Extremos

Maria Joana Torres

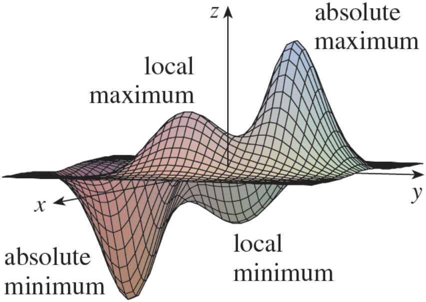
2021/22

Definição:

Sejam $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ com $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $a \in U$.

- $f(a)$ é um **máximo absoluto** de f quando $f(a) \geq f(x), \ \forall x \in U$.
- $f(a)$ é um **máximo absoluto estrito** de f quando $f(a) > f(x), \ \forall x \in U \backslash \{a\}$.
- $f(a)$ é um **máximo local** de f quando existe uma bola $B(a, \varepsilon)$ tal que
$$f(a) \geq f(x), \ \forall x \in B(a, \varepsilon)\,.$$
- $f(a)$ é um **máximo local estrito** de f quando existe uma bola $B(a, \varepsilon)$ tal que
$$f(a) > f(x), \ \forall x \in B(a, \varepsilon) \backslash \{a\}\,.$$
- $f(a)$ é um **mínimo absoluto** de f quando $f(a) \leq f(x), \ \forall x \in U$.
- $f(a)$ é um **mínimo absoluto estrito** de f quando $f(a) < f(x), \ \forall x \in U \backslash \{a\}$.
- $f(a)$ é um **mínimo local** de f quando existe uma bola $B(a, \varepsilon)$ tal que
$$f(a) \leq f(x), \ \forall x \in B(a, \varepsilon)\,.$$
- $f(a)$ é um **mínimo local estrito** de f quando existe uma bola $B(a, \varepsilon)$ tal que
$$f(a) < f(x), \ \forall x \in B(a, \varepsilon) \backslash \{a\}\,.$$

Genericamente, dizemos que $f(a)$ é um **extremo** de f quando $f(a)$ é um mínimo ou um máximo de f.
O ponto a diz-se um **ponto extrememante** de f, mais concretamente, um **maximizante** ou um **minimizante**.


z
absolute
maximum
local
maximum
x
y
absolute
minimum
local
minimum

<u>Teorema</u> :

Se $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e X é compacto então $f(X)$ também é compacto.

<u>Teorema</u> **[de Weierstrass]**:

Se $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e X é compacto então

$$\exists\, a, b \in X: \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad \forall x \in X\,.$$

Definição:

Seja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, diferenciável no ponto $a \in U$.
Diz-se que a é um **ponto estacionário** (ou **ponto crítico**) de f se $\nabla f(a) = 0$.

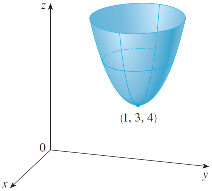
Teorema [**Condições de estacionaridade**]:

Seja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.
Se f é diferenciável no ponto $a \in U$ e a é um ponto de extremo local de f então a é um ponto estacionário, ou seja, $\nabla f(a) = 0$.

Um ponto estacionário que não é ponto de extremo diz-se um **ponto de sela**.

Exemplo:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$



- Determinação dos pontos estacionários:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x-2, 2y-6) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,3)$$

- Temos que

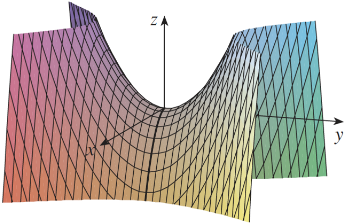
  $f(x,y) = (x^2-2x+1)+(y^2-6y+9)+14-1-9 = (x-1)^2+(y-3)^2+4.$

  Consequentemente, $f(x,y) \geq 4 = f(1,3)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

  Concluímos que $4 = f(1,3)$ é um mínimo (absoluto) de f.

Exercício:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = y^2 - x^2$



1. Determine os pontos estacionários de f
2. Verifique que $(0,0)$ é um ponto de sela de f.

Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$.

A matriz

$$\mathrm{Hess}_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix},$$

chama-se **matriz Hessiana** de f no ponto a.

Teorema: **[Classificação dos pontos de estacionaridade]**

Sejam $f \colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida no aberto U e $a \in U$ um ponto de estacionaridade de f.

1. Se os valores próprios de $\text{Hess}_f(a)$ são todos positivos, então a é um ponto de mínimo local estrito de f.
2. Se os valores próprios de $\text{Hess}_f(a)$ são todos negativos, então a é um ponto de máximo local estrito de f.
3. Se existe pelo menos um valor próprio de $\text{Hess}_f(a)$ positivo, então a não é um ponto de máximo local de f.
4. Se existe pelo menos um valor próprio de $\text{Hess}_f(a)$ negativo, então a não é um ponto de mínimo local de f.
5. Se a matriz $\text{Hess}_f(a)$ tem pelo menos um valor próprio positivo e pelo menos um valor próprio negativo, então a não é um ponto de extremo local de f (é um ponto de sela).

Seja $f\colon U\subset\mathbb{R}^2$ de classe C^2 e $(a,b)\in U$. Ao determinante

$$\triangle_f(a,b)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)\\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(a,b)\end{vmatrix}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right]^2,$$

chama-se **determinante Hessiano** de f em a.

Teorema: [**Teste do Hessiano: condição suficiente para um ponto estacionário ser um extremante local**]

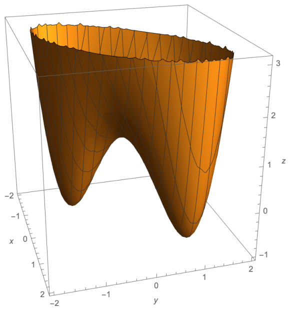
Sejam $f\colon U\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida no aberto U e $(a,b)\in U$ um ponto estacionário de f. Suponhamos que as derivadas parciais de segunda ordem da função f não se anulam conjuntamente no ponto (a,b).

1. Se $\triangle_f(a,b)>0$, então (a,b) é um ponto extremante de f:
   - $i.$ é um maximizante se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$;
   - $ii.$ é um minimizante se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$
2. Se $\triangle_f(a,b)<0$, então (a,b) não é um ponto extremante de f:
3. Se $\triangle_f(a,b)=0$, então o caso é duvidoso.

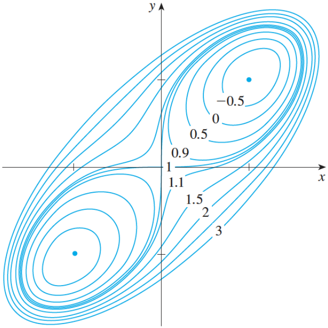
Exercício:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Classifique os pontos críticos de f.



$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$



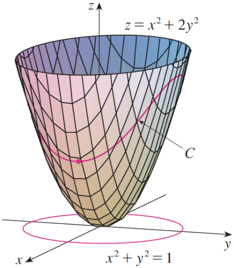
Curvas de nível de $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Extremos condicionados

Problema:

Frequentemente queremos maximizar ou minimizar uma função sujeita a certas restrições.

Exemplo: por exemplo, podemos maximizar a função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$.

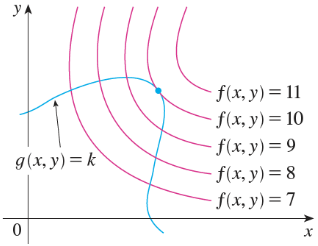


Problema:

Mais geralmente, podemos querer maximizar ou minimizar f restrita à condição que x também satisfaz a equação $g(x) = k$, isto é, $x \in \Sigma = g^{-1}(\{k\})$.

Multiplicadores de Lagrange $(n = 2)$:

Procuramos encontrar os valores extremos de $f\colon X \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ quando os pontos (x, y) estão restritos a pertencer à curva $g(x, y) = k$.



vetores gradientes paralelos: $\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$

Teorema: [**Método dos multiplicadores de Lagrange**]:

Sejam $f, g\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 no aberto U.

Sejam $a \in U$ e $g(a) = k$, e seja Σ a estrutura de nível de g com valor k, isto é, $\Sigma = g^{-1}(\{k\})$.

Suponhamos que a é um ponto de Σ tal que $\nabla g(a) \neq 0$ (neste caso, a diz-se um **ponto regular**; caso contrário diz-se um **ponto singular**).

Se $f_{|\Sigma}$ possuir um máximo ou um mínimo local em Σ em a, então existe um número real λ tal que

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)\,.$$

O número real λ designa-se por **multiplicador de Lagrange**.

Teorema: **[Método dos multiplicadores de Lagrange]**:

Sejam $f, g_1, g_2, \ldots, g_m \colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 no aberto U, $m \leq n$.

Seja $a \in U$ tal que $g_i(a) = k_i$ para $1 \leq i \leq m$ e seja $\Sigma_i = g_i^{-1}(\{k_i\})$ a estrutura de nível de g_i com valor k_i.

Suponhamos que os vetores $\nabla g_1(a)$, $\nabla g_2(a)$, ..., $\nabla g_m(a)$ são linearmente independentes.

Se $f_{|_{\Sigma=\Sigma_1\cap\cdots\cap\Sigma_m}}$ possuir um máximo ou um mínimo local em Σ em a, então existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(a)\,.$$