Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Análise
2021/22

Funções vetoriais de n variáveis reais

1. (a) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y \wedge y < 1-x\}$

   (b) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4 \wedge x \geq 0\}$

   (c) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y > 0\}$

2. (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} \left(x^7 - 2y\,,\, \operatorname{sen}(x^2-y^3)\,,\, e^{-x^2+y^4}\right) = (-1,0,1);$

   (b) Não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(\frac{x^3+y^3}{3x^2+5y^2}\,,\, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,,\, \operatorname{sen}\frac{x^2y}{x^2+5y^2}\right),$

   porque não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$

3. (a) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(e^x, \frac{1}{x-y}\right)$

   $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(1, -\frac{1}{x-y}\right)$

   (b) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \big(2\,y^5, 1, 0, 1\big)$

   $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \big(10\,x\,y^4, 0, -2y, 1\big)$

   (c) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \big(0, -y^2z^3\operatorname{sen}(xy^2z^3)\big)$

   $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \big(0, -2xyz^3\operatorname{sen}(xy^2z^3)\big)$

   $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \big(0, -3xy^2z^2\operatorname{sen}(xy^2z^3)\big)$

   (d) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (e^x\cos(xy) - y\,e^x\operatorname{sen}(xy), -y\operatorname{sen}(xy))$

   $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (-e^x x\operatorname{sen}(xy), -x\operatorname{sen}(xy))$

   $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (0,0)$

4. Calcule $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ para:

   (a) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (11,10), \quad v = (3,4).$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(\pi/4,\pi/4,1) = (-\sqrt{2}\pi/4, \sqrt{2}\pi/4), \quad v = (0,0,2).$

5. Coloquemos $f = (f_1, f_2)$. Então,

$$f_1(x,y) = e^{x^2+z}\,, \quad f_2(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$$

e

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = 2\,x\,e^{x^2+z}\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = 0\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = e^{x^2+z}\,;$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = \cos(x+y)\,, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = \cos(x+y)\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = 0\,.$$

Como $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ são funções contínuas, f_1 e f_2 são funções diferenciáveis. Como as funções componentes de f são diferenciáveis, f é diferenciável.

A derivada da função f no ponto $(0,\pi/2,1)$ é a aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ caracterizada pela matriz

$$J_f(0,\pi/2,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\begin{array}{rccc} f'(0,\pi/2,1)\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (ez,0) \end{array}$$

6. Coloquemos $f = (f_1, f_2, f_3)$. Então,

$$f_1(x,y) = \frac{3x^2-y^3}{2x^2y^4+1}\,, \quad f_2(x,y) = x + 2xy\,, \quad f_3(x,y) = \cos(x+y)$$

e

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = -\frac{4xy^4(3x^2-y^3)}{(1+2x^2y^4)^2} + \frac{6x}{1+2x^2y^4}\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{8x^2y^3(3x^2-y^3)}{(1+2x^2y^4)^2} - \frac{3y^2}{1+2x^2y^4}\,;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 1+2y\,, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 2x\,;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)(x,y) = -\operatorname{sen}(x+y)\,, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = -\operatorname{sen}(x+y)\,.$$

Como $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f_3}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f_3}{\partial y}$, são funções contínuas, f_1, f_2 e f_3 são funções diferenciáveis. Como as funções componentes de f são diferenciáveis, f é diferenciável.

A derivada da função f no ponto $(0,\pi)$ é a aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ caracterizada pela matriz

$$J_f(0,\pi) = \begin{bmatrix} 0 & -3\pi^2 \\ 1+2\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\begin{array}{rccc} f'(0,\pi)\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-3\pi^2 y, (1+2\pi)x, 0) \end{array}$$

7. Por exemplo,
$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,y) \end{array}$$

8. (a) Para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$J_f(x,y)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$J_f(x,y)=\begin{bmatrix} e^y & x\,e^y-\operatorname{sen}y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{bmatrix}.$$

(c) Para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$J_f(x,y)=\begin{bmatrix} y\,e^{xy}+xy^2e^{xy} & x\,e^{xy}+x^2ye^{xy} \\ \operatorname{sen}y & x\cos y \\ 5y^2 & 10\,x\,y \end{bmatrix}.$$

(d) Para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,
$$J_f(x,y,z)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,
$$J_f(x,y,z)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2\,xy & x^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. (a) Para todo o $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$J_f(x,y)=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) A função f é uma função linear. Logo é diferenciável.

(c) Temos que:
$$\begin{array}{rccc} f'(1,2)\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (3x,x+2y) \end{array}.$$

(d) Dado $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, temos que:
$$\begin{array}{rccc} f'(x_0,y_0)\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (3x,x+2y) \end{array}.$$

10. (a) Para todo o $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$J_f(x,y)=\begin{bmatrix} 4x & 0 \\ 0 & 3 \\ 2y & 2x \end{bmatrix}.$$

(b) Análogo ao exercício 6.

(c) A derivada da função f no ponto $(1,1)$ é a aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ caracterizada pela matriz

$$J_f(1,1) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\begin{array}{rccc} f'(1,1)\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (4x, 3y, 2x+2y) \end{array}$$

(d) $f'(1,1)(2,3) = (8,9,10)$.

11. Seja $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função definida por $g(x,y) = (\mathrm{sen} x, \cos y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. A função g é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ porque as funções componentes são funções de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Em particular, g é diferenciável. Como f é de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, f é diferenciável. Tem-se que $F = f \circ g$ e F é diferenciável por ser a composta de funções diferenciáveis. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} J_F(0,0) &= J_f(g(0,0)) \cdot J_g(0,0) = J_f(0,1) \cdot J_g(0,0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & -\mathrm{sen} y \end{bmatrix}_{x=y=0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

12. As funções f e g são de classe C^∞ (justifique). Em particular, são diferenciáveis, pelo que as compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ são também diferenciáveis. Pela regra da cadeia temos que

$$\begin{aligned} J_{g\circ f}(x,y) &= J_g(f(x,y)) \cdot J_f(x,y) = J_g(x^2, 1, x+y) \cdot J_f(x,y) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(x^2+1) & \cos(x^2+1) & 0 \\ 0 & (x+y)e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\,x\,\cos(x^2+1) & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O cálculo de $J_{f\circ g}(x,y,z)$ é análogo.

13. Pondo $f = (f_1, f_2)$, temos que

$$\begin{array}{lll} f_1(x,y) = e^x \cos y\,, & f_{1x}(x,y) = e^x \cos y\,, & f_{1y}(x,y) = -e^x \mathrm{sen} y \\ f_2(x,y) = e^x \mathrm{sen} y\,, & f_{2x}(x,y) = e^x \mathrm{sen} y\,, & f_{2y}(x,y) = e^x \cos y\,. \end{array}$$

(a) É imediato que f_{1x}, f_{1y} e f_{2x}, f_{2y} são contínuas, pelo que f_1 e f_2 são diferenciáveis. Como as funções componentes de f são diferenciáveis, f é diferenciável. Pelo Teorema da derivada da função composta concluímos que g é diferenciável.

(b) A derivada da função g no ponto $(0,0)$ é a aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ caracterizada pela matriz

$$\begin{aligned} J_g(0,0) &= J_{f\circ f}(0,0) = J_f(f(0,0)) \cdot J_f(0,0) \\ &= J_f(1,0) \cdot J_f(0,0) \\ &= \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \mathrm{sen} y \\ e^x \mathrm{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix}_{\substack{x=1 \\ y=0}} \cdot \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \mathrm{sen} y \\ e^x \mathrm{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix}_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\ &= \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrário,

$$g'(0,0)(x,y) = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e\,x \\ e\,y \end{bmatrix}$$

14. (a) Para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$J_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2\,x\,y - z & x^2 & -x \end{bmatrix}.$$

Em particular, para $(x,y,z) = (1,0,0)$,

$$J_f(1,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A derivada da função f no ponto $(1,0,0)$ é a aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$ caracterizada pela matriz $J_f(1,0,0)$. Consequentemente,

$$\begin{array}{rccc} f'(1,0,0)\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & y - z \end{array}$$

Em particular, $f'(1,0,0)(1,2,2) = 2 - 2 = 0$.

(b) Temos que:

$$g(t) = f(at^2, at, t^3) = a^3t^5 - at^5 = (a^3 - a)t^5\,.$$

Consequentemente,

$$g'(t) = 5t^4(a^3 - a)\,.$$

Então, g tem derivada nula para $a = 0$, $a = -1$ e para $a = 1$.

15. Resolvido na aula.

16. As funções f e g são ambas diferenciáveis (Justifique). Consequentemente, a função $g \circ f$ é diferenciável por ser a composta de funções diferenciáveis. Pela regra da cadeia temos que:

$$\begin{aligned} J_{g\circ f}(1,1,1,1) &= J_g(f(1,1,1,1)) \cdot J_f(1,1,1,1) \\ &= J_g(2,2) \cdot J_f(1,1,1,1) \\ &= \begin{bmatrix} y\,e^{xy} & x\,e^{xy} \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix}_{x=y=2} \cdot \begin{bmatrix} 2r & 0 & 2t & 0 \\ 0 & 2u & 0 & 2s \end{bmatrix}_{r=s=t=u=1} \\ &= \begin{bmatrix} 2\,e^4 & 2\,e^4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4\,e^4 & 4\,e^4 & 4\,e^4 & 4\,e^4 \\ 16 & 8 & 16 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

17. Seja $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a função definida por $h(x,y) = (\operatorname{sen}(xy^2), e^y, \log(1+x^2))$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. A função h é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ porque as funções componentes são funções de classe

$C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Em particular, h é diferenciável. Tem-se que $g = f \circ h$ e g é diferenciável por ser a composta de funções diferenciáveis. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} J_g(0,1) &= J_f(h(0,1)) \cdot J_h(0,1) = J_f(0,e,0) \cdot J_h(0,1) \\ &= \begin{bmatrix} e & -1 & e \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & -e \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Então, $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = e - e = 0$.

18. (a) A função f é de classe C^∞ porque as funções coordenadas são funções de classe C^∞. A matriz jacobiana de f é:

$$J_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & e^z \end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$\det(J_f(x,y,z)) = e^z(2x^2 + 2y^2) .$$

Então, o Teorema da função inversa garante a invertibilidade de f em torno de todos os pontos tais que $e^z(2x^2 + 2y^2) \neq 0$, ou seja, para todo o ponto (x,y,z) tal que $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Em particular, para $(x,y,z) = (1,0,0)$, o Teorema da função inversa garante existirem abertos $V, W \in \mathbb{R}^3$, com $(1,0,0) \in V$, $f(1,0,0) = (1,0,1) \in W$, tais que a restrição $f\colon V \longrightarrow W$ é invertível. A inversa $f^{-1}\colon W \longrightarrow V$ é de classe C^1, e a correspondente derivada no ponto em causa, $(f^{-1})'(f(1,0,0))$, coincide com a inversa da derivada, $(f'(1,0,0))^{-1}$, tendo-se

$$J_{f^{-1}}(f(1,0,0)) = (J_f(1,0,0))^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

19. A função f é de classe C^∞ (justifique), tendo-se, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$\det(J_f(x,y)) = e^{2x} \neq 0 , \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

No entanto, f não é (globalmente) invertível, uma vez que não é bijetiva, pois

$$f(x,y) = f(x, y + 2k\pi), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; k \in \mathbb{Z} .$$

20. A função f é de classe C^∞ (justifique), tendo-se, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 3(x+y)^2 & 3(x+y)^2 \\ 3(x-y)^2 & -3(x-y)^2 \end{bmatrix}$$

e, em particular,

$$J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que,

$$\det(J_f(0,0)) = 0\,.$$

Então, o Teorema da função inversa não é aplicável relativamente ao ponto $(0,0)$.

No entanto, f é bijetiva e

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{u}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{v}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{u}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{v}\right)\,. \end{array}$$

Observemos que $f(0,0) = (0,0)$ e que f^{-1} não é diferenciável em vizinhança alguma da origem.

21. (a) A função f é de classe C^∞ (pois cada função coordenada é polinomial), tendo-se, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

pelo que,

$$\det(J_f(x,y)) = 4x^2 + 4y^2\,.$$

Então, o Teorema da função inversa garante a invertibilidade de f em torno de todos os pontos tais que $4x^2+4y^2 \neq 0$, ou seja, para todo o ponto $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) A função f não é (globalmente) invertível, uma vez que não é bijetiva, pois

$$f(x,y) = f(-x,-y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}\,.$$

(c) Pela alínea (a), o Teorema da função inversa é aplicável a todo o ponto $(a,b) \neq (0,0)$, o que garante que existe um aberto contendo (a,b), tal que a restrição de f a esse aberto é invertível e diferenciável.

22. (a) As funções f e g são ambas diferenciáveis (Justifique). Consequentemente, a função $g \circ f$ é diferenciável por ser a composta de funções diferenciáveis. Pela regra da cadeia temos que:

$$\begin{aligned} J_{g\circ f}(1,1) &= J_g(f(1,1)) \cdot J_f(1,1) \\ &= J_g(1,0) \cdot J_f(1,1) \\ &= \begin{bmatrix} 2\,x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}_{x=1,\,y=0} \cdot \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{x=y=1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) A função f é de classe C^∞ (pois cada função coordenada é polinomial), tendo-se

$$J_f(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

pelo que,

$$\det(J_f(1,1)) = 3 \neq 0\,.$$

Então, o Teorema da função inversa garante a invertibilidade de f em torno do ponto $(1,1)$.

(c) A função g não é (globalmente) invertível, uma vez que não é bijetiva, pois

$$g(-x,-y) = g(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,.$$

23. A função ϕ é de classe C^∞ (justifique), tendo-se, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$J_\phi(x,y) = \begin{bmatrix} y\,e^{xy} & x\,e^{xy} \\ y\,e^{xy} & x\,e^{xy} + 2y \end{bmatrix}$$

e, em particular,

$$J_\phi(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pelo que,

$$\det(J_f(0,1)) = 2 \neq 0 \,.$$

Então, o Teorema da função inversa garante a invertibilidade de ϕ em torno do ponto $(0,1)$.

Em particular, para $(x,y) = (0,1)$, o Teorema da função inversa garante existirem abertos $V, W \in \mathbb{R}^2$, com $(0,1) \in V$, $\phi(0,1) = (2,2) \in W$, tais que a restrição $f\colon V \longrightarrow W$ é invertível. A inversa $f^{-1}\colon W \longrightarrow V$ é de classe C^1, e a correspondente derivada no ponto em causa, $(f^{-1})'(\phi(0,1))$, coincide com a inversa da derivada, $(f'(0,1))^{-1}$, tendo-se

$$J_{f^{-1}}(\phi(0,1)) = (J_\phi(0,1))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

24. Considere-se $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y,z) = (x + 2x^2y + z, y - e^x) \,.$$

O sistema dado equivale à equação

$$F(x,y,z) = (0,0) \,.$$

Temos que:

- $F(0,1,0) = (0,0)$;
- A função F é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ (Justifique);
- Tem-se

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) \end{bmatrix}_{(0,1,0)} = \det \begin{bmatrix} 1+4xy & 2x^2 \\ -e^x & 1 \end{bmatrix}_{(0,1,0)} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \,.$$

Então, pelo Teorema da função implícita, existem abertos V de $\mathbb{R}^3$ e W de $\mathbb{R}$ com $(0,1,0) \in V$ e $0 \in W$, e uma função $f\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1, tais que a cada $z \in W$ corresponde um único $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x,y) = f(z)$.

Quanto às derivadas parciais, pelo Teorema da função implícita

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z}(0) \\ \frac{\partial y}{\partial z}(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) \end{bmatrix}^{-1}_{(x,y,z)=(0,1,0)} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix}_{(x,y,z)=(0,1,0)} .$$

$$= - \begin{bmatrix} 1+4xy & 2x^2 \\ -e^x & 1 \end{bmatrix}^{-1}_{(x,y,z)=(0,1,0)} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Então, $x_z(0) = -1$ e $y_z(0) = -1$.

25. Considere-se $F\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y,u,v) = (x^2+y^2-u^2-v^2, x^2-y^2-2+2u)\,.$$

O sistema dado equivale à equação

$$F(x,y,u,v) = (0,0)\,.$$

Temos que:

- $F(1,1,1,1) = (0,0)$;
- A função F é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ (Justifique);
- Tem-se

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -2u & -2v \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{(1,1,1,1)} = \det\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 4 \neq 0\,.$$

Então, pelo Teorema da função implícita, existem abertos V de $\mathbb{R}^4$ e W de $\mathbb{R}^2$ com $(1,1,1,1) \in V$ e $(1,1) \in W$, e uma função $f\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1, tais que a cada $(x,y) \in W$ corresponde um único $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(u,v) = f(x,y)$.

Quanto às derivadas parciais, pelo Teorema da função implícita

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial v}{\partial y}(1,1) \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{bmatrix}^{-1}_{(x,y,u,v)=(1,1,1,1)} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,u,v) \end{bmatrix}_{(x,y,u,v)=(1,1,1,1)}$$

$$= -\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}_{(x,y,u,v)=(1,1,1,1)}$$

$$= -\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Então, $u_x(1,1) = -1$, $u_y(1,1) = 1$, $v_x(1,1) = 2$ e $v_y(1,1) = 0$.

26. (a) Recordemos que

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \|\ \beta'(t)\ \|\ dt\,.$$

Tem-se que:

$$\beta'(t) = (-2\,\mathrm{sen}t\cos t, \cos^2 t - \mathrm{sen}^t)\,.$$

Então,

$$\begin{aligned}\| \beta'(t) \| &= \sqrt{(-2\,\mathrm{sen}\,t\cos t)^2 + (\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t)^2}\\ &= \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2 \cos^2 t + \cos^4 t - 2\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2 t + \mathrm{sen}^4 t}\\ &= \sqrt{\cos^4 t + 2\,\mathrm{sen}^t \cos^2 t + \mathrm{sen}^4 t}\\ &= \sqrt{(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t)^2}\\ &= \cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t = 1\,.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \| \beta'(t) \| \ dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi\,.$$

(b) Tem-se que:

$$\alpha'(t) = (-\mathrm{sen}\,t, \cos t)\,.$$

Então,

$$\begin{aligned}\alpha'(t).\beta'(t) = 0 &\Leftrightarrow (-\mathrm{sen}\,t, \cos t).(-2\,\mathrm{sen} t\cos t, \cos^2 t - \mathrm{sen}^t) = 0\\ &\Leftrightarrow 2\,\mathrm{sen}^2 t\cos t + \cos^3 t - \mathrm{sen}^2 t\ \cos t = 0\\ &\Leftrightarrow \cos^3 t + \mathrm{sen}^2 t\ \cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0\\ &\Leftrightarrow t_0 = \pi/2 \ \vee\ t_0 = 3\,\pi/2\,.\end{aligned}$$

Assim, os instantes pedidos são $t_0 = \pi/2$ e $t_0 = 3\,\pi/2$.

(c) Tem-se que:

$$\begin{aligned}\beta'(t).(0,1) = 0 &\Leftrightarrow (-2\,\mathrm{sen} t\cos t, \cos^2 t - \mathrm{sen}^t).(0,1) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t = \mathrm{sen}^2 t\\ &\Leftrightarrow t_1 = \pi/4 \ \vee\ t_1 = 3\,\pi/4 \ \vee t_1 = 5\,\pi/4 \ \vee t_1 = 7\,\pi/4\,.\end{aligned}$$

Assim, os instantes pedidos são $t_1 = \pi/4$, $t_1 = 3\,\pi/4$, $t_1 = 5\,\pi/4$ e $t_1 = 7\,\pi/4$.

27. (a) Seja $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se que:

$$\nabla_f(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)\,.$$

Em particular,

$$\nabla_f(1,\sqrt{3},1) = (2, 4\sqrt{3}, 6)\,.$$

O plano tangente à superfície $x^2+2y^2+3z^2 = 10$ no ponto $(1,\sqrt{3},1)$ tem por equação:

$$\nabla_f(1,\sqrt{3},1).(x-1, y-\sqrt{3}, z-1) = 0 \ \Leftrightarrow\ (2,4\sqrt{3},6).(x-1,y-\sqrt{3},z-1) = 0$$

$$2(x-1) + 4\sqrt{3}(y-\sqrt{3}) + 6(z-1) = 0 \ \Leftrightarrow\ x + 2\sqrt{3}y + 3z = 10\,.$$

Uma equação da reta normal é:

$$(x,y,z) = (1,\sqrt{3},1) + \lambda(2,4\sqrt{3},6)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Uma equação do plano tangente é:

$$x + y + 2z = 4\,,$$

e uma equação da reta normal é:

$$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(1,1,2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Uma equação do plano tangente é:

$$2x - y - z = 1\,,$$

e uma equação da reta normal é:

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, -1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

(d) Uma equação do plano tangente é:

$$14(x - 2) + 2(y - 2) + 4(z - 1) = 0\,,$$

e uma equação da reta normal é:

$$(x, y, z) = (2, 2, 1) + \lambda(14, 2, 4)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

28. São os pontos $(0, 1)$ e $(2/3, -1/3)$.

Com efeito, seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tem-se que:

$$\nabla_f(x, y) = (4x, 2y)\,.$$

Seja (x_0, y_0) um ponto que satisfaz as condições pedidas. Os pontos (x, y) da reta tangente em (x_0, y_0) à curva de nível $f(x, y) = 1$ satisfazem:

$$(4x_0, 2y_0).(x - x_0, y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 4x_0x - 4x_0^2 + 2y_0y - 2y_0^2 = 0\,.$$

Como a reta tangente passa no ponto $(1, 1)$ deduz-se que (fazendo $x = y = 1$):

$$4x_0 - 4x_0^2 + 2y_0 - 2y_0^2 = 0 \Leftrightarrow 4x_0 + 2y_0 - 2\underbrace{(2x_0^2 + y_0^2)}_{=1} = 0 \Leftrightarrow\ y_0 = 1 - 2x_0\,.$$

Tendo em conta adicionalmente que (x_0, y_0) pertence à elipse, isto é, satisfaz, $2x_0^2 + y_0^2 = 1$, obtém-se que:

$$2x_0^2 + (1 - 2x_0)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x_0^2 + 1 - 4x_0 + 4x_0^2 = 1 \Leftrightarrow 6x_0^2 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \vee x_0 = 2/3\,.$$

Consequentemente, os pontos pedidos são os pontos $(0, 1)$ e $(2/3, -1/3)$.

29. São os pontos $(2, 0)$ e $(2/3, -4/3)$.

Com efeito, seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tem-se que:

$$\nabla_f(x, y) = (2x - 2 + y, 2y + x)\,.$$

Seja (x_0, y_0) um ponto que satisfaz as condições pedidas. Como a reta normal à curva $x^2 + y^2 - 2x + xy = 0$ no ponto (x_0, y_0) tem a direção do vetor gradiente em(x_0, y_0), deduz-se que:

$$2y_0 + x_0 = 2x_0 - 2 + y_0\,.$$

Consequentemente, $y_0 = x_0 - 2$.

Tendo em conta adicionalmente que (x_0, y_0) pertence à curva dada, isto é, satisfaz, $x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 + x_0y_0 = 1$, obtém-se que:

$$x_0^2 + (x_0 - 2)^2 - 2x_0 + x_0(x_0 - 2) = 1 \Leftrightarrow x_0 = 2 \vee x_0 = 2/3\,.$$

Consequentemente, os pontos pedidos são os pontos $(2, 0)$ e $(2/3, -4/3)$.

30. Os planos pedidos são:

- Plano tangente no ponto $(2, 1, 0)$: $\quad 2x + y - 5 = 0$
- Plano tangente no ponto $(0, -1, 2)$: $\quad -y + 2z - 5 = 0$

Com efeito, seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Tem-se que:

$$\nabla_f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)\,.$$

Os pontos (x, y, z) do plano tangente num dado (x_0, y_0, z_0) à esfera dada satisfazem:

$$(2x_0, 2y_0, 2z_0).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0\,. \qquad (*)$$

Como queremos que o plano tangente em (x_0, y_0, z_0) contenha a reta de equação $\begin{cases} x = 5 - z \\ y = -5 + 2z \end{cases}$, em particular, conterá o ponto $(5, -5, 0)$. Substituindo em $(*)$ $x = 5$, $y = -5$ e $z = 0$, obtém-se:

$$(2x_0, 2y_0, 2z_0).(5 - x_0, 5 - y_0, -z_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = y_0 + 1 \qquad (*).$$

(Tenha em conta que $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 5$).

Além disso, tem-se que:

$$(2x_0, 2y_0, 2z_0).(-1, 2, 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2y_0 + z_0 \qquad (**)\,,$$

(porque o plano tangente em (x_0, y_0, z_0) contém a reta de equação dada). Conjugando $(*)$ e $(**)$, deduz-se que

$$z_0 = 1 - y_0 \qquad (***).$$

Tendo em conta $(*)$ e $(***)$ e que (x_0, y_0, z_0) pertence à esfera dada, isto é, satisfaz, $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 5$, obtém-se que $y_0 = -1 \quad \vee \quad y_0 = 1$. Consequentemente, obtemos os pontos $(2, 1, 0)$ e $(0, -1, 2)$.

Os planos pedidos são:

- Plano tangente no ponto $(2, 1, 0)$: $\quad 2x + y - 5 = 0 \quad (z \in \mathbb{R})$
- Plano tangente no ponto $(0, -1, 2)$: $\quad -y + 2z - 5 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

31. (b) $\nabla f(A) = (1, 0)$.
    (c) Uma equação do plano pedido é: $x - z = 0 \quad (y \in \mathbb{R})$.