Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Análise
2021/22

Integrais Múltiplos

1. Calcule $\displaystyle\iint_X f(x,y)\,dx\,dy$ para:

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^2$ e $X = [0,1]\times[0,1]$

   (b) $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}(x+y)$ e $X = [0,1]\times[0,\pi]$

   (c) $f(x,y) = xy$ e $X = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2\,,\ 0\le y\le x^2\big\}$

   (d) $f(x,y) = e^{x+y}$ e $X = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le y\,,\ y\le 0\,,\ x+y+1\ge 0\big\}$

   (e) $f(x,y) = \cos(x+y)$ e $X = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\big\}$

   (f) $f(x,y) = x$ e $X = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \mathrm{sen}x\,,\ 0\le x\le \pi/2\big\}$

   (g) $f(x,y) = 10+y$ e $X = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\,,\ x\ge 1\big\}$

   (h) $f(x,y) = x+y$ e $X = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{x}{2}\le y\le 2x\,,\ x+y\le 3\right\}$

   (i) $f(x,y) = 2y$ e $X = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le |x|\big\}$

2. Inverta a ordem de integração nos seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{y+3} f(x,y)\,dx\,dy$

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

   (d) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

   (e) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^x f(x,y)\,dy\,dx$

   (f) $\displaystyle\int_1^e\int_{\log x}^x f(x,y)\,dy\,dx$

   (g) $\displaystyle\int_0^1\int_{2x}^{x+1} f(x,y)\,dy\,dx$

   (h) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

   (i) $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$

   (j) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

   (ℓ) $\displaystyle\int_0^1\int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

   (m) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-4+y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

   (n) $\displaystyle\int_1^4\int_{\log x}^x f(x,y)\,dy\,dx$

   (o) $\displaystyle\int_1^2\int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\,dy\,dx$

(p) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$ (q) $\displaystyle\int_0^1\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$

(r) $\displaystyle\int_0^2\int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$ (s) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$

(t) $\displaystyle\int_1^{e^3}\int_0^{\log x} f(x,y)\,dy\,dx$ (u) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx$

3. Invertendo a ordem de integração, calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\arccos y} e^{\operatorname{sen} x} x\,dx\,dy$ (d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\,dy\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{e^3}\int_{\log y}^3 dx\,dy$ (e) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\,dx\,dy$ (f) $\displaystyle\int_1^e\int_{\log y}^1 \frac{(x^2+1)^{13}}{y}\,dx\,dy$

4. Determine as coordenadas polares $(\rho\,,\,\theta)$ dos pontos cuja representação cartesiana é:

$A=(3,\sqrt{3})$ $B=(0,2)$ $C=(0,-2)$ $D=(-4,-4)$ $E=(1,1)$

$F=(-1,1)$ $G=(-\sqrt{3},0)$ $H=(\sqrt{3},0)$ $I=(0,5)$ $J=(1,\sqrt{3})$

5. Determine as coordenadas cartesianas dos pontos cuja representação polar é

$A=(1,\frac{\pi}{4})$ $B=(2,\frac{3\pi}{2})$ $C=(5,0)$ $D=(5,\frac{\pi}{2})$; $E=(2,\frac{\pi}{4})$

$F=(3,\frac{11\pi}{6})$ $G=(\sqrt{3},0)$ $H=(0,5)$ $I=(3,2)$ $J=(\frac{\pi}{2},2)$

6. Determine a equação polar das curvas de equações cartesianas

(a) $y=x$ (b) $y=x\,,\;\; x\geq 0$

(c) $y=-x\,,\;\; x\geq 0$ (d) $y=x+1$

(e) $x^2+y^2=1$ (f) $x^2+y^2=4\,,\;\; y\geq 0$

(g) $x^2+y^2=9\,,\;\; x\geq 0$ (h) $y=x^2$

(i) $y=3\,,\;\; x\geq 0$ (j) $x=3\,,\;\; y\geq 0$

(ℓ) $y=3$ (m) $x=3$

(n) $(x-1)^2+y^2=1$ (o) $x^2+y^2=3x$

7. Determine a equação cartesiana das curvas de equações polares

   (a) $\rho = 1$ (b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (c) $\rho = \frac{1}{\cos\theta}$ (d) $\operatorname{tg}\,\theta = 1$

8. Passando para coordenadas polares, calcule $\displaystyle\iint_X f(x,y)\,dx\,dy$, onde:

   (a) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$ e $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 5\}$

   (b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)$ e X é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências de equações $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=9$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ e $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2y\}$

   (d) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ e $X = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 9\,,\ \sqrt{3}y \ge x\,,\ \sqrt{3}x \ge y\right\}$

   (e) $f(x,y) = x^2+y^2$ e $X = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}\right\}$

   (f) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ e $X = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\,,\ y \ge x\,,\ y \le \sqrt{3}x\right\}$

   (g) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ e $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \le x\,,\ y \ge x^2\,,\ x \ge 0\}$

9. Usando integrais duplos, calcule a área do domínio plano definido pelas condições seguintes:

   (a) $0 \le x \le 2\,,\ e^{-x} \le y \le e^x$

   (b) $1 \le x \le 2\,,\ xy \le 1\,,\ y \ge 0$

   (c) $y \ge x^2\,,\ y \le 4-x^2$

   (d) $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}\,,\ \cos x \le y \le \operatorname{sen} x$

   (e) $1 \le x^2+y^2 \le 4\,,\ y \le x\,,\ x \ge 0$

   (f) $x^2+y^2 \le 16\,,\ (x+2)^2+y^2 \ge 4\,,\ y \ge 0$

   (g) $x^2+y^2 \le 1\,,\ x^2+(y-1)^2 \le 1$

10. Calcule o valor do seguinte integral, depois de passar para coordenadas cartesianas,

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}/(2\cos\theta)} \rho\,d\rho\,d\theta.$$

11. Calcule o valor do integral

$$\iint_X \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dx\,dy\,, \qquad X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x \ge 0\,,\ y \ge 0\,,\ x+y \le 1\}\ ,$$

efectuando a mudança de variáveis definida por $x-y=u\,,\ x+y=v$.

12. Calcule o valor do integral

$$\iint_X e^{\frac{y}{x+y}}\, dx\, dy\,, \qquad X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x+y \leq 1\right\}\,,$$

efectuando a mudança de variáveis definida por $x+y=u\,,\ y=uv$.

13. Usando integrais duplos, calcule o volume dos sólidos:

(a) $\mathcal{S}_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq 4\,,\ 0 \leq y \leq 4\,,\ 0 \leq z \leq x^2+y^2+1\right\}$

(b) $\mathcal{S}_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq 2\,,\ 0 \leq y \leq 2\,,\ z \geq 0\,,\ y+z \leq 2\right\}$

(c) $\mathcal{S}_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\,,\ z \geq 0\,,\ y+z \leq 3\right\}$

14. Usando integrais duplos, calcule o volume do sólido $\mathcal{S}$ limitado pelas superfícies de equações:

(a) $z=0\,,\ z=3\,,\ y=x^2\,,\ x=y^2$

(b) $z=3\,,\ z=x^2+y^2$

(c) $x^2+y^2=2z\,,\ x^2+y^2+z^2=3$

(d) $z=4-x^2-y^2\,,\ z=0$

15. Calcule $\displaystyle\iiint_X f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$, onde:

(a) $f(x,y,z)=x+y+z$ e $X=[0,2]\times[0,2]\times[0,2]$;

(b) $f(x,y,z)=y$ e X é a região de $\mathbb{R}^3$ limitada pelos planos coordenados e pela superfície de equação $x+y+z=1$;

(c) $f(x,y,z)=x$ e X é a região de $\mathbb{R}^3$ limitada pelos planos de equações $x=0$, $y=0\,,\ z=2$ e pela superfície de equação $z=x^2+y^2\,,\ x\geq 0\,,\ y \geq 0$.

16. Usando coordenadas cilíndricas, calcule $\displaystyle\iiint_X f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ para:

(a) $f(x,y,z)=x$ e $X=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq z\leq 3\,,\ x^2+y^2\leq z\right\}$;

(b) $f(x,y,z)=z\,e^{x^2+y^2}$ e $X=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2\leq z\leq 3\,,\ x^2+y^2\leq 4\right\}$;

(c) $f(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2}$ e X a região do primeiro octante limitada pelas superfícies cilíndricas de equações $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$, e pelos planos de equações $z=0\,,\ z=1\,,\ x=0$ e $x=y$;

(d) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$ e $X=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z\leq 2-x^2-y^2\right\}$.

17. Usando coordenadas cilíndricas, descreva a região $X = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = x \, ; \ y < 0 \}$.

18. Usando coordenadas esféricas, descreva o sólido

$$\mathcal{S} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4 \} .$$

19. Calcule o volume do sólido $\mathcal{S}$ que é:

   (a) definido pelas condições $3z \geq x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$;

   (b) definido pelas condições $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$;

   (c) limitado pela superfície esférica de equação $r = 1$ e pela superfície cónica de equação $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

20. Calcule o valor do integral

$$\iiint_X \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx \, dy \, dz$$

sendo X a região limitada pelas superfícies esféricas de equações $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $a > b > 0$.

21. Calcule o valor do integral

$\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \, dx \, dy \, dz$, onde $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z^2 \, , \ 0 \leq z \leq 1 \} \\ \mathcal{V}_2 &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1 \, , \ 1 \leq z \leq 2 \} . \end{aligned}$$

22. Estabeleça um integral (ou soma de vários integrais) que dê o volume do sólido

   (a) $\mathcal{S} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ \wedge \ z \geq 1 \}$;

   (b) $\mathcal{S} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4 \ \wedge \ z \geq x^2 + y^2 \}$;

   (c) $\mathcal{S} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \geq 1 \ \wedge \ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4 \ \wedge \ z \geq 1 \}$;

   (d) $\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x > 0 \ \wedge \ y > 0 \ \wedge \ 0 < z < \sqrt{x^2 + y^2} \ \wedge \ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \right\}$.

23. Usando integrais triplos, calcule o volume do sólido

   (a) $\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \left(x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ \wedge \ z \leq 0 \right) \ \vee \ \left(1 - z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \ \wedge \ z \geq 0 \right) \right\}$;

   (b) $\mathcal{S} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1 - z^2 \}$;

   (c) $\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \ \wedge \ y \geq 0 \right\}$.

24. Estabeleça um integral que dê o volume do sólido definido pela condição

$$\left(z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \ \wedge \ 0 \leq z \leq 1 \right) \ \vee \ \left(x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ 1 \leq z \leq 2 \right) .$$