5. Aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$

Definição

Sejam n e m números naturais. Uma aplicação linear (ou transformação linear) de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$ é uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que verifica, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

(i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$, [f preserva $+$]

(ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$. [$f$ preserva $\cdot$]

Exemplo

- A **aplicação identidade** $\begin{array}{rcl} id : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & u \end{array}$ é uma aplicação linear.
- A **aplicação nula** $\begin{array}{rcl} 0 : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ u & \mapsto & 0_{\mathbb{R}^m} \end{array}$ é uma aplicação linear.

Exemplos

1. A aplicação $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x \end{array}$ é uma aplicação linear,

   enquanto que a aplicação $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$ **não** o é.

2. Considere as aplicações $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, por

   $$f(a, b) = (3a + b, 0, b - a)$$

   $$g(a, b) = (a^2, 0, a + b).$$

   A aplicação f é linear mas g **não** o é.

3. Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$. A aplicação $\begin{array}{rccc} f_A: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & x & \mapsto & Ax \end{array}$ é uma aplicação linear.

   [Note-se que este exemplo mostra que, dada uma matriz, existe uma aplicação linear que lhe está associada.]

Exercício

Determine se é linear a aplicação

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

definida, para cada $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, por:

a) $f(a, b, c) = (b, 0)$.

b) $f(a, b, c) = (a + 1, b)$.

c) $f(a, b, c) = (ab, 0)$.

d) $f(a, b, c) = (|c|, 0)$.

Teorema

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então, para quaisquer $v, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,

(i) $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$. [$f$ preserva o vetor nulo]

(ii) $f(-v) = -f(v)$. [f preserva os simétricos]

(iii) $f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_k f(v_k)$.
[f preserva as combinações lineares]

Exercício

Verifique, usando o teorema anterior, que as aplicações seguintes não são lineares.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(a, b, c) = (3b, a + 2)$, para cada $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $g(a, b, c) = (b, a - c, 1, c)$, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Definição

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Como cada $f(e_j)$ pertence a $\mathbb{R}^m$, pode-se escrever

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\ f(e_2) & = & (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) \\ & \vdots & \\ f(e_n) & = & (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \end{array}$$

A matriz de ordem $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

cuja coluna j é $f(e_j)$, é chamada a matriz da aplicação linear f.

Exemplo

Consideremos a aplicação linear

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b,c) & \mapsto & (2a-b+3c, a+2c) \end{array}$$

A base canónica de $\mathbb{R}^3$ é $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e tem-se

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0) & = & (2,1) \\ f(0,1,0) & = & (-1,0) \\ f(0,0,1) & = & (3,2). \end{array}$$

Deduz-se assim que a matriz da aplicação linear f é a seguinte matriz de ordem 2×3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo (continuação)

Note-se que, para cada $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - b + 3c \\ a + 2c \end{bmatrix} = f(x).$$

Ou seja, a matriz A define a aplicação f. Assim, A pode ser usada para determinar a imagem por f de qualquer elemento de $\mathbb{R}^3$. Por exemplo,

$$f(2, 3, -1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = (-2, 0).$$

Teorema

Dada uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ a matriz de f. Então $f(x) = Ax$ para todo o $x \in \mathbb{R}^n$ e A é a única matriz que permite definir f desta forma.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear e suponhamos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz de f. Pelo teorema anterior, A determina f. Tem-se, então,

$$f(x) = Ax = A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 3a + b \\ -a + 2b \\ b \end{bmatrix}$$

donde se conclui que

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (a, b) & \mapsto & (a, 3a + b, -a + 2b, b) \end{array}$$

Exercício

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear determinada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

   a) Calcule $f(1,-2,3)$.

   b) Determine $f(a,b,c)$ para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

2. Considere a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b,c) & \mapsto & (a+b, b+c) \end{array}$$

   a) Calcule $f(1,2,3)$.

   b) Determine a matriz que representa f.

Teorema

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ aplicações lineares.

(i) A aplicação composta de g com f

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^p \\ & u & \mapsto & (g \circ f)(u) = g(f(u)) \end{array}$$

ainda é uma aplicação linear.

(ii)
- Se F é a matriz que representa a aplicação linear f e
- G é a matriz que representa a aplicação linear g, então
- GF é a matriz que define a aplicação linear $g \circ f$.

Teorema

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e seja F a matriz de f.

(i) A aplicação linear f é bijetiva se e só se a matriz F é invertível.

(ii) Se f é bijetiva, então

- existe a aplicação inversa de f

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \\ & u' & \mapsto & f^{-1}(u') = u \end{array}$$

  onde u é o (único) elemento de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(u) = u'$, e
- f^{-1} é uma aplicação linear bijetiva.

(iii) Se f é bijetiva, então

- F^{-1} é a matriz que define a aplicação linear f^{-1}.

TEOREMA

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplicações lineares.

(i) A aplicação soma de f e g

$$\begin{array}{rccc} f+g: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & u & \mapsto & (f+g)(u) = f(u) + g(u) \end{array}$$

também é uma aplicação linear.

(ii)
- Se F é a matriz que representa a aplicação linear f e
- G é a matriz que representa a aplicação linear g, então
- $F + G$ é a matriz que define a aplicação linear $f + g$.

Teorema

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) A aplicação produto de α por f

$$\begin{array}{rccc} \alpha f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & u & \mapsto & (\alpha f)(u) = \alpha f(u) \end{array}$$

ainda é uma aplicação linear.

(ii)
- Se F é a matriz que representa a aplicação linear f, então
- αF é a matriz que define a aplicação linear αf.

Exercício

Considere as aplicações lineares

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x-y, 3z, x+2z) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x, x+y, y+z) \end{array}.$$

Sem determinar a expressão analítica de h, indique a matriz da aplicação linear h para

a) $h = g + 4f$.

b) $h = g \circ f$.

c) $h = f \circ g$.

d) $h = g^{-1}$.

Definição

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear.

- O núcleo de f é o conjunto $Nuc(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\}$, também denotado por $Ker(f)$.
- A imagem de f é o conjunto $Im(f) = \{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Ou seja, $Im(f)$ é o contradomínio de f.

Exemplo

Consideremos a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b, c) \mapsto (a, 2b)$.

Então,

$$\begin{aligned} Nuc(f) &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(a,b,c) = (0,0)\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,2b) = (0,0)\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = 0\} \\ &= \{(0,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{f(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(a,2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Teorema

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então,

(i) $Nuc(f)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

(ii) $Im(f)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.

Demonstração: Para mostrar **(i)** consideremos a matriz A da aplicação linear f. Tem-se

$$Nuc(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0_{\mathbb{R}^m}\} = N(A).$$

Ou seja, $Nuc(f)$ é o *núcleo* ou *espaço nulo* da matriz A e, portanto (ver p. 8 do cap. 4), é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Exercício. $\square$

Definição

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Define-se

- a nulidade de f como sendo $nul(f) = dim(Nuc(f))$.
- a característica de f como sendo $car(f) = dim(Im(f))$.

Teorema

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear, então

$$nul(f) + car(f) = n.$$

Teorema

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então,

(i) f é uma aplicação injetiva se e só se $Nuc(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$;

(ii) f é uma aplicação sobrejetiva se e só se $Im(f) = \mathbb{R}^m$.

Demonstração: É claro que a afirmação (ii) é verdadeira. Provemos (i). Comecemos por supor que f é uma aplicação injetiva. Seja u um elemento arbitrário de $Nuc(f)$. Então $f(u) = 0_{\mathbb{R}^m} = f(0_{\mathbb{R}^n})$ e como f é injetiva deduz-se que $u = 0_{\mathbb{R}^n}$. Conclui-se assim que $Nuc(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Reciprocamente, suponhamos que $Nuc(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $f(u) = f(v)$. Então

$$f(u - v) = f(u) - f(v) = 0_{\mathbb{R}^m},$$

o que prova que $u - v \in Nuc(f)$. Como $Nuc(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, deduz-se que $u - v = 0_{\mathbb{R}^m}$, e consequentemente que $u = v$. Conclui-se assim que f é uma aplicação injetiva. $\square$

Exercício

Indique se cada uma das aplicações lineares seguintes é injetiva, determinando o seu núcleo.

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x, y+z, y-z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (a,b,c) & \mapsto & (2a, b+c, 0, a+b-c). \end{array}$$