ÁLGEBRA LINEAR

Exercícios - Sistemas de Equações Lineares

1. Considere o seguinte sistema de quatro equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) $(-1, 1, 0, 0)$ é solução do sistema; (V)

(b) $(2, -1, 1, 0)$ é solução do sistema; (F)

(c) $(-3, 2, 1, 0)$ é solução do sistema; (V)

(d) para quaisquer a, $b \in \mathbb{R}$, $a(-1, 1, 0, 0) + b(-3, 2, 1, 0)$ é solução do sistema; (F)

(e) para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $(-1, 1, 0, 0) + a\big((-3, 2, 1, 0) - (-1, 1, 0, 0)\big)$ é solução do sistema; (V)

(f) o conjunto de soluções do sistema é um conjunto finito. (F)

2. Resolva utilizando o método de Gauss e classifique os seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x_1,x_2,x_3, x_4:

a) $$\begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_3 - x_4 = -1 \end{cases};$$

$$[\text{Ab}]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3L_1+L_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)L_3+L_4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/3)L_4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 4, 1, -1)$

b) $$\begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$[\mathrm{Ab}]=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -1\end{bmatrix}$ (ver o processo acima)

c) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 = & 2\\ -2x_1 & & & -x_4 = & 0\\ x_1 & & +3x_3 & -x_4 = & -1\end{cases}$;

$[\mathrm{Ab}]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 3 & -1 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{2L_1+L_2, L_3-L1} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -2 & 2 & -2 & -3\end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 2 & -2 & -3\\ 0 & 4 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{2L_2 + L_3} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 2 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 6 & -3 & -2\end{bmatrix}$

$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 = & 2\\ & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 = & -3\\ & & 6x_3 & -3x_4 = & -2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 2-x_4\\ & -2x_2 & +2x_3 & = & -3+2x_4\\ & & 6x_3 & = & -2+3x_4\end{cases} \overset{x_4=\alpha}{\Longleftrightarrow}$

$\begin{cases} x_1 & = & -\frac{1}{2}\alpha\\ x_2 & = & \frac{7}{6}-\frac{1}{2}\alpha\\ x_3 & = & -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\alpha\\ x_4 & = & \alpha\end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\frac{1}{2}\alpha, \frac{7}{6}-\frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\alpha, \alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$

d) $\begin{cases} 2x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & = & 0\\ x_1 & -x_2 & & & = & 3\\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & -1\\ -x_1 & & -3x_3 & -2x_4 & = & -2\end{cases}$;

$[\mathrm{Ab}]=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3\\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2\end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2\end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_1 + L_2, 2L_1 + L_3, L_1 + L_4}$

$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 2 & 2 & -6\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5\\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{(1/2)L_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5\\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + L_3, L_2 + L_4} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{L_3 + L_4} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$

$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & = & 3\\ & x_2 & +x_3 & +x_4 = & -3\\ & & 2x_3 & +x_4 = & 2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & & = & 3\\ & x_2 & +x_3 & = & -3-x_4\\ & & 2x_3 & = & 2-x_4\end{cases} \overset{x_4=\alpha}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 & = & -1-\frac{1}{2}\alpha\\ x_2 & = & -4-\frac{1}{2}\alpha\\ x_3 & = & 1-\frac{1}{2}\alpha\\ x_4 & = & \alpha\end{cases},$

$\alpha \in \mathbb{R}.$

$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-1-\frac{1}{2}\alpha,-4-\frac{1}{2}\alpha,1-\frac{1}{2}\alpha,\alpha),\qquad \alpha\in\mathbb{R}.$

e) $\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & = & 1\\ x_1 & -x_2 & & & = & 3\\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & -1\\ -x_1 & & -3x_3 & -2x_4 & = & -2 \end{array}\right.$;

$[\mathrm{Ab}]=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3\\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+l_3, L_2+L_4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+L_4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$C(A)\neq C(Ab)$ sistema impossível.

f) $\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & = & 0\\ x_1 & -x_2 & & & = & 0\\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 0\\ -x_1 & & -3x_3 & -2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$.

$[\mathrm{Ab}]=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+l_3, L_2+L_4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+L_4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/2)L_1}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & +x_3 & +x_4 & = & 0\\ & -x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 0\\ & & 2x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & +x_3 & = & -x_4\\ & x_2 & +x_3 & = & -x_4\\ & & 2x_3 & = & -x_4 \end{array}\right. \overset{x_4=\alpha}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & -\frac{1}{2}\alpha\\ x_2 & = & -\frac{1}{2}\alpha\\ x_3 & = & -\frac{1}{2}\alpha\\ x_4 & = & \alpha \end{array}\right.,$

$\alpha\in\mathbb{R}.$

$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-\frac{1}{2}\alpha,\ -\frac{1}{2}\alpha,\ -\frac{1}{2}\alpha,\alpha),\qquad \alpha\in\mathbb{R}.$

3. Classifique os sistemas de equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4:

(a) $\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & 0\\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1\\ -x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 0\\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -1\\ x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = & 0\\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$,

$$[\text{Ab}]=\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0\\1&1&-1&1&1\\-1&1&0&1&0\\-1&2&-1&-1&-1\\1&1&0&2&0\\1&-1&-1&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-L_1+L_2,L_1+l_3,L_1+L_4,-L_1+L_5,-L_1+L_6}\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0\\0&1&0&0&1\\0&1&-1&2&0\\0&2&-2&0&-1\\0&1&1&1&0\\0&-1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_2+L_3,-2L_2+l_4,-L_2+L_5,L_2+L_6}\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&-1&2&-1\\0&0&-2&0&-3\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-2L_3+l_4,L_3+L_5}\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-4&-1\\0&0&0&3&-2\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4\leftrightarrow L_6}\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&3&-2\\0&0&0&-4&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{-3L_4+l_5,4L_4+L_6}\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&-5\\0&0&0&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{-(-1/5)l_5,(1/3)L_6}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-L5+L_6}\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$ $C(A)\neq C(Ab)$ sistema impossível.

(b) $$\begin{cases}2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & & = & 0\\ 6x_1 & +5x_2 & -3x_3 & +8x_4 & = & 0\\ & 2x_2 & +2x_3 & +6x_4 & = & 0\end{cases}.$$

$$[\text{Ab}]=\begin{bmatrix}2&-2&3&0\\6&5&-3&8\\0&2&2&6\end{bmatrix}\xrightarrow{-3L_1+l_2}\begin{bmatrix}2&-2&3&0\\0&11&-12&8\\0&2&2&6\end{bmatrix}\xrightarrow{L_4\leftrightarrow L_6}\begin{bmatrix}2&-2&3&0\\0&2&2&6\\0&11&-12&8\end{bmatrix}\xrightarrow{(1/2)L_2}$$

$$\begin{bmatrix}2&-2&3&0\\0&1&1&3\\0&11&-12&8\end{bmatrix}\xrightarrow{-11L_2+L_3}\begin{bmatrix}2&-2&3&0\\0&1&1&3\\0&0&-23&-25\end{bmatrix}$$

$C(A)=(Ab)<n=4$ possível e indeterminando.

4. Utilizando o método de Gauss ou de Gauss-Jordan, determine o conjunto de soluções dos seguintes sistemas homogéneos de equações lineares e de coeficientes reais:

a) $\left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +\ x_2 & -3x_3 & +\ x_4 & -5x_5 & = & 0 \\ & x_2 & & +\ x_4 & +3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & +2x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & +\ x_2 & +\ x_3 & +\ x_4 & +3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +2x_4 & -2x_5 & = & 0 \end{array}\right.$;

$$[Ab]=\begin{bmatrix}1&1&-3&1&-5\\0&1&0&1&3\\2&0&2&0&0\\1&1&1&1&3\\2&2&-2&2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{(1/2)L_3,l(1/2)_5}\begin{bmatrix}1&1&-3&1&-5\\0&1&0&1&3\\1&0&1&0&0\\1&1&1&1&3\\1&1&-1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{-L_1+L_3,-L_1+l_4,-L_1+L_5}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&-3&1&-5\\0&1&0&1&3\\0&-1&4&-1&5\\0&0&4&0&8\\0&0&2&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow{L_2+L_3}\begin{bmatrix}1&1&-3&1&-5\\0&1&0&1&3\\0&0&4&0&8\\0&0&4&0&8\\0&0&2&0&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&-3&1&-5\\0&1&0&1&3\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & -3x_3 & +x_4-5x_5= \ 0 \\ & x_2 & & +x_4+3x_5= \ 0 \\ & & x_3 & +2x_5= \ 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lllcl} x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & -x_4+5x_5 \\ & x_2 & & = & -x_4-3x_5 \\ & & x_3 & = & -2x_5 \end{array}\right. .$$

(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=$(2\alpha,-\beta-3\alpha,-2\alpha,\beta,\alpha),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

b) $\left\{\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & & +\ x_3 & -\ x_4 & +\ x_5 & & = & 0 \\ & & x_3 & +\ x_4 & -\ x_5 & +2x_6 & = & 0 \\ x_1 & & +4x_3 & +2x_4 & +\ x_5 & +3x_6 & = & 0 \\ & x_2 & +\ x_3 & +\ x_4 & +\ x_5 & & = & 0 \\ x_1 & & +\ x_3 & +\ x_4 & +\ x_5 & & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & +4x_3 & & +\ x_5 & -\ x_6 & = & 0 \end{array}\right.$.

$$[Ab]=\begin{bmatrix}1&0&1&-1&1&0\\0&0&1&1&-1&2\\1&0&4&2&1&3\\0&1&1&1&1&0\\1&0&1&1&1&0\\1&2&4&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{-L_1+L_3,-L_1+l_5,-L_1+L_6}\begin{bmatrix}1&0&1&-1&1&0\\0&0&1&1&-1&2\\0&0&3&3&0&3\\0&1&1&1&1&0\\0&0&0&2&0&0\\0&2&3&1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2L_4+L_6,(1/3)L_3,(1/2)L_5}\begin{bmatrix}1&0&1&-1&1&0\\0&0&1&1&-1&2\\0&0&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&-1&-2&-1\end{bmatrix}\overset{L_2\longleftrightarrow L_4}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&1&-1&1&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&1&1&-1&2\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&-1&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_3+L_4,-L_1+l_6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/2)L_6,L_4\longleftrightarrow\ l_5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_4+l_6,L_5+L_6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$C(A) = C(Ab) = n = 6$, possível e determinando, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$.

5. Utilizando o método de Gauss-Jordan, resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

$$[\mathrm{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 18 \\ 1 & 0 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4L_1+l_2,-L_1+L_3,-2L_11+L_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3L_3,-2L_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -15 & -24 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xRightarrow{L_2+l_3,L_2+L_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/2)L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_3+l_2,L_3+L_1} (Jordan) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/3)L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (x, y, z) = (4, 1, 2).$$

$C(A) = n = 3$, $(0, 0, 0)$ é unica solução do $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

$$[\text{Ab}]=\begin{bmatrix}2&1&0&0&3\\1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&-1&0\end{bmatrix}\overset{L_1\longleftrightarrow L_2}{}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\2&1&0&0&3\\0&1&1&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-2L_1+L_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&3&0&2&7\\0&1&1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2\longleftrightarrow L_3}{}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&-1&0\\0&3&0&2&7\end{bmatrix}\xrightarrow{-3L_2+L_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&-1&0\\0&0&-3&5&7\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1/3)L_3}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&-1&0\\0&0&1&-\frac{5}{3}&-\frac{7}{3}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_3+L_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&0&\frac{2}{3}&\frac{7}{3}\\0&0&1&-5/3&-7/3\end{bmatrix}\xrightarrow{L_2+L_1}\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{2}{3}&\frac{7}{3}\\0&0&1&-5/3&-7/3\end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases}x\qquad\qquad -\frac{1}{3}w = \frac{1}{3}\\ \qquad y\qquad +\frac{2}{3}w = \frac{7}{3}\\ \qquad\qquad z\ -\frac{5}{3}w = -\frac{7}{3}\end{cases}$$

A solução geral é $(x, y, z, w) = (\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\alpha, \frac{7}{3}-\frac{2}{3}\alpha, -\frac{7}{3}+\frac{5}{3}\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

A solução do $\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&-1&0&-1\\0&1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$:

$(x, y, z, w) = (\frac{1}{3}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \frac{5}{3}\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $\begin{bmatrix}4&2&0\\2&0&2\\2&3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}4&2&0\\2&0&2\\2&3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

1. $[\text{Ab}]=\begin{bmatrix}4&2&0&4\\2&0&2&1\\2&3&-4&2\end{bmatrix}\xrightarrow{(1/2)L_1}\begin{bmatrix}2&1&0&2\\2&0&2&1\\2&3&-4&2\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{-L_1+L_2,\ -L_1+L_3}\begin{bmatrix}2&1&0&2\\0&-1&2&-1\\0&2&-4&0\end{bmatrix}\xrightarrow{2L_2+L_3}\begin{bmatrix}2&1&0&2\\0&-1&2&-1\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

$C(A) = 2 \neq C(Ab) = 3$, impossível.

2. $[\text{A}]=\begin{bmatrix}4&2&0\\2&0&2\\2&3&-4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}x&=&-\alpha\\y&=&2\alpha\\z&=&\alpha\end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Sejam $Ax = 0$ um sistema determinado, de m equações lineares em n incógnitas, e B uma matriz coluna com m linhas. Mostre que o sistema $Ax = b$ ou é impossível ou é possível e determinado.

   $Ax = 0$ um sistema determinado, então, C(A)=n. Se $C(A) = C(Ab) = n$, o sistema $Ax = b$ é possível e determinado. Se $C(A) < C(Ab)$, o sistema $Ax = b$ é impossível.

7. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e de coefici-

entes reais cuja matriz simples é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e cuja matriz dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Resolva o sistema $Ax = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_1+L_2,\ -3L_1+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(x_1, x_2, x_3, x_4)=$(-\alpha + \beta, -\beta, \beta, \alpha)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) Verifique que $(-1, 1, 1, 2)$, é solução do sistema $Ax = b$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ Sim}$$

(c) Classifique o sistema $Ax = b$. (possível e indeterminando)

(d) Determine o conjunto das soluções do sistema $Ax = b$.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1 - \alpha + \beta, 1 - \beta, 1 + \beta, 2 + \alpha)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

8. Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}),\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \text{ e } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Resolva o sistema $Ax = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

C(A)=n=4, (0, 0, 0, 0) é solução unica.

(b) Verifique se $(-1, 3/2, -1/2, -1/2)$ é solução de $Ax = b$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ Sim}$$

(c) Determine o conjunto de soluções de $Ax = b$.

$(-1, 3/2, -1/2, -1/2)$ é solução unica de $Ax = b$.

9. Indique, caso exista, um sistema homogéneo com exatamente 2 equações lineares que seja equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Justifique.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, C(A)=3, não existe.

10. (a) Caso exista, construa um sistema de equações lineares, de coeficientes reais, de quatro equações a três incógnitas que seja:
    i. possível e determinado;
    ii. possível e indeterminado;
    iii. impossível.

    (b) Caso exista, construa um sistema de equações lineares, de coeficientes reais, de quatro equações a seis incógnitas que seja:
    i. possível e determinado;
    ii. possível e indeterminado;
    iii. impossível.

11. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, de coeficientes reais, nas incognitas x_1, x_2, x_3,

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +kx_2 & +6x_3 & = & 6 \\ -x_1 & +3x_2 & +(k-3)x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Determine o conjunto dos valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema é:

(a) impossível;
(b) possível determinado;
(c) possível indeteminado.

$$[\text{Ab}]= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_1+L_2,\ L_1+L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \longleftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(k+4)L_2\ +\ L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k(k+4) & -k \end{bmatrix}.$$

a: $k=-4$; $C(A)=2 \neq C(Ab)=3=n$, impossível;
b: $k \neq -4, 0$; $C(A)=C(Ab)=3=n$, possível determinado;
c: $k=0$; $C(A)=2=C(Ab)<n=3$, possível indeteminado.

12. Discuta o seguinte sistema de equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, em função do parâmetro μ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 1 & \mu & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \mu \end{bmatrix}.$$

$$[\text{ Ab}]= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu & 1 \\ 1 & \mu & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & \mu & -1-\mu & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \end{bmatrix} \overset{L_2 \longleftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & -1-\mu & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\mu L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & -1-\mu & -(1+\mu^2) \end{bmatrix} \xrightarrow{-1\times L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1+\mu & (1+\mu^2) \end{bmatrix}.$$

a: $\mu \neq -1$; $C(A) = 3 = C(Ab) = n$, possível determinado;

b: $\mu = -1$; $C(A) = 2 \neq C(Ab) = 3 = n$, impossível.

13. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas x_1, x_2, x_3,

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 1 \\ -x_1 & -\alpha x_2 & +x_3 & = & -1 \\ -x_1 & -x_2 & +(\alpha+1)x_3 & = & \beta-2 \end{cases}$$

Discuta o sistema, em função de α e β.

$$[\text{Ab}]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\alpha & 1 & -1 \\ -1 & -1 & (\alpha+1) & \beta-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+L_2,\ L_1+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\alpha+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta-1 \end{bmatrix}.$$

a: $\alpha \neq 0, 1$; $C(A) = 3 = C(Ab) = n$, possível determinado;

b: $\alpha = 1$; $C(A) = 2 = C(Ab) < n = 3$, possível indeterminado;

c: $\alpha = 0$; $\beta = 1$, $C(A) = 2 = C(Ab) < n = 3$, possível indeterminado;

d: $\alpha = 0$; $\beta \neq 1$, $C(A) = 2 \neq C(Ab) = n = 3$, impossíve.

14. Diga quais das seguintes matrizes reais são invertíveis e, nesse caso, determine a respetiva inversa

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, inversa: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$; não invertível

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$[\text{C I}]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_1+L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2L_3+L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\frac{1}{2})L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{2})L_2,(-1)L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

inversa da C: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; inversa: $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ inversa: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$;

f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_3, -3L_2+L_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_3+L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

não invertível.

g) $[1-(i-j)^2]_{\substack{i\,=\,1,2,3,4 \\ j\,=\,1,2,3,4}}$. $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não invertível

15. Sejam $A = [6-2(i+j)]_{\substack{i\,=\,1,2,3 \\ j\,=\,1,2,3}}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique se A é uma matriz simétrica.

   A= $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$ Sim

   (b) Verifique que B é invertível e calcule a inversa de B.

   $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, inversa: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

   (c) Determine a matriz X tal que $B \cdot (X + I_3) = A + C \cdot C^T$.

   $(X + I_3) = B^{-1}(A + C \cdot C^T)$, $X = B^{-1}(A + C \cdot C^T) - I_3$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) -$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4} \\ 7 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

16. Sejam $A = [-2+2(i-j)^2]_{\substack{i\,=\,1,2,3 \\ j\,=\,1,2,3}}$.

(a) Verifique se A é uma matriz simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Verifique que A é invertível e calcule a inversa.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ inversa: } \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

(c) Resolva o sistema $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$