2 indução natural

53. Considere as seguintes condições $p(n)$, com $n \in \mathbb{N}_0$,

(I) $p(n) = n^2 + 5n + 1$ é par; (II) $p(n) = n! \geq n^2$; (III) $p(n) = 2n > n^2$.

(a) Investigue para que naturais n a proposição $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ é verdadeira.

(b) Diga, justificando, para que naturais n a proposição $p(n)$ é verdadeira.

54. Seja $P(n)$ a seguinte afirmação:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

(a) Mostre que, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Podemos concluir que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$?

Resolução

(a) Queremos provar que se temos

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{(k-1)(k+2)}{2} \qquad (*)$$

então também temos

$$1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{((k+1)-1)((k+1)+2)}{2},$$

ou seja, também temos

$$1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{k(k+3)}{2}. \qquad (**)$$

De facto, se $(*)$ é verdade, temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (k+1) &= 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) \\ &= (1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \tfrac{(k-1)(k+2)}{2} + (k+1) \qquad \text{[por } (*)\text{]} \\ &= \tfrac{k^2+k-2+2k+2}{2} \\ &= \tfrac{k^2+3k}{2} = \tfrac{k(k+3)}{2}. \end{aligned}$$

(b) Não. Por exemplo, se considerarmos $n = 1$, obtemos a igualdade $1 = 0$, que é obviamente falsa.

Na realidade, esta igualdade é falsa para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que a soma dos n primeiros naturais é $\frac{n(n+1)}{2}$. Se suposermos que a igualdade dada é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, temos $n(n+1) = (n-1)(n+2)$, i.e., $n^2 + n = n^2 + n - 2$ e, portanto, $0 = -2$, o que é absurdo. O absurdo resulta de termos suposto que o tal n existia. Logo, a igualdade não se verifica par todo $n \in \mathbb{N}$.

55. Prove, por indução matemática, que as seguintes igualdades são válidas para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

(a) $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$;

(b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

(c) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$;

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Resolução

(1) Comecemos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1 \times (1+1) \times (2+1)}{6},$$

o que é verdade, pois, efetuando os cálculos, obtemos $1 = 1$;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Queremos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. De facto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+3) + 2(2n+3)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que a igualdade se verifica para todo natural n.

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$;

(f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

Resolução

(1) Comecemos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos:

$$1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3},$$

o que é verdade, pois, efetuando os cálculos, obtemos $2 = 2$;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Queremos provar que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

De facto,

$$\begin{aligned}
&1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)+(n+1)(n+2)\\
&\quad=[1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)]+(n+1)(n+2)\\
&\quad=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2) \qquad\qquad \text{(aplicando a hipótese de indução)}\\
&\quad=\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}\\
&\quad=\frac{(n+3)(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que a igualdade se verifica para todo natural n.

(g) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^n}$;

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k-2^{k-1})=2^n-1$;

(j) n^3-n é múltiplo de 3;

Resolução

(Ver escrita de resolução alternativa nos slides das aulas teóricas.) Começamos por observar que um número natural n é um múltiplo de 3 se existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $n=3k$.

(1) Verificamos o caso base: considerando $n=1$, temos $1^3-1=0=3\cdot 0$, com $0\in\mathbb{N}$, pelo que a proposição " 1^3-1 é um múltiplo de 3" é verdadeira;

(2) Suponhamos agora que $n\in\mathbb{N}$ é tal que $n^3-n=3k$, para algum $k\in\mathbb{N}$. Queremos provar que $(n+1)^3-(n+1)=3k'$, para algum $k'\in\mathbb{N}$. De facto,

$$\begin{aligned}
(n+1)^3-(n+1) &= n^3+3n^2+3n+1-n-1\\
&=(n^3-n)+3n^2+3n\\
&=3k+3(n^2+n) \qquad\qquad \text{(aplicando a hipótese de indução)}\\
&=3(k+n^2+n)\\
&=3k', \qquad \text{onde } k'=k+n^2+n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que, para todo natural n, n^3-n é um múltiplo de 3.

(k) 5^n-1 é múltiplo de 4.

56. Prove que:

(a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{i^2})=\frac{n+1}{2n}$, para todo o natural $n\geq 2$;

(b) $n^2>2n+1$, para todo o natural $n\geq 3$;

Resolução (1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n=3$, temos $3^2=9>7=2\times 3+1$;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $n^2 > 2n+1$. Queremos provar que $(n+1)^2 > 2(n+1)+1$, ou seja, que $(n+1)^2 > 2n+3$. De facto,

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2+2n+1 \\
&> 2n+1+2n+1 && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\
&= 2n+2n+2 \\
&> 2n+1+2 && (2n \text{ é um natural, pelo que } 2n>1) \\
&= 2n+3.
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que, para todo natural $n \geq 3$, $n^2 > 2n+1$.

(c) $(1+\frac{1}{n})^n < n$ para todo o natural $n \geq 3$;

Resolução (1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n=3$, temos $(1+\frac{1}{3})^3 < 3$, ou seja, que $64 < 81$, o que é obviamente verdade;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $(1+\frac{1}{n})^n < n$. Queremos provar que $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} < n+1$. De facto,

$$\begin{aligned}
(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1} &= (1+\tfrac{1}{n+1})^n(1+\tfrac{1}{n+1}) \\
&< (1+\tfrac{1}{n})^n(1+\tfrac{1}{n+1}) && (\text{porque } \tfrac{1}{n+1} < \tfrac{1}{n}) \\
&< n(1+\tfrac{1}{n+1}) && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\
&= n + \tfrac{n}{n+1} \\
&< n+1 && (\text{porque } n < n+1).
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $(1+\frac{1}{n})^n < n$ para todo o natural $n \geq 3$.

(d) $7n < 2^n$ para todo o natural $n \geq 6$;

(e) $2^n > n^2$, para todo o natural $n \geq 5$;

(f) $2^n > n^3$, para todo o natural $n \geq 10$;

Resolução (1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n=10$, temos $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$, o que é obviamente verdade;

(2) Suponhamos agora que $n \geq 10$ é tal que $2^n > n^3$. Queremos provar que $2^{n+1} > (n+1)^3$, ou seja, que $2^{n+1} > n^3+3n^2+3n+1$. De facto,

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2^n \times 2 \\
&> n^3 \times 2 && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\
&= n^3+n^3 \\
&= n^3 + n\cdot n^2 \\
&> n^3+10n^2 && (\text{porque } n>10) \\
&= n^3+3n^2+7n^2 \\
&> n^3+3n^2+70n && (\text{porque } n>10) \\
&= n^3+3n^2+3n+63n \\
&> n^3+3n^2+3n+1 && (\text{porque } 63n>1).
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $2^n > n^3$, para todo o natural $n \geq 10$.

(g) $n! > 2^n$, para todo o natural $n \geq 4$.

57. Considere o real $x > -1$. Prove, por indução matemática que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tem

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

58. Sejam a e b dois números reais tais que $0 \leq a \leq b$. Mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem

(a) $a^n \leq b^n$. (b) $ab^n + ba^n \leq a^{n+1} + b^{n+1}$. (c) $(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$.

Resolução

(a) Vamos aplicar o método de indução natural:

(1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos $a \leq b$, o que é verdade, por hipótese;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $a^n \leq b^n$. Queremos provar que $a^{n+1} \leq b^{n+1}$. De facto, como

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= a^n \cdot a \\ &\leq b^n \cdot a && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\ &\leq b^n \cdot b && \text{(porque } a \leq b \text{ e } b^n \geq 0) \\ &= b^{n+1} \end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $a^n \leq b^n$, para todo o natural n.

(b) Este resultado prova-se sem ser necessário recorrer ao método por indução natural. De facto, temos:

$$b^{n+1} + a^{n+1} - ab^n - ba^n = b^n(b-a) - a^n(b-a) = (b^n - a^n)(b-a) \geq 0,$$

pois, por hipótese, $a \leq b$ e, pela alínea anterior, $a^n \leq b^n$. Logo,

$$b^{n+1} + a^{n+1} \geq ab^n + ba^n,$$

como queríamos demonstrar.

(c) Aplicamos novamente o método de indução natural (pois é preferível a ter de desenvolver o binómio de Newton).

(1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos $(\frac{a+b}{2})^1 = \frac{a+b}{2} = \frac{a^1+b^1}{2}$, e, por isso, é verdade que $(\frac{a+b}{2})^1 \leq \frac{a^1+b^1}{2}$;

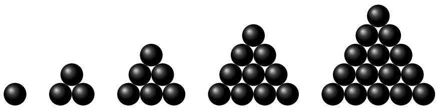
(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$. Queremos provar que $(\frac{a+b}{2})^{n+1} \leq \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}$. De facto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \frac{a+b}{2} \\ &\leq \frac{a^n+b^n}{2} \cdot \frac{a+b}{2} && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\ &= \frac{(a^n+b^n)(a+b)}{4} \\ &= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}+a^n b + b^n a}{4} \\ &\leq \frac{a^{n+1}+b^{n+1}+a^{n+1}+b^{n+1}}{4} && \text{(pela alínea anterior)} \\ &= \frac{2(a^{n+1}+b^{n+1})}{4} \\ &= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$, para todo o natural n.

59. Descubra a lei sugerida pelos dados apresentados e prove-a por indução natural:
$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$;
$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{5}{6}$;
$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{23}{24}$.

60. Recorrendo ao método de indução matemática, prove que a sucessão dos números triangulares



cuja definição por recorrência é $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + n \qquad para\ n > 1 \end{cases}$, tem como termo geral $t_n = \frac{n^2+n}{2}$.

61. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3, \text{ para todo } n \geq 1 \end{cases}$$

Prove, por indução, que $a_n = 3(2^n - 1)$, para todo $n \geq 1$.

Resolução

(1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos $a_1 = 3 = 3(2^1 - 1)$, o que é obviamente verdade;

(2) Suponhamos agora que $n \geq 1$ é tal que $a_n = 3(2^n - 1)$. Queremos provar que $a_{n+1} = 3(2^{n+1} - 1)$. De facto,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 3 && \text{(pela definição da sucessão)} \\ &= 2 \times 3(2^n - 1) + 3 && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 6 + 3 \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 3 \\ &= 3(\times 2^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $a_n = 3(2^n - 1)$, para todo o número natural n.

62. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = (n+1)a_n, \text{ para todo } n \geq 1 \end{cases}$$

Prove, por indução, que $a_n \geq 2^n$, para todo $n \geq 1$.

63. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n+5), \text{ para todo } n \geq 1 \end{cases}$$

Prove, por indução, que $1 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 2$, para todo $n \geq 1$.

Resolução

(1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos $a_1 = 2$ e $a_2 = \frac{1}{4}(a_1+5) = \frac{7}{4}$, pelo que é verdade que $1 \leq a_2 \leq a_1 \leq 2$;

(2) Suponhamos agora que $n \geq 1$ é tal que $1 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 2$. Queremos provar que $1 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 2$.

Como, por hipótese de indução, $a_{n+1} \leq a_n \leq 2$, temos que $a_{n+1} \leq 2$. Falta então provar que $1 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}$. Por definição da sucessão, temos que $a_{n+2} = \frac{1}{4}(a_{n+1}+5)$. Mas, novamente por hipótese de indução, temos que

$$\frac{1}{4}(1+5) \leq (a_{n+1}+5) \leq \frac{1}{4}(a_n+5),$$

ou seja, temos que

$$\frac{3}{2} \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

Logo,

$$1 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $1 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 2$, para todo o número natural n.

64. Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência definida como recursiva do seguinte modo:

$$F(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & n \geq 3 \end{cases}$$

(a) Prove, através da indução matemática, que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se tem:

i. $F(1) + F(2) + ... + F(n) = F(n+2) - 1$;

ii. $F(2) + F(4) + ... + F(2n) = F(2n+1) - 1$;

iii. $F(3n)$ é par.

(b) Usando o Método de Indução Completa, prove que, para todo $n \geq 2$, $F(n) \geq \phi^{n-2}$, onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro.

[sugestão: Tenha presente que o número de ouro é o real positivo que satisfaz $x^2 = x + 1$.]

65. Use o Princípio de Indução Completa de base 2 para mostrar que todo o número natural maior ou igual a 2 se pode decompor como produto de números primos.

66. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 4 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \text{ para todo } n \geq 1 \end{cases}$$

Use o Princípio de Indução Completa para provar que $a_n = n2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

Resolução

(1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos $a_1 = 1 = 1 \times 2^{1-1}$, o que é obviamente verdade;

(2) Suponhamos agora que $n \geq 1$ é tal que, para todo natural $k \leq n$, $a_k = k2^{k-1}$. Queremos provar que $a_{n+1} = (n+1)2^n$. Como na definição por recorrência da sucessão apenas a partir da terceira ordem é que os termos estão definidos à custa dos anteriores, temos de considerar duas situações:

- Se $n = 1$, temos que $a_2 = 4 = 2 \times 2^1 = 2 \times 2^{2-1}$.
- Se $n \geq 2$, temos que
$$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}.$$
Neste caso, como $n \leq n$ e $n - 1 \leq n$, podemos aplicar a hipótese de indução completa aos termos a_n e a_{n-1} e, assim, temos que
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4n2^{n-1} - 4(n-1)2^{n-2} \\ &= 4n2^{n-1} - 4n2^{n-2} + 4 \times 2^{n-2} \\ &= 8n2^{n-2} - 4n2^{n-2} + 4 \times 2^{n-2} \\ &= 4n2^{n-2} + 4 \times 2^{n-2} \\ &= (n+1)2^n. \end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução Completa, podemos concluir que $a_n = n2^{n-1}$, para todo o número natural n.

67. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}, \text{ para todo } n \geq 3 \end{cases}$$
Use o Princípio de Indução Completa para provar que a_n é um número ímpar, para todo $n \geq 1$.

68. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0 + 1, \text{ para todo } n \geq 1 \end{cases}$$
Mostre que $a_n = 2^n$, para todo $n \geq 0$.

69. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \text{ para todo } n \geq 3 \end{cases}$$
Mostre que $a_n = 3 \times 2^{n-1} + 2 \times (-1)^n$, para todo $n \geq 1$.

70. Pretende-se dividir uma barra de chocolate nos n quadrados que a compõem. Sabendo que apenas se pode partir a barra pelas linhas que definem os quadrados, mostre que é necessário partir o chocolate $n - 1$ vezes para se separar os n quadrados.