6 relações de equivalência

140. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações definidas em A:

$$R_1 = \{(1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}, \qquad R_2 = \{(2, 3)\},$$
$$R_3 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}, \qquad R_4 = \{(a, a) : a \in A\} = \text{id}_A.$$

Indique, justificando, se cada uma das relações apresentadas é ou não uma relação:

(a) reflexiva; (b) simétrica; (c) antissimétrica; (d) transitiva.

141. Indique se cada uma das seguintes relações definidas no conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 16, 20, 25\}$ é reflexiva, simétrica, antissimétrica ou transitiva:

(a) $R_1 = \{(2, 3), (2, 2), (3, 3), (4, 3), (6, 4)\}$;
(b) $R_2 = \{(x, y) \in A^2 : y = x^2\}$;
(c) $|$ é a relação "divide" definida em A por

$$a|b \text{ se e só se } \exists n \in \mathbb{N} : b = na;$$

(d) $<$ é a restrição ao conjunto A da relação "menor" usual em $\mathbb{N}$;
(e) $R_3 = \{(x, y) \in A^2 : y > x^2\}$.

142. Comente o seguinte argumento: *Se uma relação binária R é simétrica e transitiva, então, se $(x, y) \in R$ temos que $(y, x) \in R$ e, portanto, $(x, x) \in R$. Assim, R é também reflexiva.*

143. Indique, justificando, uma relação binária definida em $\mathbb{Z}$ que seja:

(a) reflexiva, simétrica e não transitiva;
(b) reflexiva, transitiva e não simétrica;
(c) simétrica, transitiva e não reflexiva.

Resolução

(a) Seja θ a relação binária definida em $\mathbb{Z}$ por

$$a \;\theta\; b \Leftrightarrow |a - b| \leq 4, \qquad (a, b \in \mathbb{Z}).$$

Então, θ é reflexiva, pois, como, para todo $a \in \mathbb{Z}$, $|a - a| = 0 \leq 4$, temos que

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a \;\theta\; a.$$

Mais ainda, θ é simétrica pois, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $|a - b| = |b - a|$, pelo que trivialmente se tem

$$a \;\theta\; b \Rightarrow b \;\theta\; a.$$

Finalmente, θ não é transitiva, o que pode ser comprovado pelo seguinte contraexemplo:

$$|7 - 3| \leq 4 \quad \text{e} \quad |3 - (-1)| \leq 4 \quad \text{e} \quad |7 - (-1)| \not\leq 4.$$

Com este exemplo, provamos que não se verifica a implicação

$$(a \;\theta\; b \text{ e } b \;\theta\; c) \Rightarrow a \;\theta\; c.$$

(b) Seja $\theta = \{(x,x) : x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(1,2)\}$. Então, θ é reflexiva, transitiva, mas não é simétrica, uma vez que $(1,2) \in \theta$ e $(2,1) \notin \theta$.

(c) Seja $\theta = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$. Então, θ é simétrica e transitiva, mas não é reflexiva, uma vez que $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \not\subseteq \theta$.

144. Sejam A um conjunto e R e S relações binárias em A. Indique, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) Se R é reflexiva (resp. simétrica, antissimétrica, transitiva), então R^{-1} é reflexiva (resp. simétrica, antissimétrica, transitiva);

Resolução

- A afirmação
$$R \text{ reflexiva} \Rightarrow R^{-1} \text{ reflexiva}$$
é verdadeira. De facto, temos que
$$\begin{aligned} R \text{ reflexiva} &\Leftrightarrow \forall x \in A,\ \ x\ R\ x \\ &\Rightarrow \forall x \in A,\ \ x\ R^{-1}\ x \\ &\Leftrightarrow R^{-1} \text{ reflexiva} \end{aligned}$$

- A afirmação
$$R \text{ simétrica} \Rightarrow R^{-1} \text{ simétrica}$$
é verdadeira. De facto, para $x, y \in A$, temos que
$$\begin{aligned} x\ R^{-1}\ y &\Leftrightarrow y\ R\ x && [\text{por definição de } R^{-1}] \\ &\Rightarrow x\ R\ y && [\text{por hipótese}] \\ &\Leftrightarrow y\ R^{-1}\ x. && [\text{por definição de } R^{-1}] \end{aligned}$$

- A afirmação
$$R \text{ antissimétrica} \Rightarrow R^{-1} \text{ antissimétrica}$$
é verdadeira. De facto, para $x, y \in A$, temos que
$$\begin{aligned} x\ R^{-1}\ y \text{ e } y\ R^{-1}\ x &\Leftrightarrow y\ R\ x \text{ e } x\ R\ y && [\text{por definição de } R^{-1}] \\ &\Rightarrow x = y && [\text{por hipótese}] \end{aligned}$$

- A afirmação
$$R \text{ transitiva} \Rightarrow R^{-1} \text{ transitiva}$$
é verdadeira. De facto, para $x, y, z \in A$, temos que
$$\begin{aligned} x\ R^{-1}\ y \text{ e } y\ R^{-1}\ z &\Leftrightarrow y\ R\ x \text{ e } z\ R\ y && [\text{por definição de } R^{-1}] \\ &\Rightarrow z\ R\ x && [\text{por hipótese}] \\ &\Leftrightarrow x\ R^{-1}\ z. && [\text{por definição de } R^{-1} \end{aligned}$$

(b) Se R e S são reflexivas (resp. simétricas, antissimétricas, transitivas) então $R \circ S$ é reflexiva (resp. simétrica, antissimétrica, transitiva).

Resolução

- A afirmação
$$R \text{ e } S \text{ reflexivas} \Rightarrow R \circ S \text{ reflexiva}$$
é verdadeira. De facto, temos que
$$\begin{aligned} R \text{ e } S \text{ reflexivas} &\Leftrightarrow \forall x \in A,\ \ x\ R\ x \text{ e } x\ S\ x \\ &\Rightarrow \forall x \in A,\ \ x\ R \circ S\ x \\ &\Leftrightarrow R \circ S \text{ reflexiva} \end{aligned}$$

- A afirmação

$$R \text{ e } S \text{ simétricas} \Rightarrow R \circ S \text{ simétrica}$$

é falsa. Para prová-lo, basta considerar o seguinte exemplo: No conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, considerem-se as relações $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ e $S = \{(1, 3), (3, 1)\}$. Então, R e S são relações simétricas e $R \circ S = \{(3, 2)\}$ é uma relação não simétrica ($(3, 2) \in R \circ S$ e $(2, 3) \notin R \circ S$).
- A afirmação

$$R \text{ e } S \text{ antissimétricas} \Rightarrow R \circ S \text{ antissimétrica}$$

é falsa. Para prová-lo, basta considerar o seguinte exemplo: No conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, considerem-se as relações $R = \{(1, 2), (1, 3)\}$ e $S = \{(3, 1), (2, 1)\}$. Então, R e S são relações antissimétricas e $R \circ S = \{(3, 2), (3, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ é uma relação não antissimétrica ($(3, 2), (2, 3) \in R \circ S$ e $2 \neq 3$).
- A afirmação

$$R \text{ e } S \text{ transitivas} \Rightarrow R \circ S \text{ transitiva}$$

é falsa. Para prová-lo, basta considerar o seguinte exemplo: No conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considerem-se as relações $R = \{(1, 2), (4, 5)\}$ e $S = \{(3, 1), (2, 4)\}$. Então, R e S são relações transitivas e $R \circ S = \{(3, 2), (2, 5)\}$ é uma relação não transitiva ($(3, 2), (2, 5) \in R \circ S$ e $(3, 5) \notin R \circ S$).

145. Sejam A um conjunto e θ e ρ duas relações de equivalência em A. Mostre que

$$\theta \circ \rho \text{ é uma relação de equivalência} \iff \theta \circ \rho = \rho \circ \theta.$$

Resolução

Para provarmos esta equivalência, vamos provar uma dupla implicação.

[$\Rightarrow$] Suponhamos que $\theta \circ \rho$ é uma relação de equivalência. Queremos provar que $\theta \circ \rho = \rho \circ \theta$.

Para $x, y \in A$, temos:

$$\begin{array}{rlll} x\ (\theta \circ \rho)\ y & \Rightarrow y\ (\theta \circ \rho)\ x & & [\theta \circ \rho \text{ é simétrica}] \\ & \Leftrightarrow (\exists z \in A)\ y\ \rho\ z \quad \text{e} & z\ \theta\ x & [\text{por definição de } \theta \circ \rho] \\ & \Rightarrow (\exists z \in A)\ z\ \rho\ y \quad \text{e} & x\ \theta\ z & [\theta \text{ e } \rho \text{ são simétricas}] \\ & \Leftrightarrow x\ (\rho \circ \theta)\ y & & [\text{por definição de } \rho \circ \theta] \end{array}$$

Logo,

$$\theta \circ \rho \subseteq \rho \circ \theta.$$

De modo análogo, provamos que $\rho \circ \theta \subseteq \theta \circ \rho$, concluindo assim que

$$\theta \circ \rho = \rho \circ \theta.$$

[$\Leftrightarrow$] Suponhamos agora que $\theta \circ \rho = \rho \circ \theta$. Queremos provar que $\theta \circ \rho$ é uma relação de equivalência, isto é, é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

- $\theta \circ \rho$ é reflexiva: Porque ρ e θ são reflexivas, temos que, para todo $x \in A$, $x\ \rho\ x$ e $x\ \theta\ x$ e, pela definição de relação composta, podemos concluir que $x\ (\theta \circ \rho)\ x$.

- $\theta \circ \rho$ é simétrica: Sejam $x, y \in A$. Então:

$$
\begin{aligned}
x\ (\theta \circ \rho)\ y \quad & \Leftrightarrow (\exists z \in A)\ x\ \rho\ z \quad \text{e} \quad z\ \theta\ y && [\text{por definição de } \theta \circ \rho] \\
& \Rightarrow (\exists z \in A)\ z\ \rho\ x \quad \text{e} \quad y\ \theta\ z && [\theta \text{ e } \rho \text{ são simétricas}] \\
& \Leftrightarrow y\ (\rho \circ \theta)\ x && [\text{por definição de } \rho \circ \theta] \\
& \Leftrightarrow y\ (\theta \circ \rho)\ x && [\text{por hipótese}]
\end{aligned}
$$

- $\theta \circ \rho$ é transitiva: Sejam $x, y, z \in A$ tais que

$$x\ (\theta \circ \rho)\ y \quad \text{e} \quad y\ (\theta \circ \rho)\ z.$$

Então, por hipótese, temos que

$$x\ (\theta \circ \rho)\ y \quad \text{e} \quad y\ (\rho \circ \theta)\ z.$$

Por definição da composta de relações, temos então que

$$(\exists a, b \in A)\ x\ \rho\ a \quad \text{e} \quad a\ \theta\ y \quad \text{e} \quad y\ \theta\ b \quad \text{e} \quad b\ \rho\ z.$$

Temos então, pela transitividade de θ, que

$$(\exists a, b \in A)\ x\ \rho\ a \quad \text{e} \quad a\ \theta\ b \quad \text{e} \quad b\ \rho\ z.$$

Pela definição de $\rho \circ \theta$, estamos em condições de concluir que

$$(\exists a \in A)\ x\ \rho\ a \quad \text{e} \quad a\ (\rho \circ \theta)\ z.$$

Aplicamos novamente a hipótese para obter que

$$(\exists a \in A)\ x\ \rho\ a \quad \text{e} \quad a\ (\theta \circ \rho)\ z$$

e aplicamos a definição da composta $\theta \circ \rho$ para concluir que

$$(\exists a, c \in A)\ x\ \rho\ a \quad \text{e} \quad a\ \rho\ c \quad \text{e} \quad c\ \theta\ z.$$

Como ρ é transitiva, concluímos que

$$(\exists c \in A)\ x\ \rho\ c \quad \text{e} \quad c\ \theta\ z$$

e, portanto, temos, novamente pela definição de $\theta \circ \rho$, que

$$x\ (\theta \circ \rho)\ z.$$

Logo, $\theta \circ \rho$ é transitiva.

146. Sejam A um conjunto e θ uma relação binária em A. Mostre que θ é uma relação de equivalência se e só se θ satisfaz as seguintes duas condições:

I. $\forall x \in A,\ x\ \theta\ x$;

II. $\forall x, y, z \in A$, $x\ \theta\ y$ e $y\ \theta\ z \implies z\ \theta\ x$.

Resolução

Por definição, uma relação θ num conjunto A é uma relação de equivalência se e só se satisfaz as condições:

1. $\forall x \in A,\ x\ \theta\ x$
2. $\forall x, y \in A,\ x\ \theta\ y \Rightarrow y\ \theta\ x$
3. $\forall x, y, z \in A,\ x\ \theta\ y$ e $y\ \theta\ z \Rightarrow x\ \theta\ z$

Assim, o que se pretende provar neste exercício é que as condições 1., 2. e 3. são equivalentes às condições I. e II.

Suponhamos primeiro que θ é uma relação binária em A que satisfaz as condições 1., 2. e 3. Então, a condição I. é naturalmente satisfeita (uma vez que é igual à condição 1.). Mais ainda, para $x, y, z \in A$,

$$\begin{aligned} x\ \theta\ y \text{ e } y\ \theta\ z &\Rightarrow x\theta z && \text{[por 3.]} \\ &\Rightarrow z\theta x && \text{[por 2.]} \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que θ satisfaz a condição II.

Reciprocamente, suponhamos que θ é uma relação binária em A que satisfaz as condições I. e II. Então, a condição 1. é naturalmente satisfeita (pois é igual à condição II.). Sejam $x, y \in A$ tais que $x\ \theta\ y$. Por I., temos que $y\ \theta\ y$ e, aplicando II., concluímos que $y\ \theta\ x$, o que nos permite concluir que a condição 2. é satisfeita por θ. Se $x, y, z \in A$ são tais que $x\ \theta\ y$ e $y\ \theta\ z$, temos, pela condição II, que $z\ \theta\ x$ e, portanto, por 2. (que já foi provado), temos que $x\ \theta\ z$, o que prova a condição 3.

147. Verifique se cada uma das seguinte relações é de equivalência e, em caso afirmativa, determine as classes de equivalência:

(a) Sendo A um conjunto não vazio, R está definida em $\mathcal{P}(A)$ por

$$X\ R\ Y \iff X \cap Y \neq \emptyset \qquad (X, Y \subseteq A);$$

(b) S é a relação em $\mathbb{Z}^2$ definida por $(a, b)\ S\ (c, d) \iff ad = bc$;

(c) T é a relação $T = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| \leq 4\}$;

(d) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, W está definida em $\mathcal{P}(A)$ por $X\ W\ Y \iff n(X) = n(Y)$, onde $n(C)$ denota o número de elementos do conjunto C.

Resolução

(a) A relação R não é uma relação de equivalência pois não é uma relação reflexiva, uma vez que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $\emptyset \not R\ \emptyset$, já que $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

(b) A relação S não é uma relação de equivalência, pois não é uma relação transitiva. De facto, temos, por exemplo, que $(2, 3)\ S\ (0, 0)$ (uma vez que $2 \times 0 = 3 \times 0$) e $(0, 0)\ S\ (4, 5)$ (uma vez que $0 \times 4 = 0 \times 5$), mas $(2, 3) \not S\ (4, 5)$, já que $2 \times 5 \neq 3 \times 4$.

(c) A relação T não é uma relação de equivalência, pois não é transitiva. Por exemplo, temos que $1\ T\ 5$ (pois $|1 - 5| \leq 4$) e $5\ T\ 8$ (pois $|5 - 8| \leq 4$). No entanto, $1 \not T\ 8$, já que $|1 - 8| \not\leq 4$.

(d) A relação binária W é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$, pois é reflexiva, simétrica e transitiva. Como para todo o subconjunto X de A, temos que $n(X) = n(X)$, podemos concluir que

$$\forall X \subseteq A,\ X\ W\ X,$$

e por isso, W é reflexiva.

Para todos $X, Y \subseteq A$, temos que

$$n(X) = n(Y) \Rightarrow n(Y) = n(X),$$

pelo que

$$X\ W\ Y \Rightarrow Y\ W\ X$$

e, portanto, W é simétrica.
Para todos $X, Y; Z \subseteq A$, temos que

$$n(X) = n(Y) \text{ e } n(Y) = n(Z) \Rightarrow n(X) = n(Z),$$

ou seja,

$$X\ W\ Y \text{ e } Y\ W\ Z \Rightarrow X\ W\ Z,$$

o que nos permite concluir que W é transitiva.

Sendo uma relação de equivalência, podemos determinar as classes de equivalência de todos os elementos de $\mathcal{P}(A)$:

- $[\emptyset]_W = \{X \subseteq A : n(X) = 0\} = \{\emptyset\}$;
- $[\{1\}]_W = \{X \subseteq A : n(X) = 1\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\} = [\{2\}]_W = [\{3\}]_W = [\{4\}]_W$;
- $[\{1,2\}]_W = \{X \subseteq A : n(X) = 2\} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}\} = [\{1,3\}]_W = [\{1,4\}]_W = [\{2,3\}]_W = [\{2,4\}]_W = [\{3,4\}]_W$;
- $[\{1,2,3\}]_W = \{X \subseteq A : n(X) = 3\} = \{\{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}\} = [\{1,3,4\}]_W = [\{1,2,4\}]_W = [\{2,3,4\}]_W$;
- $[\{1,2,3,4\}]_W = \{X \subseteq A : n(X) = 4\} = \{\{1,2,3,4\}\} = \{A\}$.

148. Seja n um número natural. Considere a relação $\equiv (\mod n)$ definida em $\mathbb{Z}$ por

$$x \equiv y(\mod n) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = kn \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

(a) Mostre que $\equiv (\mod n)$ é uma relação de equivalência.

(b) Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $x \equiv y(\mod n)$; (iii) x e y têm o mesmo resto na divisão por n;
(ii) $n|(x - y)$; (iv) $\exists a \in \mathbb{Z} : y = x + na$.

(c) Para cada $x \in \mathbb{Z}$, determine a classe de equivalência de x. Quantas classes de equivalência existem para a relação $\equiv (\mod n)$?

149. Considere a relação $\equiv (\mod 7)$.

(a) Indique dois elementos da classe $[6]$.

(b) Determine $[5] \cap [-1]$ e $[-4] \cap [3]$.

(c) Encontre o menor inteiro não negativo que está relacionado com

(i) -10; (ii) -17; (iii) -7; (iv) -2.

Resolução

(a) Seja $x \in \mathbb{Z}$. Então,

$$x \in [6]_7 \Leftrightarrow x \equiv 6(\mod 7) \Leftrightarrow x - 6 = 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 6 + 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, se considerarmos, por exemplo, $k = 0$ e $k = 1$, obtemos os elementos 6 e 13.

(b) Sabemos que, como $\equiv (\mod 7)$ é uma relação de equivalência, então, para $a, b \in \mathbb{Z}$, temos que

$$[a]_7 \cap [b]_7 = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a \not\equiv b(\mod 7) \\ [a]_7 & \text{se } a \equiv b(\mod 7) \end{cases}$$

Assim, como

$$5 - (-1) = 6 \neq 7k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

e

$$-4 - 3 = -7 = 7 \times (-1) \text{ e } -1 \in \mathbb{Z},$$

temos que

$$5 \not\equiv -1(\mod 7) \text{ e } -4 \equiv 3(\mod 7).$$

Logo,

$$[5]_7 \cap [-1]_7 = \emptyset \text{ e } [-4]_7 \cap [-3]_7 = [-4]_7 = \{-4 + 7k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

(c) (i) Como

$$x \equiv -10(\mod 7) \Leftrightarrow x = -10 + 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

o menor inteiro não negativo relacionado com -10 é 4 (que se obtém considerando $k = 2$);

(ii) Como

$$x \equiv -17(\mod 7) \Leftrightarrow x = -17 + 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

o menor inteiro não negativo relacionado com -17 é 4 (que se obtém considerando $k = 3$);

(i) Como

$$x \equiv -7(\mod 7) \Leftrightarrow x = -7 + 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

o menor inteiro não negativo relacionado com -7 é 0 (que se obtém considerando $k = 1$);

(i) Como

$$x \equiv -2(\mod 7) \Leftrightarrow x = -2 + 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

o menor inteiro não negativo relacionado com -2 é 5 (que se obtém considerando $k = 1$).

150. Indique o menor natural p tal que:

(a) $p \equiv 3312(\mod 4)$;
(b) $p \equiv 26(\mod 13)$;
(c) $p \equiv 177(\mod 8)$;
(d) $p \equiv 111(\mod 109)$.

151. Considere a relação R definida em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por

$$(a, b)\, R (c, d) \text{ se e só se } ad = bc \quad (a, b, c, d \in \mathbb{N}).$$

(a) Verifique que R é uma relação de equivalência.

Resolução A relação R é reflexiva pois, para todo $(a, b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $ab = ba$, pelo que $(a, b)\ R\ (c, d)$.

A relação R é simétrica pois, para $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (a, b)\ R\ (c, d) &\Leftrightarrow ad = bc \\ &\Leftrightarrow cb = da \\ &\Leftrightarrow (c, d)\ R\ (a, b). \end{aligned}$$

A relação R é transitiva pois, para $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (a, b)\ R\ (c, d) \text{ e } (c, d)\ R\ (e, f) &\Leftrightarrow ad = bc \text{ e } cf = de \\ &\Leftrightarrow adf = bcf \text{ e } bcf = bde \\ &\Rightarrow adf = bde \\ &\Leftrightarrow af = be \Leftrightarrow (a, b)\ R\ (e, f). \end{aligned}$$

(b) Indique as classes de equivalência dos elementos $(1,2)$ e $(4,4)$.

Resolução

$$\begin{aligned}[(1,2)]_R &= \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : (a,b)\ R\ (1,2)\}\\ &= \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : a \times 2 = b \times 1\}\\ &= \{(a,2a) : a \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[(4,4)]_R &= \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : (a,b)\ R\ (4,4)\}\\ &= \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : a \times 4 = b \times 4\}\\ &= \{(a,a) : a \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

(c) Verifique que a relação R é a relação igualdade de imagem associada à função $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(m,n) = \frac{m}{n}$.

Resolução Tendo em conta a função f apresentada, temos que, para $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(a,b)\ R_f\ (c,d) &\Leftrightarrow f((a,b)) = f((c,d))\\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\\ &\Leftrightarrow ad = bc\\ &\Leftrightarrow (a,b)\ R\ (c,d).\end{aligned}$$

Logo, $R_f = R$.

152. Seja R uma relação binária em A. Uma relação binária R' em A diz-se o *fecho transitivo (resp. reflexivo, simétrico, de equivalência) de* R se R' é a menor relação binária transitiva (resp. reflexiva, simétrica, de equivalência) em A que contém R.

Considere o conjunto $A = \{1,2,3\}$ e a relação $R = \{(1,2),(3,1)\}$ definida em A. Determine:

(a) o fecho reflexivo de R;
(b) o fecho simétrico de R;
(c) o fecho transitivo de R;
(d) o fecho de equivalência de R.

153. Considere o conjunto $A = \{1,2,3,4\}$.

(a) As relações $S = \{(1,2),(1,3),(1,1),(2,4),(3,3)\}$ e $U = \{(3,1),(2,1),(1,1),(3,3),(4,4)\}$ não são relações de equivalência. Porquê?

(b) Sejam T o fecho de equivalência de S e R o fecho de equivalência de U. Determine T e R.

(c) Calcule $[3]_T \cap [2]_T$ e $[3]_R \cap [2]_R$. Justifique.

(d) Indique, caso existam, $x, y \in A$ tais que $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. Justifique.

Resolução

(a) As relações binárias S e U não são relações de equivalência em $A = \{1,2,3,4\}$ pois não são reflexivas, uma vez que, por exemplo, $(2,2) \notin S$ e $(2,2) \notin U$.

(b) Para $S \subseteq T$, temos que ter $[1]_T = [2]_T = [3]_T = [4]_T$, uma vez que $(1,2),(1,3),(2,4) \in S$. Logo,

$$A/T = \{\{1,2,3,4\}\},$$

ou seja, $T = \omega_A$.

Para $U \subseteq R$, temos que ter $[1]_R = [2]_R = [3]_R$, uma vez que $(3,1),(2,1) \in U$. Logo, como R tem de ser a menor relação de equivalência que contém U, terá que ser a que define mais classes de equivalência, pelo que

$$R = \omega_{\{1,2,3\}} \cup \omega_{\{4\}} = \{(1,1,),(2,2,),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(4,4)\}.$$

(c) Uma vez que $3\ T\ 2$, temos que

$$[3]_T \cap [2]_T = [3]_T = \{1,2,3,4\}.$$

Como $3\ R\ 2$, temos que

$$[3]_R \cap [2]_R = [3]_R = \{1,2,3\}.$$

(d) Para $x \in \{1,2,3\}$ e $y \in \{4\}$, temos que $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$, pois $4 \not R\ x$, para todo $x \in \{1,2,3\}$.

154. Considere o conjunto $X = \{1,2,3,4,5\}$ e a relação binária R nele definida por

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}.$$

(a) Justifique que R é reflexiva e simétrica;

(b) Justifique que a relação binária R não é uma relação de equivalência em X e determine o seu fecho de equivalência, i.e., a menor relação de equivalência em X que contém R.

155. Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Define-se a *relação igualdade de imagem* R_f em A por

$$(x,y) \in R_f \Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad (x, y \in A).$$

(a) Mostre que R_f é uma relação de equivalência.

(b) Determine as classes de equivalência para a relação R_f e o conjunto quociente A/R_f.

(c) Indique em que circunstâncias é que (i) $R_f = \mathrm{id}_A$; (ii) $R_f = A \times A$.

156. Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e θ a relação binária definida em $\mathcal{P}(A)$ por

$$B\,\theta\,C \Leftrightarrow B \cap \{2,4\} = C \cap \{2,4\}.$$

(a) Mostre que θ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.

(b) Indique todos os elementos de $[\{3,4\}]_\theta$.

Resolução

(a) Como, para todo $B \subseteq A$, $B \cap \{2,4\} = B \cap \{2,4\}$, temos que $B\ \theta\ B$. Logo, θ é reflexiva. Mais ainda, para $B, C \subseteq A$,

$$B\ \theta\ C \Leftrightarrow B \cap \{2,4\} = C \cap \{2,4\} \Leftrightarrow C \cap \{2,4\} = B \cap \{2,4\} \Leftrightarrow C\ \theta\ B,$$

pelo que θ é simétrica.

Finalmente, para $B, C, D \subseteq A$, temos que

$$\begin{aligned} B\ \theta\ C \text{ e } C\ \theta\ D \quad &\Leftrightarrow B \cap \{2,4\} = C \cap \{2,4\} \text{ e } C \cap \{2,4\} = D \cap \{2,4\} \\ &\Rightarrow B \cap \{2,4\} = D \cap \{2,4\} \\ &\Leftrightarrow B\ \theta\ D \end{aligned}$$

e, portanto, θ é transitiva.

Estamos em condições de concluir que θ é uma relação de equivalência.

(b) Considerando a definição de classe de equivalência de um elemento, temos que

$$\begin{aligned} [\{3,4\}]_\theta &= \{B \subseteq A : B \cap \{2,4\} = \{3,4\} \cap \{2,4\}\} \\ &= \{B \subseteq A : B \cap \{2,4\} = \{4\}\} \\ &= \{B \subseteq A : 2 \notin B \text{ e } 4 \in B\} \\ &= \{\{4\},\{1,4\},\{3,4\},\{1,3,4\}\}. \end{aligned}$$

157. Para cada uma das relações de equivalência seguintes, determine as classes de equivalência indicadas:

(a) $[0]_R$ e $[3]_R$, onde R é a relação de equivalência definida por

$$a\ R\ b \iff |a| = |b| \qquad (\forall a, b \in \mathbb{R});$$

(b) $[0]_S$ e $[\pi]_S$, onde S é a relação de equivalência definida por

$$a\ S\ b \iff \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b \qquad (\forall a, b \in \mathbb{R});$$

(c) $[0]_T$ e $[3]_T$, onde T é a relação de equivalência definida por

$$a\ T\ b \iff \exists n \in \mathbb{Z}:\ a = 2^n b \qquad (\forall a, b \in \mathbb{N});$$

(d) $[(0,0)]_V$ e $[(3,4)]_V$, onde V é a relação de equivalência definida por

$$(a,b)\ V\ (c,d) \iff a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \qquad (\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2);$$

158. Seja $A = \{2,3,4,6,7\}$ e sejam

$\Pi_1 = \{\{2,4\},\{3\},\{4,6\},\{3,6,7\}\}$, $\Pi_2 = \{\{2,4,6\},\{3,7\}\}$,
$\Pi_3 = \{\{2\},\{3,4,7\}\}$, $\Pi_4 = \{\{2\},\{3\},\{4\},\{6\},\{7\}\}$,
$\Pi_5 = \{\{2\},\emptyset,\{3,4\},\{6,7\}\}$, $\Pi_6 = \{\{2,6\},\{3,7\},\{4\}\}$.

(a) Indique, justificando, quais dos conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ são partições de A.

(b) Para cada um dos conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ que é partição de A, determine a relação de equivalência em A associada a Π_j.

Resolução

(a)
- Π_1 não é uma partição de A pois $\{2,4\},\{4,6\} \in \Pi_1$ e $\{2,4\} \cap \{4,6\} \neq \emptyset$;
- Π_2 é uma partição de A, pois:
  - $\{2,4,6\} \neq \emptyset$ e $\{3,7\} \neq \emptyset$;
  - $\{2,4,6\} \cap \{3,7\} = \emptyset$;
  - $\{2,4,6\} \cup \{3,7\} = A$
- Π_3 não é partição de A pois $6 \in A$ e $6 \notin X$, para todo $X \in \Pi_3$.
- Π_4 é uma partição de A, pois:
  - $\{2\} \neq \emptyset$, $\{3\} \neq \emptyset$, $\{4\} \neq \emptyset$, $\{6\} \neq \emptyset$ e $\{7\} \neq \emptyset$;
  - $\{2\} \cap \{3\} = \emptyset$, $\{2\} \cap \{4\} = \emptyset$, $\{2\} \cap \{6\} = \emptyset$, $\{2\} \cap \{7\} = \emptyset$, $\{3\} \cap \{4\} = \emptyset$, $\{3\} \cap \{6\} = \emptyset$, $\{3\} \cap \{7\} = \emptyset$, $\{4\} \cap \{6\} = \emptyset$, $\{4\} \cap \{7\} = \emptyset$ e $\{6\} \cap \{7\} = \emptyset$;
  - $\{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{7\} = A$
- Π_5 não é uma partição pois $\emptyset \in \Pi_5$;
- Π_6 é uma partição de A, pois:
  - $\{2,6\} \neq \emptyset$, $\{3,7\} \neq \emptyset$ e $\{4\} \neq \emptyset$;
  - $\{2,6\} \cap \{3,7\} = \emptyset$, $\{2,6\} \cap \{4\} = \emptyset$ e $\{3,7\} \cap \{4\} = \emptyset$;
  - $\{2,6\} \cup \{3,7\} \cup \{4\} = A$

(b)
- A relação de equivalência associada à partição Π_2 é

$$\begin{aligned} R_{\Pi_2} &= \omega_{\{2,4,6\}} \cup \omega_{\{3,7\}} \\ &= \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6),(3,3),(3,7),(7,3),(7,7)\} \end{aligned}$$

- A relação de equivalência associada à partição Π_4 é

$$\begin{aligned} R_{\Pi_4} &= \omega_{\{2\}} \cup \omega_{\{3\}} \cup \omega_{\{4\}} \cup \omega_{\{6\}} \cup \omega_{\{7\}} \\ &= \{(2,2), ((3,3), (4,4), (6,6), (7,7)\} \end{aligned}$$

- A relação de equivalência associada à partição Π_6 é

$$\begin{aligned} R_{\Pi_2} &= \omega_{\{2,6\}} \cup \omega_{\{3,7\}} \cup \omega_{\{4\}} \\ &= \{(2,2), (2,6), (6,2), (6,6), (3,3), (3,7), (7,3), (7,7), (4,4)\} \end{aligned}$$

159. Sejam A e B conjuntos. Em que condições é que $\{A \cap B, A \setminus B, B \setminus A\}$ é uma partição de $A \cup B$?

Resolução

Sabemos que, para quaisquer conjuntos A e B,

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$$

e que

$$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset, \qquad (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset, \qquad (A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Assim, para concluirmos que $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$ é uma partição de $A \cup B$, falta apenas garantir que

$$A \setminus B \neq \emptyset, \qquad A \cap B \neq \emptyset, \qquad B \setminus A \neq \emptyset.$$

Logo, $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$ é uma partição de $A \cup B$ se e só se A e B têm pelo menos um elementos em comum, B tem um elemento que não é elemento de A e A tem um elemento que não é elemento de B.

160. (a) Sejam $P_1 = \{X_1, X_2, ..., X_m\}$ e $P_2 = \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ duas partições de um conjunto A. Mostre que o conjunto

$$P = \{X_i \cap Y_j : i = 1, ..., m; j = 1, ..., n\} \setminus \{\emptyset\}$$

é também uma partição de A (a esta partição chama-se partição cruzada de A associada às partições de P_1 e P_2 de A).

(b) Determine a partição cruzada de $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ associa da às partições $P_1 = \{\{1,2,3,4\}, \{5,6,7,8\}\}$ e $P_2 = \{\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7,8\}\}$ de A.

Resolução

(a) Começamos por observar que, dados $X_i \in P_1$ $(i = 1, 2, ..., m)$ e $Y_j \in P_2$ $(j = 1, 2, ..., n)$, temos que

$$X_i \cap Y_j \in P \Leftrightarrow X_i \cap Y_j \neq \emptyset.$$

Deste modo, para $X_i, X_{i_1}, X_{i_2} \in P_1$ $(i, i_1, i_2 \in \{1, 2, ..., m\})$ e $Y_j, Y_{j_1}, Y_{j_2} \in P_2$ $(j, j_1, j_2 \in \{1, , 2, ..., n\})$, temos que

- se $X_i \cap Y_j \in P$, então $X_i \cap Y_j \neq \emptyset$;
- se $X_{i_1} \cap Y_{j_1}, X_{i_2} \cap Y_{j_2} \in P$ então

$$(X_{i_1} \cap Y_{j_1}) \cap (X_{i_2} \cap Y_{j_2}) = (X_{i_1} \cap X_{i_2}) \cap (Y_{j_1} \cap Y_{j_2}) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset;$$

- Temos que

$$\bigcup_{X_i \cap Y_j \in P} (X_i \cap Y_j) = \bigcup_{\substack{i = 1, 2, ..., m \\ j = 1, 2, ..., n}} (X_i \cap Y_j) = (\bigcup_{i=1,2,...,m} X_i) \cap (\bigcup_{j=1,2,...,n} Y_j) = A \cap A = A.$$

Logo, P é uma partição de A.

(b) Considerando $X_1 = \{1,2,3\}$, $X_2 = \{5,6,7,8\}$, $Y_1 = \{1,2\}$, $Y_2 = \{3,4,5\}$ e $Y_3 = \{6,7,8\}$, obtemos

$$\begin{array}{ll} X_1 \cap Y_1 = \{1,2\} & X_2 \cap Y_1 = \emptyset \\ X_1 \cap Y_2 = \{3,4\} & X_2 \cap Y_2 = \{5\} \\ X_1 \cap Y_3 = \emptyset & X_3 \cap Y_3 = \{6,7,8\} \end{array}$$

Logo,

$$P = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6,7,8\}\}.$$

161. Considere o conjunto $A = \{2,5,8,3,6,7,9\}$ e a relação de equivalência R definida em A por

$$x\,R\,y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ têm o mesmo número de divisores naturais} \qquad (x,y \in A).$$

(a) Dê exemplo de uma função f tal que R é a relação igualdade de imagem associada a f.

(b) Determine a partição de A associada a R, isto é, o conjunto quociente A/R.

(c) Indique a relação de equivalência associada à partição determinada na alínea anterior.

162. (a) Seja R a relação binária definida em $\mathbb{N}$ por

$$x\ R\ y \iff |x-y| \text{ é ímpar} \qquad (x,y \in \mathbb{N}).$$

Mostre que R não é uma relação de equivalência;

(b) Seja R a relação binária definida em $\mathbb{N}$ por

$$x\ R\ y \iff |x-y| \text{ é par} \qquad (x,y \in \mathbb{N}).$$

Mostre que R é uma relação de equivalência e descreva a partição de $\mathbb{N}$ obtida por R.