6. Valores e vetores próprios

Neste capítulo, $\mathbb{K}$ representará, ou o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, ou o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Um vetor x de $\mathbb{K}^n$ será denotado na forma de matriz:

$$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \text{“vetor” coluna.}$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz quadrada. Se $x \in \mathbb{K}^n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ são tais que

$$x \neq 0_{\mathbb{K}^n} \quad \text{e} \quad Ax = \lambda x$$

então diz-se que x é um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ de A (e que λ é um valor próprio associado ao vetor próprio x de A).

Exemplos

1. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2x.$$

   Logo, 2 é valor próprio de A associado ao vetor próprio $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de A.

2. Para $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Ax = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x.$$

   Portanto, 3 é valor próprio de A associado a cada vetor de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

a) Mostre que $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ são vetores próprios de A e indique os valores próprios correspondentes.

b) Questão análoga a **a)** para $\begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$, com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Observação

Sejam $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ um valor próprio de A e

$$\begin{aligned} P_\lambda &= \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = \lambda x\} \\ &= \{x \in \mathbb{K}^n : (A - \lambda I_n)x = 0\}. \end{aligned}$$

Note-se que:

(i) $P_\lambda = N(A - \lambda I_n)$, ou seja, P_λ é o *núcleo* ou *espaço nulo* da matriz $A - \lambda I_n$ (ver p. 26 do cap. 3 e p. 8 do cap. 4).

(ii) $P_\lambda \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\} = \{$vetores próprios de A associados a $\lambda\}$.

- O subespaço P_λ é chamado o *subespaço próprio* de A *associado ao valor próprio* λ.

Teorema

Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tem-se que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um valor próprio de A se e só se

$$|A - \lambda I_n| = 0.$$

Demonstração: Para um $\lambda \in \mathbb{K}$ são válidas as seguintes equivalências,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ é valor próprio de } A \quad & \Leftrightarrow Ax = \lambda x \text{ para algum } x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\
& \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)x = 0 \text{ para algum } x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\
& \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)x = 0 \text{ é um sistema indeterminado} \\
& \Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ é uma matriz não invertível} \\
& \Leftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Exemplo

Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

e um número λ tem-se

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\Big((1-\lambda)(-3-\lambda)+2\Big) = (2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-1). \end{aligned}$$

Por conseguinte, os valores próprios de A são os números λ tais que $(2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-1)=0$. Ora,

$$\begin{aligned} (2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-1)=0 &\Leftrightarrow \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda^2+2\lambda-1=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = \tfrac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1\pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclui-se assim que os valores próprios de A são: $2,\ -1+\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}$.

Definição

Dada uma matriz quadrada A, chama-se

- *polinómio característico* de A ao polinómio $|A - xI_n|$. Note-se que $|A - xI_n|$ é um polinómio na variável x, e será denotado por $p_A(x)$.
- *equação característica* de A à equação $p_A(x) = 0$.

Assim, no caso da matriz A do exemplo anterior, tem-se que:

- O polinómio característico de A é

$$p_A(x) = (2 - x)(x^2 + 2x - 1) = -x^3 + 5x - 2.$$

- A equação característica de A é

$$-x^3 + 5x - 2 = 0.$$

Proposição

Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz de ordem n, então o seu polinómio característico tem grau n sendo da forma

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, sendo de grau n, o polinómio característico de uma matriz de ordem n tem exatamente n zeros (possivelmente não todos distintos) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Isto é, o polinómio $p_A(x)$ pode escrever-se na forma

$$p_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n).$$

Tem-se então o resultado seguinte.

Proposição

Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz de ordem n, então A tem no máximo n valores próprios distintos.

Teorema

Os valores próprios de uma matriz *triangular* são os elementos da diagonal.

Demonstração: Suponhamos que A é uma matriz *triangular inferior*, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = (a_{11} - x)(a_{22} - x)\cdots(a_{nn} - x).$$

Portanto, os valores próprios de A são $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ pois são estes os zeros do polinómio característico de A.

O caso *triangular superior* é análogo. $\square$

Exemplo

Determinemos os *vetores próprios* da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

do exemplo da página 7, associados ao valor próprio 2. Temos então de resolver o sistema $(A - 2I_3)x = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} x = 0,$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} x = 0.$$

Ora, este sistema tem solução $x_3 = 0$ e $x_1 = -2x_2$.

Exemplo (continuação)

Tomando $x_2 = \alpha$, conclui-se que

$$P_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

donde os *vetores próprios* de A associados ao valor próprio 2 são todos os vetores

$$\begin{bmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad \text{com } \alpha \neq 0.$$

Definição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. As matrizes A e B dizem-se *semelhantes* se existe uma matriz invertível $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$B = S^{-1}AS.$$

Exemplo

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como se pode verificar, S é invertível tendo-se

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e $S^{-1}AS$ são semelhantes.

Teorema

Duas matrizes semelhantes têm os mesmos polinómios característicos e, por isso, têm os mesmos valores próprios.

Demonstração: Suponhamos que A e B são matrizes semelhantes, donde $B = S^{-1}AS$ para alguma matriz invertível S. Então

$$\begin{aligned} p_B(x) &= |B - xI_n| = |S^{-1}AS - xI_n| = |S^{-1}AS - xS^{-1}I_nS| \\ &= |S^{-1}(A - xI_n)S| = |S^{-1}|\,|A - xI_n|\,|S| \\ &= |S^{-1}|\,|S|\,|A - xI_n| = |A - xI_n| \\ &= p_A(x). \end{aligned} \qquad \square$$

Resulta deste teorema que a matriz A do exemplo anterior tem -2 e 4 como valores próprios (nesse exemplo a matriz $S^{-1}AS$ é triangular e, por isso, os seus valores próprios são os elementos da diagonal).

Note-se no entanto que duas matrizes semelhantes podem ter vetores próprios distintos.

Exemplo

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = B$$

o que mostra que A e B são semelhantes.

Logo A e B têm os mesmos valores próprios, que são o 0 e o 2 (elementos da diagonal da matriz B, que é triangular).

Exemplo (continuação)

Calculando os subespaços próprios de A e B obtém-se

$$P_0(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad P_2(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

$$P_0(B) = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad P_2(B) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Portanto $P_0(A) \neq P_0(B)$ e $P_2(A) \neq P_2(B)$.

Para além disso, os vetores da forma $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$, com $\alpha \neq 0$, são vetores próprios de B mas não são de A, enquanto que os da forma $\begin{bmatrix} -\alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \neq 0$, são vetores próprios de A mas não são de B.

Definição

Uma matriz A diz-se *diagonalizável* se A é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existe uma matriz invertível S e uma matriz diagonal D tais que

$$D = S^{-1}AS.$$

Uma matriz S nestas condições diz-se uma matriz *diagonalizante* de A.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável. De facto,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal.

TEOREMA

Uma matriz A de ordem n é diagonalizável se e só se A tem n vetores próprios linearmente independentes.

Neste caso, se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são n vetores próprios de A linearmente independentes associados a valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (não necessariamente distintos), então a matriz

$$S = [v_1 \;\; v_2 \cdots v_n]$$

cuja coluna j é v_j é uma matriz diagonalizante de A, e

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e suponhamos que

- λ_1 e λ_2 são valores próprios distintos de A;
- $u_1, u_2, \ldots, u_k$ são vetores próprios de A, linearmente independentes, associados a λ_1;
- $v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ são vetores próprios de A, linearmente independentes, associados a λ_2.

Então

$$u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_\ell$$

são vetores linearmente independentes.

Como consequência do teorema anterior obtém-se o seguinte resultado.

Corolário

Seja A uma matriz de ordem n. Se A tem n valores próprios distintos, então A é diagonalizável.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tem os valores próprios -1 e 3, tendo-se

$$P_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad P_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Para $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

o que prova que A é diagonalizável e que S é uma matriz diagonalizante de A.

Mais geralmente, tem-se o seguinte corolário.

Corolário

Seja A uma matriz de ordem n e suponhamos que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são todos os valores próprios distintos de A. Então A é diagonalizável se e só se

$$dim(P_{\lambda_1}) + \cdots + dim(P_{\lambda_k}) = n,$$

ou seja, o somatório das dimensões dos subespaços próprios associados aos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ é igual a n.

Exemplo

Como se pode verificar, a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem os valores próprios 1 e 2 e $dim(P_1) = dim(P_2) = 1$. Como A tem ordem 3 e $1 + 1 \neq 3$ conclui-se que A não é diagonalizável.