Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Análise
2021/22

Funções vetoriais de n variáveis reais

1. Determine o domínio da função definida por cada uma das seguintes expressões:

   (a) $f(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{x-y}\,,\, \log(1-x-y)\right)$;

   (b) $f(x,y) = \big(\log(4-x^2-y^2)\,,\, \sqrt{x}\, + y^2\big)$;

   (c) $f(x,y) = \left(x^2\,,\, \dfrac{1}{x} + \log y\right)$.

2. Calcule, se existir:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} \left(x^7 - 2y\,,\, \operatorname{sen}(x^2-y^3)\,,\, e^{-x^2+y^4}\right)$;

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(\frac{x^3+y^3}{3x^2+5y^2}\,,\, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,,\, \operatorname{sen}\frac{x^2y}{x^2+5y^2}\right)$.

3. Determine as derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por:

   (a) $f(x,y) = (e^x + y\,,\, \log(x-y))$; (b) $f(x,y) = \big(2xy^5\,,\, x\,,\, -y^2\,,\, x+y\big)$;

   (c) $f(x,y,z) = \big(1\,,\, \cos(xy^2z^3)\big)$; (d) $f(x,y,z) = (e^x\cos(-xy)\,,\, \cos xy)$.

4. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ para:

   (a) $f(x,y) = \big(e^{x+2y}\,,\, \operatorname{sen}(y+2x)\big)$, $\quad v = (3,4)$, $\quad a = (0,0)$;

   (b) $f(x,y,z) = (\cos(xz)\,,\, \operatorname{sen}(yz))$, $\quad v = (0,0,2)$, $\quad a = (\pi/4, \pi/4, 1)$.

5. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = \left(e^{x^2+z}\,,\, \operatorname{sen}(x+y)\right)$.

   Prove que f é diferenciável e determine $f'(0,\pi/2,1)$.

6. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = \left(\dfrac{3x^2-y^3}{2x^2y^4+1}\,,\, x+2xy\,,\, \cos(x+y)\right)$.

   Prove que f é diferenciável e determine $f'(0,\pi)$.

7. Apresente uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

8. Determine a matriz jacobiana das seguintes funções:

   (a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (x,y)$;
   (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$;
   (c) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y) = (xye^{xy}, x\,\mathrm{sen} y, 5xy^2)$;
   (d) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x-y, y+z)$;
   (e) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x+y+e^z, x^2y)$.

9. Considere a função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (3x, x+2y) \end{array}$.

   (a) Calcule a matriz jacobiana de f.
   (b) Justifique que a função f é diferenciável.
   (c) Calcule a derivada da função f no ponto $(1,2)$; compare a função $f'(1,2)$ com a função f.
   (d) Dado $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, calcule $f'(x_0,y_0)$.

10. Considere a função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x^2, 3y, 2xy) \end{array}$.

    (a) Calcule a matriz jacobiana de f.
    (b) Justifique que a função f é diferenciável.
    (c) Calcule a derivada da função f no ponto $(1,1)$.
    (d) Determine $f'(1,1)(2,3)$.

11. Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$f_x(0,1) = f_y(0,1) = (1,1)$$

e $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = f(\mathrm{sen} x, \cos y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Usando a regra da cadeia determine $J_F(0,0)$.

12. Sejam

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x^2, 1, x+y) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (\mathrm{sen}(x+y), e^{yz}) \end{array}.$$

Usando a regra da cadeia, determine $J_{g\circ f}(x,y)$ e $J_{f\circ g}(x,y,z)$

13. Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \mathrm{sen} y)$ e $g = f \circ f$.

    (a) Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.
    (b) Determine $g'(0,0)$.

14. Considere a função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x^2y - xz \end{array}$ e $a \in \mathbb{R}$.

    (a) Calcule $f'(1,0,0)(1,2,2)$.
    (b) Sendo $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(at^2, at, t^3) \end{array}$ determine a de modo que g tenha derivada nula.

15. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções duas vezes diferenciáveis e seja

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,. \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x+y)+g(x-y) \end{array}$$

Verifique que $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$.

16. Sejam $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$g(x,y) = (e^{xy}, x^2y) \quad \text{e} \quad f(r,s,t,u) = (r^2+t^2, 2su).$$

Prove que $g \circ f$ é diferenciável e determine $J_{g\circ f}\,(1,1,1,1)$.

17. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(0,e,0)$ tal que $\nabla f(0,e,0) = (e,-1,e)$. Seja $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = f(\operatorname{sen}(xy^2), e^y, \log(1+x^2))$. Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = 0\,.$$

18. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (x^2-y^2, xy, e^z)$.

   (a) Determine os pontos (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ relativamente aos quais o teorema da função inversa garante a invertibilidade local de f.

   (b) Determine a matriz jacobiana, em $f(1,0,0)$, da inversa local de f em torno de $(1,0,0)$.

19. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.

Mostre que f verifica as hipóteses do teorema da função inversa em relação a qualquer ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, mas não é globalmente invertível.

20. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = ((x+y)^3, (x-y)^3)$.

Verifique que o teorema da função inversa não é aplicável relativamente ao ponto $(0,0)$ e que f é invertível em $\mathbb{R}^2$. Comente os resultados.

21. Seja $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$.

   (a) Verifique que $\det J_f(x,y) \neq 0, \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$.

   (b) Justifique que f não é invertível em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

   (c) Mostre que, dado $(a,b) \neq (0,0)$, existe um aberto contendo (a,b), tal que a restrição de f a esse aberto é invertível e diferenciável.

22. Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x,y) = (x^2y, y-x)$ e $g(x,y) = (x^2, y^2)$.

   (a) Determine $J_{g\circ f}(1,1)$

   (b) Prove que f é localmente invertível em torno de $(1,1)$.

   (c) Prove que g não é globalmente invertível.

23. Seja $\phi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x,y) = (e^{xy}+1, e^{xy}+y^2)$. Verifique que ϕ é invertível em torno de $(0,1)$ e determine $J_\psi(\phi(0,1))$, onde ψ é a inversa local de ϕ em torno de $(0,1)$.

24. Verifique que, nas condições to teorema da função implícita, o sistema

$$\begin{cases} x + 2x^2y + z = 0 \\ y - e^x = 0 \end{cases}$$

define x e y como funções de z numa vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$. Calcule $x_z(0)$ e $y_z(0)$.

25. Verifique que, nas condições to teorema da função implícita, o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \\ x^2 - y^2 = 2 - 2u \end{cases}$$

define u e v como funções de x e y numa vizinhança do ponto $(1, 1, 1, 1)$. Calcule $u_x(1, 1)$, $u_y(1, 1)$, $v_x(1, 1)$ e $v_y(1, 1)$.

26. Considere os caminhos $\begin{array}{rccc} \alpha: & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos t, \mathrm{sen} t) \end{array}$ e $\begin{array}{rccc} \beta: & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2. \\ & t & \longmapsto & (-\mathrm{sen}^2 t, \mathrm{sen} t \, \cos t) \end{array}$

   (a) Determine o comprimento da linha Γ descrita pelo caminho β.
   (b) Determine os instantes t_0 para os quais as retas tangentes às curvas α e β nesse instante são ortogonais.
   (c) Determine os instantes t_1 em que a reta ortogonal à curva β nesse instante é vertical.

27. Determine equações da recta normal e do plano tangente a cada uma das superfícies dadas, no ponto indicado:
   (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 10, \ (1, \sqrt{3}, 1)$;
   (b) $xyz^2 = 1, \ (1, 1, 1)$;
   (c) $z = x^2 + 3y^3 + \mathrm{sen}(xy), \ (1, 0, 1)$;
   (d) $x^3 + xyz = 12, \ (2, 2, 1)$.

28. Determine os pontos da elipse $2x^2 + y^2 = 1$ cuja tangente passa pelo ponto $(1, 1)$.

29. Determine os pontos da curva $x^2 + y^2 - 2x + xy = 0$ cuja normal é paralela à recta $y = x$.

30. Determine os planos tangentes à esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que contêm a recta de equação

$$\begin{cases} x = 5 - z \\ y = -5 + 2z \end{cases}$$

31. Sejam $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x - y^2 \end{array}$ e $A = (-1, 0)$.

   (a) Determine e represente graficamente a curva de nível de f que passa em A.
   (b) Calcule o vector $\nabla f(A)$; coloque no esboço efectuada na alínea anterior, um representante de $\nabla f(A)$ com origem em A.
   (c) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f em $(A, f(A))$.