indução matemática

Conceitos básicos

Exemplo. Consideremos a seguinte afirmação: *para qualquer número natural n, $n^2 - n + 41$ é um número primo.*

A afirmação é falsa ou verdadeira?

n	1	2	3	4	5	$\cdots$	41	$\cdots$
$n^2 - n + 41$	41	43	47	53	61	$\cdots$	41^2	$\cdots$

Indução Matemática é um tipo de demonstração que se usa quando queremos provar que uma determinada propriedade é válida para todo o número natural.

A ideia chave por detrás da indução matemática é que para listarmos todos os números naturais, basta começar no 1 e ir sucessivamente somando 1.

$$1 \underset{+1}{\curvearrowright} 2 \underset{+1}{\curvearrowright} 3 \underset{+1}{\curvearrowright} \cdots \underset{+1}{\curvearrowright} n \underset{+1}{\curvearrowright} n+1 \underset{+1}{\curvearrowright} \cdots$$

Condição hereditária

Uma propriedade ou condição $p(n)$, de variável natural, diz -se **hereditária** sempre que sendo $p(n)$ verdadeira para n também o é para $n+1$.

Exemplo 1. "*$2n$ é par*" é uma condição hereditária pois, se $2n$ é par, então, $2(n+1) = 2n+2$ é par (pois é a soma de 2 números pares).

Exemplo 2. "*n é par*" não é uma condição hereditária pois, se n é par, então, $n+1$ é ímpar.

Exemplo 3. "*$2n+1$ é par*" é uma condição hereditária pois, se $2n+1$ é par, então, $2(n+1)+1 = (2n+1)+2$ é par (pois é a soma de 2 números pares).

Fixemos as afirmações dos exemplos 1 e 3.

"$2n$ é par" *"$2n+1$ é par"*

Ambas as afirmações são hereditárias. No entanto, sabemos que apenas uma delas é verdadeira.

$(n = 1)$ 2×1 é par (proposição verdadeira)

Basta saber que a condição *"$2n$ é par"* se transforma numa proposição verdadeira para $n = 1$ que a hereditariedade da condição nos permite induzir que a propriedade é verdadeira para todos os números naturais.

$(n = 1)$ $2 \times 1 + 1$ é par (proposição falsa)

O facto da condição *"$2n + 1$ é par"* ser hereditária não nos serve de nada para concluir se a propriedade é verdadeira ou não para todos os números naturais.

Porquê?

Porque nos falta um ponto de partida!

Método de indução matemática

Seja $p(n)$ uma propriedade de variável natural. Demonstra-se que

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$$

é verdadeira mostrando que:

(i) caso base: $p(1)$ é verdadeira;

(ii) passo de indução: a condição $p(n)$ é hereditária, i.e., se, dado $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeira, então, $p(n+1)$ é também verdadeira.

Observação. A vantagem do método de indução matemática é que apenas é preciso um número finito de passos para provar um número infinito de afirmações $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, ...

Exemplo. Pretendemos mostrar que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 - n = \dot{3}.$$

Demonstremos esta proposição usando o método de indução matemática:

(i) caso base: Como $1^3 - 1 = 0 = \dot{3}$, temos que a condição $n^3 - n = \dot{3}$ é verdadeira para $n = 1$;

(ii) passo de indução: Suponhamos que, dado $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n = \dot{3}$. Queremos provar que $(n+1)^3 - (n+1) = \dot{3}$. De facto,

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3(n^2 + n) = \dot{3} + \dot{3} = \dot{3} \end{aligned}$$

Tendo em conta (i) e (ii), concluímos, por indução, que a condição $n^3 - n = \dot{3}$ é verdadeira para todo o número natural n.

Exemplo. Queremos provar que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left(1+\frac{1}{3}\right)^n \geq 1+\frac{n}{3}.$$

(i) caso base: Como $\left(1+\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{4}{3} \geq 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, temos que a condição dada é verdadeira para $n=1$;

(ii) passo de indução: Suponhamos que, dado $n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^n \geq 1+\frac{n}{3}$. Queremos provar que $\left(1+\frac{1}{3}\right)^{n+1} \geq 1+\frac{n+1}{3}$. De facto,

$$\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{1}{3}\right)^{n+1} = \left(1+\tfrac{1}{3}\right)^n\left(1+\tfrac{1}{3}\right) & \geq \left(1+\tfrac{n}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right) \\
& = 1+\tfrac{n}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{n}{9} = \left(1+\tfrac{n+1}{3}\right)+\tfrac{n}{9} \\
& \geq 1+\tfrac{n+1}{3}.
\end{aligned}$$

Tendo em conta (i) e (ii), concluímos, por indução, que a condição dada é verdadeira para todo o número natural n.

Exemplo. Queremos provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(1) Caso base: considerando $n = 1$, temos:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1 \times (1+1) \times (2+1)}{6},$$

o que é verdade, pois, efetuando os cálculos, obtemos $1 = 1$;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Queremos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. De facto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \text{(hip de indução)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+3) + 2(2n+3)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}
$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que a igualdade se verifica para todo natural n.

Exemplo. O seguinte Teorema está errado. De facto, se considerarmos $n = 3$, a proposição obtida é falsa. No entanto, uma demonstração por indução matemática do resultado é apresentada. O que está errado na demonstração?

Teorema: Para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}.$$

Observação. Para $n = 3$ temos

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

e

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}.$$

Demonstração: A afirmação é verdadeira para $n = 1$, uma vez que $\frac{1}{1\times 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1}$.

Supondo que a afirmação é verdadeira para um dado n, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\times n} + \frac{1}{n\times(n+1)} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

e, portanto, pelo método de indução matemática, podemos concluir que a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

O caso base está errado!

George Pólya colocou o seguinte problema: Encontre o erro no seguinte argumento, que propus para provar que todos os cavalos são da mesma cor:

(i) Caso base: Se houver somente um cavalo, ele é de uma cor.

(ii) Passo de indução: Suponhamos que todos os cavalos de qualquer conjunto com n cavalos são de uma mesma cor. Queremos provar que todos os cavalos de qualquer conjunto com $n+1$ cavalos são de uma mesma cor.

Consideremos um conjunto com $n+1$ cavalos que vamos nomear de c_1, c_2, ..., c_n e c_{n+1}. Se considerarmos os conjuntos $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ e $\{c_2, c_3, ..., c_n, c_{n+1}\}$, temos 2 conjuntos com n cavalos cada.

Então, todos os cavalos do 1.º conjunto têm a mesma cor e todos os cavalos do 2.º conjunto têm a mesma cor. Como há pelo menos um cavalo em comum (c_n), todos os $n + 1$ cavalos têm a mesma cor.

Pelo caso base e pelo passo de indução, concluímos que todos os cavalos que existem têm a mesma cor.

O passo de indução falha para $n = 1$.

Variações do método de indução

I - O método de indução matemática também pode ser usado para provar que uma afirmação é verdadeira para todo o número natural n maior ou igual que um número natural fixo n_0.

Assim, demonstra-se que

$$\forall n \geq n_0,\ p(n)$$

é verdadeira mostrando que:

(i) *caso base*: $p(n_0)$ é verdadeira;

(ii) *passo de indução*: dado $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, se $p(n)$ é verdadeira, então, $p(n+1)$ é também verdadeira.

Exemplo. Consideremos a condição $2^n > n^2$. Pelo quadro

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
2^n	2	4	8	16	32	64	128	$\cdots$
n^2	1	4	9	16	25	36	49	$\cdots$

podemos intuir que a afirmação será verdadeira para todo $n \geq 5$.

(i) *caso base*: Como $2^5 = 32 > 25 = 5^2$, concluímos que a afirmação é verdadeira para $n = 5$;

(ii) *passo de indução*: Suponhamos que $2^n > n^2$, dado $n \geq 5$. Queremos provar que $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Temos que

$$2^{n+1} = 2^n \times 2 > n^2 \times 2 = 2n^2.$$

Como

$$2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 5n = n^2 + 2n + 3n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

temos que $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Pelo método de indução matemática de base 5, podemos concluir que a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 5$.

Observação. Afirmar que

$$\forall n \geq 5,\ 2^n > n^2$$

é o mesmo que afirmar que

$$\forall m \in \mathbb{N},\ 2^{m+4} > (m+4)^2.$$

II - Existem situações onde o facto de supormos que $p(n)$ é verdadeira para um dado $n \in \mathbb{N}$ não é suficiente para concluirmos, de imediato, que $p(n+1)$ é verdadeira.
Mas, se $p(1)$ é verdadeira e $p(x)$ é hereditária, então, podemos ter $p(n)$ verdadeira porque $p(n-1)$ é verdadeira; e $p(n-1)$ é verdadeira porque $p(n-2)$ é verdadeira, etc., etc.

Assim, podemos fazer o seguinte raciocínio indutivo que é conhecido por *método de indução matemática completa* (ou *forte*):

Demonstra-se que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; p(n)$$

é verdadeira mostrando que:
(i) *caso base*: $p(1)$ é verdadeira;
(ii) *passo de indução*: se, dado $n \in \mathbb{N}$, $p(k)$ é verdadeira para $k \in \{1, 2, ..., n\}$, então, $p(n+1)$ é também verdadeira.

III - Podemos combinar I e II e obtemos o Método de Indução Matemática Completa de base $n_0 > 1$.

Exemplo. Queremos provar que *todo o número natural maior que 1 é primo ou é produto de pelo menos 2 primos.*

(i) Caso base: 2 é primo.

(ii) Passo de indução: seja $n \geq 2$ tal que, para $k \in \{2, 3, ..., n\}$, k é primo ou é produto de pelo menos dois primos. Queremos provar que $n + 1$ é primo ou é produto de pelo menos 2 primos.
Se $n + 1$ é primo, a disjunção é verdadeira.
Se $n + 1$ não é primo, então, existem $a, b < n + 1$ tais que $n + 1 = ab$.

Como $a, b \in \{1, 2, ..., n\}$, temos que a é primo ou produto de primos e b é primo ou produto de primos. Em qualquer um dos casos, ab é um produto de pelo menos 2 primos, pelo que a disjunção é verdadeira.