22Y604 (eclass EE789) - Συστήματα Επικοινωνιών — Φυλλάδιο 11 (Θεωρίας)
Δ. Τουμπακάρης — 14 Νοεμβρίου 2011

# Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων σε AM/FM

1. **Άσκηση 4-7 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη (μερικώς τροποποιημένη)**

   Να δείξετε ότι ένα σήμα AM DSB-SC

$$x(t) = Am(t)\cos(2\pi f_c t)$$

   μπορεί να αποδιαμορφωθεί αν πολλαπλασιαστεί στο δέκτη με ένα *οποιοδήποτε* περιοδικό σήμα $y(t)$ το οποίο έχει θεμελιώδη περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_c}$ και συχνοτικό περιεχόμενο στην $f_c$ και αν, στη συνέχεια, χρησιμοποιηθεί κατάλληλο φίλτρο.

   Επίσης, να δείξετε ότι η αποδιαμόρφωση μπορεί να επιτευχθεί και με χρήση σήματος θεμελιώδους περιόδου $T_k = kT_0$ (αρκεί να ισχύει $\frac{1}{T_k} > W$).

   Εάν το $y(t)$ είναι πραγματικό σήμα, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να αποδιαμορφώσουμε σήματα AM SSB-SC;

   Απάντηση:

   Σημειώνεται, κατ' αρχάς, ότι η αποδιαμόρφωση με πολλαπλασιασμό με περιοδικό σήμα είναι, στην ουσία, ίδια με τη διαμόρφωση με περιοδικό σήμα (σήμα διακόπτη) που περιγράφεται στις διαφάνειες (7η εβδομάδα) και στην Ενότητα 3.2.5 του βιβλίου των Proakis & Salehi.

   Γνωρίζουμε ότι ένα οποιοδήποτε περιοδικό σήμα μπορεί να γραφτεί σε μορφή σειράς Fourier ως

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k f_c t}.$$

   Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier του $y(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(f - kf_c).$$

   Πολλαπλασιασμός στο χρόνο αντιστοιχεί σε συνέλιξη στη συχνότητα. Επομένως, αν

$z(t)$ είναι το σήμα που προκύπτει από το γινόμενο των $x(t)$ και $y(t)$,

$$\begin{aligned}
Z(f) = X(f) * Y(f) &= \frac{A}{2}\left[M(f-f_c) + M(f+f_c)\right] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(f - kf_c) \\
&= \frac{A}{2}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k M(f-(k+1)f_c) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k M(f-(k-1)f_c)\right] \\
&= \frac{A}{2}\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{m-1} M(f-mf_c) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n+1} M(f-nf_c)\right] \\
&= \frac{A}{2}\left[(c_{-1}+c_1)M(f) + \sum_{m\neq 0} c_{m-1} M(f-mf_c) + \sum_{n\neq 0} c_{n+1} M(f-nf_c)\right].
\end{aligned}$$

Επομένως, αν χρησιμοποιήσουμε ένα βαθυπερατό φίλτρο με επίπεδη απόκριση συχνότητας στο διάστημα $[-W, W]$ μπορούμε να απομονώσουμε το σήμα

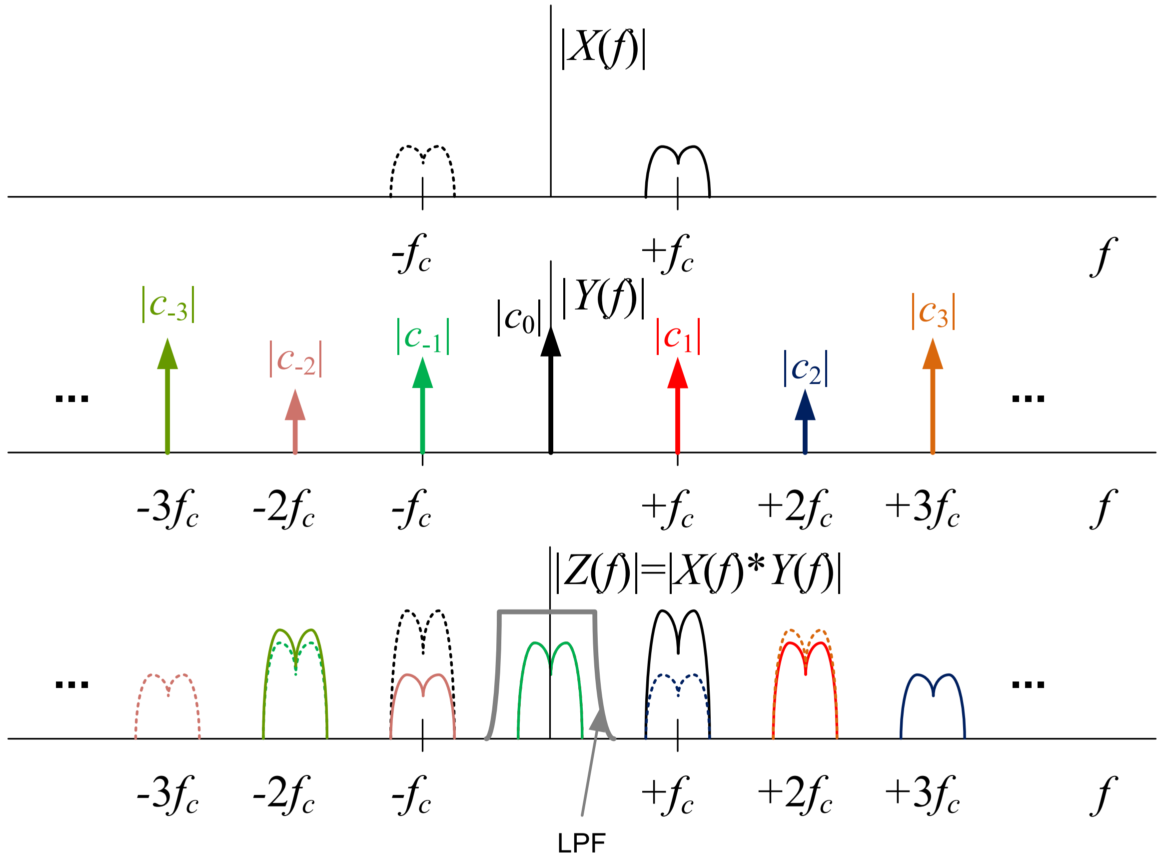
$$\tilde{Z}(f) = (c_{-1} + c_1)M(f) = \tilde{c}M(f)$$

από το οποίο προκύπτει το $M(f)$ πολλαπλασιάζοντας με $\frac{\tilde{c}^*}{|\tilde{c}|^2}$.

Τα παραπάνω φαίνονται και σχηματικά στο Σχήμα 1. Παρατηρήστε ότι πρέπει το σήμα $y(t)$ να έχει συχνοτικό περιεχόμενο στην $f_c$, αλλιώς δε θα δημιουργηθεί σήμα στη βασική ζώνη.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η αποδιαμόρφωση μπορεί να γίνει με χρήση σήματος θεμελιώδους περιόδου $kT_0$, αρκεί να ισχύει $\frac{1}{kT_0} = \frac{f_c}{k} > W$. Η διαφορά είναι ότι $\tilde{Z}(f) = (c_{-k} + c_k)M(f)$. Επίσης, το βαθυπερατό φίλτρο πρέπει να είναι πιο στενό ώστε να απαλείφει τις νησίδες στις συχνότητες $\pm\frac{f_c}{k}$ που γειτνιάζουν με το σήμα βασικής ζώνης.

Τέλος, όσον αφορά την αποδιαμόρφωση σημάτων AM SSB-SC: Αν το σήμα $y(t)$ είναι πραγματικό, ισχύει $c_{-k} = c_k^*$. Από το Σχήμα 2 παρατηρούμε ότι η δεξιά πλευρική συνιστώσα του σήματος στη βασική ζώνη ισούται με $c_{-1}M(f)$, ενώ η αριστερή με $c_1 M^*(f)$ (γιατί το αρχικό σήμα AM SSB έχει συζυγή συμμετρία λόγω του ότι το $x(t)$ είναι πραγματικό). Αλλά $c_1 = c_{-1}^*$. Επομένως, η νησίδα στη βασική ζώνη μετά τον πολλαπλασιασμό με $y(t)$ παρουσιάζει συζυγή συμμετρία, αφού $(c_1 M^*(f))^* = c_1^* M(f) = c_{-1}M(f)$. Συνεπώς, το σήμα AM SSB-SC μπορεί να αποδιαμορφωθεί πολλαπλασιάζοντάς το με περιοδικό σήμα $y(t)$ και χρησιμοποιώντας βαθυπερατό φίλτρο. Η αποδιαμόρφωση μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας σήμα $y(t)$ περιόδου $kT_0$. Απλώς το βαθυπερατό φίλτρο γίνεται όλο και πιο στενό καθώς το $k$ αυξάνει.




Σχήμα 1: Αποδιαμόρφωση με πολλαπλασιασμό με περιοδικό σήμα.

2. **Άσκηση 4-8 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη**

   Ένα σήμα διαμορφωμένο κατά πλάτος δίνεται από τη σχέση

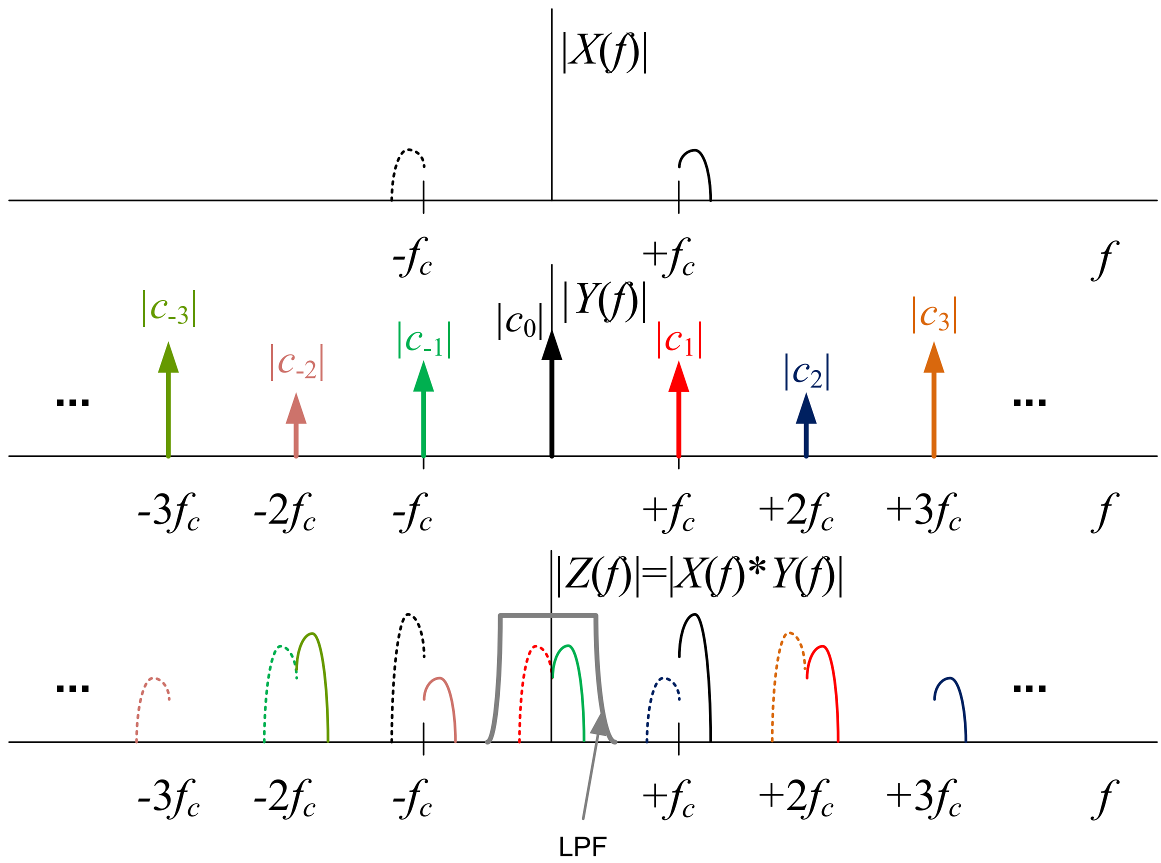
$$x(t) = 10\left(1 + \frac{1}{2}\cos(2000\pi t) + \frac{1}{2}\cos(4000\pi t)\right)\cos(20000\pi t).$$

   (i) Να σχεδιαστεί ποιοτικά το φάσμα του $x(t)$ και να βρεθεί η ισχύς κάθε μίας από τις φασματικές συνιστώσες, συμπεριλαμβανομένης και της φέρουσας, η ισχύς των πλευρικών ζωνών, καθώς και η συνολική ισχύς.

   (ii) Να υπολογιστεί ο δείκτης διαμόρφωσης.

   Απάντηση:

   (i) Το φάσμα του σήματος έχει σχεδιαστεί ποιοτικά στο Σχήμα 3. Το φάσμα έχει προκύψει από μετακίνηση του φάσματος του σήματος πληροφορίας $10\left(1 + \frac{1}{2}\cos(2000\pi t) + \frac{1}{2}\cos(4000\pi t)\right)$ γύρω από τις συχνότητες $\pm f_c = \pm 10000$ Hz.




Σχήμα 2: Αποδιαμόρφωση με πολλαπλασιασμό με περιοδικό σήμα για σήμα AM SSB.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι το σήμα $x(t)$ είναι άρτιο και πραγματικό. Επομένως, το φάσμα του, $X(f)$, είναι άρτιο και πραγματικό.

Ο πιο εύκολος τρόπος για να βρούμε την ισχύ του διαμορφωμένου σήματος είναι από το Σχήμα 3. Ένας άλλος τρόπος είναι επιστρέφοντας από το $X(f)$ στο πεδίο του χρόνου και χρησιμοποιώντας το ότι η ισχύς του σήματος $A\cos(2\pi f_o t)$ ισούται με $\frac{A^2}{2}$.

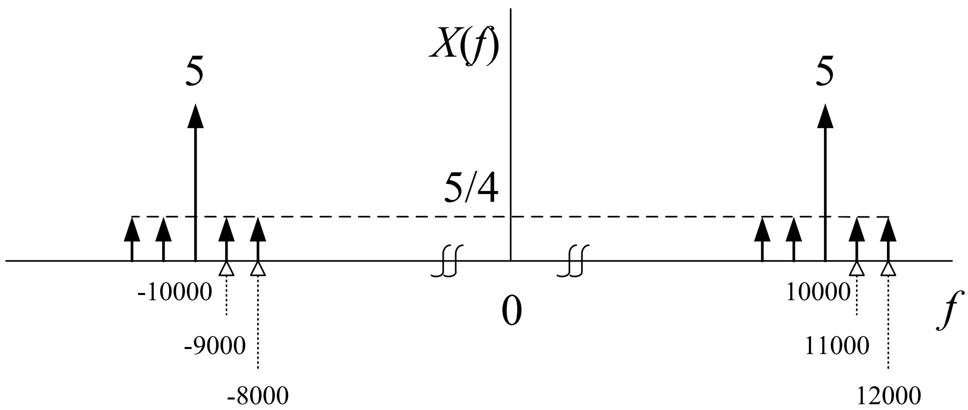
Επομένως, η ισχύς της φέρουσας ισούται με 50 Watt, η ισχύς των πλευρικών ζωνών με $8 \times \frac{25}{16} = \frac{25}{2} = 12.5$ Watt, η δε συνολική ισχύς με 62.5 Watt.

(ii) Ο δείκτης διαμόρφωσης ισούται με

$$\alpha = \frac{\max\{|m(t)|\}}{A_c}.$$

Εναλλακτικά μπορείτε να χρησιμοποιήστε τον ορισμό του βιβλίου του Γ. Καραγιαννίδη

$$\mu = \frac{|\min\{m(t)\}|}{A_c}.$$




Σχήμα 3: $X(f)$ για την Άσκηση 4-8.

Ο δεύτερος ορισμός οδηγεί σε πιο ‘‘οικονομικό’’ εκπεμπόμενο σήμα επειδή, όταν $\mu = 1$ η φέρουσα έχει την ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ανιχνευτή περιβάλλουσας. Ο πρώτος ορισμός είναι πιο ‘‘συμμετρικός’’.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, επειδή $\max\{\cos\} = |\min\{\cos\}| = 1$, οι τιμές του $\alpha$ και του $\mu$ ταυτίζονται.

Εύκολα βλέπουμε ότι

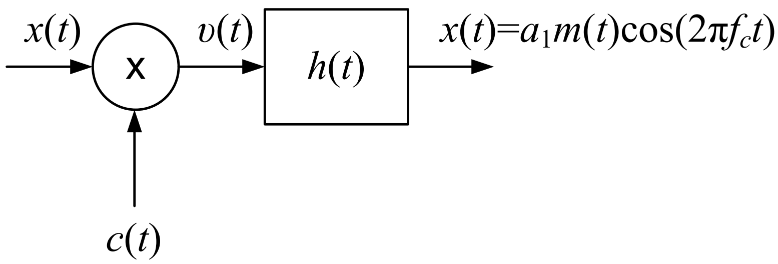
$$\max\left\{\frac{1}{2}\cos(2000\pi t) + \frac{1}{2}\cos(4000\pi t)\right\} = 1 = -\min\left\{\frac{1}{2}\cos(2000\pi t) + \frac{1}{2}\cos(4000\pi t)\right\}.$$

Συνεπώς,

$$\alpha = \mu = \frac{1}{10}$$

και το σήμα είναι υποδιαμορφωμένο, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ανιχνευτή περιβάλλουσας για την αποδιαμόρφωση.

3. **Άσκηση 4-15 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη**

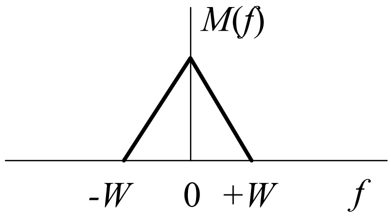



Σχήμα 4: Δομικό διάγραμμα διαμορφωτή για την Άσκηση 4-15.

Στο Σχήμα 4 δίνεται το δομικό διάγραμμα ενός διαμορφωτή AM DSB-SC. Η φέρουσα $c(t)$ που εισάγεται στο μείκτη είναι παραμορφωμένη και δίνεται από τη σχέση

$$c(t) = a_1 \cos(2\pi f_c t) + a_2 \cos^2(2\pi f_c t).$$

Το φάσμα του σήματος πληροφορίας δίνεται στο Σχήμα 5.




Σχήμα 5: Φάσμα σήματος πληροφορίας για την Άσκηση 4-15.

(i) Προσδιορίστε το φασματικό περιεχόμενο των σημάτων $v(t)$ και $x(t)$.

Απάντηση:

Με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων μπορούμε να γράψουμε το $c(t)$ στη μορφή

$$\begin{aligned} c(t) &= a_1 \cos(2\pi f_c t) + a_2 \cos^2(2\pi f_c t) \\ &= a_1 \cos(2\pi f_c t) + a_2 \frac{1 + \cos(4\pi f_c t)}{2} \\ &= \frac{a_2}{2} + a_1 \cos(2\pi f_c t) + \frac{a_2}{2} \cos(4\pi f_c t). \end{aligned}$$

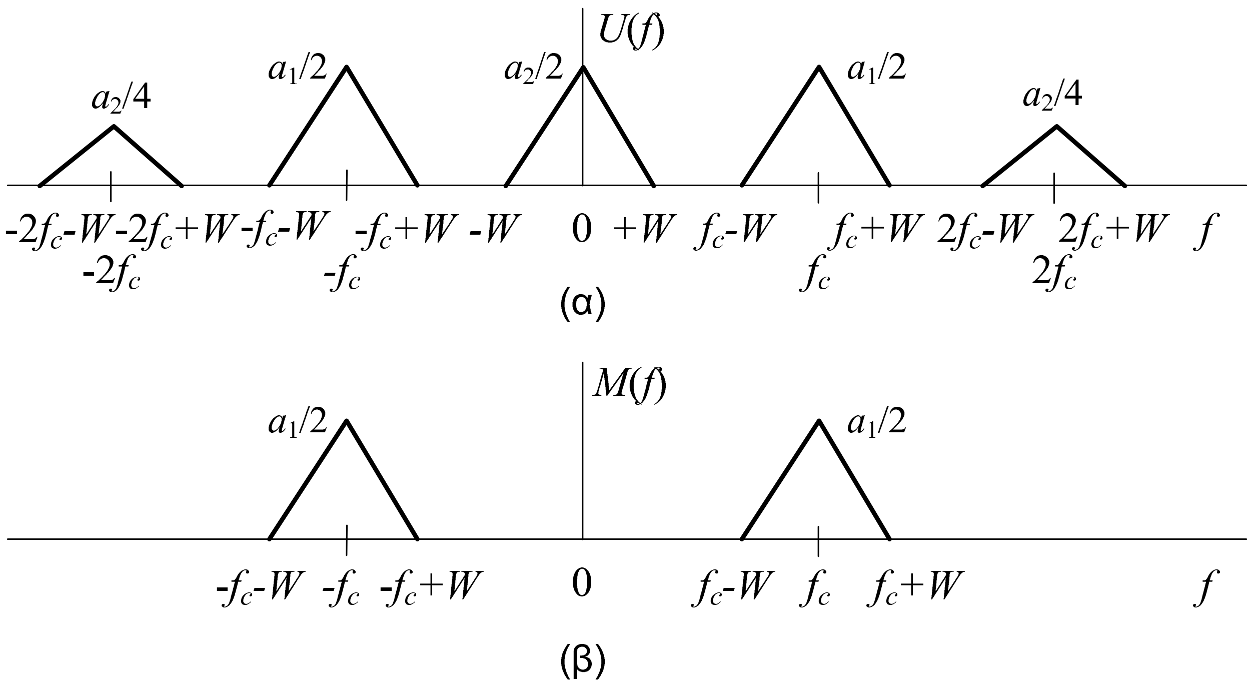
Συνεπώς, αφού $v(t) = m(t) \cdot c(t)$, από το Θεώρημα Συνέλιξης του Μετασχηματισμού Fourier,

$$\begin{aligned} U(f) &= M(f) * C(f) \\ &= M(f) * \left\{ \frac{a_2}{2}\delta(f) + \frac{a_1}{2}\left(\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right) + \frac{a_2}{4}\left(\delta(f - 2f_c) + \delta(f + 2f_c)\right) \right\} \\ &= \frac{a_2}{2}M(f) + \frac{a_1}{2}M(f - f_c) + \frac{a_1}{2}M(f + f_c) + \frac{a_2}{4}M(f - 2f_c) + \frac{a_2}{4}M(f + 2f_c). \end{aligned}$$

Το φάσμα $U(f)$ του $u(t)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 6 (α).
Ομοίως,

$$X(f) = \frac{a_1}{2}M(f - f_c) + \frac{a_1}{2}M(f + f_c).$$

Το $X(f)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 6 (β).
Και στις δύο περιπτώσεις έχει υποτεθεί ότι $f_c > 2W$.




Σχήμα 6: Φάσμα σημάτων $u(t)$ και $x(t)$.

(ii) Προσδιορίστε τα χαρακτηριστικά του φίλτρου $h(t)$ ώστε το σήμα $x(t)$ να είναι το επιθυμητό σήμα AM DSB-SC.

Απάντηση:

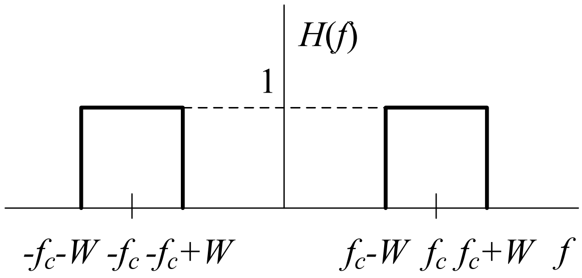
Εάν θέλουμε να ανακτήσουμε ακριβώς το σήμα $x(t)$ με χρήση φίλτρου LTI πρέπει, στο πεδίο της συχνότητας, $H(f) = 1$ για $|f - f_c| \leq W$ και $H(f) = 0$ για $|f| \leq W$ και $|f - 2f_c| \leq W$. Οι τιμές στις άλλες συχνότητες δε μας ενδιαφέρουν (αν και, στην πράξη, θέλουμε να είναι κοντά στο 0 για να ελαχιστοποιηθεί ο θόρυβος που υπεισέρχεται στο σήμα).

Στη γενική περίπτωση, μπορούμε να επιτρέψουμε να ισχύει $H(f) = Ae^{-j2\pi f\tau}$ στην περιοχή $|f - f_c| \leq W$. Το σήμα στην έξοδο του φίλτρου θα ισούται με $Ax(t - \tau)$. Δηλαδή, παρόλο που το πλάτος του έχει μεταβληθεί και το σήμα έχει καθυστερήσει στο χρόνο κατά $\tau$, δεν έχει παραμορφωθεί.

Μία ειδική περίπτωση είναι να χρησιμοποιήσουμε το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο του Σχήματος 7. Σε αυτήν την περίπτωση,

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) * \{\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\} \Rightarrow$$
$$h(t) = 2W\mathrm{sinc}(2Wt) \cdot \left\{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}\right\} = 4W\cos(2\pi f_c t)\mathrm{sinc}(2Wt).$$

Στην πράξη, το φίλτρο αυτό δεν είναι υλοποιήσιμο (είναι μη αιτιατό και η $h(t)$ έχει άπειρη διάρκεια).




Σχήμα 7: Ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο εύρους $2W$ και κεντρικής συχνότητας $f_c$.

(iii) Προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή της $f_c$ η οποία επιτρέπει στο σύστημα να λειτουργήσει με τα επιθυμητά αποτελέσματα. Τι θα συμβεί εάν η $f_c$ είναι μικρότερη από την ελάχιστη τιμή που υπολογίσατε;

Απάντηση:

Για να μπορούμε να "απομονώσουμε" την περιοχή του φάσματος $f_c \pm W$ πρέπει οι "νησίδες" που δημιουργούνται μετά από τον πολλαπλασιασμό με το σήμα $c(t)$ να μην επικαλύπτονται. Από το Σχήμα 6, παρατηρούμε ότι πρέπει $f_c - W > W \Rightarrow f_c > 2W$.

Εάν $f_c < 2W$ οι "νησίδες" επικαλύπτονται, με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να ανακτήσουμε το $x(t)$ όποιο φίλτρο και αν χρησιμοποιήσουμε.

4. **Άσκηση 4-16 βιβλίου Γ. Καραγιαννίδη**

Ένα ημιτονοειδές σήμα πληροφορίας με συχνότητα 1000 Hz διαμορφώνεται κατά AM και κατά FM. Το πλάτος της φέρουσας είναι το ίδιο και στα δύο συστήματα. Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας του σήματος FM είναι ίση με το τετραπλάσιο του εύρους ζώνης του σήματος AM. Το πλάτος της φασματικής συνιστώσας $f_c \pm 1000$ Hz είναι το ίδιο και στα δύο σήματα.

Να υπολογιστεί ο δείκτης διαμόρφωσης των σημάτων AM και FM.

Απάντηση:

Έστω ότι το ημιτονοειδές σήμα πληροφορίας δίνεται από τη σχέση $a\cos(2\pi f_c t)$ και ότι το πλάτος της φέρουσας είναι $A_c$. Δηλαδή, έστω ότι το διαμορφωμένο κατά AM σήμα δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = [A_c + a\cos(2\pi 1000 t)]\cos(2\pi f_c t).$$

Επειδή η συχνότητα του σήματος πληροφορίας είναι 1000 Hz, το εύρος ζώνης του σήματος AM ισούται με 2000 Hz. Συνεπώς, για τη μέγιστη απόκλιση συχνότητας του σήματος FM ισχύει

$$k_f \max\{a\cos(2\pi f_c t)\} = k_f \cdot a = 4 \times 2000 = 8000 \text{ kHz}$$

Το πλάτος της φασματικής συνιστώσας $f_c \pm 1000$ Hz του σήματος AM ισούται με $\frac{a}{4}$ (το $a$ πολλαπλασιάζεται με δύο διαδοχικά cos()). Επίσης, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το πλάτος της φασματικής συνιστώσας $f_c \pm 1000$ του σήματος FM όταν το σήμα πληροφορίας είναι ημιτονοειδές ισούται με $A_c J_1(\beta)$, όπου $\beta = \frac{k_f \max\{a\cos(2\pi f_c t)\}}{W}$ ο δείκτης διαμόρφωσης του σήματος FM και $J_1(\beta)$ η συνάρτηση Bessel 1ου είδους τάξης 1. Επειδή $k_f \cdot a = 8000$ και $W = 1000$, $\beta = 8$. Από πίνακες ή π.χ. με χρήση Matlab, $J_1(8) = 0.2346$. Συνεπώς, $\frac{a}{4} = A_c 0.2346 \Rightarrow a = 0.9385 A_c$ και

$$\begin{aligned} x(t) &= [A_c + a\cos(2\pi 1000t)]\cos(2\pi f_c t) \\ &= A_c\left[1 + \frac{a}{A_c}\cos(2\pi 1000t)\right]\cos(2\pi f_c t) \\ &= A_c\,[1 + 0.9385\cos(2\pi 1000t)]\cos(2\pi f_c t). \end{aligned}$$

Επομένως, ο δείκτης διαμόρφωσης του σήματος AM ισούται με $\mu = 0.9385$, ενώ ο δείκτης διαμόρφωσης του σήματος FM με $\beta = 8$.

Στη γενική περίπτωση, θα έπρεπε να θεωρήσουμε σήμα πληροφορίας $a\cos(2\pi 1000t + \phi)$ και φέρουσα $A_c\cos(2\pi f_c t + \theta)$. Ωστόσο, δεν αλλάζει τίποτα στα προηγούμενα βήματα (ελέγξτε το).