



———— Derivadas e funções trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas ————

1. (a)  $f'(x) = 30(6x + 1)^4, \quad x \in \mathbb{R}$

(b)  $f'(x) = 15x^2 \cos(2x) - 10x^3 \sin(2x), \quad x \in \mathbb{R}$

(c)  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

(d)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}, \quad x \in ]3, +\infty[$

(e)  $f'(x) = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

(f)  $f'(x) = \frac{3e^{3x} + 2x}{e^{3x} + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

(g)  $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(h)  $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 3 \\ 3 & \text{se } x > 3 \end{cases}$

2. (a) Equação da reta tangente  $\rightsquigarrow y = 2(x - 1)$ ; equação da reta normal  $\rightsquigarrow y = -\frac{1}{2}(x - 1)$

(b) Equação da reta tangente  $\rightsquigarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ ; equação da reta normal  $\rightsquigarrow y = -4x - \frac{31}{4}$

3. (a) A função  $f$  não é contínua nos pontos  $-1$  e  $1$ . Com efeito:

- $f$  não é contínua no ponto  $1$  porque não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ;
- $f$  não é contínua no ponto  $-1$  porque apesar de existir  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  tem-se que  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 \neq 2 = f(-1)$ .

(b) A função  $f$  é contínua mas não derivável nos pontos  $0$  e  $3$ . Com efeito:

- $f$  não é derivável no ponto  $0$  porque  $f'_+(0) < 0$  e  $f'_-(0) > 0$ ;
- $f$  não é derivável no ponto  $3$  porque  $f'_+(3) = 0$  e  $f'_-(3) \neq 0$ .

4. Pela regra da derivada da função composta, temos que:

$$g'(x) = f'(x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2)' = f'(x^2 - 2) \cdot 2x.$$

Em particular,

$$g'(2) = 4f'(2).$$

Como  $f'(2)$  é igual ao declive  $m_t$  da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(2, 2)$ , vamos calcular este declive. Atendendo a que a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(2, 2)$  passa nos pontos  $(2, 2)$  e  $(6, 0)$ , tem-se que

$$m_t = \frac{0 - 2}{6 - 2} = -\frac{1}{2}.$$

Então,

$$f'(2) = m_t = -\frac{1}{2}.$$

Consequentemente,

$$g'(2) = 4 \cdot f'(2) = -\frac{4}{2} = -2.$$

5. Pela regra da derivada da função composta, temos que:

$$g'(x) = f'(4 - 2x + x^3) \cdot (4 - 2x + x^3)' = f'(4 - 2x + x^3) \cdot (-2 + 3x^2).$$

Em particular,

$$g'(1) = f'(3) \cdot 1 = f'(3).$$

Como  $f'(3)$  é igual ao declive  $m_t$  da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(3, 4)$ , vamos calcular este declive. Atendendo a que a reta perpendicular ao gráfico de  $f$  no ponto  $(3, 4)$  passa nos pontos  $(3, 4)$  e  $(0, 6)$ , tem-se que o declive  $m_p$  desta reta é:

$$m_p = \frac{6 - 4}{0 - 3} = -\frac{2}{3}.$$

Consequentemente, o declive  $m_t$  é dado por

$$m_t = -\frac{1}{m_p} = \frac{3}{2},$$

e, portanto,

$$f'(3) = m_t = \frac{3}{2}.$$

Então,

$$g'(1) = f'(3) = \frac{3}{2}.$$

6. Pela regra da derivada da função composta, temos que:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(-4 + 2x + x^2)[f(-4 + 2x + x^2)]' \\ &= 2f(-4 + 2x + x^2)f'(-4 + 2x + x^2) \cdot (-4 + 2x + x^2)' \\ &= 2f(-4 + 2x + x^2)f'(-4 + 2x + x^2) \cdot (2 + 2x) \end{aligned}$$

Em particular,

$$g'(2) = 2f(4)f'(4)6 = 12f(4)f'(4).$$

Observemos que  $f(4) = 2$ . Como  $f'(4)$  é igual ao declive  $m_t$  da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(4, 2)$ , vamos calcular este declive. Atendendo a que a reta perpendicular ao gráfico de  $f$  no ponto  $(4, 2)$  passa nos pontos  $(4, 2)$  e  $(6, 6)$ , tem-se que o declive  $m_p$  desta reta é:

$$m_p = \frac{6 - 2}{6 - 4} = 2.$$

Consequentemente, o declive  $m_t$  é dado por

$$m_t = -\frac{1}{m_p} = -\frac{1}{2},$$

e, portanto,

$$f'(4) = m_t = -\frac{1}{2}.$$

Então,

$$g'(2) = 12 f(4)f'(4) = 12.2.(-\frac{1}{2}) = -12.$$

7.  $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$  (Observe que  $f(0) = 5$  ou, equivalentemente,  $f^{-1}(5) = 0$ ).

8. (1) (a) Temos que:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 + 1) = 3$ ; e que
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x^2 = 3$ .

Consequentemente, como  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ , concluímos que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ . Observemos agora que  $f(1) = 3$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$ , concluímos que  $f$  é contínua no ponto 1.

(1) (b) Temos que:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x^3 + 1) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^3 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2(x^2 + x + 1) = 6.$

Logo,  $f'_+(1) = 6$ .

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3(x + 1) = 6.$

Logo,  $f'_-(1) = 6$ .

Consequentemente, como  $f'_+(1) = f'_-(1) = 6$ , concluímos que  $f$  é derivável no ponto 1 e que  $f'(1) = 6$ .

(2) (a)  $f$  é contínua no ponto  $-1$  (Justifique).

(2) (b)  $f$  não é derivável no ponto  $-1$  (Justifique).

(3) (a)  $f$  é contínua no ponto 2 (Justifique).

(3) (b)  $f$  não é derivável no ponto 2 (Justifique).

9. Resolvido na aula.

10. Resolvido na aula.

11. (a) Seja  $f(x) = x^3 - 3x + b$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Começemos por observar que  $f$  é derivável. Em particular,  $f$  é contínua em  $[-1, 1]$  e derivável em  $] - 1, 1[$  e, portanto, o Teorema de Rolle e os seus corolários são aplicáveis a  $f|_{[-1,1]}$ . Temos que

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

e que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Por um dos corolários do Teorema de Rolle temos que entre dois zeros consecutivos de  $f'$  existe quando muito um zero de  $f$ . Assim, a equação  $x^3 - 3x + b = 0$  não pode ter mais do que uma raiz real no intervalo  $] - 1, 1[$  qualquer que seja o valor de  $b$ .

- (b) Observemos que

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in ] - 1, 1[.$$

Consequentemente,  $f$  é estritamente decrescente neste intervalo e, portanto, existe no máximo uma raiz real da equação  $x^3 - 3x + b = 0$  em  $] - 1, 1[$ .

Existe exatamente uma raiz real da equação  $x^3 - 3x + b = 0$  em  $] - 1, 1[$  para os valores de  $b$  para os quais  $f(-1) > 0$  e  $f(1) < 0$ . Mas

$$f(-1) = b + 2 > 0 \Leftrightarrow b > -2,$$

e

$$f(1) = b - 2 < 0 \Leftrightarrow b < 2.$$

Concluimos então que existe exatamente uma raiz real da equação  $x^3 - 3x + b = 0$  em  $] - 1, 1[$  para  $b \in ] - 2, 2[$ .

12. Seja  $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Atendamos a que:

- (i) A função  $f$  é derivável e

$$f'(x) = 2x - \sin x - x \cos x + \sin x = 2x - x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A derivada de  $f$  tem apenas um zero:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Por um dos corolários do Teorema de Rolle,  $f$  tem no máximo dois zeros, pelo que a equação dada possui no máximo duas raízes reais.

- (ii) Por outro lado temos que:

$$f(-2\pi) = 4\pi^2 - 1 > 0, \quad f(0) = -1 < 0, \quad f(2\pi) = 4\pi^2 - 1 > 0.$$

Como a função  $f$  é contínua em cada um dos intervalos  $[-2\pi, 0]$  e  $[0, 2\pi]$  e muda de sinal nestes intervalos, então pelo Teorema de Bolzano-Cauchy,  $f$  tem pelo menos um zero em cada um desses intervalos. Em particular, a equação  $x^2 = x \sin x + \cos x$  tem pelo menos uma raiz real em cada um desses intervalos.

De (i) e (ii), concluímos que a equação  $x^2 = x \sin x + \cos x$  possui exatamente duas raízes reais.

13. Resolvido na aula.

14. Resolvido na aula.

15. (a) Consideremos a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = e^x - x - 1$ .

Seja  $x > 0$  e apliquemos o Teorema de Lagrange a  $f|_{[0,x]}$  que é uma função derivável. Então

$$\exists c_x \in ]0, x[: \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists c_x \in ]0, x[: \quad \underbrace{\frac{e^x - x - 1}{x}}_{>0} = \underbrace{e^{c_x} - 1}_{>0}.$$

Com efeito,  $e^{c_x} - 1 > 0$  porque  $e^{c_x} > 1$ . Consequentemente,  $e^x - x - 1 > 0$ , isto é,  $e^x > x + 1$ .

Seja agora  $x < 0$  e apliquemos o Teorema de Lagrange a  $f|_{[x,0]}$  que é uma função derivável. Então

$$\exists c_x \in ]x, 0[: \quad \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists c_x \in ]x, 0[: \quad \underbrace{\frac{-e^x + x + 1}{-x}}_{>0} = \underbrace{e^{c_x} - 1}_{<0}.$$

Com efeito,  $e^{c_x} - 1 < 0$  porque  $e^{c_x} < 1$ . Consequentemente,  $-e^x + x + 1 < 0$ , isto é,  $e^x > x + 1$ .

(b) Consideremos a função  $f: ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \log(1+x) - x$ .

Seja  $x > 0$  e apliquemos o Teorema de Lagrange a  $f|_{[0,x]}$  que é uma função derivável. Então

$$\exists c_x \in ]0, x[: \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists c_x \in ]0, x[: \quad \underbrace{\frac{\log(1+x) - x}{x}}_{>0} = \underbrace{\frac{1}{1+c_x} - 1}_{<0}.$$

Consequentemente,  $\log(1+x) - x < 0$ , isto é,  $\log(1+x) < x$ .

Consideremos agora a função  $f: ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \log(1+x)$ .

Seja  $x > 0$  e apliquemos o Teorema de Lagrange a  $f_{|_{[0,x]}}$  que é uma função derivável. Então

$$\exists c_x \in ]0, x[: \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists c_x \in ]0, x[: \quad \underbrace{x - \frac{x^2}{2} - \log(1+x)}_{>0} = \underbrace{1 - c_x - \frac{1}{1+c_x}}_{<0}.$$

Consequentemente,  $x - \frac{x^2}{2} - \log(1+x) < 0$ , isto é,  $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$ .

(c) Consideremos os seguintes dois casos:

- (i) se  $x = y$  vem  $0 = 0$ , o que é óbvio.
- (ii) se  $x \neq y$  (suponhamos  $x < y$ ), podemos definir  $f(z) = \sin z$ ,  $z \in [x, y]$ . Temos que  $f$  é derivável com  $f'(z) = \cos z$ . Aplicando o Teorema de Lagrange a  $f$  no intervalo  $[x, y]$  vem

$$\exists c \in ]x, y[: \quad \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \cos c.$$

Consequentemente,

$$\exists c \in ]x, y[: \quad \left| \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \right| = |\cos c|.$$

Como  $|\cos c| \leq 1$ , para todo o  $c \in ]x, y[$ , concluímos que

$$\left| \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \right| \leq 1,$$

donde  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ .

16. Não existe uma tal função. Com efeito, existindo uma tal função  $f$ , a sua derivada, definida no intervalo  $[0, 2]$  não possuiria a propriedade do valor intermédio, contrariando o Teorema de Darboux.

17. Começemos por observar que  $f$  é uma função derivável no intervalo  $\mathbb{R}$ . Em particular, dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , com  $x < y$ ,  $f$  é contínua em  $[x, y]$  e derivável em  $]x, y[$ . Aplicando o Teorema de Lagrange a  $f$  no intervalo  $[x, y]$ , temos que

$$\exists c \in ]x, y[: \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c).$$

Consequentemente,

$$\exists c \in ]x, y[: \quad \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(c)|.$$

Como  $|f'(c)| \leq M$ , concluímos que

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq M,$$

donde

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

18. Consideremos a função  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = g(x) - f(x)$ .

Dado  $x > a$  apliquemos o Teorema de Lagrange a  $h|_{[a,x]}$  ( $h$  é contínua em  $[a, x]$  e derivável em  $]a, x[$ ). Temos que

$$\exists c \in ]a, x[: \quad \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(c)$$

ou equivalentemente,

$$\exists c \in ]0, x[: \quad \frac{(g(x) - f(x)) - (g(a) - f(a))}{\underbrace{x - a}_{>0}} = \underbrace{g'(c) - f'(c)}_{>0}.$$

Consequentemente,  $g(x) > f(x)$ .

19. Calcule os seguintes limites:

- |                   |                    |
|-------------------|--------------------|
| (a) 2             | (b) $-\frac{1}{3}$ |
| (c) 0             | (d) 1              |
| (e) 0             | (f) 0              |
| (g) $\frac{1}{6}$ | (h) 0              |
| (i) 6             | (j) $\frac{1}{3}$  |
| (l) $\frac{7}{5}$ | (m) 3              |

20. Calcule:

- |                          |                             |                      |
|--------------------------|-----------------------------|----------------------|
| (a) $\frac{1}{8}$        | (b) $\frac{\pi}{4}$         | (c) $-\frac{\pi}{4}$ |
| (d) $-\frac{1}{2}$       | (e) $-1$                    | (f) $-\frac{\pi}{6}$ |
| (g) $-\frac{\pi}{6}$     | (h) $\frac{\pi}{3}$         | (i) 0                |
| (j) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | (k) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ |                      |

21. (a) Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Então

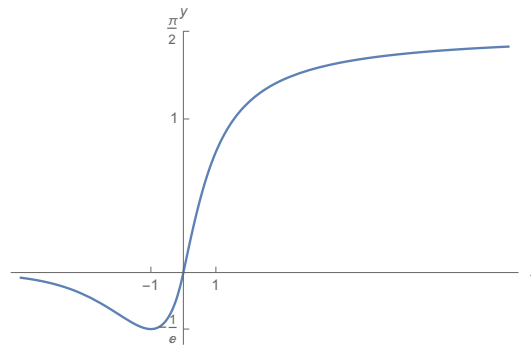
$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1. \end{aligned}$$

22. Ver slides das aulas.

23. Foram resolvidas nas aulas as alíneas (b) e (e) .

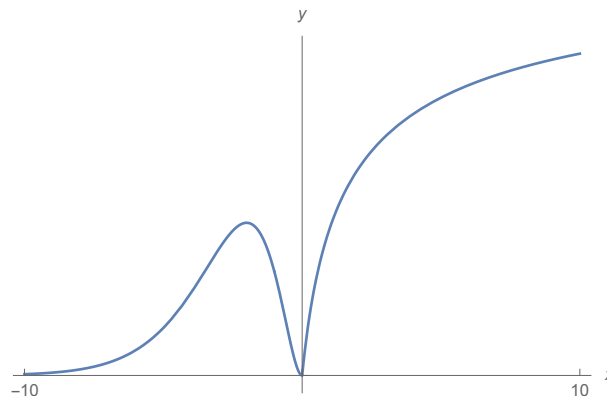
24. Resolvido na aula.

25. A função  $f$  pode ser representada graficamente da seguinte forma:



- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .
- (c) A função  $f$  é decrescente em  $] -\infty, -1]$  e é crescente em  $[1, +\infty[$ .
- (d)  $\operatorname{Im}(f) = \left[-\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right[$ .

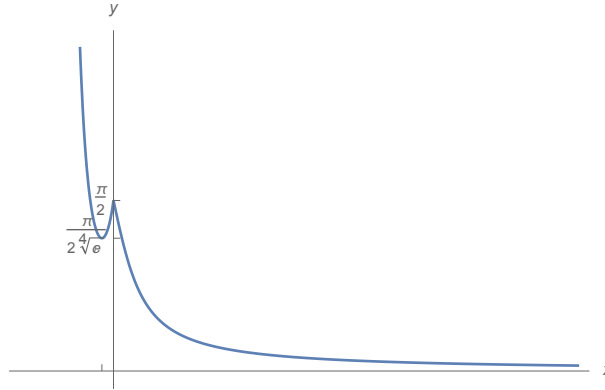
26. A função  $f$  pode ser representada graficamente da seguinte forma:



- (b) A função  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .



27. A função  $f$  pode ser representada graficamente da seguinte forma:



- (b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- (c) A função  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- (d) A função  $f$  é decrescente nos intervalos  $]-\infty, -1/2]$  e  $[0, +\infty[$ . A função  $f$  é crescente em  $[-1/2, 0]$ . A função tem um máximo local igual a  $\frac{\pi}{2}$  no ponto 0 e tem um mínimo local igual a  $\frac{\pi}{2}e^{-1/4}$  no ponto  $-\frac{1}{2}$ .
- (e)  $\text{Im}(f) = ]0, +\infty[$ .

28. (a) Um exemplo pode ser dado pela função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por (represente graficamente esta função):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ (x-1)^2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

- (b) Não existe. Com efeito, se existisse uma tal função  $f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, tal que  $f(2) = f(3)$  então pelo Teorema de Lagrange, existiria um ponto  $c \in ]2, 3[$  tal que  $f'(c) = 0$ . Então não poderíamos ter  $f'(x) \geq x \geq 2$ , para todo o  $x \in [2, 3]$ .
- (c) Um exemplo pode ser dado pela função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por (represente graficamente esta função):

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 3-x & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- (d) Um exemplo pode ser dado pela função  $f(x) = \sin x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (Justifique).

29. (a) Afirmação falsa (Justifique). Este exercício foi referido na aula TP do dia 16 de novembro. Observe que  $f$  não é contínua no ponto 1.

(b) Não existe uma tal função. Com efeito, existindo uma tal função  $f$ , a sua derivada, definida no intervalo  $[1, 4]$  não possuiria a propriedade do valor intermédio, contrariando o Teorema de Darboux.

(c) Afirmação verdadeira. Um exemplo pode ser dado pela função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por (represente graficamente esta função):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

30. (a) Seja  $f(x) = e^x - a + 2x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Temos que

$$f'(x) = e^x + 6x^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então,  $f$  é estritamente crescente. Consequentemente  $f$  tem no máximo um zero ou, de modo equivalente, a equação  $e^x = a - 2x^3$  tem no máximo uma raiz real.

(b) Como  $f$  é estritamente crescente,  $f$  tem exatamente um zero em  $[0, 2]$  se e só se:

(i)  $f(0) = 0$  ou

(ii)  $f(2) = 0$  ou

(iii)  $f(0) < 0 < f(2)$ , aplicando o Teorema de Bolzano-Cauchy.

Como  $f(0) = 1 - a$  e  $f(2) = e^2 + 16 - a$ , obtemos que  $f$  tem exatamente um zero em  $[0, 2]$  se e só se  $1 \leq a \leq 16 + e^2$ .

31. Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = -3 + e^{2x} - 2x$ .

(a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

(b) A função  $f$  tem um valor mínimo absoluto igual a  $-2$  no ponto  $x = 0$ . A função  $f$  é decrescente em  $]-\infty, 0]$  e crescente em  $[0, +\infty[$ .

(c) Como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty > 0, \quad f(0) = -2 < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0,$$

pelo Teorema de Bolzano-Cauchy,  $f$  tem pelo menos dois zeros reais, um em cada um dos intervalos  $]-\infty, 0[$  e  $]0, +\infty[$ .

Como  $f$  é estritamente monótona em cada um desses intervalos, esses zeros são únicos. (Em alternativa poderia ser argumentado da seguinte forma: temos que  $f'(x) = 2e^{2x} - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Consequentemente, a derivada tem apenas um zero (em  $x = 0$ ). Como a derivada tem apenas um zero, por um dos corolários do Teorema de Rolle, concluímos que  $f$  tem no máximo dois zeros).

32. (a)  $[0, 10]$ .
- (b)  $[0, 4] \cup [6, 7[ \cup [8, 9[ \cup ]9, 10]$ .
- (c)  $x \in [1, 2], \quad x = 7$ .
- (d)  $x = 0, \quad x \in ]1, 2[, \quad x = 5, \quad x = 9, \quad x = 10$ .
- (e)  $x = 2, \quad x = 7, \quad x = 9$
- (f)  $f'(4) = 2$ .
- (g)  $x = 1, \quad x = 2, \quad x = 5, \quad x = 6, \quad x = 7, \quad x = 9$ .
- (h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 8; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{7x-1}{x}\right) = 3$ .

33. (a)  $] - 2, 2]$ .
- (b)  $] - 5, -4[ \cup ] - 4, -7/2[ \cup ]1, 2[$ .
- (c)  $x = -6, \quad x \in ] - 3, 0[, \quad x = 6$
- (d)  $x = -4, \quad x \in [-3, 0], \quad x = 4, \quad x = 5, \quad x = 8$
- (e)  $x = -3, \quad x = 1, \quad x = 5$
- (f)  $f'(-5) = 1$ .
- (g)  $x = -4, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad x = 4, \quad x = 6$
- (h)  $x = 7$
- (i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = -1$