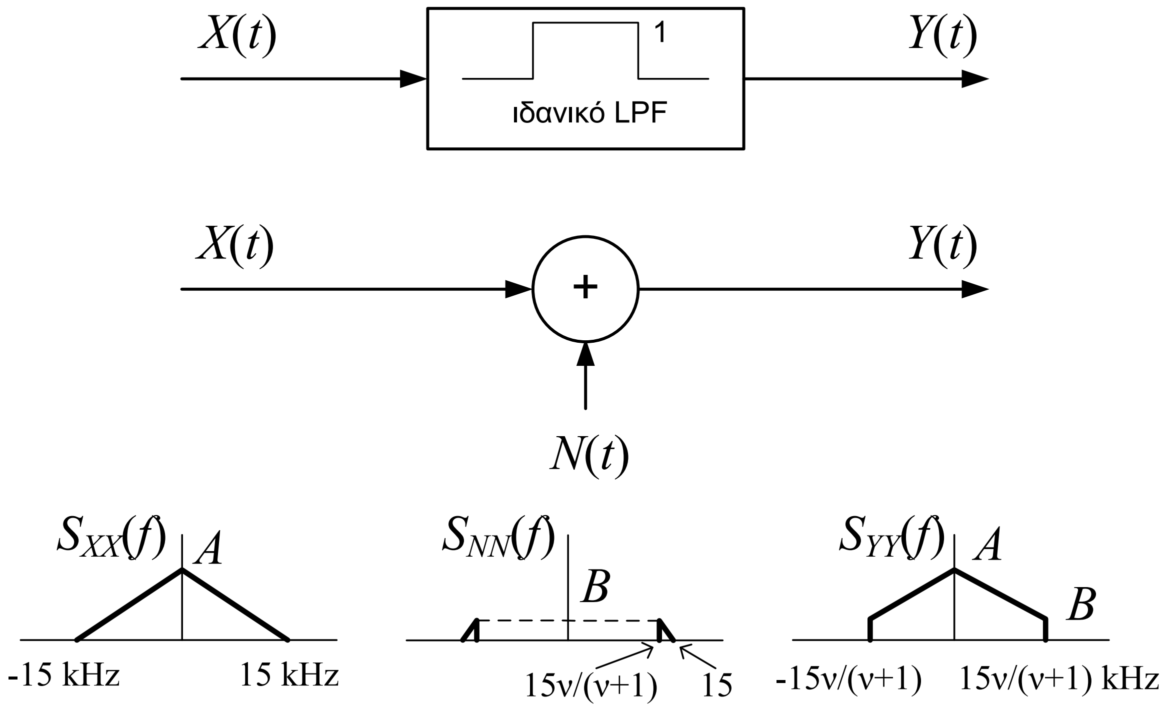
Απάντηση:

Εάν τα δείγματα της $X(t)$ ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή και ο κβαντιστής είναι ομοιόμορφος, γνωρίζουμε ότι

$$\mathsf{SQNR} \approx 6\nu \text{ dB} = 84 \text{ dB}.$$

Θέλουμε, τώρα, να διερευνήσουμε αν για το σήμα $X(t)$ με τη *συγκεκριμένη* Φασματική Πυκνότητα Ισχύος $S_{XX}(f)$ του Σχήματος 2 είναι προτιμότερο να κβαντίσουμε κάθε δείγμα του με περισσότερα bits από αυτά που υπολογίσατε στο Ερώτημα (β). Ωστόσο, προκειμένου να μην υπερβούμε το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, R, του καναλιού, πρέπει να δειγματοληπτήσουμε με συχνότητα μικρότερη από την f_s.

Μια ιδέα είναι η εξής: Με χρήση *ιδανικού* βαθυπερατού φίλτρου, αποκόπτουμε μέρος των υψηλών συχνοτήτων του $X(t)$ έτσι ώστε η νέα μέγιστη συχνότητα για την οποία $S_{XX}(f) \neq 0$ να είναι η $\frac{\nu}{\nu+1}15$ kHz. Στη συνέχεια θα κβαντίσουμε με $\nu + 1$ bits. Με αυτόν τον τρόπο διατηρείται σταθερός ο αριθμός bits που παράγουμε κάθε δευτερόλεπτο.



Σχήμα 3: Αποκοπή μέρους του φάσματος του $X(t)$.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την επίδραση του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου στο σήμα $X(t)$ ως πρόσθεση ενός σήματος θορύβου $N(t)$ τέτοιο ώστε το σήμα εξόδου $Y(t)$ να έχει τη φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{YY}(f)$ του Σχήματος 3: $Y(t) = X(t) + N(t)$. Το σήμα $N(t)$ είναι τυχαίο, αλλά ντετερμινιστική συνάρτηση του $X(t)$: $N(t) = (\delta(t) - h(t)) * X(t)$, όπου $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του φίλτρου του Σχήματος 3. Επίσης, το $N(t)$ είναι ανεξάρτητο από το $Y(t)$. Αυτά δε θα μας απασχολήσουν εδώ. Επίσης, στο Σχήμα 3 έχει υποτεθεί, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το κέρδος του φίλτρου είναι ίσο με 1.

Επειδή το $X(t)$ είναι το αρχικό σήμα πληροφορίας και $Y(t)$ είναι το σήμα στην έξοδο του φίλτρου, ο λόγος σήματος προς θόρυβο στην έξοδο του φίλτρου, *πριν* τη δειγματοληψία ισούται με

$$\mathsf{SNR}_1 = \frac{\mathcal{P}_X}{\mathcal{P}_N} = \frac{\mathcal{P}_X}{\mathbb{E}\left[(N(t))^2\right]} = \frac{\mathcal{P}_X}{\mathbb{E}\left[(X(t) - Y(t))^2\right]}.$$

(δ) **(15 μονάδες)**

Υπολογίστε τον SNR_1 για την τιμή του ν που βρήκατε στο Ερώτημα (β). Εάν δεν έχετε λύσει το Ερώτημα (β) υποθέστε μία τιμή για το ν, π.χ. $\nu = 9$ bits.

Παρατηρήστε ότι ακόμη δεν έχουμε κβαντίσει το σήμα $Y(t)$, ούτε το έχουμε δειγματοληπτήσει.

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί, δίνεται ότι $\log_{10} 3 \approx 0.48$ και $\log_{10} 5 \approx 0.7$.

Σημείωση: Ο SNR_1 θα πρέπει να δοθεί σε dB και να μην περιέχει καμία άγνωστη παράμετρο. Επομένως, θα πρέπει να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου B (συναρτήσει του A).

Απάντηση:

$$\mathcal{P}_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)df = \frac{1}{2}15 \cdot 10^3 \times 2 \times A = 15A \cdot 10^3.$$

Ένας άλλος τρόπος που χρησιμοποίησαν κάποιοι είναι ο υπολογισμός της $R_{XX}(0)$:

$$\begin{aligned} R_{XX}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{S_{XX}(f)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{A \cdot \Lambda\left(\frac{f}{15 \cdot 10^3}\right)\right\} \\ &= 15A \cdot 10^3 \mathrm{sinc}^2\left(15 \cdot 10^3 t\right). \end{aligned}$$

Επομένως, $\mathcal{P}_X = R_{XX}(0) = 15A \cdot 10^3$.

Για να υπολογίσουμε την $\mathcal{P}_N$ παρατηρούμε, κατ' αρχάς, ότι η συχνότητα αποκοπής f_0 ισούται με $f_0 = \frac{14}{15}15 = 14$ kHz. Για να βρούμε το ύψος B εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή:

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{15} \Rightarrow B = \frac{A}{15}.$$

Επομένως,

$$\mathcal{P}_N = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{NN}(f)df = 2 \times \frac{1}{2}1 \cdot 10^3 \times \frac{A}{15} = \frac{A}{15} \cdot 10^3.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \mathsf{SNR}_1 &= \frac{\mathcal{P}_X}{\mathcal{P}_N} = \frac{15A}{\frac{A}{15}} = 15^2 \\ &= 10\log_{10}\left(15^2\right) \text{ dB} = 20\log_{10} 15 \text{ dB} = 20\log_{10} 3 + 20\log_{10} 5 \text{ dB} \\ &\approx 20 \cdot (0.48 + 0.7) = 23.6 \text{ dB}. \end{aligned}$$

(ε) **(4 μονάδες)**

Έστω, τώρα, ότι δειγματοληπτούμε το $Y(t)$ με την *ελάχιστη* συχνότητα που απαιτείται ώστε να μπορούμε να το ανακτήσουμε επακριβώς στο δέκτη και ότι, στη συνέχεια, το κβαντίζουμε με χρήση $\nu + 1$ bits ανά δείγμα (χρησιμοποιούμε την τιμή του ν που βρήκατε στο Ερώτημα (β)). Αν $Y_{r,Q}(t)$ είναι το σήμα συνεχούς χρόνου που ανακατασκευάζεται με χρήση των *κβαντισμένων* δειγμάτων του $Y(t)$, εξηγήστε γιατί

$$\mathsf{SNR}_2 \triangleq \frac{\mathcal{P}_X}{\mathcal{P}_{N'}} = \frac{\mathcal{P}_X}{\mathbb{E}\left[(X(t) - Y_{r,Q}(t))^2\right]} < \frac{\mathcal{P}_X}{\mathbb{E}\left[(X(t) - Y(t))^2\right]} = \mathsf{SNR}_1.$$

Επομένως, μπορούμε να φράξουμε τον SNR_2 ως $\mathsf{SNR}_2 < \mathsf{SNR}_1$.

Δε χρειάζεται να δώσετε μαθηματικώς αυστηρή απόδειξη, απλώς να εξηγήσετε γιατί ισχύει η ανισότητα.

Απάντηση:

Λόγω της κβάντισης, $\mathbb{E}\left[(X(t) - Y_{r,Q}(t))^2\right] > \mathbb{E}\left[(X(t) - Y(t))^2\right]$. Επομένως, $\mathsf{SNR}_2 < \mathsf{SNR}_1$.

Πιο αυστηρά,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X(t) - Y_{r,Q}(t))^2\right] &= \mathbb{E}\left[(X(t) - Y(t) + Y(t) - Y_{r,Q}(t))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X(t) - Y(t))^2\right] + \mathbb{E}\left[(Y(t) - Y_{r,Q}(t))^2\right] \\
&+ 2\mathbb{E}\left[(X(t) - Y(t))(Y(t) - Y_{r,Q}(t))\right] \\
&\overset{(a)}{=} \mathbb{E}\left[(X(t) - Y(t))^2\right] + \mathbb{E}\left[(Y(t) - Y_{r,Q}(t))^2\right] \\
&> \mathbb{E}\left[(X(t) - Y(t))^2\right].
\end{aligned}$$

Ο θόρυβος $X(t) - Y(t)$ είναι ανεξάρτητος του σήματος $Y(t) - Y_{r,Q}(t)$ το φάσμα του οποίου δεν υπερβαίνει τα 14 kHz.

(στ) **(5 μονάδες)**

Με βάση τον SQNR που υπολογίσατε στο Ερώτημα (γ) και το άνω φράγμα για τον SNR_2 του Ερωτήματος (ε) συγκρίνετε τις δύο προσεγγίσεις. Ποια είναι προτιμότερη;

Μπορείτε να υποθέσετε ότι ο SNR του ανακατασκευασμένου σήματος στην πρώτη περίπτωση (που δεν αποκόπτουμε συχνότητες) ισούται με τον SQNR, δηλαδή ότι

$$\mathsf{SNR} = \frac{\mathcal{P}_X}{\mathbb{E}\left[(X(t) - X_{r,Q}(t))^2\right]} = \mathsf{SQNR},$$

όπου $X_{r,Q}(t)$ το σήμα που ανακατασκευάζεται από τα *κβαντισμένα* δείγματα του $X(t)$ (δειγματοληπτημένο με την f_s του Ερωτήματος (α)).

Απάντηση:

Εάν αποκόψουμε τις υψηλές συχνότητες του σήματος, ο SNR δε θα υπερβεί τα 23.6 dB. Στην πρώτη περίπτωση, ο SNR ισούται με 84 dB. Επομένως, είναι προτιμότερο να κρατήσουμε όλες τις συχνότητες και η παραμόρφωση του σήματος να οφείλεται αποκλειστικά στον κβαντιστή.

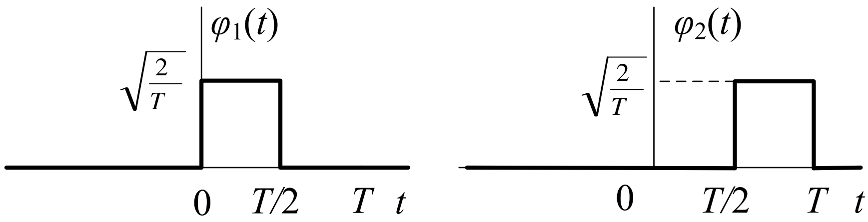
Το συμπέρασμα που βγάλαμε εξαρτάται από τη μορφή της PSD και ενδέχεται να μην ισχύει αν η PSD έχει άλλη μορφή (αν, για παράδειγμα, η ισχύς στις συχνότητες $f > 14$ kHz είναι πολύ λιγότερη σε σχέση με τις υπόλοιπες συχνότητες).

Επίσης, παρόλο που στην άσκηση αυτή χρησιμοποιήθηκε ο SNR ως κριτήριο για να επιλέξουμε πώς θα κβαντίσουμε το σήμα, στη γενική περίπτωση ενδέχεται να πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άλλα κριτήρια. Για παράδειγμα, ενδέχεται απώλεια χρήσιμου σήματος στις υψηλές συχνότητες να είναι λιγότερο ενοχλητική για τον ακροατή από την απώλεια ακρίβειας περιγραφής του σήματος στις χαμηλές συχνότητες. Σε μερικές περιπτώσεις για τη σχεδίαση του συστήματος απαιτείται, μεταξύ άλλων, η διενέργεια υποκειμενικών τεστ με ειδικούς και μη ειδικούς ακροατές.

3. **Επίδραση απόκλισης χρονισμού στη μετάδοση (55 μονάδες)**

Στην άσκηση αυτή θα μελετήσουμε την επίδραση της απόκλισης χρονισμού (timing offset) στην πιθανότητα σφάλματος ενός ψηφιακού συστήματος $M = 4$ μηνυμάτων για τη μετάδοση των οποίων χρησιμοποιείται γραμμική διαμόρφωση $N = 2$ διαστάσεων.

Το ψηφιακό σύστημα χρησιμοποιεί τις βάσεις του Σχήματος 4 για τη μετάδοση.



Σχήμα 4: Συναρτήσεις βάσης για το γραμμικό διαμορφωτή 2 διαστάσεων.

Τα σήματα του αστερισμού είναι τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

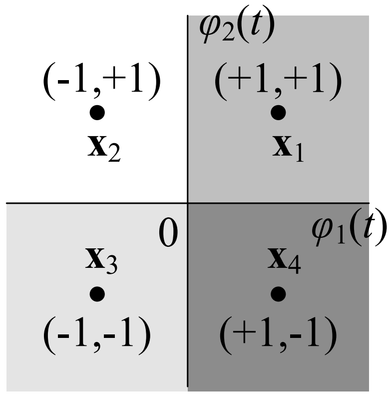
(α) **(5 μονάδες)**

Σχεδιάστε τον αστερισμό στο $\mathbb{R}^2$. Επίσης, στο σχήμα σας σημειώστε τις περιοχές απόφασης που χρησιμοποιεί ο *βέλτιστος* δέκτης για να αποκωδικοποιήσει το σήμα στην έξοδο του αποδιαμορφωτή.

Θεωρούμε ότι η μετάδοση γίνεται σε κανάλι AWGN και ότι τα $x_m(t)$, $m = 1, \ldots, 4$ μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Ο αστερισμός και οι περιοχές απόφασης έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 5.

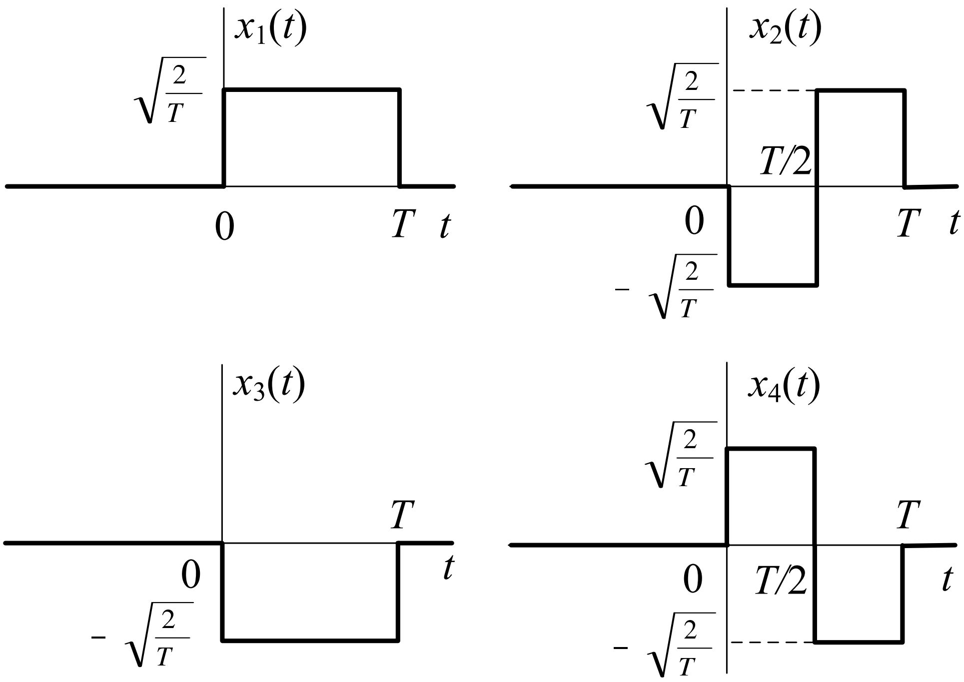


Σχήμα 5: Αστερισμός και περιοχές απόφασης.

(β) **(5 μονάδες)**

Δώστε εκφράσεις για τα σήματα (συνεχούς χρόνου) $x_m(t)$, $m = 1, \ldots, 4$ που αποστέλλονται στο κανάλι ή σχεδιάστε τα.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$
Τα σήματα σχεδιάζονται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6: Τα μεταδιδόμενα σήματα.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι ο δέκτης δεν εκτιμά σωστά το χρόνο άφιξης των σημάτων. Συγκεκριμένα, αντί ο αποδιαμορφωτής να συσχετίσει το σήμα που λαμβάνει με τις $\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$, το συσχετίζει με τις $\phi_1(t-\tau)$ και $\phi_2(t-\tau)$, $0 < \tau < \frac{T}{4}$. Δηλαδή, τα σήματα φτάνουν στο δέκτη τ s ενωρίτερα από ό,τι νομίζει ο δέκτης.

(γ) **(5 μονάδες)**
Αποτελούν οι $\phi_1(t-\tau)$ και $\phi_2(t-\tau)$ ορθοκανονική βάση; Αν ναι, αποτελούν βάση του υποχώρου στον οποίο ανήκουν τα $x_m(t)$, $m = 1, \ldots, 4$;
$\boxed{\text{Απάντηση:}}$
Ναι, αποτελούν βάση, επειδή το μέτρο της καθεμίας ισούται με 1 και είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.
Ωστόσο, δεν αποτελούν βάση του υποχώρου στον οποίο ανήκουν τα $x_m(t)$, επειδή δεν αρκούν για να εκφράσουμε τα $x_m(t)$ συναρτήσει τους.

(δ) **(17 μονάδες)**
Έστω, αρχικά, ότι δεν υπάρχει θόρυβος στο κανάλι. Δηλαδή, ο δέκτης λαμβάνει ένα από τα $x_m(t)$, $m = 1, \ldots, 4$. Ο δέκτης χρησιμοποιεί αποδιαμορφωτή συσχέτισης με τις $\phi_1(t-\tau)$ και $\phi_2(t-\tau)$ (επειδή νομίζει – εσφαλμένα – ότι τα σήματα φτάνουν τ s αργότερα από την πραγματικότητα).
Εάν $\tilde{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{m,1} \\ \tilde{x}_{m,2} \end{bmatrix}$ είναι η έξοδος του αποδιαμορφωτή που χρησιμοποιεί τις $\phi_1(t-\tau)$ και $\phi_2(t-\tau)$ όταν η είσοδος είναι το σήμα $x_m(t)$, $m = 1, \ldots, 4$, βρείτε τις τιμές των $\tilde{\mathbf{x}}_m$ **(14 μονάδες)** και σχεδιάστε τα στο $\mathbb{R}^2$ **(2 μονάδες)**.

Υποθέστε ότι χρησιμοποιούμε το σύστημα για να μεταδώσουμε μόνο μία φορά (δηλαδή δε στέλνουμε σύμβολα διαδοχικά στο κανάλι).

Τι παρατηρείτε; **(1 μονάδα)**

Σημείωση: Η απάντησή σας θα περιέχει ως παραμέτρους τα T και τ (ή, ακόμα καλύτερα, το λόγο $\alpha = \frac{\tau}{T}$). Υπενθυμίζεται ότι έχουμε υποθέσει ότι $0 < \tau < \frac{T}{4}$. Επομένως, $0 < \alpha < \frac{1}{4}$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Επειδή $x_m(t) = x_{m,1}\phi_1(t) + x_{m,2}\phi_2(t)$, υπολογίζουμε τα αποτελέσματα των συσχετίσεων $\int \phi_k(t)\phi_l(t-\tau)dt$.

$$\begin{aligned}
\int \phi_1(t)\phi_1(t-\tau)dt &= \int_{\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T}dt = 1 - \frac{2\tau}{T} = 1 - 2\alpha \\
\int \phi_2(t)\phi_1(t-\tau)dt &= \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+\tau} \frac{2}{T}dt = \frac{2\tau}{T} = 2\alpha \\
\int \phi_1(t)\phi_2(t-\tau)dt &= 0 \\
\int \phi_2(t)\phi_2(t-\tau)dt &= \int_{\frac{T}{2}+\tau}^{T} \frac{2}{T}dt = 1 - \frac{2\tau}{T} = 1 - 2\alpha
\end{aligned}$$

Επομένως,

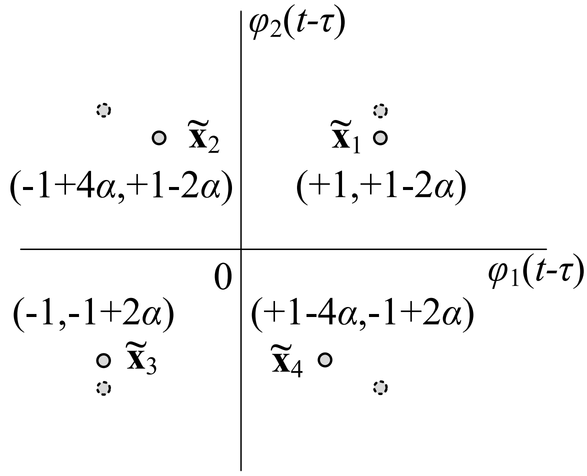
$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{m,1} &= \int x_m(t)\phi_1(t-\tau)dt \\
&= \int \left(x_{m,1}\phi_1(t) + x_{m,2}\phi_2(t)\right)\phi_1(t-\tau)dt = (1-2\alpha)x_{m,1} + 2\alpha x_{m,2} \\
\tilde{x}_{m,2} &= \int x_m(t)\phi_2(t-\tau)dt = \int \left(x_{m,1}\phi_1(t) + x_{m,2}\phi_2(t)\right)\phi_2(t-\tau)dt = (1-2\alpha)x_{m,2} \\
\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_m &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_{m,1} \\ \tilde{x}_{m,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2\alpha)x_{m,1} + 2\alpha x_{m,2} \\ (1-2\alpha)x_{m,2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 1-2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m,1} \\ x_{m,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 1-2\alpha \end{bmatrix} \mathbf{x}_m.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας με τις τιμές των $\mathbf{x}_i$,

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1-2\alpha \end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} -1+4\alpha \\ +1-2\alpha \end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1+2\alpha \end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{x}}_4 = \begin{bmatrix} +1-4\alpha \\ -1+2\alpha \end{bmatrix}$$

Τα $\tilde{\mathbf{x}}_m$ έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 7. Με διακεκομμένη γραμμή έχουν σχεδιαστεί τα $\mathbf{x}_m$.

Παρατηρούμε ότι η απόσταση των σημείων του αστερισμού από τα όρια των περιοχών απόφασης έχει ελαττωθεί. Αυτό σημαίνει ότι αυξάνεται η ευαισθησία στο θόρυβο, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Παρατηρούμε, επίσης, ότι τα $\tilde{\mathbf{x}}_2$ και $\tilde{\mathbf{x}}_4$ είναι πιο ευαίσθητα στο θόρυβο σε σχέση με τα $\tilde{\mathbf{x}}_1$ και $\tilde{\mathbf{x}}_3$ γιατί βρίσκονται πιο κοντά στα όρια των περιοχών απόφασης.



Σχήμα 7: Ο αστερισμός στην έξοδο του αποδιαμορφωτή του δέκτη.

Σημείωση: Εναλλακτικά μπορείτε να βρείτε τα $\tilde{\mathbf{x}}_1$ συσχετίζοντας τις κυματομορφές $x_i(t)$ που σχεδιάσατε στο Ερώτημα (β) απευθείας με τις $\phi_1(t-\tau)$ και $\phi_2(t-\tau)$. Επίσης, μπορείτε να εκμεταλλευτείτε το γεγονός ότι $\mathbf{x}_3 = -\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_4 = -\mathbf{x}_2$ για να αποφύγετε τον υπολογισμό των $\mathbf{x}_3$ και $\mathbf{x}_4$.

(ε) **(3 μονάδες)**

Έστω, τώρα, ότι συνυπολογίζουμε και την επίδραση του θορύβου. Δηλαδή, το σήμα στο δέκτη (στην είσοδο του αποδιαμορφωτή) ισούται με $y(t) = x_m(t) + n(t)$.

Εάν ο $n(t)$ είναι AWGN με (δίπλευρη) φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{NN}(f) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}$, τι κατανομή ακολουθούν τα $\tilde{n}_1$ και $\tilde{n}_2$ στις εξόδους του αποδιαμορφωτή (που χρησιμοποιεί τις $\phi_1(t-\tau)$ και $\phi_2(t-\tau)$); Είναι τα $\tilde{n}_1$ και $\tilde{n}_2$ ανεξάρτητα μεταξύ τους;

Υπόδειξη: Μπορείτε να απαντήσετε γρήγορα αν χρησιμοποιήσετε την απάντηση του Ερωτήματος (γ).

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Επειδή τα $\phi_1(t-\tau)$ και $\phi_2(t-\tau)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση και επειδή ο θόρυβος $n(t)$ είναι AWGN, τα $\tilde{n}_1$ και $\tilde{n}_2$ είναι ανεξάρτητα και το καθένα ακολουθεί κανονική κατανομή μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς $\frac{\mathcal{N}_0}{2}$: $\tilde{n}_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\right)$ και $\tilde{n}_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\right)$.

(στ) **(10 μονάδες)**

Υπολογίστε το NNUB για την πιθανότητα σφάλματος συμβόλου στο δέκτη αν τα $\mathbf{x}_m$ αποστέλλονται με την ίδια πιθανότητα από τον πομπό και ο δέκτης χρησιμοποιεί αποκωδικοποιητή μέγιστης πιθανοφάνειας (ML). Αν προτιμάτε, μπορείτε να δώσετε την ακριβή έκφραση για την πιθανότητα σφάλματος.

Η απάντησή σας θα πρέπει να περιέχει τα α και σ ως παραμέτρους.

Προσοχή: Ο δέκτης δε γνωρίζει το πρόβλημα με το χρονισμό, οπότε σχεδιάζει τον αποκωδικοποιητή ML υποθέτοντας ότι τα σήματα φτάνουν στο δέκτη τ s ενωρίτερα σε σχέση με την πραγματικότητα. Δηλαδή, χρησιμοποιεί τις περιοχές απόφασης που βρήκατε στο Ερώτημα (α). Για εμάς που γνωρίζουμε το τ, ο αποκωδικοποιητής δεν είναι ML, αλλά ο δέκτης που δε γνωρίζει ότι $\tau \neq 0$ νομίζει ότι είναι.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το NNUB. Οι περιοχές απόφασης είναι τα τεταρτημόρια, γιατί ο δέκτης δε γνωρίζει ότι τα $\mathbf{x}_m$ έχουν μετατοπιστεί. Παρατηρούμε ότι κάθε σύμβολο $\tilde{\mathbf{x}}_i$ περικλείεται από 2 όρια περιοχών απόφασης. Για τα $\tilde{\mathbf{x}}_1$ και $\tilde{\mathbf{x}}_3$ τα όρια βρίσκονται σε απόσταση $1-2\alpha$ και 1, ενώ για τα $\tilde{\mathbf{x}}_2$ και $\tilde{\mathbf{x}}_4$ σε απόσταση $1-4\alpha$ και $1-2\alpha$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{4}\sum_m P_{e|\mathbf{x}=\mathbf{x}_m} \\ &\overset{\text{NNUB}}{<} \frac{1}{4}\left[2\left(Q\left(\frac{1-2\alpha}{\sigma}\right)+Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)+2\left(Q\left(\frac{1-4\alpha}{\sigma}\right)+Q\left(\frac{1-2\alpha}{\sigma}\right)\right)\right] \\ &\overset{(a)}{<} \frac{1}{4}\left[2\cdot 2Q\left(\frac{1-4\alpha}{\sigma}\right)+2\cdot 2Q\left(\frac{1-4\alpha}{\sigma}\right)\right] = 2Q\left(\frac{1-4\alpha}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

(a) η $Q(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του x και $\alpha > 0$.

Παρατηρούμε ότι η έλλειψη τέλειου συγχρονισμού έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου.

Διαισθητικά, ο λόγος είναι ο εξής: Ενώ τα σήματα ανήκουν στον υπόχωρο που αναπτύσσεται από τις $\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$, εμείς προβάλλουμε το σήμα σε έναν άλλο υπόχωρο, ο οποίος αναπτύσσεται από τις $\phi_1(t-\tau)$ και $\phi_2(t-\tau)$. Οι υπόχωροι αυτοί δεν ταυτίζονται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μέρος του χρήσιμου σήματος να χαθεί (αν το τ ήταν πολύ μεγάλο θα χάναμε όλο το σήμα). Ωστόσο, επειδή ο θόρυβος είναι AWGN, η προβολή του σε οποιονδήποτε υπόχωρο διάστασης $N = 2$ έχει την ίδια μέση ενέργεια. Επομένως, ενώ η μέση ενέργεια του θορύβου παραμένει η ίδια, η ενέργεια του χρήσιμου σήματος ελαττώνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αυξάνει η πιθανότητα σφάλματος. Η πιθανότητα σφάλματος αυξάνει συναρτήσει του α. Όσο λιγότερο χρήσιμο σήμα "συλλέγει" ο δέκτης (ή, ισοδύναμα, όσο απομακρύνονται οι υπόχωροι μεταξύ τους), τόσο μεγαλώνει η πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα στην εκτίμηση του συμβόλου στο δέκτη.

Μπορούμε, επίσης, να υπολογίσουμε ακριβώς την πιθανότητα σφάλματος όπως κάναμε και στην περίπτωση της QPSK στο μάθημα, εκφράζοντας την πιθανότητα σφάλματος για κάθε σύμβολο ως $P_{e|\mathbf{x}=\mathbf{x}_m} = 1 - P_{c|\mathbf{x}=\mathbf{x}_m} = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{d_{x,m}}{\sigma}\right)\right)\cdot \left(1 - Q\left(\frac{d_{y,m}}{\sigma}\right)\right)$. Οι $d_{x,m}$ και $d_{x,m}$ είναι οι αποστάσεις του $\tilde{\mathbf{x}}_m$ από τους άξονες (όχι οι αποστάσεις του από τους γείτονες).

Στις επόμενες ερωτήσεις δώστε γρήγορες (αλλά αιτιολογημένες) απαντήσεις. Δε χρειάζεται να αποδείξετε κάτι με μαθηματικό τρόπο.

(ζ) **(5 μονάδες)**

Αλλάζει η πιθανότητα σφάλματος αν αυξήσουμε την ενέργεια με την οποία στέλνουμε τα $\mathbf{x}_m$; Αν, δηλαδή, στέλνουμε $\mathbf{x}'_m = c\mathbf{x}_m$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 1$; **(3 μονάδες)**

Αλλάζουν οι περιοχές απόφασης στο δέκτη; **(2 μονάδες)**

Υποθέτουμε ότι το τ είναι το ίδιο με τα προηγούμενα ερωτήματα (και *άγνωστο* στο δέκτη).

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Ναι. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε είτε από τις εκφράσεις για την πιθανότητα σφάλματος (ο αριθμητής αυξάνει) ή από το Σχήμα 7 (ο αστερισμός ''διαστέλλεται'', οπότε τα $\tilde{\mathbf{x}}_i$ απομακρύνονται από τους άξονες.

Οι περιοχές απόφασης δεν αλλάζουν γιατί ο αστερισμός που αναμένει (εσφαλμένα) ο δέκτης εξακολουθεί να ένα τετράγωνο με κέντρο στην αρχή των αξόνων.

(η) **(5 μονάδες)**

Σε αντίθεση με την υπόθεση που κάναμε έως τώρα ότι μεταδίδουμε μόνο μία φορά, αν η μετάδοση επαναληφθεί (πάρα) πολλές φορές και $0 < \tau < \frac{T}{4}$ θα καταλάβει κάποια στιγμή ο δέκτης ότι $\tau \neq 0$;

Αν ναι, υπάρχει τρόπος να εκτιμήσει την τιμή του τ προκειμένου να ανακτήσει το (σωστό) συγχρονισμό μετακινώντας τις $\phi_1(t-\tau)$ και $\phi_2(t-\tau)$ στη σωστή τους θέση ($\phi_1(t)$ και $\phi_2(t)$);

Σημείωση: Υποθέτουμε ότι ο δέκτης *δε* γνωρίζει τη διασπορά, σ^2, του θορύβου.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Από το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών, στο όριο (αν μεταδώσουμε πάρα πολλά σύμβολα) η στατιστική κατανομή θα τείνει στη στοχαστική κατανομή. Δηλαδή, θα αρχίσουμε να ''βλέπουμε'' ότι οι μέσες τιμές των 4 γκαουσιανών κατανομών που συνθέτουν τη (διδιάστατη) $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ είναι τα $\tilde{\mathbf{x}}_m$ και όχι τα $\mathbf{x}_m$ όπως (εσφαλμένα) πιστεύει ο δέκτης. Η αξιοπιστία της εκτίμησης για την τιμή των $\tilde{\mathbf{x}}_m$ αυξάνει με τα σύμβολα που μεταδίδονται. Από τα $\tilde{\mathbf{x}}_m$ μπορούμε να βρούμε την τιμή του α και, αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει άλλο πρόβλημα στο οποίο να οφείλεται η παραμόρφωση του αστερισμού, μπορούμε να μετατοπίσουμε τις $\phi_n(t-\tau)$ κατά $\tau = \alpha T$ ώστε να συμπέσουν με τις $\phi_n(t)$.

Ένα πρόβλημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δεν μπορούμε να καταλάβουμε αν τα $\tilde{\mathbf{x}}_m$ έχουν περάσει σε γειτονικό τεταρτημόριο. Δηλαδή, δουλεύει καλά για $1 - 4\alpha > 0 \Rightarrow \tau < \frac{T}{4}$. Μπορούμε να εκτιμήσουμε μεγαλύτερες τιμές του τ αν κάποιες από τις τιμές των συμβόλων που μεταδίδει ο πομπός είναι γνωστές εκ των προτέρων (για παράδειγμα, αν ξέρουμε ότι κάθε 10 σύμβολα στέλνουμε το $\mathbf{x}_1$). Το τίμημα εδώ είναι ότι ο ρυθμός μετάδοσης ελαττώνεται επειδή μέρος των συμβόλων που μεταδίδουμε είναι γνωστό στο δέκτη (ισοδύναμα, ο όγκος δεδομένων του χρήστη που μπορούμε να μεταδώσουμε ελαττώνεται προκειμένου να διαθέσουμε μέρος των συμβόλων για συγχρονισμό).

Η πρώτη προσέγγιση εκτίμησης ονομάζεται *τυφλή* (blind estimation). Η δεύτερη προσέγγιση ονομάζεται εκτίμηση με χρήση συμβόλων εκπαίδευσης ή πιλότων (training symbol-based or pilot-aided estimation). Πολλές φορές στα Συστήματα Επικοινωνιών χρησιμοποιείται συνδυασμός των δύο τεχνικών. Η εκτίμηση με χρήση πιλότων εφαρμόζεται συνήθως στην αρχή όταν ξεκινά η λειτουργία ενός συστήματος ή/και όταν το κανάλι μεταβάλλεται γρήγορα. Η τυφλή εκτίμηση χρησιμοποιείται συνήθως όταν οι μεταβολές του καναλιού είναι αργές για να παραμένει συγχρονισμένος ο δέκτης (tracking) και αφού έχει προηγηθεί εκτίμηση με χρήση πιλότων.

Μία άλλη προσέγγιση που σκέφτηκαν κάποιοι συνάδελφοί σας είναι ο υπολογισμός της μέσης ενέργειας του αστερισμού. Αν $\tau = 0$ και τα $\mathbf{x}_m$ μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα, $\mathcal{E}_x = 2$. Αν $0 < \tau < \frac{T}{4}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\tilde{x}} &= \frac{1}{2}\left[1 + (1-2\alpha)^2\right] + \frac{1}{2}\left[(1-2\alpha)^2 + (1-4\alpha)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2 + 4\alpha^2 - 4\alpha\right] + \frac{1}{2}\left[2 + 20\alpha^2 - 12\alpha\right] \\
&= 2 + 12\alpha^2 - 8\alpha < 2,
\end{aligned}$$

επειδή $\alpha = \frac{\tau}{T} < \frac{1}{4}$.

Απομένει να υπολογίσουμε την $\mathcal{E}_{\tilde{x}}$. Πρέπει, επομένως, να χρησιμοποιήσουμε (και πάλι) τις (στατιστικές) μέσες τιμές των $\tilde{\mathbf{x}}_m$.

Σημείωση: Κάποιοι πρότειναν να υπολογίσουμε το τ μέσω της πιθανότητας σφάλματος. Ωστόσο, ακόμα και αν γνωρίζουμε το σ ο δέκτης δεν μπορεί να γνωρίζει πότε σφάλλει στην εκτίμηση του μεταδιδόμενου συμβόλου.