3 conjuntos

71. Considere o conjunto $A = \{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\}$. Indique os elementos de cada um dos conjuntos seguintes.

    (a) $\{a \in A : a^2 \in \mathbb{Z}\}$;
    (b) $\{a \in A : \sqrt{a} \in \mathbb{R}\}$;
    (c) $\{a^2 \in \mathbb{R} : a \in A \wedge a^2 \in A\}$;
    (d) $\{\sqrt{a} \in \mathbb{R} : a \in A \wedge a^2 \in A\}$;
    (e) $\{b \in \mathbb{Z} : \exists a \in A \; b = a^2\}$;
    (f) $\{b \in \mathbb{R} : \exists a \in A \; b^2 = a\}$.

72. Descreva em compreensão cada um dos seguintes conjuntos:

    (a) $\{-1, 1\}$;
    (b) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$;
    (c) $\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$;
    (d) $\{4, 9, 16, 25, \ldots\}$.

73. Justifique que os seguintes conjuntos são iguais:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}; \qquad B = \{1, 2\}; \qquad C = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid 0 < n^2 \leq 4\}.$$

74. Sejam A, B e C conjuntos tais que A é um subconjunto de B e B é um subconjunto de C. Suponha ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

    (a) $a \in C$; (b) $b \in A$; (c) $c \notin A$; (d) $d \in B$; (e) $e \notin A$; (f) $f \notin A$.

    Resolução

    As afirmações necessariamente verdadeiras são as afirmações (a), (e) e (f).

    Justificações:

    (a) Como $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, temos que $A \subseteq C$. Assim, qualquer elemento de A é também elemento de C. Como $a \in A$, podemos concluir que $a \in C$.
    (e) Como $A \subseteq B$, qualquer elemento de A é também elemento de B. Assim, pelo contrarrecíproco, se um dado objeto não é elemento de B, então também não é elemento de A. Como $e \notin B$, podemos concluir que $e \notin A$.
    (f) A justificação é análoga à justificação de (e), mas considerando que $A \subseteq C$ e que $f \notin C$.

    Para as restantes afirmações, há exemplos onde são verdadeiras e há exemplos onde são falsas, pelo que afirmamos que, no geral, não são verdadeiras. Como justificação apresentamos contraexemplos:

    (b) Se considerarmos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{a, b, c\}$, temos que $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. No entanto, $b \notin A$.
    (c) Se considerarmos $A = \{a, c\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{a, b, c, d, e\}$, temos que $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. No entanto, $c \in A$.
    (d) Se considerarmos $A = \{a, c\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{a, b, c, d, e\}$, temos que $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. No entanto, $d \notin B$.

75. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

    (a) $1 \in \{1\}$;
    (b) $1 \in \{\{1\}\}$;
    (c) $\{1\} \in \{1\}$;
    (d) $\{1\} \in \{\{1\}\}$;
    (e) $\{1\} \subseteq \{1\}$;
    (f) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$;
    (g) $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$;
    (h) $\{1, \{1\}\} \subseteq \{\{1\}\}$;
    (i) $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$.

Resolução

(a) Verdadeira. O número 1 é o único elemento do conjunto $\{1\}$, pelo que podemos afirmar que $1 \in \{1\}$;

(b) Falsa. O único elemento que o conjunto à direita do símbolo $\in$ tem é o elemento $\{1\}$. Assim, 1 não é elemento do conjunto. Logo, temos que $1 \notin \{\{1\}\}$;

(c) Falsa. O único elemento que o conjunto à direita do símbolo $\in$ tem é o elemento 1. Assim, $\{1\}$ não é elemento do conjunto. Logo, temos que $\{1\} \notin \{1\}$;

(d) Verdadeira. O conjunto $\{1\}$ é o único elemento do conjunto $\{\{1\}\}$, pelo que podemos afirmar que $\{1\} \in \{\{1\}\}$;

(e) Verdadeira. Qualquer conjunto é subconjunto dele próprio. Por isso, podemos afirmar que $\{1\} \subseteq \{1\}$;

(f) Falsa. O único elemento do conjunto à esquerda do símbolo $\subseteq$, o elemento 1, não é elemento do conjunto à direita do mesmo símbolo, uma vez que o único elemento desse conjunto é $\{1\}$. Logo, temos que o primeiro conjunto não é subconjunto do segundo conjunto;

(g) Verdadeira. O conjunto à direita do símbolo $\in$ tem dois elementos: o elemento 1 e o elemento $\{1\}$. Assim, por causa deste último, podemos afirmar que $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$;

(h) Falsa. O conjunto à esquerda do símbolo $\subseteq$ tem dois elementos e o conjunto à direita tem um elemento. logo, o primeiro conjunto nunca pode ser subconjunto do segundo;

(i) Verdadeira. O conjunto à esquerda do símbolo $\subseteq$ tem um único elemento, o elemento 1. O conjunto à direita do símbolo $\in$ tem dois elementos: o elemento 1 e o elemento $\{1\}$. Assim, todos os elementos do primeiro conjunto são elementos do segundo conjunto e, por isso, o primeiro conjunto é subconjunto do segundo conjunto. Logo, temos que $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$.

76. Investigue a veracidade de cada uma das seguintes proposições.

    (a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, (b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$; (c) $\emptyset \notin \emptyset$; (d) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$.

77. Mostre que os conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ e $\{\{\emptyset\}\}$ são distintos dois a dois.

78. Dê exemplos de conjuntos A e B tais que se tenha simultaneamente

    (a) $A \in B$ e $A \subseteq B$; (b) $A \in B$ e $A \not\subseteq B$; (c) $A \notin B$ e $A \subseteq B$.

79. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

    (a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$;
    (b) Se $A \in B$ e $B \in C$, então $A \in C$;
    (c) Se $A \in B$ e $B \subseteq C$, então $A \in C$;
    (d) Se $A \in B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$;
    (e) Se $A \subseteq B$ e $B \in C$, então $A \in C$;
    (f) Se $A \subseteq B$ e $B \in C$, então $A \subseteq C$.

80. Sejam A e B conjuntos. Simbolize convenientemente:

    (a) A e B têm um elemento em comum;
    (b) Nenhum elemento de A é elemento de B;
    (c) A tem um único elemento;
    (d) A tem exatamente dois elementos.

Resolução

(a) Dizer que "A e B têm um elemento em comum" é o mesmo que dizer que

$$A \cap B \neq \emptyset$$

ou que

$$(\exists x)\ x \in A \wedge x \in B.$$

(b) Dizer que "Nenhum elemento de A é elemento de B" é o mesmo que dizer que

$$A \cap B = \emptyset$$

ou que

$$(\forall x \in A)\ x \notin B.$$

(c) Dizer que "A tem um único elemento" é o mesmo que dizer que

$$(\exists^1 x)\ x \in A$$

ou que

$$(\exists x)\ x \in A \wedge [(\exists y:\ y \in A) \Rightarrow x = y]\,.$$

(d) Dizer que "A tem exatamente dois elementos" é o mesmo que dizer que

$$(\exists x, y \in A)\ x \neq y \wedge [(\exists z : z \in A) \Rightarrow z = x \vee z = y]\,.$$

81. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Identifique os seguintes conjuntos:

(a) $A \cap B$; (c) $A \setminus B$; (e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
(b) $A \cup B$; (d) $(A \setminus B) \cap B$; (f) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

82. Seja $X = \{x \in \mathbb{R} : -11 < x < 11\}$. Considere os seguintes subconjuntos de X:

$$A = \{x \in X : 0 < x < 3\}, \quad B = \{x \in X : 2 < x < 6\} \ \text{ e } \ C = \{x \in X : -1 < x < 1\}.$$

Determine:

(a) $A \cup B$; (c) A'; (e) B'; (g) $(A \cap B) \cup (A \cup C)$;
(b) $A \cap B$; (d) $B \setminus A$; (f) $A \cap (B \cup C)$; (h) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

83. Sejam $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : (\exists y \in \mathbb{N}) x = 2y\}$ e $C = \{x^2 :\ x \in A\}$. Determine

(a) $A \cup C$; (c) $A \cup B$; (e) $B \cup C$; (g) $A \backslash B$; (i) $B \backslash B$.
(b) $A \cup A$; (d) $A \cap B$; (f) $B \cap B$; (h) $C \backslash A$;

Resolução

Começamos por observar que B é o conjunto de todos os números pares e que $C = \{2^2, 4^2, 6^2, 8^2\} = \{4, 16, 36, 64\}$, pelo que tanto A como C são subconjuntos de B. Estamos agora em condições de determinar cada um dos conjuntos pedidos.

(a) $A \cup C = \{x : x \in A \vee x \in C\} = \{2, 4, 6, 8, 16, 36, 64\}$;

(b) $A \cup A = \{x : x \in A \vee x \in A\} = \{x : x \in A\} = A$;

(c) $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} = B$, uma vez que $A \subseteq B$;

(d) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} = A$, uma vez que $A \subseteq B$;

(e) $B \cup C = \{x : x \in B \vee x \in C\} = B$, uma vez que $C \subseteq B$;

(f) $B \cap B = \{x : x \in B \wedge x \in B\} = B$;

(g) $A\backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \emptyset$;

(h) $C\backslash A = \{x : x \in C \wedge x \notin A\} = \{16, 36, 64\}$;

(i) $B\backslash B = \{x; x \in B \wedge x \notin B\} = \emptyset$, pois a condição que define o conjunto $(x \in B \wedge x \notin B)$ é uma condição impossível.

84. Sejam A e B conjuntos.

(a) Mostre que $(A \cup B) \setminus B \subseteq A$;

(b) Dê exemplo de dois conjuntos A e B tais que $(A \cup B) \setminus B \neq A$;

(c) Mostre que $(A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

85. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

(a) Se $C \subseteq A \cup B$, então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$;

(b) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$, então $C \subseteq A \cup B$;

(c) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$;

(d) Se $A \cup B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$;

(e) Se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$.

Resolução

(a) Falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Se $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{2, 3\}$, temos que $C \subseteq A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ e, no entanto, $C \nsubseteq A$ e $C \nsubseteq B$;

(b) Verdadeira. Como $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$, temos, pela transitividade da inclusão de conjuntos, que:

$$C \subseteq A \text{ e } A \subseteq A \cup B \Rightarrow C \subseteq A \cup B$$

e

$$C \subseteq B \text{ e } B \subseteq A \cup B \Rightarrow C \subseteq A \cup B;$$

(c) Verdadeira. Sabemos que $A \cup B$ é o menor conjunto que contém simultaneamente A e B. Logo, Se C é tal que $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ temos que $A \cup B \subseteq C$.

(d) Verdadeira. Como $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$, temos, pela transitividade da inclusão de conjuntos, que:

$$A \subseteq A \cup B \text{ e } A \cup B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

e

$$B \subseteq A \cup B \text{ e } A \cup B \subseteq C \Rightarrow B \subseteq C;$$

(e) Falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Se $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ e $C = \{3, 4, 5\}$, temos que $B \subseteq C$, pelo que se verifica que "$A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$" e $A \cup B \notin C$.

86. Sejam X um conjunto e $A, B, C \subseteq X$ tais que $A \cap B = A \cap C$ e $(X \setminus A) \cap B = (X \setminus A) \cap C$. Mostre que $B = C$.

87. Usando as propriedades das operações entre conjuntos, determine:

(a) $(\emptyset \cup A) \cap (B \cup A)$; (b) $(A \cup B) \cap (A \cup B')$; (c) $A \cap (A \cup B)$.

88. Dê exemplos de conjuntos A, B, C, para os quais se tenha, respetivamente:

(a) $A \cup (B \backslash C) \neq (A \cup B) \backslash (A \cup C)$;

(b) $A \backslash (B \cup C) \neq (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

(c) $A \backslash (B \cap C) \neq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

Resolução

(a) Sejam $A = \{1\}$, $B = \{2,3\}$ e $C = \{3,4\}$. Então,

$$A \cup (B \backslash C) = \{1,2\} \quad \text{e} \quad (A \cup B) \backslash (A \cup C) = \{1,2,3\} \backslash \{2,3,4\} = \{1\}.$$

(b) Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ e $C = \{3,5,6\}$. Então,

$$A \backslash (B \cup C) = \{1\} \quad \text{e} \quad (A \backslash B) \cup (A \backslash C) = \{1\} \cup \{1,2\} = \{1,2\}.$$

(c) Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ e $C = \{3,5,6\}$. Então,

$$A \backslash (B \cap C) = \{1,2\} \quad \text{e} \quad (A \backslash B) \cap (A \backslash C) = \{1\} \cap \{1,2\} = \{1\}.$$

89. Para cada um dos conjuntos seguintes, escreva (usando símbolos lógicos) o que significa um objeto x ser um elemento desse conjunto. Depois, determine os conjuntos que são iguais entre si, determinando as proposições que são logicamente equivalentes.

(a) $(A \setminus B) \setminus C$;

(b) $A \setminus (B \setminus C)$;

(c) $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

(d) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

(e) $A \setminus (B \cup C)$.

90. Sejam A e B conjuntos. Prove que

(a) se $A \cup B = \emptyset$, então $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$;

(b) $A \backslash B \subseteq A$;

(c) $A \backslash \emptyset = A$;

(d) $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$;

(e) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$;

(f) $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$;

(g) se $A \subseteq B$, então $A \cup (B \backslash A) = B$.

Resolução

(a) Sabendo que $A \cup B = \emptyset$, queremos provar que $A = \emptyset$ e que $B = \emptyset$. Como $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$, podemos concluir que $A \subseteq \emptyset$ e que $B \subseteq \emptyset$. Como o único subconjunto do vazio é o próprio vazio, temos que $A = \emptyset$ e que $B = \emptyset$.

(b) Como

$$x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \Rightarrow x \in A,$$

temos que $A \backslash B \subseteq A$.

(c) Como

$$x \in A \backslash \emptyset \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin \emptyset \Leftrightarrow x \in A,$$

uma vez que "$x \notin \emptyset$" é uma condição universal e qualquer condição universal é elemento neutro da conjunção de condições, temos que $A \backslash \emptyset = A$.

(d) Como

$$x \in (A\backslash B) \cap B \Leftrightarrow x \in A\backslash B \text{ e } x \in B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \text{ e } x \in B \Leftrightarrow x \in \emptyset,$$

uma vez que a condição "$x \notin B$ e $x \in B$" é uma condição impossível e uma condição impossível é elemento absorvente para a conjunção e define o conjunto vazio, temos que $(A\backslash B) \cap B = \emptyset$.

(e) Como

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B\backslash C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B\backslash C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ e } x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B)\backslash C, \end{aligned}$$

temos que $A \cap (B\backslash C) = (A \cap B)\backslash C$.

(f) Como

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup A\backslash B &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ ou } x \in A\backslash B \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \in B \text{ ou } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in A, \end{aligned}$$

uma vez que a condição "$x \notin B$ ou $x \in B$" é uma condição universal e uma condição universal é elemento neutro para a conjunção, temos que $A = (A \cap B) \cup (A\backslash B)$.

(g) Sabendo que $A \subseteq B$, queremos provar que $A \cup (B\backslash A) = B$. De facto, sabemos que $B = A \cup B$ e, por isso,

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B\backslash A) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B\backslash A \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \notin A) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \notin A) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in B. \end{aligned}$$

Assim, estamos em condições de concluir que $A \cup (B\backslash A) = B$.

91. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$, então $B = C$.

Resolução

Sabendo que $A \cup B = A \cup C$ e que $A \cap B = A \cap C$, queremos provar que $B = C$.

Como $B \subseteq A \cup B$ temos que $B = B \cap (A \cup B)$. Analogamente, como $C \subseteq A \cup C$, podemos concluir que $C = C \cap (A \cup C)$. Assim,

$$\begin{aligned} B &= B \cap (A \cup B) \\ &= B \cap (A \cup C) && \text{(por hipótese)} \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap C) && \text{(por distributividade de } \cap \text{ em relação a } \cup) \\ &= (C \cap A) \cup (C \cap B) && \text{(por hipótese e por comutatividade de } \cap) \\ &= C \cap (A \cup B) && \text{(por distributividade de } \cap \text{ em relação a } \cup) \\ &= C \cap (A \cup C) && \text{(por hipótese)} \\ &= C. \end{aligned}$$

92. Seja E o conjunto $\{1, \{1\}, 2, \{1, 2\}\}$. Determine:

(a) $\mathcal{P}(E)$; (b) $E \cap \mathcal{P}(E)$.

Resolução

(a) O conjunto E tem quatro elementos, pelo que a sua potência é um conjunto com dezasseis elementos, que são os dezasseis subconjuntos de E. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E) &= \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{2\}, \{\{1,2\}\}, \{1,\{1\}\}, \{1,2\}, \{1,\{1,2\}\}, \{\{1\},2\}, \{\{1\}.\{1,2\}\}, \\ &\quad \{2,\{1,2\}\}, \{1,\{1\},2\}, \{1,\{1\},\{1,2\}\}, \{1,2,\{1,2\}\}, \{\{1\},2,\{1,2\}\}, E\}.\end{aligned}$$

(b) $E \cap \mathcal{P}(E) = \{\{1\},\{1,2\}\}$.

93. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{\emptyset, \{1,2,3\}\}$.

(a) Indique $\mathcal{P}(A)$.

(b) Diga, justificando, se:

(i) $A \in \mathcal{P}(B)$; (ii) $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; (iii) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

94. Determine todos os elementos de:

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$;

(b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$.

95. Sejam A e B conjuntos. Mostre que $A \subseteq B$ se e só se $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Resolução

Vamos provar esta equivalência provando uma dupla implicação.

[$\Rightarrow$] Sabendo que $A \subseteq B$, queremos provar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Se $A \subseteq B$, sabemos que qualquer subconjunto de A é também subconjunto de B. Assim, qualquer elemento de $\mathcal{P}(A)$ é elemento de $\mathcal{P}(B)$. Logo, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

[$\Leftarrow$] Sabendo que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, queremos provar que $A \subseteq B$.

Da hipótese temos que qualquer subconjunto de A é um subconjunto de B. Mas, A é subconjunto de si próprio. Então, A é subconjunto de B, o que prova o pretendido.

96. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) $\{\emptyset\} \subseteq A$, para qualquer conjunto A;

(b) $\emptyset \subseteq A$, para qualquer conjunto A;

(c) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$, para qualquer conjunto A;

(d) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A)$, para qualquer conjunto A;

(e) $\emptyset \in A$, para qualquer conjunto A;

(f) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, para qualquer conjunto A;

(g) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\emptyset)$;

(h) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$;

(i) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

97. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;

(b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;

(c) Se $(A \cup B) \in \mathcal{P}(A \cap B)$ então $A = B$.

Resolução

(a) A afirmação é verdadeira. De facto, temos

$$X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \subseteq A \text{ e } X \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \text{ e } X \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

(b) A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: se $A = \{1\}$ e $B = \{2, 3\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ e, por isso, $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ e $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(A)$ e $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(B)$. Assim, os dois conjuntos não são necessariamente iguais.

(c) A afirmação é verdadeira. Se $(A \cup B) \in \mathcal{P}(A \cap B)$, então $A \cup B \subseteq A \cap B$ e como, em geral, $A \cap B \subseteq A \cup B$, temos que $A \cup B = A \cap B$. Como a união de dois conjuntos é o menor conjunto que os contém e a interseção de conjunto é o maior conjunto neles contido, concluímos que $A \cap B = A = B = A \cup B$.

98. Sejam A e B dois conjuntos. Dados $a \in A$ e $b \in B$, definimos o *par ordenado* (a, b) como sendo o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Prove que, para quaisquer $a, x \in A$ e quaisquer $b, y \in B$, se tem $(a, b) = (x, y)$ se e só se $a = x$ e $b = y$.

99. Considere os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, f\}$ e $C = \{g\}$.

(a) Determine:

(i) $B \times C$ e $C \times B$;	(iii) $A \times B \times C$;	(v) B^3;
(ii) $(B \times C) \setminus (C \times B)$;	(iv) $A \times \emptyset \times C$;	(vi) $B^3 \times C$.

(b) Verifique que os conjuntos $B^3 \times C$ e $C \times B^3$ não são iguais.

(c) Indique o número de elementos dos conjuntos $A^3 \times B \times C$ e $C^3 \times B \times A^4$.

100. Sejam A, B e C conjuntos. Prove que:

(a) se $A \subseteq B$, então $A \times C \subseteq B \times C$;

(b) se $A \subseteq B$, então $C \times A \subseteq C \times B$;

(c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

(d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(e) $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$.

Resolução

(a) Sabendo que $A \subseteq B$, queremos provar que $A \times C \subseteq B \times C$. De facto, temos que

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times C &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } y \in C && \text{(por definição de prod. cartesiano)} \\ &\Rightarrow x \in B \text{ e } y \in C && \text{(por hipótese)} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in B \times C. && \text{(por definição de prod. cartesiano)} \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $A \times C \subseteq B \times C$.

(b) Análogo ao anterior.

(c) Temos que

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cup B) \times C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ e } y \in C && \text{(def. de prod. cartes.)} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } y \in C && \text{(definição de } \cup) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } y \in C) \text{ ou } (x \in B \text{ e } y \in C) && \text{(dist. de } \wedge \text{ em relação a} \vee) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \text{ ou } (x, y) \in B \times C && \text{(def. de prod. cartesiano)} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \cup B \times C && \text{(definição de } \cup) \end{aligned}$$

101. Sejam A e B dois conjuntos. Prove que $(A \times A) \backslash (B \times B) = [(A \backslash B) \times A] \cup [A \times (A \backslash B)]$.

102. Sejam A e B conjuntos tais que $A \neq B$. Suponha que C é um conjunto tal que $A \times C = B \times C$. Mostre que $C = \emptyset$.

Resolução

Demonstração por redução ao absurdo.

Suponhamos que A, B e C são conjuntos tais que $A \neq B$, $A \times C = B \times C$ e $C \neq \emptyset$. Então,

- de $A \neq B$ sabemos que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$ ou que existe $b \in B$ tal que $b \notin A$ (uma das afirmações desta disjunção pode ser falsa, pois um (e apenas um) dos conjuntos A e B pode ser o conjunto vazio). Suponhamos, sem perdas de generalidade, que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$.
- de $C \neq \emptyset$ podemos concluir que existe $c \in C$.

Assim, estamos em condições de concluir que existe o elemento $(a, c) \in A \times C$. Mas, $A \times C = B \times C$, pelo que $(a, c) \in B \times C$ e, por isso, temos que $a \in B$. Logo, temos $a \notin B$ e $a \in B$, uma contradição. A contradição resulta de termos suposto que os três conjuntos são tais que $A \neq B$, $A \times C = B \times C$ e $C \neq \emptyset$. Logo, se os três conjuntos são tais que $A \neq B$ e $A \times C = B \times C$, temos que ter $C = \emptyset$.

103. Seja A um conjunto finito. Qual dos conjuntos $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem mais elementos?

104. Considere o conjunto de índices $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Calcule a união e a intersecção das seguintes famílias de conjuntos:

    (a) $\{A_k\}_{k \in I}$ em que, para cada $k \in I$, $A_k = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \leq 2k\}$;

    (b) $\{B_k\}_{k \in I}$ em que, para cada $k \in I$, $B_k = [-k/2, k + 2[$;

    (c) $\{C_k\}_{k \in I}$ em que, para cada $k \in I$, $C_k = \left[-\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right]$.

105. Calcule a união e a intersecção das seguintes famílias de conjuntos:

    (a) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{z \in \mathbb{Z} : \ |z| \leq 2n\}$;

    (b) $\{B_x\}_{x \in \mathbb{R}_0^+}$ em que, para cada $x \in \mathbb{R}_0^+$, $B_x = [-x/2, x + 2[$;

    (c) $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ em que, para cada $i \in \mathbb{N}_0$, $C_i = [-\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i+1}]$.

106. Dê exemplo de uma família de conjuntos todos diferentes entre si, indexada pelo conjunto $\mathbb{N}$, tal que

    (a) a união dos conjuntos da família é igual a $\mathbb{Z}$ e a intersecção é igual a $\{0\}$;

    (b) a união dos conjuntos da família é igual a $\mathbb{R}_0^+$ e a intersecção é o conjunto vazio;

    (c) a união dos conjuntos da família é igual a $[2, 8]$ e a intersecção é igual a $[3, 6]$.

    Resolução

    (a) Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja, por exemplo, $A_i = \{-i, 0, i\}$. Então, $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{Z}$ e $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$.

    (b) Sejam, por exemplo, $A_1 = \{0\}$ e $A_i =]0, i[$, para $i \geq 2$. Então, $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}_0^+$ e $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$.

    (c) Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja, por exemplo, $A_i = [2 + \frac{1}{i}, 8 - \frac{2}{i}]$. Então, $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = [2, 8]$ e $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = [3, 6]$.