5 funções

119. Indique, justificando, quais das relações binárias seguintes são aplicações:

(a) $f_1 = \{(1,4),(2,4),(3,7)\}$ de $\{1,2,3\}$ em $\{4,5,6,7\}$;
(b) $f_2 = \{(1,5),(1,4),(2,5),(3,5)\}$ de $\{1,2,3\}$ em $\{4,5\}$;
(c) $f_3 = \{(x, 2x-1) : x \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$;
(d) $f_4 = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{Q}\}$ de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$;
(e) $f_5 = \{(x, x+1) : x \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$;
(f) $f_6 = \{(x, x+1) : x \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$;
(g) $f_7 = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\} \cup \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2\}$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$;
(h) $f_8 = \{(x,x^2) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \cup \{(x,x^3) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Resolução

A relação binária f_7 não é um função, pois, por exemplo, $(1,1) \in f_7$ e $(1,-1) \in f_7$ e, no entanto, $1 \neq -1$.

A relação f_8 é uma função. Observamos primeiro que $D_{f_8} = \mathbb{R}$. Mais ainda, suponhamos que temos $(x,y),(x,z) \in f_8$. Então,

- se $x > 0$, então, $y = x^2 = z$;
- se $x < 0$, então, $y = x^3 = z$;
- se $x = 0$, então, $y, z \in \{x^2, x^3\} = \{0\}$, pelo que $y = z$.

Assim, podemos afirmar que

$$\forall x \in \mathbb{R} (x,y),(x,z) \in f_8 \Rightarrow y = z.$$

120. Indique, justificando, quais das aplicações apresentadas no exercício anterior são:

(a) injetivas; (b) sobrejetivas; (c) bijetivas.

121. Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$.

(a) Dê exemplo de uma correspondência de A em B que não seja uma função.
(b) Indique, caso exista, uma função de A em B que seja

i. não injetiva;
ii. injetiva;
iii. sobrejetiva;
iv. não sobrejetiva;
v. bijetiva.

122. Sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{a,b,c,d,e\}$. Considere as relações binárias de A em B:

$$R_1 = \{(1,a),(2,b),(3,a),(4,b),(5,a)\}, \qquad R_2 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d),(5,e),(5,a)\},$$

$$R_3 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}.$$

(a) Indique, justificando, quais são e quais não são aplicações.

(b) Será a relação binária $R_1^{-1} \circ R_1$ uma aplicação de A em A? Justifique.

Resolução

(a) R_1 é função pois

$$\forall x \in A, \exists^1 y \in B : \ (x, y) \in R_1.$$

R_2 não é função pois

$$(5, e), (5, a) \in R_2 \text{ e } e \neq a.$$

R_3 não é função pois $D_{R_3} = \{1, 2, 3, 4\} \neq A$.

(b) Como $(1, a), (3, a) \in R_1$, temos que $(a, 1), (a, 3) \in R_1^{-1}$. Mais ainda, temos que

$$(1, a) \in R^{-1} \text{ e } (a, 1) \in R_1 \Rightarrow (1, 1) \in R_1^{-1} \circ R_1$$

e

$$(1, a) \in R^{-1} \text{ e } (a, 3) \in R_1 \Rightarrow (1, 3) \in R_1^{-1} \circ R_1.$$

Concluímos que $R_1^{-1} \circ R_1$ não é função uma vez que

$$(1, 1), (1, 3) \in R_1^{-1} \circ R_1 \text{ e } 1 \neq 3.$$

123. Seja f a aplicação definida de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é primo} \\ 2 & \text{se } x \text{ é um par não primo} \\ 3 & \text{se } x \text{ é um ímpar não primo} \end{cases}$$

Determine:

(a) $f^{\rightarrow}(\{4, 6, 8\})$;

(b) $f^{\rightarrow}(\{2, 4, 5\})$;

(c) $f^{\rightarrow}(\{1, 9\})$;

(d) $f^{\leftarrow}(\{2\})$;

(e) $f^{\leftarrow}(\{1, 3\})$;

(f) $f^{\leftarrow}(\{4\})$.

124. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por $g(x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Determine:

(a) $g^{\rightarrow}(\{-1, 0, 1\})$;

(b) $g^{\rightarrow}(\mathbb{R}^-)$;

(c) $g^{\leftarrow}(\{0\})$;

(d) $g^{\rightarrow}(\mathbb{R})$;

(e) $g^{\leftarrow}(\mathbb{R}^-)$.

Resolução

(a) $g^{\rightarrow}(\{-1, 0, 1\}) = \{g(-1), g(0), g(1)\} = \{1, 0\}$;

(b) $g^{\rightarrow}(\mathbb{R}^-) = \{g(x) : x \in \mathbb{R}^-\} = \mathbb{R}^+$;

(c) $g^{\leftarrow}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \{0\}\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\} = \{0\}$;

(d) $g^{\rightarrow}(\mathbb{R}) = \{g(x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0^+$;

(e) $g^{\leftarrow}(\mathbb{R}^-) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \mathbb{R}^-\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\} = \emptyset$.

125. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = |x| + 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$).

(a) Determine $f^{\rightarrow}(\{-2, 1, 2\})$, $f^{\leftarrow}(\{1, 2, 3\})$ e $f^{\leftarrow}(\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\})$.

(b) Mostre que f não é injetiva.

(c) Será f sobrejetiva? Justifique.

126. Seja X um conjunto. Para cada subconjunto A de X, chama-se *função caraterística de A* à função χ_A definida de X em $\{0,1\}$ por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Sejam $A, B \subseteq X$. Mostre que $\chi_A = \chi_B$ se e só se $A = B$.

127. Seja X um conjunto. Considere $\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definida por $\phi(A) = X \backslash A$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$. Mostre que ϕ é bijetiva.

128. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \neq 0 \wedge x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $f(A)$, em que $A = \{0, 2, 4\}$.

(b) Determine $f^{\leftarrow}(\{0, 1, 2\})$.

(c) Diga, justificando, se f é sobrejetiva e/ou injetiva.

129. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se x} \neq 0 \wedge \text{y} \neq 2 \\ x & \text{se y} = 2 \\ y-2 & \text{se x} = 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $f(A)$, em que $A = \{(0,2), (1,2), (0,0), (1,-1)\}$.

(b) Determine $f^{\leftarrow}(\{0\})$.

(c) Diga, justificando, se f é sobrejetiva e/ou injetiva.

130. Sejam f, g e h as funções de $\mathbb{N}_0$ em $\mathbb{N}_0$ definidas por:

$$f(n) = n+1,\ \forall n \in \mathbb{N}_0; \qquad g(n) = 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0; \qquad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Determine:

(a) $f \circ f$;

(b) $f \circ g$;

(c) $g \circ f$;

(d) $g \circ h$;

(e) $(f \circ g) \circ h$;

(f) $f \circ (g \circ h)$.

Resolução

(a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(n+1) = (n+1)+1 = n+2.$$

Logo,

$$\begin{array}{rccc} f \circ f : & \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ & n & \mapsto & n+2 \end{array}$$

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n) = 2n + 1.$$

Logo,

$$\begin{array}{rccc} f \circ g: & \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ & n & \mapsto & 2n+1 \end{array}$$

(c) Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = 2(n+1) = 2n + 2.$$

Logo,

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ & n & \mapsto & 2n+2 \end{array}$$

(d) Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(g \circ h)(n) = g(h(n)) = \begin{cases} g(0) & \text{se } n \text{ é par} \\ g(1) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{array}{rccc} g \circ h: & \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ & n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{array}$$

(e) Usando a alínea (b), para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$((f \circ g) \circ h)(n) = (f \circ g)(h(n)) = \begin{cases} (f \circ g)(0) & \text{se } n \text{ é par} \\ (f \circ g)(1) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{array}{rccc} (f \circ g) \circ h: & \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ & n & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{array}$$

(f) Como a composição de funções, quando definida, é associativa, temos que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, que é a função definida na alínea anterior.

131. Dê exemplos de:

(a) duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f e g não sejam constantes e $f \circ g$ seja constante;

(b) uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f \neq \text{id}_{\mathbb{R}}$ mas $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Resolução

(a) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 + 1, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Então, para $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 1$$

pois $x^2 + 1 > 0$. Logo, $f \circ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função constante.

(b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = -x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Então, para $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x = \mathrm{id}_{\,\mathbb{R}}(x).$$

Logo, $f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função $\mathrm{id}_{\,\mathbb{R}}$.

132. (a) Seja $\alpha : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ definida por $\alpha(n) = n + 1$. Mostre que não existe qualquer função $g : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ tal que $\alpha \circ g = \mathrm{id}_{\,\mathbb{N}_0}$ mas existe uma infinidade de funções $k : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ tais que $k \circ \alpha = \mathrm{id}_{\,\mathbb{N}_0}$

(b) Seja $\beta : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ definida por

$$\beta(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

mostre que não existe qualquer função $f : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ tal que $f \circ \beta = \mathrm{id}_{\,\mathbb{N}_0}$ mas existe uma infinidade de funções $k : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ tais que $\beta \circ k = \mathrm{id}_{\,\mathbb{N}_0}$.

133. Considere as funções

$$f: \begin{array}{l} [-1,1] \to [-1,1] \\ \quad x \longmapsto x^3; \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto 2x-3; \end{array} \qquad h: \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 \\ x \longmapsto \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x-1, & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

Verifique que f, g e h são funções bijetivas e determine as respetivas funções inversas.

Resolução

- A função f é injetiva pois, para $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y.$$

A função f é sobrejetiva pois

$$y \in [-1,1] \Rightarrow \sqrt[3]{y} \in [-1,1] \text{ e } \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = y \Rightarrow \sqrt[3]{y} \in [-1,1] \text{ e } f\left(\sqrt[3]{y}\right) = y.$$

A sua função inversa é

$$f^{-1} \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{y} \end{array}.$$

- A função g é injetiva pois, para $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$g(x) = g(y) \Rightarrow 2x - 3 = 2y - 3 \Rightarrow x = y.$$

A função g é sobrejetiva pois

$$y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R} \text{ e } f\left(\frac{y+3}{2}\right) = 2\frac{y+3}{2} - 3 = y.$$

A sua função inversa é

$$g^{-1} \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{y+3}{2} \end{array}.$$

- A função h é injetiva pois, para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que

$$h(x) = h(y) \Rightarrow x = y.$$

De facto, para $h(x) = h(y)$ se verificar apenas podemos ter duas situações: ou $x, y \geq 0$ ou $x, y < 0$. A igualdade $x = y$ nestes casos é imediata. A função h é sobrejetiva pois

$$y \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2} \in \mathbb{Z}_0^+ & \text{se } n \text{ par} \\ -\frac{n+1}{2} \in \mathbb{Z}^- & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad \text{e } n = \begin{cases} h(\frac{n}{2}) & \text{se } n \text{ par} \\ h(-\frac{n+1}{2}) & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

A sua função inversa é

$$\begin{array}{rccl} h^{-1} & \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \end{array}.$$

134. Sejam A e B conjuntos, f uma função de A em B, A_1 e A_2 subconjuntos de A e B_1 e B_2 subconjuntos de B. Mostre que:

(a) se $A_1 \subseteq A_2$, então $f^{\to}(A_1) \subseteq f^{\to}(A_2)$;

(b) se $B_1 \subseteq B_2$, então $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$;

(c) $f^{\to}(A_1 \cap A_2) \subseteq f^{\to}(A_1) \cap f^{\to}(A_2)$;

(d) $f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$;

(e) $f^{\to}(A_1 \cup A_2) = f^{\to}(A_1) \cup f^{\to}(A_2)$;

(f) $f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2)$.

Resolução

(b) Sabendo que $B_1 \subseteq B_2$. queremos provar que $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$. Seja $x \in A$. Então,

$$\begin{array}{rll} x \in f^{\leftarrow}(B_1) & \Leftrightarrow f(x) \in B_1 & [\text{definição de } f^{\leftarrow}(B_1)] \\ & \Rightarrow f(x) \in B_2 & [\text{por hipótese }] \\ & \Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_2). & [\text{definição de } f^{\leftarrow}(B_2)] \end{array}$$

Logo, $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$.

(e) Seja $y \in B$. Então,

$$\begin{array}{rl} y \in f^{\to}(A_1 \cup A_2) & \Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : f(x) = y \\ & \Leftrightarrow \exists x \in A_1 : f(x) = y \text{ ou } \exists x \in A_2 : f(x) = y \\ & \Leftrightarrow y \in f^{\to}(A_1) \text{ ou } y \in f^{\to}(A_2) \\ & \Leftrightarrow y \in f^{\to}(A_1) \cup f^{\to}(A_2) \end{array}$$

Logo, $f^{\to}(A_1 \cup A_2) = f^{\to}(A_1) \cup f^{\to}(A_2)$.

(f) Seja $x \in A$. Então,

$$\begin{array}{rl} x \in f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) & \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ & \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ ou } f(x) \in B_2 \\ & \Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_1) \text{ ou } x \in f^{\leftarrow}(B_2) \\ & \Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2) \end{array}$$

Logo, $f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2)$.

135. (a) Dê um exemplo de uma função $f : A \to B$ e de conjuntos $X, Y \subseteq A$ tais que $X \subset Y$ mas que $f(X) = f(Y)$.

(b) Dê um exemplo de uma função $g : C \to D$ e de conjuntos $S, T \subseteq D$ tais que $S \subset T$, mas que $g^{\leftarrow}(S) = g^{\leftarrow}(T)$.

136. Sejam A, B e S conjuntos tais que $S \subseteq A$.

(a) Se $f : A \to B$ é uma função injetiva, será que a sua restrição a S, $f|_S$, é necessariamente uma função injetiva?

(b) Se $g : A \to B$ é uma função sobrejetiva, será que a sua restrição a S, $g|_S$, é necessariamente uma função sobrejetiva?

Resolução

(a) Sim. Sejam $x_1, x_2 \in S$ tais que $f|_S(x_1) = f|_S(x_2)$. Então, $f(x_1) = f(x_2)$ e, portanto, como f é injetiva, temos que $x_1 = x_2$. Logo, $f|_S$ é injetiva.

(b) Não. Considere-se o seguinte contraexemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $S = \{1, 2\}$. A função $g = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ é uma função sobrejetiva de A em B. No entanto,

$$g|_S = \{(1, 4), (2, 5)\}$$

não é uma função sobrejetiva de S em B, pois $6 \in B$ e não existe $x \in S$ tal que $g|_S(x) = 6$.

137. Sejam A e B conjuntos e sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ funções tais que $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Mostre que

(a) f é sobrejetiva;

(b) g é injetiva;

(c) g é sobrejetiva se e só se f é injetiva.

138. Seja $f : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ definida por $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, para $n \geq 2$. Mostre que

(a) $f(n) < f(n+1)$ para todo $n \geq 2$;

(b) existem exatamente quatro elemento i de $\mathbb{N}_0$ tais que $(f \circ f)(i) = f(i)$;

(c) $f(5n)$ é divisível por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(d) $f(n+2) = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Resolução (a) Provemos o resultado usando o Método de Indução Completa. Como caso base ($n = 2$), temos de verificar que $f(2) < f(3)$. De facto, temos

$$f(2) = f(1) + f(0) = 1 + 0 = 1$$

e

$$f(3) = f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2,$$

pelo que se verifica a desigualdade. Suponhamos agora que, dado $n \geq 2$, $f(k) < f(k+1)$, para todo $2 \leq k \leq n$. Queremos provar que $f(n+1) < f(n+2)$. Na realidade, temos que

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1) < f(n+1) + f(n) = f(n+2).$$

Aplicando o princípio de indução matemática, podemos concluir que

$$f(n) < f(n+1), \forall n \geq 2.$$

(b) Observamos primeiro que:
$$f(f(0)) = f(0)$$
$$f(f(1)) = f(1)$$
$$f(f(2)) = f(1) = 1 = f(2).$$

Mais ainda, pela alínea (a), se restringirmos f ao conjunto $\{i \in \mathbb{N} : i > 2\}$, a função obtida é injetiva. Assim, para $i > 2$,

$$(f \circ f)(i) = f(i) \Leftrightarrow f(f(i)) = f(i) \Rightarrow f(i) = i \Leftrightarrow i = 5.$$

A última equivalência resulta de termos

$$f(3) = 2, f(4) = 3, f(5) = 5, f(6) = 8, f(i+1) > f(i) > i+1, \forall i \geq 6.$$

Assim, $(f \circ f)(i) = f(i)$ se e só se $i \in \{0, 1, 2, 5\}$.

(c) Provemos o resultado usando o Método de Indução Natural. Como caso base $(n = 1)$, basta observar que $f(5) = 5$, que é divisível por 5. Suponhamos agora que, dado $n \in \mathbb{N}$, $f(5n)$ é divisível por 5. Queremos provar que $f(5(n+1))$ é divisível por 5. De facto, como

$$\begin{aligned} f(5(n+1)) &= f(5n+5) \\ &= f(5n+4) + f(5n+3) \\ &= f(5n+3) + f(5n+2) + f(5n+3) = 2f(5n+3) + f(5n+2) \\ &= 2(f(5n+2) + f(5n+1)) + f(5n+2) = 3f(5n+2) + 2f(5n+1) \\ &= 3(f(5n+1) + f(5n)) + 2f(5n+1) = 5f(5n+1) + 3f(5n), \end{aligned}$$

podemos concluir, pela hipótese de indução, que $f(5n+5)$ é divisível por 5. Aplicando o princípio de indução matemática, temos que $f(5n)$ é divisível por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) Provemos o resultado usando o Método de Indução Natural. Como caso base $(n = 1)$, basta observar que

$$f(1+2) = f(3) = 2 = 1 + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{1} f(i).$$

Supondo agora que, dado $n \in \mathbb{N}$, $f(n+2) = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i)$, queremos provar que $f(n+3) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} f(i)$. De facto,

$$f(n+3) = f(n+2) + f(n+1) = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i) + f(n+1) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} f(i).$$

Aplicando o princípio de indução matemática, temos que $f(n+2) = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

139. Sejam A, B e C conjuntos.

(a) Mostre que é possível definir uma aplicação bijetiva entre:

i. $(A \times B)^C$ e $A^C \times B^C$;

ii. $(A^B)^C$ e $A^{B \times C}$;

iii. $A^{B \cup C}$ e $A^B \times A^C$ se $B \cap C = \emptyset$.

(b) Será que $B \cap C = \emptyset$ é condição necessária para que exista uma aplicação bijetiva entre $A^{B \cup C}$ e $A^B \times A^C$?

Resolução

(a) i. Para uma função f em $(A \times B)^C$, i.e., uma função de C em $A \times B$, basta considerarmos as funções f_1 em A^C e f_2 em B^C:

$$f_1 : \begin{array}{ccc} C & \to & A \\ x & \mapsto & f_1(x) \end{array} \qquad\qquad f_2 : \begin{array}{ccc} C & \to & B \\ x & \mapsto & f_2(x) \end{array}$$

onde $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são tais que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.
Seja $\phi : (A \times B)^C \to A^C \times B^C$ a função definida por $\phi(f) = (f_1, f_2)$. Facilmente se verifica que ϕ é bijetiva.