Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Análise
2021/22

Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

1. Considere as normas de $\mathbb{R}^n$ definidas por

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\ \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ \|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \end{aligned}$$

   (a) Para $n = 2$, esboce as correspondentes bolas abertas $B((0,0),1)$.

   (b) Considere $n = 3$. Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^3$, se tem

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq 3\,\|x\|_\infty$$

2. Sejam $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e $y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|x + y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$. Prove que existe $\alpha \geq 0$ tal que $y = \alpha x$. Mostre que isto seria falso nas normas da soma e do máximo.

3. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|x - z\|_2 = \|x - y\|_2 + \|y - z\|_2$. Prove que existe $t \in [0,1]$ tal que $y = (1-t)x + tz$. Mostre que isto seria falso nas normas da soma e do máximo.

4. Diz-se que $\|\cdot\|$ verifica a regra do paralelogramo se

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

   (a) Verifique que a norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$ satisfaz a regra do paralelogramo.

   (b) Mostre que uma norma associada a um produto interno verifica a regra do paralelogramo.

5. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual. Determine, o ângulo formado pelos vectores de coordenadas $(3, \sqrt{2}, 1)$ e $(1, 0, 0)$.

6. Seja $d_{0,1} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{0,1}(x,y) = 0$ se $x = y$ e $d_{0,1}(x,y) = 1$ se $x \neq y$.

   (a) Mostre que $d_{0,1}$ é uma distância em $\mathbb{R}^2$.

   (b) Esboce as correspondentes bolas abertas $B((0,0),1/2)$, $B((0,0),1)$ e $B((0,0),2)$.

   (c) Conclua que todo o conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é limitado com relação à distância $d_{0,1}$.

7. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido da norma euclidiana. Diga se cada um dos seguintes conjuntos é limitado ou compacto.

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(xy) \leq 0\}$

   (c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z < 1\}$

   (d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y = x\}$

8. Quando possível, dê exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que:

   (a) não seja aberto nem fechado;

   (b) seja simultaneamente aberto e fechado;

   (c) seja aberto e limitado;

   (d) seja fechado não limitado;

   (e) seja aberto e conexo;

   (f) seja fechado e não conexo;

   (g) tenha o interior vazio e seja não limitado;

   (h) seja limitado mas não seja aberto nem fechado;

   (i) não contenha o seu derivado;

   (j) coincida com o seu derivado;

   (k) seja fechado e tal que $\overline{\operatorname{int} A} \neq A$;

   (l) seja aberto e tal que $\operatorname{int} \overline{A} \neq A$;

   (m) tenha um único ponto de acumulação;

   (n) tenha exactamente dois pontos de acumulação.

9. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

   (a) se $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto então A não é limitado;

   (b) se $A \subset \mathbb{R}^2$ é fechado e $B \subset \mathbb{R}^2$ é aberto então $A \cup B$ não é aberto nem fechado;

   (c) se $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$ e B é fechado então A é fechado;

   (d) $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ é aberto;

   (e) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ xy > 1\big\}$ é aberto;

   (f) se $A \subset \mathbb{R}^2$ não é aberto então A é fechado;

   (g) os conjuntos $A = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times [0,2]$ e $B = ([0,1] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) \times [0,2]$ são separados;

   (h) os conjuntos $A = \{(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) : x > 0\}$ e $B = \{(0,1), (-3,0)\}$ são separados.

10. Para cada um dos conjuntos, identifique o interior, a aderência, o derivado e a fronteira; diga se se trata de um conjunto aberto, fechado, limitado ou compacto:

   (a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1,\ 0 < x < 2\}$;

   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 3\}$;

   (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$;

   (e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 5\}$;

   (f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 7\}$;

   (g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|^2 \leq 16\}$;

   (h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}$;

   (i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 2\}$;

   (j) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 < 9\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq \|(x,y)\|^2 < 9\}$;

   (k) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$;

   (l) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 7\}$;

   (m) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2\}$;

   (n) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2\}$;

   (o) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$;

   (p) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 < 4\} = B\big((1,0,-2),2)\big)$;

   (q) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9\}$;

   (r) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3,\ |z| < 1\}$;

   (s) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 9,\ x^2 + y^2 = z\}$.

11. Diga se cada um dos seguintes conjuntos é conexo:

   (a) $\{(2,2),(\sqrt{2},3)\}$;

   (b) $B((0,0),1) \cup]3,5[\times [0,1[$;

   (c) $]0,1[\, \times \,]3,5[$;

   (d) $]-2,2[\times]-2,2[\setminus ([-1,1] \times [-1,1])$;

   (e) $\{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right),\ x > 0\}$.