Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Análise
2021/22

Funções reais de n variáveis reais: diferenciabilidade

1. Usando a definição de derivada parcial num ponto, determine:

   (a) $f_x(0,0)$ e $f_y(-1,1)$ para $f(x,y) = 2x^2y$;

   (b) $f_y(0,0)$, $f_y(0,1)$ e $f_x(1,1)$ para $f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{se } x < y, \\ -x & \text{se } x \geq y. \end{cases}$

2. Determine as derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y) = 5x^3 + 2xy - y^2$

   (b) $f(x,y) = xe^y + y\,\text{sen}(xy^2)$

   (c) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

   (d) $f(x,y) = y^3 + x^2e^x$

   (e) $f(x,y) = \text{sen}\,(xy)$

   (f) $f(x,y) = \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

   (g) $f(x,y,z) = y^2 + x^2\cos(zy)$

   (h) $f(x,y,z) = \text{sen}(x\,e^{yz})$

   (i) $f(x,y,z) = \cos y + \log x + e^{yz}$

   (j) $f(x,y,z) = \left(y^2+z^3\right)^x$

   (k) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2yz^3}$

   (l) $f(x,y,z) = y^2\log(1+x^2)e^z$.

3. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

   (b) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

   (c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ se $x+y \neq 0$ e $f(x,y) = x$ se $x+y = 0$;

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

   (e) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$.

4. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$;

   (b) $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$;

   (c) $f(x,y,z) = \cos(xyz)$;

   (d) $f(x,y,z) = y^2\log x + xe^{xz}$.

5. Mostre que as funções definidas a seguir verificam as condições indicadas:

   (a) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + \mathrm{tg}\,\left(\dfrac{y}{x}\right), \qquad x^2\, f_{x^2} \;+\; 2xy\, f_{xy} \;+\; y^2\, f_{y^2} = 0;$

   (b) $g(x,y) = x\, e^{-y/x}, \qquad 2y(g_x + g_y) = x^2 g_{x^2} + y^2 g_{y^2};$

   (c) $h(x,y) = e^{-4x}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\,y), \qquad h_x - 2h_{y^2} = 0;$

   (d) $p(x,y) = \cos(x-y) + \log(x+y), \qquad p_{x^2} - p_{y^2} = 0;$

   (e) $u(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z}, \qquad u_x + u_y + u_z = 1.$

6. Mostre que a função $g(x,t) = 2 + e^{-t}\mathrm{sen}x$, satisfaz a equação do calor

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}.$$

7. Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

   (a) $f_x(x,y) = 2x^3\,, \qquad f_y(x,y) = yx^2 + x\,;$

   (b) $f_x(x,y) = x\,\mathrm{sen}y\,, \qquad f_y(x,y) = y\,\mathrm{sen}x\,.$

8. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Determine f_x e f_y .
   (b) Calcule $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$.
   (c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

9. Considere a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x+y} & \text{se } x \neq -y, \\ 0 & \text{se } x = -y. \end{cases}$

   (a) Calcule $f_y(x,0)$ e $f_x(0,y)$.
   (b) Verifique que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

10. Usando a definição, calcule a derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ da função f no ponto a segundo o vector v, para:

   (a) $f(x,y) = xy\,,\ v = (1,1)\,,\ a = (1,0);$

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2\,,\ v = (-1,1)\,,\ a = (1,1);$

   (c) $f(x,y) = \mathrm{sen}(xy)\,,\ v = (1,1)\,,\ a = (0,0);$

(d) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $v = (3,4)$, $a = (1,1)$;

(e) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } x < y, \\ \frac{1}{2}y & \text{se } x \geq y, \end{cases}$ $v = (-1,2)$, $a = (0,0)$;

(f) $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$, $v = (1,2,1)$, $a = (1,2,-1)$;

(g) $f(x,y,z) = xyz^2$, $v = (1,1)$, $a = (1,0,1)$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{|xy|\, z}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

    (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0,0)$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^3$.

    (b) Usando o resultado da alínea anterior, calcule $f_x(0,0,0)$, $f_y(0,0,0)$ e $f_z(0,0,0)$.

12. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$, onde:

    (a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

    (b) $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

    (c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ se $x \neq -y$ e $f(x,y) = 0$ se $x = -y$;

    (d) $f(x,y) = 0$ se $x = 0 \vee y \neq x^2$ e $f(x,y) = 1$ se $x \neq 0 \wedge y = x^2$.

13. Seja $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$.
    Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial v}\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\right) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

14. Em cada alínea, use a definição para estudar a diferenciabilidade em $(0,0)$ da função $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como se indica:

    (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

    (b) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$;

    (c) $f(x,y) = |xy|$;

    (d) $f(x,y) = \max\{\, |x|, |y| \,\}$;

    (e) $f(x,y) = |x| + |y|$;

    (f) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$.

15. Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } xy=0; \\ \\ 1 & \text{se } xy \neq 0. \end{cases}$

Estude a continuidade e a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

16. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{se } x \geq 0\,, \\ -x^2 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$

   (a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

   (b) Verifique que não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,b)$, sempre que $b \neq 0$.

17. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{se } x+y \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x+y = 0\,. \end{cases}$

Estude a diferenciabilidade de f.

18. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

   (a) Mostre que f possui derivadas parciais de 1^{a} ordem em todos os pontos.

   (b) Averigue a existência de derivadas direccionais de f na origem.

   (c) Estude a continuidade de f.

   (d) Diga se f é diferenciável na origem.

19. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

   (a) Mostre que existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ segundo qualquer vector $v \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Verifique que f não é contínua em $(0,0)$.

   (c) Diga se f é diferenciável em $(0,0)$.

20. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e verifique que não são contínuas em $(0,0)$.

   (c) Verifique que f é diferenciável em $(0,0)$.