# Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

Maria Joana Torres

2021/22

Para cada $n \in \mathbb{N}$, define-se $\mathbb{R}^n$ como o produto cartesiano de $n$ conjuntos iguais a $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$$

Os seus elementos são, portanto, as sequências finitas de $n$ termos reais:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon \; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, tem-se

$$x = y \quad \text{se e só se} \quad x_1 = y_1,\, x_2 = y_2,\, \ldots,\, x_n = y_n$$

$x$

Munido das operações usuais de **adição** e **multiplicação escalar**, definidas por

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \end{array}$$

$\mathbb{R}^n$ constitui um **espaço vetorial real de dimensão** $n$.

- os elementos $x$ de $\mathbb{R}^n$ designam-se por **vetores**
- os termos reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ designam-se por **coordenadas** de $x$
- a **base canónica** de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ onde

$$e_1 = (1,0,0,\ldots,0),\quad e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots,\ e_n = (0,0,0,\ldots,1)$$

- o vetor $0 = (0,0,\ldots,0)$ é o elemento neutro da adição e é designado por **zero**
- dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, o seu **simétrico** é o vetor $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

- **posição** relativa de vetores
- **comprimento** de um vetor
- **proximidade** entre elementos de $\mathbb{R}^n$

Definição:

Um **produto interno** em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que a cada par de vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder um número real $\langle x, y \rangle$, que verifica as seguintes propriedades (axiomas de produto interno):

**PI 1)** $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\langle x, x \rangle = 0$ sse $x = 0$

**PI 2)** $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

**PI 3)** $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

**PI 4)** $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ diz-se um **espaço euclidiano** e representa-se por $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Exemplo:

**Produto interno usual** ou **canónico**, definido por

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

.

**Definição**:

Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ dizem-se **ortogonais** relativamente a um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quando $\langle x, y \rangle = 0$.

**Teorema** [**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**]:

Consideremos o espaço $\mathbb{R}^n$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}\,,$$

valendo a igualdade se e só se um dos vetores $x, y$ é um múltiplo escalar do outro.

Definição:

Uma **norma** em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder um número real $\|x\|$, que verifica as seguintes propriedades (axiomas da norma):

**N 1)** $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\|x\| = 0$ sse $x = 0$

**N 2)** $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

**N 3)** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade triangular)

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido de uma norma $\|\cdot\|$ diz-se um **espaço normado** e representa-se por $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

**Exemplo**:

**Norma euclidiana** ou **norma dois**, definida por

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

**Exemplo**:

**Norma do máximo** ou **norma infinito**, definida por

$$\|x\|_\infty = \max\{\, |x_1|\,, |x_2|\,, \ldots, |x_n|\,\}$$

**Exemplo**:

**Norma da soma** ou **norma um**, definida por

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

**Observações**:

1. Todo o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathbb{R}^n$ induz uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$, chamada **norma induzida**, definida para cada $x \in \mathbb{R}^n$ por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\,.$$

Neste caso, a desigualdade de Cauchy-Shwartz pode ser escrita como

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

(valendo a igualdade se e só se um dos vetores $x$, $y$ é um múltiplo escalar do outro) e dados $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1 \quad \text{pelo que} \quad -1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1\,.$$

Existe então um único número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \quad \text{ou seja, tal que} \quad \langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta$$

O número real $\theta$ designa-se por **ângulo** entre os vetores não nulos $x$ e $y$.

Observações:

2. Dadas duas normas $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_\#$ quaisquer em $\mathbb{R}^n$, existem dois números reais positivos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, tais que

$$\alpha \|x\|_* \leq \|x\|_\# \leq \beta \|x\|_*, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Isto significa que em $\mathbb{R}^n$ quaisquer duas normas são **equivalentes**.

**Definição**:

Uma **distância** em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que a cada par de vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder um número real $d(x,y)$, que verifica as seguintes propriedades (axiomas da distância):

**D 1)** $d(x,y) \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e $d(x,y) = 0$ sse $x = y$

**D 2)** $d(x,y) = d(y,x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

**D 3)** $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade triangular)

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido de uma distância $d$ diz-se um **espaço métrico** e representa-se por $(\mathbb{R}^n, d)$.

Exemplo:

**Distância euclidiana** definida por

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Exemplo:

**Distância discreta** definida por

$$d_{0,1}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = y \\ 1 & \text{se} \quad x \neq y \end{cases}$$

Observação:

Toda a norma $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$ induz uma distância $d$ em $\mathbb{R}^n$, definida por

$$d(x,y) = \|x-y\|, \ \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n \,.$$

Consequentemente, todo o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ dá origem a uma distância $d$ em $\mathbb{R}^n$, definida por

$$d(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}, \ \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n \,.$$

Exemplos:

**Distância Euclideana**

$$d_2(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

Exemplo:

**Distância do máximo**

$$d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty = \max\{\,|x_1-y_1|\,,|x_2-y_2|\,,\ldots,|x_n-y_n|\,\}$$

Exemplo:

**Distância da soma**

$$d_1(x,y) = \|x-y\|_1 = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \cdots + |x_n-y_n|$$

$\mathbb{R}^n$ munido de uma norma $\|\cdot\|$; $d$ a correspondente distância induzida.

Definição:

Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Chama-se **bola aberta** de centro $a$ e raio $r$ ao conjunto

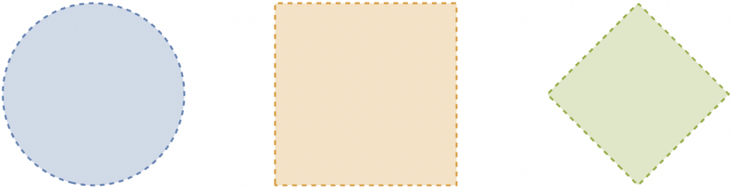
$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \|x-a\| < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ d(x,a) < r\}$$

e **bola fechada** de centro $a$ e raio $r$ ao conjunto

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \|x-a\| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ d(x,a) \leq r\}$$

Observação:

- $B(a,r)$ generaliza $]a-r, a+r[$
- $\overline{B}(a,r)$ generaliza $[a-r, a+r]$



Bola aberta em $\mathbb{R}^2$ segundo as normas $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$, respectivamente.

Definição:

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** quando $X$ está contido em alguma bola fechada, isto é, quando

$$\exists\, a \in \mathbb{R}^n,\ \exists\, r \in \mathbb{R}^+ :\ X \subset \overline{B}(a, r)\,.$$

Uma vez que é sempre possível escolher $a = 0$, $X$ será limitado quando

$$\exists\, r \in \mathbb{R}^+ :\ X \subset \overline{B}(0, r)$$

ou ainda, quando

$$\exists\, r \in \mathbb{R}^+ :\ \forall x \in X,\ \|x\| \leq r\,.$$

Observação:

É imediato que $X$ é limitado se e só se $X$ está contido em alguma bola aberta $B(a, r)$.

**Definição**:

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, um ponto $x \in X$ diz-se **ponto interior** de $X$ se

$$\exists\, r > 0 \colon\ B(x, r) \subset X\,.$$

O conjunto dos pontos interiores a $X$ designa-se por **interior de** $X$ e representa-se por $\operatorname{int} X$ ou $\mathring{X}$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se **aberto** quando $\operatorname{int} X = X$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se uma **vizinhança** de $x$ quando $x \in \operatorname{int} X$.

**Observação**:

$X$ é uma vizinhança de $x$ se e só se $X$ contém um aberto que contém $x$.

Definição:

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ diz-se **ponto aderente a** $X$ se

$$\forall\, r > 0, \quad B(x, r) \cap X \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes a $X$ designa-se por **aderência de** $X$ ou por **fecho de** $X$ e representa-se por $\operatorname{ad} X$ ou $\overline{X}$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se **fechado** quando $\overline{X} = X$.

**Teorema**:

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se e só se o seu complementar $\mathbb{R}^n \backslash X$ é aberto.

**Observações**:

1. Há conjuntos que não são abertos nem fechados. Por exemplo, $]0,1] \times [0,2]$
2. Há conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados. Os únicos exemplos são $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$.

Definição:

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ diz-se **ponto de acumulação de** $X$ se

$$\forall\, r > 0, \quad (B(x,r) \backslash \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de $X$ designa-se por **derivado** de $X$ e representa-se por $X'$.

Um ponto $x \in X$ é **ponto isolado de** $X$ se pertencer a $X$ mas não for ponto de acumulação de $X$, isto é,

$$\exists\, r > 0 : \ B(x,r) \cap X = \{x\}.$$

**Definição**:

Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ diz-se **ponto exterior a** $X$ quando $x \in \text{int}(\mathbb{R}^n \backslash X)$, ou seja, quando

$$\exists\, r > 0, \quad B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \backslash X\,.$$

O conjunto dos pontos exteriores a $X$ designa-se por **exterior** de $X$ e representa-se por $\text{ext}\, X$.

**Definição**:

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ diz-se **ponto de fronteira de** $X$ se for ponto aderente a $X$ e a $\mathbb{R}^n \backslash X$, isto é, quando

$$\forall\, r > 0, \quad (B(x,r) \cap X \neq \emptyset) \quad \wedge \quad (B(x,r) \cap \mathbb{R}^n \backslash X \neq \emptyset)\;.$$

O conjunto dos pontos de fronteira de $X$ designa-se por **fronteira** de $X$ e representa-se por $\text{fr}\, X$ ou $\partial X$.

Em $\mathbb{R}^n$, dizemos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é **compacto** quando $K$ é limitado e fechado.

**Exemplos**:

1. $\mathbb{R}^n$ não é compacto porque não é limitado.
   $\emptyset$ é compacto.
2. $X = ]0,1] \times [0,1]$ e $Y = [0,+\infty[ \times \{7\}$ não são compactos.
   ($X$ é limitado mas não é fechado; $Y$ é fechado mas não é limitado.)
3. $B(a,r)$ não é compacto mas $\overline{B}(a,r)$ é compacto.

**Definição**:

Sejam $A$ e $B$ dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que $A$ e $B$ são conjuntos **separados** quando

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad \wedge \quad A \cap \overline{B} = \emptyset\,.$$

**Definição**:

Um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **desconexo** quando se pode decompor na reunião de dois conjuntos separados, isto é, quando

$$\exists A, B \subset \mathbb{R}^n,\ \ A \text{ e } B \text{ separados},\ \ X = A \cup B\,.$$

**Teorema**:

Os únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos.

**Propriedades**:

1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$. Então $X \times Y$ é conexo se e só se $X$ e $Y$ são conexos.
2. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que $A \subset B \subset \overline{A}$. Se $A$ é conexo então $B$ é conexo.
3. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é conexo então $\overline{A}$ é conexo.

**Definição**:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^n$. Definimos o segmento de recta (fechado) com extremos $a$ e $b$ por

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ x = a + \lambda(b - a),\ \lambda \in [0, 1]\}$$

e o segmento de recta aberto com extremos $a$ e $b$ por

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ x = a + \lambda(b - a),\ \lambda \in ]0, 1[\}$$

Designa-se por linha poligonal unindo os pontos $a$ e $b$ toda a sequência de segmentos de reta adjacentes entre os pontos $a$ e $b$,
$[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_{n-1}, c_n], [c_n, c]$ .

**Propriedades**:

1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Se entre quaisquer dois pontos de $X$ existir uma linha poligonal que os une, totalmente contida em $X$, então $X$ é conexo.
2. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então $X$ é conexo se e só se entre quaisquer dois pontos de $X$ existir uma linha poligonal que os une, totalmente contida em $X$.

**Exemplos**:

1. $B(0,1) \cup ]2,3[\times]0,1[$ não é conexo.
2. $]0,2[\times]0,1[$ é conexo.