



Sucessões

1. Considere as sucessões de termo geral:

- | | | |
|---|-------------------------------|----------------------------------|
| (a) $u_n = 1$ | (b) $u_n = (-1)^n$ | (c) $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$ |
| (d) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ | (e) $u_n = n^2$ | (f) $u_n = [1 + (-1)^n]n$ |
| (g) $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ | (h) $u_n = \frac{n}{n+2}$ | (i) $u_n = \frac{3}{n+5}$ |
| (j) $u_n = \begin{cases} n^4 & \text{se } n \leq 10 \\ 2 & \text{se } n > 10 \end{cases}$ | (k) $u_n = \frac{n+1}{n}$ | (l) $u_n = \frac{n^2-1}{n^2}$ |
| (m) $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ | (n) $u_n = (-1)^n \cos(n\pi)$ | |

e indique, justificando, as que são monótonas, limitadas e as que são convergentes.

2. Mostre que $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, usando a definição.

3. Considere o conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ definido por

$$S = \{x \in \mathbb{R} : |2x^2 - 5| > 3 \wedge x > 0\}.$$

- (a) Mostre que $S =]0, 1[\cup]2, +\infty[$.
- (b) Dê um exemplo de, ou justifique porque não existe, uma sucessão de termos em S que seja:
- não monótona e convergente para 5;
 - estritamente decrescente e convergente para 0;
 - limitada e divergente;
 - não limitada e convergente;
 - não majorada e admita uma subsucessão convergente.

4. Considere o conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ definido por

$$S = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| > 2 \wedge x \geq 0\}.$$

- (a) Mostre que $S = [0, 1[\cup]5, +\infty[$.
- (b) Determine, caso existam, ou justifique porque não existem, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de S .
- (c) Dê um exemplo de uma sucessão, de termos em S , crescente e convergente com limite em $\mathbb{R} \setminus S$.

5. Considere o conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ definido por $S = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \leq \frac{1}{x}\right\}$.

- (a) Mostre que $S =]-\infty, -1] \cup]0, 1]$.
- (b) Dê um exemplo de uma sucessão de termos em S que seja
 - i. estritamente decrescente e convergente com limite em S ;
 - ii. estritamente decrescente e convergente com limite em $\mathbb{R} \setminus S$;
 - iii. estritamente decrescente e divergente;
 - iv. não monótona, convergente, com limite em $\mathbb{R} \setminus S$.

6. Utilizando o teorema das sucessões encaixadas, calcule os seguintes limites:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_n \frac{n!}{n^n} & \text{(c)} \lim_n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \\ \text{(b)} \lim_n \frac{10^n}{n!} & \text{(d)} \lim_n \left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \right) \end{array}$$

7. Calcule os seguintes limites

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_n \frac{1+n^3}{n^2+2n-1} & \text{(b)} \lim_n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n & \text{(c)} \lim_n \frac{2^n+3^n}{3^{n+1}+4} \\ \text{(d)} \lim_n \sqrt{n+5} - \sqrt{n} & \text{(e)} \lim_n \frac{n \cos n}{n^2+24} & \text{(f)} \lim_n \frac{\sqrt{n} - \sin n}{n+2} \\ \text{(g)} \lim_n \left(1 - \frac{3}{n+2} \right)^n & \text{(h)} \lim_n \frac{\cos(n\pi) + \cos(2n\pi)}{n} & \text{(i)} \lim_n \frac{(n+1)! - n!}{n!(n+2)} \\ \text{(j)} \lim_n \sqrt{n^2+2n} - n & \text{(k)} \lim_n \frac{3^n+4^n+5^n}{5^n} & \text{(l)} \lim_n \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n \\ \text{(m)} \lim_n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n+1} & \text{(n)} \lim_n \frac{2^{n+1} + (-3)^n + 6^n}{6^n+1} & \text{(o)} \lim_n \frac{e^n-1}{5^n} \end{array}$$

8. Considere a sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_1 = -2^{-1}$ e $u_{n+1} = -2u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (a) $(u_n)_n$ é monótona;
- (b) $(u_n)_n$ é limitada;
- (c) $(u_n)_n$ é convergente.

9. Considere a sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_1 = 5$ e $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (a) $(u_n)_n$ é monótona;
- (b) $(u_n)_n$ é limitada;
- (c) $(u_n)_n$ é convergente.

10. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (a) toda a subsucessão de uma sucessão convergente é também convergente;
- (b) toda a subsucessão de uma sucessão divergente é também divergente;
- (c) se $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, então $(u_n)_n$ é convergente;
- (d) se $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 5\}$, então $(u_n)_n$ é divergente;
- (e) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões divergentes, então a sucessão $(u_n + v_n)_n$ é divergente;
- (f) se $(u_n)_n$ e $(v_n + u_n)_n$ são sucessões convergentes, então a sucessão $(v_n)_n$ é convergente;
- (g) sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ sucessões reais. Se $\lim_n u_n v_n = 0$ então $\lim_n u_n = 0$ ou $\lim_n v_n = 0$;
- (h) se $\lim_n |u_n| = 1$, então $\lim_n u_n = 1$;
- (i) se $(u_n)_n$ é uma sucessão limitada, então $(u_n)_n$ é convergente;
- (j) qualquer sucessão crescente de termos em $] -1, 1[$ é convergente;
- (k) se $(u_n)_n$ é uma sucessão tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in]0, 1[$ e $u_{2n-1} \in]1, 2[$, então $(u_n)_n$ é divergente;
- (l) se $(u_n)_n$ é uma sucessão decrescente de termos positivos, então $(u_n)_n$ é convergente.

11. Que pode dizer de $\lim_n u_n$ em cada um dos seguintes casos:

- (a) $(u_n)_n$ possui uma subsucessão convergente para a e outra convergente para b , com $b \neq a$;
- (b) $(u_n)_n$ é tal que $(u_{2n})_n$ e $(u_{2n-1})_n$ convergem para a ;
- (c) $(u_n)_n$ é decrescente e $u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$;
- (d) $(u_n)_n$ é uma sucessão crescente em $]2, 5[$;
- (e) $(u_n)_n$ é crescente e de termos negativos;
- (f) $(u_n)_n$ é decrescente e de termos positivos.

12. Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo, ou justifique porque não existe:

- (a) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\lim_n u_n = 0, \lim_n v_n = +\infty$ e $\lim_n (u_n v_n) = 1$;
- (b) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\lim_n u_n = 0, \lim_n v_n = +\infty$ mas $\lim_n (u_n v_n)$ não exista;
- (c) uma sucessão convergente e não monótona;
- (d) uma sucessão não monótona e não limitada;
- (e) uma sucessão de números racionais convergente para um número irracional;
- (f) uma sucessão de números irracionais convergente para um número racional;
- (g) uma sucessão crescente, convergente para zero;
- (h) uma sucessão com duas subsucessões divergentes;
- (i) uma sucessão de números irracionais, estritamente decrescente, convergente para π ;
- (j) uma sucessão não majorada que admite uma subsucessão convergente;
- (k) uma sucessão convergente para zero e com todos os termos em $\mathbb{R} \setminus]-1, 1[$;
- (l) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1, 2\}$ e $(u_n)_n$ é convergente;
- (m) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $(u_n)_n$ é limitada mas divergente;
- (n) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $(u_n)_n$ é alternada e convergente;
- (o) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $(u_n)_n$ é estritamente monótona, $u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim_n u_n = 2$.