3.º) Ângulo entre dois planos

Chama-se ângulo entre dois planos ao ângulo entre duas rectas, respectivamente, ortogonais a cada um dos planos.

Se o referencial fixo é ortonormado e supondo que os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são definidos pelas equações cartesianas $ax+by+cz=d$ e $a'x+b'y+c'z=d'$, respectivamente, então:

$$\cos\angle(\mathcal{P},\mathcal{P}')=\frac{|aa'+bb'+cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

Exemplo:

1) Considere em $\Re^3$ um referencial fixo, em relação ao qual a matriz da métrica é

$$G=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Seja P o ponto de coordenadas $(2,1,1)$ e o plano $\mathcal{P}=\langle(1,1,-1),\langle(1,1,1),(2,1,0)\rangle\rangle$.

Para encontrar um vector (a, b, c) ortogonal ao subespaço vectorial associado a $\mathcal{P}$, calculamos

$$\begin{cases}(1,1,1)|(a,b,c)=0\\ (2,1,0)|(a,b,c)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}G\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}b+c=0\\ \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}G\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\frac{5}{2}a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\frac{5}{4}a\\ c=\frac{3}{8}a\end{cases}$$

e, portanto, $(8,-10,3)$ são as coordenadas de um vector ortogonal ao plano $\mathcal{P}$. Então,

$$d(P,\mathcal{P})=\frac{\left|\overrightarrow{(2,1,1)(1,1,-1)}|(8,-10,3)\right|}{\|(8,-10,3)\|}=\frac{|(-1,0,-2)|(8,-10,3)|}{\|(8,-10,3)\|}=\frac{|-9|}{\sqrt{93}}=\frac{9}{\sqrt{93}}$$

2) Consideremos em $\Re^3$ o referencial canónico, que supomos ortonormado. Tomemos as rectas

$$\mathcal{R}_1\equiv X=(0,0,0)+\alpha(2,1,1)\quad\text{e}\quad\mathcal{R}_2\equiv X=(1,1,2)+\beta(1,0,-2),\qquad(\alpha,\beta\in\Re)$$

Como $(0,0,0)+\alpha(2,1,1)=(1,1,2)+\beta(1,0,-2)$ nos conduz a um sistema impossível, temos que $\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2=\varnothing$.

Obviamente que $\mathcal{R}_1 \nparallel \mathcal{R}_2$ e, então,

$$d(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=\frac{\left|(2,1,1)\times(1,0,-2)|\overrightarrow{(0,0,0)(1,1,2)}\right|}{\|(2,1,1)\times(1,0,-2)\|}$$

Sendo $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ a base canónica, temos que

$$(2,1,1)\times(1,0,-2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}\vec{e}_1-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{e}_3=-2\vec{e}_1+5\vec{e}_2-\vec{e}_3=(-2,5,-1)$$

de onde se conclui que

$$d(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=\frac{|(-2,5,-1)|(1,1,2)|}{\|(-2,5,-1)\|}=\frac{|-2+5-2|}{\sqrt{4+25+1}}=\frac{1}{\sqrt{30}}$$

Por outro lado,

$$\cos\angle(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=\frac{|(2,1,1)|(1,0,-2)|}{\|(2,1,1)\|\cdot\|(1,0,-2)\|}=\frac{0}{\sqrt{6}\sqrt{5}}=0\quad\text{e, portanto,}\quad\angle(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=\frac{\pi}{2}$$

CÓNICAS EM $\Re^2$

Chama-se **cónica** o conjunto dos pontos do espaço afim $\Re^2$ cujas coordenadas (x, y), em relação a certo referencial $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, verificam uma dada equação de segundo grau:

$$\Phi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1}$$

com a_{11}, a_{12}, a_{22} não simultaneamente nulos. Pondo

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

a equação (1) pode escrever-se na forma

$$\Phi(X)=X^TAX+2B^TX+a_{33}=0 \tag{2}$$

Dado um ponto C e uma nova base $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$, a equação (2), transforma-se, quando usamos coordenadas num novo referencial, em:

a) $X'^TAX'+2(AC+B)^TX'+\Phi(C)=0$ (3)

em relação ao referencial $(C; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (mais uma vez, não surge qualquer confusão por se designar um ponto e a coluna das suas coordenadas pela mesma letra).

$$X''^T (P^T A P) X'' + 2(B^T P) X'' + a_{33} = 0 \qquad (4)$$

b) em relação ao referencial $(O; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$, em que P é a respectiva matriz de mudança de base, cujas colunas são constituídas pelas componentes dos vectores da nova base, em relação à primeira.

Chama-se **centro de simetria** da cónica um ponto C tal que $A\,C = -B$.

A equação da cónica em relação a um referencial cuja origem seja um centro de simetria tem a forma $X'^T A X' + d = 0$.

Exemplos:

1) Consideremos no referencial canónico $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\Re^2$, a cónica $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4y + 5 = 0$, o ponto $C = (1, 3)$ e a base $\vec{f}_1 = (1, 1)$, $\vec{f}_2 = (1, 0)$. A equação da cónica pode escrever-se

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 5 = 0$$

No referencial $(C; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, a equação desta cónica é

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 2\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 5 = 0$$

isto é,

$$x'^2 + y'^2 - 2x'y' - 2x' + 8y' + 23 = 0$$

No referencial $\left(O; \vec{f}_1, \vec{f}_2\right)$, a equação desta cónica é

$$\begin{bmatrix} x'' & y'' \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} + 2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} + 5 = 0$$

isto é,

$$y''^2 + 6x'' + 2y'' + 5 = 0$$

Esta cónica não tem centro de simetria, pois

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} c_1 - c_2 = -1 \\ -c_1 + c_2 = -2 \end{cases} \quad \text{é um sistema impossível.}$$

2) Consideremos, no referencial canónico, a cónica de equação $4xy - 2x + 6y + 3 = 0$. Como

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_2 = 1 \\ 2c_1 = -3 \end{cases} \begin{cases} c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

temos que, no referencial $\left(\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right); (1,0), (0,1)\right)$ a equação da cónica é:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3 = 0$$

isto é, $4x'y' + 6 = 0$, onde $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é um centro de simetria.

Chama-se **sistema de direcções principais** da cónica um sistema de vectores próprios ortonormados da matriz $G^{-1}A$, onde G é a matriz da métrica de um produto interno fixo em $\Re^2$, em relação à base do referencial inicial.

DISCUSSÃO DA EQUAÇÃO GERAL DO 2.ºGRAU

1.º caso: Cónicas com centro

Num referencial $(C; \vec{v}_1, \vec{v}_2)$, em que C é um centro de simetria da cónica e $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ é uma base formada por direcções principais, a equação da cónica toma a forma

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0 \qquad (5)$$

onde λ_1 e λ_2 são os valores próprios da matriz $G^{-1}A$. A equação (5) toma o nome de "equação reduzida" da cónica.

a) $c(A) = 2$

Neste caso, λ_1 e λ_2 são diferentes de zero.

***a*1)** Se λ_1, λ_2 têm o mesmo sinal, contrário ao de d, a equação reduzida da cónica pode tomar a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

e a cónica é uma "elipse".

***a*2)** Se λ_1, λ_2 e d, têm o mesmo sinal, a equação (5) é impossível e a cónica é vazia.

***a*3)** Se λ_1, λ_2 têm o mesmo sinal e $d = 0$, a equação reduzida da cónica toma a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad (7)$$

pelo que a cónica é formada por um só ponto.

*a*4) Se λ_1, λ_2 têm sinais contrários e $d \neq 0$, a equação (5) pode tomar uma das formas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8}$$

e a cónica é uma "hipérbole".

*a*5) Se λ_1, λ_2 têm sinais contrários e $d = 0$, a equação (5) toma a forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{9}$$

ou

$$(bx - ay)(bx + ay) = 0 \tag{10}$$

e a cónica é formada por duas rectas concorrentes.

b) $c(A) = 1$

Neste caso, será $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$. Supondo que $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, a equação (5) reduz-se a

$$\lambda_1 x^2 + d = 0 \tag{11}$$

***b*1)** Se λ_1, d têm sinais contrários, a equação (11) toma a forma

$$x^2 = a^2 \tag{12}$$

ou

$$(x - a)(x + a) = 0 \tag{13}$$

e a cónica é formada por duas rectas paralelas.

***b*2)** Se λ_1, d têm o mesmo sinal, a cónica é vazia.

***b*3)** Se $d = 0$, a equação (11) toma a forma

$$x^2 = 0 \tag{14}$$

e a cónica é uma recta.

2.º caso: Cónicas sem centro

No referencial $(O; \vec{v}_1, \vec{v}_2)$, em que $C; \vec{e}_1, \vec{e}_2$ é uma base formada por direcções principais da cónica, a equação desta toma a forma

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2mx + 2ny + d = 0 \tag{15}$$

onde λ_1, λ_2 são os valores próprios de $G^{-1} A$.

Um dos valores próprios terá de ser nulo. Supondo que é $\lambda_2 = 0$, a equação (15) reduz-se a

$$\lambda_1 x^2 + 2mx + 2ny + d = 0, \text{ com } n \neq 0. \tag{16}$$

Tomando o referencial $(D; \vec{v}_1, \vec{v}_2)$, onde D é o ponto de coordenadas

$$\left(-\frac{m}{\lambda_1}, \frac{1}{2n}\left(\frac{m^2}{\lambda_1} - d\right)\right)$$

a equação da cónica toma a forma

$$x^2 = k\,y \tag{17}$$

Caso tivessemos suposto $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, a equação da cónica poderia passar para a forma

$$y^2 = k\,x \tag{18}$$

Em qualquer dos casos, a cónica é uma "parábola".

Exemplos:

1) No exemplo 1) anterior, com o produto interno canónico, vemos que

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda = 0 \iff \lambda = 0 \vee \lambda = 2$$

e, portanto, a cónica é uma parábola.

2) No exemplo 2) anterior, com o produto interno canónico, vemos que

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 4 = 0 \iff \lambda = 2 \vee \lambda = -2$$

Como uma mudança na base do referencial não altera o "termo independente" (neste caso, igual a 6), verificamos que a cónica é uma hipérbole.

QUÁDRICAS EM $\Re^3$

Chama-se **quádrica** no espaço afim $\Re^3$ o conjunto dos pontos que verificam uma dada equação de segundo grau:

$$\Phi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2mx + 2ny + 2pz + d = 0 \tag{1}$$

com a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ não simultaneamente nulos. Pondo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a equação (1) pode escrever-se na forma

$$\Phi(X) = X^T A X + 2B^T X + d = 0 \tag{2}$$

Supondo que a equação (2) está referida a certo referencial $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e considerando as coordenadas dos pontos em relação a outros referenciais, ela transforma-se em

(3)

a) $X'^T A X' + 2(AC + B)^T X' + \Phi(C) = 0$

em relação ao referencial $(C; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

(4)

b) $X''^T (P^T A P) X'' + 2(B^T P) X'' + d = 0$

em relação ao referencial $(O; \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$, em que P é a respectiva matriz de mudança de base, cujas colunas são constituídas pelas componentes dos vectores da nova base, em relação à primeira.

Chama-se **centro de simetria** da quádrica um ponto C tal que $A\,C = -B$.

Chama-se **sistema de direcções principais** da quádrica um sistema de vectores próprios ortonormados, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, da matriz $G^{-1}A$, onde G é a matriz da métrica, em relação à base do referencial considerado, de um produto interno fixo em $\Re^3$.

DISCUSSÃO DA EQUAÇÃO GERAL DO 2.º GRAU

1.º caso: Quádricas com centro

Em relação a um referencial $(C; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, em que C é um cento de simetria e $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ é uma base formada por direcções principais de uma dada quádrica, a equação desta toma a forma

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0 \tag{5}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os valores próprios da matriz $G^{-1}A$.

A equação (5) toma o nome de "equação reduzida" da quádrica.

a) $c(A) = 3$

Neste caso, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são não nulos.

a1) Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ têm o mesmo sinal, contrário ao de d, a equação (5) pode tomar a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6}$$

e a quádrica é um "elipsóide".

a2) Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, d$ têm o mesmo sinal, a quádrica é vazia porque a equação (5) é impossível.

a3) Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ têm o mesmo sinal e $d = 0$, a quádrica é formada por um só ponto.

a4) Se $d \neq 0$ tem sinal contrário ao de dois dos valores próprios e o mesmo sinal que o terceiro, a equação (5) pode tomar uma das formas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{7}$$

e a quádrica é um "hiperbolóide de uma folha".

a5) Se $d \neq 0$ tem o mesmo sinal que dois dos valores próprios e sinal contrário ao do terceiro, a equação (5) pode tomar uma das formas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{8}$$

e a quádrica é um "hiperbolóide de duas folhas".

a6) Se $d = 0$ e um dos valores próprios tem sinal contrário ao dos outros dois, a equação (5) pode tomar uma das formas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{9}$$

e a quádrica é uma "superfície cónica".

b) $c(A) = 2$

Neste caso, um e um só dos valores próprios de $G^{-1}A$ é nulo. Suporemos, no que se segue, que é $\lambda_3 = 0$.

b1) Se λ_1, λ_2 têm sinal contrário de d, a equação (5) pode tomar a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

e a quádrica é um "cilindro elíptico".

b2) Se λ_1, λ_2 e d têm o mesmo sinal, a quádrica é vazia.