8 cardinalidade

184. Em cada caso, diga, justificando, se os conjuntos indicados são equipotentes:

(a) $\{1, 2, 5, 8\}$ e $\{azul, verde, vermelho\}$;

Resolução

Os conjuntos não são equipotentes pois qualquer aplicação de $\{1, 2, 5, 8\}$ em $\{azul, verde, vermelho\}$ é não injetiva.

(b) $\{1, 2, 5, 7\}$ e $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$;

Resolução

Os conjuntos são equipotentes. A aplicação $f : \{1, 2, 5, 7\} \to \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ definida por $f(1) = \mathbb{N}$, $f(2) = \mathbb{Z}$, $f(5) = \mathbb{Q}$, $f(7) = \mathbb{R}$ é uma aplicação bijetiva.

(c) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0$;

(d) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$;

(e) $2\mathbb{N}$ e $3\mathbb{Z}$;

(f) $]0, 1]$ e $[0, 1[$;

(g) $]0, 1]$ e $[0, 1]$;

(h) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, $]a, b[$ e $\mathbb{R}$;

(i) $]0, 1[\cup \{2\}$ e $\mathbb{R}$;

(j) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

185. Sejam A, B, C e D conjuntos. Prove que:

(a) se $A \sim B$ então $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$;

(b) $A \times B \sim B \times A$;

(c) se $A \sim C$ e $B \sim D$ então $A \times B \sim C \times D$;

(d) $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

186. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

(a) se $A \sim B$ então $A \setminus B \sim B \setminus A$;

Resolução

A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Para $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{N}_0$, tem-se $A \sim B$ e $A \setminus B = \emptyset \not\sim \{0\} = B \setminus A$.

(b) se $A \setminus B \sim B \setminus A$ então $A \sim B$;

(c) se $A \sim B$ então $A \cup C \sim B \cup C$;

(d) se $A \sim B$ então $A \cap C \sim B \cap C$;

(e) se $A \sim B$ e $A \cap C = B \cap C = \emptyset$ então $A \cup C \sim B \cup C$;

Resolução

A afirmação é verdadeira. Se $A \sim B$, existe uma função bijetiva de A em B. Seja $f : A \to B$ essa função. Considere-se a relação

$$g = \{(a, f(a)) : a \in A\} \cup \{(c, c) : c \in C\}.$$

Então, $g \subseteq (A \cup C) \times (B \cup C)$ é tal que

$$D_g = A \cup C$$

e, porque $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, para todos $x \in A \cup C$ e $y_1, y_2 \in B \cup C$,

$$(x, y_1), (x, y_2) \in g \Rightarrow y_1 = y_2$$

Logo, g é uma função de $A \cup C$ em $B \cup C$. Mais ainda,

$$D'_g = B \cup C$$

e, para $x_1, x_2 \in A \cup C$ e $y \in B \cup C$,

$$(x_1, y), (x_2, y) \in g \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Assim, a função g é bijetiva e, portanto, $A \cup C \sim B \cup C$.

(f) se $A \cap C \sim B \cap C$ e $C \neq \emptyset$ então $A \sim B$;

(g) Sejam A, B e C conjuntos. Se $A \cup C \sim B \cup C$ então $A \sim B$.

Resolução

A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Se $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ e $C = \{1, 2, 3\}$, então, $A \cup C = \{1, 2, 3\} = B \cup C$ e, portanto, $A \cup C \sim B \cup C$ e, no entanto, $A \not\sim B$, já que são conjuntos finitos com diferentes cardinais.

187. Dê exemplos de conjuntos A, B, C e D tais que $A \sim C$ e $B \sim D$ mas

(a) $A \cup B \nsim C \cup D$; (b) $A \cap B \nsim C \cap D$.

188. Sejam A, A', B e B' conjuntos tais que $A \sim A'$, $B \sim B'$ e seja $f : A \to B$ é uma aplicação injetiva. Mostre que existe uma aplicação injetiva de A' em B'.

189. Sejam A e B conjuntos finitos equipotentes e $g : A \to B$ uma aplicação. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes:

(a) g é injetiva; (b) g é sobrejetiva; (c) g é bijetiva.

190. Sejam A e B conjuntos. Mostre que:

(a) Se A é infinito e $A \subseteq B$, então B é infinito;

Resolução

Como A é infinito, sabemos que existe $X \subset A$ para o qual existe $f : X \to A$ bijetiva.

Sejam $Y = X \cup B \backslash A$ e $g : Y \to B$ a aplicação definida por

$$f(y) = \begin{cases} y & se\ y \in B \backslash A \\ f(y) & se\ y \in X \end{cases}$$

Então, $Y \subset B$ e g é uma aplicação bijetiva: g é sobrejetiva pois

$$\begin{aligned} y \in B & \Leftrightarrow y \in B \backslash A \text{ } ou \text{ } y \in A \\ & \Rightarrow y \in B \backslash A \text{ } ou \text{ } \exists x \in X : y = f(x) \\ & \Leftrightarrow \exists x \in Y : y = g(x) \end{aligned}$$

e g é injetiva, uma vez que

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) & \Leftrightarrow \begin{cases} a = b & se \ a, b \in B \backslash A \\ f(a) = f(b) & se \ a, b \in X \end{cases} \\ & \Rightarrow a = b, \end{aligned}$$

uma vez que f é injetiva. Logo, como B é equipotente a um seu subconjunto próprio, concluímos que b é infinito.

(b) Se B é finito e $A \subseteq B$, então A é finito.

(c) se A e B são finitos, então $A \cup B$ é finito;

191. Mostre que um subconjunto infinito de um conjunto numerável é numerável.

192. Sejam A e B conjuntos. Prove que:

(a) se A é finito e B é numerável então $A \cup B$ é numerável;

Resolução

Se A é finito então existe $n \in \mathbb{N}$ e existe $f : \{1, 2, ..., n\} \to A$ bijetiva. Se B é numerável então existe $g : \mathbb{N} \to B$ bijetiva. Seja $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \leq n \\ g(x - n) & \text{se } x > n \end{cases}.$$

Então, h é obviamente bijetiva e, portanto, $\mathbb{N} \sim A \cup B$, i.e., $A \cup B$ é numerável.

(b) se A é finito e B é numerável então $B \setminus A$ é numerável;

(c) se A e B são numeráveis então $A \cup B$ é numerável.