Grafos eulerianos e Grafos hamiltonianos

Grafos eulerianos - definição

Neste capítulo, vamos querer encontrar caminhos num grafo que passem por todas as arestas , sem repetir arestas.

- Um caminho euleriano é um caminho simples que passa por todas as arestas do grafo.

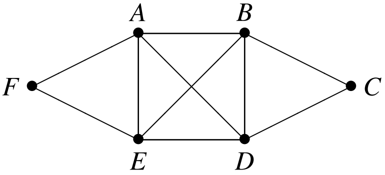
- Um circuito euleriano é um caminho euleriano fechado.

- Um grafo diz-se euleriano se admitir um circuito euleriano.

- Um grafo diz-se semieuleriano se não for euleriano mas admitir um caminho euleriano.

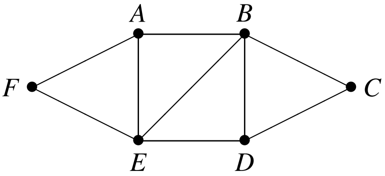
Grafos eulerianos - Exemplos

Exemplo 1 - O seguinte grafo é euleriano:



$< A, B, C, D, E, F, A, E, B, D, A >$ é um circuito euleriano do grafo.

Exemplo 2 - O grafo seguinte não é euleriano mas é semieuleriano:



$< A, B, C, D, E, F, A, E, B, D >$ é um caminho euleriano do grafo.

Teorema de Euler

Teorema de Euler - Seja G um grafo conexo. Então:

G é euleriano $\Leftrightarrow$ todos os vértices de G têm grau par

Corolário - Seja G um grafo conexo. Então:

G é semieuleriano $\Leftrightarrow$ G tem exactamente 2 vértices de grau ímpar

Notas:

- K_n é euleriano $\Leftrightarrow$ n é ímpar.
- $K_{n,m}$ é euleriano $\Leftrightarrow$ n e m são pares.

Circuitos eulerianos - algoritmo

Pretendemos um algoritmo que, dado um grafo qualquer que saibamos ser euleriano , permita determinar um circuito euleriano .

Algoritmo para determinar um circuito euleriano :

1. Começa-se por um vértice qualquer.
2. A partir do vértice escolhe-se uma aresta que ao ser apagada não desconecte o grafo (se ao apagar uma aresta, um vértice ficar isolado, apagamos esse vértice).
3. Repete-se sucessivamente o passo 2 até não restarem arestas.

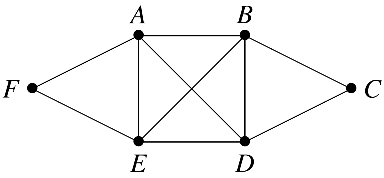
Caminhos eulerianos - algoritmo

Pretendemos um algoritmo que, dado um grafo qualquer que saibamos ser semieuleriano , permita determinar um caminho euleriano .

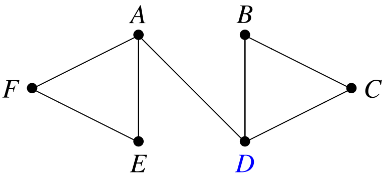
Algoritmo para determinar um caminho euleriano :

1. Começa-se por um dos vértices de grau ímpar .
2. A partir do vértice escolhe-se uma aresta que ao ser apagada não desconecte o grafo (se ao apagar uma aresta, um vértice ficar isolado, apagamos esse vértice).
3. Repete-se sucessivamente o passo 2 até não restarem arestas.

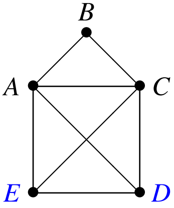
Circuitos eulerianos - Exemplo

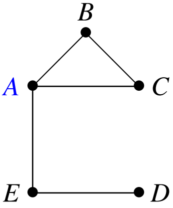


Ao escolhermos o caminho $< A, B, E, D, \cdots >$, a seguir NÃO podemos escolher o vértice A , senão o grafo restante ficaria desconexo:



Caminhos eulerianos - Exemplo





O grafo é semieuleriano e para determinarmos um caminho euleriano, temos que iniciar o caminho num dos vértices de grau ímpar: o vértice D ou E .

Ao escolhermos o caminho $< E, C, D, A, \cdots >$, a seguir NÃO podemos escolher o vértice E , senão o grafo restante ficaria desconexo.

Grafos hamiltonianos - definição

Neste capítulo, vamos querer encontrar caminhos num grafo que passem por todos os vértices , sem repetir vértices.

- Um caminho hamiltoniano é um caminho elementar que passa por todos os vértices do grafo.

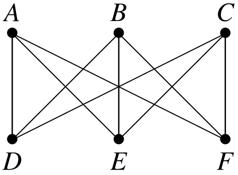
- Um ciclo hamiltoniano é um caminho hamiltoniano fechado, ou seja, um ciclo que passa por todos os vértices do grafo.

- Um grafo diz-se hamiltoniano se admitir um ciclo hamiltoniano.

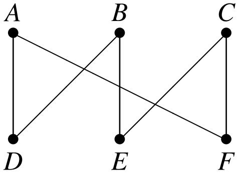
- Um grafo diz-se semi-hamiltoniano se não for hamiltoniano mas admitir um caminho hamiltoniano.

Grafos hamiltonianos - Exemplos

Exemplo 1 - $K_{3,3}$ é hamiltoniano.



contém o ciclo:



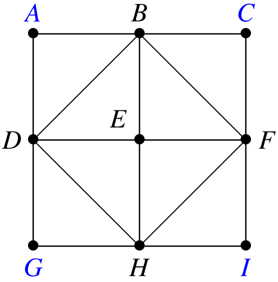
Notas:

- K_n é hamiltoniano $\Leftrightarrow$ $n \geq 3$

- $K_{n,m}$ é hamiltoniano $\Leftrightarrow$ $n = m \geq 2$

Grafos hamiltonianos - Exemplos

Exemplo 2 - O seguinte grafo G não é hamiltoniano.



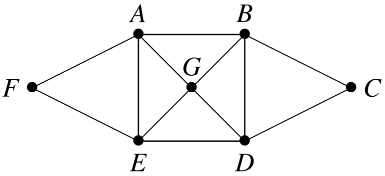
Se existisse um ciclo hamiltoniano (de comprimento 9) ele teria que passar pelo vértice A e como este tem grau 2 , teria que incluir as arestas $\{A,B\}$ e $\{A,D\}$ Repetindo este raciocínio para os vértices de grau 2, C,G,I , o ciclo hamiltoniano teria que conter as 8 arestas :

$$\{A,B\},\{B,C\},\{C,F\},\{F,I\},\{I,H\},\{H,G\},\{G,D\},\{D,A\}$$

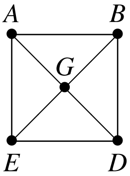
Mas como estas 8 arestas formam um ciclo de comprimento 8 não podem estar contidas no ciclo hamiltoniano (de comprimento 9).

Grafos hamiltonianos - Exemplos

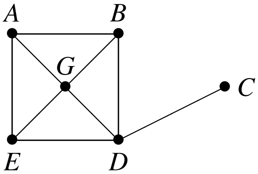
G_1



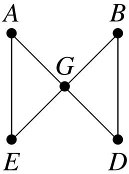
G_2



G_3



G_4



	G_1	G_2	G_3	G_4
Hamiltoniano	sim	sim	não	não
Euleriano	sim	não	não	sim

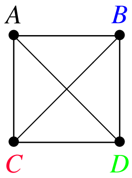
Coloração de Grafos

Uma coloração de um grafo consiste na atribuição de uma cor a cada vértice do grafo, de forma a que quaisquer dois vértices adjacentes tenham cores distintas .

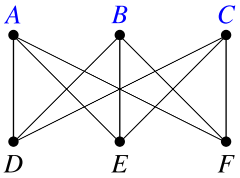
Chama-se número cromático de um grafo G ao menor número de cores para o qual é possível atribuir uma coloração dos seus vértices. O número cromático representa-se por $\chi(G)$.

Coloração de Grafos - Exemplos

K_4



$K_{3,3}$



Como em K_4 qualquer vértice está ligado a todos os outros vértices, qualquer vértice tem que ter cor distinta de todos os outros. Assim,

$$\chi(K_4) = 4 \qquad \text{e} \qquad \chi(K_{3,3}) = 2$$

Notas:

- $\chi(K_n) = n$ e $\chi(K_{n,m}) = 2$

- Para qualquer grafo G conexo, $\chi(G) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad G$ é bipartido.

Teorema das 4 Cores

- O problema da coloração de grafos tem origem no problema da coloração de mapas , de forma a que quaisquer regiões fronteiriças tenham cores distintas.

- O problema da coloração de um mapa pode ser reduzido a um problema de coloração dos vértices de um grafo planar.

- Cada região do mapa é representada por um vértice (a capital) e dois vértices são ligados por uma aresta se as regiões forem fronteiriças. O grafo assim obtido é um grafo planar conexo.

- Em 1852 conjecturou-se que bastariam 4 cores para colorir as regiões de qualquer mapa.

- Em 1976 provou-se esta conjectura com recurso a um computador IBM .

Teorema das 4 Cores

Teorema das 4 Cores - Seja G um grafo conexo. Então

$$G \text{ é planar} \quad \Rightarrow \quad \chi(G) \leq 4$$

Teorema das 4 Cores - Bastam 4 cores para colorir as regiões de qualquer mapa, de forma a que quaisquer duas regiões fronteiriças tenham cores distintas.