



---

Números Reais

---

1. Qual é o erro do seguinte argumento?

Sejam  $x$  e  $y$  dois números reais quaisquer tais que  $x = y$ . Então

$$\begin{aligned}x^2 = xy &\Rightarrow x^2 - y^2 = xy - y^2 \Rightarrow (x + y)(x - y) = y(x - y) \\&\Rightarrow x + y = y \Rightarrow 2y = y \Rightarrow 2 = 1\end{aligned}$$

2. Nos exercícios seguintes substitua o símbolo  $*$  por  $<$ ,  $>$  ou  $=$  de modo a obter afirmações corretas:

(a) $\frac{3}{8} * 0,37$	(b) $0,33 * \frac{1}{3}$	(c) $\sqrt{2} * 1,414$
(d) $5 * \sqrt{25}$	(e) $\frac{3}{7} * 0.428571$	(f) $\frac{22}{7} * \pi$

3. Represente os seguintes números racionais sob a forma de quociente de números inteiros:

(a) $2,25$	(b) $3,721$	(c) $5,(4)$	(d) $0,(17)$	(e) $3,2(7)$	(f) $3,66(087)$
------------	-------------	-------------	--------------	--------------	-----------------

4. Apresente um exemplo de:

(a) um número irracional pertencente ao intervalo  $\left[\frac{3}{100}, \frac{4}{100}\right]$ ;

(b) um número racional pertencente ao intervalo  $\left[\frac{\pi}{11}, \frac{\pi}{10}\right]$ .

5. Sejam  $x$  e  $y$  dois números reais tais que  $x < y$ . Diga, justificando, se cada uma das seguintes relações é verdadeira ou falsa:

(a) $ x  <  y $	(b) $x^2 < y^2$	(c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \quad (x, y \neq 0)$
(d) $x^3 < y^3$	(e) $x < \frac{x+y}{2} < y$	(f) $\frac{1}{ x } < \frac{1}{ y } \quad (x, y \neq 0)$

6. Em cada uma das alíneas seguintes encontre uma desigualdade da forma  $|x - a| < \epsilon$  cuja solução seja o intervalo dado:

(a) $] - 2, 2[$	(b) $] - 4, 0[$	(c) $] 0, 4[$	(d) $] - 3, 7[$	(e) $] - 7, 3[$
-----------------	-----------------	---------------	-----------------	-----------------

7. Exprima cada uma dos conjuntos seguintes na forma de intervalo ou reunião de intervalos:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 - x \leq 2\}$     | (b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 - 2x \leq 1\}$ |
| (c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$          | (d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2 - 1) \geq 0\}$  |
| (e) $\{x \in \mathbb{R} :  5x + 2  \leq 1\}$  | (f) $\{x \in \mathbb{R} :  3 - x  \geq 2\}$       |
| (g) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$      | (h) $\{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x \leq -1\}$    |
| (i) $\{x \in \mathbb{R} : 2 <  x  < 3\}$      | (j) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{2x+3} > 0\}$ |
| (k) $\{x \in \mathbb{R} :  x^2 - 1  \leq 1\}$ | (l) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \leq 4\}$          |
| (m) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\}$      | (n) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-2} \leq 0\}$ |
| (o) $\{x \in \mathbb{R} :  x - 3  < 2 x \}$   | (p) $\{x \in \mathbb{R} :  x + 1  >  x - 3 \}$    |

8. Indique em extensão os seguintes conjuntos:

- |  |   |
|--|---|
| (a) $\{x \in \mathbb{R} :  x + 4  = 3\}$   | (b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x+1)^2} = 3\}$ |
| (c) $\{x \in \mathbb{R} :  x  =  x + 2 \}$ | (d) $\{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 7)^2 = 0\}$    |

9. Indique quais das seguintes relações são verdadeiras. Dê um contraexemplo para as relações que forem falsas.

- |  |                           |                        |
|--|---------------------------|------------------------|
| (a) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ | (b) $(x+y)^n = x^n + y^n$ | (c) $(xy)^n = x^n y^n$ |
|--|---------------------------|------------------------|

10. Verifique se os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}$  são majorados, minorados, limitados. Indique ainda se têm supremo, ínfimo, máximo ou mínimo:

- |   |   |  |
|---|---|--|
| (a) $A = [0, 2] \cup ]3, 5[ \cup \{6, 7\}$                      | (b) $B = ]-\infty, 2[$                                  | (c) $C = ]1, 2] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$        |
| (d) $D = [1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$                         | (e) $E = [1, +\infty[$                                  | (f) $F = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 5\}$                     |
| (g) $G = \left\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < \frac{16}{25}\right\}$ | (h) $H = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ | (i) $I = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ |

11. Para cada um dos seguintes conjuntos determine o derivado, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam).

- |  |   |
|--|---|
| (a) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$                                | (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$  |
| (c) $C = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 < 50\}$           | (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x <  x \}$  |
| (e) $E = \{x \in \mathbb{R} : x^5 > x^3\}$                               | (f) $F = \{x \in \mathbb{Q} :  x  < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq \pi\}$ |
| (g) $G = [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ | (h) $H = \{x \in \mathbb{Q} :  x + 4  < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 - 3 < 0\}$   |