

1. Determine o quociente e o resto na divisão de :
 - (a) 149 por -23 ;
 - (b) 310156 por 197;
 - (c) 32 por 45;
 - (d) 0 por 28;
 - (e) -19 por 6;
 - (f) -234 por -9 .
2. Utilizando o Algoritmo da Divisão, mostre que
 - (a) o quadrado de um inteiro é da forma $3k$ ou $3k + 1$, para certo inteiro não negativo k ;
 - (b) $3a^2 - 1$ não é um quadrado perfeito, para todo o inteiro a .
3. Na divisão de 392 por 45, determine:
 - (a) o maior inteiro que se pode somar ao dividendo sem alterar o quociente;
 - (b) o maior inteiro que se pode subtrair ao dividendo sem alterar o quociente.
4. Verifique que, para todo o inteiro $n \geq 1$, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ é um inteiro.
5. Dê exemplos de inteiros a, b e c tais que $a \mid bc$ mas $a \nmid b$ e $a \nmid c$.
6. Mostre que, se $a \mid b$, então $(-a) \mid b$, $a \mid (-b)$ e $(-a) \mid (-b)$.
7. Mostre que, se $a \mid (2x - 3y)$ e $a \mid (4x - 5y)$, então $a \mid y$.
8. Mostre que, para todo o inteiro a , um dos inteiros a e $a + 2$ ou $a + 4$ é divisível por 3.
9. Prove que o produto de quatro inteiros consecutivos é divisível por 24.
10. Utilizando o Algoritmo de Euclides, determine o máximo divisor comum de cada par de inteiros a e b e escreva-o como combinação linear de a e b :
 - (a) $a = 1001$, $b = 357$;
 - (b) $a = 1001$, $b = 33$;
 - (c) $a = 56$, $b = 126$;
 - (d) $a = -90$, $b = 1386$;
 - (e) $a = -2860$, $b = -2310$.
11. Determine, usando o Algoritmo de Euclides, inteiros x e y que satisfaçam:
 - (a) $\text{m.d.c.}(56, 72) = 56x + 72y$;
 - (b) $\text{m.d.c.}(24, 138) = 24x + 138y$.
12. Determine o menor inteiro positivo k da forma $k = 22x + 55y$, onde x e y são inteiros.

13. Quais das seguintes equações diofantinas têm solução?
- (a) $6x + 51y = 22$;
 - (b) $33x + 14y = 115$;
 - (c) $14x + 35y = 93$.
14. Determine as soluções inteiras das seguintes equações diofantinas:
- (a) $56x + 72y = 40$;
 - (b) $24x + 138y = 18$;
 - (c) $221x + 35y = 11$.
15. Determine as soluções inteiras positivas das seguintes equações diofantinas:
- (a) $18x + 5y = 48$;
 - (b) $54x + 21y = 906$;
 - (c) $5x - 11y = 29$.
16. Exprima 100 como soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisível por 7 e o segundo seja divisível por 11.
17. Determine as soluções inteiras não negativas da equação $39x + 26y = 104$.
18. De quantas maneiras se pode exprimir o número 4 como diferença de dois inteiros positivos, dos quais o primeiro é divisível por 8 e o segundo é múltiplo de 15? Indique três delas.
19. Determine dois inteiros, um positivo e outro negativo, cuja soma é 42 e tais que um deles é múltiplo de 126 e o outro é divisível por 56.
20. Diga, justificando, se é possível exprimir o número 104 como soma de dois inteiros positivos, tais que um deles é múltiplo de 64 e o outro é divisível por 11.
21. (a) Para que valores de x e de y se tem $11x + 7y = 200$?
- (b) Para que valores encontrados em (a) se tem $3x + y$ múltiplo de 3?
22. Determine, caso existam, as soluções (x, y) da equação $297x + 349y = 3$, tais que $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \in]-\infty, 557]$ e $y \in]-\infty, 417[$.
23. Um teatro amador cobra 1,80 euros de entrada a cada adulto e 75 centimos a cada criança. Num espetáculo, as receitas totais somaram 90 euros. Sabendo que cada criança foi acompanhada por dois adultos, diga quantas pessoas estiveram a assistir a esse espetáculo.
24. Tenho um certo número de pérolas. Se fizer 76 pulseiras com o mesmo número de pérolas, faltam-me 50 pérolas para fazer a 77^a pulseira. Mas se fizer 78 pulseiras com o mesmo número de pérolas, uso a totalidade das pérolas que possuo. Qual o número mínimo de pérolas que tenho?

25. Fatorize os inteiros 105, 684, 1375 e 139 como produto de números primos.
26. Usando a fatorização de 507 e 1287 em fatores primos, determine o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum entre esses inteiros.
27. Usando a fatorização de 525 e 2205 em fatores primos, determine o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum entre esses inteiros. Indique todos os divisores positivos de 525.
28. Verifique se 701 é um número primo, testando todos os primos $p \leq \sqrt{701}$ como possíveis divisores.
29. (a) Mostre que é condição necessária para que um inteiro $p \neq 2$ seja primo que satisfaça $p = 4n \pm 1$, $n \in \mathbb{N}$.
(b) Esta condição é também suficiente? Justifique.
30. Prove que
 - (a) todo o primo da forma $3n + 1$ é da forma $6m + 1$ ($m, n \in \mathbb{N}$);
 - (b) o único primo da forma $n^3 - 1$ é o 7 ($n \in \mathbb{N}$); [Sugestão: $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$]
 - (c) todo o inteiro da forma $n^4 - 4$, em que $n > 1$, é composto.
31. Prove que \sqrt{p} é irracional para todo o primo p .

32. Justifique, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

- (a) $91 \equiv_7 0$;
- (b) $-2 \equiv_8 2$;
- (c) $17 \not\equiv_2 13$.

33. Prove que

- (a) se $a \equiv_n b$ e $m \mid n$, então $a \equiv_m b$;
- (b) se $a \equiv_n b$ e $c > 0$, então $ca \equiv_n cb$.

34. Dê um exemplo que mostre que $a^2 \equiv_n b^2$ não implica que $a \equiv_n b$.

35. Verifique que, se $a \equiv_n b$, então $\text{m.d.c.}(a, n) = \text{m.d.c.}(b, n)$.

36. Para que valores de n se tem $25 \equiv_n 4$?

37. Verifique se:

- (a) o conjunto $\{-12, -4, 11, 13, 22, 32, 91\}$ é um sistema completo de resíduos módulo 7;
- (b) o conjunto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ é um sistema completo de resíduos módulo 5.

38. Determine quais dos seguintes conjuntos são sistemas completos de resíduos módulo 4:

- (a) $\{-2, -1, 0, 1\}$;
- (b) $\{0, 4, 8, 12\}$;
- (c) $\{-13, 4, 17, 13\}$;
- (d) $\{-5, 0, 6, 22\}$.

39. Determine um sistema completo de resíduos módulo 7 constituído apenas por números primos.

40. Indique quatro inteiros, dois positivos e dois negativos, na classe $[3]_6$:

41. Indique, justificando, caso existam, caso existam:

- (a) um inteiro primo x tal que $x \in [-22]_{15}$;
- (b) um número primo x tal que $x \equiv_{12} 6$;
- (c) dois inteiros positivos em $[-182]_9$;
- (d) o maior número par n tal que $-89 \equiv_n 5$;
- (e) o maior inteiro x par, não positivo, tal que $x \equiv_{109} 50$.

42. Indique os restos das divisões de 2^{50} e 41^{63} por 7.

43. Calcule o resto da divisão de 4^{215} por 9.

44. Usando as propriedades das congruências, mostre que, para $n \geq 1$, se tem:

$$13 \mid 3^{n+2} + 4^{2n+1}$$

45. Na divisão por 5, um inteiro p admite resto 3. Qual é o resto da divisão de $p^2 + 2p - 1$ por 5?

Matemática Discreta

————— Exercícios - Congruências ————— página 5 —————

46. Determine o resto da divisão de $2357 \times 1036 + 499$ por 11.
47. Calcule o resto da divisão de $38^{43} + 47^{22}$ por 15.
48. Mostre que $11^{10} \equiv_{100} 1$.
49. Determine o algarismo final de 93^{203} .
50. Prove que
- (a) dado um inteiro a , o dígito das unidades de a^2 é 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.
 - (b) qualquer um dos inteiros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 pode ser o dígito das unidades de a^3 , para algum inteiro a ;
 - (c) dado um inteiro a , o dígito das unidades de a^4 é 0, 1, 5 ou 6.
51. Trabalhando módulo 9 ou 11, indique os dígitos que faltam nos cálculos apresentados:
- (a) $51840 \times 273581 = \overline{1418243x040}$;
 - (b) $512 \times \overline{1x53125} = 1000000000$.
52. Determine os algarismos x, y de modo que o inteiro $\overline{3x5y}$ seja simultaneamente divisível por 4 e por 9.
53. Determine os dígitos x e y tais que o número $\overline{34xx58y}$ é simultaneamente divisível por 9 e por 11.
54. Resolva as seguintes congruências lineares:
- (a) $25x \equiv_{29} 15$;
 - (b) $5x \equiv_{26} 2$;
 - (c) $140x \equiv_{301} 133$;
55. Diga, justificando, quais das congruências seguintes são solúveis e, para essas, indique a menor solução não negativa:
- (a) $10x \equiv_{15} 14$;
 - (b) $10x \equiv_{16} 14$;
 - (c) $12x \equiv_{35} 7$;
 - (d) $60x \equiv_{165} -30$;
56. Usando congruências, resolva a seguinte equação diofantina: $4x + 51y = 9$.
57. Relativamente à congruência linear $3x \equiv_{70} 2$, determine, caso exista:
- (a) a maior solução negativa inferior a -96 ;
 - (b) uma solução que seja um número primo.
58. Diga, justificando, se a congruência linear $14x \equiv_{60} 18$ tem soluções pares.
59. Relativamente à congruência $13x \equiv_{20} 17$, determine, caso existam,
- (a) as soluções negativas superiores a -100 ;
 - (b) uma solução par.

Matemática Discreta

60. Relativamente à congruência linear $16x \equiv_{11} 9$, determine, justificando:
- (a) duas soluções que sejam números primos;
 - (b) duas soluções que sejam números pares;
61. Considere a congruência linear $18x \equiv_{21} 9$.
- (a) Verifique que a congruência linear dada admite solução.
 - (b) Quantas soluções tem a congruência linear $18x \equiv_{21} 9$ no intervalo inteiro $] - 1, 80]$? Calcule-as.
62. Resolva os seguintes sistemas de congruências lineares:
- (a) $\begin{cases} x \equiv_3 1 \\ x \equiv_5 2 \\ x \equiv_7 3 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2x \equiv_5 1 \\ 3x \equiv_6 9 \\ 4x \equiv_7 1 \\ 5x \equiv_{11} 9 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x \equiv_5 2 \\ x \equiv_6 3 \\ x \equiv_7 4 \end{cases}$;
- (d) $\begin{cases} x \equiv_{11} 3 \\ x \equiv_8 6 \end{cases}$; (e) $\begin{cases} x \equiv_2 1 \\ x \equiv_5 2 \\ x \equiv_7 5 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} 3x \equiv_5 2 \\ 2x \equiv_6 4 \\ x \equiv_2 1 \end{cases}$.
63. Use sistemas de congruências para resolver a congruência $17x \equiv_{42} 5$.
64. Determine o menor inteiro a tal que $2 \mid a$, $3 \mid a + 1$, $4 \mid a + 2$, $5 \mid a + 3$ e $6 \mid a + 4$.
65. Quando se retiram 2, 3, 4, 5, 6 ovos de cada vez de um determinado cesto, ficam, respetivamente, 1, 2, 3, 4, 5 ovos no cesto. Ao retirar 7 ovos de uma só vez, não sobra qualquer ovo no cesto. Qual o menor número de ovos que o cesto pode conter?
66. Um bando de 17 piratas roubou um saco de moedas. Ao tentarem dividir igualmente por todos eles a fortuna roubada, deram conta que sobravam 3 moedas. Lutaram, para ver quem ficava com as três moedas e, nessa luta, morreu um pirata. Distribuíram, de novo, as moedas por todos e, desta vez, sobraram 10 moedas. Tendo havido nova luta, mais um pirata morreu. Desta vez, a fortuna pôde ser distribuída, na íntegra, por todos! Qual é o número mínimo de moedas que o saco roubado poderia ter contido?
67. Recorrendo a um sistema de congruências, determine as soluções inteiras de congruência linear $19x \equiv_{84} 4$ que pertençam ao intervalo $] - 200, 284]$.
68. Um inteiro positivo a dividido por 5 dá resto 3 e dividido por 9 dá resto 4.
- (a) Determine o resto da divisão de a por 45.
 - (b) Calcule os inteiros positivos ímpares, compreendidos entre 100 e 300, que têm, na divisão por 45, o mesmo resto que a .
69. Determine os inteiros positivos x inferiores a 336 e tais que $x \equiv_8 2$, $x \equiv_7 1$ e $x \equiv_6 2$.
70. Indique três inteiros n , dos quais um é negativo e dois são positivos, para os quais se tem, simultaneamente, $3 \mid n$, $5 \mid (n + 2)$ e o resto da divisão de $n - 3$ por 9 é 6.
71. Usando um sistema de congruências, resolva a congruência linear $14x \equiv_{60} 18$.

Matemática Discreta

Exercícios - Congruências página 7

72. Recorrendo ao Pequeno Teorema de Fermat, mostre que:
- (a) $a^{21} \equiv a \pmod{15}$, para todo o inteiro a ;
 - (b) $a^{13} \equiv a \pmod{273}$, para todo o inteiro a ;
 - (c) $a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$, para todo o inteiro a tal que $\text{m.d.c.}(a, 35) = 1$.
73. Mostre que 60 divide $a^4 + 59$ se $\text{m.d.c.}(a, 30) = 1$.
74. Se $a \in \mathbb{Z}$ é tal que $7 \nmid a$, prove que $a^3 + 1$ ou $a^3 - 1$ é divisível por 7.
75. Seja p um número primo. Mostre que $2 \times (p - 3)! \equiv -1 \pmod{p}$.
76. Determine
- (a) o resto da divisão de $15!$ por 17;
 - (b) o resto da divisão de $2 \times 26!$ por 29.
77. Verifique que $4 \times 29! + 5!$ é divisível por 31.
78. Considere a função de Euler ϕ . Calcule $\phi(420)$, $\phi(1001)$, $\phi(5040)$.
79. Verifique que $\phi(n + 2) = \phi(n) + 2$, para $n = 12, 14, 20$.
80. Verifique o Teorema de Euler para $n = 10$ e $a = 3$.
81. Seja $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\text{m.d.c.}(a, 15) = 1$. Mostre que $a^{17} \equiv a \pmod{15}$:
- (a) recorrendo ao Pequeno Teorema de Fermat;
 - (b) recorrendo ao Teorema de Euler.
82. Quais os dois últimos dois dígitos na representação decimal de 3^{256} ?
83. Mostre que se n é um número inteiro ímpar que não é múltiplo de 5 então n divide um inteiro cujos dígitos são todos iguais a 1.
84. Por que é que se tem $\phi(2n) = \phi(n)$ para qualquer inteiro positivo ímpar n ?