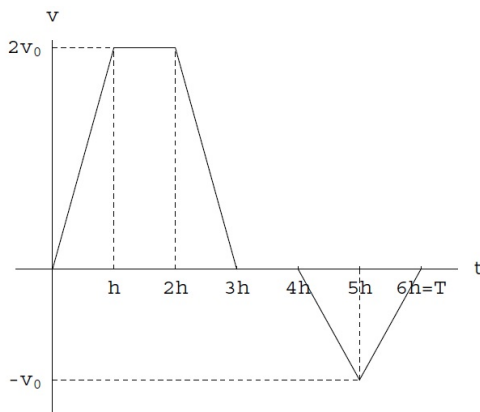




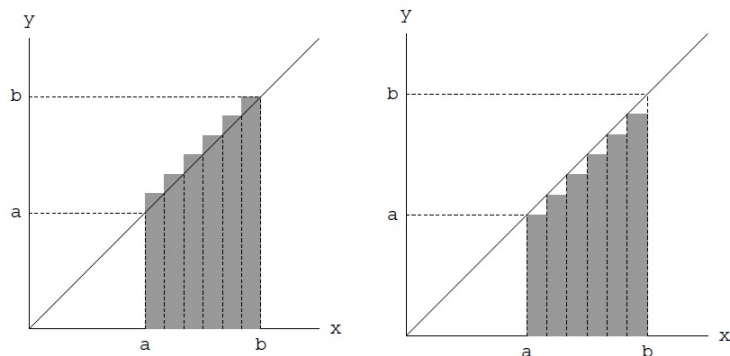
1. Um objeto move-se ao longo de um eixo de coordenadas  $x$ . O seu movimento é descrito por uma função  $x = x(t)$  no intervalo de tempo  $[0, T]$ . Sabendo que a posição no instante inicial é  $x(0) = 0$  e que a lei das velocidades deste movimento é descrita pelo seguinte gráfico:



determine:

- (a) os intervalos de tempo onde o objeto está respectivamente: parado, em movimento uniforme, em movimento acelerado e em movimento desacelerado;
  - (b) os deslocamentos efetuados nestes intervalos de tempo;
  - (c) as distâncias percorridas nos mesmos intervalos de tempo;
  - (d) a posição no instante  $t = T$  e o deslocamento total;
  - (e) a lei do movimento  $x(t)$ . Esboce o seu gráfico.
2. Considere a sequência de pontos  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  no intervalo  $[a, b]$ , onde  $x_i = a + i(b-a)/n$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . As somas superior e inferior da função  $f(x) = x$  neste intervalo são:

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{b-a}{n} \right) \text{ e } s_n = \sum_{i=1}^n x_{i-1} \left( \frac{b-a}{n} \right).$$



Mostre que:

- (a)  $S_n = (b-a) \left( a + (b-a) \frac{n+1}{2n} \right);$
- (b)  $s_n = (b-a) \left( a + (b-a) \frac{n-1}{2n} \right);$
- (c) ambas estas sucessões convergem para  $(b^2 - a^2)/2;$
- (d) conclua que  $\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$

3. Calcule os seguintes integrais:

- |   |  |
|---|--|
| (1) $\int_0^3 x^2 \, dx$                                    | (2) $\int_2^3 (3x^2 - 4x + 2) \, dx$   |
| (3) $\int_0^1 e^{\pi x} \, dx$                              | (4) $\int_0^2  (x-1)(3x-2)  \, dx$   |
| (5) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$      | (6) $\int_{-3}^5  x-1  \, dx$  |
| (7) $\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}} \, dx$     | (8) $\int_0^1 \log(x^2+1) \, dx$   |
| (9) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} \, dx$                           | (10) $\int_{-5}^0 2x\sqrt{4-x} \, dx$  |
| (11) $\int_0^2 x^3 e^{x^2} \, dx$                           | (12) $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ |
| (13) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}  \operatorname{sen} x  \, dx$   | (14) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 u \operatorname{sen} u \, du$                     |
| (15) $\int_{-4}^0 t \sqrt{1+t^2} \, dt$                     | (16) $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$                                 |
| (17) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x \, dx$    | (18) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2x) \cos x \, dx$                     |
| (19) $\int_1^{e^3} \log t \, dt$                            | (20) $\int_0^{\pi/4} e^x \left( e^x + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) \, dx$     |
| (21) $\int_0^{\pi/2}  \operatorname{sen} x - \cos x  \, dx$ | (22) $\int_{-3}^2 \sqrt{ x } \, dx$  |

$$(23) \quad \int_0^2 f(x) dx \quad \text{com} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

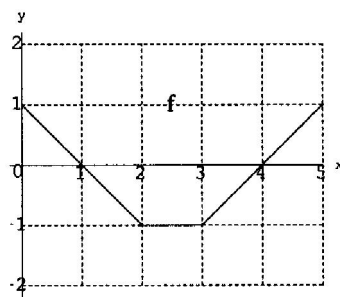
$$(24) \quad \int_0^1 g(x) dx \quad \text{com} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

4. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que

$$\int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calcule  $f(\frac{\pi}{4})$  e  $f'(\frac{\pi}{4})$ .

5. Considere  $F : [0, \sqrt{5}] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$ , onde a função  $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  é dada pelo seguinte gráfico



Determine  $F(\sqrt{3})$  e  $F'(\sqrt{3})$ .

6. Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de  $F$ , sendo  $F$  definida por:

$$(a) \quad F(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(b) \quad F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(c) \quad F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

7. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável tal que  $f(0) = 2$  e  $f'(x) > 4$ , para todo  $x \neq 0$ , e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt - (2x + 2x^2).$$

- (a) Calcule  $g'(x)$  e  $g''(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Mostre que  $g(0) = g'(0) = 0$  e que  $g''(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ .
- (c) Estude a monotonia de  $g$  e conclua que  $\int_0^x f(t) dt > 2x + 2x^2$ ,  $\forall x \neq 0$ .

8. Considere a função real de variável real definida por  $F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2} dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- (a) Calcule os zeros de  $F$ .
- (b) Estude a paridade da função  $F$ .
- (c) Determine os intervalos de monotonia da função.

9. Dê exemplo de, ou mostre porque não existe:

- (a) uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  não integrável;
- (b) uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável mas não integrável;
- (c) uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável mas não primitivável;
- (d) uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  primitivável mas não derivável;
- (e) uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável mas não primitivável;
- (f) uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  não integrável tal que  $|f|$  seja integrável.

10. Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

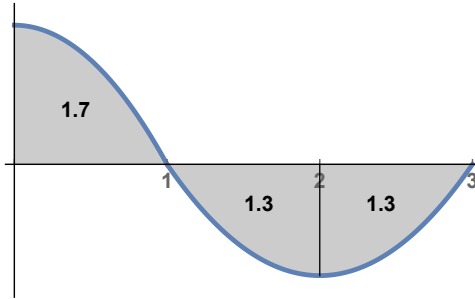
- (a)  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$
- (b)  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x$ ,  $y = x^2$
- (c)  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 3x$ ,  $y = -x^2 + 4$
- (d)  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ,  $x^2 + (y + 2)^2 = 4$
- (e)  $x = 0$ ,  $x = \pi/2$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$
- (f)  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$
- (g)  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = -x + 2$
- (h)  $x = -1$ ,  $y = |x|$ ,  $y = 2x$ ,  $x = 1$
- (i)  $y = \log x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e^2$
- (j)  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $y = 2 \sin x$ ,  $y = -\sin x$
- (k)  $y^2 = 2x - 2$ ,  $y - x + 5 = 0$

- (l)  $y = -x^3, \quad y = -(4x^2 - 4x)$
- (m)  $y = -x^2 + \frac{7}{2}, \quad y = x^2 - 1$
- (n)  $y = 0, \quad x = -\log 2, \quad x = \log 2, \quad y = \operatorname{sh} x$

11. Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área da região

- (a)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge -x \leq y \leq x^2\}$
- (b)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq x\}$
- (c)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
- (d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$
- (e)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq e^x \wedge 0 \leq y \leq e^{-x}\}$
- (f)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq y \leq 2 - x\}$
- (g)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \wedge y \geq x^2 - 2x \wedge y \leq 4\}$
- (h)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3 \wedge x^2 - 4x + 3 \leq y \leq -x^2 + 5x - 4\}$

12. Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de uma função  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, e o eixo das abscissas, que correspondem às abscissas dos intervalos  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$  e  $[2, 3]$ , respectivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.



Nestas condições, considere a função  $F : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = \int_1^{\frac{3+x}{2}} f(t) dt$ .

(a) Preencha a tabela, determinando os correspondentes valores de  $F(x)$ :

|        |    |    |   |   |
|--------|----|----|---|---|
| $x$    | -3 | -1 | 1 | 3 |
| $F(x)$ |    |    |   |   |

- (b) Determine expressões para  $F'(x)$  e  $F''(x)$ .
- (c) Represente  $F$  graficamente.