***b*3)** Se λ_1, λ_2 têm sinais contrários e $d \neq 0$, a equação da quádrica pode tomar a forma

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{11}$$

e a quádrica é um "cilindro hiperbólico".

***b*4)** Se λ_1, λ_2 têm sinais contrários e $d = 0$, a equação (5) transforma-se em

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \tag{12}$$

ou

$$(bx-ay)(bx+ay)=0 \tag{13}$$

e a quádrica é formada por dois planos concorrentes.

***c*)** $c(A)=1$

Neste caso, dois dos valores próprios são nulos. Suporemos, no que se segue, que é $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

***c*1)** Se d tem sinal contrário de λ_1, a equação da quádrica toma a forma

$$x^2-a^2=0 \tag{14}$$

ou

$$(x-a)(x+a)=0 \tag{15}$$

e a quádrica é formada por dois planos paralelos.

***c*2)** Se d tem o mesmo sinal que λ_1, a quádrica é vazia.

***c*3)** Se $d = 0$, a equação tem a forma

$$x^2=0 \tag{16}$$

e a quádrica é formada por um plano.

2.º caso: Quádricas sem centro

Neste caso, um dos valores próprios de $G^{-1}A$ será nulo. No que se segue, suporemos que $\lambda_3 = 0$. Em relação a um referencial $(O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, onde a base é formada por direcções principais de uma dada quádrica, a equação desta toma a forma

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+2mx+2ny+2pz+d=0, \quad \text{com } p\neq 0. \tag{17}$$

***a*)** $c(A)=2$: teremos $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Tomando o ponto

$$D=\left(-\frac{m}{\lambda_1}, -\frac{n}{\lambda_2}, \frac{1}{2p}\left(\frac{m^2}{\lambda_1}+\frac{n^2}{\lambda_2}-d\right)\right)$$

e passando para o referencial $(D; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, a equação da quádrica reveste a forma

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+2pz=0 \tag{18}$$

***a*1)** Se λ_1, λ_2 têm o mesmo sinal, a equação (18) pode escrever-se como

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=kz \tag{19}$$

e a quádrica é um " parabolóide elíptico".

***a*2)** Se λ_1, λ_2 têm sinais contrários, a equação (18) pode escrever-se como

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=kz \tag{20}$$

e a quádrica é um " parabolóide hiperbólico".

***b*)** $c(A)=1$: só um dos valores próprios é não nulo e suporemos que $\lambda_1 \neq 0$.

A equação da quádrica tomará a forma

$$\lambda_1 x^2+2mx+2ny+2pz+d=0 \tag{21}$$

com n e p não simultaneamente nulos.

Tomemos o ponto

$$D \equiv \begin{cases} \left(-\dfrac{m}{\lambda_1}, \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{m^2}{\lambda_1}-d\right), 0\right), & \text{se } n\neq 0 \\[2ex] \left(-\dfrac{m}{\lambda_1}, 0, \dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{m^2}{\lambda_1}-d\right)\right), & \text{se } n=0, p\neq 0 \end{cases}$$

e considerando o referencial $(D; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, a equação da quádrica em relação a este referencial passa a ter a forma

$$\lambda_1 x^2+2xy+2pz=0 \tag{22}$$

Finalmente, se n e p forem ambos não nulos, podemos tomar uma nova base ortonomada $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$, definida pela matriz de mudança de base

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{\sqrt{n^2+p^2}} & \dfrac{p}{\sqrt{n^2+p^2}} \\ 0 & \dfrac{p}{\sqrt{n^2+p^2}} & -\dfrac{n}{\sqrt{n^2+p^2}} \end{bmatrix}$$

e, em relação ao referencial $(D; \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$, a equação da quádrica terá a forma

$$x^2 = k\,y. \tag{23}$$

A quádrica em causa é um "cilindro parabólico".

Exemplos:

1) Consideremos, em $\Re^3$ com o referencial canónico e o produto interno usual, a quádrica de equação $x^2 - y^2 - z^2 + 4x - 6y - 9 = 0$ que se pode escrever na forma

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} - 9 = 0$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = -3 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

temos que $(-2, -3, 0)$ é um centro de simetria da quádrica. Os valores próprios de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são $1, -1$ e $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ são as direcções principais. Como

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - 9 = -4$$

que tem o mesmo sinal que o valor próprio de multiplicidade algébrica 2 e, portanto, a quádrica é um hiperbolóide de duas folhas.

2) Consideremos, em $\Re^3$ com o referencial canónico e o produto interno usual, a quádrica de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + x - 2 = 0$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_3 = -\frac{1}{2} \\ c_2 = 0 \\ -c_1 + c_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

que é um sistema impossível, o que significa que a quádrica não tem centro de simetria. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem os valores próprios 0, 1 e 2 de onde se conclui que a quádrica é um parabolóide elíptico.