relações de ordem parcial

Definições básicas

Definição. Seja A um conjunto.

Uma relação binária R em A diz-se uma *relação de ordem parcial em A* se R é reflexiva, antissimétrica e transitiva em A.

Se R é uma relação de ordem parcial em A diz-se que (A, R) é um *conjunto parcialmente ordenado* ou, simplesmente, **c.p.o.**

Se não houver ambiguidade, referimo-nos ao c.p.o. $(A, \leq)$ como o c.p.o. A.

Um c.p.o. $(A, \leq)$ diz-se *finito* se A é um conjunto com um número finito de elementos e diz-se *vazio* se A é vazio.

Exemplos.

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}.$$

   Então R é uma ordem parcial em A.

2. Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e

$$R = \mathrm{id}_A \cup \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,e)\}$$

   Então R, apesar de ser reflexiva e antissimétrica, não é uma relação de ordem parcial em A, uma vez que não é transitiva ($(a,b), (b,c) \in R$ mas $(a,c) \notin R$).

3. Seja A um conjunto qualquer. Então, $\mathrm{id_A}$ é uma relação de ordem parcial em A e ω_A é uma relação de ordem parcial em A se e só se A tem, no máximo, 1 elemento.

4. $(\mathbb{R}, \leq)$ é um c.p.o., onde $\leq$ é a relação usual de *menor ou igual a* considerada nos números reais.

5. $(\mathbb{N}, |)$ é um c.p.o., onde $|$ é a relação *divide* ou *é divisor de* definida nos números naturais:

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : \; b = xa.$$

6. Seja A um conjunto qualquer. Então, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um c.p.o.

Notações. É costume representar uma relação de ordem parcial em A por $\leq_A$ ou simplesmente por $\leq$.

Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $a, b \in A$. Escrevemos

1. $a \leq b$ se a está relacionado com b;
   (lê-se *a é menor ou igual a b*)
2. $a \geq b$ se $b \leq a$;
   (lê-se *a é maior ou igual a b*)
3. $a \not\leq b$ se $\sim (a \leq b)$;
   (lê-se *a não é menor ou igual a b*)
4. $a \not\geq b$ se $\sim (a \geq b)$;
   (lê-se *a não é maior ou igual a b*)

5. $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$

(lê-se *a é menor que b*)

6. $a > b$ se $b < a$;

(lê-se *a é maior que b*)

7. $a \ll b$ se $a < b$ e $\nexists c \in A: \ a < c < b$;

(lê-se *a é coberto por b* ou *a é sucedido por b*)

8. $a \gg b$ se $b \ll a$;

(lê-se *a cobre b* ou *a é sucessor de b*)

9. $a \parallel b$ se $a \nleq b$ e $b \nleq a$

(lê-se *a e b são incomparáveis*)

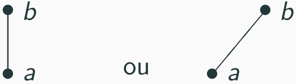
Diagrama de Hasse

Um c.p.o. finito e não vazio pode ser representado por um **diagrama de Hasse**

1. Cada elemento $a \in A$ é representado por um ponto do plano:

$$\bullet\, a$$

2. A proposição $a \ll b$ é representada por um segmento de reta de extremos a e b, estando o ponto b representado "acima" do ponto a:

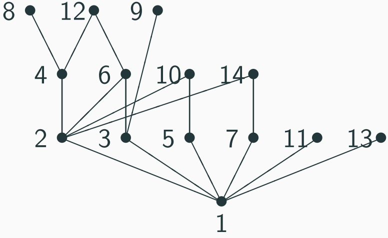


3. A proposição $a \leq b$ é representada por uma linha poligonal ascendente do ponto a ao ponto b.

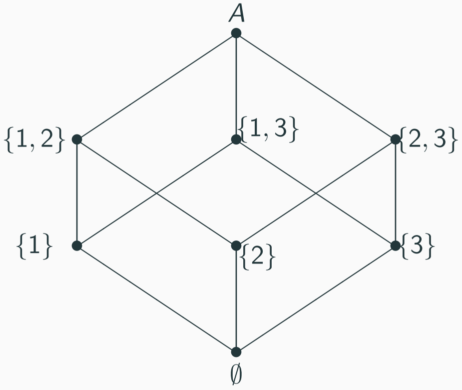
Exemplo 1. No conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ considere-se a relação de ordem parcial definida por

$$x \mid y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \; y = kx.$$

O diagrama de Hasse deste c.p.o. é



Exemplo 2. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. O diagrama de Hasse do c.p.o. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é



ordem parcial induzida num subconjunto de um c.p.o.

Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $X \subseteq A$.

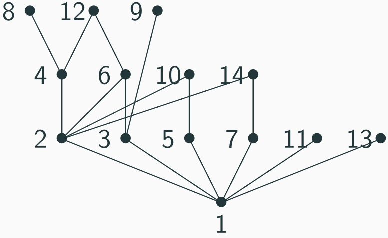
A relação $\leq_X$ definida em X por

$$x \leq_X y \Leftrightarrow x \leq y \qquad\qquad (x, y \in X)$$

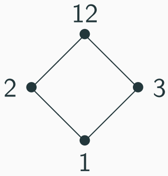
é uma relação de ordem parcial em X.

Definição. A ordem parcial $\leq_X$ diz-se a *ordem parcial induzida por $\leq$ em X*.

Exemplo. Se A é o c.p.o. definido pelo diagrama de Hasse



e $X = \{1, 2, 3, 12\}$, temos que $(X, \leq_X)$ é o c.p.o. de diagrama de Hasse



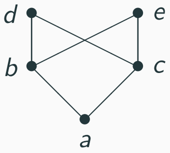
c.p.o. dual

Definição. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $\leq_d$ a relação binária definida em A por

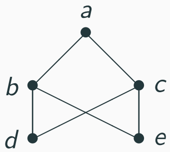
$$x \leq_d y \Leftrightarrow y \leq x \qquad (x, y \in A).$$

Então, $(A, \leq_d)$ é um c.p.o., o qual se designa por *c.p.o. dual de* $(A, \leq)$.

Exemplo. O dual de



é



Observação. Como $(\leq_d)_d = \leq$, podemos concluir que o c.p.o. dual de $(A, \leq_d)$ é o próprio c.p.o. $(A, \leq)$.

Elementos especiais de um c.p.o.

Definição. Sejam A um c.p.o. e $X \subseteq A$.

1. $a \in A$ diz-se um **majorante de** X se

$$\forall x \in X,\ x \leq a$$

   Representa-se por $\mathrm{Maj\,X}$ o conjunto dos majorantes de X;

2. $a \in A$ diz-se um **minorante de** X se

$$\forall x \in X,\ x \geq a$$

   Representa-se por $\mathrm{Min\,X}$ o conjunto dos minorantes de X;

3. $a \in A$ diz-se um **maximal de** X se

$$a \in X \text{ e } \forall x \in X,\ x \not> a;$$

4. $a \in A$ diz-se um **minimal de** X se

$$a \in X \text{ e } \forall x \in X,\ x \not< a;$$

5. $a \in A$ diz-se o **supremo de** X se

$$a \in \mathrm{Maj}\,\mathrm{X} \text{ e } \forall \mathrm{b} \in \mathrm{Maj}\,\mathrm{X},\ \mathrm{a} \leq \mathrm{b}.$$

   Escreve-se $a = \sup X$;

6. $a \in A$ diz-se o **ínfimo de** X se

$$a \in \mathrm{Min\,X} \text{ e } \forall \mathrm{b} \in \mathrm{Min\,X},\ \mathrm{b} \leq \mathrm{a}.$$

   Escreve-se $a = \inf X$;

7. $a \in A$ diz-se o **máximo de** X se

$$a \in X \text{ e } \forall x \in X,\ x \leq a.$$

   Escreve-se $a = \max X$;

8. $a \in A$ diz-se o **mínimo de** X se

$$a \in X \text{ e } \forall x \in X,\ a \leq x.$$

   Escreve-se $a = \min X$.

Observações.

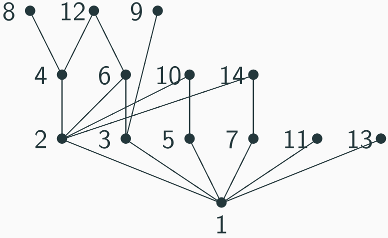
- Um subconjunto de um c.p.o. pode não admitir elementos especiais. Por exemplo, no c.p.o. $(\mathbb{R}, \leq)$, onde $\leq$ é a relação de ordem usual, o próprio $\mathbb{R}$ não tem qualquer elemento especial listado.

- O supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de um subconjunto, **quando existem, são únicos**.

- São duais os conceitos de:

  mínimo /máximo
  ínfimo /supremo
  minimal /maximal
  minorante /majorante

Exemplo. Se A é o c.p.o. definido pelo diagrama de Hasse



- Se $X = \{2, 4, 6\}$, então
  $\mathrm{Min}\,\mathrm{X} = \{1, 2\}$ $\quad$ $\mathrm{Maj}\,\mathrm{X} = \{12\}$, $\quad$ $\inf X = 2$, $\quad$ $\min X = 2$,
  $\sup X = 12$ $\quad$ $\max X$ não existe

- Se $X = \{2, 3, 4, 6\}$, então
  $\mathrm{Min}\,\mathrm{X} = \{1\}$ $\quad$ $\mathrm{Maj}\,\mathrm{X} = \{12\}$, $\quad$ $\inf X = 1$, $\quad$ $\sup X = 12$,
  $\min X, \max X$ não existem

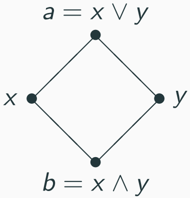
Algumas classes importantes de c.p.o.'s

I - Reticulados

Definição. Um c.p.o. $(A, \leq)$ diz-se um *reticulado* se

$$\forall x, y \in A \, \exists a, b \in A : \; a = \sup\{x, y\} \; \text{ e } \; b = \inf\{x, y\}.$$

Escreve-se $a = x \vee y$ e $b = x \wedge y$ e se $x \parallel y$, no diagrama de Hasse, temos



Se $(A, \leq)$ é um reticulado e A é finito, então existe $\max A$ e $\min A$.

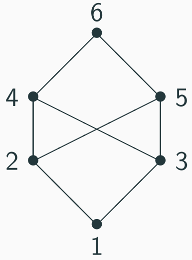
Escrevemos $\max A = 1$ e $\min A = 0$.

Exemplos.

1. Seja A um conjunto um conjunto qualquer. Então, (A, id_A) é um reticulado se A tem, no máximo, um elemento.

2. Seja A um conjunto qualquer. Então, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado.

3. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o c.p.o. definido pelo diagrama de Hasse



Então, A não é um reticulado, já que não existe, por exemplo, $\sup\{2, 3\}$.

II - Cadeias ou Conjuntos Totalmente Ordenados

Definição. Um c.p.o. $(A, \leq)$ diz-se uma *cadeia* ou um *conjunto totalmente ordenado* se

$$\forall x, y \in A, \;\; x \leq y \;\; \text{ou} \;\; y \leq x.$$

Exemplos.

1. Seja A um conjunto um conjunto qualquer. Então, (A, id_A) é uma cadeia se A tem, no máximo, um elemento.

2. $(\mathbb{N}, \leq)$ e $(\mathbb{R}, \leq)$ são cadeias.

3. $(\{2^n : n \in \mathbb{N}\}, |)$ é uma cadeia.

Definição. Seja $(A, \leq)$ um c.p.o.. Diz-se que $X \in A$ é uma *cadeia de A* se o c.p.o. $(X, \leq_X)$ é um conjunto totalmente ordenado.

Uma cadeia de A com n de elementos $(n \in \mathbb{N})$ pode ser representada por $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$, onde $x_1, x_2, ..., x_n \in A$. Diz-se que esta é uma *cadeia finita de comprimento* $n - 1$.

Se o conjunto dos comprimentos de todas as cadeias de um c.p.o. admitir um máximo k, diz-se que o c.p.o. tem comprimento k.

Se $a, b \in A$ e $a < b$ uma *cadeia de a a b* é uma cadeia de A em que a é o elemento mínimo e b é o elemento máximo.

Uma *cadeia maximal de a a b* é uma cadeia de a a b que não esteja contida noutra cadeia de a a b.

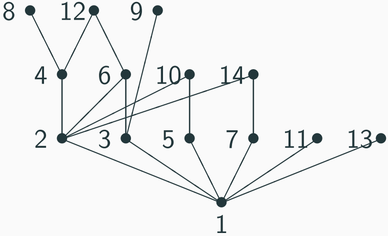
Definição. Seja $(A, \leq)$ um c.p.o.. Diz-se que $X \in A$ é uma *anticadeia de A* se $\leq_X = \mathrm{id}_X$, ou seja,

$$\forall x, y \in A, \;\; x \neq y \Rightarrow x \parallel y.$$

Se X é uma anticadeia de A com n de elementos $(n \in \mathbb{N})$ diz-se que X tem *largura n*.

Se o conjunto das larguras de todas as anticadeias de um c.p.o. admitir um máximo k, diz-se que o c.p.o. tem largura k.

Exemplo. Seja A o c.p.o. definido pelo diagrama de Hasse



Então,

1. As cadeias de A de maior comprimento têm comprimento 3: $1 < 2 < 4 < 12$. Logo, A tem comprimento 3;

2. As anticadeias de maior largura têm largura 7: $\{8, 12, 9, 5, 7, 11, 13\}$. Logo, A tem largura 7.

Lema de Zorn

Seja A um c.p.o. no qual qualquer cadeia admite um majorante. Então, A tem um elemento maximal.

Axioma da Escolha

Seja $\mathcal{F} = \{S_i : i \in I\}$ uma família não vazia de conjuntos não vazios. Então, existe uma função

$$f : \mathcal{F} \to \bigcup_{i \in I} S_i$$

tal que $f(S_i) \in S_i$, para todo $i \in I$.

A esta função chama-se *função de escolha*, já que escolhe um único elemento $f(S_i)$ de cada conjunto S_i.

III - Conjuntos Bem Ordenados

Um c.p.o. $(A, \leq)$ diz-se um *conjunto bem ordenado* ou *c.b.o.* se cada subconjunto não vazio de A admite elemento mínimo. Se $(A, \leq)$ é um c.b.o., a ordem $\leq$ diz-se uma *boa ordenação de A*.

Exemplos.

1. O conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ordenado com a ordem parcial usual, é um c.b.o.;

2. O c.p.o. $(\mathbb{R}, \leq)$ não é um c.b.o.. Por exemplo, $]-1, 1[$ não admite elemento mínimo.

3. O conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{N}$ é bem ordenado. **Princípio da Boa Ordenação de $\mathbb{N}$.**

Observações.

1. Todo o c.b.o. é uma cadeia, mas nem toda a cadeia é um c.b.o..

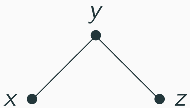
2. É o Princípio da Boa Ordenação de $\mathbb{N}$ que justifica o Princípio de Indução Matemática.

Aplicações entre c.p.o.'s

Definição. Sejam $(A, \leq_A)$ e $(B, \leq_B)$ c.p.o.'s e $\varphi : A \to B$ uma aplicação. Diz-se que φ é uma *aplicação isótona* ou uma *aplicação que preserva a ordem* se

$$\forall x, y \in A, \ \ x \leq_A y \Rightarrow \varphi(x) \leq_B \varphi(y).$$

Exemplo. Sejam $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ os c.p.o.'s definidos pelos Diagramas de Hasse



A aplicação $f : A \to B$ definida por $f(x) = a$, $f(y) = c$ e $f(z) = b$ é uma aplicação bijetiva isótona.

Definição. Sejam $(A, \leq_A)$ e $(B, \leq_B)$ c.p.o.'s $\varphi : A \to B$ uma aplicação. Diz-se que φ é um *mergulho isótono* se

$$\forall x, y \in A, \;\; x \leq_A y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq_B \varphi(y).$$

Exemplo. Sejam $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ os c.p.o.'s definidos pelos Diagramas de Hasse

A aplicação $f : A \to B$ definida por $f(x) = a$, $f(y) = c$ e $f(z) = b$ **não** é um mergulho isótono, pois $f(x) = a \leq b = f(z)$ e $x \nleq z$.

Observações.

1. Um mergulho isótono é sempre uma aplicação injetiva.

   De facto, se $f : A \to B$ é um mergulho isótono, então, para $x, y \in A$,

   $$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(y) \Leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Leftrightarrow x = y.$$

2. A inversa de uma aplicação bijetiva e isótona não é necessariamente uma aplicação isótona.
3. A inversa de um mergulho isótono, quando existe, é uma aplicação isótona.

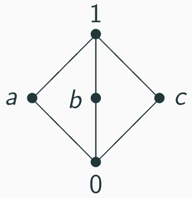
Definição. Sejam $(A, \leq_A)$ e $(B, \leq_B)$ c.p.o.'s $\varphi : A \to B$ uma aplicação. Diz-se que φ é um *isomorfismo de ordem* de A sobre B se φ é uma aplicação bijetiva e isótona tal que $\varphi^{-1} : B \to A$ é uma aplicação isótona.

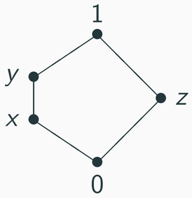
Se φ é um isomorfismo de ordem de A sobre B, então, φ^{-1} é um isomorfismo de ordem de B sobre A. Assim, diz-se que A e B são *isomorfos* e escreve-se $A \simeq B$.

Teorema. Sejam $(A, \leq_A)$ e $(B, \leq_B)$ c.p.o.'s $\varphi : A \to B$ uma aplicação. Então, φ é um isomorfismo de ordem de A sobre B se e só se φ é um mergulho de ordem sobrejetivo.

Se φ é um isomorfismo de ordem de A sobre B e A e B são finitos, então os diagramas de Hasse dos dois c.p.o.'s são iguais.

Exemplo. Os reticulados $M_5 = \{0, 1, a, b, c\}$ e $N_5 = \{0, 1, x, y, z\}$ definidos pelos Diagramas de Hasse





não são isomorfos.