Funções Reais de n Variáveis Reais: diferenciabilidade

Maria Joana Torres

2021/22

Definição:

Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e seja $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, a **derivada partial de f em ordem a x_i no ponto a** é o número real

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\, e_i) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

caso este limite exista.

Na prática estamos a considerar a função real de variável real definida numa vizinhança de a_i por

$$x \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

e a calcular a sua derivada no ponto a_i.

Observação:

Fixemos $i \in \{1, \ldots, n\}$.

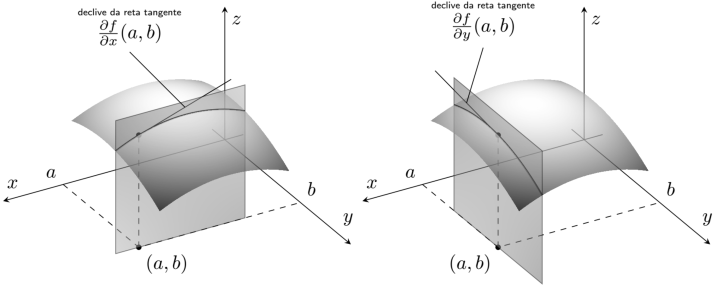
Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $a + t\boldsymbol{e}_i \in U$, para todo o $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Então está bem definido o caminho retilíneo $\alpha \colon]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow U$, $\alpha(t) = a + t\boldsymbol{e}_i$.

A função $\varphi \colon]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(a + t\boldsymbol{e}_i)$ é essencialmente a restrição de f ao segmento de reta $]a - \varepsilon\boldsymbol{e}_i, a + \varepsilon\boldsymbol{e}_i[$ que passa no ponto a e é paralelo ao i-ésimo eixo coordenado de $\mathbb{R}^n$.

A definição de derivada parcial de f em ordem a x_i no ponto a diz que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \varphi'(0)\,.$$



- A derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ é o *declive da reta tangente à curva no ponto* $(a,b,f(a,b))$*, obtida da intersecção do gráfico de* f *com o plano paralelo a* $X0Z$ *com equação* $y=b$ *.*

- A derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ é o *declive da reta tangente à curva no ponto* $(a,b,f(a,b))$*, obtida da intersecção do gráfico de* f *com o plano paralelo a* $Y0Z$ *com equação* $x=a$ *.*

Definição:

Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, a **função derivada parcial de f em ordem a x_i** é a função real de n variáveis reais definida por:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}: & V_i \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,, \end{array}$$

onde V_i é o subconjunto dos pontos de U para os quais a derivada parcial de f em ordem a x_i existe.

Notação:

As notações mais usadas para a derivada parcial de f em ordem a x_i são:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{x_i}, \quad D_{x_i} f, \quad D_i f$$

Dada $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e um ponto $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U$ suponhamos que queremos calcular a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Caso 1: Se numa vizinhança do ponto a, a função f é definida por uma única expressão, então:

1. consideram-se $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ como constantes;
2. deriva-se a expressão $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em ordem à variável x_i, usando as regras usuais para o cálculo das derivadas de funções de uma variável;
3. substitui-se $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, ..., $x_n = a_n$.

Caso 2: Se em qualquer vizinhança do ponto a, a função f é definida em termos de duas ou mais expressões, temos de usar a definição de derivada parcial de f em ordem a x_i no ponto a e calcular o correspondente limite.

Exemplo 1:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Caso 1: $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Caso 2: $(x,y) = (0,0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f((0,0)+h(1,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f((0,0)+h(0,1)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0 \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Exemplo 1 (continuação):

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Temos então que:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Observemos que f não é contínua na origem (nem sequer possui limite na origem; basta estudar o limite trajetorial ao longo de retas $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$).

O exemplo anterior mostra que a existência de derivadas parciais num ponto não implica a continuidade da função nesse ponto

$$\text{existem } f_{x_1}(a), \ldots, f_{x_n}(a) \;\not\Longrightarrow\; f \text{ é contínua em } a$$

Com efeito, a continuidade no ponto a depende dos valores da função em todos os pontos de alguma bola aberta centrada em a, enquanto que a derivada parcial em ordem a x_i depende apenas dos valores da função em todos os pontos de algum segmento de reta centrado em a e paralelo ao eixo Oe_i.

Exemplo 2:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad (x,y) \in]0,1[\times]0,1[\\ \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) \in B\left((7,0),1\right) \end{cases}$$

A função f é contínua. É evidente que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,,$$

para todo $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[\cup B\left((7,0),1\right)$.

No exemplo anterior, f tem derivadas parciais nulas em todo o domínio e, no entanto, f não é constante. Nem sequer é constante na direção de OX.

Teorema:

Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto U.

- Se $f_{x_i}(x) = 0$ para todo $x \in U$, então f é constante em cada segmento de reta contido em U e paralelo a e_i.
- Se $f_{x_i}(x) > 0$ para todo $x \in U$, então f é estritamente crescente, no sentido de e_i, em cada segmento de reta contido em U e paralelo a e_i.
- Se $f_{x_i}(x) < 0$ para todo $x \in U$, então f é estritamente decrescente, no sentido de e_i, em cada segmento de reta contido em U e paralelo a e_i.

Definição:

Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e seja $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$. Consideremos um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, com $v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$.

A **derivada direcional de f no ponto a segundo o vetor v** é o número real

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\,v) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hv_1, \dots, a_n + hv_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

caso este limite exista.

Observação:

A derivada direcional de f segundo o vetor e_i da base canónica de $\mathbb{R}^n$ coincide, em cada ponto, com a derivada parcial de f em relação à variável x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,.$$

Observação:

Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $a + tv \in U$, para todo o $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Então está bem definido o caminho retilíneo $\alpha \colon]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow U$, $\alpha(t) = a + tv$.

A função $\phi \colon]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(t) = f(a + tv)$ é essencialmente a restrição de f ao segmento de reta $]a - \varepsilon v, a + \varepsilon v[$ que passa no ponto a e é paralelo ao vetor v.

A definição de derivada direcional de f no ponto a segundo o vetor v diz que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \phi'(0)\,.$$

Definição:

Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Consideremos um vetor $v \in \mathbb{R}^n$.

A **função derivada direcional de f segundo o vetor** v é a função real de n variáveis reais definida por:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial v}: & V \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial v}(x)\,, \end{array}$$

onde V é o subconjunto dos pontos de U para os quais a derivada direcional de f segundo o vetor v existe.

Notação:

As notações mais usadas para a derivada direcional são:

$$\frac{\partial f}{\partial v}, \quad f_v, \quad D_v f$$

Exemplo:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

Temos que:

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(v_1,v_2))-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(hv_1,hv_2)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4v_1^3v_2}{h^6v_1^6+h^2v_2^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hv_1^3v_2}{h^4v_1^6+v_2^2}=0\,,\ \ \forall v\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\end{aligned}$$

Observemos que f não é contínua em $(0,0)$ porque não existe o limite na origem.

No exemplo anterior f não é contínua. Mas existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\text{existem } \frac{\partial f}{\partial v}(a),\ \forall v \in \mathbb{R}^2 \ \not\Longrightarrow\ f \text{ é contínua em } a$$

Com efeito, a continuidade no ponto a depende dos valores da função em todos os pontos de alguma bola aberta centrada em a, enquanto que a derivada direcional segundo o vetor v no ponto a depende apenas dos valores da função em todos os pontos de algum segmento de reta centrado em a e com a direção do vetor v.

Teorema:

Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto U e $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ um vetor.

- Se $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x) = 0$ para todo $x \in U$, então f é constante em cada segmento de reta contido em U e paralelo a v.
- Se $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x) > 0$ para todo $x \in U$, então f é estritamente crescente, no sentido de v, em cada segmento de reta contido em U e paralelo a v.
- Se $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x) < 0$ para todo $x \in U$, então f é estritamente decresecente, no sentido de v, em cada segmento de reta contido em U e paralelo a v.

Teorema: **[Valor Médio de Lagrange]**:

Sejam $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tais que o segmento de reta $[a, a+v]$ está contido em U.
Se f é contínua em $[a, a+v]$ e existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$ para todo $x \in]a, a+v[$, então

$$\exists p \in \,]a, a+v[: \; \frac{\partial f}{\partial v}(p) = f(a+v) - f(a)\,.$$

Corolário:

Seja $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^n$.
Se $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x) = 0$, para todo $x \in U$ e para todo $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, então f é constante em U.

Seja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$$

em todo o ponto x do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

A **derivada parcial em ordem a** x_j da função $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\colon\ U \longrightarrow \mathbb{R}$ no ponto $x \in U$ será indicada por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x), \quad i, j = 1, \ldots, n\,.$$

Também usamos a notação $f_{x_i x_j}$. Se $i = j$ usamos a notação $f^2_{x_i}$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Se essas **derivadas parciais de segunda ordem** existirem em cada ponto $x \in U$ teremos n^2 funções

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x)\colon U \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

A possibilidade de derivar parcialmente mantém-se, pelo que podemos definir as **derivadas parciais de terceira ordem** da função f. E assim sucessivamente, definindo-se as derivadas parciais de qualquer ordem $k \in \mathbb{N}$.

Em geral, a mera existência das derivadas parciais de segunda ordem em algum ponto x não assegura que se tenha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x)\,,$$

como se vê no seguinte exemplo:

Exemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verifique que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1\,.$$

Teorema: **[Schwarz]**:

Seja $f \colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que existem, em todos os pontos do aberto U, as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad , \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} .$$

Se as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ são contínuas em U, então também existe a derivada parcial $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ em todos os pontos de U e tem-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) , \quad \forall x \in U .$$

Observação:

Em todos os pontos $x \in U$ onde existem as derivadas parciais de segunda ordem da função $f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, os números $h_{ij}(x) = f_{x_i x_j}(x)$ formam uma matriz $H(x) = [h_{ij}(x)]$, chamada a **matriz hessiana** da função f. Sob as hipóteses enunciadas, o Teorema de Schwarz afirma que a matriz hessiana de f é simétrica.

Seja $f\colon X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável num ponto $a \in X \cap X'$ e seja $c = f'(a)$. Significa que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$$

ou de modo equivalente

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} = 0$$

ou ainda

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L_a(x - a)}{\big|x - a\big|} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} \frac{\big|f(x) - f(a) - L_a(x - a)\big|}{\big|x - a\big|} = 0\,.$$

em que $L_a\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $L_a(y) = c\,y$.

Esta expressão pode ser generalizada para funções cujo domínio está contido em $\mathbb{R}^n$.

Definição:

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in U$.
Diz-se que f é **diferenciável no ponto** a se existir uma aplicação linear

$$L_a\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{\big|f(x) - f(a) - L_a(x-a)\big|}{\|x-a\|} = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{v \to 0} \frac{\big|f(a+v) - f(a) - L_a(v)\big|}{\|v\|} = 0\,.$$

Note-se que nas condições acima, f é diferenciável em a se e só se

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L_a(x-a)}{\|x-a\|} = 0\,.$$

Teorema:

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in U$.
Se f é diferenciável em a então existe **uma e uma só** aplicação linear $L_a\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(a+v) - f(a) - L_a(v)}{\|v\|} = 0\,.$$

Definição:
A esta aplicação linear chama-se **derivada de f no ponto a** e representa-se por $f'(a)$. É também usada na literatura a notação $Df(a)$.

Teorema:

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in U$.
Se f é diferenciável em a então f possui derivada direcional em a segundo todas as direções e

$$f'(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a)\,.$$

Demonstração:

Se $v = 0$ o resultado é trivial. Se $v \neq 0$ então, por hipótese,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{\|x - a\|} = 0\,.$$

Em particular, fazendo $x = a + hv$, obtemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+hv) - f(a) - f'(a)(hv)}{|h|\|v\|} = 0\,.$$

Demonstração (continuação):

Temos assim, sucessivamente

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)-f'(a)(hv)}{|h|} = 0\,,$$

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(a+hv)-f(a)-hf'(a)(v)}{h} \right| = 0\,,$$

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(a+hv)-f(a)}{h} - f'(a)(v) \right| = 0\,,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h} - f'(a)(v) = 0$$

e, finalmente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h} = f'(a)(v)\,.$$

Observações: Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in U$.

1. Se f é diferenciável em a então existem as derivadas parciais de f em a e para todo $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,.$$

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(a) &= f'(a)(v) \\
&= f'(a)(v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n) \\
&= v_1 f'(a)(e_1) + \cdots + v_n f'(a)(e_n)) \\
&= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)
\end{aligned}$$

Observações: Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in U$.

2. Se existirem derivadas parciais de f em a, então f é diferenciável em a sse

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L_a(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(a+v) - f(a) - L_a(v)}{\|v\|} = 0\,,$$

onde L_a é a aplicação linear

$$\begin{array}{rccl} L_a\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + v_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{array}$$

Consequências: Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in U$.

$1.a)$ se não existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ para algum v então f não é diferenciável no ponto a;

$1.b)$ se para algum vetor v tivermos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) \neq v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,,$$

então f não é diferenciável em a;

$2.$ se existirem derivadas parciais de f em a, então f é diferenciável em a sse

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(a+v) - f(a) - \left[v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + v_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right]}{\|v\|} = 0\,.$$

Seja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto U diferenciável em $a \in U$. Consideremos a aplicação linear derivada de f no ponto a, $f'(a)\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Tratando-se de uma aplicação linear, $f'(a)$ pode ser identificada pela sua matriz, digamos $\mathcal{M}(f'(a))$, relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}$:

$$f'(a)(v) = \mathcal{M}(f'(a))v\,.$$

Como

$$\begin{aligned} f'(a)(v) &= v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right] . \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

temos que

$$\mathcal{M}(f'(a)) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right] .$$

Observação: Se $U \subset \mathbb{R}$ então $f'(a)$ pode ser identificada com a matriz 1×1, $\left[\frac{df}{dx}(a)\right]$, ou seja, pelo número real $\frac{df}{dx}(a)$, como é habitual.

Definição: Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in U$.

Define-se o **gradiente** de f em a e denota-se por $\nabla f(a)$ como sendo o vetor

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in U$. Se f é diferenciável em a podemos escrever

$$\begin{array}{rccc} f'(a)\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & v & \mapsto & \nabla f(a) \cdot v \end{array}$$

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e suponhamos que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $(a, b) \in U$. Então existem as derivadas parciais de f em (a, b) tendo-se

$$f(a+v_1, b+v_2) = f(a,b) + \underbrace{v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}_{L(v_1,v_2),\ \text{parte linear}} + \underbrace{o(v_1, v_2)}_{\text{resto}},$$

para todo o vetor $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(a, b) + (v_1, v_2) \in U$, onde

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{o(v_1, v_2)}{\|(v_1, v_2)\|} = 0\,.$$

Pondo $(a + v_1, b + v_2) = (x, y)$, obtemos

$$f(x,y) = f(a,b) + \underbrace{(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}_{L(x-a,y-b),\ \text{parte linear}} + \underbrace{o(x-a, y-b)}_{\text{resto}},$$

para todo $(x, y) \in U$, onde

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{o(x-a, y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0\,.$$

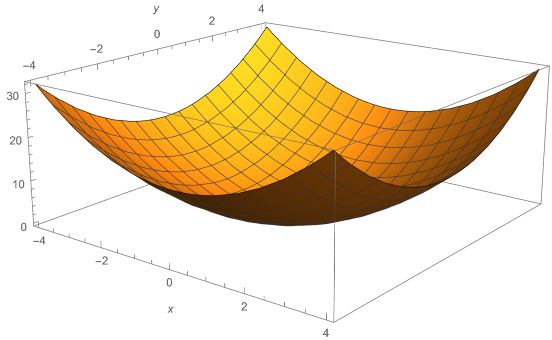
Para (x,y) suficientemente próximo de (a,b), isto é, quando a distância $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ é suficientemente pequena, os valores de $f(x,y)$ podem ser aproximados por

$$T(x-a,y-b)=f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,.$$

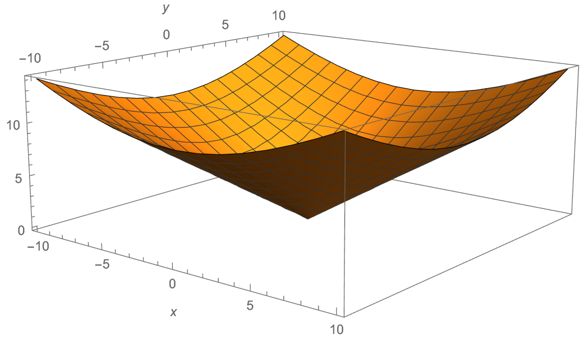
Geometricamente, significa que:

- no ponto (a,b), a superfície $z=f(x,y)$ do gráfico de f não apresenta "bico".
- para (x,y) suficientemente próximo de (a,b), tal superfície confunde-se com a superfície plana (que lhe é tangente no ponto (a,b)) de equação
$$z=f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,.$$
- para (x,y) suficientemente próximo de (a,b), a função f pode ser aproximada pela função polinomial de grau não superior a um, definida por
$$f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,.$$

Exemplo 1: A função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$ é diferenciável na origem.



Exemplo 2: A função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ não é diferenciável na origem.



Definição:

Uma função $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, diz-se de **classe** C^1 se admitir derivadas parciais contínuas.

Teorema: [**condição suficiente de diferenciabilidade**]:

Se U é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 então f é diferenciável em U.

Teorema:

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in U$.
Se f é diferenciável em a então f é contínua em a.

Demonstração:

Como f é diferenciável no ponto a, existem as derivadas parciais de f em a tendo-se

$$f(x) = f(a) + (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + o(x-a)\,, \quad \text{com} \quad \lim_{x\to a} \frac{o(x-a)}{\|x-a\|} = 0\,.$$

Tomando o limite quando x tende para a na expressão anterior e atendendo a que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{o(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a} o(x-a) = 0$, vem

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,,$$

ou seja, f é contínua em a.

Consequência:

$$f \text{ descontínua no ponto } a \implies f \text{ não é diferenciável no ponto } a.$$

Definição:

Uma função $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, diz-se de **classe** C^k e escreve-se $f \in C^k(U)$ (ou simplesmente $f \in C^k$) se f admitir derivadas parciais de qualquer ordem $p \leq k$ contínuas.

Convencionou-se que f é uma função de classe C^0 quando f é contínua e que f é de classe C^∞ quando f é de classe C^k para todo $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Escreve-se $f \in C^0(U)$ e $f \in C^\infty(U)$, respetivamente.

Exemplo:

Toda a função polinomial $p\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞.

Suponhamos que $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então existem as derivadas parciais de primeira ordem que definem novas funções em U,

$$f_{x_i}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

- Se cada uma das funções f_{x_i} é também diferenciável em U, diz-se que a função f é **duas vezes diferenciável** .

Se for este o caso, tem-se que existem em U as derivadas parciais de segunda ordem, que definem novas funções em U,

$$f_{x_i x_j}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n\,.$$

- Se cada uma das funções $f_{x_i x_j}$ é também diferenciável em U, diz-se que a função f é **três vezes diferenciável** .
- Em geral, para cada $k \in \mathbb{N}$, diz-se que a função f é k **vezes diferenciável** quando f e todas as suas derivadas parciais até à ordem $k-1$ são funções diferenciáveis em U.
- Dizemos que f é **infinitamente diferenciável** quando f e todas as suas derivadas parciais de qualquer ordem são diferenciáveis em U.