4 relações binárias

107. Para os conjuntos A e B e relação R de A em B, indique o domínio, o contradomínio de R e o conjunto imagem de X por R:

   (a) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
   $R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7)\}$;
   $X = \{2, 3\}$;

   (b) $A = B = \mathbb{N}$;
   $R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m = 2n\}$;
   $X = 4\mathbb{N}$;

   (c) $A = B = \mathbb{R}$;
   R é relação binária em $\mathbb{R}$ definida por $x\,R\,y \;\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$;
   $X = \{-2, -1, 1, 2\}$;

   (d) $A = B = \{x : x$ é um triângulo no plano$\}$;
   $R = \{(x, y) \in A \times A \mid$ os triângulos x e y são semelhantes$\}$;
   X é o conjunto formado por um triângulo equilátero cujo lado mede 3cm;

   (e) A é o conjunto de todas as pessoas e B é o conjunto de todos os livros;
   $R = \{(a, b) \in A \times B \mid a$ leu $b\}$;
   $X = \{a \in A : a$ é recém-nascido$\}$.

108. Para cada uma das relações binárias definidas em $\mathbb{Z}$, determine a imagem e a imagem completa inversa de $\{3\}$:

   (a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = |b|\}$;

   (b) $S = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a$ é divisor de $b\}$;

   (c) $T = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (\exists k \in \mathbb{Z}) b = 4k + a\}$;

   (d) $U = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a + b = 7\}$.

109. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$ e as relações $R = \{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$ e $S = \{(4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 6)\}$ definidas de A para B e de B para B, respetivamente. Determine:

   (a) $S \circ S$;
   (b) $S \circ R$;
   (c) $R \circ S$;
   (d) S^{-1};
   (e) R^{-1};
   (f) $R^{-1} \circ S$;
   (g) $S^{-1} \circ R$;
   (h) $(S^{-1} \circ R)^{-1}$.

   Resolução

   (a) $S \circ S = \{(x, y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x, z) \in S$ e $(z, y) \in S\} = \{(4, 4), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$. De facto,

   - porque $(4, 5), (5, 4) \in S$, temos que $(4, 4) \in S \circ S$;
   - porque $(4, 6), (6, 6) \in S$, temos que $(4, 6) \in S \circ S$;
   - porque $(5, 4), (4, 5) \in S$, temos que $(5, 5) \in S \circ S$;
   - porque $(5, 4), (4, 6) \in S$, temos que $(5, 6) \in S \circ S$;
   - porque $(6, 6), (6, 6) \in S$, temos que $(6, 6) \in S \circ S$.

(b) $S \circ R = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in R \text{ e } (z,y) \in S\} = \{(1,5),(1,6),(1,4),(2,4),(3,6)\}$. De facto,

- porque $(1,4) \in R$ e $(4,5) \in S$, temos que $(1,5) \in S \circ R$;
- porque $(1,4) \in R$ e $(4,6) \in S$, temos que $(1,6) \in S \circ R$;
- porque $(1,5) \in R$ e $(5,4) \in S$, temos que $(1,4) \in S \circ R$;
- porque $(2,5) \in R$ e $(5,4) \in S$, temos que $(2,4) \in S \circ R$;
- porque $(3,6) \in R$ e $(6,6) \in S$, temos que $(3,6) \in S \circ R$.

(c) $R \circ S = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in S \text{ e } (z,y) \in R\} = \emptyset$, uma vez que $D'_S \cap D_R = \emptyset$.

(d) $S^{-1} = \{(x,y) \in A \times A : (y,x) \in S\} = \{(5,4),(6,4),(4,5),(6,6)\}$

(e) $R^{-1} = \{(x,y) \in A \times A : (y,x) \in R\} = \{(4,1),(5,1),(5,2),(6,3)\}$

(f) $R^{-1} \circ S = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in S \text{ e } (z,y) \in R^{-1}\} = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in S \text{ e } (y,z) \in R\} = \{(5,1),(4,1),(4,2),(6,3),(4,3)\}$. De facto,

- $(5,1) \in R^{-1} \circ S$ porque $(5,4) \in S$ e $(1,4) \in R$;
- $(4,1) \in R^{-1} \circ S$ porque $(4,5) \in S$ e $(1,5) \in R$;
- $(4,2) \in R^{-1} \circ S$ porque $(4,5) \in S$ e $(2,5) \in R$;
- $(6,3) \in R^{-1} \circ S$ porque $(6,6) \in S$ e $(3,6) \in R$;
- $(4,3) \in R^{-1} \circ S$ porque $(4,6) \in S$ e $(3,6) \in R$.

(g) $S^{-1} \circ R = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in R \text{ e } (z,y) \in S^{-1}\} = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in R \text{ e } (y,z) \in S\} = \{(1,5),(1,4),(2,4),(3,6),(3,4)\}$. De facto,

- $(1,5) \in S^{-1} \circ R$ porque $(1,4) \in R$ e $(5,4) \in S$;
- $(4,1) \in S^{-1} \circ R$ porque $(1,5) \in R$ e $(4,5) \in S$;
- $(4,2) \in S^{-1} \circ R$ porque $(2,5) \in R$ e $(4,5) \in S$;
- $(6,3) \in S^{-1} \circ R$ porque $(3,6) \in R$ e $(6,6) \in S$;
- $(3,4) \in R^{-1} \circ S$ porque $(3,6) \in R$ e $(4,6) \in S$.

ou, tendo em conta a alínea anterior,

$S^{-1} \circ R = (R^{-1} \circ S)^{-1} = \{(x,y) \in A \times A : (y,x) \in R^{-1} \circ S\} = \{(1,5),(1,4),(2,4),(3,6),(3,4)\}$.

(h) $(S^{-1} \circ R)^{-1} = \{(x,y) \in A \times A : (y,x) \in S^{-1} \circ R\} = \{(5,1),(4,1),(4,2),(6,3),(4,3)\}$.

110. Considere o conjunto $A = \{2,4,6,8,10\}$ e as relações

$$R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(10,8)\}, \qquad S = \{(10,2),(10,8)\}, \qquad T = \{(6,2),(6,4),(8,10)\}$$

nele definidas. Determine:

(a) R^{-1};
(b) $R^{-1} \cup S^{-1}$;
(c) $T \setminus S^{-1}$;
(d) $T^{-1} \cap S$;
(e) $S \circ T$;
(f) $R \circ T$;
(g) $S^{-1} \circ T^{-1}$;
(h) $S^{-1} \circ S$.

111. Sejam $E = \{(p,q) \in P \times P :$ a pessoa p é inimiga da pessoa $q\}$ e $F = \{(p,q) \in P \times P :$ a pessoa p é amiga da pessoa $q\}$, onde P é o conjunto de todas as pessoas. Que significado tem o ditado "Inimigo de um meu inimigo meu amigo é" em termos das relações E e F?

Resolução

Se me identificar com x, identificar o meu inimigo por y e o inimigo do meu inimigo por z, nas condições do enunciado, podemos traduzir a expressão "inimigo do meu inimigo"por

$$(z,y),(y,x) \in E.$$

A condição $(z,x) \in F$ traduz que o primeiro (z) é meu amigo. Assim, o provérbio pode ser traduzido pela implicação

$$(z,y) \in E \text{ e } (y,x) \in E \Rightarrow (z,x) \in F,$$

ou seja,

$$(z,x) \in E \circ E \Rightarrow (z,x) \in F,$$

o que pode ser traduzido em termos das relações binárias E e F por

$$E \circ E \subseteq F.$$

112. Seja A um conjunto de pessoas. Definam-se em A as relações binárias:

$a\,R\,b \Leftrightarrow$ "b é progenitor de a"; $a\,S\,b \Leftrightarrow$ "b é irmão de a"; $a\,T\,b \Leftrightarrow$ "b é cônjuge de a".

Qual o grau de parentesco entre a e b se:

(a) $a\ R \circ S\ b$;
(b) $a\ T \circ R\ b$;
(c) $a\ T \circ S\ b$;
(d) $a\ S \circ R\ b$;
(e) $a\ R \circ T\ b$;
(f) $a\ R \circ T \circ S\ b$.

Resolução

(a) Como

$$\begin{aligned} a\ R \circ S\ b &\Leftrightarrow (\exists c \in A)\ a\ S\ c \text{ e } c\ R\ b \\ &\Leftrightarrow (\exists c \in A)\ c \text{ é irmão de } a \text{ e } b \text{ é progenitor de } c \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$a\ R \circ S\ b \text{ se e só se } b \text{ é progenitor de } a.$$

(e) Como

$$\begin{aligned} a\ R \circ T\ b &\Leftrightarrow (\exists c \in A)\ a\ T\ c \text{ e } c\ R\ b \\ &\Leftrightarrow (\exists c \in A)\ c \text{ é cônjuge de } a \text{ e } b \text{ é progenitor de } c \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$a\ T \circ R\ b \text{ se e só se } b \text{ é sogro de } a.$$

113. Sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$ e

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(3,5),(4,2),(4,5),(5,1),(5,2),(5,4)\}.$$

Encontre: R^2 (ou seja $R \circ R$), R^3 (ou seja $R^2 \circ R$), R^4 e R^5.

114. Sejam A, B e C conjuntos, R e S relações binárias de A em B e T e U relações binárias de B em C. Mostre que:

(a) $R \circ \mathrm{id}_A = R$;
(b) $\mathrm{id}_B \circ R = R$;
(c) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;
(d) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
(e) $R \subseteq S \Rightarrow T \circ R \subseteq T \circ S$;
(f) $T \subseteq U \Rightarrow T \circ R \subseteq U \circ R$;
(g) $(T \cup U) \circ R = (T \circ R) \cup (U \circ R)$;
(h) $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$;
(i) $(T \cap U) \circ R \subseteq (T \circ R) \cap (U \circ R)$;
(j) $T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$.

Resolução (b) Como

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in \mathrm{id}_B \circ R &\Leftrightarrow (\exists z \in B)(x,z) \in R \text{ e } (z,y) \in \mathrm{id}_B \\
&\Leftrightarrow (\exists z \in B)(x,z) \in R \text{ e } z = y \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in R,
\end{aligned}
$$

temos que $\mathrm{id}_B \circ R = R$.

(d) Como

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (R \cap S)^{-1} &\Leftrightarrow (y,x) \in R \cap S \\
&\Leftrightarrow (y,x) \in R \text{ e } (y,x) \in S \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in R^{-1} \text{ e } (x,y) \in S^{-1} \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in R^{-1} \cap S^{-1},
\end{aligned}
$$

temos que $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

(f) Sabendo que $T \subseteq U$, queremos provar que $T \circ R \subseteq U \circ R$. Como

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in T \circ R &\Leftrightarrow (\exists z \in B)(x,z) \in R \text{ e } (z,y) \in T \\
&\Rightarrow (\exists z \in B)(x,z) \in R \text{ e } (z,y) \in U \quad \text{[por hipótese]} \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in U \circ R
\end{aligned}
$$

Logo, podemos concluir que $T \circ R \subseteq U \circ R$.

(i) Como

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (T \cap U) \circ R &\Leftrightarrow (\exists z \in B)(x,z) \in R \text{ e } (z,y) \in T \cap U \\
&\Leftrightarrow (\exists z \in B)(x,z) \in R \text{ e } (z,y) \in T \text{ e } (z,y) \in U \\
&\Rightarrow (\exists z \in B:\ (x,z) \in R \text{ e } (z,y) \in T) \text{ e } \\
&\qquad (\exists z \in B:\ (x,z) \in R \text{ e } (z,y) \in U \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in T \circ R \text{ e } (x,y) \in U \circ R \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (T \circ R) \cap (U \circ R),
\end{aligned}
$$

podemos concluir que

$$(T \cap R) \circ R \subseteq (T \circ R) \cap ((U \circ R).$$

115. Sejam A e B conjuntos e R uma relação binária de A em B.

(a) Determine condições que definam as seguintes relações:

i. $R^{-1} \circ R$; ii. $R \circ R^{-1}$; iii. $R \circ \omega_A$; iv. $\omega_B \circ R$;

(b) Para $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ e $R = \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c)\}$, determine as relações definidas em (a).

116. Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{3,4,5,6\}$. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

(a) uma relação binária R de A em B tal que $R = R^{-1}$;

(b) relações binárias R e S em A tais que $R \circ S = S \circ R$ e $R \neq S$;

(c) uma relação binária R em A tal que $\mathrm{id}_A \subseteq R$ e $\mathrm{id}_A \not\subseteq R^{-1}$;

(d) uma relação binária R de A em B tal que $D_R = \emptyset$;

(e) relações binárias R de A em B e S de B em A tais que $R \circ S = \mathrm{id}_B$ e $S \circ R = \mathrm{id}_A$.

117. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, w, z\}$. Considere as relações binárias R, de A em B, e S, de B em A:

$$\begin{aligned} R &= \{(1, x), (1, z), (2, y), (2, z)\} \\ S &= \{(x, 1), (x, 3), (y, 2), (w, 2), (z, 3)\}. \end{aligned}$$

Sejam $T = S \circ R$ e $U = R \circ S$.

(a) Determine R^{-1}, S^{-1}, T, $T \circ T$, U e $U \circ U$.

(b) Verifique que $T^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(c) Indique o domínio e a imagem de R.

(d) Indique quantas relações binárias de A em B existem.

(e) Indique todas as relações binárias de A em B cujo domínio é $\{2, 3\}$ e cuja imagem é $\{x, z\}$.

(f) Dê um exemplo de relações binárias não vazias R', de A em B, e S', de B em A, tais que $S' \circ R' \neq \emptyset$ e $R' \circ S' = \emptyset$.

118. Seja A um conjunto. Diga, justificando, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas:

(a) Para qualquer relação binária R definida em A, $R \circ R^{-1} = \text{id}_A$;

(b) Para qualquer relação binária R definida em A, $R \circ \text{id}_A = \text{id}_A \circ R = R$;

(c) Para qualquer relação binária R definida em A, $R \subseteq R \circ \omega_A$.

Resolução

(a) A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contra exemplo: Para o conjunto $A = \{1, 2\}$ e a relação binária $R = \{(1, 2)\}$ definida em A, temos que

$$R \circ R^{-1} = \{(2, 2)\} \neq \text{id}_A = \{(1, 1), (2, 2)\}.$$

A igualdade só se verifica se $D_R = A$.

(b) A afirmação é verdadeira (o resultado já foi provado no exercício 114, alíneas (a) e (b)).

(c) A afirmação é verdadeira. Como $\omega_A = A \times A$, temos que

$$\begin{aligned} (x, y) \in R &\Leftrightarrow (x, x) \in \omega_A \text{ e } (x, y) \in R \\ &\Rightarrow (x, y) \in R \circ \omega_A \end{aligned}$$