ÁLGEBRA LINEAR EE

Exercícios - Espaços Vetoriais

1. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

   (a) Verifique se $(1,-4,5)$ é combinação linear de $(1,-1,1)$ e $(3,0,-1)$.

   O vetor $(1,-4,5)$ é combinação linear de $(1,-1,1)$ e $(3,0,1)$ se e só se existem $a,b \in \mathbb{R}$ tais que
   $$(1,-4,5) = a(1,-1,1) + b(3,0,-1),$$
   i.e., se e só se o sistema
   $$\begin{cases} a+3b=1 \\ -a=-4 \\ a-b=5 \end{cases}$$
   é possível.

   Seja $[A|b]$ a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|b]$, tem-se

   $$[A|b] = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right]$$
   $$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$
   $$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   Logo, o sistema anterior é equivalente ao sistema
   $$\begin{cases} a=4 \\ b=-1 \end{cases}$$

   O sistema é possível e, portanto, o vetor $(1,-4,5)$ é combinação linear de $(1,-1,1)$ e $(3,0,-1)$. De facto, tem-se $(1,-4,5) = 4(1,-1,1) - 1(3,0,-1)$.

   (b) Verifique se $(3,0,2)$ é combinação linear de vetores de $\{(1,0,0),\ (1,0,1),\ (-1,0,2),\ (0,2,1)\}$.

   O vetor $(3,0,2)$ é combinação linear de vetores de $\{(1,0,0),\ (1,0,1),\ (-1,0,2),\ (0,2,1)\}$ se e só se existem $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que
   $$(3,0,2) = a(1,0,0) + b(1,0,1) + c(-1,0,2) + d(0,2,1),$$
   i.e., se e só se o sistema
   $$\begin{cases} a+b-c=3 \\ 2d=0 \\ b+2c+d=2 \end{cases}$$

é possível.

Seja $[A|b]$ a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Logo, o sistema anterior é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} a - 3c = 1 \\ b + 2c = 2 \\ d = 0 \end{cases}$$

Uma vez que $car(A) = car([A|b])$, o sistema é possível. Portanto, o vetor $(3, 0, 2)$ é combinação linear de vetores de $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (-1, 0, 2), (0, 2, 1)\}$. O conjunto de soluções deste sistema é

$$\{(1 + 3c, 2 - 2c, c, 0) \in \mathbb{R}^4 \,|\, c \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(3, 0, 2) = (1 + 3c)(1, 0, 0) + (2 - 2c)(1, 0, 1) + c(-1, 0, 2) + 0(0, 2, 1).$$

(c) Determine os valores de k tais que o vetor $(2, k, -1)$ é combinação linear dos vetores $(1, 3, 1)$ e $(-1, 2, 1)$.

O vetor $(2, k, -1)$ é combinação linear dos vetores $(1, 3, 1)$ e $(-1, 2, 1)$ se e só se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(2, k, -1) = a(1, 3, 1) + b(-1, 2, 1),$$

i.e., se e só se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ 3a + 2b = k \\ a + b = -1 \end{cases}$$

Seja $[A|b]$ a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & k \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & k-6 \\ 0 & 2 & -3 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{5} L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & k-6 \\ 0 & 0 & \frac{-2k-3}{5} \end{array}\right]$$

Tem-se $car(A) = 2$. O sistema é possível se e só se $car(A) = car([A|b])$. Assim, o sistema anterior é possível se e só se $k = -\frac{3}{2}$.

Logo, o vetor $(2, k, -1)$ é combinação linear dos vetores $(1, 3, 1)$ e $(-1, 2, 1)$ se e só se $k = -\frac{3}{2}$.

2. Verifique se são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ os subconjuntos:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0, y = z\}$;

Seja $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0, y = z\}$.

(1) Da definição de $\mathcal{S}_1$ é imediato que $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^3$.

(2) Tem-se $(0, 0, 0) \in \mathcal{S}_1$, logo $\mathcal{S}_1 \neq \varnothing$.

(3) Sejam $u = (x, y, z), v = (a, b, c) \in \mathcal{S}_1$. Então

$$\begin{array}{ll} x - 2y = 0, & y = z, \\ a - 2b = 0, & b = c. \end{array}$$

Uma vez que $u + v = (x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{l} (x + a) - 2(y + b) = (x - 2y) + (a - 2b) = 0 + 0 = 0, \\ y + b = z + c, \end{array}$$

então $u + v \in \mathcal{S}_1$.

(4) Seja $u = (x, y, z) \in \mathcal{S}_1$. Então $x - 2y = 0$ e $y = z$. Uma vez que $\alpha u = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{l} \alpha x - 2\alpha y = \alpha(x - 2y) = 0, \\ \alpha y = \alpha z, \end{array}$$

então $\alpha u \in \mathcal{S}_1$.

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que $\mathcal{S}_1$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 1\}$;

Seja $\mathcal{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 1\}$. Uma vez que $(0, 0, 0) \notin \mathcal{S}_2$, então $\mathcal{S}_2$ n ão é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(0, 2b - a, 3a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Seja $S = \{(0, 2b - a, 3a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. O conjunto S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, pois:

(1) $S \subseteq \mathbb{R}^3$ (imediato por definição de S).

(2) $S \neq \emptyset$; por exemplo, $(0, 0, 0) \in S$.

(3) Para quaisquer $x, y \in S$, $x + y \in S$. De facto, se $x, y \in S$, então $x = (0, 2b_1 - a_1, 3a_1)$, $y = (0, 2b_2 - a_2, 3a_2)$, para alguns $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. então

$$x + y = (0, 2(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2), 3(a_1 + a_2)), \text{ com } a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{R}.$$

Logo, $x + y \in S$.

(4) Para qualquer $x \in S$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in S$. De facto, se $x \in S$, tem-se $x = (0, 2b_1 - a_1, 3a_1)$, para alguns $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\lambda x = (0, 2(\lambda b_1) - \lambda a_1, 3(\lambda a_1)), \text{ com } \lambda a_1, \lambda b_1 \in \mathbb{R},$$

e, portanto, $\lambda x \in S$.

3. Em cada caso, calcule o subespaço vetorial $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ e indique a forma geral de um vetor de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

(a) $\mathcal{S}_1 = \{(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = -x_4, x_2 + x_3 = 2x_1\}$ e
$\mathcal{S}_2 = \{(y_1, \ldots, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 = 0, y_2 + y_3 = -y_4\}$;

Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$. então

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_4 \\ a_2 + a_3 = 2a_1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 + a_3 = -a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -a_3 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{(0, -k, k, 0) \mid k \in \mathbb{R}\}$.

(b) $\mathcal{S}_1 = \{(b, 2b - a, a + b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{(\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$. então $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathcal{S}_1$ se e só se existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} b = a_1 \\ 2b - a = a_2 \\ a + b = a_3 \\ c = a_4 \end{cases}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada do sistema anterior, tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & a_1 \\ -1 & 2 & 0 & a_2 \\ 1 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_3 \\ -1 & 2 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 3 & 0 & a_2 + a_3 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_2 + a_3}{3} \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-a_2 + 2a_3}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_2 + a_3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3a_1 - a_2 - a_3}{3} \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-a_2 + 2a_3}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_2 + a_3}{3} \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3a_1 - a_2 - a_3}{3} \end{array}\right]$$

Da última matriz conclui-se que o sistema anterior é possível se e só se $\frac{3a_1 - a_2 - a_3}{3} = 0$, i.e., se e só se $3a_1 - a_2 - a_3 = 0$. Logo,

$$\mathcal{S}_1 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 3a - b - c = 0\}.$$

Por outro lado, $(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathcal{S}_2$ se e só se existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases}\alpha=a_1\\ 3\alpha=a_2\\ 0=a_3\\ -\alpha=a_4\end{cases}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada do sistema anterior, tem-se

$$\left[\begin{array}{r|c}1&a_1\\3&a_2\\0&a_3\\-1&a_4\end{array}\right]\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4+L_1]{L2\leftarrow L_2-3L_1}\left[\begin{array}{c|c}1&a_1\\0&a_2-3a_1\\0&a_3\\0&a_4+a_1\end{array}\right]$$

Da última matriz conclui-se que o sistema anterior é possível se e só se $a_2-3a_1=0$, $a_3=0$ e $a_4+a_1=0$. Logo,

$$\mathcal{S}_1=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4:-3a+b=0,a+d=0,c=0\}.$$

Assim, dado $(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4$, tem-se

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2\Leftrightarrow\begin{cases}3a_1-a_2-a_3=0\\a_2-3a_1=0\\a_3=0\\a_4+a_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+a_4=0\\a_2+3a_4=0\\a_3=0\end{cases}$$

Logo, $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2=\{(-d,-3d,0,d)\,|\,d\in\mathbb{R}\}$.

Resolução alternativa:

Seja $u\in\mathbb{R}^4$.

Tem-se

$$\begin{aligned}u\in\ \mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2 &\Leftrightarrow u\in\mathcal{S}_1 \text{ e } u\in\mathcal{S}_2\\
&\Leftrightarrow \text{ existem } a,b,c,\alpha\in\mathbb{R} \text{ tais que}\\
&\quad\ b\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\3\\0\\-1\end{bmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&-1\\2&-1&0&-3\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\a\\c\\\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\\
&\overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&-1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\a\\c\\\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}b-\alpha=0\\-a-\alpha=0\\c+\alpha=0\\0=0\end{cases}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = \alpha \\ a = -\alpha \\ c = -\alpha \\ 0 = 0 \end{cases}$$

(*) Eliminação de Gauss.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 &= \{\alpha(1,2,1,0) - \alpha(0,-1,1,0) - \alpha(0,0,0,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha\ )\} \\ &= <(1,3,0,-1)>. \end{aligned}$$

4. Calcule o conjunto das combinações lineares de:

   (a) $\{(1,2,-1)\}$;

   Seja $C = \{(1,2,-1)\}$.

   $<C> = \{\alpha(1,2,-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 2\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

   (b) $\{(1,-1,1),\ (2,0,1),\ (0,2,-1)\}$;

   Seja $C = \{(1,-1,1),\ (2,0,1),\ (0,2,-1)\}$.

$$\begin{aligned} <C> &= \{\alpha(1,-1,1) + \beta(2,0,1) + \gamma\,(0,2,-1) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha + 2\beta, -\alpha + 2\gamma, \alpha + \beta - \gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   (c) $\{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,2)\}$.

   Seja $C = \{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,2)\}$.

$$\begin{aligned} <C> &= \{\alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma\,(1,1,2) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \gamma, \alpha + \beta + 2\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

5. Em cada um dos seguintes casos determine $\langle C \rangle$, identificando o sistema de equações lineares cujo conjunto de soluções é $\langle C \rangle$:

   (a) $C = \{(1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,1,1)\}$;

   Dado $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4$, tem-se $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \langle C \rangle$ se e só se existem $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(1,0,0,0) + b(1,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,1,1) = (a_1,a_2,a_3,a_4);$$

   i.e., se e só se o sistema seguinte é possível

$$\begin{cases} a + b = a_1 \\ b = a_2 \\ c + d = a_3 \\ d = a_4 \end{cases}$$

   Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_4}{\overset{L1 \leftarrow L_1 - L2}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 - a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_3 - a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right]$$

O sistema anterior é possível, para quaisquer $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Assim, $\langle C \rangle = \mathbb{R}^4$.

O sistema

$$\left\{ \; 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \right.$$

admite como conjunto de soluções o conjunto $\langle C \rangle$.

(b) $C = \{(1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (3,2,-1,-1),\ (0,0,1,1)\}$;

Dado $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, tem-se $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \langle C \rangle$ se e só se existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(1,0,0,0) + b(1,1,0,0) + c(3,2,-1,-1) + d(0,0,1,1) = (a_1, a_2, a_3, a_4);$$

i.e., se e só se o sistema seguinte é possível

$$\begin{cases} a + b + 3c = a_1 \\ b + 2c = a_2 \\ -c + d = a_3 \\ -c + d = a_4 \end{cases}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a_4 \end{array}\right] \overset{L1 \leftarrow L_1 - L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a_1 - a_2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a_4 \end{array}\right]$$

$$\overset{L3 \leftarrow -L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a_1 - a_2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a_4 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\overset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L2 - 2L_3}}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & a_2 + 2a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 - a_3 \end{array}\right]$$

O sistema anterior é possível se e só se $a_4 - a_3 = 0$. Assim,

$$\langle C \rangle = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid -c + d = 0\}.$$

O sistema

$$\left\{ \; 0x_1 + 0x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right.$$

admite como conjunto de soluções o conjunto $\langle C \rangle$.

(c) $C = \{(2,1,0,0),\ (2,0,2,0),\ (3,1,1,0)\}$.

Dado $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, tem-se $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \langle C \rangle$ se e só se existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(2,1,0,0) + b(2,0,2,0) + c(3,1,1,0) = (a_1, a_2, a_3, a_4);$$

i.e., se e só se o sistema seguinte é possível

$$\begin{cases} 2a+2b+3c=a_1 \\ a+c=a_2 \\ 2b+c=a_3 \\ 0=a_4 \end{cases}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & a_1 \\ 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 2 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{L1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{a_1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 2 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{a_1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & a_2-\frac{a_1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2]{L3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & a_2+a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1+2a_2+a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L2 \leftarrow -L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -a_2-a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1+2a_2+a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right]$$

O sistema anterior é possível se e só se $-a_1+2a_2+a_3=0$ e $a_4=0$. Assim,

$$\langle C\rangle = \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid -a+2b+c=0, d=0\}.$$

O sistema

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$$

admite como conjunto de soluções o conjunto $\langle C\rangle$.

6. Determine um conjunto gerador de cada um dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

(a) $\mathcal{S}=\{(x_1,\ldots,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1=-x_4, x_2+x_3=2x_1\}$;

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1=-x_4, x_2+x_3=2x_1\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1=-x_4, x_2=-x_3-2x_4\} \\ &= \{(-x_4,-x_3-2x_4,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_3,x_4\in\mathbb{R}\} \\ &= \{x_4(-1,-2,0,1)+x_3(0,-1,1,0) \mid x_3,x_4\in\mathbb{R}\} \\ &= <(-1,-1,0,1),(0,-1,1,)>. \end{aligned}$$

Logo, $\{(-1,-1,0,1),(0,-1,1,)\}$ é um conjunto gerador de S.

(b) $\mathcal{S}=\{(y_1,\ldots,y_4)\in\mathbb{R}^4 \mid y_1=0, y_2+y_3+y_4=0\}$;

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(0,-y_3-y_4,y_3,y_4)\in\mathbb{R}^4\} \\ &= \{y_3(0,-1,1,0)+y_4(0,-1,0,1)\in\mathbb{R}^4\} \\ &= <(0,-1,1,0),(0,-1,0,1)>. \end{aligned}$$

Logo, $\{(0,-1,1,0),(0,-1,0,1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{S}$.

(c) $\mathcal{S} = \{(\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(1,3,0,-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= <(1,3,0,-1)> . \end{aligned}$$

Logo, $\{(1,3,0,-1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{S}$.

(d) $\mathcal{S} = \{(b, 2b-a, a+b, c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$;

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(b, 2b-a, a+b, c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b(1,2,1,0) + (0,-1,1,0) + c(0,0,0,1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= <(1,2,1,0), (0,-1,1,0), (0,0,0,1)> . \end{aligned}$$

Logo, $C = \{(1,2,1,0), (0,-1,1,0), (0,0,0,1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{S}$.

(e) $\mathcal{S} = \langle (1,1,2,1), (0,-1,1,0), (2,3,3,2), (1,0,-2,1) \rangle$.

Exemplos de conjuntos geradores de $\mathcal{S}$:

- $C_1 = \{(1,1,2,1), (0,-1,1,0), (2,3,3,2), (1,0,-2,1)\}$;

- $C_2 = \{(1,1,2,1), (0,-1,1,0), (1,0,-2,1)\}$
(pois $(2,3,3,2) = 2(1,1,2,1) - (0,-1,1,0) + 0.(1,0,-2,1)$);

- $C_3 = \{(1,0,3,1), (0,-1,1,0), (2,3,3,2), (1,0,-2,1)\}$
(atendendo a que $(1,0,3,1) = 1.(1,1,2,1) + 1.(0,-1,1,0) + 0.(2,3,3,2) + 0.(1,0,-2,1)$).

7. Em cada um dos seguintes casos diga se os vetores são linearmente dependentes e, em caso afirmativo, escreva um deles como combinação linear dos outros:

(a) $(0,-1,0), (-1,1,1)$ e $(2,0,1)$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$. Diz-se que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes se, para quaisquer escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + v_n = 0_{\mathcal{V}} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Os vetores $(0,-1,0)$, $(-1,1,1)$, $(2,0,1)$ são linearmente independentes se e só se, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(0,-1,0) + \alpha_2(-1,1,1) + \alpha_3(2,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

se e só se o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo e, portanto, é possível).

Seja A a matriz simples do sistema. Aplicando o método de Gauss à matriz simples do sistema, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Como $car(A) = 3 = n^o$ de incógnitas , o sistema é possível e determinado. Logo, os vetores indicados são linearmente independentes.

(b) $(0,-1,1),(0,1,-1),(-2,0,1)$ e $(1,-1,0)$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

Os vetores $(0,-1,1),(0,1,-1),(-2,0,1)$ e $(1,-1,0)$ são linearmente independentes se e só se, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$,

$$\alpha_1(0,-1,1)+\alpha_2(0,-1,1)+\alpha_3(-2,0,1)+\alpha_4(1,-1,0)=(0,0,0)\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

se e só se o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo e, portanto, é possível).

Seja A a matriz simples do sistema. Como $car(A)\le 3<4=n^o$ de incógnitas, o sistema é possível e indeterminado. Logo, os vetores indicados não são linearmente independentes.

[Observe-se que

$$(0,-1,1)=-1(0,1,-1)+0(-2,0,1)+0(1,-1,0)$$

donde segue

$$(0,-1,1)+1(0,1,-1)+0(-2,0,1)+0(1,-1,0)=(0,0,0)$$

Uma vez que existem escalares α_1, α_2, α_3, α_4 não todos nulos tais que

$$\alpha_1(0,-1,1)+\alpha_2(0,-1,1)+\alpha_3(-2,0,1)+\alpha_4(1,-1,0)=(0,0,0),$$

então os vetores não são linearmente independentes.]

(c) $(0,1,1,0),(-1,0,1,1)$ e $(1,1,0,-1)$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Os vetores $(0,1,1,0),(-1,0,1,1)$ e $(1,1,0,-1)$ são linearmente independentes se e só se, para quaisquer escalares α_1, α_2, α_3,

$$\alpha_1(0,1,1,0)+\alpha_2(-1,0,1,1)+\alpha_3(1,1,0,-1)=(0,0,0,0)\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.$$

Uma vez que

$$(1,1,0,-1)=-1(-1,0,1,1)+1(0,1,1,0),$$

segue que

$$1(1,1,0,-1)+1(-1,0,1,1)-1(0,1,1,0)=(0,0,0,0).$$

Considerando que existem escalares α_1, α_2, α_3, não todos nulos tais que

$$\alpha_1(1,1,0,-1)+\alpha_2(-1,0,1,1)+\alpha_3(0,1,1,0)=(0,0,0,0),$$

então os vetores indicados não são linearmente independentes.

(d) $(0,1,1,0),(-1,0,1,1),(1,1,0,-1)$ e $(1,0,0,-1)$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Os vetores $(0,1,1,0),(-1,0,1,1),(1,1,0,-1),(1,0,0,-1)$ são linearmente independentes se e só se, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$\alpha_1(0,1,1,0)+\alpha_2(-1,0,1,1)+\alpha_3(1,1,0,-1)+\alpha_4(1,0,0,-1)=(0,0,0,0)$
$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$

se e só se o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é possível e determinado.

Aplicando o método de Gauss à matriz simples do sistema, tem-se

$$\begin{aligned} A = & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{L2 \leftarrow L_2 - L_1} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como $car(A) = 3 < 4 = n^o$ de incógnitas, o sistema é possível e indeterminado. Logo, os vetores indicados não são linearmente independentes.

8. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Calcule as coordenadas de

(a) $(1,0,0)$ relativamente à base $((1,1,1),\ (-1,1,0),\ (1,0,-1))$;

Uma vez que $((1,1,1),\ (-1,1,0),\ (1,0,-1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, cada vetor de $\mathbb{R}^3$ escreve-se de modo Ãnico como combinação linear dos vetores desta base.

Pretende-se determinar $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,0,0) = \alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(-1,1,0)+\alpha_3(1,0,-1),$$

ou seja, pretende-se determinar uma solução do sistema

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=1 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \\ \alpha_1-\alpha_3=0 \end{cases}$$

Seja

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de Gauss-Jordan à matriz ampliada do sistema, obtem-se a matriz em forma de escada reduzida

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

O sistema anterior é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{3} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{3} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Portanto,

$$(1,0,0) = \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{3}(-1,1,0) + \frac{1}{3}(1,0,-1).$$

(b) $(1,0,0)$ relativamente à base $((0,-1,1),\ (0,1,0),\ (2,0,-1))$.

Resolvendo por um processo análogo ao usado na alínea anterior, obtem-se

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(0,1,0) + \frac{1}{2}(2,0,-1).$$

9. Sejam u, v e w três vetores linearmente independentes de um espaço vetorial. Verifique se são linearmente independentes os seguintes vetores:

(a) $u+v$, $v+w$ e $u+w$;

Sejam u, v, w vetores linearmente independentes de um espaço vetorial $\mathcal{V}$. Os vetores $u+v$, $v+w$ e $u+w$ são linearmente independentes se e só se, para quaisquer escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

$$\alpha_1(u+v) + \alpha_2(v+w) + \alpha_3(u+w) = 0_{\mathcal{V}} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Considerando que

$$\begin{aligned} & \alpha_1(u+v) + \alpha_2(v+w) + \alpha_3(u+w) = 0_{\mathcal{V}} \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha_1+\alpha_3)u + (\alpha_1+\alpha_2)v + (\alpha_2+\alpha_3)w = 0_{\mathcal{V}} \\ \overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ & \begin{cases} \alpha_1+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2+\alpha_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

conclui-se que os vetores indicados são linearmente independentes.

[(1) Os vetores u, v, w são linearmente independentes.]

(b) $u+v+w,\ u-w,\ 2v+w,\ 3u-v-w$;

Os vetores $u+v+w$, $u-w$, $2v+w$, $3u-v-w$ são linearmente independentes se e só se, para quaisquer escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$,

$$\alpha_1(u+v+w)+\alpha_2(u-w)+\alpha_3(2v+w)+\alpha_4(3u-v-w) = 0_{\mathcal{V}} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned}
& \alpha_1(u+v+w)+\alpha_2(u-w)+\alpha_3(2v+w)+\alpha_4(3u-v-w) = 0_{\mathcal{V}} \\
\Leftrightarrow\ & (\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_4)u + (\alpha_1+2\alpha_3-\alpha_4)v + (\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)w = 0_{\mathcal{V}} \\
\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ & \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1+2\alpha_3-\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{5}{3}\alpha_4 \\ \alpha_2 = -\frac{4}{3}\alpha_4 \\ \alpha_3 = \frac{4}{3}\alpha_4 \end{cases}
\end{aligned}$$

conclui-se que os vetores não são linearmente independentes.

Para qualquer $\alpha_4 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$-\frac{5}{3}\alpha_4(u+v+w) + -\frac{4}{3}\alpha_4(u-w) - \frac{4}{3}\alpha_4(2v+w) + \alpha_4(3u-v-w) = 0_{\mathcal{V}}$$

[(1) Os vetores u, v, w são linearmente independentes.]

(c) $u-w$, $u+v$ e $v+w$.

10. Sejam $u=(x,y),\ v=(z,w) \in \mathbb{R}^2$. Verifique que u e v são linearmente indepedentes se e só se $xw-yz \neq 0$.

Os vetores u e v são linearmente independentes se e só se, para quaisquer escalares α_1 e α_2,

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v = (0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

se e só se o sistema

$$\begin{cases} x\alpha_1 + z\alpha_2 = 0 \\ y\alpha_1 + w\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

é possível determinado

se e só se $\det \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} \neq 0$

se e só se $xw - yz \neq 0$.

11. Caso exista, determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém os vetores u e v, sendo:

(a) $u=(1,1,3)$ e $v=(1,0,3)$;

Os vetores u e v são vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes, logo existe uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém estes vetores.

Seja (e_1, e_2, e_3) a base canónica de $\mathbb{R}^3$ ($e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$). Uma vez que $u = 1e_1 + 1e_2 + 3e_3$, então $< \{e_1, e_2, e_3\} >=< \{u, e_2, e_3\} >$. Considerando que $v = u - e_2$, tem-se $< \{u, e_2, e_3\} >=< \{u, v, e_3\} >$.

Atendendo a que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $\{u, v, e_3\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ com 3 vetores, conclui-se que (u, v, e_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $u = (1, -2, 3)$ e $v = (-1/6, 1/3, -1/2)$;

Os vetores u e v são linearmente dependentes ($v = -\frac{1}{6}u$), logo não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha estes vetores.

(c) $u = (1, 0, -2)$ e $v = (-2, 0, 1)$.

Os vetores $u = (1, 0, -2)$ e $v = (-2, 0, 1)$ são linearmente independentes, logo existe uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclui estes vetores.

Seja (e_1, e_2, e_3) a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Tem-se $u = 1e_1 + 0e_2 - 2e_3$. Logo, $< e_1, e_2, e_3 >=< u, e_2, e_3 >$.

Uma vez que $v = -2u + 0e_2 - 3e_3$, então $< u, e_2, e_3 >=< u, e_2, v >$.

Considerando que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $\{u, e_2, v\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ com 3 vetores, então (u, e_2, v) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

12. Considere os subespaços:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\} \quad e \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}.$$

(a) Verifique que $((0, 0, 1), (1, -1, 2))$ é uma base de S_1.

Os vetores $(0, 0, 1), (1, -1, 2)$ são elementos de S_1.

O conjunto $\{(0, 0, 1), (1, -1, 2)\}$ é um conjunto gerador de S_1, pois

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y\} \\ &= \{(-y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(z + 2y)(0, 0, 1) - y(1, -1, 2) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= < (0, 0, 1), (1, -1, 2) > . \end{aligned}$$

Os vetores $(0, 0, 1), (1, -1, 2)$ são linearmente independentes, uma vez que, para quaisquer escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(0, 0, 1) + \alpha_2(1, -1, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Do observado anteriormente conclui-se que $\{(0, 0, 1), (1, -1, 2)\}$ é uma base de S_1.

(b) Verifique que $((0, 2, 1), (1, 1, 0))$ é uma base de S_2.

Os vetores $(0, 2, 1), (1, 1, 0)$ são elementos de S_2

O conjunto $\{(0, 2, 1), (1, 1, 0)\}$ é um conjunto gerador de S_2. De facto,

$$\begin{array}{rcl} S_2 & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\} \\ & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y-2z\} \\ & = & \{(y-2z,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\} \\ & = & \{z(0,2,1)+(y-2z)(1,1,0) \mid y,z\in\mathbb{R}\} \\ & = & <(0,2,1),(1,1,0)>. \end{array}$$

Os vetores $(0,2,1)$, $(1,1,0)$ são linearmente independentes, pois, para quaisquer escalares $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$,

$$\alpha_1(0,2,1)+\alpha_2(1,1,0)=(0,0,0)\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=0.$$

Logo, $((0,2,1),\ (1,1,0))$ é uma base de S_2.

(c) Calcule uma base de $S_1\cap S_2$.

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} S_1\cap S_2 & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0 \text{ e } x-y+2z=0\} \\ & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-y \text{ e } z=y\} \\ & = & \{(-y,y,y)\in\mathbb{R}^3 \mid y\in\mathbb{R}\} \\ & = & \{y(-1,1,1)\in\mathbb{R}^3 \mid y\in\mathbb{R}\} \\ & = & <(-1,1,1)>. \end{array}$$

Uma vez que $(-1,1,1)\in S_1\cap S_2$, $(-1,1,1)$ é linearmente independente (pois $(-1,1,1)\neq(0,0,0)$) e $\{(-1,1,1)\}$ é um conjunto gerador de $S_1\cap S_2$, então $((-1,1,1))$ é uma base de $S_1\cap S_2$.

13. Usando o conceito de caraterística de uma matriz, determine a dimensão dos subespaços vetoriais:

(a) $\langle(3,-1,4),(2,1,3),(1,0,2)\rangle$ do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$;

Seja

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $car(A)=3$, então $\dim\langle(3,-1,4),(2,1,3),(1,0,2)\rangle=3$.

(b) $\langle(0,1,1,2),(-2,1,0,1),(-2,0,-1,-1),(1,0,3,-1)\rangle$ do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$;

Seja

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $car(A)=3$, então $\dim\langle(0,1,1,2),(-2,1,0,1),(-2,0,-1,-1),(1,0,3,-1)\rangle=3$.

14. Determine os valores de α e de β para os quais

$$((0,1,0,1),(-1,1,0,1),(\alpha,1,\beta,1),(1,1,\alpha,\beta))$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Uma vez que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, então $((0,1,0,1),(-1,1,0,1),(\alpha,1,\beta,1),(1,1,\alpha,\beta))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ se e só se $(0,1,0,1),(-1,1,0,1),(\alpha,1,\beta,1),(1,1,\alpha,\beta)$ são vetores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes

se e só se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e

$$car \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \beta \end{bmatrix} = 4$$

se e só se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

15. Seja S o espaço gerado pelo conjunto $C = \{(1,1,0),\ (1,0,-1),\ (2,1,-1),\ (0,1,1)\}$.

   (a) Verifique que $v = (4,3,-1)$ é combinação linear dos vetores de C.

   O vetor $(4,3,-1)$ é combinação linear dos vetores de C se e só se existem escalares $x,y,z \in \mathbb{R}$ tais

$$(4,3,-1) = x(1,1,0) + y\,(1,0,-1) + z\,(2,1,-1) + w\,(0,1,1),$$

   i.e., se e só se o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + z + w = 3 \\ -y - z + w = -1 \end{cases}$$

   é possível.

   Alicando o método de eliminação de Gauss Ã matriz ampliada do sistema anterior,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Eliminação de Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   conclui-se que o sistema é possível (e indeterminado). Logo, o vetor $v = (4,3,-1)$ é combinação linear dos vetores de C.

   (b) Determine uma base de S.

   $((1,1,0),\ (1,0,-1))$.

   (c) Escreva v como combinação linear dos vetores da base que calculou na alínea anterior.

   $(4,3,-1) = 3(1,1,0) + \ (1,0,-1)$.

16. (a) Verifique se $u = (3,2,1,1)$ é combinação linear de $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (0,-1,2,0)$ e $v_3 = (1,0,1,0)$.

   O vetor $u = (3,2,1,1)$ é combinação linear de $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (0,-1,2,0)$ e $v_3 = (1,0,1,0)$ se e só se existem escalares $x,y,z \in \mathbb{R}$ tais

$$(3,2,1,1) = x(1,1,1,1) + y\,(0,-1,2,0) + z\,(1,0,1,0),$$

i.e., se e só se o sistema

$$\begin{cases} x+z=3 \\ x-y=2 \\ x+2y+z=1 \\ x=1 \end{cases}$$

é possível.

Alicando o método de eliminação de Gauss Ã matriz ampliada do sistema anterior,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Eliminação de Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema é possível (e indeterminado), pelo que $u = (3, 2, 1, 1)$ é combinação linear de v_1, v_2, v_3.

(b) Diga se u, v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes.

O vetor u pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3, logo os vetores u, v_1, v_2, v_3 não são linearmente independentes.

(c) Determine o subespaço S gerado por $\{u, v_1, v_2, v_3\}$.

S$= < u, v_1, v_2, v_3 >= \{\alpha u + \beta v_1 + \gamma v_2 + \delta v_3 \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$.

(d) Determine uma base de S.

Uma vez que u é combinação linear v_1, v_2 e v_3, então $< u, v_1, v_2, v_3 >=< v_1, v_2, v_3 >$. Uma vez que v_1, v_2 e v_3 são vetores de S lineramente independentes e $S =< v_1, v_2, v_3 >$, então $(v_1,\ v_2,\ v_3)$ é uma base de S.

(e) Classifique os seguintes sistemas de equações lineares:

i. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix};$$

possível indeterminado.

item[ii.] $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

possível determinado.

iii. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

possível determinado.

iv. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

possível indeterminado.

17. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^5$ e os subespaços vetoriais

$$\mathcal{U} = \langle (0,3,0,0,6), (1,0,0,2,0), (3,2,0,6,4) \rangle,$$
$$\mathcal{W} = \{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \mid a - b = d - 2b = e - 2b = c = 0\} \text{ e}$$
$$\mathcal{H} = \{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \mid a = b - d\}$$

(a) Calcule uma base de $\mathcal{W}$.

$\mathcal{W} = \{(b,b,0,2b,2b) \mid b \in \mathbb{R}\ \} = <(1,1,0,2,2)>$.
Base: $((1,1,0,2,2))$.

(b) Determine um sistema homogéneo de equações lineares cujo conjunto de soluções seja $\mathcal{U}$.

Dado $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5$, tem-se $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathcal{U}$ se e só se existem $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = a(0,3,0,0,6) + b(1,0,0,2,0) + c(3,2,0,6,4),$$

i.e., se e só se o sistema

$$\begin{cases} b + 3c = x_1 \\ 3a + 2c = x_2 \\ 0 = x_3 \\ 2b + 6c = x_4 \\ 6a + 4c = x_5 \end{cases}$$

é possível.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema anterior

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & x_1 \\ 3 & 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 2 & 6 & x_4 \\ 6 & 0 & 4 & x_5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Eliminação de Gauss}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 1 & 3 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

conclui-se que o sistema anterior é possível se e só se

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 - 2x_1 = 0 \\ x_5 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Logo, o último sistema tem como conjunto de soluções o conjunto U.

(c) Calcule uma base de $\mathcal{U} \cap \mathcal{H}$.

Considerando a alÃnea anterior tem-se

$$\mathcal{U} = \{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \mid d = 2a, e = 2b, c = 0\}.$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U} \cap \mathcal{H} & = & \{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \mid d = 2a, e = 2b, c = 0,\ a = b - d\} \\ & = & \{(\frac{1}{6}e, \frac{1}{2}e, 0, \frac{1}{3}e, e) \mid e \in \mathbb{R}\} \\ & = & <(1,3,0,2,6)> \end{array} .$$

Assim, $((1,3,0,2,6))$ é uma base de $\mathcal{U} \cap \mathcal{H}$.

(d) Calcule uma base de $\mathcal{H}$ que contenha os vetores $(0,1,0,1,0)$ e $(1,2,0,1,0)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \{(b-d,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5\} \\
&= \{b(1,1,0,0,0) + d(-1,0,0,1,0) + c(0,0,1,0,0) + e(0,0,0,0,1), b,d,c,e \in \mathbb{R}\ \} \\
&= <(1,1,0,0,0),(-1,0,0,1,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1)> .
\end{aligned}$$

Os vetores $(1,1,0,0,0),(-1,0,0,1,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1)$ são linearmente independentes, logo $((0,1,0,1,0),\ (1,2,0,1,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1))$ é uma base de $\mathcal{H}$ que contém os vetores $(0,1,0,1,0)$ e $(1,2,0,1,0)$.