

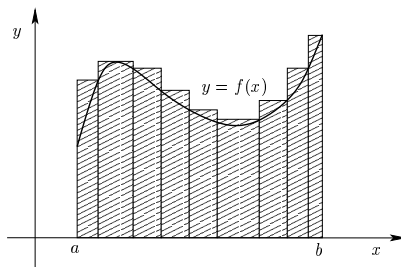
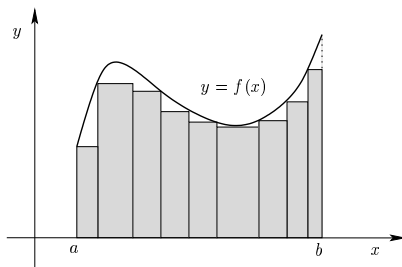
Integral de Riemann

Maria Joana Torres

2021/22

Vamos considerar funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas, isto é,

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \exists \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, b] \quad \alpha \leq f(x) \leq \beta.$$



$s(f, P)$ – área a cheio

$S(f, P)$ – área a tracejado

Definição:

Dado um intervalo $[a, b]$, seja $\Upsilon = \{\text{partições de } [a, b]\}$.

Define-se **integral superior de f** do seguinte modo:

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \inf_{P \in \Upsilon} \{S(f, P)\}.$$

Define-se **integral inferior de f** do seguinte modo:

$$\underline{\int_a^b f(x) dx} = \sup_{P \in \Upsilon} \{s(f, P)\}.$$

Definição:

Dados um intervalo $[a, b]$ e uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f diz-se **integrável em $[a, b]$** se

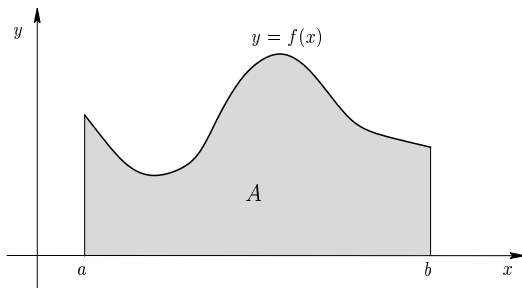
$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

A este valor comum chama-se **integral de f** (ou **integral definido de f**) e denota-se por

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{ou simplesmente} \quad \int_a^b f.$$

Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não negativa, integrável, seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



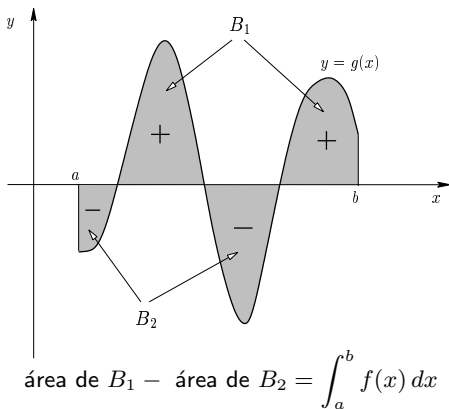
Chamamos área de A ao valor do integral de f em $[a, b]$, isto é,

$$\text{área de } A = \int_a^b f(x) dx.$$

Seja agora $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Sejam

$$B_1 = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : g(x) > 0, 0 < y \leq g(x)\},$$

$$B_2 = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : g(x) < 0, g(x) \leq y < 0\}.$$



Proposição:

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. Então:

1. Se $c \in]a, b[$, então $f|_{[a, c]}$ e $f|_{[c, b]}$ são integráveis e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

2. Para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$ é integrável e

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx;$$

3. $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

4. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \in [a, b]$ então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

5. Em particular, se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0;$$

6. $|f|$ é integrável e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx;$$

7. $f \cdot g$ é integrável.

Teorema:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é integrável.

Teorema:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função descontínua apenas num número finito de pontos. Então f é integrável.

Teorema:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e monótona. Então f é integrável.

Nota:

Convenção: Por uma questão de comodidade, não queremos estar preocupados com o facto do extremo superior de integração ser ou não maior ou igual ao extremo inferior. Assim, convencionou-se que, se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável,

$$\forall c, d \in [a, b] : c \leq d \quad \int_d^c f(x) dx = - \int_c^d f(x) dx.$$

As propriedades do integral definido apresentadas anteriormente mantêm-se válidas após esta generalização.

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então

$$\forall x \in [a, b] \quad f|_{[a, x]} \text{ é integrável.}$$

Seja

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) dt. \end{aligned}$$

Teorema [Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo]:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Suponhamos que f é contínua em $c \in [a, b]$. Então a função F é derivável em c e $F'(c) = f(c)$.

Corolário:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f admite primitiva.

Teorema [Segundo Teorema Fundamental do Cálculo]:

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e F uma primitiva de f . Então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Notação:

Nas condições do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, denota-se

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(x) \Big|_a^b \stackrel{\text{Notação}}{=} F(b) - F(a).$$

Teorema [Integração por partes]: :

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que f' e g' são integráveis. Então é válida a

fórmula de integração por partes no integral definido

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Teorema [Integração por mudança de variável]:

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ uma função com derivada contínua e tal que $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Então é válida a seguinte

fórmula de integração por substituição no integral definido

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Teorema [do valor médio para integrais]:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\exists c \in]a, b[\quad \int_a^b f(t) dt = f(c)(b - a).$$