Funções Vetoriais de n Variáveis Reais

Maria Joana Torres

2021/22

Definição:

Uma **função vetorial** de n variáveis reais é uma função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & X & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

onde $X \subset \mathbb{R}^n$ é não vazio.

Uma função $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fica definida pelas suas **funções coordenadas** ou **funções componentes**

$$f_j\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

com $j = 1, 2, \ldots, m$, ou seja

$$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))\,.$$

Sejam

$$f\colon \begin{array}{ccc} A \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad\qquad g\colon \begin{array}{ccc} B \subset \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^\ell \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

tais que $f(A) \subset B$. Podemos considerar a função composta

$$g \circ f\colon \begin{array}{ccc} A \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^\ell \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

onde

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= (g_1(f(x)), g_2(f(x)), \ldots, g_\ell(f(x))) \\ &= ((g_1 \circ f)(x), (g_2 \circ f)(x), \ldots, (g_\ell \circ f)(x)) \end{aligned}$$

pelo que as funções coordenadas de $g \circ f$ são as funções reais de n variáveis reais dadas por

$$(g \circ f)_j = g_j \circ f\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell\,.$$

Definição:

Seja $f \colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função. Diz-se que f é **limitada** se

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ : \quad \|f(x)\| \leq L, \quad \forall x \in X$$

onde $\|\cdot\|$ representa uma norma qualquer em $\mathbb{R}^m$.

Teorema:

Seja $f \colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial com $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Então f é limitada se se só se cada função coordenada f_j é limitada.

Definição:

Seja $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função e $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X'$ um ponto de acumulação de X.

Diz-se que $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_m)$ é o **limite de $f(x)$ quando x tende para a**, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell,$$

quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $\|f(x) - \ell\| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < \|x - a\| < \delta$. Simbolicamente:

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \qquad 0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| < \epsilon.$$

Observação:

A definição de limite envolve uma norma de $\mathbb{R}^n$ e outra de $\mathbb{R}^m$, mas da equivalência de duas quaisquer normas em $\mathbb{R}^k$, a existência de limite não depende das normas fixadas.

Teorema:

Sejam

$f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ com $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $a \in X'$ e $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$.

Então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ se e só se $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$, para $i = 1, 2, \ldots, m$.

Demonstração:

Simplesmente usar a norma do máximo em $\mathbb{R}^m$.

Definição:

Uma função $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se **contínua no ponto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$** quando

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in\ X \qquad \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Chama-se **descontínua no ponto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$** uma função $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que não é contínua nesse ponto.

Diz-se que $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma **função contínua** quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.

Observação:

De modo claro, a definição de continuidade não depende das normas fixadas em $\mathbb{R}^n$.

<u>**Proposição**</u>:

Sejam $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função e $a \in X$. A função f é contínua em a se e só se ocorre uma das situações seguintes:

1. a é ponto isolado de X
2. a é ponto de acumulação de X e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Teorema:

Sejam

$f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ com $f = (f_1, \ldots, f_m)$ e $a \in X$.

Então f é contínua em a se se só se $f_1, f_2, \ldots, f_m$ forem contínuas em a.

Demonstração:

Simplesmente usar a norma do máximo em $\mathbb{R}^m$.

Teorema **[Continuidade da função composta]**:

Sejam $f\colon A\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ e $f\colon B\subset\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^\ell$ tais que $f(A)\subset B$ e $a\in A$.
Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$ então $g\circ f$ é contínua em a.

Definição:

Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e seja $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, a **derivada partial de f em ordem a x_i no ponto a** é o limite, se existir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\, e_i) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}.$$

Definição:

Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, a **função derivada parcial de f em ordem a x_i** é a função vetorial de n variáveis reais definida por:

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}: & V_i \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,, \end{array}$$

onde V_i é o subconjunto dos pontos de U para os quais a derivada partial de f em ordem a x_i existe.

Notação:

As notações mais usadas para a derivada parcial de f em ordem a x_i são:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{x_i}, \quad D_{x_i} f, \quad D_i f$$

Observação:

Se $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\,e_i)-f(a)}{h} \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(a+h\,e_i)-f_1(a)}{h}, \ldots, \lim_{h\to 0} \frac{f_m(a+h\,e_i)-f_m(a)}{h}\right)
\end{aligned}$$

pelo que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a)\right)$$

Definição:

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e seja $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Consideremos um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, com $v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$.

A **derivada direcional de f no ponto a segundo o vetor v** é o limite, se existir,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\,v) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hv_1, \ldots, a_n + hv_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}.$$

Notação:

As notações mais usadas para a derivada direcional são:

$$\frac{\partial f}{\partial v}, \quad f_v, \quad D_v f$$

Observação:

Se $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ então

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h\,v)-f(a)}{h}\\ &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{f_1(a+h\,v)-f_1(a)}{h}, \ldots, \lim_{h\to 0}\frac{f_m(a+h\,v)-f_m(a)}{h}\right)\end{aligned}$$

pelo que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial v}(a)\right)$$

Definição:

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $a \in U$.
Diz-se que f é **diferenciável no ponto** a se existir uma aplicação linear

$$L_a\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L_a(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|f(a+v) - f(a) - L_a(v)\|}{\|v\|} = 0\,.$$

Note-se que nas condições acima, f é diferenciável em a se e só se

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L_a(x-a)}{\|x-a\|} = 0\,.$$

Teorema:

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $a \in U$.
Se f é diferenciável em a então existe **uma e uma só** aplicação linear $L_a\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|f(a+v) - f(a) - L_a(v)\|}{\|v\|} = 0\,.$$

Definição:
A esta aplicação linear chama-se **derivada de f no ponto a** e representa-se por $f'(a)$. É também usada na literatura a notação $Df(a)$.

Teorema:

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $a \in U$.
Se f é diferenciável em a então f possui derivada direcional em a segundo todas as direções e

$$f'(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a)\,.$$

Demonstração:

Se $v = 0$ o resultado é trivial. Se $v \neq 0$ então, por hipótese,

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0\,.$$

Em particular, fazendo $x = a + hv$, obtemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+hv) - f(a) - f'(a)(hv)\|}{|h|\|v\|} = 0\,.$$

Demonstração (continuação):

Temos assim, sucessivamente

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+hv) - f(a) - f'(a)(hv)\|}{|h|} = 0\,,$$

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(a+hv) - f(a) - hf'(a)(v)}{h} \right\| = 0\,,$$

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(a+hv) - f(a)}{h} - f'(a)(v) \right\| = 0\,,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h} - f'(a)(v) = 0$$

e, finalmente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h} = f'(a)(v)\,.$$

Observações: Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $a \in U$.

1. Se f é diferenciável em a então existem as derivadas parciais de f em a e para todo $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,.$$

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a) &= f'(a)(v) \\ &= f'(a)(v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n) \\ &= v_1 f'(a)(e_1) + \cdots + v_n f'(a)(e_n)) \\ &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)) \end{aligned}$$

Observações: Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $a \in U$.

2. Se existirem derivadas parciais de f em a, então f é diferenciável em a sse

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L_a(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|f(a+v) - f(a) - L_a(v)\|}{\|v\|} = 0\,,$$

onde L_a é a aplicação linear

$$\begin{array}{rccl} L_a\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + v_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{array}$$

Teorema:

Uma função $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em a se e só se cada uma das funções coordenadas é diferenciável em a.

Demonstração:

É suficiente atender a que f é diferenciável em a se e só se

$$\lim_{v\to 0} \frac{f(a+v) - f(a) - \dfrac{\partial f}{\partial v}(a)}{\|v\|} = 0\,,$$

e que esta condição vetorial equivale às m condições

$$\lim_{v\to 0} \frac{f_i(a+v) - f_i(a) - \dfrac{\partial f_i}{\partial v}(a)}{\|v\|} = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Corolário: [**condição suficiente de diferenciabilidade**]:

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $a \in U$.
Se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ são contínuas no ponto a então f é diferenciável no ponto a.

Seja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida no aberto U, com $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.
Sabemos que

- f é contínua se e só se $f_1, f_2, \ldots, f_m$ são contínuas
- f é diferenciável se e só se $f_1, f_2, \ldots, f_m$ são diferenciáveis

Estes resultados motivam as seguintes definições:

1. dado $k \in \mathbb{N}$, dizemos que a função f é k **vezes diferenciável** quando $f_1, f_2, \ldots, f_m$ forem k vezes diferenciáveis;
2. dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, dizemos que a função f é de **classe** C^k **em** U, e escrevemos $f \in C^k(U)$, quando $f_1, f_2, \ldots, f_m$ forem de classe C^k em U.

Seja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função definida no aberto U diferenciável em $a \in U$. Consideremos a aplicação linear derivada de f no ponto a, $f'(a)\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Tratando-se de uma aplicação linear, $f'(a)$ pode ser identificada pela sua matriz relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^m$. Esta matriz chama-se **matriz jacobiana** de f no ponto a e representa-se por $J_f(a)$:

$$f'(a)(v) = J_f(a)v\,.$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
f'(a)(v) &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \\
&= v_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix} + \cdots + v_n \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\
&= J_{f}(a) . v
\end{aligned}
$$

Observação:

1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $a \in U$. Se f é diferenciável em a podemos escrever

$$\begin{array}{rccc} f'(a)\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & v & \mapsto & J_f(a).v \end{array}.$$

2. A matriz jacobiana está para a função vetorial $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ como o vetor gradiente está para a função escalar $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$. Reparemos que podemos visualizar a matriz jacobiana como:

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(a) \\ \nabla f_2(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{bmatrix}$$

Teorema:

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in U$.
Se f é diferenciável em a então f é contínua em a.

Demonstração:

Como f é diferenciável no ponto a, existem as derivadas parciais de f em a e

$$f(x) = f(a) + (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + o(x-a)\,, \quad \text{com} \quad \lim_{x \to a} \frac{o(x-a)}{\|x-a\|} = 0\,.$$

Tomando o limite quando x tende para a e atendendo a que

$$\lim_{x \to a} \frac{o(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to a} o(x-a) = 0\,,$$

obtemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,,$$

ou seja, f é contínua em a.

Consequência:

f descontínua no ponto a $\Longrightarrow$ f não é diferenciável no ponto a.

Teorema: **[da derivação da função composta]**

Sejam $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g\colon V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ funções definidas nos abertos U e V tais que $f(U) \subset V$ e $a \in U$.

Se f é diferenciável em a e g é diferenciável em $f(a)$ então $g \circ f$ é diferenciável em a e

1. **regra da cadeia em termos de aplicações lineares derivadas**

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a) \qquad \text{(composição de aplicações lineares)}$$

ou, equivalentemente,

2. **regra da cadeia em termos das matrizes jacobianas**

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)).J_f(a) \qquad \text{(produto de matrizes)}$$

(onde $\cdot$ representa o produto de matrizes).

Observação:

Com as notações do teorema da derivação da função composta e usando o produto de matrizes, concluímos que se

$$f = (f_1, \dots, f_m), \quad g = (g_1, \dots, g_\ell) \quad \text{e} \quad g \circ f = (h_1, \dots, h_\ell)$$

então para todo $j \in \{1, \dots, \ell\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ e $a \in U$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(a) &= \frac{\partial g_j}{\partial x_1}(f(a))\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial g_j}{\partial x_2}(f(a))\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a) + \cdots + \frac{\partial g_j}{\partial x_m}(f(a))\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \\ &= \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial x_s}(f(a))\frac{\partial f_s}{\partial x_i}(a)\,. \end{aligned}$$

Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1, com U e V abertos.

Questão: Quando é que f possui inversa e, nos casos em que a inversa existe, como obter a sua derivada?

- Se f for bijetiva, então f possui inversa (em todo o seu domínio) e diz-se que f é **globalmente invertível**.
- Mas mesmo que f seja diferenciável, não devemos esperar que a sua inversa, f^{-1} seja também diferenciável.

  Exemplo: Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^3, y^3)$. Temos que $f^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $f^{-1}(x,y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$.
  É imediato que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e, no entanto, f^{-1} não é diferenciável em vizinhança alguma da origem uma vez que as derivadas parciais não estão definidas na origem.

Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1, com U e V abertos.

Questão: Qual a condição fundamental que garante a diferenciabilidade da inversa f^{-1}?

Em $\mathbb{R}$ temos que:

- dada $h\colon I \longrightarrow J$, com I e J intervalos, e $h \in C^1(I)$, tem-se h invertível e $h^{-1} \in C^1(J)$ se e só se $h'(a) \neq 0$, $\forall a \in I$.

Suponhamos que $f\colon U \longrightarrow V$ possui inversa $g\colon V \longrightarrow U$. Então

$$g \circ f = \mathrm{id}_U, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_V .$$

Se f e g forem ambas diferenciáveis, então

$$(g \circ f)'(a) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, \qquad (f \circ g)'(b) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} , \quad \forall a \in U, \ \forall b \in V .$$

Por outro lado, pela regra da cadeia, para $a \in U$,

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

$$(f \circ g)'(f(a)) = f'(g(f(a))) \circ g'(f(a)) = f'(a) \circ g'(f(a)) .$$

Consequentemente, as aplicações lineares $f'(a)$ e $g'(f(a))$ são tais que

$$g'(f(a)) \circ f'(a) = f'(a) \circ g'(f(a)) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall a \in U ,$$

o que significa que a aplicação linear $f'(a)$ é invertível e que a sua inversa é $g'(f(a))$.

Então $f'(a)$ é um isomorfismo em $\mathbb{R}^n$, para todo $a \in U$, tendo-se

$$\det(J_f(a)) \neq 0, \quad \forall a \in U\,.$$

Então, dada f diferenciável,

$$(\,f \text{ invertível} \wedge f^{-1} \text{ diferenciável}\,) \implies \det(J_f(a)) \neq 0, \quad \forall a \in U\,.$$

Questão: Reciprocamente, será que dada f diferenciável,

$$\det(J_f(a)) \neq 0, \quad \forall a \in U \implies (\,f \text{ invertível} \wedge f^{-1} \text{ diferenciável}\,)\,?$$

A resposta é negativa:

Exemplo: Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.
A função é de classe C^∞, e

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$\det(J_f(x,y)) = e^{2x} \neq 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Mas, f não é invertível, uma vez que não é injetiva, pois

$$f(x,y) = f(x, y + 2k\pi), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Teorema: **[da função inversa]**

Sejam $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 no aberto U e $a \in U$.

Se $\det(J_f(a)) \neq 0$ então existem abertos V, W de $\mathbb{R}^n$, com $a \in V$, $f(a) \in W$, tais que:

- a restrição $f\colon V \longrightarrow W$ é invertível;
- a sua inversa $f^{-1}\colon W \longrightarrow V$ é de classe C^1 em W;
- $(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$ ou seja $J_{f^{-1}}(f(a)) = (J_f(a))^{-1}$.

  [a derivada da inversa é a inversa da derivada, cada uma delas calculada num ponto adequado]

Sejam $F = (F_1, \ldots, F_m) \colon U \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida no aberto U e $c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m$.

Consideremos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) & = & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) & = & c_m \end{array} \right.$$

Pretende-se encontrar condições suficientes para que o sistema seja solúvel em ordem a $y = (y_1, \ldots, y_m)$.

No caso em que cada função F_j é linear, o sistema dado torna-se um sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}y_1 + \cdots + b_{1m}y_m & = & c_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + b_{m1}y_1 + \cdots + b_{mm}y_m & = & c_1 \end{array}\right.$$

Sabemos que, se

$$\det \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} \neq 0$$

então o sistema é resolúvel em ordem a $y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Isso significa que existem funções $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}y_1 + \cdots + b_{1m}y_m & = & c_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + b_{m1}y_1 + \cdots + b_{mm}y_m & = & c_1 \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y_1 & = & g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m & = & g_m(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right.$$

Observação: Notemos que se $z_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(z_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(z_0) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(z_0) \end{pmatrix}$$

Teorema: **[da função ímplicita]** Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^{n+m}$, $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ e $F = (F_1, \dots, F_m) \colon U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1.
Se $z_0 \in U$ é tal que $F(z_0) = c$ e

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(z_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(z_0) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(z_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

então existem $V \subset U$ aberto de $\mathbb{R}^{n+m}$, W aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f \colon W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tais que $z_0 \in V \subset U$ e

$$\left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in V \\ F(x,y) = c \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in W \\ y = f(x) \end{array} \right.$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_m)$.
Para todo $x \in W$, a matriz jacobiana da função implícita f é dada por

$$J_f(x) = -\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, f(x))\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, f(x))\right].$$

Observação:

Nas condições do Teorema da Função Implícita tem-se:

$$J_f(x) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, f(x)) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x, f(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x, f(x)) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x, f(x)) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x, f(x)) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x, f(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x, f(x)) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x, f(x)) \end{pmatrix}$$

Definição:

Diz-se que um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ é uma **curva** ou uma **linha** se for a imagem de uma função contínua $\gamma \colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo da reta real.

À função γ chama-se **caminho** ou **trajetória**.

Definição:

Seja $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e Γ a curva descrita por γ. Ao vetor

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

chama-se **vetor velocidade** à curva no ponto $\gamma(t)$.

- Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ uma curva descrita por um caminho $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
- Seja $p \in \Gamma$ e $t_0 \in I$ tal que $p = \gamma(t_0)$.
- Seja $T = \gamma'(t_0)$ o vator tangente a Γ em p.

Definição:

Chama-se **reta tangente** a Γ no ponto p ao conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = p + \lambda T,\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam A e B dois pontos em $\mathbb{R}^n$ e $[A, B]$ o segmento de reta que os une. Este segmento de reta pode ser descrito pela função $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$\gamma(t) = A + t(B - A)\,.$$

De facto, $[A, B]$ é a imagem da função γ, sendo $A = \gamma(0)$ e $B = \gamma(1)$.
Para cada t, o ponto $x = \gamma(t)$ encontra-se sobre a reta definida pela direção do vetor $B - A$.

A função γ é de classe C^1 e $\gamma'(t) = B - A$. Assim,

$$\|B - A\| = \int_0^1 \|B - A\|\, dt = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt\,,$$

ou seja, o comprimento do segmento $[A, B]$ é dado pelo integral $\displaystyle\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt$.

Definição:

Chama-se **comprimento de uma linha** $\Gamma \in \mathbb{R}^n$, descrita por um caminho $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com $b > a$, de classe C^1, ao integral

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt\,.$$

Definição:

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $k \in \mathbb{R}$.

Chama-se **conjunto de nível k (ou hipersuperfície de nível k)** da função f ao subconjunto $\mathcal{N}_k$ de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\mathcal{N}_k = \{x \in X : \ f(x) = k\}\,.$$

- $n = 2 \rightsquigarrow$ os conjuntos de nível designam-se por **curvas de nível**.
- $n = 3 \rightsquigarrow$ os conjuntos de nível designam-se por **superfícies de nível**.

Observação:

Note-se que o gráfico de uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é um conjunto de nível em $\mathbb{R}^{n+1}$, uma vez que

$$\mathrm{Gr}\,(f) = \{(x, z) \in U \times \mathbb{R} : \ f(x) - z = 0\}\ .$$

Questões:

Como encontrar a reta tangente (ou a normal) a uma circunferência num ponto?

Como encontrar o plano tangente (ou a reta normal) a uma superfície esférica num dado ponto?

Primeiro precisamos de definir o que se entende por **hiperplano** (reta ou plano, se $n = 1$ ou $n = 2$) **tangente** a um conjunto de nível de uma dada função.

Definição:

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, $k \in \mathbb{R}$ e $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em a tal que $\nabla f(a) \neq 0$. Suponhamos que $f(a) = k$. Define-se

- **reta normal a $\mathcal{N}_k$ no ponto $\boldsymbol{a}$** como sendo a reta definida pelo ponto a e pelo vetor $\nabla f(a)$, ou seja, a reta de equação

$$x = a + \lambda \nabla(a)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,;$$

- **reta tangente a $\mathcal{N}_k$ no ponto $\boldsymbol{a}$** como sendo qualquer reta que passe em a e que tenha a direção do vetor velocidade num ponto t_0 de qualquer caminho derivável γ cuja imagem esteja contida em $\mathcal{N}_k$ e tal que $\gamma(t_0) = a$ e $\gamma'(t_0) \neq 0$.

Vejamos que as definições acima têm sentido, isto é, que as retas tangentes são de facto perpendiculares à reta normal.

Teorema:

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ e $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em a tal que $\nabla f(a) \neq 0$. Nestas condições, se $f(a) = k$, a reta normal a $\mathcal{N}_k$ no ponto a é perpendicular a qualquer reta tangente a $\mathcal{N}_k$ em a.

Dem.:

Sejam I um intervalo, $\gamma\colon I \longrightarrow U$ uma curva derivável e $t_0 \in I$ tais que $\gamma(I) \subset \mathcal{N}_k$ e $\gamma(t_0) = a$. Nestas condições a função $f \circ \gamma$ é constante.
Derivando, obtemos

$$f'(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0)) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla f(a).\gamma'(t_0) = 0\,.$$

Tem assim sentido a seguinte definição.

Definição:

Nas condições do teorema anterior, define-se **hiperplano tangente a $\mathcal{N}_k$ no ponto $\boldsymbol{a}$** como o conjunto dos vetores tangentes a $\mathcal{N}_k$ no ponto a.

Como consequência, o hiperplano tangente a $\mathcal{N}_k$ num ponto a é definido por a e pelo vetor $\nabla f(a)$ ou seja, tem por equação

$$(x-a).\nabla f(a) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$