Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Funções reais de n variáveis reais: diferenciabilidade

1. (a)
- $f_x(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f((0,0)+h(1,0))-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0\,.$
- $f_y(-1,1) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f((-1,1)+h(0,1))-f(-1,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(-1)^2(1+h)-2}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h} = 2\,.$

(b)
- $f_y(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f((0,0)+h(0,1))-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)}{h}\,.$
Mas
$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0,h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{2h}{h} = 2$ e $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0,h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{0}{h} = 0.$
Consequentemente, não existe $f_y(0,0)$.
- $f_y(0,1) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f((0,1)+h(0,1))-f(0,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,1+h)-f(0,1)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(1+h)-2}{h} = 2.$
- $f_x(1,1) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f((1,1)+h(1,0))-f(1,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h}\,.$
Mas
$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-(1+h)+1}{h} = -1$ e $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{3}{h} = -\infty.$
Consequentemente, não existe $f_x(1,1)$.

2. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^2+2y\,,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x-2y.$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + y^3\cos(xy^2)\,,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^y x + 2xy^2\cos(xy^2) + \operatorname{sen}(xy^2).$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\,,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2}.$

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2e^x x + e^x x^2\,,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2.$

(e) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)\,,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy).$

(f) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}.$

(g) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(yz)\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x^2 z\,\mathrm{sen}(yz)\ , \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y) = -x^2 y\,\mathrm{sen}(yz).$

(h) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{yz}\cos(xe^{yz})\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{yz}xz\cos(xe^{yz})\ , \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y) = e^{yz}xy\cos(xe^{yz}).$

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x}\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{yz}z - \mathrm{sen}(y)\ , \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y) = e^{yz}y.$

(j) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y^2+z^3)^x\log(y^2+z^3)\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy(y^2+z^3)^{x-1}$
$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y) = 3xz^2(y^2+z^3)^{x-1}.$

(k) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{xyz^3}{\sqrt{x^2yz^3}}\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^2z^3}{2\sqrt{x^2yz^3}}\ , \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y) = \dfrac{3x^2yz^2}{2\sqrt{x^2yz^3}}.$

(l) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2e^z xy^2}{1+x^2}\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2e^z y\log(1+x^2)\ , \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y) = e^z y^2\log(1+x^2).$

3. (a) Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\[2ex] 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\[2ex] 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(b) Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^6-2x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\[2ex] 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3y-4xy^5}{(x^2+y^4)^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\[2ex] 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(c) Seja $\mathcal{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-x\}$ e $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2\backslash\mathcal{R}$.

- Se $(x,y)\in\mathcal{D}$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

- Se $(x,y) \in \mathcal{R}\backslash\{(0,0)\}$, isto é, se $(x,y)=(a,-a)$, $\quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((a,-a)+h(1,0))-f(a,-a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,-a)-f(a,-a)}{h}=-\infty$$

e

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((a,-a)+h(0,1))-f(a,-a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,-a+h)-f(a,-a)}{h}=-\infty\,.$$

- Se $(x,y)=(0,0)$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\,.$$

(d) Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2y^2+y^4-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(e) Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \text{se } (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}.$$

Além disso,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(0,1))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=+\infty\,.$$

4. Temos que:

(a) $$f_{x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2e^{x^2-y^2}+4x^2e^{x^2-y^2}.$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-4xye^{x^2-y^2}.$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-4xye^{x^2-y^2}.$$

$$f_{y^2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-2e^{x^2-y^2}+4y^2e^{x^2-y^2}.$$

(b) $$f_{x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

$$f_{y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

(c) $f_{x^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = -y^2z^2\cos(xyz)$

$$f_{xy}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = -z(xyz\cos(xyz) + \operatorname{sen}(xyz))$$

$$f_{xz}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -y(xyz\cos(xyz) + \operatorname{sen}(xyz))$$

$$f_{yx}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -z(xyz\cos(xyz) + \operatorname{sen}(xyz))$$

$$f_{y^2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = -x^2z^2\cos(xyz)$$

$$f_{yz}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = -x(xyz\cos(xyz) + \operatorname{sen}(xyz))$$

$$f_{zx}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -y(xyz\cos(xyz) + \operatorname{sen}(xyz))$$

$$f_{zy}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = -x(xyz\cos(xyz) + \operatorname{sen}(xyz))$$

$$f_{z^2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -x^2y^2\cos(xyz)$$

(d) Exercício análogo ao anterior.

7. (a) Suponhamos que existe uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam: $f_x(x,y) = 2x^3$ e $f_y(x,y) = yx^2 + x$.
Então, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^3\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0\,,$$

e, consequentemente, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ são funções contínuas.
Mas, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2xy + 1\,.$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,,$$

o que contraria o Teorema de Schwarz. Então não pode existir uma tal função.

(b) Suponhamos que existe uma função $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam: $f_x(x,y) = x\,\text{sen}y$ e $f_y(x,y) = y\,\text{sen}x$.
Então, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\,\text{sen}y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = x\,\cos y\,,$$

e, consequentemente, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ são funções contínuas.
Mas, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = y \cos x\,.$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \not\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,,$$

o que contraria o Teorema de Schwarz. Então não pode existir uma tal função.

8. (a) Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{-x^2y^3+y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4+3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) $f_{xy}(0,0) = 1$ e $f_{yx}(0,0) = 0$.

9. (a) $f_y(x,0) = 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f_x(0,y) = y$ para todo o $y \in \mathbb{R}$.

(b) $f_{xy}(0,0) = 1$ e $f_{yx}(0,0) = 0$.

10. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 1$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,1) = 0$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,1) = 14e^2$

(e) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 1$

(f) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,2,-1) = 4$

(g) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0,1) = 1$

11. (a) Seja $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Temos que: $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0,0) = \dfrac{|v_1 v_2| v_3}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

(b) $f_x(0,0,0) = 0$, $f_y(0,0,0) = 0$ e $f_z(0,0,0) = 0$.

12. (a) Seja $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \begin{cases} \frac{v_1^3}{v_1^2+v_2^2} & \text{se} \quad (v_1, v_2) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (v_1, v_2) = (0,0) \end{cases}$$

(b) Temos que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$, para todo o $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Seja $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Temos que:

- Se $v_1 = -v_2$, então $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$;
- Se $v_1 \neq -v_2$, então $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \dfrac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}$.

(d) Temos que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$, para todo o $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

14. (a) A função f não é diferenciável em $(0,0)$. Resolvido na aula.

(b) A função f não é diferenciável em $(0,0)$. Resolvido na aula.

(c) A função f é diferenciável em $(0,0)$. Resolvido na aula.

(d) A função f não é diferenciável em $(0,0)$. Observe que não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

(e) A função f não é diferenciável em $(0,0)$. Observe que não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

(f) A função f é diferenciável em $(0,0)$. Com efeito, temos que:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f((0,0) + h(1,0)) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2}{h} = 0$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f((0,0) + h(0,1)) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{h^2}{h} = 0$.

Como existem as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, f é diferenciável em $(0,0)$ se e só se

$$\lim_{(v_1,v_2) \to (0,0)} \frac{f((0,0) + (v_1, v_2)) - f(0,0) - [v_1 . \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + v_2 . \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)]}{\|(v_1, v_2)\|} = 0 .$$

Mas

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f((0,0)+(v_1,v_2)) - f(0,0) - [v_1.\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + v_2.\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)]}{\|(v_1,v_2)\|}$$

$$= \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v_1,v_2)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

$$= \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{v_1^2+v_1v_2-v_2^2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

$$= \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.v_1 + \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.v_2 - \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.v_2 = 0+0-0=0\,.$$

Então f é diferenciável em $(0,0)$.

Justificação do cálculo dos limites:

- Observemos que a função $h(v_1,v_2) = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$, $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, é limitada. Com efeito,

  $$|v_1| = \sqrt{v_1^2} \le \sqrt{v_1^2+v_2^2} \text{ e, portanto, } \left|\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\right| \le 1,\ \forall (v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\,.$$

  Então, $\displaystyle\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{v_1^2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.v_1 = 0$
  porque $\displaystyle\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} v_1 = 0$ e $\left|\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\right| \le 1,\ \forall (v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\,.$
- A justificação dos restantes dois limites é análoga.

15. A função f não é contínua em $(0,0)$. Consequentemente, f não é diferenciável em $(0,0)$.

17. Seja $\mathcal{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-x\}$ e $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2\backslash\mathcal{R}$. A função f é diefrenciável em $(x,y)\in\mathcal{D}$.

18. (a) Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(b) Seja $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$.

- Se $v_1=0$ ou $v_2=0$, então $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)=0$.
- Se $v_1\neq0$ e $v_2\neq0$, então $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ não existe.

(c) A função f é contínua em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

(d) A função f não é diferenciável em $\{(0,0)\}$.

19. (a) Temos que $\dfrac{\partial f}{\partial v}\,(0,0) = 0\,$, para todo o $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

    (c) A função f não é diferenciável em $(0,0)$.

20. (a) Temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

    (b) Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2\,x\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2\,y\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$