Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Cálculo
2021/22

Séries

1. Nas alíneas **1**. a **8**. estamos na presença de séries geométricas e nas alíneas **9**. a **12**. temos séries telescópicas.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é convergente porque $r = \frac{1}{3}$ e, portanto, $|r| < 1$.

A sua soma é $\quad s = 2.\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ é convergente porque esta série pode escrever-se na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

onde

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é convergente (porque $r = \frac{1}{3}$ e, portanto, $|r| < 1$) e

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ é convergente (porque $r = \frac{1}{2}$ e, portanto, $|r| < 1$).

A sua soma é $\quad s = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ é convergente porque $r = \frac{3}{4}$ e, portanto, $|r| < 1$.

A sua soma é $\; s = \dfrac{9}{4}.\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}} = 9.$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}$ é convergente porque esta série pode escrever-se na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} = 10 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

onde

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ é convergente (porque $r = \frac{2}{5}$ e, portanto, $|r| < 1$).

A sua soma é $\quad s = 10 + 4.\dfrac{1}{1-\frac{2}{5}} = \dfrac{50}{3}.$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n}$ é convergente porque esta série pode escrever-se na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$$

onde

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é convergente (porque $r = \frac{1}{3}$ e, portanto, $|r| < 1$) e

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ é convergente (porque $r = \frac{2}{3}$ e, portanto, $|r| < 1$).

A sua soma é $\displaystyle s = \frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}.\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{6^n}$ é convergente porque esta série pode escrever-se na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{-2}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

onde

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é convergente (porque $r = -\frac{1}{3}$ e, portanto, $|r| < 1$) e

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ é convergente (porque $r = \frac{1}{2}$ e, portanto, $|r| < 1$).

A sua soma é $\displaystyle s = -\frac{1}{3}.\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} + \frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^{n-1}}{5^{n+1}}$ é convergente porque esta série pode escrever-se na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^{n-1}}{5^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25}\left(\frac{-4}{5}\right)^{n-1}$$

onde

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{5}\right)^{n-1}$ é convergente (porque $r = -\frac{4}{5}$ e, portanto, $|r| < 1$).

A sua soma é $\displaystyle s = \frac{1}{25}.\frac{1}{1-(-\frac{4}{5})} = \frac{1}{45}.$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}4^{-(n+2)}$ é convergente porque esta série pode escrever-se na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}4^{-(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^2}{4^3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

onde

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ é convergente (porque $r = \frac{3}{4}$ e, portanto, $|r| < 1$).

A sua soma é $s = \frac{9}{64} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{9}{16}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ é convergente porque é uma série telescópica associada à sucessão $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, e $(a_n)_n$ é convergente (porque $\lim_n a_n = 0$).

A sua soma é $a_1 - \lim_n a_n = 1 - 0 = 1$.

Então a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$ é $s = -1$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$ é convergente porque é uma série telescópica associada à sucessão $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}$, e $(a_n)_n$ é convergente (porque $\lim_n a_n = 0$).

A sua soma é $s = -(a_1 + a_2 - 2 \lim_n a_n) = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

11. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ é convergente porque é uma série telescópica associada à sucessão $a_n = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$, e $(a_n)_n$ é convergente (porque $\lim_n a_n = 0$).

A sua soma é $s = a_1 - \lim_n a_n = \frac{1}{2}$.

12. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}\right)$ é convergente porque é uma série telescópica associada à sucessão $a_n = \frac{1}{4n-2}, n \in \mathbb{N}$, e $(a_n)_n$ é convergente (porque $\lim_n a_n = 0$).

A sua soma é $s = a_1 - \lim_n a_n = \frac{1}{2}$.

2. (a) Tem-se que $\lim_n a_n = \frac{1}{3} \neq 0$. Consequentemente, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente (condição necessária de convergência).

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{\pi^2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{\pi^2}$, logo convergente porque $|r| < 1$.

(b) A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ é divergente porque

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + 3\,b_n),$$

onde $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente e $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ é convergente.

A sucessão $(y_n)_n$ difere da sucessão $(b_n)_n$ apenas num número finito de termos (os primeiro 10^8). Consequentemente, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ é convergente porque tem a mesma natureza da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

A sucessão $(z_n)_n$ difere da sucessão $(a_n)_n$ apenas num número finito de termos (os primeiro 10^8). Consequentemente, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ é divergente porque tem a mesma natureza da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

3. Por exemplo, considere-se $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n^2}$ e $v_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

4. **1.** A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos\dfrac{1}{n}$ é divergente porque $\lim_n \cos\dfrac{1}{n} = 1 \neq 0$ (condição necessária de convergência).

2. A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ é convergente porque é uma série geométrica de razão $r = \dfrac{1}{e}$ e $|r| < 1$.

3. Tem-se que:

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_n \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e} < 1.$$

Logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{n}\right)^n$ é convergente.

4. A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n}{e^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(-\dfrac{1}{e}\right)^n$ é convergente porque é uma série geométrica de razão $r = -\dfrac{1}{e}$ e $|r| < 1$.

Como resolução alternativa, vamos mostrar que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n}{e^n}$ é absolutamente convergente.

Considere-se a série dos módulos da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n}{e^n}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{(-1)^n}{e^n}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{e^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

A série dos módulos é convergente porque é uma série geométrica de razão $r = \dfrac{1}{e}$ e $|r| < 1$.

Como a série dos módulos é convergente, a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{e^n}$ é absolutamente convergente.

5. Tem-se que:

- $0 \leq \dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é convergente, uma vez que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Riemann convergente.

Então, pelo Primeiro Critério de Comparação, a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2+1}$ é convergente.

6. A série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$ é divergente porque a sucessão geradora $u_n = (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, não converge para zero (condição necessária de convergência). Com efeito, tem-se que:

$$u_n = (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right), & \text{se } n \text{ é par} \\[2ex] -\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e, portanto, $\lim\limits_n u_{2n} = 1$ e $\lim\limits_n u_{2n-1} = -1$. Consequentemente, $\nexists \lim\limits_n u_n$.

7. Considere-se a série dos módulos da série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n \operatorname{sen} n}{\mathrm{e}^n}$, isto é, considere-se a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{n \operatorname{sen} n}{\mathrm{e}^n}\right|$.

- $0 < \left|\dfrac{n \operatorname{sen} n}{\mathrm{e}^n}\right| \leq \dfrac{n}{e^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Vamos estudar a natureza da série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{\mathrm{e}^n}$, usando o Critério de d'Alembert.

  Tem-se que:

  $$\lim_n \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} = \lim_n \frac{(n+1)e^n}{n\, e^{n+1}} = \lim_n \frac{n+1}{e\, n} = \frac{1}{e} < 1.$$

  Pelo Critério de d'Alembert concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{\mathrm{e}^n}$ é convergente.

  Consequentemente, pelo Primeiro Critério de Comparação, concluímos que a série dos módulos $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{n \operatorname{sen} n}{\mathrm{e}^n}\right|$ é convergente.

Como a série dos módulos é convergente, a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n \operatorname{sen} n}{\mathrm{e}^n}$ é absolutamente convergente.

8. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n+5^n}{3^n}$ é divergente porque esta série pode escrever-se na forma

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n+5^n}{3^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^n\right]$$

onde

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ é uma série geométrica convergente (porque $r=\frac{2}{3}$ e, portanto, $|r|<1$)

e

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{5}{3}\right)^n$ é uma série geométrica divergente (porque $r=\frac{5}{3}$ e, portanto, $|r|>1$).

9. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n+3^n}{5^n}$ é convergente porque esta série pode escrever-se na forma

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n+3^n}{5^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$$

onde

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ é uma série geométrica convergente (porque $r=\frac{2}{5}$ e, portanto, $|r|<1$)

e

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ é uma série geométrica convergente (porque $r=\frac{3}{5}$ e, portanto, $|r|<1$).

10. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{5}{3\cdot 2^n}$ é convergente porque esta série pode escrever-se na forma

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{5}{3\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

onde

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma série geométrica convergente (porque $r=\frac{1}{2}$ e, portanto, $|r|<1$).

11. Tem-se que:

- $0 < \dfrac{n}{n^2+1} r^n \leq r^n$;
- a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ converge porque é uma série geométrica de razão r e $|r|<1$.

Consequentemente, pelo Primeiro Critério de Comparação, a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n^2+1} r^n$, $0<r<1$, é convergente.

12. Consideremos a sucessão geradora $u_n = n\,r^n$ $(0<r<1)$, $n\in\mathbb{N}$. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{(n+1)r^{n+1}}{n\,r^n} = \lim_n \frac{n+1}{n} r = r < 1.$$

Pelo Critério de d'Alembert concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n^2+1} r^n$, $0<r<1$, é convergente.

13. Tem-se que:

- $0 < \dfrac{n}{n+1} r^n \leq r^n$;
- a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ converge porque é uma série geométrica de razão r e $|r| < 1$.

Consequentemente, pelo Primeiro Critério de Comparação, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n}{n+1} r^n$, $0 < r < 1$, é convergente.

14. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^3+2n}}{\frac{1}{n^{5/2}}} = \lim_n \frac{n^3}{n^3+2n} = \lim_n \frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^{5/2}}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 5/2 > 1$.

Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\sqrt{n}}{n^3+2n}$ é convergente.

15. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n}{n+5} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n}$ é divergente porque é a série harmónica.

Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n+5}$ é divergente.

16. Como $|\cos n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\left|\frac{n\cos n}{n\,!}\right| \leq \frac{n}{n\,!} = \frac{1}{(n-1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Provando a convergência de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{(n-1)!}$, conclui-se, utilizando o Primeiro Critério de Comparação, a convergência da série dos módulos $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\dfrac{n\cos n}{n\,!}\right|$ e, portanto, a convergência absoluta de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\dfrac{n\cos n}{n\,!}\right|$.

Para mostrar a convergência da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{(n-1)!}$, basta aplicar o Critério de d'Alembert. Como

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \lim_n \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

o referido critério permite tirar a conclusão pretendida.

17. Considere-se a série dos módulos da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{5n^2}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|(-1)^n \frac{1}{5n^2}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{5n^2}.$$

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 2 > 1$.
Consequentemente, a série dos módulos $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{5n^2}$ é convergente.
Como a série dos módulos é convergente, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{5n^2}$ é absolutamente convergente.

18. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{n}{n^3+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^3}{n^3+2} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 2 > 1$.
Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n^3+2}$ é convergente.

19. Comecemos por observar que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\,\cos(n\pi)}{2^n}$ pode ser escrita na forma

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\,\cos(n\pi)}{2^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\,(-1)^n}{2^n}.$$

Considere-se a série dos módulos da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\,(-1)^n}{2^n}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{n\,(-1)^n}{2^n}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n}.$$

Vamos estudar a natureza da série dos módulos recorrendo ao Critério de d'Alembert.
Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_n \frac{(n+1)2^n}{n\,2^{n+1}} = \lim_n \frac{n+1}{n}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Consequentemente, pelo Critério de d'Alembert, concluímos que a série dos módulos é convergente.
Como a série dos módulos é convergente, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\,\cos(n\pi)}{2^n}$ é absolutamente convergente.

20. Considere-se a série dos módulos da série $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2-1}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^2-1}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

Vamos estudar a natureza da série dos módulos recorrendo ao Segundo Critério de Comparação. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^2}{n^2-1} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 2 > 1$.
Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série dos módulos é convergente.

Como a série dos módulos é convergente, a série $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2-1}$ é absolutamente convergente.

21. Consideremos a sucessão geradora $u_n = \frac{n\,!}{2^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)\,!}{2^{2(n+1)}}}{\frac{n\,!}{2^{2n}}} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)\,!}{2^{2n}2^2}}{\frac{n\,!}{2^{2n}}} = \lim_n \frac{(n+1)n\,!\,2^{2n}}{2^{2n}.2^2.n\,!} = \lim_n \frac{n+1}{4} = +\infty.$$

Pelo Critério de d'Alembert concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\,!}{2^{2n}}$ é divergente.

22. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n^{10}+7}}{\frac{1}{n^{10}}} = \lim_n \frac{n^{10}}{n^{10}+7} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{10}}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 10 > 1$.
Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{10}+7}$ é convergente.

23. Consideremos a sucessão geradora $u_n = \frac{n\,!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)\,!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n\,!}{n^n}} = \lim_n \frac{(n+1)\,!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n\,!} = \lim_n \frac{(n+1)n\,!n^n}{(n+1)^n(n+1)n\,!} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_n \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Pelo Critério de d'Alembert concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\,!}{n^n}$ é convergente.

24. Tem-se que:

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{\log^n n}} = \lim_n \frac{1}{\log n} = 0 < 1.$$

Logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^n n}$ é convergente.

25. Considere-se a série dos módulos da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^3}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{1+n^3}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{1+n^3}.$$

Vamos estudar a natureza da série dos módulos recorrendo ao Segundo Critério de Comparação. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{n}{1+n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^3}{1+n^3} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 2 > 1$. Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série dos módulos é convergente.

Como a série dos módulos é convergente, a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^3}$ é absolutamente convergente.

26. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ é divergente porque é a série harmónica.

Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{n}$ é divergente.

27. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n+\sqrt[n]{e}}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n}{n+\sqrt[n]{e}} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ é divergente porque é a série harmónica.

Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+\sqrt[n]{e}}$ é divergente.

28. Consideremos a sucessão geradora $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_n \frac{(n+1)!\,(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!\;n!\,n!} =$$

$$= \lim_n \frac{(n+1)(n+1)\,n!\,n!\,(2n)!}{(2n+2)(2n+1)\,(2n)!n!\,n!} = \lim_n \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Pelo Critério de d'Alembert concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n\,!)^2}{(2n)\,!}$ é convergente.

29. Comecemos por observar que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n\pi)}{\log^n(n\pi)}$ pode ser escrita na forma

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n\pi)}{\log^n(n\pi)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\log^n(n\pi)}.$$

Considere-se a série dos módulos da série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\log^n(n\pi)}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{(-1)^n}{\log^n(n\pi)}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\log^n(n\pi)}.$$

Vamos estudar a natureza da série dos módulos recorrendo ao Critério de Cauchy. Tem-se que:

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{\log^n(n\pi)}} = \lim_n \frac{1}{\log(n\pi)} = 0 < 1.$$

Consequentemente, pelo Critério de Cauchy, concluímos que a série dos módulos é convergente.

Como a série dos módulos é convergente, a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n\pi)}{\log^n(n\pi)}$ é absolutamente convergente.

30. Tem-se que:

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1.$$

Consequentemente, pelo Critério de Cauchy, a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ é convergente.

31. Tem-se que:

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n}} = \lim_n \frac{n}{n^2+1} = 0 < 1.$$

Consequentemente, pelo Critério de Cauchy, a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n}$ é convergente.

32. Consideremos a sucessão geradora $u_n = \dfrac{2^n\, n\,!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\, n!}{n^n}} = \lim_n \frac{2^n 2(n+1)\, n!\, n^n}{(n+1)^n(n+1)\, 2^n\, n!} =$$

$$= \lim_n 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2.\lim_n \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 2.\lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Pelo Critério de d'Alembert concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n\, n\,!}{n^n}$ é convergente.

33. Consideremos a sucessão geradora $u_n = \dfrac{1}{2^n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{1}{2^{n+1}+1}}{\frac{1}{2^n+1}} = \lim_n \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Pelo Critério de d'Alembert concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{2^n+1}$ é convergente.

34. Comecemos por observar que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n^2\cos(n\pi)}{1+n^3}$ pode ser escrita na forma

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2\cos(n\pi)}{1+n^3} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^3}.$$

Considere-se a série dos módulos da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \dfrac{n^2}{1+n^3}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|(-1)^n \frac{n^2}{1+n^3}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{1+n^3}.$$

Vamos estudar a natureza da série dos módulos recorrendo ao Segundo Critério de Comparação. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{n^2}{1+n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n^3}{1+n^3} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n}$ é divergente porque é a série harmónica.

Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série dos módulos é divergente.

Então, como a série dos módulos é divergente NADA! podemos concluir sobre a natureza da série dada (a partir da natureza da série dos módulos).

Vamos, então, recorrer ao Critério de Leibniz. Seja $a_n = \dfrac{n^2}{1+n^3}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

- $\lim_n a_n = \lim_n \dfrac{n^2}{1+n^3} = 0$
- $(a_n)_n$ é uma sucessão decrescente (prove esta afirmação).

Então, pelo Critério de Leibniz, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \dfrac{n^2}{1+n^3}$ é (simplesmente) convergente.

35. Consideremos a série dos módulos da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \dfrac{4+\cos n}{n^3}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|(-1)^n \frac{4+\cos n}{n^3}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{4+\cos n}{n^3}.$$

Vamos estudar a natureza da série dos módulos recorrendo ao Primeiro Critério de Comparação. Tem-se que:

- $0 < \dfrac{4+\cos n}{n^3} \leq \dfrac{5}{n^3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

- a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^3}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 3 > 1$. Então, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{5}{n^3}$ é também convergente.

Consequentemente, pelo Primeiro Critério de Comparação, concluímos que a série dos módulos é convergente.

Como a série dos módulos é convergente, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{4+\cos n}{n^3}$ é absolutamente convergente.

36. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_n \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 1/2 \leq 1$.

Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ é divergente.

37.

Consideremos a sucessão geradora $u_n = \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Pelo Critério de d'Alembert concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ é convergente.

38. Tem-se que:

- $0 \leq \frac{1+(-1)^n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 2 > 1$. Então, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{n^2}$ é também convergente.

Consequentemente, pelo Primeiro Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$ é convergente.

39. Comecemos por observar que:

$$\log n > 1, \quad \forall n \geq 3.$$

Tem-se então que:

- $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{\log n}{n}$, $\forall n \geq 3$;
- a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ é divergente porque é a série harmónica.

Então, pelo Primeiro Critério de Comparação, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\log n}{n}$ é divergente.

40. Tem-se que:

- $0 \leq \dfrac{1+\operatorname{sen} n}{n^2} \leq \dfrac{2}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^2}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 2 > 1$. Então, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{2}{n^2}$ é também convergente.

Consequentemente, pelo Primeiro Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1+\operatorname{sen} n}{n^2}$ é convergente.

41. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{n^2}{n^5+n^2+1}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_n \frac{n^5}{n^5+n^2+1} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^3}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 3 > 1$.
Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n^2}{n^5+n^2+1}$ é convergente.

42. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}} = \lim_n \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ é divergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 2/3 \leq 1$.
Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ é divergente.

43. Considere-se a série dos módulos da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 1/2 \leq 1$.
Então, como a série dos módulos é divergente NADA! podemos concluir sobre a natureza da série dada (a partir da natureza da série dos módulos).
Vamos, então, recorrer ao Critério de Leibniz. Seja $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

- $\lim_n a_n = \lim_n \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

- $(a_n)_n$ é uma sucessão decrescente (prove esta afirmação).

Então, pelo Critério de Leibniz, a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é (simplesmente) convergente.

44.

Consideremos a sucessão geradora $u_n = \dfrac{n^5}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}}{\frac{n^5}{2^n}} = \lim_n \frac{2^n(n+1)^5}{2^{n+1}n^5} = \lim_n \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2} < 1.$$

Pelo Critério de d'Alembert concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^5}{2^n}$ é convergente.

45.

Consideremos a sucessão geradora $u_n = \dfrac{n}{(n+2)!}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{n+1}{(n+3)!}}{\frac{n}{(n+2)!}} = \lim_n \frac{(n+1)(n+2)!}{(n+3)!\,n} = \lim_n \frac{(n+1)(n+2)!}{(n+3)(n+2)!\,n} =$$

$$= \lim_n \frac{n+1}{n^2+3n} = 0 < 1.$$

Pelo Critério de d'Alembert concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{(n+2)!}$ é convergente.

46. Tem-se que:

- $0 < \dfrac{e^{-n}}{\sqrt{n+1}} \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ é convergente porque é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{e}$ e $|r| < 1$.

Consequentemente, pelo Primeiro Critério de Comparação, concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n+1}}$ é convergente.

5. (a) $u_n = 1$ e $v_n = -1$, $\quad n \in \mathbb{N}$.

As séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} -1$ são divergentes (porque os limites das sucessões geradoras são diferentes de zero) e a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0$ é convergente.

(b) não existe (ver aula)

(c) $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\quad n \in \mathbb{N}$.

A série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ é divergente (porque é a série harmónica) e a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é convergente (porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 2 > 1$).

(d) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$.

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é convergente (ver exercício 4.(43)) e a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n}$ é divergente (porque é a série harmónica).

(e) não existe. Como $(n^2 u_n)_n$ converge para zero temos que

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} : \; n \geq p \; \Rightarrow \; |n^2 u_n| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = 1$ existe uma ordem p tal que

$$n \geq p \; \Rightarrow \; |u_n| < \frac{1}{n^2}.$$

Como a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^2}$ é convergente concluímos, pelo Primeiro Critério de Comparação, que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ é convergente. Consequentemente, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente.

(f) não existe. Tem-se que:

$$\lim_n \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_n u_n = 0,$$

porque a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente. Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ é convergente.

(g) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$.

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^3 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n}$ é divergente (porque é a série harmónica).

(h) $u_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$.

A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n}$ é divergente (porque é a série harmónica).

(i) $\sum_{n\in\mathbb{N}} -n$

(j) $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$

(k) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

6. (a) Afirmação falsa. Por exemplo, tomando $u_n = -n$ e $v_n = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

- $-n \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é convergente

mas, no entanto, $\sum_{n \in \mathbb{N}} -n$ é divergente.

(b) Afirmação verdadeira. Tem-se que:

- $0 < -v_n \leq -u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (porque $u_n \leq v_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$)
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} -u_n$ é convergente (porque $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ é convergente).

Então, pelo Primeiro Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} -v_n$ é convergente. Consequentemente, a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ é convergente.

(c) Afirmação verdadeira. Como $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos, o limite da sucessão geradora $(1 + u_n)_n$, se existir, é diferente de zero. Consequentemente, a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + u_n)$ é divergente (condição necessária de convergência).

(d) Afirmação verdadeira. Tem-se que:

- $0 < \frac{1}{n^2 + u_n} \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (porque $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos)
- a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 2 > 1$.

Então, pelo Primeiro Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + u_n}$ é convergente.

(e) Afirmação verdadeira. Comecemos por observar que porque a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ é convergente, então $\lim_n u_n = 0$ (condição necessária de convergência).
Tem-se que:

$$\lim_n \frac{\frac{u_n}{1+u_n}}{u_n} = \lim_n \frac{1}{1 + u_n} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

Então, pelo Segundo Critério de Comparação, concluímos que a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{1 + u_n}$ é convergente.

(f) Afirmação falsa. A série $\sum_{n\geq 1} v_n$ é convergente, pois sendo

$$\sum_{n\geq 1} v_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{100} u_n}_{\text{soma finita}} + \sum_{n>100} \frac{1}{n^3},$$

tem a mesma natureza da série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ que é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 3 > 1$.

(g) Afirmação verdadeira. Como

$$\frac{(-1)^n + 2}{\sqrt{n}} = \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{n}}, & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}}, & \text{se } n \text{ ímpar,} \end{cases}$$

temos que

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{(-1)^n + 2}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e a série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ é divergente (série de Riemann de expoente $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$).

Então, pelo Primeiro Critério de Comparação, também a série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n + 2}{\sqrt{n}}$ é divergente.

(h) Afirmação falsa. A série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{3^n}$ não só é convergente como é também absolutamente convergente. De facto,

$$\sum_{n\geq 1} \left| (-1)^n \frac{1}{3^n} \right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n}$$

é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{3}$ $\big(|r| < 1\big)$, logo convergente.