



Funções: limite e continuidade

1. Verifique se as seguintes funções são limitadas ou monótonas e indique, quando possível, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos seus contradomínios:

(a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{|x|}{x}$

(b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}$

(c) $f:]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{x-1}{x+1}$

2. Considere as seguintes funções:

(a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2$

(b) $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto -x$

(c) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto 0$

(d) $i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in]-1, 2] \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 2] \end{cases}$

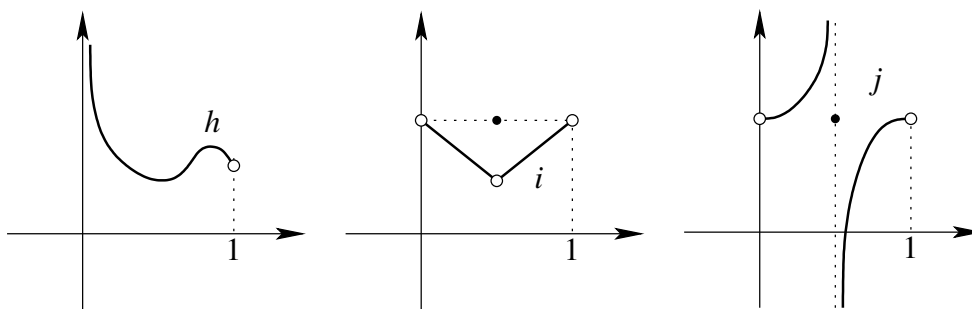
- (i) Classifique cada uma delas quanto à injetividade e sobrejetividade.
- (ii) Determine $f([-1, 1])$, $i([-1, 0])$, $i([-1, 3])$, $f^{-1}(\{1\})$, $h^{-1}(\{0\})$ e $g^{-1}([-1, 3])$.

3. Defina a função composta $g \circ f$ para:

(a) $g(x) = \sin 2x$ e $f(x) = x^2 + \pi/4$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ e $f(x) = x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Relativamente a cada uma das seguintes funções $h, i, j :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, diga se:



- (a) possui extremos locais ou absolutos;
- (b) é limitada (se não, especifique se é minorada ou majorada).

5. Considere a função $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 4 - 2x & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (a) $f([0, 3]) = [-2, 1]$;
- (b) existe $x \in [1, 3]$ tal que $f(x) = -1$;
- (c) não existe $x \in [-3, 0]$ tal que $f(x) = 2$.

6. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Esboce o gráfico da função g definida por:

$$x \mapsto |x|$$

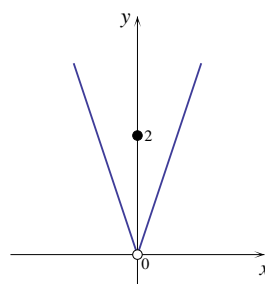
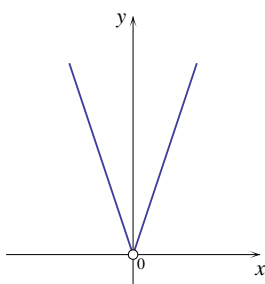
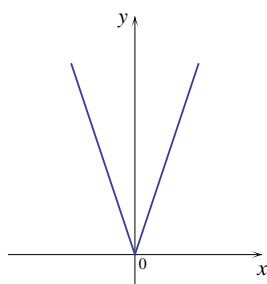
- (a) $g(x) = f(x) + 2, x \in \mathbb{R}$;
- (b) $g(x) = f(x + 2), x \in \mathbb{R}$;
- (c) $g(x) = 2f(x), x \in \mathbb{R}$;
- (d) $g(x) = f(2x), x \in \mathbb{R}$;
- (e) $g(x) = \max\{f(x), 2\}, x \in \mathbb{R}$;
- (f) $g(x) = \min\{f(x), 1\}, x \in \mathbb{R}$.

7. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- (a) a função $f : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ é estritamente crescente;
- (b) a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $\frac{\pi}{2}$;
 $x \mapsto \sin(4x)$
- (c) a função $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é minorada mas não é majorada.
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

8. Estude, intuitivamente, a existência de limite na origem para as seguintes funções:

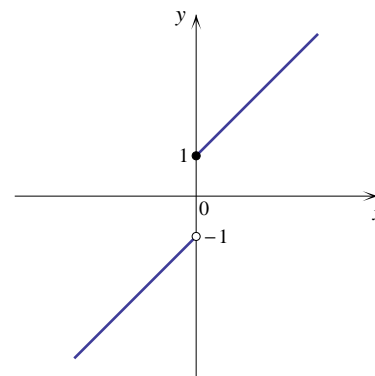
$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, & h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \\ x \mapsto 3|x| & x \mapsto 3|x| & \begin{array}{l} x \neq 0 \mapsto 3|x| \\ x = 0 \mapsto 2 \end{array} \end{array}$$



9. Seja f a função definida em \mathbb{R} por $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, cujo gráfico se apresenta.

Da observação do gráfico o que pode concluir quanto aos limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)?$$



10. Uma função g satisfaz as condições indicadas; esboce um gráfico possível de g , em cada um dos seguintes casos:

- (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 4$, $D_g = [-1, 4]$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 4$, $D_g =]-1, 4[$, $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -\infty$

11. Calcule os limites que se seguem:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3}{x+2}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{|x+3|}{x+3}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$ (h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen } x}{x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\text{tg } x}{1 - \cos x}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{|\text{sen } x|}$ (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 4x}{\text{sen } 3x}$ (l) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \text{sen } \frac{1}{x^2}$
- (m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1}$ (n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x}$ (o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$
- (p) $\lim_{x \rightarrow 0} \pi x \cos \left(\frac{1}{3\pi x} \right)$ (q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \cos x)$ (r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 3}{2x - 7}$
- (s) $\lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen } (2x) + x^2 \cos(5x))$ (t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4 - 2x + 1}{-3x + 1}$ (u) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 10}{x^4 - 2x + 4}$

12. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Diga para que valores de $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e determine o seu valor.

13. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$

- (a) Diga, justificando, se f é contínua em π .
- (b) Indique dois pontos do domínio onde f seja descontínua.

14. Determine o domínio de continuidade de cada uma das funções definidas por:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases} & \text{(b)} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} & \text{(d)} \quad k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad j(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & \text{se } x \neq 3 \\ 1 & \text{se } x = 3 \end{cases} & \text{(f)} \quad m(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}
 \end{array}$$

15. Em cada alínea, apresente uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo domínio de continuidade seja o conjunto A definido por:

$$\text{(a)} \quad A = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{(b)} \quad A = \emptyset \quad \text{(c)} \quad A = [0, 1] \quad \text{(d)} \quad A = \mathbb{Z} \quad \text{(e)} \quad A = \{0\} \quad \text{(f)} \quad A =]0, 1[$$

16. Estude a continuidade das funções definidas por:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} & \text{(b)} \quad g(x) = \begin{cases} 5 - \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} & \text{(d)} \quad i(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad j(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \\ |x| - 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} & \text{(f)} \quad k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \\ |x| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \\
 \text{(g)} \quad m(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se } x \in [-4, 2[\\ 10 & \text{se } x = 2 \\ x - 7 & \text{se } x \in]2, 5] \end{cases} & \text{(h)} \quad n(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^3 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)^3 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

17. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + a & \text{se } x \leq 1 \\ 1 - ax & \text{se } x > 1 \end{cases} .$$

Determine o valor de a de modo que f seja contínua em 1 .

18. Defina funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nas condições indicadas:

- (a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua;
- (b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua;
- (c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas.

Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta? Justifique.

19. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e $f(x) = x + 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Verifique que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0).$$

Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta? Justifique.

20. Para cada uma das funções polinomiais definidas a seguir, encontre um $z \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 0$ para algum $x \in]z, z + 1[$:

- (a) $f(x) = x^3 - x + 3$
- (b) $f(x) = x^5 + x + 1$
- (c) $f(x) = -2x^3 + 10x - 1$

21. Mostre que as seguintes equações têm soluções nos intervalos indicados:

- (a) $x = \cos x, \quad x \in [0, \pi/2]$
- (b) $x = -\log x, \quad x \in]0, 1]$
- (c) $2 + x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

22. (a) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Mostre que f possui um *ponto fixo*, isto é, $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = x_0$.
(b) Dê exemplo de uma função contínua, $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, sem ponto fixo.

23. Dê exemplo, justificando, ou mostre porque não existe uma função:

- (a) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores negativos e positivos;
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descontínua tal que a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.
$$x \mapsto f(x) + \sin x$$

24. Considere a função $g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$. Verifique que g possui um mínimo mas não possui máximo. Confronte o resultado com o teorema de Weierstrass.
25. Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:
- (a) se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é contínua então $g \circ f$ não é contínua;
 - (b) se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é limitada;
 - (c) existe $x \in]1, e[$ tal que $\log(x^3) = x$;
 - (d) se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, então f atinge um máximo e um mínimo;
 - (e) uma função $f : [0, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada possui máximo;
 - (f) se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua num ponto a , então f também é contínua em a .
26. Em cada uma das alíneas esboce o gráfico, se possível, de uma função f definida em $[0, 1]$ e satisfazendo as condições dadas:
- (a) f contínua em $[0, 1]$ com valor mínimo 0 e valor máximo 1;
 - (b) f contínua em $[0, 1[$ com valor mínimo 0 e sem valor máximo;
 - (c) f contínua em $]0, 1[$ assume os valores 0 e 1 mas não assume o valor $\frac{1}{2}$;
 - (d) f contínua em $[0, 1]$ assume os valores -1 e 1 mas não assume o valor 0;
 - (e) f contínua em $[0, 1]$ com valor mínimo 1 e valor máximo 1;
 - (f) f contínua em $[0, 1]$, não constante, não assume valores inteiros;
 - (g) f contínua em $[0, 1]$ não assume valores racionais;
 - (h) f contínua em $[0, 1]$ assume um valor máximo, um valor mínimo e todos os valores intermédios;
 - (i) f contínua em $[0, 1]$ assume apenas dois valores distintos;
 - (j) f contínua em $]0, 1[$ assume apenas três valores distintos;
 - (k) f não contínua em $]0, 1[$ tem por imagem um intervalo aberto e limitado;
 - (l) f não contínua em $]0, 1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado;
 - (m) f contínua em $]0, 1[$ tem por imagem um intervalo não limitado;
 - (n) f não contínua em $[0, 1]$ tem por imagem o intervalo $[0, +\infty[$;
 - (o) f não contínua em $[0, 1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado.