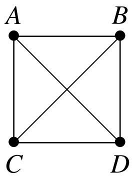
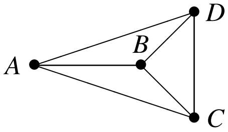
Grafos planares

Definição

Um grafo diz-se planar se é possível representá-lo no plano de forma que as suas arestas não se cruzem.

Exemplo - O grafo K_4  é planar.

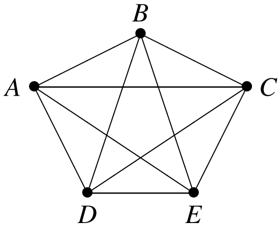
De facto podemos representar K_4 da seguinte forma:



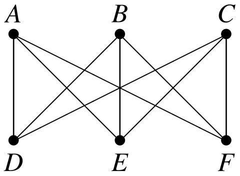
Exemplos

Os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares (vamos demonstrá-lo mais tarde).

K_5



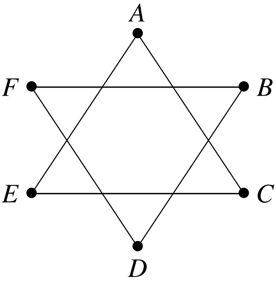
$K_{3,3}$



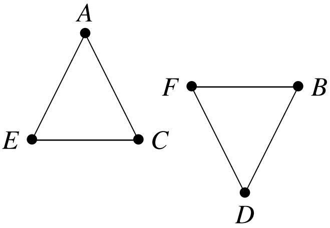
Exemplos

No estudo dos grafos planares basta considerar grafos conexos porque se o grafo for desconexo, ele será planar se e só se as suas componentes conexas forem planares.

Exemplo - O seguinte grafo desconexo é planar:



$\longrightarrow$



Faces de um grafo planar

Se G é um grafo planar, qualquer representação planar de G divide o plano em regiões a que chamamos faces do grafo.

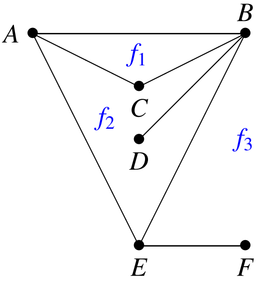
A face exterior do grafo é ilimitada e as restantes são limitadas. Define-se grau de uma face como sendo o número de arestas do caminho fechado que a delimita.

Notas:
- A soma dos graus das faces é igual ao dobro do número de arestas e portanto, é igual à soma dos graus dos vértices.

- Qualquer representação planar do grafo tem o mesmo número de faces.

Faces de um grafo planar - Exemplo

No exemplo abaixo, o grafo tem 3 faces: f_1, f_2 e f_3 .



$$g(f_1) = 3 \qquad g(f_2) = 6 \qquad g(f_3) = 5$$

A soma dos graus das faces $g(f_1) + g(f_2) + g(f_3) = 3 + 6 + 5 = 14$, é igual ao dobro do número de arestas (7) e portanto é igual à soma dos graus dos vértices:

$$g(A) + g(B) + g(C) + g(D) + g(E) + g(F) = 3 + 4 + 2 + 1 + 3 + 1 = 14$$

Teorema de Euler

Teorema de Euler - Se G é um grafo planar conexo com v vértices, a arestas e f faces, então:

$$\boxed{v - a + f = 2} \qquad \text{(Fórmula de Euler)}$$

Demonstração - Vamos fazer a demonstração por indução sobre o número a de arestas do grafo.

Se $a = 0$ então o grafo não tem arestas e como é conexo só pode ter 1 vértice. Temos então $v = 1$, $a = 0$ e $f = 1$. Logo

$$v - a + f = 1 - 0 + 1 = 2$$

Teorema de Euler - demonstração

Demonstração - Suponhamos agora que o teorema é válido para grafos planares conexos com um certo número de arestas $a = n > 0$
.

Queremos provar que o resultado é válido para grafos planares conexos (com v vértices e f faces) e um número de arestas $a = n + 1$, isto é, queremos provar que:

$$v - (n+1) + f = 2$$

1º Caso Se o grafo tem um vértice de grau 1, retirando ao grafo esse vértice e a única aresta nele incidente, obtemos um grafo planar conexo com $v - 1$ vértices, n arestas e f faces.

Por hipótese de indução esse grafo satisfaz o Teorema e portanto:

$$(v-1) - n + f = 2 \qquad \text{ou seja,} \qquad v - (n+1) + f = 2$$

Teorema de Euler - demonstração

2º Caso Se o grafo não tem vértices de grau 1, então não é uma árvore e portanto tem ciclos.

Retirando ao grafo uma aresta de um ciclo obtemos um grafo planar conexo com v vértices, n arestas e $f-1$ faces (note-se que ao retirar uma aresta de um ciclo há duas faces que são unificadas, transformando-se numa única face).

Por hipótese de indução esse grafo satisfaz o Teorema e portanto:

$$v-n+(f-1)=2 \qquad \text{ou seja,} \qquad v-(n+1)+f=2$$

K_5 não é planar

Corolário - Se G é um grafo planar conexo com um número de faces $f \geq 2$, então:

$$3f \leq 2a \quad \text{e} \quad 3v - a \geq 6$$

Demonstração - Seja S a soma dos graus das faces. Então $S = 2a$.
Como cada face tem, no mínimo, grau 3, $3f \leq S$ e portanto $3f \leq 2a$.

Então $f \leq \frac{2}{3}a$ e $v - a + f \leq v - a + \frac{2}{3}a$.

Pelo Teorema de Euler, $v - a + f = 2$ e portanto:

$$2 \leq v - a + \frac{2}{3}a \quad \text{ou seja,} \quad 6 \leq 3v - a$$

K_5 não é planar

Como K_5 tem ciclos, se fosse planar teríamos que $f \geq 2$.
Como é conexo, pelo Corolário teríamos $6 \leq 3v - a$.
Como em K_5 temos $v = 5$ e $a = 10$ então
$3v - a = 3 \times 5 - 10 = 5 < 6$ e portanto K_5 não é planar.

$K_{3,3}$ não é planar

Em $K_{3,3}$ não existem ciclos de comprimento 3. Logo, se $K_{3,3}$ fosse planar todas as faces teriam, no mínimo grau 4. Então teríamos $4f \leq S = 2a$, ou seja, $f \leq \frac{1}{2}a$ e portanto $v - a + f \leq v - a + \frac{1}{2}a$.

Pelo Teorema de Euler, $v - a + f = 2$ e portanto:

$$2 \leq v - a + \frac{1}{2}a \quad \text{ou seja,} \quad 4 \leq 2v - a$$

Em $K_{3,3}$ temos $v = 6$ e $a = 9$.

Logo $2v - a = 2 \times 6 - 9 = 3 < 4$ e portanto $K_{3,3}$ não é planar.

Notas:

- Se G é planar então qualquer subgrafo de G é planar.
- Se G tem um subgrafo não planar então G não é planar.
- Se G tem K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo então G não é planar.

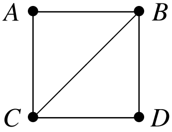
Grafos homeomorfos

Dois grafos G_1 e G_2 dizem-se homeomorfos se é possivel obter um a partir do outro através de uma sequência finita de operações de adição, ou remoção, de vértices de grau 2.

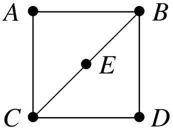
Nota: - Se dois grafos são homeomorfos então são, ambos planares ou ambos não planares.

Exemplo - Adição de um vértice de grau 2:

G:



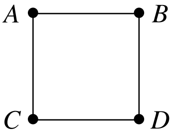
G':

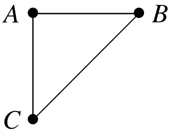


- G' ganha um novo vértice E e duas novas arestas $\{C, E\}$ e $\{B, E\}$.
- G' perde a aresta $\{B, C\}$.

Grafos homeomorfos

Exemplo - Remoção de uma vértice de grau 2 (vértice D):

G: 

G': 

- G' perde o vértice D e as arestas $\{B, D\}$ e $\{C, D\}$.
- G' ganha uma nova aresta $\{B, C\}$.

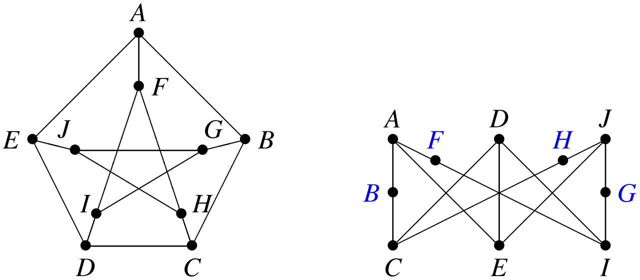
Nota: - Não podemos remover um vértice de grau 2 se a nova aresta a criar já existir no grafo. Isto é, não podemos remover vértices de grau 2 que pertençam a um triângulo do grafo.

Teorema de Kuratowski

Teorema de Kuratowski - Seja G um grafo conexo . Então:

G é planar $\Leftrightarrow$ G não contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$

Exemplo - O grafo de Peterson (à esquerda) não é planar pois contém um subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ (à direita). Note-se que removendo no subgrafo os vértices de grau 2, B, F, H, G , obtemos $K_{3,3}$.

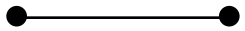


Grafos platónicos

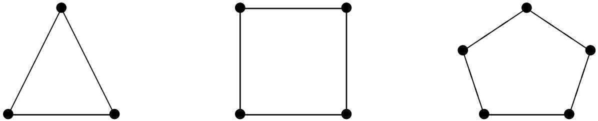
Um grafo platónico é um grafo planar, conexo no qual todos os vértices têm o mesmo grau e todas as faces têm o mesmo grau.

- Grafos platónicos em que todos os vértices têm grau 0 , temos apenas o grafo reduzido a 1 vértice: 

- Grafos platónicos em que todos os vértices têm grau 1 , temos apenas o grafo com 1 aresta e 2 vértices:



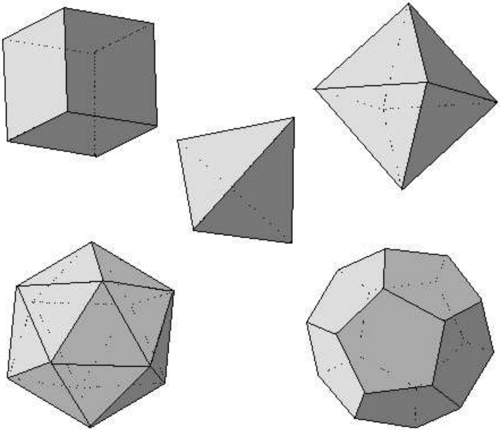
- Grafos platónicos em que todos os vértices têm grau 2 , temos todos os polígonos (ciclos) com $n \geq 3$ vértices:



. . .

Grafos platónicos

- Grafos platónicos em que todos os vértices têm o mesmo grau $n \geq 3$ temos apenas 5, correspondentes aos poliedros platónicos: (em cima) cubo, tetraedro, octaedro (em baixo) icosaedro, dodecaedro



Grafos platónicos

Na figura abaixo, temos representações planares para os 5 poliedros (grafos) platónicos:

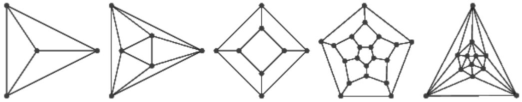


Figura: Tetraedro, Octaedro, Cubo, Dodecaedro, Icosaedro

	v	a	f	$g(v)$	$g(f)$
Tetraedro	4	6	4	3	3
Octaedro	6	12	8	4	3
Cubo	8	12	6	3	4
Dodecaedro	20	30	12	3	5
Icosaedro	12	30	20	5	3