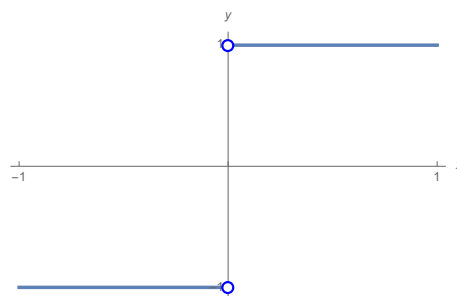




Funções: limite e continuidade

1. (a) Começemos por observar que a função f pode ser representada da seguinte forma:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$



f é crescente. Com efeito, tem-se que $f(x) \leq f(y)$ para todos os pontos $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que $x < y$.

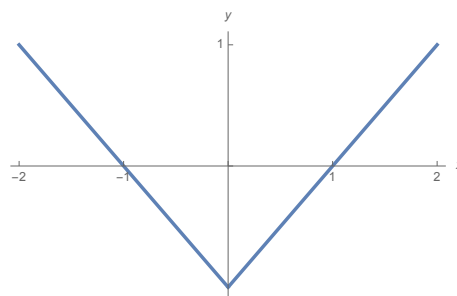
$\text{CD}(f) = \text{Im}(f) = \{-1, 1\}$. Logo f é limitada.

$\sup \text{CD}(f) = \max \text{CD}(f) = 1$.

$\inf \text{CD}(f) = \min \text{CD}(f) = -1$.

- (b) Começemos por observar que: $f(x) = \sqrt{x^2} - 1 = |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Assim, a função f pode ser representada da seguinte forma:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$



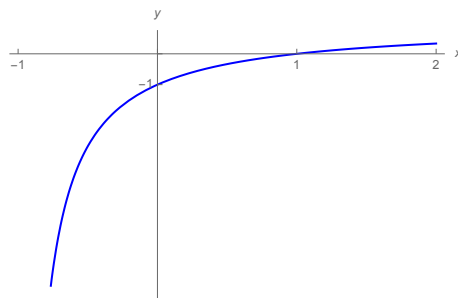
f não é monótona. Por exemplo, $f(-1) = 0 > -1 = f(0)$ mas $f(0) = -1 < 0 = f(1)$.

$\text{CD}(f) = [-1, +\infty[$. Logo f não é limitada.

Não existe supremo nem máximo do contradomínio de f .

$\inf \text{CD}(f) = \min \text{CD}(f) = -1$.

- (c) Começemos por observar que: $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$, $x \in]-1, +\infty[$. A função f pode ser representada graficamente da seguinte forma:



f é estritamente crescente. Com efeito, tem-se que $f(x) < f(y)$ para todos os pontos $x, y \in]-1, +\infty[$ tais que $x < y$.

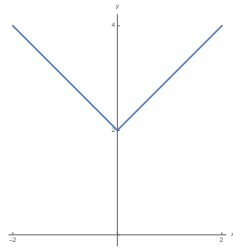
$\text{CD}(f) =]-\infty, 1[$. Logo f não é limitada.

$\sup \text{CD}(f) = 1$. Não existe máximo do contradomínio de f .

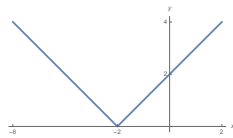
Não existe ínfimo nem mínimo do contradomínio de f .

2. (i) f não é injetiva nem sobrejetiva
 g é injetiva e sobrejetiva. Logo g é bijetiva
 h não é injetiva nem sobrejetiva.
 i não é injetiva nem sobrejetiva.
- (ii) $f([-1, 1]) = [0, 1]$
 $i([-1, 0]) =]-1, 0] \cup \{2\}$
 $i([-1, 3]) =]-1, 2]$
 $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$
 $h^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$
 $g^{-1}([-1, 3]) = [-3, 1[$
3. (a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + \pi/4) = \sin(2x^2 + \pi/2)$, $x \in \mathbb{R}$
- (b) $(g \circ f)(x) = g(x - 2) = \begin{cases} 3 & \text{se } x - 2 \neq 1 \\ 0 & \text{se } x - 2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$
4. (a) h : possui um mínimo absoluto e um máximo local; não possui máximo absoluto;
 i : possui máximo absoluto; não possui mínimos (nem locais nem absolutos);
 j : não possui extremos.
- (b) Apenas i é limitada; h é minorada; j não é minorada nem majorada.
5. (a) Afirmação falsa. Com efeito, $f([0, 3]) = [-2, 2] \neq [-2, 1]$.
- (b) Tem-se que $f(\frac{5}{2}) = -1$. Logo a afirmação é verdadeira.
- (c) Tem-se que $f(-1) = 2$. Logo a afirmação é falsa.

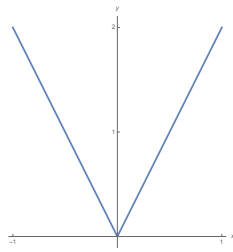
6. (a)



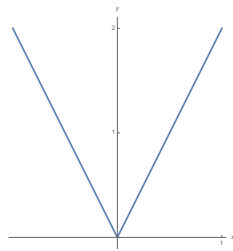
(b)



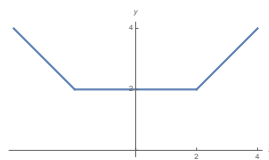
(c)



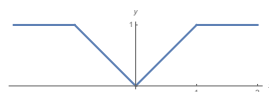
(d)



(e)



(f)



7. (a) Afirmação falsa. Com efeito, tem-se que $1 < 2$ mas $f(1) = 1 > 0 = f(2)$.
- (b) Afirmação verdadeira. Com efeito, tem-se que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $x + \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$ e
- $$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(4x + 2\pi) = \sin(4x) = f(x).$$
- (c) Afirmação verdadeira. Com efeito, $\text{Im}(f) =]0, +\infty[$ e, consequentemente, o conjunto $\text{Im}(f)$ é minorado mas não é majorado.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0.$

9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$; não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, uma vez que os limites laterais são distintos.

11. (a) $-\infty$ (b) $+\infty$ (c) 2
- (d) -1 (e) 1 (f) -1
- (g) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (h) 0 (i) $\frac{1}{1-\sqrt{2}/2}$
- (j) 1 (k) $\frac{4}{3}$ (l) 0
- (m) 6 (n) 1 (o) $\frac{1}{2}$
- (p) 0 (q) $+\infty$ (r) $\frac{5}{2}$
- (s) 0 (t) $-\infty$ (u) 0

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1.$

(e) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{|x + 3|}{x + 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{x + 3}{x + 3} = 1.$

(g)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

(h) Tem-se que:

- $-1 \leq \sin x \leq 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo a função $\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, é limitada;

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Então, por um teorema da aula, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen} x}{x} = 0.$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{|\text{sen} x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\text{sen}^2 x}}{|\text{sen} x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\text{sen} x|}{|\text{sen} x|} = 1.$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 4x}{\text{sen } 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 4x}{\cos 4x} \frac{1}{\text{sen } 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 4x}{4x} \frac{4}{\cos 4x} \frac{3x}{3 \text{sen } 3x} = \frac{4}{3}.$$

(l) Resolvido na aula.

(m) Usando a regra de Ruffini tem-se que:

$$x^3 + x^2 + x - 3 = (x^2 + 2x + 3)(x - 1).$$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2x + 3)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3) = 6.$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \text{sen} x}{x + \text{sen} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\text{sen} x}{x}}{1 + \frac{\text{sen} x}{x}} = 1.$$

(o)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - x^2)}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(p) Análogo ao exercício (l).

$$(q) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \cos x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x + \cos x) = +\infty.$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 3}{2x - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{7}{x}} = \frac{5}{2}.$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4 - 2x + 1}{-3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{-\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = -\infty.$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 10}{x^4 - 2x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{3}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{1 - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^4}} = 0.$$

12. O limite existe apenas para $a = 0$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

13. (a) f é contínua em π porque $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi) = -1$.

(b) Por exemplo, $x = 0$ e $x = 1$.

14. (a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (c) \emptyset (d) $\{0\}$ (e) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ (f) $\{1\}$

15. (a) Resolvido na aula

(b) Resolvido na aula

(c) Resolvido na aula

(d) Por exemplo, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sin(\pi x) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

(e) Resolvido na aula

(f) Resolvido na aula

16. (a) O domínio de continuidade da função f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) O domínio de continuidade da função g é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) O domínio de continuidade da função h é $\{0\}$.

(d) O domínio de continuidade da função i é $\{-1, 1\}$.

(e) O domínio de continuidade da função j é $\{-1\}$.

(f) O domínio de continuidade da função k é $\{-1\}$.

(g) O domínio de continuidade da função m é $[-4, 5] \setminus \{2\}$.

(h) O domínio de continuidade da função n é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

17. $a = 0$

18.

(a) Por exemplo, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto 2$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(b) Por exemplo, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto 2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(c) Resolvido na aula

19. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Temos que $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = 2$ e $(g \circ f)(0) = 0$.

Consequentemente, $g \circ f$ não é contínua em $x = 0$.

Não há qualquer contradição com o teorema da função composta, uma vez que, embora f seja contínua em $x = 0$, g não é contínua em $f(0) = 1$.

20. (a) Por exemplo, $z = -2$.
 (b) Por exemplo, $z = -1$.
 (c) Por exemplo, $z = 0$.

21. (a) Consideremos a função $f(x) = x - \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$. Temos que:

- f é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas;
- $f(0) = -1 < 0$;
- $f(\pi/2) = \pi/2 > 0$.

Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x \in]0, \pi/2[$ tal que $f(x) = 0$, isto é, tal que $x = \cos x$.

- (b) Consideremos a função $f(x) = x + \ln x$, $x \in]0, 1]$. Temos que:

- f é contínua por ser a soma de duas funções contínuas. Em particular, f é contínua em $[1/4, 1]$.
- $f(1/4) < 0$;
- $f(1) = 1 > 0$.

Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x \in]1/4, 1[$ tal que $f(x) = 0$, isto é, tal que $x = -\ln x$.

- (c) Consideremos a função $f(x) = 2 + x - e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Temos que:

- f é contínua por ser a soma de duas funções contínuas. Em particular, f é contínua em $[0, 2]$.
- $f(0) = 1 > 0$;
- $f(2) = 4 - e^2 < 0$.

Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x \in]0, 2[$ tal que $f(x) = 0$, isto é, tal que $2 + x = e^x$.

22. Consideremos os seguintes dois casos:

(i) Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ está encontrado o ponto fixo.

(ii) Suponhamos que $f(a) \neq a$ e que $f(b) \neq b$. Então, como $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ temos que $f(a) > a$ e que $f(b) < b$.

Consideremos a função $g(x) = f(x) - x$, $x \in [a, b]$. Temos que:

- g é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas;
- $g(a) = f(a) - a > 0$;
- $g(b) = f(b) - b < 0$.

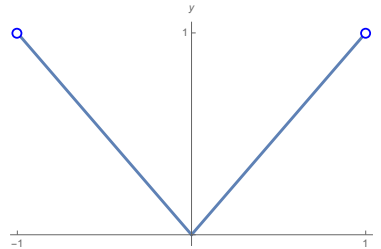
Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $g(x_0) = 0$, isto é, tal que $f(x_0) = x_0$.

23. (a) $f : [-2, -1] \cup [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-2, -1] \\ 1 & \text{se } x \in [1, 3] \end{cases}$$

- (b) Não existe. Se a função $g(x) = f(x) + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, é contínua então a função $f(x) = g(x) - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, é também contínua (por ser a diferença de duas funções contínuas).

24. A função g pode ser representada graficamente da seguinte forma:



Temos que $\text{CD}(g) = \text{Im}(g) = [0, 1[$. O contradomínio de g tem mínimo igual a 0 mas não tem máximo. Não há contradição com o Teorema de Weierstrass porque o conjunto $] - 1, 1[$ apesar de limitado, não é fechado.

25. (a) Afirmação falsa. Consideremos, por exemplo, as funções:

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2 & x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

Temos que f é contínua e g não é contínua. Mas a função composta $g \circ f$:

$$\begin{array}{ll} g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array}$$

é contínua.

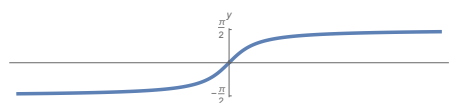
(b) Afirmação verdadeira. Pelo Teorema de Weierstrass, toda a função contínua definida num intervalo fechado e limitado $[a, b]$ tem máximo e mínimo nesse intervalo. Consequentemente, f é limitada.

(c) Afirmação verdadeira. Consideremos a função $f(x) = \ln(x^3) - x$, $x \in [1, e]$. Temos que:

- f é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas;
- $f(1) = -1 < 0$;
- $f(e) = 3 - e > 0$.

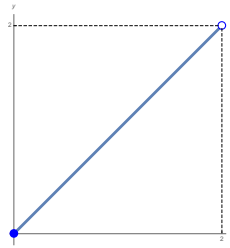
Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x \in]1, e[$ tal que $f(x) = 0$, isto é, tal que $\ln(x^3) = x$.

(d) Afirmação falsa. Consideremos, por exemplo, a função representada graficamente do seguinte modo:



Tem-se que a função tem domínio \mathbb{R} , é contínua e é limitada (o contradomínio da função é o conjunto $] - \pi/2, \pi/2[$, o qual é um conjunto limitado). No entanto, a função não atinge máximo nem mínimo.

- (e) Afirmação falsa. Consideremos, por exemplo, a função representada graficamente do seguinte modo:



Tem-se que a função tem domínio $[0, 2[$, é contínua e é limitada (o contradomínio da função é o conjunto $[0, 2]$, o qual é um conjunto limitado). No entanto, a função não atinge máximo.

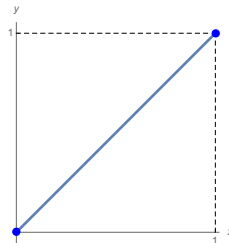
- (f) Afirmação falsa. Por exemplo, consideremos a função

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

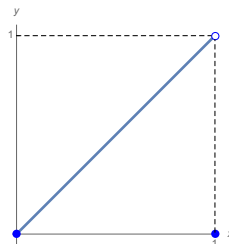
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

A função $|f|$ é tal que: $|f(x)| = 1, x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a função $|f|$ é contínua, mas a função f não é contínua em ponto algum.

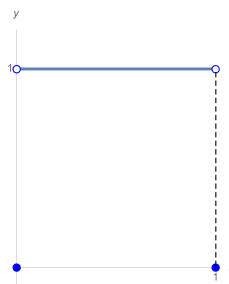
26. (a)



(b)

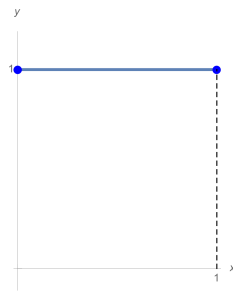


(c)

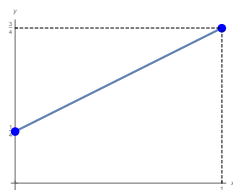


(d) Não existe (pelo Teorema de Bolzano-Cauchy).

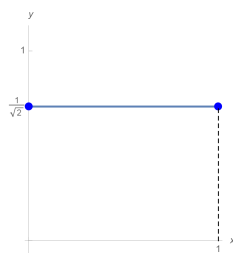
(e)



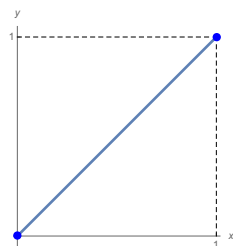
(f)



(g)

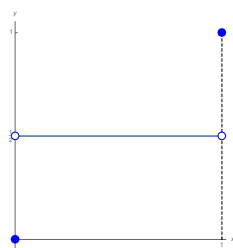


(h)

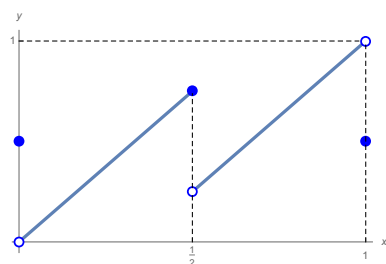


(i) Não existe (pelo Teorema de Bolzano-Cauchy).

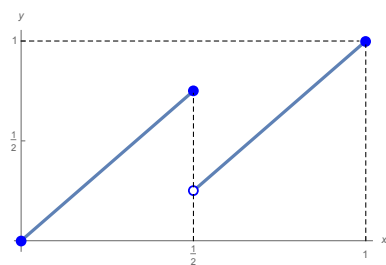
(j)



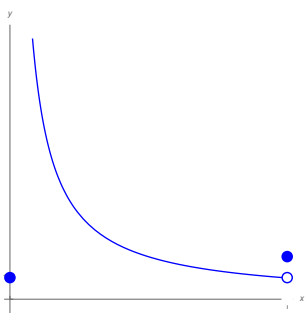
(k)



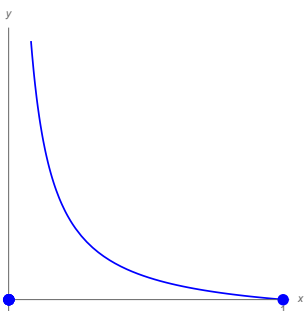
(l)



(m)



(n)



(o)

