ÁLGEBRA LINEAR CC

Exercícios - Transformações Lineares

1. Diga quais das seguintes funções são aplicações lineares entre espaços vetoriais reais:

(a) $\begin{array}{rrcl} f_1: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x, y+z, 0, z) \end{array}$;

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se uma transformação linear se são satisfeitas as seguintes condições:

(i) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$;

(ii) Para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

A aplicação f_1 é uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$, uma vez que:

- para quaisquer $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f_1((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) &= f_1(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \\ &= (2(x_1+x_2), (y_1+y_2)+(z_1+z_2), 0, z_1+z_2) \\ &= (2x_1+2x_2, (y_1+z_1)+(y_2+z_2), 0, z_1+z_2) \\ &= (2x_1, y_1+z_1, 0, z_1) + (2x_2, y_2+z_2, 0, z_2) \\ &= f_1(x_1,y_1,z_1) + f_1(x_2,y_2,z_2); \end{aligned}$$

- para qualquer $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1(\lambda(x_1,y_1,z_1)) &= f_1(\lambda x_1, \lambda y_1, 0, \lambda z_1) \\ &= (2(\lambda x_1), \lambda y_1 + \lambda z_1, 0, \lambda z_1) \\ &= (\lambda(2x_1), \lambda(y_1+z_1), \lambda 0, \lambda z_1) \\ &= \lambda(2x_1, y_1+z_1, 0, z_1) \\ &= \lambda f_1(x_1,y_1,z_1). \end{aligned}$$

(b) $\begin{array}{rrcl} f_2: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x, y+z, 1, z) \end{array}$;

Se f_2 é uma aplicação linear, então $f_2(0,0,0) = (0,0,0,0)$. Uma vez que $f_2(0,0,0) = (0,0,1,0) \neq (0,0,0,0)$, então f_2 não é uma aplicação linear.

Resolução alternativa:

A aplicação f_2 não é uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$, uma vez que existem $x = (1,0,0), y = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ tais que $f_2(x+y) \neq f_2(x) + f_2(y)$. De facto,

$$\begin{aligned} &f_2((1,0,0)+(0,1,0)) = f_2(1,1,0) = (2,1,1,0), \\ &f_2(1,0,0) + f_2(0,1,0) = (2,0,1,0) + (0,1,1,0) = (2,1,2,0) \end{aligned}$$

e $(2,1,1,0) \neq (2,1,2,0)$.

(c) $\begin{array}{rccc} f_3: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-x, y+z, z+2) \end{array}$;

Se f_3 é uma aplicação linear, então $f_3(0,0,0) = (0,0,0)$. Uma vez que $f_3(0,0,0) = (0,0,2) \neq (0,0,0)$, então f_3 não é uma aplicação linear.

Resolução alternativa:

A aplicação f_3 não é uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, uma vez que existem $x = (1,0,0), y = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ tais que $f_3(x+y) \neq f_3(x) + f_3(y)$. De facto,

$$\begin{array}{l} f_3((1,0,0)+(0,1,0)) = f_3(1,1,0) = (-1,1,2), \\ f_3(1,0,0) + f_3(0,1,0) = (-1,0,2) + (0,1,2) = (-1,1,4) \end{array}$$

e $(-1,1,2) \neq (-1,1,4)$.

(d) $\begin{array}{rccc} f_4: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (\frac{1}{x^2+1}, 0, y) \end{array}$;

Se f_4 é uma aplicação linear, então $f_4(0,0) = (0,0,0)$. Uma vez que $f_4(0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$, então f_4 não é uma aplicação linear.

Resolução alternativa:

A aplicação f_4 não é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, uma vez que existem $x = (1,0), y = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ tais que $f_4(x+y) \neq f_4(x) + f_4(y)$. De facto,

$$\begin{array}{l} f_4((1,0)+(1,1)) = f_4(2,1) = (\frac{1}{5}, 0, 1), \\ f_4(1,0) + f_4(1,1) = (\frac{1}{2}, 0, 0) + (\frac{1}{2}, 0, 1) = (1,0,1) \end{array}$$

e $(\frac{1}{5}, 0, 1) \neq (1,0,1)$.

(e) $\begin{array}{rccc} f_5: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z,w) & \mapsto & (x', y') \end{array}$ em que $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

Dado $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, tem-se $f_5(x,y,z,w) = (2x+3y+z+1, -x+y+w)$.

Se f_5 é uma aplicação linear, então $f_5(0,0,0,0) = (0,0)$. Uma vez que $f_5(0,0,0) = (1,0) \neq (0,0)$, então f_5 não é uma aplicação linear.

Resolução alternativa:

A aplicação f_5 não é uma transformação linear de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^2$, pois existem $x = (0,0,0,1), y = (0,0,0,2) \in \mathbb{R}^4$ tais que $f_5(x+y) \neq f_5(x) + f_5(y)$. Tem-se $f_5(x) = (1,3)$, $f_5(x) + f_5(y) = (2,3)$ e $(1,3) \neq (2,3)$.

2. Considere no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ a aplicação $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2,\ x_2,\ x_3 + x_4)$$

   (a) Verifique que f é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$.

   A aplicação f é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$, pois

   - para quaisquer $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} & f((x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4)) \\ = \ & f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \\ = \ & ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), x_2 + y_2, (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4)) \\ = \ & ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), x_2 + y_2, (x_3 + x_4) + (y_3 + y_4)) \\ = \ & (x_1 + x_2, x_2, x_3 + x_4) + (y_1 + y_2, y_2, y_3 + y_4) \\ = \ & f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{aligned}$$

   - para qualquer $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4)) &= f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_2, \lambda x_3 + \lambda x_4) \\ &= \lambda(x_1 + x_2, x_2, x_3 + x_4) \\ &= \lambda f(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned}$$

   (b) Calcule a matriz de f relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e de $\mathbb{R}^3$.

   Tem-se

$$\begin{aligned} & f(1,0,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) \\ & f(0,1,0,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1) \\ & f(0,0,1,0) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1) \\ & f(0,0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1) \end{aligned}$$

   pelo que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (c) Seja $\mathcal{W} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - b = d - 2b = 0\}$. Calcule $f(\mathcal{W})$.

   Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - b = d - 2b = 0\} \\ &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = b, d = 2b\} \\ &= \{(b, b, c, 2b) \in \mathbb{R}^4 \mid b, c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Logo

$$\begin{aligned} f(\mathcal{W}) &= \{f(b, b, c, 2b) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2b, b, c + 2b) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   (d) Seja $\mathcal{S} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b = 0\}$, Calcule $f^{-1}(\mathcal{S})$.

   $\mathcal{S} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b = 0\} = \{(a, a, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{S}) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S\} \\ &= \{(0, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

3. Considere as bases

$$\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,0),(-1,1,1)) \text{ de } \mathbb{R}^3,$$
$$\mathcal{B}' = ((1,0,1,0),(0,1,0,1),(-1,0,1,0),(0,1,0,2)) \text{ de } \mathbb{R}^4.$$

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por

$$f(x,y,z) = (2x, x+z, y+z, -z).$$

(a) Calcule a matriz da transformação linear f relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^4$.

$$f(1,0,0) = (2,1,0,0) = 2(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) + 0(0,0,1,0) + 0(0,0,0,1),$$
$$f(0,1,0) = (0,0,1,0) = 0(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) + 0(0,0,0,1),$$
$$f(0,0,1) = (0,1,1,-1) = 0(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) - 1(0,0,0,1).$$

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Calcule a matriz da transformação linear f relativamente às bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ e canónica de $\mathbb{R}^4$.

$f(1,0,1) = (2,2,1,-1)$,
$f(0,1,0) = (0,0,1,0)$,
$f(-1,1,1) = (-2,0,2,-1)$.

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) Calcule a matriz da transformação linear f relativamente às bases canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.

$f(1,0,0) = (2,1,0,0) = (1,0,1,0) + 2(0,1,0,1) - (-1,0,1,0) - (0,1,0,2)$,
$f(0,1,0) = (0,0,1,0) = \frac{1}{2}(1,0,1,0) + 0(0,1,0,1) + \frac{1}{2}(-1,0,1,0) + 0(0,1,0,2)$,
$f(0,0,1) = (0,1,1,-1) = \frac{1}{2}(1,0,1,0) + 3(0,1,0,1) + \frac{1}{2}(-1,0,1,0) - 2(0,1,0,2)$.

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(d) Calcule a matriz da transformação linear f relativamente às bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.

$f(1,0,1) = (2,2,1,-1) = \frac{3}{2}(1,0,1,0) + 5(0,1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,0,1,0) - 3(0,1,0,2)$,
$f(0,1,0) = (0,0,1,0) = \frac{1}{2}(1,0,1,0) + 0(0,1,0,1) + \frac{1}{2}(-1,0,1,0) + 0(0,1,0,2)$,
$f(-1,1,1) = (-2,0,2,-1) = 0(1,0,1,0) + (0,1,0,1) + 2(-1,0,1,0) - (0,1,0,2)$.

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(e) Calcule a imagem do vetor $(2,3,-2)$ por f usando a matriz que calculou na alínea:

(i) (a); (ii) (b); (iii) (c); (iv) (d).

a) Tem-se

$$(2,3,-2) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) - 2(0,0,1)$$

e

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$f(2,3,-2) = 4(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) + 2(0,0,0,1) = (4,0,1,2).$$

b) Tem-se

$$(2,3,-2) = 0(1,0,1) + 5(0,1,0) - 2(-1,1,1)$$

e

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$f(2,3,-2) = 4(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) + 2(0,0,0,1) = (4,0,1,2).$$

c) Uma vez que

$$(2,3,-2) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) - 2(0,0,1)$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

então

$$f(2,3,-2) = \frac{5}{2}(1,0,1,0) - 2(0,1,0,1) - \frac{3}{2}(-1,0,1,0) + 2(0,1,0,2) = (4,0,1,2).$$

d) Considerando que

$$(2,3,-2) = 0(1,0,1) + 5(0,1,0) - 2(-1,1,1)$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

segue que

$$f(2,3,-2)=\frac{5}{2}(1,0,1,0)-2(0,1,0,1)-\frac{3}{2}(-1,0,1,0)+2(0,1,0,2)=(4,0,1,2).$$

4. Seja $\varphi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ uma aplicação tal que

$$\varphi(1,0,0)=(1,2),\ \varphi(0,-1,1)=(0,2),\ \varphi(2,-2,2)=(2,8).$$

   (a) Verifique se existem aplicações lineares nas condições acima. Em caso afirmativo identifique uma.

   Tem-se
   $$(2,-2,2)=2(1,0,0)+2(0,-1,1).$$
   Então, se φ for uma aplicação linear,
   $$\begin{aligned}\varphi(2,-2,2)&=\varphi(2(1,0,0)+2(0,-1,1))\\&=\varphi(2(1,0,0))+\varphi(2(0,-1,1)))\\&=2(1,2)+2(0,2)\\&=(2,8).\end{aligned}$$
   Uma vez que os vetores $(1,0,0)$ e $(0,-1,1)$ são linearmente independentes e a imagem de $(2,-2,2)$ pode ser escrita como combinação linear das imagens dos vetores $(1,0,0)$ e $(0,-1,1)$, é possível definir aplicações lineares nas condições indicadas.

   Consideremos a seguinte base de $\mathbb{R}^3$
   $$B=((1,0,0),(0,-1,1),(0,0,1)).$$
   A aplicação $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(1,0,0)=(1,2)$, $\varphi(0,-1,1)=(0,2)$ e $\varphi(0,0,1)=(0,0,0)$ é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ e satisfaz as condições indicadas.

   (b) Calcule a imagem de $(2,-3,3)$ pela aplicação determinada na alínea anterior.

   Tem-se
   $$(2,-3,3)=2(1,0,0)+3(0,-1,1),$$
   pelo que
   $$\varphi(2,-3,3)=\varphi(2(1,0,0))+\varphi(3(0,-1,1)))=2(1,2)+3(0,2)=(2,10).$$

5. Seja $\varphi:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$\varphi(1,0,1,0)=(1,1,1),\ \varphi(0,-1,0,1)=(1,0,2),\ \varphi(1,-3,1,0)=(2,1,3).$$

(a) Com base na informação fornecida é possível determinar a imagem de $(2,1,-3,3)$?

O vetor $(2,1,-3,3)$ não é combinação linear dos vetores $(1,0,1,0)$, $(0,-1,0,1)$, $(1,-3,1,0)$, pois não existem $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que

$$(2,1,-3,3) = a(1,0,1,0) + b(0,-1,0,1) + c(1,-3,1,0).$$

De facto, o sistema

$$\begin{cases} a+c=2 \\ -b-3c=1 \\ a+c=-3 \\ b=3 \end{cases}$$

é impossível.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ Gaussian elimination: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Logo, com a informação fornecida não é possível calcular a imagem de $(2,1,-3,3)$.

(b) Dê um exemplo de uma aplicação linear nas condições acima.

Uma vez que $(1,0,1,0)$, $(0,-1,0,1)$, $(1,-3,1,0)$, $(2,1,-3,3)$ são vetores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes e $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, então

$$B = ((1,0,1,0),(0,-1,0,1),(1,-3,1,0),(2,1,-3,3))$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$.

A aplicação $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(1,0,1,0) = (1,1,1)$, $\varphi(0,-1,0,1) = (1,0,2)$, $\varphi(1,-3,1,0) = (2,1,3)$, $\varphi(2,1,-3,3) = (0,0,0)$, é exemplo de uma aplicação linear de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz as condições indicadas.

6. Sendo $\mathcal{B}_3$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$, considere $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $f(-1,0,1)$.

Tem-se

$$(-1,0,1) = -1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Logo $f(-1,0,1) = (-2,-2)$.

(b) Calcule a expressão geral de um vetor da imagem de f.

Uma vez que
$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$
e
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z \\ 2x-y \end{bmatrix}$$
então $f(x, y, z) = (x - z)(1, 0) + (2x - y)(0, 1) = (x - z, 2x - y)$.

(c) Calcule $Im\ f$.

$$\begin{aligned} Im\ f &= \{f(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x-z, 2x-y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,2) + y(0,-1) + z(-1,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= <(1,2),(0,-1),(-1,0)> \\ &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

(d) Calcule $Nuc\ f$.

$$\begin{aligned} Nuc\ f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0, 2x - y = 0\ \} \\ &= <(1,2,1)>. \end{aligned}$$

7. Sendo $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$, considere $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por
$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = [a_{i\,j}]_{3\times 3} \ \text{ onde } a_{i\,j} = \begin{cases} 3(i-1)j & \text{se } i > j \\ 1 & \text{se } i \leq j \end{cases}$$

(a) Calcule $Nuc\ f$.

Tem-se
$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$
e, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$
Logo
$$\begin{aligned} Nuc\ f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\} \\ &= \{(0,0,0)\}. \end{aligned}$$

(b) Calcule a dimensão de $Im\ f$.

Para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, tem-se

$$(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$$

e

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c)\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+y+z\\ 3x+y+z\\ 6x+12y+z\end{bmatrix},$$

pelo que

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+y+z)(1,0,0)+(3x+y+z)(0,1,0)+(6x+12y+z)(0,0,1)\\ &= (x+y+z,3x+y+z,6x+12y+z). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Im\ f &= \{f(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}\\ &= \{(x+y+z,3x+y+z,6x+12y+z):x,y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(x(1,3,6)+y(1,1,12)+z(1,1,1):x,y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= <(1,3,6),(1,1,12),(1,1,1)>. \end{aligned}$$

Os vetores $(1,3,6),(1,1,12),(1,1,1)$ são linearmente independentes, uma vez que

$$r\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6\\ 1 & 1 & 12\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=3.$$

Logo, $\dim Imf=3$.

(c) Calcule $f(1,0,3)$.

Tem-se

$$(1,0,3)=1(1,0,0)+0(0,1,0)+3(0,0,1)$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 6 & 12 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\\ 6\\ 9\end{bmatrix}.$$

Logo

$$f(1,0,3)=4(1,0,0)+6(0,1,0)+9(0,0,1)=(4,6,9).$$

8. Defina uma transformação linear $h:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que

$$Im\ h=\langle(2,1,0),\ (1,0,1)\rangle$$

e calcule $h(a,b,c,d)$ a expressão geral de um vetor da imagem de h.

$h(x,y,z,w)=(2x+y,x,y)$.

$$\begin{aligned} Imh &= \langle(2,1,0),\ (1,0,1)\rangle\\ &= \{\alpha(2,1,0)+\beta(1,0,1):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \}\\ &= \{\ (2\alpha+\beta,\alpha,\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \}. \end{aligned}$$

9. Em $\mathbb{R}^3$, considere a reflexão em relação ao plano $x = 0$.

   (a) Escreva a matriz da reflexão relativamente à base canónica.
   $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) Calcule a expressão da imagem de um vetor (x, y, z).

   Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se
   $$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$
   e
   $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$
   Logo $f(x, y, z) = -x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (-x, y, z)$.

   (c) Indique o núcleo e a imagem desta reflexão.

   $Nuc(f) = \{(0, 0, 0)\}$.
   $Imf = \mathbb{R}^3$.

10. Em $\mathbb{R}^3$, considere a rotação de $\pi/2$ no sentido direto em torno do eixo x.

   (a) Escreva a matriz da rotação relativamente à base canónica.
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (b) Indique o núcleo e a imagem desta rotação.

   Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se
   $$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$
   e
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -z \\ y \end{bmatrix}$$
   Logo,$f(x, y, z) = x(1, 0, 0) - z(0, 1, 0) + y(0, 0, 1) = (x, -z, y)$.

   $Nuc(f) = \{(0, 0, 0)\}$.

   $Imf = \mathbb{R}^3$.

(c) Calcule a imagem de $(3,-5,0)$ e de $(-2,0,5)$.

Uma vez que

$$(3,-5,0) = 3(1,0,0) - 5(0,1,0) + 0(0,0,1),$$
$$(-2,0,5) = -2(1,0,0) + 0(0,1,0) + 5(0,0,1)$$

e

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-5\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\\-5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\0\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-5\\0\end{bmatrix},$$

então

$$f(3,-5,0) = 3(1,0,0) + 0(0,1,0) - 5(0,0,1) = (3,0,-5),$$
$$f(-2,0,5) = -2(1,0,0) - 5(0,1,0) + 0(0,0,1) = (-2,-5,0).$$

11. Seja $\mathcal{B} = ((0,1,1),(0,-1,1),(-1,0,1))$. Sejam $\mathcal{B}_2$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_3$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$, e $f,g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas, respetivamente, por:

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+y, x) \quad \text{para todo } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
$$g(x,y,z) = (x, x-y-z, x) \quad \text{para todo } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad e$$
$$\mathcal{M}(h;\mathcal{B},\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Os vetores de $\mathcal{B}$ são elementos de $\mathbb{R}^3$ e são linearmente independentes

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \text{ Gaussian elimination: } \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Então, como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine $\mathcal{M}(f+g;\mathcal{B},\mathcal{B}_3)$.

$f(0,1,1) = (2,1,0) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$,
$f(0,-1,1) = (0,-1,0) = 0(1,0,0) - 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$,
$f(-1,0,1) = (0,-1,-1) = 0(1,0,0) - 1(0,1,0) - 1(0,0,1)$.

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\1 & -1 & -1\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

$g(0,1,1) = (0,-2,0) = 0(1,0,0) - 2(0,1,0) + 0(0,0,1)$,
$g(0,-1,1) = (0,0,0) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$,
$g(-1,0,1) = (-1,-2,-1) = -1(1,0,0) - 2(0,1,0) - 1(0,0,1)$.

$$\mathcal{M}(g;\mathcal{B},\mathcal{B}_3)=\begin{bmatrix}0&0&-1\\-2&0&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{M}(f+g;\mathcal{B},\mathcal{B}_3)=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-1&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&-1\\-2&0&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\-1&-1&-3\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

(c) Determine $\mathcal{M}(h\circ f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2)$.

$$\begin{aligned}&f(1,0,0)=(1,1,1)=\tfrac{3}{2}(0,1,1)+\tfrac{1}{2}(0,-1,1)-1(-1,0,1),\\&f(0,1,0)=(1,1,0)=1(0,1,1)+0(0,-1,1)-1(-1,0,1),\\&f(0,0,1)=(1,0,0)=\tfrac{1}{2}(0,1,1)+\tfrac{1}{2}(0,-1,1)-1(-1,0,1).\end{aligned}$$

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B})=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(h\circ f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2)&=\mathcal{M}(h;\mathcal{B},\mathcal{B}_2)\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B})\\&=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{7}{2}&2&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Resolução alternativa:

Uma vez que

$$\begin{aligned}&f(1,0,0)=(1,1,1)=1(1,0,0)+1(0,1,0)+1(0,0,1),\\&f(0,1,0)=(1,1,0)=1(1,0,0)+1(0,1,0)+0(0,0,1),\\&f(0,0,1)=(1,0,0)=1(1,0,0)+0(0,1,0)+0(0,0,1),\end{aligned}$$

então

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

Seja $I:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a função definida por $I(x,y,z)=(x,y,z)$ (designada por função identidade em $\mathbb{R}^3$).

$$B=\mathcal{M}(I;B;B_3)=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&-1&0\\1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M}(I;\mathcal{B}_3,\mathcal{B})=B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(h;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2) &= \mathcal{M}(h;\mathcal{B},\mathcal{B}_2)\mathcal{M}(I;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(h\circ f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2) &= \mathcal{M}(h;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2)\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3) \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(d) Determine $\mathcal{M}(h\circ(f+g);\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2)$.

$g(1,0,0) = (1,1,1) = \frac{3}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(0,-1,1) - 1(-1,0,1)$,
$g(0,1,0) = (0,-1,0) = -\frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(0,-1,1) + 0(-1,0,1)$,
$g(0,0,1) = (0,-1,0) = \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(0,-1,1) + 0(-1,0,1)$.

$$\mathcal{M}(g;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(f+g;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}) &= \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}) + \mathcal{M}(g;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(h\circ(f+g);\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2) &= \mathcal{M}(h;\mathcal{B},\mathcal{B}_2)\mathcal{M}(f+g;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 7 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Resolução alternativa:

$g(x,y,z) = (x, x-y-z, x)$, então, $\mathcal{M}(g;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3) + \mathcal{M}(g;\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{M}(h\circ(f+g);\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -1\\ 7 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}.$$