

# Derivadas

Maria Joana Torres

2021/22

### Definição:

Uma função  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  diz-se **derivável em**  $a \in X \cap X'$  se existe  $d \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d.$$

Ao valor real  $d$  chama-se **derivada de  $f$  em  $a$**  e escreve-se  $f'(a) = d$  ou  $Df(a) = d$ .

### Nota:

Observe-se que, considerando  $h$  tal que  $a + h \in \text{Dom } f$ , e fazendo a mudança de variável  $x = a + h$ , obtemos que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **derivável** se  $f$  for derivável em todos os pontos de  $X$ .

A função  $f' : X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se a **função derivada de  $f$** .  
$$x \mapsto f'(x)$$

Dado  $A \subseteq X$ , dizemos que  $f$  é **derivável em  $A$**  quando  $f$  é derivável em todo  $a \in A$ .

## Definição:

Uma função  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  diz-se

- **derivável à direita em  $a \in X \cap X'_+$**  se existe  $d \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d.$$

Ao valor real  $d$  chama-se **derivada à direita de  $f$  em  $a$**  e escreve-se  $f'_+(a) = d$ ;

- **derivável à esquerda em  $a \in X \cap X'_-$**  se existe  $d \in \mathbb{R}$  tal que

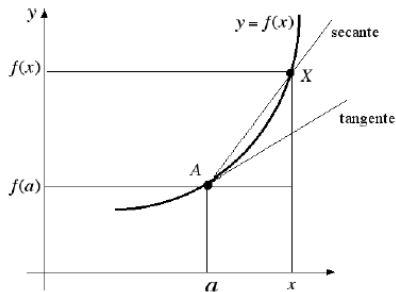
$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d.$$

Ao valor real  $d$  chama-se **derivada à esquerda de  $f$  em  $a$**  e escreve-se  $f'_-(a) = d$ .

## Teorema:

Sejam  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ . Então  $f$  é derivável em  $a$  se e só se existem e são iguais as derivadas laterais  $f'_-(a)$  e  $f'_+(a)$ .

## Significado geométrico da derivada



$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

### Definição:

Dada uma função  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $a \in X \cap X'$ , a reta de equação

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

designa-se por **reta tangente ao gráfico de  $f$**  em  $(a, f(a))$ .

### Definição:

Dada uma função  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $a \in X \cap X'$ , chama-se **reta normal ao gráfico de  $f$**  em  $(a, f(a))$  à reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de  $f$  nesse ponto.

### Teorema [Continuidade de funções deriváveis]:

Sejam  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $a \in X \cap X'$ . Se  $f$  é derivável em  $a$  então  $f$  é contínua em  $a$ .

### Corolário:

Seja  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Então  $f$  é contínua.



## Teorema [Aritmética da derivação pontual]:

Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funções deriváveis em  $a \in X \cap X'$ . Então:

- $f + g$  é derivável em  $a$  e

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$

- dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f$  é derivável em  $a$  e

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a);$$

- $fg$  é derivável em  $a$  e

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

- se  $g(a) \neq 0$  então  $\frac{f}{g}$  é derivável em  $a$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

### Teorema [Derivada da função composta / Regra da Cadeia]:

Sejam  $X, Y$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$ ,  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$  funções,  $a \in X \cap X'$ ,  $f(a) \in Y'$ . Suponhamos que  $f$  é derivável em  $a$  e que  $g$  é derivável em  $f(a)$ . Então  $g \circ f$  é derivável em  $a$  e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

### Teorema [Derivada da função inversa]:

Sejam  $X$  e  $Y$  subconjuntos não vazios de  $\mathbb{R}$ ,  $f : X \longrightarrow Y$  uma função bijetiva e suponhamos que:

1.  $f$  é derivável em  $a \in X \cap X'$ ;
2.  $f'(a) \neq 0$ ;
3.  $f^{-1}$  é contínua em  $b = f(a)$ .

Então  $f^{-1}$  é derivável em  $b$ . Além disso,

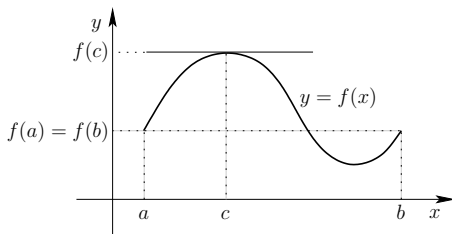
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

### Teorema:

Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável em  $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ . Se  $a$  é um ponto de extremo de  $f$  então  $f'(a) = 0$ .

### Teorema [de Rolle]:

Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, derivável em  $]a, b[$  e tal que  $f(a) = f(b)$ . Então existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .



### Corolários [do teorema de Rolle]:

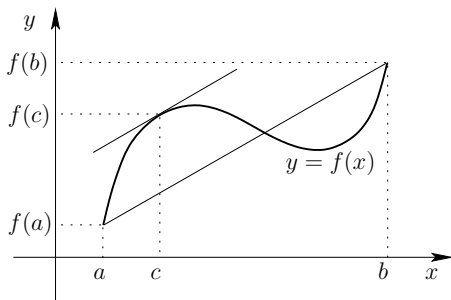
Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua que é derivável em  $]a, b[$ .

1. Entre dois zeros de  $f$  existe, pelo menos, um zero de  $f'$ .
2. Entre dois zeros consecutivos de  $f'$  existe, quando muito, um zero de  $f$ .
3. Não há mais do que um zero de  $f$  inferior ao menor zero de  $f'$ , nem mais do que um zero de  $f$  superior ao maior zero de  $f'$ .

## Teorema [de Lagrange]:

Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, derivável em  $]a, b[$ . Então

$$\exists c \in ]a, b[ \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



### Corolário [do teorema de Lagrange]:

Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, derivável em  $]a, b[$ . Se  $f'(x) = 0$  para todo o  $x \in ]a, b[$  então  $f$  é constante.

### Corolário [do teorema de Lagrange]:

Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, derivável em  $]a, b[$ .

1. Se  $f'(x) > 0$  para todo o  $x \in ]a, b[$  então  $f$  é estritamente crescente.
2. Se  $f'(x) < 0$  para todo o  $x \in ]a, b[$  então  $f$  é estritamente decrescente.



### Teorema [de Darboux]:

Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  derivável e tal que  $f'(a) \neq f'(b)$ . Então, dado  $k \in \mathbb{R}$  estritamente compreendido entre  $f'(a)$  e  $f'(b)$ , existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = k$ .

### Teorema [Regra de l'Hôpital]:

Sejam  $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$  funções deriváveis em  $I \setminus \{a\}$ , com  $a$  um ponto do intervalo  $I$ . Se  $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{a\}$  e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell,$$

com  $\ell = 0$  ou  $\ell = +\infty$  ou  $\ell = -\infty$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

desde que o segundo limite exista (finito ou infinito).

### Nota:

O teorema estende-se aos casos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ , desde que as hipótese sejam formuladas em intervalos  $]c, +\infty[$  e  $] -\infty, c[$ , respetivamente.

## Definição:

Sejam  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $a \in X' \cap X$ . Diz-se que  $f$  é **duas vezes derivável em  $a$** , ou que  $f$  tem **derivada de 2ª ordem em  $a$**  ou que  $f$  tem **segunda derivada em  $a$**  se

$$\exists \delta > 0 \text{ } g = f'_{|X \cap ]a-\delta, a+\delta[} \text{ é derivável em } a.$$

Representa-se a segunda derivada de  $f$  em  $a$  por  $f''(a)$  ou  $f^{(2)}(a)$ .

Diz-se que  $f$  **tem derivada de 2ª ordem** se  $f$  é duas vezes derivável em qualquer ponto do seu domínio (note-se que, em particular, temos que  $X \subseteq X'$ ).

À função  $f'' : X \longrightarrow \mathbb{R}$  chama-se **função segunda derivada de  $f$** .  
$$x \longmapsto f''(x)$$

### Nota:

Indutivamente define-se **derivada de ordem  $n$  de  $f$  em  $a$**  e a **função derivada de ordem  $n$  de  $f$** .

Denota-se a derivada de  $f$  de ordem  $n$  por  $f^{(n)}$  ou  $D^n f$ .

Convenciona-se que  $f^{(0)} = f$ .

### Teorema:

Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que admite segunda derivada em  $a \in X \cap X'$ .

Suponhamos que  $f'(a) = 0$ . Então, se  $f''(a) > 0$ ,  $a$  é um ponto de mínimo local de  $f$  e se  $f''(a) < 0$ ,  $a$  é um ponto de máximo local de  $f$ .

$$(e^x)' = e^x$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

Para  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\log'_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\operatorname{sen}' x = \cos x$$

$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$$

$$\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\cos' x = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$$

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{th}' x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \operatorname{th} x$$

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{coth}' x = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$\operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \operatorname{coth} x$$

$$\arcsen' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctg' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arcsec}' x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arccotg}' x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arccosec}' x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{argsech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{argcosech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$