## 7 relações de ordem parcial

163. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sejam $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ e $\rho_4$ as seguintes relações em $A$:

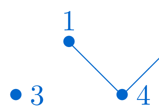
$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \{(1,1),(4,1),(2,2),(4,2),(3,3),(4,4)\};\\
\rho_2 &= \{(1,1),(1,4),(2,2),(4,2),(3,3),(4,4),(2,4)\};\\
\rho_3 &= \{(1,1),(2,3),(2,2),(2,1),(3,3),(4,4),(3,1)\};\\
\rho_4 &= \text{id}_A.
\end{aligned}$$

Indique se cada uma destas relações é uma ordem parcial e, em caso afirmativo, apresente o correspondente diagrama de Hasse.

Resolução

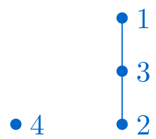
- A relação $\rho_1$ é reflexiva, pois $id_A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} \subseteq \rho_1$. A relação é também antissimétrica, uma vez que se $a, b \in A$ são tais que $(a,b) \in \rho_1$ e $a \neq b$, tem-se que $(b,a) \notin \rho_1$. Por último, $\rho_1$ é uma relação transitiva, pois $\rho_1 \circ \rho_1 = \rho_1$. Assim, estamos em condições de concluir que $\rho_1$ é uma relação de ordem parcial em $A$.

  O c.p.o. $(A, \rho_1)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:

- A relação binária $\rho_2$ não é antissimétrica, uma vez que $(4,2),(2,4) \in \rho_2$ e $4 \neq 2$. Assim, a relação $\rho_2$ não é uma relação de ordem parcial.
- A relação binária $\rho_3$ é reflexiva (pois $\text{id}_A \subseteq \rho_3$), é antissimétrica (pois $\rho_3 \cap \rho_3^{-1} = \text{id}_A$) e é transitiva (pois $\rho_3 \circ \rho_3 = \rho_3$). Logo, a relação binária é uma relação de ordem parcial em $A$.

  O c.p.o. $(A, \rho_3)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:

- A relação identidade definida em qualquer conjunto é uma relação de ordem. Assim, $\rho_4$ é uma relação de ordem em $A$.

  O c.p.o. $(A, \rho_4)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:

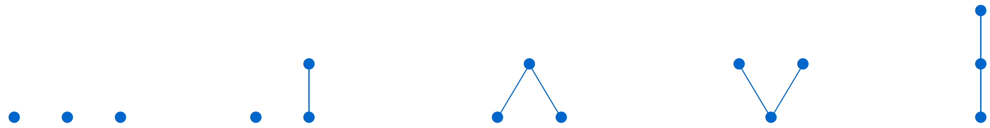
164. (a) Mostre que os seguintes pares são c.p.o.'s:
     (i) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde $A$ é um conjunto; (ii) $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação "*divide*".

     (b) Construa diagramas de Hasse para os seguintes c.p.o.'s:
     (i) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, sendo $A = \{1, 2, 3\}$; (ii) $(A, |)$, sendo $A = \{2, 3, 4, 6, 10, 12, 20\}$.

165. Determine todas as ordens parciais possíveis, a menos de um isomorfismo, num conjunto com três elementos e construa os diagramas de Hasse correspondentes.

Resolução

Considerando o conjunto $A = \{a, b, c\}$ e que uma relação binária em $A$ é um subconjunto do conjunto $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ (que tem $3^2 = 9$ elementos), podemos concluir que existem $2^9 = 512$ relações binárias em $A$. Destas, existem 19 que são relações de ordem parcial. No entanto, algumas destas ordens definem, com $A$, c.p.o.'s isomorfos. Como c.p.o.'s isomorfos podem ser representados pelo mesmo diagrama de Hasse, basta considerarmos um deles (daí a expressão ”a menos de um isomorfismo”). Assim, para representarmos todas as ordens possíveis, a menos de um isomorfismo, num conjunto com três elementos, basta construir os diagrama de Hasse possíveis que, neste caso, são 5:

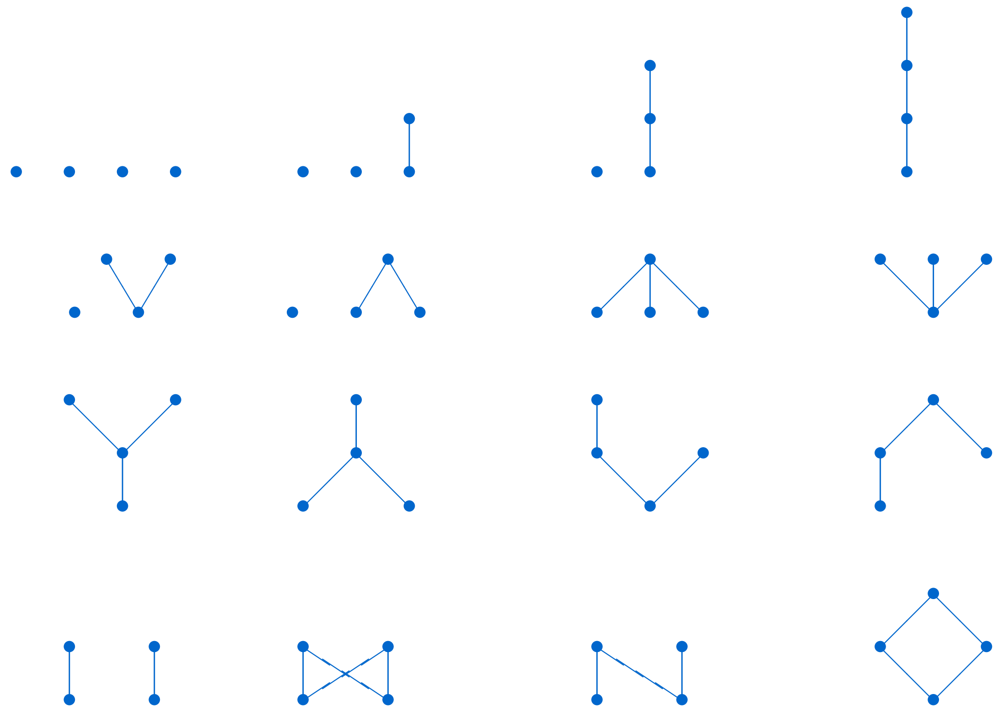


Dos 19 c.p.o.'s possíveis de definir em $A = \{a, b, c\}$, 1 tem o primeiro diagrama, 6 têm o segundo diagrama, 3 têm o terceiro diagrama, 3 têm o quarto diagrama e 6 têm o quinto diagrama.

166. Determine todas as ordens parciais possíveis, a menos de um isomorfismo, num conjunto com quatro elementos e construa os diagramas de Hasse correspondentes.

Resolução

No conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ é possível definir 219 ordens parciais. A menos de um isomorfismo, existem 16 ordens parciais diferentes, representadas pelos seguintes diagramas de Hasse:



167. Construa o diagrama de Hasse para c.p.o. $(A, \subseteq)$, em que

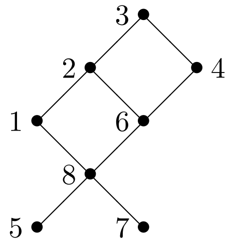
$$A = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 5, 3\}\}.$$

168. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) No c.p.o. $(\mathbb{N}, \leq)$, em $\mathbb{N}$ não existem elementos maximais e 1 é o único elemento minimal;

(b) No c.p.o. $(\mathbb{Z}, \leq)$, em $\mathbb{Z}$ não existem elementos maximais nem elementos minimais.

169. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{1, 2, 6\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 8\}$. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse:




(a) Determine, caso existam, o máximo e o mínimo de $X$ e de $Y$, bem como os elementos maximais e minimais de $X$ e de $Y$.

(b) Determine os conjuntos dos majorantes e dos minorantes de $X$ e de $Y$ e, caso existam, o supremo e o ínfimo de $X$ e de $Y$.

Resolução

(a) Relativamente ao conjunto $X = \{1, 2, 6\}$, temos que $\max X = 2$ e $\min X$ não existe. No que diz respeito ao conjunto $Y = \{2, 3, 4, 8\}$, temos que $\max Y = 3$ e $\min Y = 8$. Os elementos 1 e 6 são elementos minimais de $X$ e o elemento 2 é elemento maximal de $X$. O elemento 3 é elemento maximal de $Y$ e 8 é elemento minimal de $Y$. (Observação: se existe o máximo de um subconjunto $B$ de $A$, então esse elemento é o único elemento maximal do conjunto $B$. Dualmente, se existe o mínimo de $B$, esse elemento é o único elemento minimal de $B$.)

(b) O conjunto dos majorantes de $X$ é

$$\text{Maj } X = \{a \in A : a \geq x, \forall x \in X\} = \{2, 3\}$$

e o conjunto dos minorantes de $X$ é

$$\text{Min } X = \{a \in A : a \leq x, \forall x \in X\} = \{5, 7, 8\}.$$

O conjunto dos majorantes de $Y$ é

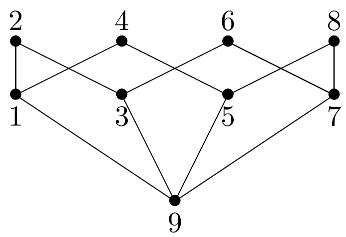
$$\text{Maj } Y = \{a \in A : a \geq x, \forall x \in Y\} = \{3\}$$

e o conjunto dos minorantes de $Y$ é

$$\text{Min } Y = \{a \in A : a \leq x, \forall x \in Y\} = \{5, 7, 8\}.$$

Tendo em conta que $\text{Maj } X$ admite 2 como elemento mínimo, concluímos que $\sup X = 2$ e, como $8$ é o elemento mínimo de $\text{Min } X$, concluímos que $8$ é o ínfimo de $X$. De modo análogo, como $3$ é o elemento mínimo de $\text{Maj } Y$, temos que $3$ é o supremo de $Y$ e, como $8$ é o elemento máximo de $\text{Min } Y$, concluímos que $\inf Y = 8$.

170. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e o c.p.o. $(A, \leq)$ representado pelo diagrama de Hasse



Indique, justificando,

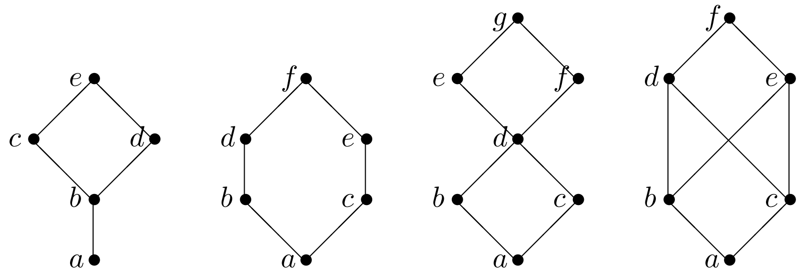
(a) elementos $x, y \in A$ não comparáveis e tais que $\{x, y\}$ tenha supremo;

(b) um subconjunto $X$ de $A$ com exatamente 4 elementos e tais que $(X, \leq_X)$ seja um reticulado;

(c) um subconjunto $Y$ de $A$ que tenha exatamente 2 elementos maximais e 3 elementos minimais.

171. Mostre que se $(A, \leq)$ é um reticulado então $(A, \leq_d)$ é um reticulado. Que pode afirmar sobre o recíproco desta afirmação?

172. Considere os c.p.o.'s que se seguem e, para cada um deles, diga justificando se se trata ou não de um reticulado.




Para cada c.p.o. referido, considere os subconjuntos $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{d, e\}$. Determine, caso existam, sup $X$, sup $Y$, inf $X$ e inf $Y$.

173. Seja $A$ um conjunto. Mostre que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado com elemento máximo e elemento mínimo.

Resolução

Começamos por observar que dados dois subconjuntos quaisquer $X$ e $Y$ de $A$, $X \cap Y$ é o maior subconjunto de $A$ contido em $X$ e em $Y$ e $X \cup Y$ é o menor subconjunto de $A$ que contém $X$ e $Y$. Assim, para todos $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, temos que

$$\sup\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\} = \mathrm{X} \cap \mathrm{Y} \qquad \text{e} \qquad \inf\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\} = \mathrm{X} \cup \mathrm{Y}.$$

Logo, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado.

Mais ainda, como para todo $X \subseteq A$ se tem $\emptyset \subseteq X \subseteq A$, podemos concluir que $\min \mathcal{P}(A) = \emptyset$ e que $\max \mathcal{P}(A) = A$.

174. Dê exemplo de um c.p.o. no qual não existe inf $\emptyset$.

Resolução Começamos por observar que, sendo $A$ um c.p.o., temos, por definição, que

$$\mathrm{Min}\ \emptyset = \{a \in A : \forall x \in \emptyset, a \leq x\}.$$

Como a condição

$$\forall x \in \emptyset, a \leq x$$

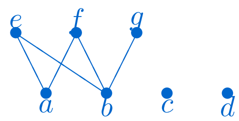
é satisfeita por todos os elementos $a \in A$, concluímos que $\mathrm{Min}\ \emptyset = A$.

Assim, existe inf $\emptyset$ se e só se existe $\max A$. Considere-se, por exemplo, o c.p.o. $(\mathbb{N}, \leq)$ (onde $\leq$ é a ordem usual de números naturais). Como $\mathbb{N}$ não tem elemento máximo, concluímos que, neste c.p.o., o subconjunto $\emptyset$ não admite ínfimo.

175. Dê um exemplo de um c.p.o. com 7 elementos, dos quais **exatamente** 5 são maximais e 4 são minimais.

Resolução

Num c.p.o. com 7 elementos só podemos ter 5 elementos maximais e 4 elementos minimais se alguns dos elementos forem simultaneamente minimais e maximais. Um elemento nestas condições é representado, no diagrama de Hasse, por um ponto isolado. Assim, um c.p.o. que corresponde ao pedido pode ser, por exemplo, o c.p.o. $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, cuja ordem parcial é definida pelo diagrama de Hasse




Neste c.p.o. com 7 elementos, os elementos $a$, $b$, $c$ e $d$ são elementos minimais e os elementos $c$, $d$, $e$, $f$ e $g$ são elementos maximais de $A$

176. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $X \subset A$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições:

   (a) Se $X$ tem um elemento maximal então $X$ tem elemento máximo;
   (b) Se $X$ tem elemento máximo então $X$ tem um elemento maximal;
   (c) Se existe sup $X$ então $X$ tem um elemento maximal;
   (d) Se $X$ tem em elemento maximal então existe sup $X$;
   (e) Existe, no máximo, um ínfimo de $X$.

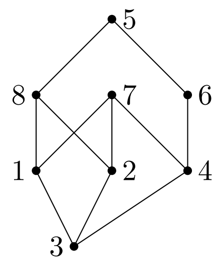
177. Considere, em $\mathbb{N}^2$, a ordem parcial $R$ definida por

$$(a, b)\, R\, (c, d) \iff a \leq c \text{ e } b \leq d,$$

sendo $\leq$ a ordem usual em $\mathbb{N}$.

   (a) Diga, justificando, se o c.p.o. $(\mathbb{N}^2, R)$ é cadeia.
   (b) Determine, caso existem, o supremo e o ínfimo de $\{(2, 4), (3, 5)\}$.
   (c) Diga, justificando, se o c.p.o. $(\mathbb{N}^2, R)$ é reticulado.

178. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ cuja relação de ordem parcial é dada pelo diagrama de Hasse




   (a) Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine, caso existam, Maj $X$, Min $X$, $\max X$ e $\min X$.
   (b) Justifique que $\sup \emptyset = 3$ e que não existe $\inf \emptyset$.
   (c) Dê exemplo de um subconjunto de $A$ com exactamente 3 elementos e que tenha 2 elementos minimais e 2 elementos maximais.
   (d) Dê exemplo, justificando, de um subconjunto $Y$ de $A$ tal que $(Y, \leq_Y)$ é um reticulado.

179. Mostre que se $(P, \leq)$ é um reticulado e $x$ é elemento maximal, então $x$ é elemento máximo. Mostre que, em geral, num conjunto parcialmente ordenado, esta afirmação não é verdadeira.

Resolução

Seja $P$ um reticulado e $x \in P$ um elemento maximal de $P$. Então, sabemos que

$$y \in P \text{ e } x \leq y \Rightarrow x = y.$$

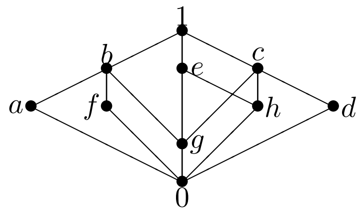
Queremos provar que, nestas condições, $x = \max P$, i.e., que $\forall y \in P, \qquad y \leq x$. Seja $y \in P$. Como $P$ é reticulado, sabemos que $x \vee y \in P$. Como, por definição de supremos, temos que $x \leq x \vee y$, podemos concluir, por hipótese que $x \vee y \leq x$. Das proposições

$$x \leq x \vee y \qquad \text{e} \qquad x \vee y \leq x$$

concluímos que $x = x \vee y$, o que significa que $y \leq x$, como queríamos demonstrar.

O resultado que acabamos de provar é verdadeiro porque podemos considerar o supremo do conjunto $\{x, y\}$, para qualquer $y \in P$, que só temos garantia de existir num reticulado. Assim, se considerarmos um c.p.o. onde não exista o supremo de um elemento maximal e outro elemento, a afirmação já não se verifica. É o caso do c.p.o. $A = \{a, x, y\}$ com a ordem $\leq = \{(a, a), (x, x), (y, y), (a, x), (a, y)\}$.

180. Considere o c.p.o. $(X, \leq)$ definido pelo seguinte diagrama de Hasse:




(a) Considere o subconjunto $A = \{0, f, g, h\}$ de $X$. Indique, caso exista:

i. Os elementos minimais e os elementos maximais de $A$;

ii. O ínfimo e o supremo de $A$;

iii. o máximo e o mínimo de $A$.

(b) Justifique que $X$ não é um conjunto bem ordenado nem um reticulado.

181. Sejam $(X, \leq)$ um c.p.o. e $b \in X$ um elemento arbitrariamente fixado em $X$. Considere o conjunto $F_b = \{x \in X : b \leq x\}$.

(a) Justifique que $F_b \neq \emptyset$;

(b) Mostre que $F_b$ satisfaz a seguinte condição:

$$y \in F_b \wedge y \leq a \Longrightarrow a \in F_b \qquad\qquad (a \in X)$$

(c) Mostre que $F_b$ é o menor subconjunto de $X$ que contém $b$ e satisfaz a condição da alínea (b).

182. Sejam $(P, \leq)$ e $(Q, \leq')$ dois c.p.o.'s e $f : P \longrightarrow Q$ uma aplicação isótona e sobrejetiva. Mostre que:

(a) Se $(P, \leq)$ tem elemento máximo, $(Q, \leq')$ também tem elemento máximo.

(b) Se $a$ é um elemento minimal de $(P, \leq)$, o elemento $f(a)$ não é, necessariamente, um elemento minimal de $(Q, \leq')$.

(c) Se $b \ll a$ em $(P, \leq)$, então não se tem necessariamente que $f(b) \ll f(a)$ em $(Q, \leq')$.

183. Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ conjuntos parcialmente ordenados. Considere o produto cartesiano $P_1 \times P_2$.

(a) Mostre que a relação $\leq$ definida em $P_1 \times P_2$ por

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2$$

é uma relação de ordem parcial. Esta relação de ordem parcial é conhecida por **ordem cartesiana** em $P_1 \times P_2$.

(b) Mostre que a relação $\leq$ definida em $P_1 \times P_2$ por

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} & x_1 <_1 x_2 \\ ou & x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2 \end{cases}$$

é uma relação de ordem parcial. Esta relação de ordem parcial é conhecida por **ordem lexicográfica** em $P_1 \times P_2$.

(c) Mostre que, em relação à ordem cartesiana, $P_1 \times P_2 \simeq P_2 \times P_1$.

(d) Considerando os c.p.o.'s $(P_1, \leq_1)$, com $P_1 = \{a, b\}$ e $\leq_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$, e $(P_2, \leq_2)$, com $P_2 = \{x, y, z\}$ e $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$, mostre que a alínea anterior não é verdadeira, se considerarmos antes a ordem lexicográfica.

Resolução

(a) Para concluirmos que $\leq$ é uma ordem parcial em $P_1 \times P_2$ temos de provar que esta relação binária é reflexiva, antissimétrica e transitiva:

- As relações binárias $\leq_1$ e $\leq_2$, porque são ordens parciais em $P_1$ e $P_2$, respetivamente, são relações reflexivas. Para $(x_1, y_1) \in P_1 \times P_2$, temos que $x_1 \in P_1$ e $y_1 \in P_2$ e, portanto, $x_1 \leq_1 x_1$ e $y_1 \leq_2 y_1$. Logo,
$$(x_1, y_1) \leq (x_1, y_1)$$
e, portanto, $\leq$ é uma relação binária reflexiva;
- Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P_1 \times P_2$ tais que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$. Então,
$$x_1 \leq_1 x_2, \;\; y_1 \leq_2 y_2, \;\; x_2 \leq_1 x_1, \;\; y_2 \leq_2 y_1.$$
Das primeira e terceira condições e porque $\leq_1$ é antissimétrica, concluímos que $x_1 = x_2$. Das segunda e quarta condições, e porque $\leq_2$ é antissimétrica, concluímos que $y_1 = y_2$. Logo, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ e, portanto, $\leq$ é uma relação binária antissimétrica;
- Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in P_1 \times P_2$ tais que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$. Então,
$$x_1 \leq_1 x_2, \;\; y_1 \leq_2 y_2, \;\; x_2 \leq_1 x_3, \;\; y_2 \leq_2 y_3.$$
Das primeira e terceira condições e porque $\leq_1$ é transitiva, concluímos que $x_1 \leq_1 x_3$. Das segunda e quarta condições, e porque $\leq_2$ é transitiva, concluímos que $y_1 \leq_2 y_3$. Logo, $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$ e, portanto, $\leq$ é uma relação binária transitiva.

(b) Para concluirmos que $\leq$ é uma ordem parcial em $P_1 \times P_2$ temos de provar que esta relação binária é reflexiva, antissimétrica e transitiva:

- Para $(x_1, y_1) \in P_1 \times P_2$, temos que $x_1 \in P_1$ e $y_1 \in P_2$. Como $x_1 = x_1$ e, porque $\leq_2$ é reflexiva, $y_1 \leq_2 y_1$. Logo,
$$(x_1, y_1) \leq (x_1, y_1)$$
e, portanto, $\leq$ é uma relação binária reflexiva;

- Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P_1 \times P_2$ tais que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$. Então,

$$x_1 <_1 x_2, \text{ ou } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2$$

e

$$x_2 <_1 x_1, \text{ ou } x_2 = x_1 \text{ e } y_2 \leq_2 y_1.$$

De todos os casos gerados pela combinação destas condições, apenas podemos ter

$$x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2 \text{ e } y_2 \leq_2 y_1$$

e, portanto, como $\leq_2$ é antissimétrica, podemos concluir que

$$x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

Logo, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, o que nos permite concluir que $\leq$ é antissimétrica;

- Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in P_1 \times P_2$ tais que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$. Então,

$$x_1 <_1 x_2, \text{ ou } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2$$

e

$$x_2 <_1 x_3, \text{ ou } x_2 = x_3 \text{ e } y_2 \leq_2 y_3.$$

Temos quatro situações a considerar:

(1) $x_1 <_1 x_2$ e $x_2 <_2 x_3$: neste caso, como $\leq_1$ é transitiva e $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, temos que $x_1 <_1 x_3$ e, portanto $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$;

(2) $x_1 <_1 x_2$ e $x_2 = x_3$ e $y_2 \leq_2 y_3$: neste caso, temos que $x_1 <_1 x_3$ e, portanto $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$;

(3) $x_1 = x_2$ e $y_1 \leq_2 y_2$ e $x_2 <_1 x_3$: neste caso, temos $x_1 <_1 x_3$ e, portanto $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$;

(4) $x_1 = x_2$ e $y_1 \leq_2 y_2$ e $x_2 = x_3$ e $y_2 \leq_2 y_3$: neste caso, temos $x_1 = x_3$ e, como $\leq_2$ é transitiva, $y_1 \leq_2 y_3$ e, portanto, $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$;

Em qualquer uma das quatro situações concluímos que $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$, o que nos permite concluir que $\leq$ é transitiva.

(c) Para provarmos que os c.p.o.'s $P_1 \times P_2$ e $P_2 \times P_1$ são isomorfos, basta provar que a aplicação $\varphi : P_1 \times P_2 \to P_2 \times P_1$, definida por $\varphi((x, y)) = (y, x)$, para todo $(x, y) \in P_1 \times P_2$, é um isomorfismo entre c.p.o.'s, ou seja, que é um mergulho isótono sobrejetivo, o que se verifica facilmente. De facto,

- $\varphi$ é obviamente sobrejetiva, uma vez que $D'_\varphi = P_2 \times P_1$;
- $\varphi$ é um mergulho isótono, uma vez que, para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P_1 \times P_2$, se tem

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \leq_{P_1 \times P_2} (x_2, y_2) \quad &\Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2 \\
&\Leftrightarrow y_1 \leq_2 y_2 \text{ e } x_1 \leq_1 x_2 \\
&\Leftrightarrow (y_1, x_1) \leq_{P_2 \times P_1} (y_2, x_2) \\
&\Leftrightarrow \varphi(x_1, y_1) \leq_{P_2 \times P_1} \varphi(x_2, y_2).
\end{aligned}$$

(d) Começamos por observar que

$$P_1 \times P_2 = \{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z)\}$$

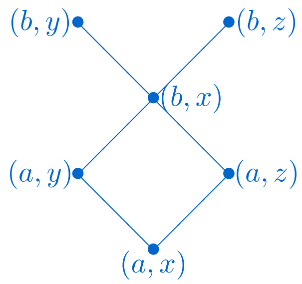
e

$$P_2 \times P_1 = \{(x,a),(y,a),(z,a),(x,b),(y,b),(z,b)\}.$$

Considerando a ordem lexicográfica em $P_1 \times P_2$, obtemos

$$\leq_{P_1\times P_2} = \mathrm{id}_{\,P_1\times P_2} \cup \{((a,x),(b,x)),((a,x),(b,y)),((a,x),(b,z)),$$
$$((a,y),(b,x)),((a,y),(b,y)),((a,y),(b,z)),((a,z),(b,x)),((a,z),(b,y)),$$
$$((a,z),(b,z)),((a,x),(a,y)),((a,x),(a,z)),((b,x),(b,y)),((b,x),(b,z))\}$$

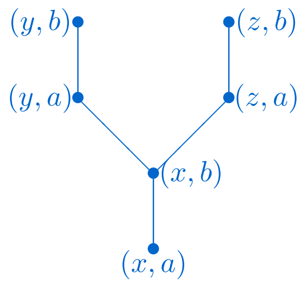
a que corresponde o diagrama de Hasse:




Considerando agora a ordem lexicográfica em $P_2 \times P_1$, obtemos

$$\leq_{P_2\times P_1} = \mathrm{id}_{\,P_2\times P_1} \cup \{((x,a),(y,a)),((x,a),(y,b)),((x,a),(z,a)),$$
$$((x,a),(z,b)),((x,a),(x,b)),((x,b),(y,a)),((x,b),(y,b)),((x,b),(z,a),$$
$$((x,b),(z,b),((y,a),(y,b)),((z,a),(z,b))\}$$

a que corresponde o diagrama de Hasse:




Pelos diagramas podemos concluir que os dois c.p.o.'s não são isomorfos (basta observar, por exemplo, que, no primeiro diagrama, o elemento mínimo é coberto por dois elementos distintos e, no segundo diagrama, o elemento mínimo é coberto por um único elemento).