Prove que:

a) $\forall A, B \in \mathcal{E}: \mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}\big(\sigma_{\vec{w}}(A), \sigma_{\vec{w}}(B)\big)$.

b) Dados dois subespaços afins de $\mathcal{E}$, digamos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, tem-se $\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{d}\big(\sigma_{\vec{w}}(\mathcal{F}), \sigma_{\vec{w}}(\mathcal{G})\big)$.

c) Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são rectas de $\mathcal{E} = \Re^3$, então $\angle(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \angle\big(\sigma_{\vec{w}}(\mathcal{F}), \sigma_{\vec{w}}(\mathcal{G})\big)$.

9.101. Fixando no espaço euclidiano $\Re^3$ um referencial ortonormado e dada uma recta definida, em relação a esse referencial, pelas equações

$$x - 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{k}$$

determine os valores reais de k que fazem com que a distância da recta ao plano de equação $2x + 4y + z = -5$ seja igual a $11/\sqrt{21}$.

9.102. Dados em $\Re^3$ dois planos, de equações $x + 2y + 3z = -4$ e $x - 2y + 3z = 5$, em relação a um referencial ortonormado, determine o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos dois planos.

9.103. Considere em $\Re^3$ o produto interno definido por

$$\vec{x} \mid \vec{y} = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 4x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_3 - x_3 y_2$$

Determine o conjunto dos pontos que distam 5 do plano que passa pelo ponto $(0, 0, 0)$ e está associado ao subespaço vectorial $\big\langle (1,1,1), (-1,0,2) \big\rangle$.

9.104. Considere em $\Re^3$ o produto interno canónico. Escreva equações cartesianas dos planos que são ortogonais à recta de equações

$$\begin{cases} x = y \\ z - x = 1 \end{cases} \quad \text{e cuja distância à origem é } \sqrt{3}.$$

9.105. Fixando em $\Re^3$ o produto interno canónico, determine as rectas que satisfazem, simultaneamente, as seguintes condições:

1.ª) passam pelo vértice da estrela de planos $a(x + y + z - 1) + b(2x - 3z) + c(x - 2y + 2) = 0$ (o vértice é o ponto comum a todos os planos da "estrela");

2.ª) são ortogonais ao eixo do feixe de planos $m(x - y) + n(y + z - 1) = 0$ (o eixo é a recta comum a todos os planos do "feixe");

3.ª) formam com a recta $\big\langle (0,0,0); \langle (0,1,0) \rangle \big\rangle$ um ângulo de cosseno igual a $1/\sqrt{6}$.

9.106. Considere em $\Re^3$ o produto interno definido por

$$\vec{x} \mid \vec{y} = 3x_1 y_1 + x_1 y_3 + 2x_2 y_2 - x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 + 2x_3 y_3$$

e identifique os conjuntos dos pontos equidistantes de cada um dos pares de planos definidos pelas seguintes equações:

a) $4x - y - 2z = 3$ e $4x + y + z = 0$ *b*) $3x + 2y - z = 2$ e $3x + 2y - z = -1$

9.107. Considere em $\Re^3$ o produto interno canónico. Determine as equações cartesianas das rectas contidas no plano de equação $x + y = 0$, cuja distância ao plano de equação $x + y + z = 1$ é igual a $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9.108. Prove que o ângulo de uma recta com um plano, no espaço afim $\Re^3$, tal como se encontra definido, não depende do vector escolhido como gerador do subespaço vectorial associado à recta.

9.109. Suponha fixo no espaço euclidiano $\Re^n$ um referencial ortonormado, de origem num certo ponto O. Considere dois pontos, $A, B \in \Re^n$ e prove que:

a) O conjunto dos pontos equidistantes de A e B constitui um hiperplano $\mathcal{H}$.

b) Existe uma constante c tal que $\mathcal{H}$ pode ser definido, em relação ao referencial considerado, por uma equação cartesiana da forma $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{OX} = c$.

c) O subespaço vectorial associado a $\mathcal{H}$ é $H = \langle \overrightarrow{AB} \rangle^{\perp}$. Interprete as conclusões obtidas em a), b) c), no caso de ser $n = 2$.

9.110. Suponha fixo no espaço euclidiano $\Re^2$ um referencial ortonormado e classifique as cónicas definidas pelas seguintes equações:

a) $x^2 - y^2 + 4xy - 2x + 6y - 1 = 0$ *b*) $x^2 + 2xy + x + 4y = 0$

c) $xy + 2x + 3y + 6 = 0$ *d*) $x^2 + 3x - y + 2 = 0$

e) $x^2 + 2y^2 + 3x + 4y + 1 = 0$ *f*) $4x^2 + 6xy + 3y^2 - x - y = 0$

9.111. Suponha fixo no espaço euclidiano $\Re^2$ o seguinte produto interno:

$$\vec{x} \mid \vec{y} = 4x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$

Identifique as cónicas definidas pelas seguintes equações:

a) $x^2 + 2y^2 + 4xy + 6x + 2y - 1 = 0$ *b*) $4xy + 3x - 4y - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2y + 3 = 0$

9.112. Considere fixo no espaço euclidiano $\Re^3$ um referencial ortonormado e identifique as quádricas definidas pelas seguintes equações:

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z = 0$

c) $x^2 - 2xy + 2xz + 4x - y + 2z = 1$

d) $2x^2 - 3xz - 2y = 4$

e) $4x^2 - 4xy + 4xz + y^2 - 2yz + z^2 + 12x - 6y + 6z = 7$

f) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 18 = 0$

g) $x^2 + 2y^2 + z^2 - x + 2y = 0$

h) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0$

i) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz - 2yz - 4x + 6y - 2z = \frac{109}{8}$

j) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z = 0$