Ενδεικτικές λύσεις 1ης Σειράς Ασκήσεων

1. **Άσκηση 2-5 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη (ελαφρώς τροποποιημένη)**

   Να εξετάσετε αν το σήμα
   $$x(t) = \cos^2(t)$$
   είναι περιοδικό με δύο τρόπους:

   (α) Δουλεύοντας στο πεδίο του χρόνου

   (β) Δουλεύοντας στο πεδίο της συχνότητας

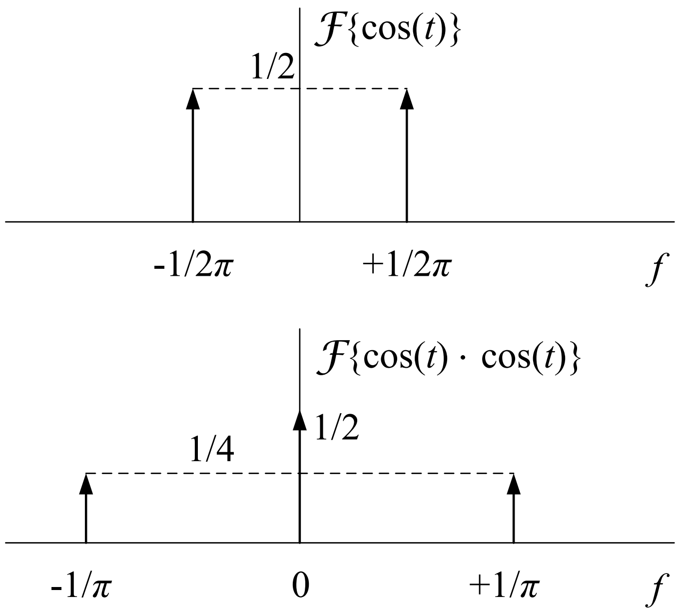
   Αν το σήμα είναι περιοδικό βρείτε τη θεμελιώδη συχνότητά του, T_0.

   Απάντηση:

   Στο πεδίο του χρόνου,
   $$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{1}{\pi}t\right).$$
   Συνεπώς, το σήμα είναι περιοδικό με $T_0 = \pi$.

   Για να δουλέψουμε στο πεδίο της συχνότητας πρέπει να βρούμε το μετασχηματισμό Fourier του $\cos^2(t)$. Παρατηρούμε ότι $\cos^2(t) = \cos(t)\cdot\cos(t)$. Συνεπώς, στη συχνότητα, πρέπει να συνελίξουμε το μετασχηματισμό Fourier του $\cos(t)$ με τον εαυτό του.
   $$\mathcal{F}\{\cos(t)\} = \mathcal{F}\left\{\cos\left(2\pi\frac{1}{2\pi}t\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right\}.$$
   Το αποτέλεσμα έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.

   Παρατηρούμε ότι το σήμα που προκύπτει έχει συχνοτικό περιεχόμενο στη συχνότητα 0 και στη συχνότητα $\frac{1}{\pi}$. Επομένως, η μικρότερη μη μηδενική περίοδος είναι η $T_0 = \pi$.



Σχήμα 1: Υπολογισμός Μετασχηματισμού Fourier του $\cos^2(t)$ με χρήση του Θεωρήματος Συνέλιξης.

2. **Άσκηση 2-7 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη**

   Δίνεται το σήμα
   $$x(t) = 2\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{4\pi}\right).$$
   Να υπολογιστεί η συνέλιξή του με τον εαυτό του, $x(t) * x(t)$.

   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Συνέλιξης του Μετασχηματισμού Fourier.

   Απάντηση:

   Γνωρίζουμε ότι
   $$\mathrm{sinc}(t) \supset \Pi(f).$$
   Επομένως, από την ιδιότητα βάθμωσης,
   $$x(t) = 2\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{4\pi}\right) \supset 2\cdot 4\pi \cdot \Pi(4\pi f) = 8\pi \cdot \Pi(4\pi f) = X(f).$$
   Συνεπώς,
   $$y(t) = x(t) * x(t) \supset X(f)\cdot X(f) = 64\pi^2 \cdot \Pi(4\pi f) = Y(f).$$
   και
   $$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{64\pi^2 \cdot \Pi(4\pi f)\right\} \stackrel{(a)}{=} 16\pi \mathcal{F}^{-1}\left\{4\pi \cdot \Pi(4\pi f)\right\} = 16\pi \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{4\pi}\right).$$
   (a) Από την ιδιότητα γραμμικότητας του Μετασχηματισμού Fourier (και του αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier).

3. **Άσκηση 2-11 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη (με πρόσθετα ερωτήματα)**

Έστω Γραμμικό Χρονικώς Αμετάβλητο (LTI) σύστημα συνεχούς χρόνου του οποίου η έξοδος, $y(t)$, συναρτήσει της εισόδου του, $x(t)$, δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau)d\tau.$$

(α) Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος.

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι η έξοδος ενός συστήματος LTI συνδέεται με την είσοδό του μέσω της σχέσης

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Επομένως,

$$h(t-\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{για} \quad \tau \in \left[t-\frac{T}{2}, t+\frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{για} \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow$$

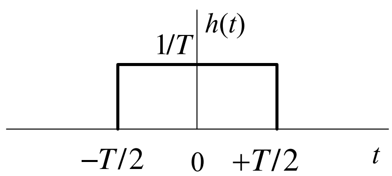
$$h(t) = \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right).$$

Ένας άλλος τρόπος να το δείτε (λιγότερο διαισθητικός) είναι με χρήση του ορισμού της κρουστικής απόκρισης. Θέτοντας $x(t) = \delta(t)$,

$$h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \delta(\tau)d\tau.$$

Το ολοκλήρωμα ισούται με 1 αν $t \in \left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$, αλλιώς με 0 (γιατί αν $t \notin \left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$ η $\delta(t)$ δε βρίσκεται μέσα στο διάστημα ολοκλήρωσης). Επομένως, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα για την $h(t)$.

Η $h(t)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Κρουστική απόκριση $h(t)$.

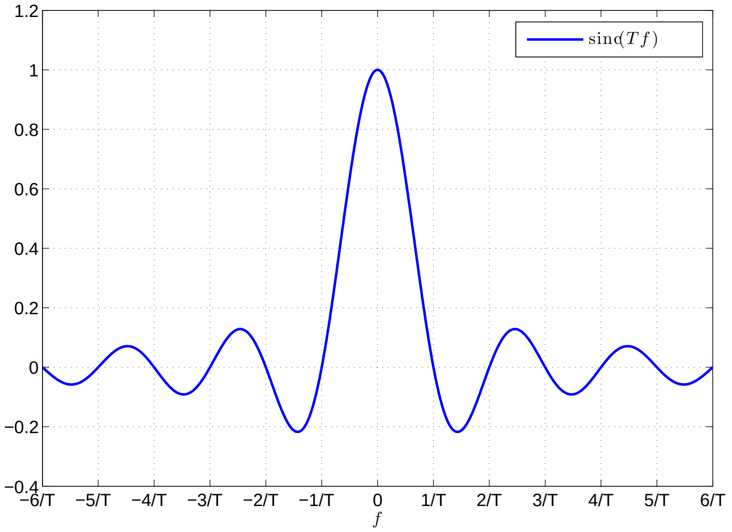
(β) Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας, $H(f)$, του συστήματος.

Απάντηση:

Επειδή $H(f) \triangleq \mathcal{F}\{h(t)\}$, από την ιδιότητα βάθμωσης του μετασχηματισμού Fourier,

$$H(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \mathrm{sinc}(Tf).$$

Η $H(f)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 3. Παρατηρήστε ότι, επειδή η $h(t)$ είναι άρτια και πραγματική, το ίδιο ισχύει και για την $H(f)$.



Σχήμα 3: $H(f)$ για την Άσκηση 2-11.

(γ) Τι φίλτρο θα λέγατε ότι είναι το $h(t)$; (π.χ. βαθυπερατό; υψιπερατό; ζωνοπερατό;)

Απάντηση:

Το $h(t)$ είναι ένα βαθυπερατό φίλτρο, γιατί δείχνει "προτίμηση" στις χαμηλές συχνότητες. Ωστόσο, δεν είναι ιδανικό. Παρατηρήστε ότι το φίλτρο υπολογίζει το μέσο όρο του σήματος σε ένα χρονικό παράθυρο εύρους T, δηλαδή, κατά κάποιο τρόπο, "λειαίνει" το σήμα. Όσο πιο μεγάλο το εύρος του παραθύρου τόσο πιο βαθυπερατό θα είναι το φίλτρο (το sinc στη συχνότητα θα στενεύει).

(δ) Μπορούμε να υλοποιήσουμε το σύστημα $h(t)$ στην πράξη; Αν ναι γιατί; Αν όχι, θα μπορούσατε να υλοποιήσετε ένα παρόμοιο σύστημα με κάποιο τρόπο (π.χ. με κάποιες προσεγγίσεις);

Απάντηση:

Δεν μπορούμε να υλοποιήσουμε το $h(t)$ στην πράξη για δύο λόγους. Κατ' αρχάς, είναι μη αιτιατό σύστημα. Επίσης, η απόκριση συχνότητάς του είναι μη μηδενική σε άπειρες συχνότητες. Αυτό είναι αναμενόμενο, λόγω των ασυνεχειών της $h(t)$.

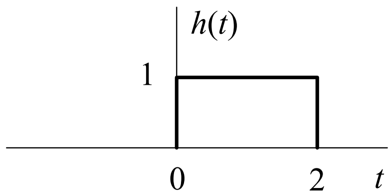
Μπορούμε να προσεγγίσουμε την $h(t)$ ως εξής:

(i) *(αιτιατότητα)* Μετακινώντας την $h(t)$ προς τα δεξιά, κατά $\frac{T}{2}$ τουλάχιστον. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να προστεθεί μία φάση στην $H(f)$ (κάτι το οποίο δεν μας δημιουργεί κανένα πρόβλημα στην πράξη πλην του ότι θα περιμένουμε λίγο περισσότερο για να πάρουμε την έξοδο, αλλά έτσι κι αλλιώς δεν μπορούμε να υλοποιήσουμε το μη αιτιατό σύστημα). Οπότε, αν, για παράδειγμα, $h(t) = \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$,

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau.$$

(ii) *(άπειρες συχνότητες)* Ωστόσο, η $H(f)$ εξακολουθεί να είναι μη μηδενική για $f \pm \infty$. Επομένως, μία λύση είναι να μηδενίσουμε την $H(f)$ για $f > f_h$. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να αλλάξει η μορφή της $h(t)$ (όπως είδαμε στις διαφάνειες). Μία άλλη λύση που χρησιμοποιείται στην πράξη είναι να χρησιμοποιήσουμε απευθείας άλλη, λιγότερο ''απότομη'' συνάρτηση για την $h(t)$ (π.χ. ανυψωμένο συνημίτονο). Δε θα υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες σε αυτό το μάθημα.

4. **Άσκηση 2-27 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη (με επιπλέον ερώτημα)**



Σχήμα 4: Κρουστική απόκριση $h(t)$ για την Άσκηση 2-27.

Έστω Γραμμικό Χρονικώς Αμετάβλητο (LTI) σύστημα συνεχούς χρόνου του οποίου η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται στο Σχήμα 4.

(α) Να υπολογιστεί η απόκριση, $y(t)$, του συστήματος όταν η είσοδός του είναι

(i) Το σήμα $x(t) = e^{j2\pi f_c t}$.

(ii) Το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$.

Υπόδειξη: Είναι μάλλον πιο εύκολο να δουλέψετε στο πεδίο της συχνότητας.

Απάντηση:

Μπορούμε να γράψουμε

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right).$$

Επομένως, με βάση τις ιδιότητες βάθμωσης και ολίσθησης (εφαρμόστε πρώτα βάθμωση κατά 2 και μετά ολίσθηση κατά 1),

$$H(f) = e^{-j2\pi f \cdot 1} \cdot 2 \cdot \mathrm{sinc}(2f) = 2e^{-j2\pi f}\mathrm{sinc}(2f).$$

(i) $x(t) = e^{j2\pi f_c t} \Rightarrow X(f) = \delta(f - f_c)$.
Συνεπώς,
$Y(t) = X(f)H(f) = \delta(f - f_c) \cdot 2e^{-j2\pi f}\mathrm{sinc}(2f) = \delta(f - f_c) \cdot 2e^{-j2\pi f_c}\mathrm{sinc}(2f_c)$
και

$$y(t) = 2e^{-j2\pi f_c}\mathrm{sinc}(2f_c)e^{j2\pi f_c t} = 2\mathrm{sinc}(2f_c)e^{j2\pi f_c(t-1)}.$$

Θυμηθείτε ότι η $e^{j2\pi f_c t}$ είναι ιδιοσυνάρτηση του συστήματος με αντίστοιχη ιδιοτιμή την $H(f_c) = 2e^{-j2\pi f_c}\mathrm{sinc}(2f_c)$.

(ii) $x(t) = \cos(2\pi f_c t) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{2}\{\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)\}$.
Επομένως,

$$\begin{aligned} Y(t) = X(f)H(f) &= \frac{1}{2}\{\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)\} \cdot 2e^{-j2\pi f}\mathrm{sinc}(2f) \\ &= \delta(f + f_c) \cdot e^{j2\pi f_c}\mathrm{sinc}(-2f_c) + \delta(f - f_c)e^{-j2\pi f_c}\mathrm{sinc}(2f_c) \\ &\overset{(a)}{=} \delta(f + f_c) \cdot e^{j2\pi f_c}\mathrm{sinc}(2f_c) + \delta(f - f_c) \cdot e^{-j2\pi f_c}\mathrm{sinc}(2f_c) \end{aligned}$$

(a) λόγω της συμμετρίας (αρτιότητας) του sinc και

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{sinc}(2f_c)\left\{e^{j2\pi f_c}e^{-j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c}e^{j2\pi f_c t}\right\} \\ &= \mathrm{sinc}(2f_c)\left\{e^{-j2\pi f_c(t-1)} + e^{j2\pi f_c(t-1)}\right\} \\ &= \mathrm{sinc}(2f_c) \cdot 2\cos(2\pi f_c(t-1)) = 2\mathrm{sinc}(2f_c)\cos(2\pi f_c(t-1)). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις η μορφή του σήματος δεν αλλοιώνεται, απλώς πολλαπλασιάζεται με συντελεστή $2\mathrm{sinc}(2f_c)$ και καθυστερεί κατά 1 s.

Θα μπορούσατε, εναλλακτικά, να λύσετε την άσκηση θεωρώντας ότι $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$ (χωρίς την ολίσθηση) και παρατηρώντας, στο τέλος, ότι ολίσθηση της $h(t)$ προς τα δεξιά κατά 1 σημαίνει απλώς ότι το σύστημα απαντά στη διέγερση 1 s αργότερα.

(β) Υπάρχει περίπτωση για κάποια τιμή της f_c να ισχύει $y(t) = 0$ για τις εισόδους των ερωτημάτων (i) και (ii); Αν ναι, για ποια f_c;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Παρατηρούμε ότι αν $f_c = \frac{k}{2}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\mathrm{sinc}(2f_c) = \mathrm{sinc}(k) = 0$. Επομένως, $y(t) = 0$. Αυτό συμβαίνει για τον εξής λόγο: Όταν $f_c = k/2$, η θεμελιώδης περίοδος T_0 ισούται με $2/k$, δηλαδή το σήμα $x(t)$ διαγράφει ακέραιο αριθμό κύκλων σε διάστημα 2 s. Στην Άσκηση 2-11 είδαμε ότι στην ουσία το φίλτρο $h(t)$ αντιστοιχεί σε ολοκλήρωση σε διάστημα 2 s. Επομένως, ολοκληρώνουμε το (ημιτονοειδές) $x(t)$ σε διάστημα που αντιστοιχεί σε ακέραιο αριθμό περιόδων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η έξοδος να ισούται με 0. Κοιτάζοντας ξανά την $H(f)$ της Άσκησης 2-11 στο Σχήμα 3, παρατηρούμε ότι εμφανίζει μηδενισμούς στις συχνότητες k/T. Αν ένα σήμα εισόδου έχει συχνότητα k/T, το σύστημα θα το ολοκληρώσει για ακέραιο αριθμό περιόδων και, επομένως, η έξοδος ισούται με 0. Δηλαδή, σήματα με συχνότητες k/T απαλείφονται από το σύστημα λόγω του μήκους του παραθύρου ολοκλήρωσης.

Τι μπορούμε να κάνουμε για να αποφύγουμε τους μηδενισμούς; Μία λύση είναι να αλλάξουμε τη μορφή της $h(t)$ ώστε να μην είναι παντού 1 ή 0, δηλαδή, ισοδύναμα, η ολοκλήρωση να γίνεται με βάρη. Μία άλλη λύση είναι να αφήσουμε να περάσει και ένα κομμάτι "καθαρού" σήματος: $y(t) = \int_{t-2}^{t} x(\tau)d\tau + cx(t)$, $c \neq 0$. Ισοδύναμα, $h(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right) + c\delta(t) \Rightarrow H(f) = 2e^{-j2\pi f}\mathrm{sinc}(2f) + c$.