Ασκήσεις σε Στοχαστικές Διαδικασίες – Ενδεικτικές Λύσεις

1. **Άσκηση 3-2 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη (τροποποιημένη)**

   Μία στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}$ περιλαμβάνει δύο συναρτήσεις-δείγματα:

   $X_1(t) = \sin(\pi t)$ και $X_2(t) = 2t$. Και στις δύο περιπτώσεις $t \in \mathbb{R}$.

   Η συνάρτηση-δείγμα $X_1(t)$ εμφανίζεται με πιθανότητα p, ενώ η συνάρτηση-δείγμα $X_2(t)$ εμφανίζεται με πιθανότητα $1-p$.

   i. Είναι η στοχαστική διαδικασία στάσιμη; Εργοδική;

   $\boxed{\text{Απάντηση:}}$

   Η μέση τιμή της στοχαστικής διαδικασίας ισούται με

   $$m(t) = \mathbb{E}[X(t)] = p\sin(\pi t) + 2(1-p)t.$$

   Επειδή η μέση τιμή είναι συνάρτηση του χρόνου, t, η στοχαστική διαδικασία δεν είναι στάσιμη και, επομένως, ούτε εργοδική.

   ii. Υπολογίστε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p_{X(t)}(x)$ για όλες τις πιθανές τιμές της $X(t)$ για $t=0$, $t=1$ και $t=2$. Η απάντησή σας μπορεί να περιέχει το p ως παράμετρο, αν χρειάζεται.

   $\boxed{\text{Απάντηση:}}$

   Αν εμφανιστεί η συνάρτηση $X_1(t)$, $X(0) = 0$, $X(1) = \sin(\pi) = 0$ και $X(2) = \sin(2\pi) = 0$.

   Αν εμφανιστεί η συνάρτηση $X_2(t)$, $X(0) = 0$, $X(1) = 2$ και $X(2) = 4$.

   Επομένως,

   $$\begin{aligned} &p_{X(0)}(0) = 1 \\ &p_{X(1)}(0) = p \text{ και } p_{X(1)}(2) = 1-p \\ &p_{X(2)}(0) = p \text{ και } p_{X(2)}(4) = 1-p \end{aligned}$$

   iii. Υπολογίστε την *από κοινού* συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p_{X(t_1)X(t_2)}(x,y)$ για όλες τις πιθανές τιμές των $X(t_1)$ και $X(t_2)$ για $t_1 = 0$ και $t_2 = 1$. Η απάντησή σας μπορεί να περιέχει το p ως παράμετρο, αν χρειάζεται.

   $\boxed{\text{Απάντηση:}}$

   Αν εμφανιστεί η συνάρτηση $X_1(t)$, $X(0) = 0$ και $X(1) = \sin(\pi) = 0$.

   Αν εμφανιστεί η συνάρτηση $X_2(t)$, $X(0) = 0$ και $X(1) = 2$.

   Συνεπώς,

   $$p_{X(0)X(1)}(0,0) = p \text{ και } p_{X(0)X(1)}(0,2) = 1-p$$

2. **Άσκηση 3-6 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη**

Η σχέση εισόδου-εξόδου ενός συστήματος είναι η

$$\frac{dY(t)}{dt} = X(t),$$

όπου $X(t)$ και $Y(t)$ είναι η είσοδος και η έξοδος του συστήματος, αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας, $H(f)$, του συστήματος.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier,

$$j2\pi f Y(f) = X(f) \Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{j2\pi f} = -\frac{j}{2\pi f}.$$

ii. Αν η είσοδος είναι Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία (WSS) με μηδενική μέση τιμή και φασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_{XX}(f) = \frac{3}{2},\ \frac{5}{\pi} < |f| < \frac{10}{\pi},$$

να βρεθεί η φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου $S_{YY}(f)$ και η πιθανότητα $\Pr\{Y(t=0.5) < 0.4\}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι, αν σε ένα σύστημα LTI εφαρμοστεί ως είσοδος Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία, τότε και η έξοδός του είναι Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία. Επίσης, η απάντησή σας στο τελευταίο ερώτημα θα περιλαμβάνει τη συνάρτηση $Q(x) \triangleq \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, $x \geq 0$. Υπενθυμίζεται ότι, για $x \geq m$,

$\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Δεδομένου ότι η διαδικασία είναι WSS και διέρχεται από σύστημα LTI, η φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου συνδέεται με τη φασματική πυκνότητα ισχύος της εισόδου με τη σχέση

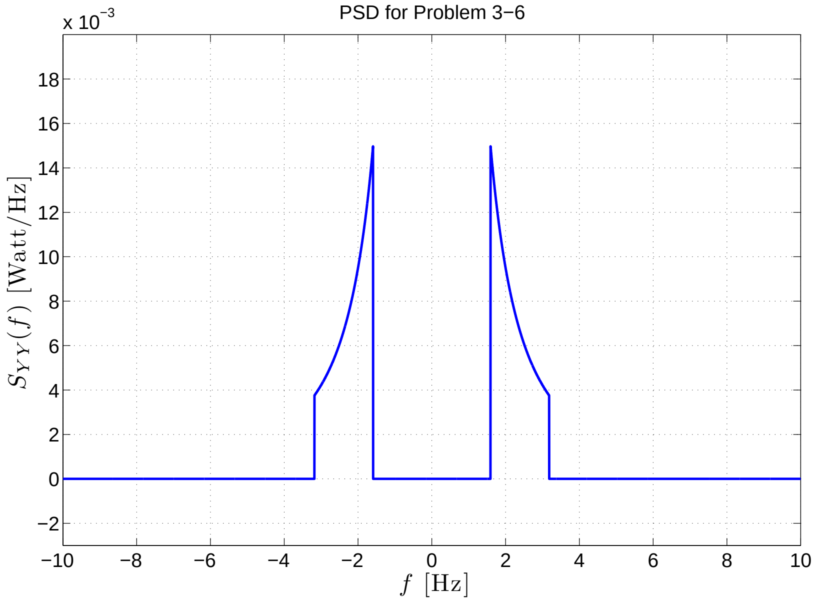
$$S_{YY}(f) = |H(f)|^2 S_{XX}(f).$$

Επομένως,

$$S_{YY}(f) = \frac{1}{4\pi^2 f^2}\frac{3}{2} = \frac{3}{8\pi^2 f^2},\ \frac{5}{\pi} < |f| < \frac{10}{\pi}.$$

Η $S_{YY}(f)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι εάν η είσοδος σε ένα σύστημα LTI είναι Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία και η έξοδός του είναι Γκαουσιανή. Επομένως, η $\{Y(t)\}$ είναι Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία και, μάλιστα, WSS επειδή η είσοδος είναι WSS.



Σχήμα 1: $S_{YY}(f)$ της Άσκησης 3-6.

Για να βρούμε την $\Pr\{Y(t=0.5) < 0.4\}$ πρέπει να βρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pmf) $f_{Y(t)}(y)$ και να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{0.4} f_{Y(t)}(y)dy$. Εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η $\{Y(t)\}$ είναι στάσιμη με αποτέλεσμα η $f_{Y(t)}(y)$ να μην εξαρτάται από τη χρονική στιγμή t.

Η μέση τιμή της $\{X(t)\}$ είναι 0, οπότε και η μέση τιμή της $\{Y(t)\}$ είναι 0. Απομένει να βρούμε τη διασπορά της $\{Y(t)\}$.

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathbb{E}\left[(Y-m)^2\right] = \mathbb{E}\left[Y^2\right] - m^2 \\
&\overset{(a)}{=} \mathbb{E}\left[Y^2\right] = R_{YY}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{YY}(f)df = 2\int_{\frac{5}{\pi}}^{\frac{10}{\pi}} \frac{3}{8\pi^2 f^2}df \\
&= \frac{3}{4\pi^2}\int_{\frac{5}{\pi}}^{\frac{10}{\pi}} \frac{1}{f^2}df = -\frac{3}{4\pi^2}\frac{1}{f}\bigg|_{\frac{5}{\pi}}^{\frac{10}{\pi}} = \frac{3}{40\pi}.
\end{aligned}$$

(a) $m = 0$

$$\Pr\{Y(t=0.5) < 0.4\} = 1 - \Pr\{Y(t=0.5) > 0.4\} = 1 - Q\left(\frac{0.4}{\sigma}\right),$$

όπου $\sigma = \sqrt{\frac{3}{40\pi}}$.

Με χρήση Matlab και του ότι $Q(x) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, $\Pr\{Y(t=0.5) < 0.4\} \approx 0.9952$.

3. **Άσκηση 3-8 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη**

Ένα σήμα $Y(t)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$Y(t) = x(t) + N(t),$$

όπου $x(t)$ είναι το *ντετερμινιστικό* σήμα $x(t) = A\sin t$, $t \in \mathbb{R}$ και A μία σταθερά. Η $N(t)$ είναι Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία με μέση τιμή ίση με 0 και φασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_{NN}(f) = e^{-2\pi^2 f^2}, \ f \in \mathbb{R}.$$

Τα σήματα $x(t)$ και $N(t)$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Να βρεθεί ο λόγος σήματος προς θόρυβο

$$\mathsf{SNR} = \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_N},$$

όπου $\mathcal{P}_x$ και $\mathcal{P}_N$ είναι η ισχύς του $x(t)$ και του $N(t)$, αντίστοιχα.

Υπόδειξη: Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi^2 f^2} df$ είναι πεπερασμένο.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Η ισχύς του ντετερμινιστικού ημιτόνου ισούται με $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2}$.

Για να βρούμε την $\mathcal{P}_N = \mathbb{E}[N^2]$, πρέπει να βρούμε το ολοκλήρωμα της φασματικής πυκνότητας ισχύος:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[N^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi^2 f^2} df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{4\pi^2 f^2}{2}} df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(2\pi f)^2}{2}} df \\ &\overset{x=2\pi f}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right\} \overset{(a)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\end{aligned}$$

(a) η $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (της γκαουσιανής κατανομής με μηδενική μέση τιμή και διασπορά 1).

Επομένως,

$$\mathsf{SNR} = \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_N} = \frac{\sqrt{2\pi}A^2}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A^2.$$

Ένας άλλος τρόπος να βρεθεί η $\mathbb{E}[N^2]$ είναι υπολογίζοντας την $R_{NN}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{NN}(f)\}$.

Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\pi f^2}\right\} = e^{-\pi\tau^2}$. Από την ιδιότητα βάθμωσης του μετασχηματισμού Fourier, $\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2\pi^2 f^2}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\pi\left(\sqrt{2\pi}f\right)^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\pi\left(\frac{\tau}{\sqrt{2\pi}}\right)^2} = R_{NN}(\tau)$.

Αλλά $\mathbb{E}[N^2] = R_{NN}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

4. **Άσκηση 3-9 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη**

Οι $\{X(t)\}$ και $\{Y(t)\}$ είναι στατιστικώς ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες WSS με μηδενική μέση τιμή και την ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_{XX}(\tau) = R_{YY}(\tau) = R(\tau).$$

i. Να εξετάσετε αν η στοχαστική διαδικασία

$$Z(t) = \alpha X(t) + \beta Y(t),$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι WSS. Αν η απάντησή σας είναι θετική, να βρείτε την $R_{ZZ}(\tau)$.

Απάντηση:

Για να είναι η $\{Z(t)\}$ WSS πρέπει η μέση τιμή της να μην εξαρτάται από τη χρονική στιγμή t, η αυτοσυσχέτισή της να εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $\tau = t_2 - t_1$ και η διασπορά $\mathbb{E}\left[Z^2(t)\right]$ κάθε τιμής της να είναι πεπερασμένη.

$$\mathbb{E}\left[Z(t)\right] = \mathbb{E}\left[\alpha X(t) + \beta Y(t)\right] = \alpha \mathbb{E}\left[X(t)\right] + \beta \mathbb{E}\left[Y(t)\right] = 0$$

και, επομένως, ανεξάρτητη του χρόνου.

$$\begin{aligned} R_{ZZ}(\tau) &= \mathbb{E}\left[Z(t)Z(t+\tau)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\alpha X(t) + \beta Y(t)\right)\left(\alpha X(t+\tau) + \beta Y(t+\tau)\right)\right] \\ &= \alpha^2 \mathbb{E}\left[X(t)X(t+\tau)\right] + \beta^2 \mathbb{E}\left[Y(t)Y(t+\tau)\right] \\ &+ \alpha\beta\left[X(t)Y(t+\tau)\right] + \alpha\beta\left[X(t+\tau)Y(t)\right] \\ &\overset{(a)}{=} \alpha^2 R_{XX}(\tau) + \beta^2 R_{YY}(\tau) = (\alpha^2 + \beta^2)R(\tau). \end{aligned}$$

(a) Οι $\{X(t)\}$ και $\{Y(t)\}$ είναι στατιστικώς ανεξάρτητες.

Άρα, η R_{ZZ} είναι συνάρτηση μόνο της διαφοράς τ μεταξύ των χρονικών στιγμών.

Τέλος, $\mathbb{E}\left[Z^2(t)\right] = R_{ZZ}(0) = (\alpha^2 + \beta^2)R_{XX}(0)$. Αλλά $R_{XX}(0) < +\infty$, αλλιώς η $\{X(t)\}$ δε θα ήταν WSS. Επομένως, $\mathbb{E}\left[Z^2(t)\right] < +\infty$.

Συνεπώς, η $\{Z(t)\}$ είναι WSS και $R_{ZZ}(\tau) = (\alpha^2 + \beta^2)R(\tau)$.

ii. εάν οι $\{X(t)\}$ και $\{Y(t)\}$ είναι, επιπλέον, από κοινού Γκαουσιανές στοχαστικές διαδικασίες (και στατιστικώς ανεξάρτητες), να βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) $f_{Z(t)}(z)$ της $Z(t)$ (δηλαδή της τιμής της $\{Z(t)\}$ τη χρονική στιγμή t).

Υπόδειξη: Για να βρούμε την pdf Γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής αρκεί να γνωρίζουμε τη μέση τιμή της και τη διασπορά της.

Απάντηση:

Επειδή οι $\{X(t)\}$ και $\{Y(t)\}$ είναι από κοινού Γκαουσιανές στοχαστικές διαδικασίες και η $\{Z(t)\}$ είναι Γκαουσιανή. Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της ισούται με 0. Η διασπορά της ισούται με $\mathbb{E}\left[(Z(t)-m)^2\right] = \mathbb{E}\left[Z^2(t)\right] = (\alpha^2 + \beta^2)R(0)$.

Επομένως,

$$f_{Z(t)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}},$$

όπου $\sigma = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)R(0)}$.

5. **Άσκηση 3-12 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη**

Η σχέση εισόδου-εξόδου ενός συστήματος είναι η

$$Y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} X(\tau) d\tau,$$

όπου $X(t)$ και $Y(t)$ είναι η είσοδος και η έξοδος του συστήματος, αντίστοιχα.

Εάν η $\{X(t)\}$ είναι *λευκή* στοχαστική διαδικασία με (δίπλευρη) φασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_{XX}(f) = \frac{\mathcal{N}_0}{2},$$

i. Να βρεθεί η φασματική πυκνότητα ισχύος της $\{Y(t)\}$, $S_{YY}(f)$.

Απάντηση:

Η $\{Y(t)\}$ μπορεί να γραφτεί ως η έξοδος φίλτρου LTI με κρουστική απόκριση $h(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$ σε είσοδο $\{X(t)\}$ (δείτε, επίσης, την Άσκηση 2-11 του βιβλίου του Γ. Καραγιαννίδη).

Επομένως,

$$H(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)\right\} = \frac{T}{T}\text{sinc}(fT)e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} = \text{sinc}(fT)e^{-j\pi fT}.$$

και

$$|H(f)|^2 = H(f) \cdot H^*(f) = \text{sinc}^2(fT).$$

Συνεπώς,

$$S_{YY}(f) = |H(f)|^2 S_{XX}(f) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\text{sinc}^2(fT).$$

Παρατηρήστε ότι όσο μεγαλώνει το T, όσο πιο βαθυπερατό, δηλαδή, γίνεται το φίλτρο (γιατί ολοκληρώνουμε σε μεγαλύτερο διάστημα), τόσο “στενεύει” η $S_{YY}(f)$ (αν και εξακολουθεί να έχει άπειρες συχνότητες).

ii. Να υπολογιστεί η ισχύς $\mathcal{P}_Y$ της $\{Y(t)\}$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

$$\mathcal{P}_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{YY}(f)df = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(fT)df = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\text{sinc}^2(fT)\right\}\bigg|_{t=0}$$

Γνωρίζουμε, όμως, ότι $\mathcal{F}\left\{\text{sinc}^2(t)\right\} = \Lambda(f)$. Από την ιδιότητα βάθμωσης, $\mathcal{F}\left\{\text{sinc}^2(Tt)\right\} = \frac{1}{T}\Lambda\left(\frac{f}{T}\right)$. Τέλος, από την δυϊκότητα του μετασχηματισμού Fourier και επειδή τόσο η sinc^2 όσο και η Λ είναι άρτιες, $\mathcal{F}^{-1}\left\{\text{sinc}^2(fT)\right\} = \frac{1}{T}\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$\mathcal{P}_Y = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\text{sinc}^2(fT)\right\}\bigg|_{t=0} = \frac{\mathcal{N}_0}{2T}.$$

Όσο μικρότερος είναι ο χρόνος κατά τον οποίο "φιλτράρουμε" τη $\{X(t)\}$, δηλαδή όσο πιο κοντά στη $\delta(t)$ βρίσκεται η $h(t)$, τόσο πιο λευκή είναι η έξοδος $\{Y(t)\}$ (και, επομένως, η ενέργειά της τείνει στο άπειρο). Αντίθετα, όταν "φιλτράρουμε" τη $\{X(t)\}$ για μεγάλο χρονικό διάστημα παίρνουμε το μέσο όρο σε μεγάλο χρονικό παράθυρο. Από το νόμο των μεγάλων αριθμών, καθώς $T \to +\infty$, ο μέσος όρος $Y(t)$ (και, επομένως, και η ισχύς του) τείνει στο 0.