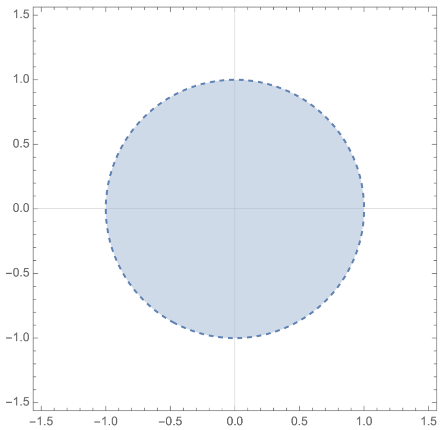
Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Análise
2021/22

Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

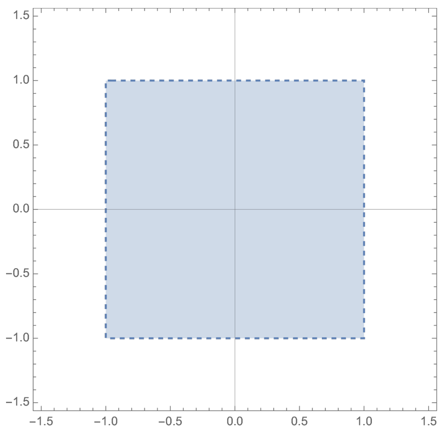
1. (a) Consideremos a norma em $\mathbb{R}^n$ definida por $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. A correspondente bola aberta $B((0,0),1)$ para $n = 2$ é definida por:

$$\begin{aligned} B((0,0),1) &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1,x_2) - (0,0)\|_2 < 1\} \\ &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\} \\ &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}\,. \end{aligned}$$



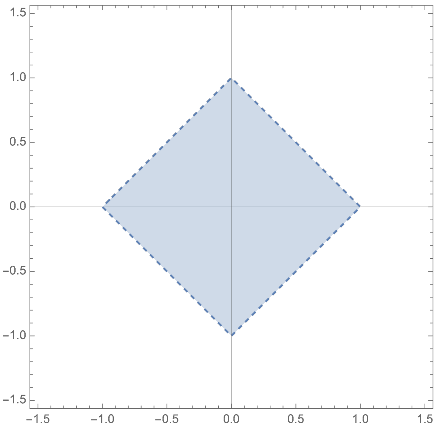
Consideremos a norma em $\mathbb{R}^n$ definida por $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$. A correspondente bola aberta $B((0,0),1)$ para $n = 2$ é definida por:

$$\begin{aligned} B((0,0),1) &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1,x_2) - (0,0)\|_\infty < 1\} \\ &= \{((x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\} \\ &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1 \wedge -1 < x_2 < 1\}\,. \end{aligned}$$



Consideremos a norma em $\mathbb{R}^n$ definida por $\|x\|_1 = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$. A correspondente bola aberta $B((0,0),1)$ para $n = 2$ é definida por:

$$\begin{aligned} B((0,0),1) &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1,x_2) - (0,0)\|_1 < 1\} \\ &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\}. \end{aligned}$$



(b) Seja $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Comecemos por mostrar que $\boxed{\|x\|_\infty \leq \|x\|_2}$. Quereremos mostrar que

$$\max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = |x_1|$.
Então $|x_1| = \sqrt{x_1^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. De modo análogo, se prova para x_2 e x_3. Mostramos assim que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

Vamos agora mostrar que $\boxed{\|x\|_2 \leq \|x\|_1}$. Quereremos mostrar que

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

Para tal, é suficiente mostrar que

$$\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^2 \leq \left(|x_1| + |x_2| + |x_3|\right)^2.$$

Temos que,

$$\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq \left(|x_1| + |x_2| + |x_3|\right)^2.$$

Mostramos assim que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.
Por fim, vamos mostrar que $\boxed{\|x\|_1 \leq 3\,\|x\|_\infty}$. Temos que

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 3\max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = 3\|x\|_\infty.$$

2. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno canónico. Sejam $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e $y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$. Como $\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$ então

$$\|x+y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \,,$$

ou seja,

$$\langle x+y, x+y \rangle = \|x\|_2^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|_2^2 \,.$$

isto é,

$$\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|_2^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|_2^2 \,,$$

ou ainda,

$$\|x\|_2^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|_2^2 \,.$$

Então, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$ e, portanto, $y = \alpha x$, com $\alpha \geq 0$.

Sejam $x = (1, 2)$ e $y = (0, 1)$. Tem-se que

- $\|x+y\|_\infty = \|(1,3)\|_\infty = 3 = 2+1 = \|(1,2)\|_\infty + \|(0,1)\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ e
- $\|x+y\|_1 = \|(1,3)\|_1 = 4 = 3+1 = \|(1,2)\|_1 + \|(0,1)\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$

mas não existe $\alpha \geq 0$ tal que $y = \alpha x$.

3. Se $x = y = z$, o resultado é óbvio. Consideremos os vetores $u = x - y$ e $v = y - z$. Podemos supor que um dos vetores, digamos v é diferente de zero. Então de $\|u+v\|_2 = \|x-z\|_2 = \|x-y\|_2 + \|y-z\|_2 = \|u\|_2 + \|v\|_2$, usando o exercício anterior, tem-se que existe $\alpha \geq 0$ tal que $v = \alpha u$. Logo, $y - z = \alpha x - \alpha y$ e daí $(1+\alpha)y = z + \alpha x$, ou seja, $y = (1-t)x + tz$, com $t = \alpha/(1+\alpha)$; portanto $0 \leq t \leq 1$.

Sejam $x = (1, 2)$, $y = (0, 3)$ e $z = (1, 4)$. Tem-se que

- $\|x-z\|_\infty = \|(0,-2)\|_\infty = 2 = 1+1 = \|(1,-1)\|_\infty + \|(-1,-1)\|_\infty = \|x-y\|_\infty + \|y-z\|_\infty$

mas não existe $t \in [0, 1]$ tal que $y = (1-t)x + tz$.

Sejam $x = (1, 2)$, $y = (2, 2)$ e $z = (3, 6)$. Tem-se que

- $\|x-z\|_1 = \|(-2,-4)\|_1 = 6 = 1+5 = \|(-1,0)\|_1 + \|(-1,-4)\|_1 = \|x-y\|_1 + \|y-z\|_1$

mas não existe $t \in [0, 1]$ tal que $y = (1-t)x + tz$.

4. (a) Sejam $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Temos que:

- $\|x+y\|^2 = \|(x_1+y_1, x_2+y_2)\|^2 = (\sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2})^2 = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2$;
- $\|x-y\|^2 = \|(x_1-y_1, x_2-y_2)\|^2 = (\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2})^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2$;
- $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$;
- $\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2$.

Então:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 \\
&= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \,.
\end{aligned}$$

(b) Seja $\|x\| = \langle x, x\rangle$. Temos que:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle -y,x\rangle + \langle -y,-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) .\end{aligned}$$

5. Tem-se que:

$$\cos\left(\sphericalangle\left(3,\sqrt{2},1),(1,0,0)\right)\right) = \frac{(3,\sqrt{2},1).(1,0,0)}{\|(3,\sqrt{2},1)\|\|(1,0,0)\|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Então, o ângulo formado pelos vectores de coordenadas $(3,\sqrt{2},1)$ e $(1,0,0)$ é $\frac{\pi}{6}$.

6. (a) Devemos mostrar que a função $d_{0,1} \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{0,1}(x,y) = 0$ se $x = y$ e $d_{0,1}(x,y) = 1$ se $x \neq y$ satisfaz:

D 1) $d_{0,1}(x,y) \geq 0, \forall x,y \in \mathbb{R}^2$ e $d_{0,1}(x,y) = 0$ sse $x = y$

D 2) $d_{0,1}(x,y) = d_{0,1}(y,x), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$

D 3) $d_{0,1}d(x,y) \leq d_{0,1}(x,z) + d_{0,1}(z,y), \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^2$ (**desigualdade triangular**)

Como $d_{0,1}(x,y) = 0$ se $x = y$ e $d_{0,1}(x,y) = 1$ se $x \neq y$, então $d_{0,1}$ satisfaz **D1**.

Vamos agora mostrar que $d_{0,1}$ satisfaz **D2**.

- Se $x = y$ então $d_{0,1}(x,y) = 0 = d_{0,1}(y,x)$
- Se $x \neq y$ então $d_{0,1}(x,y) = 1 = d_{0,1}(y,x)$.

Por fim, vamos mostrar que $d_{0,1}$ satisfaz **D3**.

- Se $x = y$ então $d_{0,1}(x,y) = 0 \leq d_{0,1}(x,z) + d_{0,1}(z,y)$, porque $d_{0,1}(x,z) \geq 0$ e $d_{0,1}(y,z) \geq 0$.
- Se $x \neq y$ então $d_{0,1}(x,y) = 1$.

  (i) Se $x = z$ então $z \neq y$. Então,

$$d_{0,1}(x,y) = 1 = 0 + 1 = d_{0,1}(x,z) + d_{0,1}(z,y) ;$$

  (ii) Se $y = z$ então $x \neq z$. Então,

$$d_{0,1}(x,y) = 1 = 1 + 0 = d_{0,1}(x,z) + d_{0,1}(z,y) ;$$

(ii) Se $x \neq z$ e $y \neq z$ então,

$$d_{0,1}(x,y) = 1 \leq 2 = d_{0,1}(x,z) + d_{0,1}(z,y)\,.$$

(b) $B\left((0,0),1/2\right) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_{0,1}((x,y),(0,0)) < 1/2\}$=$\{(0,0)\}$

$B\left((0,0),1\right) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_{0,1}((x,y),(0,0)) < 1\}$=$\{(0,0)\}$

$B\left((0,0),2\right) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_{0,1}((x,y),(0,0)) < 2\}$=$\mathbb{R}^2$.

(c) Todo o conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é tal que

$$X \subset \mathbb{R}^2 = B\left((0,0),2\right)\,.$$

7. (a) É limitado e compacto.

   (b) Não é limitado e não é compacto.

   (c) É limitado e não é compacto.

   (d) É limitado e compacto.

8. (a) Por exemplo, $[1,2]\times]0,1[$.

   (b) Os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados são $\emptyset$ e $\mathbb{R}^2$.

   (c) Por exemplo, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2 < 4\}$.

   (d) Por exemplo, $\mathbb{R}^2$.

   (e) Por exemplo, $]0,1[\times]2,4[$.

   (f) Por exemplo, $\{(0,0),(1,2)\}$.

   (g) Por exemplo, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

   (h) Por exemplo, $[0,1]\times]0,4[$.

   (i) Por exemplo, $[0,1]\times]0,4[$.

   (j) Por exemplo, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2 = 4\}$.

   (k) Por exemplo, $A = \{(0,0)\}$.

   (l) Por exemplo, $A = (]0,1[\cup]1,2[)\times]0,1[$.

   (m) Por exemplo, $\{(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) :\, n \in \mathbb{N}\}$.

   (n) Por exemplo, $\{(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) :\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(5+\frac{1}{n},4+\frac{1}{n}) :\, n \in \mathbb{N}\}$.

9. (a) Afirmação falsa. Por exemplo, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ é aberto e limitado.

   (b) Afirmação falsa. Por exemplo, $A = \{(0,0)\}$ é fechado, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ é aberto e $A \cup B = B$ que é aberto.

   (c) Afirmação falsa. Tomemos, por exemplo, $A =]0,2[\times]0,2[$ e $B = [0,2]\times[0,2]$. Temos que: $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$, B é fechado e A não é fechado.

   (d) Afirmação verdadeira. Resolvido na aula.

(e) Afirmação verdadeira. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy > 1\}$. O conjunto A é aberto porque $\mathring{A} = A$.

(f) Afirmação falsa. Por exemplo, $A =]0,1]\times]0,1]$ não é aberto nem fechado.

(g) Afirmação falsa. Temos que $\overline{A} = [0,1] \times [0,2] = \overline{B}$. Então $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.

(h) Afirmação falsa. Temos que $\overline{A} = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$. Então $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.

10. Vamos designar por X o conjunto indicado em cada alínea.

(a)
- $\mathring{X} = X = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$
- $\overline{X} = X' = \mathbb{R}^2$
- $\partial X = \{(0,0)\}$
- X é aberto, não é fechado, não é limitado e não é compacto.

(b)
- $\mathring{X} = \emptyset$
- $\overline{X} = X' = \partial X = [0,2] \times \{1\}$
- X não é aberto, não é fechado, é limitado e não é compacto.

(c)
- $\mathring{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 3\}$
- $\overline{X} = X' = X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 3\}$
- $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3\} = \{3\} \times \mathbb{R}$
- X não é aberto, é fechado, não é limitado e não é compacto.

(d)
- $\mathring{X} = X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$
- $\overline{X} = X' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1\}$
- $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\} = \{1\} \times \mathbb{R}$
- X é aberto, não é fechado, não é limitado e não é compacto.

(e)
- $\mathring{X} = \emptyset$
- $\overline{X} = X' = \partial X = X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 5\}$
- X não é aberto, é fechado, não é limitado e não é compacto.

(f)
- $\mathring{X} = X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 7\}$
- $\overline{X} = X' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 7\}$
- $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 7\}$
- X é aberto, não é fechado, não é limitado e não é compacto.

(g)
- $\mathring{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16\}$
- $\overline{X} = X' = X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$
- $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$
- X não é aberto, é fechado, é limitado e é compacto.

(h)
- $\mathring{X} =]-1,1[\times]-1,1[$
- $\overline{X} = X' = X = [-1,1] \times [-1,1]$
- $\partial X = (\{-1,1\} \times [-1,1]) \cup [-1,1] \times \{-1,1\}$
- X não é aberto, é fechado, é limitado e é compacto.

(i)
- $\overset{\circ}{X} = X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 2\}$
- $\overline{X} = X' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2\}$
- $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 2\}$
- X é aberto, não é fechado, é limitado e não é compacto.

(j)
- $\overset{\circ}{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 < 9\}$
- $\overline{X} = X' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$
- $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$
- X não é aberto, não é fechado, é limitado e não é compacto.

(k)
- $\overset{\circ}{X} = X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$
- $\overline{X} = X' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$
- $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$
- X é aberto, não é fechado, não é limitado e não é compacto.

(l)
- $\overset{\circ}{X} = X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 7\}$
- $\overline{X} = X' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 7\}$
- $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 7\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1 \wedge x^2 + y^2 = 7\}$
- X é aberto, não é fechado, é limitado e não é compacto.

(m)
- $\overset{\circ}{X} = X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2\}$
- $\overline{X} = X' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}$
- $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$
- X é aberto, não é fechado, não é limitado e não é compacto.

(n)
- $\overset{\circ}{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\}$
- $\overline{X} = X' = X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2\}$
- $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 2\} = \{-2, 2\} \times \mathbb{R}$
- X não é aberto, é fechado, não é limitado e não é compacto.

(o)
- $\overset{\circ}{X} = \emptyset$
- $\overline{X} = X' = \partial X = X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$
- X não é aberto, é fechado, não é limitado e não é compacto.

(p)
- $\overset{\circ}{X} = X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 < 4\}$
- $\overline{X} = X' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 \leq 4\}$
- $\partial X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4\}$
- X é aberto, não é fechado, é limitado e não é compacto.

(q)
- $\overset{\circ}{X} = \emptyset$
- $\overline{X} = X' = \partial X = X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9\}$
- X não é aberto, é fechado, não é limitado e não é compacto.

(r)
- $\overset{\circ}{X} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 3,\ |z| < 1\}$
- $\overline{X} = X' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3,\ |z| \leq 1\}$
- $\partial X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 3 \wedge |z| \leq 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 3 \wedge |z| = 1\}$
- X não é aberto, não é fechado, é limitado e não é compacto.

(s)
- $\overset{\circ}{X} = \emptyset$
- $\overline{X} = X' = \partial X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 9,\ x^2 + y^2 = z\}$
- X não é aberto, não é fechado, é limitado e não é compacto.

11. (a) Não é conexo. Todo o conjunto finito possuindo dois ou mais elementos é desconexo.

    (b) Não é conexo. Os conjuntos $B((0,0),1)$ e $]3,5[\times[0,1[$ são separados.

    (c) É conexo. Como $]0,1[$ e $]3,5[$ são conexos então $]0,1[\times]3,5[$ é conexo.

    (d) É conexo.

    (e) É conexo. Sejam
    $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right),\ x > 0\}$
    e
    $B = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right),\ x > 0\}$.
    Como $A \subset B \subset \overline{A}$ e A é conexo, então B é conexo.