Exercícios - Matrizes

1. Escreva a tabela das seguintes matrizes:

   (a) $A = [i+j]_{\substack{i\,=\,1,\,\dots,\,4 \\ j\,=\,1,\,\dots,\,5}}$;   (b) $B = [b_{ij}]_{\substack{i\,=\,1,\,\dots,\,4 \\ j\,=\,1,\,\dots,\,5}}$ onde $b_{ij} = |i-j|$;

   (c) $A + 2B$.

$$\text{A+2B=}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 5 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 8 & 7 & 6 & 9 & 12 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

2. Escreva a matriz $A = [a_{ij}]$, quadrada de ordem n, tal que

   (a) $n = 3$ e $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i+j \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$;   (b) $n = 3$ e $a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i > j \\ 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i < j \end{cases}$;

   (c) $n = 6$ e $a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{se } i > j-1 \\ 2i/j & \text{caso contrário} \end{cases}$.

$$\text{A=}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{B=}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{C=}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ 3 & 4 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{3} \\ 4 & 5 & 6 & \frac{3}{2} & \frac{6}{5} & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & \frac{8}{5} & \frac{4}{3} \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \frac{5}{3} \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

3. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Diga quais das seguintes expressões identificam matrizes, e em tais casos calcule-as.

   (a) $A + 2B$;   (b) AB;

   (c) $AC + D$;   (d) $(A+B)C$;

   (e) ACD;   (f) $2ACA + A$.

(a) $A + 2B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 7 & -4 & 3 \\ -2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$,   (b) AB imp.   (c) AC+D Imp.

(d) $(A+B)C = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 13 & 18 \\ -2 & 8 & 7 & 18 \\ 11 & -5 & -1 & -14 \\ 9 & 9 & -9 & 6 \end{bmatrix}$, (e) $ACD = \begin{bmatrix} 2 & -24 \\ 2 & -9 \\ -15 & -3 \\ 24 & 33 \end{bmatrix}$ (f) $2ACA + A = \begin{bmatrix} 66 & 81 & 100 \\ -21 & 0 & -43 \\ -6 & 9 & 43 \\ 75 & -18 & 43 \end{bmatrix}$

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique que:

   (a) $A - 3A + 2I_3 \neq 0_{3\times 3}$;

   (b) $A.I_3 = A = I_3.A$;

   (c) $A.0_{3\times 3} = 0_{3\times 3}$;

   (d) $2A - 3A = -A$.

---

5. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que

   (a) $A + B = B + A$ (comutatividade da adição).

   (b) $A + 0 = A = 0 + A$ (0 é o elemento neutro da adição).

   (c) $A + (-A) = (-A) + A = 0$ ($-A$ é o simétrico de A).

6. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Mostre que

   (a) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$. (b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

   (c) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$. (d) $1A = A$.

7. Se possível calcule AB e BA sendo

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2+i & -1 \\ 0 & 4+i \\ -3 & -i \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 2 & -2i \\ 2 & -i & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2i \\ -1+i & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} i & 0 & -3i \\ 2 & 2 & 1+4i \\ 1-3i & 0 & 3i \end{bmatrix}$.

$(a) AB = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

$(b) AB = \begin{bmatrix} 1-i & i & 3+2i & 2-4i \\ 8+2i & 1-4i & 4+i & 0 \\ -3+i & -1 & -6-i & 6i \end{bmatrix}$ e BA Imp.

$(c) AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$(d) AB = \begin{bmatrix} -1-2i & 0 & 6 \\ 4+2i & -2 & -7-4i \\ -4i & 0 & 3+6i \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 1+4i & 0 & -2i \\ -3+i & -2 & 3+8i \\ 4-4i & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Sejam A, B matrizes 2×2 reais tais que

$$AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Mostre que $a + d = 0$.

9. Seja A uma matriz do tipo $m \times (m+5)$ e B uma matriz do tipo $n \times (11-n)$ tais que AB e BA estão definidas. Determine os valores possíveis para m e n. (m=3, n=8)

10. Determine a matriz $X \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A + 3X = B$, onde $A = [2i - 3j]_{\substack{i=1,\ldots,4 \\ j=1,2}}$ e $B = [2i + 3j]_{\substack{i=1,\ldots,4 \\ j=1,2}}$.

A= $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \\ 9 & 12 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$, $X = \frac{1}{3}(B - A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

11. Demonstre a proposição: "Para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$, existe e é única a matriz X tal que $A + 3X = B$".

12. Dê exemplos de matrizes A e B tais que $A \neq B$ e:

    (a) $A^2 = -I$;
    (b) $A^2 = 0_{2\times 2}$ e $A \neq 0$;
    (c) $AB = 0_{2\times 2}$, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$;
    (d) $AB = 0_{2\times 2}$, com A e B sem elementos nulos;
    (e) A, C e D tais que $AC = AD$ e $C \neq D$.
    (f) A e B tais que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;
    (g) A e B tais que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

    Sugestão: procurar as condições gerais a satisfazer e depois construir os exemplos.

    (a) A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, (b) A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (c) A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (d) A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

    (e) A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, C= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, D= $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ (f)(g) A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

13. Seja $A = \begin{bmatrix} 2+i & \sqrt{2}+3i \\ 0 & 1-i \\ i & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{C})$. Determine matrizes reais A_1 e A_2 tais que $A = A_1 + iA_2$.

$A = \begin{bmatrix} 2+i & \sqrt{2}+3i \\ 0 & 1-i \\ i & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

14. Simplifique a expressão seguinte onde A, B e C representam matrizes quadradas com a mesma ordem,

$$A.(B+C) + B.(C-A) - (A+B).C.$$

AB-BA

15. Desenvolva a expressão $(A+B)^3$ no caso de:

(a) A e B serem matrizes de ordem n quaisquer.

(b) A e B serem comutáveis.

16. Seja

$$\mathcal{G} = \{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Mostre que quaisquer dois elementos de $\mathcal{G}$ comutam entre si.

(b) Mostre que $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow AB \in \mathcal{G}$.

17. Verifique que a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

18. Use a definição para calcular a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com $x, y \in \mathbb{R}$.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}, \; C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{xy} & \frac{1}{xy} \\ 0 & \frac{1}{y} & -\frac{1}{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. Sejam C uma matriz invertível e $A = CBC^{-1}$. Mostre que A é invertível se e só se B é invertível.

20. Dada uma matriz invertível A, mostre que toda a potência de A é também invertível.

21. Indique A^T no caso de A ser

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

22. Verifique se é válida a igualdade $AA^T = A^T A$, para qualquer matriz A.

23. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que

    (a) As matrizes $A + A^T$ e AA^T são simétricas;

    (b) Se as matrizes A e B são simétricas, então

        i) As matrizes $A + B$ e αA são simétricas;

        ii) A matriz AB é simétrica se e só se $AB = BA$.

24. Diga quais das seguintes matrizes são simétricas, quais são ortogonais, quais são hermíticas e quais são unitárias:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}$;

    (c) $C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$; (d) $D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

    A, B, C são hermíticas. C unitária, D ortogonal.

25. Para cada das seguintes matrizes obtenha uma matriz equivalente por linhas em forma de escada (não reduzida) e a matriz equivalente por linhas em forma de escada reduzida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_n.$$

26. Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

    Determine a característica de A_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

    3, 3, 2, 3.

27. Discuta, segundo o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, a característica da matriz

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

    $\alpha = 2, C(B) = 3, \ \ \alpha \neq 2, C(B) = 4.$