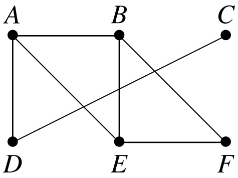
Grafos - Generalidades

1. Definição e isomorfismos
2. Matriz de incidência e matriz de adjacência
3. Graus e caminhos
4. Subgrafos e subgrafos gerados
5. Grafos completos e grafos bipartidos
6. Grafos conexos e árvores

Exemplo

A figura seguinte representa um grafo G:



Este grafo tem 6 vértices: $V = \{A, B, C, D, E, F\}$

e tem 7 arestas: $E = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{A.E\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{C, D\}, \{E, F\}\}$.

Grafo - definição

Um grafo (simples) é um par ordenado $G = (V, E)$, onde

- V é um conjunto não vazio;
- E é um conjunto de subconjuntos de V, com 2 elementos.

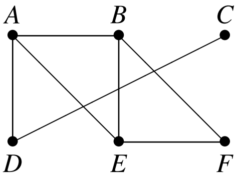
- Os elementos de V dizem-se os vértices do grafo;

- Os elementos de E dizem-se as arestas do grafo.

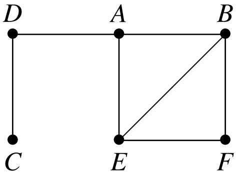
Nota: Também se pode considerar grafos onde as arestas são orientadas (digrafos). Nesse caso as arestas são representadas por pares ordenados e portanto, a aresta (A, B) é distinta da aresta (B, A). Nesta UC vamos considerar apenas grafos simples, isto é, grafos cujas arestas não são orientadas.

Exemplo

O grafo G

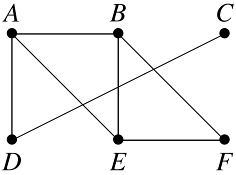


Também pode ser representado pela figura:

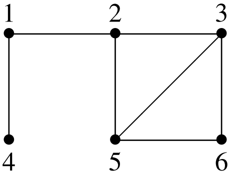


Exemplo - isomorfismo

Os grafos

G 

e

G_1 

não são iguais pois não têm o mesmo conjunto de vértices. No entanto, como podem ser representados pela mesma figura, podemos estabelecer uma correspondência entre os vértices de G e os vértices de G_1 , de forma a transformar um grafo no outro.

A função $f : \{A, B, C, D, E, F\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tal que,

$$f(A) = 2 \quad f(B) = 3 \quad f(C) = 4 \quad f(D) = 1 \quad f(E) = 5 \quad f(F) = 6$$

é bijectiva e transforma o grafo G no grafo G_1. Dizemos então que os grafos são isomorfos e que a função f (bijectiva) é um isomorfismo entre os grafos.

Isomorfismo entre grafos

Mais geralmente, dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ dizem-se isomorfos se existir uma função bijectiva $f : V_1 \to V_2$, tal que;

$$\{A, B\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(A), f(B)\} \in E_2$$

Nesse caso, diz-se que a função f é um isomorfismo entre os dois grafos.

Nota: Graficamente, dois grafos são isomorfos se e só se podem ser representados pela mesma figura.

A relação de isomorfismo entre grafos, é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva) e portanto, as classes de isomorfismo constituem uma partição do conjunto de todos os grafos.

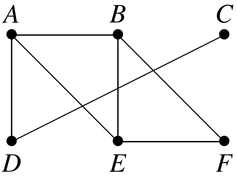
Matriz de incidência de um grafo

Uma aresta diz-se incidente nos vértices que liga.

Para construir a matriz de incidência do grafo G, fixamos uma ordem para os seus vértices e as suas arestas, por exemplo:

A, B, C, D, E, F e $\{A,B\},\{A,D\},\{A,E\},\{B,E\},\{B,F\},\{C,D\},\{E,F\}$

Consideramos os vértices para linhas e as arestas para colunas. Para cada linha/coluna (vértice/aresta) preenchemos a entrada da matriz com 1, caso o vértice seja incidente na aresta, e preenchemos com 0 caso contrário.



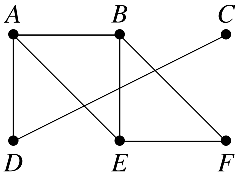
$$I(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de adjacência de um grafo

Dois vértices dizem-se adjacentes se estão ligados por uma aresta.

Para construir a matriz de adjacência do grafo G, fixamos uma ordem para os seus vértices, por exemplo: A, B, C, D, E, F

Consideramos os vértices para linhas e colunas. Para cada linha/coluna preenchemos a entrada da matriz com 1, caso os vértices (linha/coluna) sejam adjacentes, e preenchemos com 0 caso contrário.



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: A matriz de adjacência é uma matriz quadrada simétrica.

Grau de um vértice

Chama-se grau de um vértice v ao número de arestas nele incidentes e representa-se por $g(v)$.

No grafo G do nosso exemplo, temos:

$$g(A) = g(B) = g(E) = 3 \qquad g(D) = g(F) = 2 \qquad g(C) = 1$$

Nota - Na matriz de incidência e na matriz de adjacência, o grau de um vértice é a soma dos elementos da sua linha.

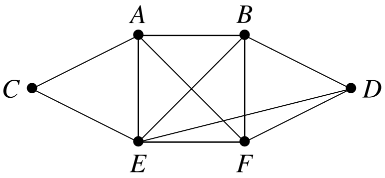
Teorema - A soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas.

Corolário - Em qualquer grafo o número de vértices com grau ímpar, é um número par.

Caminhos num grafo

Um caminho num grafo G é uma sequência de vértices $< v_1, v_2 \cdots , v_n >$ tal que todos os pares de vértices consecutivos estão ligados por uma aresta. O primeiro vértice do caminho diz-se o vértice inicial e o último vértice diz-se o vértice final do caminho.

Chama-se comprimento de um caminho ao número de arestas que o definem.



$< B, E, D, F, A, C, E, F >$ é um caminho de B a F, de comprimento 7.

$< B, C, E >$ não é um caminho porque $\{B, C\}$ não é uma aresta.

Caminhos num grafo

Um caminho diz-se simples se não tiver arestas repetidas.

Um caminho diz-se elementar se não tiver vértices repetidos.

Nota: todo o caminho elementar é simples.

Um caminho diz-se fechado se os vértices inicial e final coincidem.

Um caminho fechado simples, de comprimento ≥ 3, diz-se um circuito

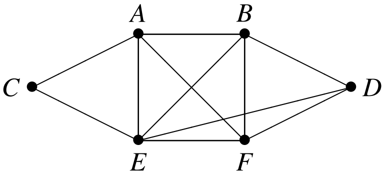
Um caminho fechado elementar, de comprimento ≥ 3, diz-se um ciclo

Notas:

- Num ciclo, os vértices inicial e final têm que coincidir e como tal não são considerados uma repetição.

- Todo o ciclo é um circuito.

Caminhos num grafo - exemplos



$< B, E, D, F, A, C, E, F >$ é um caminho simples mas não é elementar.

$< A, E, F, B, E, F, A >$ é um caminho fechado mas não é um circuito (nem é um ciclo).

$< A, F, B, D, F, E, A >$ é um circuito mas não é um ciclo.

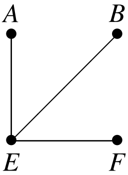
$< A, F, D, E, B, A >$ é um ciclo.

Subgrafos de um grafo

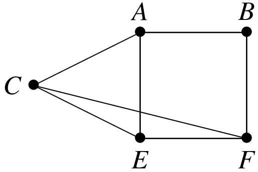
Um subgrafo de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo $G' = (V', E')$:

$$V' \subseteq V \qquad e \qquad E' \subseteq E$$

Exemplos: Considerando o grafo G do exemplo anterior:



é um subgrafo de G



não é um subgrafo de G ($\{C, F\} \notin E$)

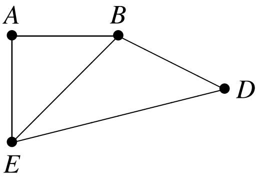
Subgrafo gerado

Dado um grafo $G = (V, E)$, o subgrafo gerado por um subconjunto de vértices $V' \subseteq V$ é o grafo $G' = (V', E')$ cujas arestas E' são todas as arestas de E que ligam vértices de V'.

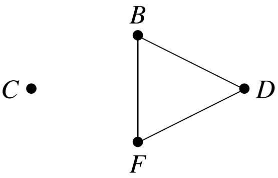
Exemplos: Considerando o grafo G do exemplo anterior:

Para $V' = \{A, B, E, D\}$ e para $V'' = \{B, C, D, F\}$, temos:

Subfrafo G'



Subgrafo G''

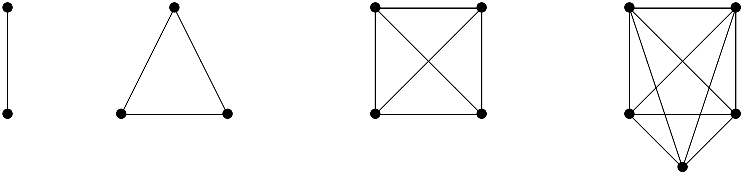


Grafos completos

Um grafo com n vértices tal que quaisquer dois vértices estão ligados por uma aresta, diz-se um grafo completo e representa-se por K_n.

Exemplos:

K_2 K_3 K_4 K_5

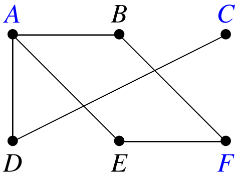


Nota: K_n tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

Grafos bipartidos

Um grafo $G = (V, E)$ diz-se bipartido se existe uma partição de V em dois conjuntos V_1 e V_2, tais que qualquer aresta de E liga um vértice de V_1 a um vértice de V_2.

Exemplo: O seguinte grafo é bipartido:



Basta considerar $V_1 = \{A, C, F\}$ e $V_2 = \{B, D, E\}$

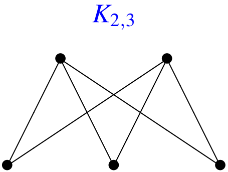
Nota: Um grafo bipartido não pode conter triângulos.
Por esse motivo, K_n não é bipartido, para $n \geq 3$.

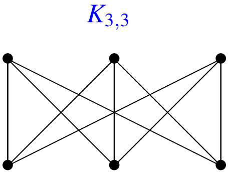
Grafos bipartidos completos

Um grafo bipartido $G = (V, E)$, com partição $V = V_1 \cup V_2$, diz-se um grafo bipartido completo , se todo o vértice de V_1 está ligado a todo o vértice de V_2 .

Nota: Se $\#V_1 = n$ e $\#V_2 = m$, representamos o grafo por $K_{n,m}$.
$K_{n,m}$ tem $n \times m$ arestas.

Exemplos:





Grafos conexos

Um grafo diz-se conexo se qualquer par de vértices do grafo está ligado por um caminho.

Se um grafo não for conexo dizemos que o grafo é desconexo .

Dado um grafo $G = (V, E)$, a relação binária R definida em V por:

$$A \; R \; B \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe um caminho em } G \text{ de } A \text{ a } B$$

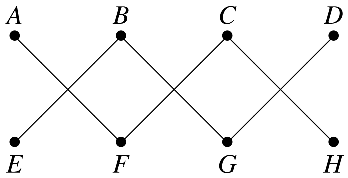
é uma relação de equivalência em V .

Os subgrafos gerados pelas classes de equivalência desta relação dizem-se as componentes conexas do grafo.

Nota: Um grafo conexo tem apenas 1 componente conexa.

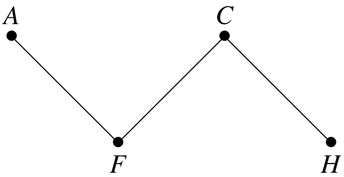
Grafos conexos - Exemplo

O grafo

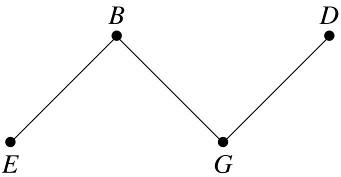


é desconexo.

As suas componentes conexas são:



e

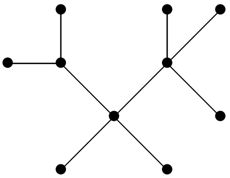


Árvores

Um grafo diz-se uma árvore se for conexo e não tiver ciclos.

Um grafo desconexo que não tem ciclos, diz-se uma floresta . Cada componente conexa duma floresta é uma árvore.

Exemplo: O seguinte grafo é uma árvore:



Árvores

Teorema: Uma árvore tem sempre menos uma aresta do que vértices.

$$a = v - 1$$

Demonstração: Por indução sobre o número de arestas.

Corolário: Toda a árvore, não trivial, tem pelo menos 2 vértices de grau 1.

Demonstração: A soma dos graus dos vértices é $2a$, ou seja $2v - 2$.
Se todos os vértices tivessem grau ≥ 2, a soma dos graus seria $\geq 2v$.
Logo, pelo menos 2 vértices têm que ter grau 1.
Note-se que como o grafo é conexo todos os vértices têm grau ≥ 1.

Árvores

Teorema: Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo então existe um subgrafo de G que é uma árvore e contém todos os vértices de G.

Demonstração: Se G não for uma árvore então contém ciclos. Considerando um ciclo em G e apagando uma das arestas desse ciclo, continuamos a obter um subgrafo conexo que contém todos os vértices de G. Repetindo sucessivamente este processo vamos obter um grafo conexo, sem ciclos, que contém todos os vértices de G.

Exemplo: