Funções Reais de n Variáveis Reais

Maria Joana Torres

2021/22

Definição:

Uma **função real** de n variáveis reais é uma função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

onde $X \subset \mathbb{R}^n$ é não vazio.

Recordemos que dados os conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ e a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, designa-se:

- o conjunto X por **domínio** da função e denota-se por $\mathrm{Dom}(f)$;
- o conjunto $\mathbb{R}$ por **conjunto de chegada** da função;
- o conjunto

  $$f(X) = \mathrm{Im}\,(f) = CD(f) = \{f(x) \colon x \in X\}$$

  por **contradomínio** ou **imagem** da função;
- os elementos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de X por **objetos**;
- os elementos $f(x)$ tais que $x \in X$ por **imagens**.

Definição:

Dada uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, designa-se por **gráfico** de f o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathrm{Gr}\,(f) = \left\{(x_1, \dots, x_n, w) \in \mathbb{R}^{n+1} : \, (x_1, \dots, x_n) \in X \wedge w = f(x_1, \dots, x_n)\right\} .$$

- $n = 1 \rightsquigarrow \mathrm{Gr}\,(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \in X \, \wedge \, y = f(x)\right\}$.

  Geometricamente, $\mathrm{Gr}\,(f)$ representa a curva no espaço $\mathbb{R}^2$ de equação $y = f(x)$, $x \in X$.

- $n = 2 \rightsquigarrow \mathrm{Gr}\,(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, (x, y) \in X \, \wedge \, z = f(x, y)\right\}$.

  Geometricamente, $\mathrm{Gr}\,(f)$ representa a superfície no espaço $\mathbb{R}^3$ de equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in X$.

Definição:

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $k \in \mathbb{R}$.

Chama-se **conjunto de nível k** da função f ao subconjunto $\mathcal{N}_k$ de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\mathcal{N}_k = \{x \in X : \; f(x) = k\}.$$

- $n = 2 \rightsquigarrow$ os conjuntos de nível designam-se por **curvas de nível**.
- $n = 3 \rightsquigarrow$ os conjuntos de nível designam-se por **superfícies de nível**.

Definição:

Uma função $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- **injetiva** quando a objetos distintos em X correspondem imagens distintas em $\mathbb{R}$, ou seja, quando

  $$\forall x, y \in X, \quad x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y),$$

  ou ainda, quando

  $$\forall x, y \in X, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y\,;$$

- **sobrejetiva** quando o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada, isto é, quando $f(X) = \mathbb{R}$, ou seja, quando

  $$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in X : \quad f(x) = y\,;$$

- **bijetiva** quando é, simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Definição:

Dada uma função $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset X$, $B \subset \mathbb{R}$, denomina-se por:

- **imagem de A por f** o conjunto

$$f(A) = \{f(x) : \, x \in A\};$$

- **imagem recíproca de B por f** o conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \, f(x) \in B\}.$$

Definição:

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- **majorada** quando

$$\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ f(x) \leq M;$$

- **minorada** quando

$$\exists m \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ f(x) \geq m;$$

- **limitada** quando

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ m \leq f(x) \leq M,$$

ou equivalentemente, quando

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ : \ \forall x \in X, \ |f(x)| \leq L.$$

Definição:

Sejam $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e A, B dois conjuntos tais que $A \subset X \subset B$.

Chama-se **restrição** de f ao conjunto A à função (única)

$$f_{|A} : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad (f_{|A})(x) = f(x), \quad \forall x \in A,$$

e **prolongamento** de f a B a qualquer função de domínio B que coincida com f em X, ou seja, a qualquer função

$$f^* : B \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f^*(x) = f(x), \ \forall x \in X.$$

Definição:

Seja $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$ um ponto de acumulação de X.

Diz-se que o número real ℓ é o **limite de $f(x)$ quando x tende para a**, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell,$$

quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - \ell| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < \|x - a\| < \delta$. Simbolicamente:

$$\forall \, \epsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; \forall \, x \in X \qquad 0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Significa que é possível tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de ℓ, desde que, no domínio de f e sem nunca atingir o ponto a, se tome x suficientemente próximo de a.

Observações:

1. Na definição de limite segundo Cauchy, a forma como x se aproxima de a depende unicamente da distância de x a a.

2. A definição de limite segundo Cauchy envolve uma norma de $\mathbb{R}^n$.
   Mas, como quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, é claro que a existência de limite não depende da norma que consideramos.

Teorema [**Unicidade do limite**]:

Sejam $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_2$ então $\ell_1 = \ell_2$.

Teorema [Produto de uma função limitada por um infinitésimo]:

Sejam $f, g\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$.
Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e g é limitada em $X \backslash \{a\}$ então

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0.$$

Teorema **[Aritmética de limites]**:

Sejam $f, g\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Suponhamos que existem $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $m = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Então

(a) $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \ell + m$;

(b) $\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x) = \ell - m$;

(c) $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = \ell\, m$;

(d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{m}$, sempre que $m \neq 0$.

Motivação [**Limite trajetorial**]:

na definição de limite segundo Cauchy, a aproximação do ponto genérico x ao ponto particular a depende apenas da distância $\|x-a\|$ do ponto x ao ponto a.

Quando consideramos uma curva particular $\mathcal{C}$ sobre a qual é possível considerar x a tender para a e calculamos o correspondente limite, estamos a considerar uma forma particular de aproximação a que se chama **limite trajetorial** e que se representa por

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{C}}} f(x) = \ell\,.$$

Consequência 1:

Se existir o limite $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$ então também existe e é igual a ℓ qualquer limite trajetorial $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{C}}} f(x)$ ao longo da curva $\mathcal{C}$.

Consequência 2:

Se existirem duas trajetórias $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ tais que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{C}_1}} f(x) = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{C}_2}} f(x) = \ell_2$$

com $\ell_1 \neq \ell_2$, então não existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$.

Consequência 3:

Se não existir $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{C}}} f(x)$ para alguma trajetória $\mathcal{C}$, então também não existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$.

Definição:

Uma função $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **contínua no ponto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$** quando

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \qquad \|x - a\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Chama-se **descontínua no ponto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$** uma função $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que não é contínua nesse ponto.

Diz-se que $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **função contínua** quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.

Proposição:

Sejam $f \colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X$. A função f é contínua em a se e só se ocorre uma das situações seguintes:

1. a é ponto isolado de X
2. a é ponto de acumulação de X e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Teorema **[Aritmética de funções contínuas]**:

Dadas f, $g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $a \in X$,

1. $f + g$ e fg são funções contínuas em a;
2. se $g(a) \neq 0$ então $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a.

Definição:

Dadas duas funções $f: X \longrightarrow Y$ e $g: Z \longrightarrow W$ tais que $f(X) \subset Z$, define-se a **função g composta com f** (escreve-se $g \circ f$) do seguinte modo:

$$\begin{array}{rccl} g \circ f: & X & \longrightarrow & W \\ & x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Teorema **[Continuidade da função composta]**:

Sejam $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g\colon Z \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(X) \subset Z$.
Se $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.

(A composta de funções contínuas é contínua).

Teorema [**Continuidade da restrição**]:

Sejam $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e A um subconjunto não vazio de X. Então $f_{|_A}$ é contínua.

Teorema:

Se $f: X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e X é compacto então $f(X)$ também é compacto.

Teorema **[de Weierstrass]**:

Se $f: X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e X é compacto então f atinge um valor máximo e um valor mínimo em X, isto é,

$$\exists\, a, b \in X : \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad \forall x \in X\,.$$

Teorema:

Se $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e X é conexo então $f(X)$ também é conexo.

Teorema **[de Bolzano-Cauchy ou do valor intermédio]**:

Seja $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num conjunto conexo X. Se k é um número real estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in X$ tal que $f(c) = k$.

Corolário:

Seja $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num conjunto conexo X e suponhamos que $f(a)f(b) < 0$. Então existe $c \in X$ tal que $f(c) = 0$.