Universidade do Minho - 2023/24
Departamento de Matemática

Exercícios (com algumas resoluções) de Tópicos de Matemática

Paula Mendes Martins

1º ano - Licenciatura em Ciências da Computação

1 preliminares de lógica

1. Das seguintes expressões, indique aquelas que são proposições:
   (a) A Terra é redonda.
   (b) Hoje está sol.
   (c) $2 + x = 3$ e 2 é par.
   (d) $(25 \times 2 + 7)$.
   (e) Vai dormir!
   (f) 2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4.
   (g) Portugal Continental tem 18 distritos.
   (h) Qual é o conjunto de soluções inteiras da equação $x^2 - 1 = 0$?
   (i) $4 < 3$.
   (j) Eu gosto de fruta e tu pensas frequentemente em visitar Espanha.
   (k) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   (l) Telefona-me na quinta-feira se estiveres em casa.
   (m) $2 + 3 = 5$.
   (n) $x + y = z$.
   (o) Será que amanhã vai nevar?

2. Das seguintes proposições, indique aquelas que são proposições simples e aquelas que são compostas.
   (a) A Matemática é a disciplina preferida do Jaime.
   (b) Se vais tomar café ao CPI, então eu vou contigo.
   (c) Chegou o Outono e os dias são mais curtos.
   (d) Estas questões são bastante fáceis para mim.
   (e) Hoje, o António vai ao teatro ou vai ao cinema.
   (f) No hemisfério Sul, o mês de Julho não é um mês de Verão.
   (g) Consegues chegar a horas à aula se te despachares a tomar o pequeno-almoço.

   Resolução

   As proposições (a) e (d) são proposições simples. As restantes são proposições compostas. A proposição (b) faz uso do conectivo de implicação, a proposição (c) do conectivo de conjunção, a proposição (e) do conectivo de disjunção, a proposição (f) do conectivo de negação. Finalmente, a proposição (g) faz uso dos conectivos de implicação e conjunção.

3. Sejam x = "Eu estou feliz.", y = "Eu estou a ver um filme." e z = "Eu estou a comer pipocas.". Traduza as seguintes proposições em palavras:

(a) $z \Rightarrow x$	(c) $(y \vee z) \Rightarrow x$	(e) $(y \Rightarrow \sim x) \wedge (z \Rightarrow \sim x)$
(b) $x \Leftrightarrow y$	(d) $y \vee (z \Rightarrow x)$	(f) $(x \wedge \sim y) \Leftrightarrow (y \vee z)$

4. Sejam p = "Eu gosto de fruta.", q = "Eu não gosto de cereais." e r = "Eu sei fazer uma omolete.". Traduza as seguintes proposições em palavras:

(a) $p \wedge q$	(d) $\sim (p \vee q)$	(g) $(r \vee p) \wedge q$
(b) $q \vee r$	(e) $\sim p \vee \sim q$	(h) $r \wedge (p \vee q)$
(c) $\sim r$	(f) $\sim p \wedge q$	(i) $\sim p \wedge r$

5. Considere as seguintes proposições:

p: "7 é um número inteiro par", q: "$3+1=4$", r: "24 é divisível por 8".

(a) Escreva em linguagem lógica as afirmações:

i. $3+1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8;

ii. não é verdade que 7 seja ímpar ou $3+1=4$;

iii. se $3+1=4$ então 24 não é divisível por 8.

(b) Traduza por frases cada uma das seguintes proposições:

i. $p \vee (\sim r)$; ii. $\sim (p \wedge q)$; iii. $(\sim r) \Rightarrow (\sim q \vee p)$.

6. Considere as seguintes proposições:

p: "vou à praia", q: "apanho o combóio", r: "está a chover".

(a) Traduza por frases cada uma das seguintes proposições:

i. $\sim (r \vee p)$;

ii. $\sim r \vee p$;

iii. $(\sim q \vee r) \Rightarrow \sim p$.

7. Considerando que p representa a proposição "O João cai." e que q representa a proposição "O João magoa-se.", escreva simbolicamente as seguintes proposições:

(a) O João cai e magoou-se.

(b) O João caiu mas não se magoou.

(c) Sempre que o João cai, magoa-se.

(d) O João só se magoa se cair.

(e) O João magoa-se exatamente quando cai.

Resolução

(a) $p \wedge q$ (a frase apresentada pode ser reescrita como "o João cai e o João magoa-se");

(b) $p \wedge \sim q$ (a frase apresentada pode ser reescrita como "O joão cai e o joão não se magoa");

(c) $p \Rightarrow q$ (a frase apresentada pode ser reescrita como "Se o João cai então o João magoa-se");

(d) $q \Rightarrow p$ (a frase apresentada pode ser reescrita como "Se o João se magoou então o João caiu");

(e) $p \Leftrightarrow q$ (a frase apresentada pode ser reescrita como "O joão magoa-se se e só se o João cai").

8. Sejam $p =$"O Vítor é mais alto que o Manuel.", $q =$"O Pedro é mais baixo que o Manuel.", $r =$"O Pedro e o Vítor são da mesma estatura." e $s =$"O Vítor é o mais alto dos três.". Escreva simbolicamente as proposições que se seguem:

(a) O Vítor é mais alto que o Manuel mas não é o mais alto dos três.

(b) Se o Vítor é mais alto que o Manuel e o Pedro é mais baixo que o Manuel, então o Vítor é o mais alto dos três.

(c) Se o Pedro e o Vítor são da mesma estatura, então o Pedro não é mais baixo que o Manuel ou o Vítor não é mais alto que este último.

(d) O Pedro não é mais baixo que o Manuel se o Vítor não é o mais alto dos três.

(e) O Vítor é o mais alto dos três ou não é mais alto que o Manuel.

(f) O Vítor só é o mais alto dos três se o Pedro não for da mesma estatura que ele.

9. Sejam $e =$ "A casa é azul.", $f =$"A casa tem 30 anos." e $g =$"A casa é feia.". Traduza as seguintes proposições em símbolos:

   (a) Se a casa tem 30 anos então é feia.

   (b) Se a casa é azul então a casa é feia ou tem 30 anos.

   (c) Se a casa é azul então é feia ou a casa tem 30 anos.

   (d) A casa só não é feia se não tem 30 anos.

   (e) A casa tem 30 anos se for azul e a casa não é feia se tem 30 anos.

   (f) Para a casa ser feia é necessário e suficiente que tenha 30 anos.

10. Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

   (a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.

   (b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.

   (c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.

   (d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.

   (e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.

   (f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

   (g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.

   (h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

11. Suponha que p é uma proposição verdadeira, q é uma proposição falsa, r é uma proposição falsa e s é uma proposição verdadeira. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

   (a) $p \vee r$ (c) $(s \wedge p) \vee (q \wedge r)$ (e) $(q \Leftrightarrow s) \wedge p$

   (b) $\sim s \vee \sim r$ (d) $p \Leftrightarrow r$ (f) $(s \Rightarrow p) \Leftrightarrow \sim (r \vee q)$

12. Sejam p, q e r proposições. Se a proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira, o que se pode dizer sobre o valor lógico das seguintes proposições?

   (a) $p \vee r \Rightarrow q \vee r$ (b) $p \wedge r \Rightarrow q \wedge r$ (c) $\sim p \wedge q \Leftrightarrow p \vee q$

   Resolução

   Dizer que a proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira é o mesmo que afirmar que a proposição p é falsa ou a proposição q é verdadeira.

   (a) Sabemos que a proposição $p \vee r \Rightarrow q \vee r$ é falsa quando, e apenas quando, $p \vee r$ é verdadeira e $q \vee r$ é falsa.

   Se p é falsa, então, $p \vee r$ só é verdadeira se r é verdadeira. Mas, neste caso, $q \vee r$ é verdadeira e, portanto, $p \vee r \Rightarrow q \vee r$ é também verdadeira.

   Se q é verdadeira, a proposição $q \vee r$ é verdadeira e, neste caso, a proposição $p \vee r \Rightarrow q \vee r$ é verdadeira.

   Assim, nas condições dadas, a proposição $p \vee r \Rightarrow q \vee r$ é verdadeira.

(b) Se p é falsa. $p \wedge r$ é também falsa (independentemente da valoração de r) e, por isso, $p \wedge r \Rightarrow q \wedge r$ é verdadeira.

(c) Se q é verdadeira, a proposição $p \vee q$ é verdadeira e, portanto, a proposição $\sim p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ é verdadeira.

Se p é falsa, $\sim p$ é verdadeira e, por isso, $\sim p \wedge q$ e $p \vee q$ têm a mesma valoração de q. Logo, as proposições $\sim p \wedge q$ e $p \vee q$ são ambas falsas ou são ambas verdadeiras. Em qualquer um dos casos, a proposição $\sim p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ é verdadeira.

13. Suponha que p é uma proposição verdadeira, q é uma proposição falsa, r é uma proposição falsa e s é uma proposição verdadeira. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

(a) $(r \wedge s) \vee q$
(b) $\sim (p \wedge q)$
(c) $r \vee (s \vee (p \wedge q))$
(d) $r \Rightarrow q$
(e) $s \Rightarrow (p \Rightarrow \sim s)$
(f) $((q \Rightarrow s) \Leftrightarrow s) \wedge \sim p$

14. Se a e b são proposições verdadeiras e c é falsa, qual é o valor lógico de cada uma das seguintes proposições?

(a) $a \vee c$
(b) $a \wedge c$
(c) $\sim a \wedge \sim c$
(d) $a \Leftrightarrow \sim b \vee c$
(e) $b \vee \sim c \Rightarrow a$
(f) $(b \vee a) \Rightarrow (b \Rightarrow \sim c)$
(g) $(b \Rightarrow \sim a) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow c)$
(h) $(b \Rightarrow a) \Rightarrow ((a \Rightarrow \sim c) \Rightarrow (\sim c \Rightarrow b))$

15. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas proposicionais:

(a) $\sim (p \wedge q)$
(b) $\sim p \vee q$
(c) $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$
(d) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(e) $p \vee (\sim q \vee r)$
(f) $\sim (p \wedge (q \vee \sim p))$
(g) $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$
(h) $\sim (p \Rightarrow \sim p)$
(i) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
(j) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$
(k) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
(l) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge q)$
(m) $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$
(n) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

Resolução

(c) Como temos três proposições simples, a tabela de verdade vai ter $8(= 2^3)$ linhas, correspondentes aos 8 casos possíveis. A tabela de verdade para esta proposição é:

p	q	r	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F
F	F	F	V	F	V	F

(i) Como temos duas proposições simples, a tabela de verdade vai ter $4(= 2^2)$ linhas. Temos:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow q)$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

16. Sejam a, b e c proposições. Se $a \Leftrightarrow b$ é falsa, o que se pode dizer sobre o valor lógico das seguintes proposições?

(a) $a \wedge b$ (b) $a \vee b$ (c) $a \Rightarrow b$ (d) $a \wedge c \Leftrightarrow b \wedge c$

17. De entre as seguintes fórmulas proposicionais, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

(a) $p \Rightarrow (p \vee q)$
(b) $(p \Rightarrow (p \vee q)) \wedge q$
(c) $\sim (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
(d) $p \vee (\sim p \wedge q)$
(e) $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$
(f) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
(g) $(p \vee \sim p) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$
(h) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
(i) $\sim (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$
(j) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$
(k) $(p \vee (\sim p \wedge q)) \wedge \sim (q \wedge r)$
(l) $((p \Leftrightarrow \sim q) \wedge p) \wedge q$

Resolução

(c) Começamos por construir a tabela de verdade relativa a esta proposição

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee q$	$\sim (p \wedge q) \Rightarrow p \vee q$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F

Como há situações onde é verdadeira e situações onde é falsa, a proposição $\sim (p \wedge q) \to (p \vee q)$ não é tautologia nem é contradição.

(e) A tabela de verdade relativa a esta proposição é

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee q$	$(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F

Como em todas as situações a proposição composta é falsa, a proposição $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$ é uma contradição.

(j) A tabela de verdade relativa a esta proposição é

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \Rightarrow q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V

Como em todas a situações a proposição $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ é verdadeira, esta proposição é uma tautologia.

18. Indique quais das seguintes proposições são tautologias e quais são contradições.

(a) Se a Joana come chocolate, então a Joana come chocolate ou não come chocolate.

(b) Se os hipopótamos têm asas e não têm asas, então a Terra é quadrada.

(c) Se a Sofia vai ao cinema então a Marta está a comer bolo, mas a Marta não está a comer bolo e a Sofia vai ao cinema.

(d) Os gatos bebem leite ou água e os gatos bebem água sempre que bebem leite.

(e) A galinha é castanha ou o pato é branco se e só se o pato é branco e a galinha não é castanha.

19. Sejam f uma fórmula proposicional, t uma tautologia e c uma contradição. Mostre que:

(a) $f \vee t$ é uma tautologia.

(b) $f \wedge c$ é uma contradição.

(c) $c \Rightarrow f$ é uma tautologia.

(d) $f \Rightarrow t$ é uma tautologia.

20. Indique, justificando, se é ou não verdade que para quaisquer fórmulas proposicionais f_1 e f_2 se tem:

(a) se $f_1 \wedge f_2$ é uma tautologia então f_1 e f_2 são tautologias.

(b) Se $f_1 \vee f_2$ é uma tautologia então f_1 é uma tautologia ou f_2 é uma tautologia.

21. Indique quais dos pares de fórmulas proposicionais que se seguem são logicamente equivalentes:

(a) $\sim (p \wedge q)$; $\sim p \wedge \sim q$.

(b) $p \Rightarrow q$; $q \Rightarrow p$.

(c) $\sim (p \Rightarrow q)$; $p \wedge (q \Rightarrow (p \wedge \sim p))$.

(d) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$; $\sim (\sim r \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim p$.

22. Em cada uma das alíneas que se seguem, verifique se as duas fórmulas proposicionais dadas são logicamente equivalentes:

(a) "Se chover então eu vou ao cinema." e "Não está a chover ou eu vou ao cinema."

(b) "Esta camisola é às riscas e esta camisola é de manga curta ou tem gola alta." e "Esta camisola é às riscas e é de manga curta ou esta camisola tem gola alta."

(c) "Não é verdade que eu gosto de maçãs e laranjas." e "Eu não gosto de maçãs e não gosto de laranjas."

(d) "Este gato é persa ou este gato gosta de peixe e dorme muito." e "Este gato é persa ou gosta de peixe e este gato dorme muito."

(e) "Não é verdade que este carro é rápido se e só se é novo." e "Este carro é rápido e novo ou este carro não é rápido ou não é novo."

23. Escreva cada uma das seguintes fórmulas proposicionais em termos da disjunção e da negação, ou seja, para cada uma das fórmulas, encontre uma outra fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas os conectivos $\vee$ e $\sim$.

(a) $p \wedge q$ (b) $p \Rightarrow q$ (c) $p \Leftrightarrow q$.

Resolução

(a) Usando tautologias conhecidas podemos escrever

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim (\sim p) \wedge \sim (\sim q)) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q).$$

Assim, temos que $p \wedge q$ é logicamente equivalente a $\sim (\sim p \vee \sim q)$.

(b) $p \Rightarrow q$ é logicamente equivalente a $\sim p \vee q$.

(c) usando tautologias conhecidas podemos escrever

$$\begin{aligned}(p \Leftrightarrow q) \quad &\Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \\ &\Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \\ &\Leftrightarrow [\sim (\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p))] \,.\end{aligned}$$

Assim, temos que $p \Leftrightarrow q$ é logicamente equivalente a $\sim (\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p))$.

24. Escreva cada uma das seguintes fórmulas proposicionais em termos da conjunção e da negação, ou seja, para cada uma das fórmulas, encontre uma outra fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas os conectivos $\wedge$ e $\sim$.

    (a) $p \vee q$ (b) $p \Rightarrow q$ (c) $p \Leftrightarrow q$.

25. Numa cidade os habitantes são de dois tipos: os que mentem sempre (F) e os que dizem sempre a verdade (V). Consideremos 3 habitantes A, B e C dessa cidade. Em cada uma das alíneas, diga se é possível determinar o tipo (V ou F) de cada um desses habitantes, sabendo que eles disseram:

    (a) A: B e C são F's
    B: A é V
    C: A é F

    (b) A: B e C são do mesmo tipo
    B: eu e C somos V's
    C: B é F

26. Dê exemplo de uma fórmula proposicional que se comporte como:

    (a) Elemento neutro para a conjunção.
    (b) Elemento neutro para a disjunção.
    (c) Elemento absorvente para a conjunção.
    (d) Elemento absorvente para a disjunção.

27. Tendo em conta que a proposição p *ou* q *mas não ambos*, que se designa por *ou exclusivo*, se denota por $p\dot{\vee}q$:

    (a) Determine a tabela de verdade de $p\dot{\vee}q$ e, utilizando apenas os operadores lógicos $\wedge$, $\vee$ e $\sim$, encontre uma fórmula logicamente equivalente a $p\dot{\vee}q$.
    (b) Mostre que $p\dot{\vee}q$ é equivalente a $\sim (p \Leftrightarrow q)$.
    (c) Averigue se a fórmula proposicional $p\dot{\vee}q \Leftrightarrow \sim p \dot{\vee} \sim q$ é ou não uma tautologia.
    (d) Construa as tabelas de verdade para $p\dot{\vee}p$, $(p\dot{\vee}q)\dot{\vee}r$ e $(p\dot{\vee}p)\dot{\vee}p$

    Resolução

    (a) A proposição p *ou* q *mas não ambos* é obviamente falsa quando e apenas quando as proposições p e q são ambas falsas ou ambas verdadeiras. Assim, a tabela de verdade da proposição $p\dot{\vee}q$ é

p	q	$p\dot{\vee}q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

.

É também óbvio que p *ou* q *mas não ambos* é logicamente equivalente a p *e não* q *ou* q *e não* p, i.e.,

$$p\dot{\vee}q \text{ é logicamente equivalente a } (p \wedge (\sim q)) \vee (\sim p \wedge q).$$

(b) A proposição $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando, e apenas quando, as proposições p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas. A proposição $p\dot{\vee}q$ é falsa quando, e apenas quando, as proposições p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Logo, esta proposição é logicamente equivalente à negação da primeira.

(c) Utilizando a alínea (a) e tautologias conhecidas, temos que

$$\begin{aligned}(p\dot{\vee}q) \quad &\Leftrightarrow [(p \wedge (\sim q)) \vee (\sim p \wedge q)]\\ &\Leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge (\sim q))]\\ &\Leftrightarrow [(\sim p \wedge \sim (\sim q)) \vee (\sim (\sim p) \wedge (\sim q))]\\ &\Leftrightarrow [\sim p \dot{\vee} \sim q].\end{aligned}$$

Logo, a fórmula proposicional $p\,\dot{\vee}q \Leftrightarrow \sim p\,\dot{\vee} \sim q$ é uma tautologia.

(d) As três tabelas de verdade pedidas são:

p	$p\dot{\vee}p$
V	F
F	F

p	q	r	$p\dot{\vee}q$	$(p\dot{\vee}q)\dot{\vee}r$
V	V	V	F	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	F
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F

p	$p\dot{\vee}p$	$(p\dot{\vee}p)\dot{\vee}p$
V	F	V
F	F	F

.

28. Considere o conectivo de Sheffer, $|$, definido pela tabela de verdade

p	q	$p \mid q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

e mostre que:

(a) $p \mid q$ é equivalente a $\sim p \vee \sim q$;

(b) $\sim p$ é equivalente a $p \mid p$;

(c) $p \wedge q$ é equivalente a $(p \mid q) \mid (q \mid p)$;

(d) $p \vee q$ é equivalente a $(p \mid p) \mid (q \mid q)$;

(e) $p \Rightarrow q$ é equivalente a $p \mid (q \mid q)$.

29. Exprima cada uma das seguintes proposições como uma quantificação:

(a) A equação $x^3 = 28$ tem solução nos números naturais.

(b) 1000000 não é o maior número natural.

(c) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.

(d) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

(e) Existe um único número real x tal que para todo o número real y, $xy + x - 4 = 4y$.

Resolução

(a) A frase "A equação $x^3 = 28$ tem solução nos números naturais." pode ser reescrita como "Existe pelo menos um número natural que é solução da equação $x^3 = 28$.". Assim, podemos escrever
$$\exists x \in \mathbb{N} : x^3 = 28.$$

(b) A frase "1000000 não é o maior número natural." pode ser reescrita como "Não é verdade 1000000 seja maior que qualquer número natural.". Assim, temos
$$\sim (\forall n \in \mathbb{N},\ 1000000 > n)\,.$$

(c) A frase "A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3." pode ser reescrita como "Para qualquer número natural, a sua soma com os dois números seguintes é um múltiplo de 3". A "soma ser um múltiplo de 3" significa que existe um natural k para o qual a soma é $3k$. Assim, utilizando quantificadores, a frase inicial pode ser escrita como
$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : x + (x+1) + (x+2) = 3k.$$

(d) A frase "Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional." pode ser reescrita como
$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, x \neq y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y).$$

(e) A frase "Existe um único número real x tal que para todo o número real y, $xy + x - 4 = 4y$." pode ser reescrita como
$$\exists^1 x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, xy + x - 4 = 4y.$$

30. Reescreva as seguinte afirmações como proposições com quantificadores, tanto em símbolos como em português:

(a) As pessoas são simpáticas.

(b) Um amigo ofereceu-me um presente.

(c) Os gatos gostam de comer peixe e dormir a sesta.

(d) Eu gostei de um dos livros que li no Verão passado.

(e) Ninguém gosta de comer gelado e pickles em simultâneo.

31. Suponha que o domínio de variação de x é o conjunto de todas pessoas. Sejam $p(x) =$"x tem cabelo verde.", $q(x) =$"x gosta de pipocas." e $r(x) =$"x tem um sapo como animal de estimação." Traduza as seguintes proposições com palavras:

(a) $(\forall x)\ p(x)$.

(b) $(\exists x)\ q(x)$.

(c) $(\forall x)\ [r(x) \wedge q(x)]$.

(d) $(\exists x)\ [p(x) \implies r(x)]$.

(e) $(\forall x)\ [r(x) \iff \sim q(x)]$.

32. Suponha que o domínio de variação de x e y é o conjunto de todos os carros. Sejam $l(x, y) =$"x é mais rápido que y.", $m(x, y) =$"x é mais caro que y." e $n(x, y) =$"x é mais antigo que y." Traduza as seguintes proposições com palavras:

(a) $(\exists x)(\forall y)\ l(x,y)$.

(b) $(\forall x)(\exists y)\ m(x,y)$.

(c) $(\exists y)(\forall x)\ [l(x,y) \vee n(x,y)]$.

(d) $(\forall y)(\exists x)\ [\sim m(x,y) \implies l(x,y)]$.

33. Suponha que o conjunto de variação de y é o conjunto de todas as vacas. Sejam $p(y)$ =“y é castanha.”, $q(y)$ =“y tem 4 anos de idade.” e $r(y)$ =“y tem manchas brancas.”. Traduza as seguintes proposições em símbolos matemáticos:

    (a) Existe uma vaca castanha.

    (b) Todas as vacas têm 4 anos de idade.

    (c) Existe uma vaca castanha com manchas brancas.

    (d) Todas as vacas de 4 anos de idade têm manchas brancas.

    (e) Existe uma vaca que se tem 4 anos de idade então não tem manchas brancas.

    (f) Todas as vacas são castanhas se e só se não têm 4 anos de idade.

    (g) Não existem vacas castanhas.

    Resolução

    Se representarmos por V o conjunto de todas as vacas, temos:

    (a) $\exists y \in V : p(y)$;

    (b) $\forall y \in V, q(y)$;

    (c) $\exists y \in V : p(y) \wedge r(y)$.

    (d) $\forall y \in V, q(y) \Rightarrow r(y)$;

    (e) $\exists y \in V : q(y) \Rightarrow \sim r(x)$;

    (f) $\forall y \in V : p(x) \Leftrightarrow \sim q(x)$;

    (g) $\sim (\exists y \in V : p(y)$

34. Considere a seguinte proposição:

    “Todas as raparigas são boas alunas a Matemática”.

    Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale(m) à negação da proposição anterior:

    (a) Todas as raparigas são más alunas a Matemática.

    (b) Nem todas as raparigas são boas alunas a Matemática.

    (c) Existe pelo menos uma rapariga que é má aluna a Matemática.

    (d) Nem todas as raparigas são más alunas a Matemática.

35. Estude a veracidade de cada uma das seguintes afirmações:

    (a) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} :\ x < y$;

    (b) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N},\ x < y$;

    (c) $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N},\ x < y$;

    (d) $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N} :\ x < y$;

    (e) $\exists x, y \in \mathbb{N} :\ x < y$;

    (f) $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x < y$.

36. Indique, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa.

    (a) $\forall a \in \mathbb{R}\ \ \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = a$;

    (b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists a \in \mathbb{R} : a + x = 0$;

    (c) $\exists a \in \mathbb{R} :\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ a + x = 0$;

    (d) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists a \in \mathbb{R} : ax = 0$;

    (e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists y \in \mathbb{R} : x < y$;

    (f) $\forall y \in \mathbb{R} :\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ x < y$;

    (g) $\forall a \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x = y \Rightarrow x^2 = y^2$;

    (h) $\forall a \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.

37. Escreva a negação de cada uma das seguintes proposições.

(a) Todos os rapazes são simpáticos.

(b) Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas.

(c) A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real x.

(d) Existe uma casa tal que qualquer pessoa que lá entre fica com sardas.

(e) Existe um número natural que é maior que todos os outros números naturais.

38. (a) Usando a condição $p(x, y) =$ "x gosta de y", exprima por meio de uma proposição lógica a afirmação:

i. "Toda a gente tem alguém que gosta de si";

ii. "As pessoas de quem todos gostam também gostam de si próprias".

(b) Formule a negação da proposição indicada na alínea (a)i. e escreva uma afirmação que traduza essa negação.

Resolução.

(a) Representemos o conjunto das pessoas por P.

i. A frase pode ser traduzida por "Para qualquer pessoa x, existe uma pessoa y tal que y gosta de x". Assim, temos a proposição:

$$\forall x \in P, \exists y \in P : p(y, x).$$

ii. A frase pode ser traduzida por "Se toda a gente gosta de uma pessoa x, então x també gosta de x. Assim, temos

$$\forall x, y \in P p(y, x) \Rightarrow p(x, x).$$

(b) Para negar a afirmação de i. podemos usar a frase "Não é verdade que toda a gente tem alguém que gosta de si".

Para escrever esta frase como uma afirmação, usamos uma das segundas leis de de Morgan. Temos

$$\sim (\forall x \in P, \exists y \in P : p(y, x)) \Leftrightarrow \exists x \in P : \forall y \in P, \sim p(y, x)$$

ou seja, a negação da afirmação i. pode ser traduzida por "Existe alguém de quem ninguém gosta."

39. Considere a condição $a(x, y) =$ "x é amigo de y". Sabendo que as variáveis x e y têm por domínio o conjunto dos alunos que frequentam Tópicos de Matemática, exprima por meio de uma proposição lógica as seguintes afirmações:

(a) "Todos os alunos de Tópicos de Matemática têm amigos que frequentam Tópicos de Matemática";

(b) "Todos os alunos de Tópicos de Matemática têm um amigo em comum que frequenta Tópicos de Matemática".

40. Para cada uma das seguintes alíneas, identifique as hipóteses e as conclusões:

(a) Para ser eleito presidente é suficiente ser político;

(b) Para ser eleito presidente é necessário ser político;

(c) Para ser rico basta ter pais ricos;

(d) Uma condição necessária para entender ciências de computação é ter um conhecimento completo de matemática discreta;

(e) Uma condição suficiente para se ter notas boas é trabalhar muito;

(f) Só se eu acordar cedo é que vamos ao jogo;

(g) O programa só corre se não houver erros tipográficos.

41. Utilizando, convenientemente, a lógica dedutiva, averigue a veracidade dos seguintes argumentos:

(a)
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ (p \vee q) \Rightarrow r \\ \hline r \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{l} l \Rightarrow m \\ (m \vee n) \Rightarrow (l \vee k) \\ \sim p \wedge l \\ \hline k \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{l} \sim p \Rightarrow q \\ \sim p \Rightarrow r \\ \hline \sim r \Rightarrow \sim q \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{l} (\sim p \vee q) \Rightarrow r \\ s \wedge \sim q \\ \sim t \\ p \Rightarrow t \\ (\sim p \wedge r) \Rightarrow \sim s \\ \hline \sim q \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \Rightarrow r \\ \sim (p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q) \\ r \Rightarrow s \\ q \wedge \sim s \\ \hline \sim p \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{l} a \Rightarrow (b \vee c) \\ a \wedge \sim b \\ \hline c \end{array}$$

(g)
$$\begin{array}{l} e \Rightarrow f \\ \sim g \Rightarrow \sim f \\ h \Rightarrow i \\ e \wedge f \\ \hline g \wedge i \end{array}$$

(h)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \vee s \\ \sim s \Rightarrow \sim t \\ \sim q \vee s \\ \sim s \\ (\sim p \wedge r) \Rightarrow u \\ w \vee t \\ \hline u \wedge w \end{array}$$

Resolução

(a) Consideramos, pela ordem com que são apresentadas, as seguintes deduções:

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline p \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \\ \hline p \vee q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \vee q \\ (p \vee q) \Rightarrow r \\ \hline r \end{array}$$

Assim, o argumento apresentado é válido.

(d) O argumento é válido uma vez que temos a hipótese $s \wedge \sim q$, donde podemos concluir $\sim q$. As outras hipóteses são dispensáveis.

Observação: Repare que mesmo que as outras hipóteses entrem em contradição com a hipótese considerada, o argumento será sempre válido. de facto, se houver contradição nas hipóteses estamos perante uma implicação onde o antecedente é falso, pelo que a implicação é sempre verdadeira.

42. Utilizando, convenientemente, a lógica dedutiva, averigue a veracidade dos seguintes argumentos:

(a) O João afirma: "Hoje vou ao cinema ou fico em casa a ver um filme na televisão". No dia seguinte o João comentou: "Ontem não fui ao cinema." Em resposta, a Joana concluiu: "Então viste um filme na televisão!".

(b) O João disse: "Se existe uma armadilha nesta estrada, nós não chegaremos sem nos magoarmos". Uns minutos depois, Joana deu uma queda, magoou-se e replicou: "Havia uma armadilha nesta estrada!".

(c) A Maria afirmou: "Se hoje chover e fizer frio, vai nevar". No dia seguinte a Maria comentou: "Ontem fez frio e nevou." Em resposta, a Rita concluiu: "Então choveu".

(d) O Tiago disse: "Vou almoçar ao McDonald's ou à Pizza Hut". E acrescentou: "Se comer no McDonald's fico mal disposto e não vou ao cinema". Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e concluiu: "O Tiago foi almoçar à Pizza Hut"

43. Considere os seguintes argumentos, analise-os e diga, justificando, se são ou não válidos:

(a) Se eu comprar um carro novo não poderei ir ao Alentejo na Páscoa. Como vou ao Alentejo na Páscoa, não comprarei um carro novo.

(b) O crime foi cometido pelo porteiro ou pela empregada. Se foi pelo porteiro, ele não poderia ter atendido o telefone às 11:00h. Como o porteiro atendeu o telefone, quem cometeu o crime foi a empregada.

Resolução

(a) Neste argumento, podemos identificar duas proposições simples: "p: Vou comprar um carro" e "q: Vou ao Alentejo na Páscoa" . Neste contexto, o argumento pode ser traduzido por:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow \sim q \\ q \\ \hline \sim p \end{array}$$

Este argumento é válido, pois, pelo contrarrecíproco e dupla negação, temos que

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow \sim q \\ \hline q \Rightarrow \sim p \end{array}$$

e, portanto, aplicando agora o Modus Ponens, temos:

$$\begin{array}{c} q \Rightarrow \sim p \\ q \\ \hline \sim p \end{array}.$$

(b) Neste argumento, podemos identificar três proposições simples: "p: O crime foi cometido pelo porteiro", "q: O crime foi cometido pela empregada" e "r: O porteiro atendeu o telefone às 11:00h. Neste contexto, o argumento pode ser traduzido por:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \Rightarrow \sim r \\ r \\ \hline q \end{array}$$

O argumento é válido pois, pela dupla negação e Modua Tolens, temos

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow \sim r \\ r \\ \hline \sim p \end{array}$$

e pela veracidade da disjunção, temos

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ q \end{array}.$$

44. Escreva o recíproco, o contrarrecíproco e a negação das seguintes proposições:

  (a) Se o tempo estiver frio choverá;

  (b) Ser capaz de escrever à máquina é suficiente para aprender a processar texto;

Resolução

  (a) Recíproco: Se chover, o tempo estará frio.
  Contrarrecíproco: Se não chover, o tempo não estará frio.
  Negação: O tempo está frio e não chove.

  (b) Recíproco: Ser capaz de escrever à máquina é necessário para aprender a processar texto.
  Contrarrecíproco: Não aprender a processar texto é suficiente para não ser capaz de escrever à máquina
  Negação: Ser capaz de escrever à máquina e não saber processar texto.

45. Considere a afirmação

Se $x^2 \neq 4$ então $x \neq 2$ e $x \neq -2$

Demonstre a afirmação usando:

  (a) o método de contrarrecíproco;

  (b) o método de redução ao absurdo.

Resolução

A afirmação que queremos provar pode ser escrita como

$$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2 \ \wedge \ x \neq -2.$$

  (a) Usar o método de contrarrecíproco implica provar que

$$\sim (x \neq 2 \ \wedge \ x \neq -2) \Rightarrow \sim (x^2 \neq 4),$$

  ou seja, provar que

$$x = 2 \ \vee \ x = -2 \Rightarrow x^2 = 4.$$

  A demonstração desta afirmação é imediata. De facto, se $x = 2$ então $x^2 = 2^2 = 4$ e se $x = -2$, então $x^2 = (-2)^2 = 4$.

  (b) Usar o método de redução ao absurdo passa por supor que $x^2 \neq 4$ e que $\sim (x \neq 2 \ \wedge \ x \neq -2)$ e chegar a alguma contradição. Se $x^2 \neq 4$ e $x = 2 \ \vee \ x = -2$, temos que $(2)^2 \neq 4$ ou que $(-2)^2 \neq 4$. Em qualquer uma das situações temos que $4 \neq 4$, o que é claramente uma contradição. A contradição resulta de termos suposto que $x^2 \neq 4$ e que $\sim (x \neq 2 \ \wedge \ x \neq -2)$. Fica assim provado que, se $x^2 \neq 4$, se tem de ter $x \neq 2$ e $x \neq -2$.

46. Apresente um contraexemplo para cada uma das seguintes afirmações.

(a) Se $n = p^2 + q^2$, com p, q primos, então n é primo.

(b) Se $a > b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 > b^2$.

(c) Se $a^2 > b^2$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a > b$.

(d) Se a divide bc, com $a, b, c \in \mathbb{N}$, então a divide b ou a divide c.

47. Construa provas de cada uma das seguintes proposições:

(a) Para todo o natural n, $n^2 + n$ é par.

(b) Para todo o natural n, n^2 é par se e só se n é par.

(c) Se a, b, c são reais tais que $a > b$, então $ac \leq bc \Rightarrow c \leq 0$.

(d) Para quaisquer reais a e b, se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

(e) Dado um número natural n, se n é múltiplo de 6, então n é múltiplo de 2 e de 3.

(f) Dados dois números racionais $p = \frac{a}{b}$ e $q = \frac{c}{d}$, com a e c números inteiros e b e d números naturais, $p < q \Leftrightarrow ad < bc$.

(g) Para todo o número real x, se $x^2 \geq x$ então $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

(h) Para quaisquer naturais m e n, se mn é par então m é par ou n é par.

(i) Para todo o número real x diferente de 2, existe um e um só número real y tal que $\frac{2y}{y+1} = x$.

(j) Não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 5 = 3n + 2$.

(k) $1 = 0.99(9)$.

(l) $\sqrt{3}$ não é um número racional.

(m) Para quaisquer reais x e y, se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$, então $x \neq 3$.

(n) Para quaisquer reais x e y, se $|x - 3| \leq 5$, então $x \geq -2$ e $x \leq 8$.

Resolução

(b) Para provar a equivalência

$$n^2 \text{ par} \Leftrightarrow n\text{par},$$

vamos provar duas implicações:

[n par $\Rightarrow n^2$ par] Provamos esta implicação pelo método da prova direta: Se n é par, então $n = 2k$ para algum inteiro k. Logo,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2).$$

Como $2k^2$ é um inteiro, podemos concluir que n^2 é um número par.

[n^2 par $\Rightarrow n$ par] Provamos esta implicação pelo método do contrarrecíproco, provando a implicação [n ímpar $\Rightarrow n^2$ ímpar]: Se n é ímpar, então $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Logo,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Como $2k^2 + 2k$ é um inteiro, podemos concluir que n^2 é um número ímpar.

(g) Queremos provar que

$$x^2 \geq x \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1,$$

que é uma implicação do tipo $a \to b \vee c$ (que sabemos ser logicamente equivalente a $a \wedge \sim b \Rightarrow c$). Suponhamos que $x^2 \geq x$ e que $\sim (x \leq 0)$, ou seja, suponhamos que $x^2 \geq x$ e que $x > 0$. Então, $\frac{1}{x} > 0$ e por, isso, de $x^2 \geq x$ podemos concluir que $\frac{1}{x} \times x^2 \geq \frac{1}{x} \times x$, ou seja, que $x \geq 1$, como queríamos demonstrar.

(j) Normalmente, para provar a "não existência" usamos o método de redução ao absurdo.

Suponhamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 + 5 = 3n_0 + 2$. Então, $2n_0 = 3$, e, portanto, podemos concluir que 3 é um número par, o que é uma contradição. A contradição resulta de termos suposto que existe n_0. Logo, não existe qualquer natural que satisfaça a condição apresentada.

48. Considere o seguinte teorema:

Seja x um número real tal que $x \neq 4$. Se $\frac{2x-5}{x-4} = 3$ então $x = 7$.

   (a) Indique se o argumento seguinte é uma prova do teorema dado.
   Seja $x = 7$. Então, $\frac{2x-5}{x-4} = \frac{2\times 7-5}{7-4} = \frac{9}{3} = 3$. Portanto, se $\frac{2x-5}{x-4} = 3$ então $x = 7$.

   (b) Apresente uma prova correta do teorema.

49. Considere a seguinte proposição falsa:

Se x, y são números reais tais que $x + y = 10$, então $x \neq 3$ e $y \neq 8$.

   (a) Justifique por que é que o argumento seguinte não é uma prova da proposição dada.
   Suponhamos que o consequente da proposição dada é falso. Então, $x = 3$ e $y = 8$, pelo que $x + y = 3 + 8 = 11 \neq 10$. Logo, provámos por contraposição que, se $x + y = 10$, então $x \neq 3$ e $y \neq 8$.

   (b) Apresente um contraexemplo para a afirmação dada.

50. Paul, John e George são 3 estrelas de rock. Um toca guitarra, outro toca bateria e outro toca piano. O baterista tentou contratar o guitarrista para uma sessão de gravação, mas disseram-lhe que ele estava fora da cidade a fazer espetáculos com o pianista. O baterista admirava o trabalho de ambos os músicos. Sabendo que

   (a) O pianista ganha mais que o baterista;

   (b) Paul ganha menos do que John;

   (c) O George nunca ouviu falar do John;

   que instrumento toca cada uma das estrelas de rock?

51. Numa convenção, juntaram-se 100 políticos. Cada político ou é corrupto ou é honesto. Sabendo que:

   (a) Pelo menos um dos políticos é honesto;

   (b) Dados 2 quaisquer políticos pelo menos um é corrupto;

   dos 100 políticos, quantos são corruptos e quantos são honestos?

52. Temos 4 cartas. Todas elas têm um número impresso num dos lados e uma letra no outro. As 4 cartas estão pousadas na mesa, estando visíveis as letras **B** e **A** e os números **8** e **5**.

   Sobre estas cartas é-nos dito que **"se uma carta tem um número par de um dos lados, então, tem uma vogal no outro."**

   Qual é o número mínimo de cartas que é necessário virar para verificarmos se esta regra é verdadeira?