Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Análise
2021/22

## Extremos locais e condicionados

1. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + 6xy + y^2 - 8x - 8y$.

   (a) Os pontos estacionários de $f$ são as soluções do sistema

   $$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 6y - 8 = 0 \\ 2y + 6x - 8 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

   (b) A função é de classe $C^\infty$ (em particular, é de classe $C^2$). Determinemos as derivadas parciais de segunda ordem da função $f$:

   | $(x,y)$ | $(1,1)$ |
   |---|---|
   | $f_{x^2} = 2$ | 2 |
   | $f_{xy} = 6$ | 6 |
   | $f_{y^2} = 2$ | 2 |

   Como

   $$\triangle_f(1,1) = \begin{vmatrix} f_{x^2}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ \\ f_{yx}(1,1) & f_{y^2}(1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -32 < 0\,,$$

   concluímos que $(1,1)$ é um ponto de sela.
   A função não tem máximos nem mínimos locais.

2. Determine, caso existam, os pontos de extremo locais das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

   Os pontos estacionários de $f$ são as soluções do sistema

   $$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

   Então $(0,0)$ é o único ponto estacionário de $f$.

   Como $f(x,y) > f(0,0) = 0$, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, concluímos que $(0,0)$ é um minimizante absoluto estrito de $f$.

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y$

   Os pontos estacionários de $f$ são as soluções do sistema

   $$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 4 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3 \end{array} \right.$$

   Então $(-2,3)$ é o único ponto estacionário de $f$.

   A função é de classe $C^\infty$ (em particular, é de classe $C^2$). Determinemos as derivadas parciais de segunda ordem da função $f$:

| $(x,y)$ | $(-2,3)$ |
|---|---|
| $f_{x^2}=2$ | $2$ |
| $f_{xy}=0$ | $0$ |
| $f_{y^2}=2$ | $2$ |

Como

$$\triangle_f(-2,3)=\begin{vmatrix} f_{x^2}(-2,3) & f_{xy}(-2,3) \\ f_{yx}(-2,3) & f_{y^2}(-2,3)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0\,,$$

e $f_{x^2}(-2,3)=2>0$, concluímos que $(-2,3)$ é um minimizante local de $f$.

(c) $f(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$

Os pontos estacionários de $f$ são as soluções do sistema

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 6x^2+y^2+10x=0 \\ 2xy+2y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases} x=-5/3 \\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases} x=-1 \\ y=2\end{cases}\vee\begin{cases} x=-1 \\ y=-2\end{cases}$$

Então, os pontos estacionários de $f$ são os pontos:
$A=(0,0)$, $B=(-5/3,0)$, $C=(-1,2)$ e $D=(-1,-2)$.

A função é de classe $C^\infty$ (em particular, é de classe $C^2$). Determinemos as derivadas parciais de segunda ordem da função $f$:

| $(x,y)$ | $(0,0)$ | $(-5/3,0)$ | $(-1,2)$ | $(-1,-2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_{x^2}=12x+10$ | $10$ | $-10$ | $-2$ | $-2$ |
| $f_{xy}=2y$ | $0$ | $0$ | $4$ | $-4$ |
| $f_{y^2}=2x+2$ | $2$ | $-4/3$ | $0$ | $0$ |

- Ponto $A=(0,0)$. Como

$$\triangle_f(0,0)=\begin{vmatrix} f_{x^2}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{y^2}(0,0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2\end{vmatrix}=20>0$$

  e $f_{x^2}(0,0)=10>0$, concluímos que $(0,0)$ é um minimizante local de $f$.

- Ponto $B=(-5/3,0)$. Como

$$\triangle_f(-5/3,0)=\begin{vmatrix} f_{x^2}(-5/3,0) & f_{xy}(-5/3,0) \\ f_{yx}(-5/3,0) & f_{y^2}(-5/3,0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4/3\end{vmatrix}=40/3>0$$

  e $f_{x^2}(0,0)=-10<0$, concluímos que $(-5/3,0)$ é um maximizante local de $f$.

- Ponto $C=(-1,2)$. Como

$$\triangle_f(-1,2)=\begin{vmatrix} f_{x^2}(-1,2) & f_{xy}(-1,2) \\ f_{yx}(-1,2) & f_{y^2}(-1,2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0\end{vmatrix}=-16<0\,,$$

  concluímos que $(-1,2)$ é um ponto de sela de $f$.

- Ponto $D = (-1,-2)$. Como

$$\triangle_f(-1,-2) = \begin{vmatrix} f_{x^2}(-1,-2) & f_{xy}(-1,-2) \\ \\ f_{yx}(-1,-2) & f_{y^2}(-1,-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0\,,$$

concluímos que $(-1,-2)$ é um ponto de sela de $f$.

(d) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

Os pontos estacionários de $f$ são as soluções do sistema

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4/3 \\ y = 2/3 \end{cases}$$

Então, os pontos estacionários de $f$ são os pontos: $A = (4,2)$ e $B = (4/3, 2/3)$.

A função é de classe $C^\infty$ (em particular, é de classe $C^2$). Determinemos as derivadas parciais de segunda ordem da função $f$:

| $(x,y)$ | $(4,2)$ | $(4/3,2/3)$ |
|---|---|---|
| $f_{x^2} = 2$ | $2$ | $2$ |
| $f_{xy} = -4$ | $-4$ | $-4$ |
| $f_{y^2} = 6y$ | $12$ | $4$ |

- Ponto $A = (4,2)$. Como

$$\triangle_f(4,2) = \begin{vmatrix} f_{x^2}(4,2) & f_{xy}(4,2) \\ \\ f_{yx}(4,2) & f_{y^2}(4,2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

e $f_{x^2}(4,2) = 2 > 0$, concluímos que $(4,2)$ é um minimizante local de $f$.

- Ponto $B = (4/3, 2/3)$. Como

$$\triangle_f(4/3,2/3) = \begin{vmatrix} f_{x^2}(4/3,2/3) & f_{xy}(4/3,2/3) \\ \\ f_{yx}(4/3,2/3) & f_{y^2}(4/3,2/3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -8 < 0\,,$$

concluímos que $(4/3, 2/3)$ é um ponto de sela de $f$.

(e) $f(x,y) = xy\,(1 - x - y)$

Os pontos estacionários de $f$ são as soluções do sistema

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

Então, os pontos estacionários de $f$ são os pontos:
$A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$ e $D = (1/3, 1/3)$.

A função é de classe $C^\infty$ (em particular, é de classe $C^2$). Determinemos as derivadas parciais de segunda ordem da função $f$:

| $(x,y)$ | $(0,0)$ | $(1,0)$ | $(0,1)$ | $(1/3,1/3)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_{x^2}=-2y$ | $0$ | $0$ | $-2$ | $-2/3$ |
| $f_{xy}=1-2x-2y$ | $1$ | $-1$ | $-1$ | $-1/3$ |
| $f_{y^2}=-2x$ | $0$ | $-2$ | $0$ | $-2/3$ |

- Ponto $A=(0,0)$. Como

$$\triangle_f(0,0)=\begin{vmatrix} f_{x^2}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{y^2}(0,0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0\,,$$

  concluímos que $(0,0)$ é um ponto de sela de $f$.

- Ponto $B=(1,0)$. Como

$$\triangle_f(1,0)=\begin{vmatrix} f_{x^2}(1,0) & f_{xy}(1,0) \\ f_{yx}(1,0) & f_{y^2}(1,0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2\end{vmatrix}=-1<0\,,$$

  concluímos que $(1,0)$ é um ponto de sela de $f$.

- Ponto $C=(0,1)$. Como

$$\triangle_f(0,1)=\begin{vmatrix} f_{x^2}(0,1) & f_{xy}(0,1) \\ f_{yx}(0,1) & f_{y^2}(0,1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1<0\,,$$

  concluímos que $(0,1)$ é um ponto de sela de $f$.

- Ponto $D=(1/3,1/3)$. Como

$$\triangle_f(1/3,1/3)=\begin{vmatrix} f_{x^2}(1/3,1/3) & f_{xy}(1/3,1/3) \\ f_{yx}(1/3,1/3) & f_{y^2}(1/3,1/3)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3\end{vmatrix}=1/3>0\,,$$

  e $f_{x^2}(1/3,1/3)=-2/3<0$, concluímos que $(1/3,1/3)$ é um maximizante local de $f$.

(f) $f(x,y)=e^x\cos y$

Os pontos estacionários de $f$ são as soluções do sistema

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} e^x\cos y=0\\ -e^x\operatorname{sen} y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Então, $f$ não tem pontos estacionários. Consequentemente, como $f$ é diferenciável, concluímos que $f$ não tem máximos nem mínimos locais.

(g) $f(x,y)=x\cos y$

Os pontos estacionários de $f$ são as soluções do sistema

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \cos y=0\\ -x\operatorname{sen} y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=0\end{array}\right.$$

Então, os pontos estacionários de $f$ são os pontos: $(0,\frac{\pi}{2}+k\pi)\,,\quad k\in\mathbb{Z}$.

A função é de classe $C^\infty$ (em particular, é de classe $C^2$). Determinemos as derivadas parciais de segunda ordem da função $f$:

| |
|---|
| $f_{x^2}(x,y)=0$ |
| $f_{xy}(x,y)=-\text{sen}\, y$ |
| $f_{y^2}(x,y)=-x\cos y$ |

Como,

$$\triangle_f(x,y)=\begin{vmatrix} f_{x^2}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ \\ f_{yx}(x,y) & f_{y^2}(x,y) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -\text{sen}\, y \\ \\ -\text{sen}\, y & -x\cos y \end{vmatrix}=-\text{sen}^2 y<0\,,$$

para todo $y=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$, concluímos que todos os pontos estacionários são pontos de sela.

(h) $f(x,y)=5-x^2-y^2$

Os pontos estacionários de $f$ são as soluções do sistema

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -2x=0 \\ -2y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Então $(0,0)$ é o único ponto estacionário de $f$.

Como $f(x,y)<f(0,0)=5$, para todo o $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, concluímos que $(0,0)$ é um maximizante absoluto estrito de $f$.

(i) $f(x,y)=\log(x^2+y^2+1)$

Os pontos estacionários de $f$ são as soluções do sistema

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{2x}{x^2+y^2+1}=0 \\ \frac{2y}{x^2+y^2+1}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Então $(0,0)$ é o único ponto estacionário de $f$.

Como $f(x,y)>f(0,0)=0$, para todo o $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, concluímos que $(0,0)$ é um minimizante absoluto estrito de $f$.

(j) $f(x,y)=2x^3-y^3-24x+75y+7$

Os pontos estacionários de $f$ são as soluções do sistema

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 6x^2-24=0 \\ -3y^2+75=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}\vee\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}\vee\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}\vee\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$$

Então, os pontos estacionários de $f$ são os pontos:
$A=(2,5)$, $B=(2,-5)$, $C=(-2,5)$ e $D=(-2,-5)$.

A função é de classe $C^\infty$ (em particular, é de classe $C^2$). Determinemos as derivadas parciais de segunda ordem da função $f$:

| $(x,y)$ | $(2,5)$ | $(2,-5)$ | $(-2,5)$ | $(-2,-5)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_{x^2}=12x$ | $24$ | $24$ | $-24$ | $-24$ |
| $f_{xy}=0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $f_{y^2}=-6y$ | $-30$ | $30$ | $-30$ | $30$ |

- Ponto $A = (2,5)$. Como

$$\triangle_f(2,5) = \begin{vmatrix} f_{x^2}(2,5) & f_{xy}(2,5) \\ \\ f_{yx}(2,5) & f_{y^2}(2,5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ \\ 0 & -30 \end{vmatrix} < 0\,,$$

concluímos que $(2,5)$ é um ponto de sela de $f$.

- Ponto $B = (2,-5)$. Como

$$\triangle_f(2,-5) = \begin{vmatrix} f_{x^2}(2,-5) & f_{xy}(2,-5) \\ \\ f_{yx}(2,-5) & f_{y^2}(2,-5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ \\ 0 & 30 \end{vmatrix} > 0$$

e $f_{x^2}(2,-5) > 0$, concluímos que $(2,-5)$ é um minimizante local de $f$.

- Ponto $C = (-2,5)$. Como

$$\triangle_f(-2,5) = \begin{vmatrix} f_{x^2}(-2,5) & f_{xy}(-2,5) \\ \\ f_{yx}(-2,5) & f_{y^2}(-2,5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -24 & 0 \\ \\ 0 & -30 \end{vmatrix} > 0\,,$$

e $f_{x^2}(-2,5) < 0$, concluímos que $(-2,5)$ é um maximizante local de $f$.

- Ponto $D = (-2,-5)$. Como

$$\triangle_f(-2,-5) = \begin{vmatrix} f_{x^2}(-2,-5) & f_{xy}(-2,-5) \\ \\ f_{yx}(-2,-5) & f_{y^2}(-2,-5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -24 & 0 \\ \\ 0 & 30 \end{vmatrix} < 0$$

concluímos que $(-2,-5)$ é um ponto de sela de $f$.

3. Determine, caso existam, os valores máximo e mínimo das funções dadas, sujeitas à(s) condição(ões) indicada(s).

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$;  $x^2 + y^2 = 1$

Seja $\Sigma = g^{-1}(\{1\})$ onde $g$ é a função definida por $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,. \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$

- Os pontos singulares de $\Sigma$ são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) = (0,0) \\ (x,y) \in \Sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Como o sistema é impossível, $\Sigma$ não tem pontos singulares.

- Como todos os pontos de $\Sigma$ são regulares, os possíveis extremantes de $f$ em $\Sigma$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ (x,y) \in \Sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ -2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

ou seja os pontos $A = (0,1)$, $B = (0,-1)$, $C = (1,0)$ e $D = (-1,0)$. Nestes pontos a função $f$ toma os valores

$$f(A) = f(B) = -1 \ \text{ e } \ f(C) = f(D) = 1\,.$$

Como $\Sigma$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ e $f$ é contínua, o Teorema de Weierstrass garante que $f$ atinge um valor máximo e um valor mínimo em $\Sigma$. Então:

$$\max f_{|\Sigma} = f(C) = f(D) = 1 \ \text{ e } \ \min f_{|\Sigma} = f(A) = f(B) = -1\,.$$

(b) $f(x,y) = 2x + y;\quad x^2 + 4y^2 = 1$

Seja $\Sigma = g^{-1}(\{1\})$ onde $g$ é a função definida por $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+4y^2 \end{array}$.

- Os pontos singulares de $\Sigma$ são as soluções do sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla g(x,y) = (0,0) \\ (x,y) \in \Sigma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 8y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{array}\right.$$

Como o sistema é impossível, $\Sigma$ não tem pontos singulares.

- Como todos os pontos de $\Sigma$ são regulares, os possíveis extremantes de $f$ em $\Sigma$ são as soluções do sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ (x,y) \in \Sigma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 = \lambda 2x \\ 1 = \lambda 8y \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{4\sqrt{17}}{17} \\ y = \frac{\sqrt{17}}{34} \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{4\sqrt{17}}{17} \\ y = -\frac{\sqrt{17}}{34} \end{array}\right.$$

ou seja os pontos $A = (\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{34})$ e $B = (-\frac{4\sqrt{17}}{17}, -\frac{\sqrt{17}}{34})$. Nestes pontos a função $f$ toma os valores

$$f(A) = \frac{\sqrt{17}}{2} \ \text{ e } \ f(B) = -\frac{\sqrt{17}}{2}\,.$$

Como $\Sigma$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ e $f$ é contínua, o Teorema de Weierstrass garante que $f$ atinge um valor máximo e um valor mínimo em $\Sigma$. Então:

$$\max f_{|\Sigma} = f(A) = \frac{\sqrt{17}}{2} \ \text{ e } \ \min f_{|\Sigma} = f(B) = -\frac{\sqrt{17}}{2}\,.$$

(c) $f(x,y) = xy;\quad 9x^2 + y^2 = 4$

Seja $\Sigma = g^{-1}(\{4\})$ onde $g$ é a função definida por $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 9x^2+y^2 \end{array}$.

- Os pontos singulares de $\Sigma$ são as soluções do sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla g(x,y) = (0,0) \\ (x,y) \in \Sigma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 18x = 0 \\ 2y = 0 \\ 9x^2 + y^2 = 4 \end{array}\right.$$

Como o sistema é impossível, $\Sigma$ não tem pontos singulares.

- Como todos os pontos de $\Sigma$ são regulares, os possíveis extremantes de $f$ em $\Sigma$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ (x,y) \in \Sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda 18x \\ x = \lambda 2y \\ 9x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

ou seja os pontos $A = (\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2})$, $B = (\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2})$, $C = (-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2})$ e $D = (-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2})$. Nestes pontos a função $f$ toma os valores

$$f(A) = f(D) = \frac{2}{3} \text{ e } f(B) = f(C) = -\frac{2}{3}.$$

Como $\Sigma$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ e $f$ é contínua, o Teorema de Weierstrass garante que $f$ atinge um valor máximo e um valor mínimo em $\Sigma$. Então:

$$\max f_{|\Sigma} = f(A) = f(D) = \frac{2}{3} \text{ e } \min f_{|\Sigma} = f(B) = f(C) = -\frac{2}{3}.$$

(d) $f(x,y,z) = x + 3y + 5z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

Seja $\Sigma = g^{-1}(\{1\})$ onde $g$ é a função definida por $\begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x^2+y^2+z^2 \end{array}$

- Os pontos singulares de $\Sigma$ são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \nabla g(x,y,z) = (0,0,0) \\ (x,y,z) \in \Sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Como o sistema é impossível, $\Sigma$ não tem pontos singulares.

- Como todos os pontos de $\Sigma$ são regulares, os possíveis extremantes de $f$ em $\Sigma$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ (x,y,z) \in \Sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda 2x \\ 3 = \lambda 2y \\ 5 = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{35}}{35} \\ y = 3\frac{\sqrt{35}}{35} \\ z = 5\frac{\sqrt{35}}{35} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{35}}{35} \\ y = -3\frac{\sqrt{35}}{35} \\ z = -5\frac{\sqrt{35}}{35} \end{cases}$$

ou seja os pontos $A = (\frac{\sqrt{35}}{35}, \frac{3\sqrt{35}}{35}, \frac{5\sqrt{35}}{35})$ e $B = (\frac{-\sqrt{35}}{35}, -\frac{3\sqrt{35}}{35}, -\frac{5\sqrt{35}}{35})$. Nestes pontos a função $f$ toma os valores

$$f(A) = \sqrt{35} \text{ e } f(B) = -\sqrt{35}.$$

Como $\Sigma$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ e $f$ é contínua, o Teorema de Weierstrass garante que $f$ atinge um valor máximo e um valor mínimo em $\Sigma$. Então:

$$\max f_{|\Sigma} = f(A) = \sqrt{35} \text{ e } \min f_{|\Sigma} = f(B) = -\sqrt{35}.$$

(e) $f(x,y,z) = x + 2y; \quad x + y + z = 1,\ y^2 + z^2 = 4.$

Sejam

$\Sigma_1 = g_1^{-1}(\{1\})$ onde $g_1$ é a função definida por $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}.$

e

$\Sigma_2 = g_2^{-1}(\{4\})$ onde $g_2$ é a função definida por $g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & y^2+z^2 \end{array}.$

- Temos que $\nabla g_1(x,y,z) = (1,1,1)$ e $\nabla g_2(x,y,z) = (0,2y,2z)$. Então os vetores $\nabla g_1(x,y,z)$ e $\nabla g_2(x,y,z)$ são linearmente independentes para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

- Os possíveis extremantes de $f$ em $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z) \\ (x,y,z) \in \Sigma_1 \\ (x,y,z) \in \Sigma_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda_1 \\ 2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 y \\ 0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 z \\ x+y+z = 1 \\ y^2+z^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{2} \\ z = -\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$$

ou seja os pontos $A = (1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $B = (1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Nestes pontos a função $f$ toma os valores

$$f(A) = 1 + 2\sqrt{2} \text{ e } f(B) = 1 - 2\sqrt{2}.$$

Como $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ e $f$ é contínua, o Teorema de Weierstrass garante que $f$ atinge um valor máximo e um valor mínimo em $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Então:

$$\max f_{|\Sigma_1 \cap \Sigma_2} = f(A) = 1 + 2\sqrt{2} \text{ e } \min f_{|\Sigma_1 \cap \Sigma_2} = f(B) = 1 - 2\sqrt{2}.$$

(f) $f(x,y,z) = 3x - y - 3z; \quad x + y - z = 0,\ x^2 + 2z^2 = 1$

Sejam

$\Sigma_1 = g_1^{-1}(\{0\})$ onde $g_1$ é a função definida por $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y-z \end{array}.$

e

$\Sigma_2 = g_2^{-1}(\{1\})$ onde $g_2$ é a função definida por $g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2+2z^2 \end{array}.$

- Temos que $\nabla g_1(x,y,z) = (1,1,-1)$ e $\nabla g_2(x,y,z) = (2x,0,4z)$. Então os vetores $\nabla g_1(x,y,z)$ e $\nabla g_2(x,y,z)$ são linearmente independentes para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

- Os possíveis extremantes de $f$ em $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z) \\ (x,y,z) \in \Sigma_1 \\ (x,y,z) \in \Sigma_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 x \\ -1 = \lambda_1 \\ -3 = -\lambda_1 + 4\lambda_2 z \\ x+y-z = 0 \\ x^2+2z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ z = -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ z = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

ou seja os pontos $A = (\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$ e $B = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6})$. Nestes pontos a função $f$ toma os valores

$$f(A) = 2\sqrt{6} \text{ e } f(B) = -2\sqrt{6}\,.$$

Como $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ e $f$ é contínua, o Teorema de Weierstrass garante que $f$ atinge um valor máximo e um valor mínimo em $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Então:

$$\max f_{|\Sigma_1 \cap \Sigma_2} = f(A) = 2\sqrt{6} \text{ e } \min f_{|\Sigma_1 \cap \Sigma_2} = f(B) = -2\sqrt{6}\,.$$

4. Determine os três números positivos, cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

   Queremos maximizar a função $f(x,y,z) = x.y.z, \quad x,y,z \in \mathbb{R}^+$, condicionada à restrição $x + y + z = 100$.

   Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtemos que $x = y = z = \frac{100}{3}$.

5. Determine os três números positivos, cujo produto é 8 e cuja soma é mínima.

   Queremos minimizar a função $f(x,y,z) = x+y+z, \quad x,y,z \in \mathbb{R}^+$, condicionada à restrição $x.y.z = 8$.

   Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtemos que $x = y = z = 2$.

6. Determine três números positivos, cuja soma é 13 tais que a soma dos seus quadrados seja mínima.

   Queremos minimizar a função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x,y,z \in \mathbb{R}^+$, condicionada à restrição $x + y + z = 13$.

   Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtemos que $x = y = z = \frac{13}{3}$.

7. Determine o ponto do plano $2x - y + z = 1$ mais próximo do ponto $(-4, 1, 3)$.

   Queremos minimizar a função que dá a distância de um ponto $(x,y,z)$ ao ponto $(-4,1,3)$,

   $$d(x,y,z) = \sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}\,,$$

   condicionada à restrição $2x + y + z = 1$. De modo equivalente, podemos minimizar o quadrado da distância, isto é, minimizar a função

   $$f(x,y,z) = (x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2\,,$$

   condicionada à restrição $2x + y + z = 1$.

   Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtemos que $x = -\frac{5}{3}$, $y = -\frac{1}{6}$ e $z = \frac{25}{6}$.