ÁLGEBRA LINEAR

Exercícios - Valores e Vetores Próprios

1. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Determine os valores próprios de A. (Sugestão: calcule $|A - \lambda I_3|$ usando o teorema de Laplace e escolha a primeira coluna.)

Tem-se

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 4 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1-\lambda & 4 \end{bmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda) - (-4 - 2(-1-\lambda))$$
$$= -(\lambda - 1)\left(3\lambda + \lambda^2 + 4\right)$$
$$= -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 4.$$

O polinómio característico de A é $-\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 4$. As raizes do polinómio característico são: 1, $-\frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{3}{2}$. Uma vez que $-\frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}i\sqrt{7} - \frac{3}{2}$ não são reais, apenas o real 1 é valor próprio de A.

(b) Determine os vetores próprios associados aos valores próprios de A.

Conjunto de vetores próprios de A associados ao valor próprio 1:

Dado $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio 1 se e só se $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Tem-se

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow (A - 1I_3)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = 2z \end{cases}$$

Assim, o conjunto de vetores próprios de A associados ao valor próprio 1 é

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x = -3z, y = 2z \right\} \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ = &\left\{ \begin{bmatrix} -3z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ = &\left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

2. Determine os valores próprios e os vetores próprios das matrizes de $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   Seja A a matriz indicada. Valores próprios de A: -1,1, 1.

   Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio -1:

   $\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

   Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio 1:

   $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   Seja A a matriz indicada. Valores próprios de A: -1,1, 1.

   Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio -1:

   $\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

   Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio 1:

   $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

3. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Verifique que $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio.

Tem-se $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 2.

(b) Determine os valores próprios de A.

Valores próprios de A: $\sqrt{2}+1$, -2, $1-\sqrt{2}$.

(c) Determine os vetores próprios de A.

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio $\sqrt{2}+1$:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio -2:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio $1-\sqrt{2}$:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores próprios de A.

Valores próprios de A: $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -1$

(b) Mostre que se λ é um valor próprio de A então λ^2 é um valor próprio de A^2.

Seja λ um valor próprio de A. Então, existe $X \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tal que $AX = \lambda X$.

Logo,

$$A^2 X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda\lambda X = \lambda^2 X.$$

Portanto, λ^2 é valor próprio de A^2.

(c) Determine os vetores próprios de A.

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio $-\sqrt{5}$:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio -1:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio $\sqrt{5}$:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(d) Mostre que todo o vetor próprio de A é um vetor próprio de A^2.

Seja X um vetor próprio de A. Então $X \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $AX = \lambda X$.

Logo,

$$A^2 X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda\lambda X = \lambda^2 X.$$

Portanto, X é um vetor próprio de A^2 (associado ao valor próprio λ^2).

5. Seja $A = [a_{ij}] \in M_{2\times 2}$. Mostre que o polinómio característico de A, na variável λ, se pode escrever na forma

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}\right) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} \\ = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} &= \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A). \end{aligned}$$

6. Seja $A \in M_{2\times 2}$ tal que tr(A)=2 e det(A)=0. Determine os valores prprios de A.
   Sugesto: Use o resultado apresentado no exerccio anterior.

$$\det(A-\lambda I)=0 \iff \lambda^2-2\lambda=0 \iff \lambda(\lambda-2)=0 \iff \lambda=0 \vee \lambda=2.$$

7. Determine a e b de modo que $(1,1)$ e $(1,0)$ sejam vetores próprios da matriz $\begin{bmatrix}1 & 1\\ a & b\end{bmatrix}$.

   Temos

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ a & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ a+b\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{a+b}{2}\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ a & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ a\end{bmatrix}.$$

   Para que o vetor $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ seja vetor próprio de A deve ser $a=0$ e teremos $\lambda=1$ como valor próprio correspondente. Se $\dfrac{a+b}{2}=1$, ou seja, se $b=2-a$, o vetor $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda=2$. Assim, deve ser $a=0$ e $b=2$ para que os dois vetores sejam ambos vetores próprios de A.

8. Uma matriz $A \in M_{n\times n}$ diz-se idempotente se $A^2=A$. Mostre que se λ é um valor próprio de uma matriz idempotente, então $\lambda=0$ ou $\lambda=1$.

   Seja λ um valor próprio de uma matriz idempotente A. Então, por definição, $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. Como $A=A^2$, equivale a dizer que

$$A^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}.$$

   Uma vez que, para qualquer matriz A,

$$A^2\boldsymbol{x}=A(A\boldsymbol{x})=A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x},$$

   vem

$$\lambda\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x} \iff (\lambda-\lambda^2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}.$$

   Como $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, deve ser $\lambda-\lambda^2=0$, ou seja, $\lambda=0$ ou $\lambda=1$.

9. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) se X é um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ e $k\in\mathbb{N}$, então X é vetor próprio da matriz A^k associado ao valor próprio λ^K;

   Afirmação verdadeira.

   Se X é um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ, então $AX=\lambda X$. Logo,

$$A^kX=A^{k-1}(AX)=A^{k-1}(\lambda X)=\lambda(A^{k-1}X)=...=\lambda\cdots\lambda X=\lambda^kX.$$

   Portanto, X é vetor próprio da matriz A^k associado ao valor próprio λ^K.

   (b) A é invertível se e só se 0 não é valor próprio de A;

   Afirmação verdadeira.

   A é invertível $\iff \det A\neq 0 \iff \det(A-0I)\neq 0 \iff$ 0 não é valor próprio de A.

(c) $|A| \neq 0$ se e só se 0 não é valor próprio de A;

Afirmação verdadeira.

$\det A \neq 0 \iff \det(A - 0I) \neq 0 \iff 0$ não é valor próprio de A.

(d) se A é invertível, então λ é valor próprio de A se e só se λ^{-1} é valor próprio de A^{-1};

Afirmação verdadeira.

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é invertível, então existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

e 0 não é valor próprio de A.

Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ é valor próprio de } A &\Leftrightarrow \text{existe } X \in \mathbb{R}^{n\times 1} \text{ tal que } X \neq 0 \text{ e } AX = \lambda X \\
&\Leftrightarrow \text{existe } X \in \mathbb{R}^{n\times 1} \text{ tal que } X \neq 0 \text{ e } A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X) \\
&\Leftrightarrow \text{existe } X \in \mathbb{R}^{n\times 1} \text{ tal que } X \neq 0 \text{ e } X = \lambda(A^{-1}X) \\
&\Leftrightarrow \text{existe } X \in \mathbb{R}^{n\times 1} \text{ tal que } X \neq 0 \text{ e } \lambda^{-1}X = A^{-1}X \\
&\Leftrightarrow \lambda^{-1} \text{ é valor próprio de } A^{-1}.
\end{aligned}$$

(e) se A é invertível, então a matriz coluna X é vetor próprio de A se e só se X é vetor próprio de A^{-1};

Afirmação verdadeira.

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é invertível, então existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

e 0 não é valor próprio de A.

Assim, para todo $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$,

$$\begin{aligned}
X \text{ é vetor próprio de } A &\Leftrightarrow \text{existe } \lambda \neq 0 \text{ tal que } AX = \lambda X \\
&\Leftrightarrow \text{existe } \lambda \neq 0 \text{ tal que } A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X) \\
&\Leftrightarrow \text{existe } \lambda \neq 0 \text{ tal que } X = \lambda(A^{-1}X) \\
&\Leftrightarrow \text{existe } \lambda \neq 0 \text{ tal que } \lambda^{-1}X = A^{-1}X \\
&\Leftrightarrow X \text{ é vetor próprio de } A^{-1}.
\end{aligned}$$

(f) o conjunto dos valores próprios de A é o conjunto dos valores próprios de A^T.

Afirmação verdadeira.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ é valor próprio de } A &\Leftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0 \\
&\Leftrightarrow |(A - \lambda I_n)^T| = 0 \\
&\Leftrightarrow |A^T - \lambda I_n| = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda \text{ é valor próprio de } A^T.
\end{aligned}$$

10. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Determine os valores próprios de A.

Valores próprios de A: $0, 2, -1$.

(b) Determine os vetores próprios de A.

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio 0:

$$V_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}; \dim V_0 = 1.$$

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio -1:

$$V_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}; \dim V_{-1} = 1.$$

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio 2:

$$V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}; \dim V_2 = 1.$$

(c) Diga se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique o cálculo de A^{10}.

Uma vez que:

- a soma das multiplicidades algébricas é igual à ordem da matriz A;
- para cada valor próprio λ de A, a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade geométrica de λ,

conclui-se que a matriz A é diagonalizável.

Uma vez que A é diagonalizável, tem-se $A = P^{-1}DP$ onde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A^{10} &= (P^{-1}DP)^{10} = P^{-1}D^{10}P \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -683 & -341 & -\frac{1025}{3} \\ 1365 & 683 & \frac{2047}{3} \\ 2049 & 1023 & 1025 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

11. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/4 & 3/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Repita o exercício anterior.

Valores próprios de A: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1.

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio 1:

$$V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}; \dim V_1 = 1.$$

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio $\frac{1}{4}$:

$V_{\frac{1}{4}} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$; $\dim V_{\frac{1}{4}} = 1$.

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio $\frac{1}{2}$:

$V_{\frac{1}{2}} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$; $\dim V_{\frac{1}{2}} = 1$.

Uma vez que:

- a soma das multiplicidades algébricas é igual à ordem da matriz A;
- para cada valor próprio λ de A, a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade geométrica de λ,

conclui-se que a matriz A é diagonalizável.

Uma vez que A é diagonalizável, tem-se $A = P^{-1}DP$ onde

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A^{10} &= (P^{-1}DP)^{10} = P^{-1}D^{10}P \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^{10}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{511}{512} & -\frac{1023}{1024} & -\frac{1023}{1024} \\ 0 & \frac{1}{1048576} & 0 \\ \frac{1023}{512} & \frac{2096127}{1048576} & \frac{2047}{1024} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

12. Verifique se são diagonalizáveis as matrizes dos exercícios 1 a 4.

13. Considere a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Verifique que os valores próprios de A são todos reais.
Valores próprios de A: 0, 2, 3.

(b) Verifique que A é diagonalizável e calcule A^{10}.

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio 0:

$V_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$; $\dim V_0 = 1$.

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio 2:

$$V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}; \dim V_2 = 1.$$

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio 3:

$$V_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}; \dim V_3 = 1.$$

Uma vez que:

- a soma das multiplicidades algébricas é igual à ordem da matriz A;
- para cada valor próprio λ de A, a multiplicidade algébrica de λ é igual Ã multiplicidade geométrica de λ,

conclui-se que a matriz A é diagonalizável.

Uma vez que A é diagonalizável, tem-se $A = P^{-1}DP$ onde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A^{10} &= (P^{-1}DP)^{10} = P^{-1}D^{10}P \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{63145}{6} & \frac{19683}{2} & \frac{57001}{6} \\ \frac{59049}{2} & \frac{59049}{2} & \frac{59049}{2} \\ \frac{57001}{3} & 19683 & \frac{60073}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

14. Verifique que não é diagonalizável uma qualquer matriz quadrada de ordem 3 do tipo

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Valores próprios de A: a (com mutiplicidade geométrica 2), b (com multiplicidade geométrica 1).

Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio a:

$$V_a = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}; \dim V_a = 1.$$

Uma vez que a mutiplicidade geométrica de a é diferente da sua mutlplicidade algébrica, então qualquer matriz do tipo indicado não é diagonalizável.

15. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que -2 é valor próprio de A.

   -2 é valor próprio de A, uma vez que

   $$|A + 2I_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

   (b) Calcule os valores próprios de A.

   Valores próprios de A: -2 (com mutiplicidade geométrica 2), 1 (com multiplicidade geométrica 1).

   (c) Diga se A é invertível.

   0 não é valor próprio de A. Logo, A é invertíel.

   (d) Verifique se A é diagonalizável.

   Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio -2:

   $$V_{-2} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}; \dim V_{-2} = 2.$$

   Conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio 1:

   $$V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}; \dim V_1 = 1.$$

   Uma vez que:

   - a soma das multiplicidades algébricas é igual à ordem da matriz A;
   - para cada valor próprio λ de A, a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade geométrica de λ,

   então a matriz A é diagonalizável.