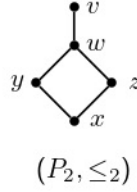
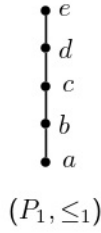


Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 3

13. Considere os reticulados (R_1, \leq_1) e (R_2, \leq_2) a seguir representados



Para cada uma das aplicações h seguintes, diga se: i. h é isótona; ii. h é um isomorfismo de reticulados.

- (a) $h : R_1 \rightarrow R_1$, definida por $h(a) = a$, $h(b) = c$, $h(c) = d$, $h(d) = e$, $h(e) = e$.
(b) $h : R_1 \rightarrow R_2$, definida por $h(a) = x$, $h(b) = y$, $h(c) = z$, $h(d) = w$, $h(e) = v$.
(c) $h : R_2 \rightarrow R_1$, definida por $h(x) = a$, $h(y) = b$, $h(z) = c$, $h(w) = d$, $h(v) = e$.
(d) $h : R_2 \rightarrow R_2$, definida por $h(x) = x$, $h(y) = z$, $h(z) = y$, $h(w) = w$, $h(v) = v$.
14. Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1, \wedge_1, \vee_1)$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2, \wedge_2, \vee_2)$ reticulados e $h : R_1 \rightarrow R_2$ um homomorfismo de reticulados. Mostre que:

- (a) Se $(S_1, \wedge'_1, \vee'_1)$ é um subreticulado de \mathcal{R}_1 , então $(h(S_1), \wedge'_2, \vee'_2)$, onde \wedge'_2 e \vee'_2 são as correspondências definidas por

$$x \wedge'_2 y = x \wedge_2 y, \quad x \vee'_2 y = x \vee_2 y, \quad \forall x, y \in h(S_1),$$

é um subreticulado de \mathcal{R}_2 .

- (b) Se $(S_2, \wedge'_2, \vee'_2)$ é um subreticulado de \mathcal{R}_2 e $h^{-1}(S_2) \neq \emptyset$, então $(h^{-1}(S_2), \wedge'_1, \vee'_1)$, onde \wedge'_1 e \vee'_1 são as correspondências definidas por

$$x \wedge'_1 y = x \wedge_1 y, \quad x \vee'_1 y = x \vee_1 y, \quad \forall x, y \in h^{-1}(S_2),$$

é um subreticulado de \mathcal{R}_1 .

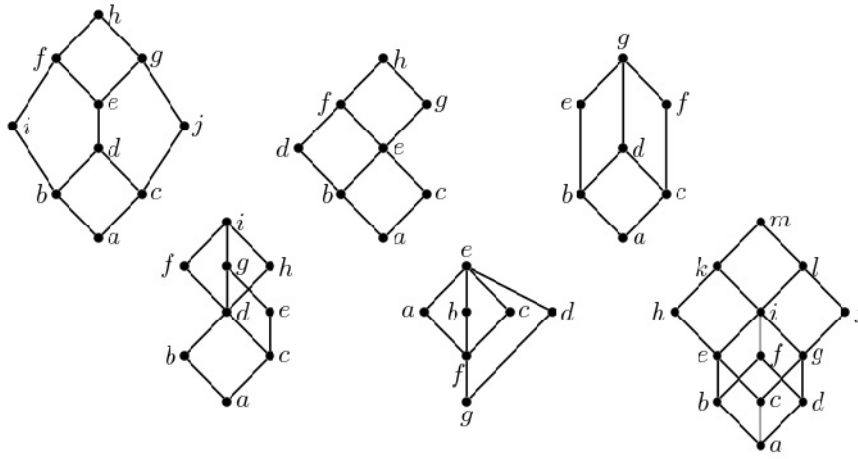
15. Mostre que se (P, \leq) é um c.p.o. tal que, para todo $H \subseteq P$, existe $\inf H$, então (P, \leq) é um reticulado completo.
16. Mostre que todo o reticulado finito é algébrico.
17. Justifique que cada um dos reticulados a seguir indicados é algébrico:

- (a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto das partes de um conjunto A e \subseteq é a relação de inclusão usual (os elementos compactos de $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ são os subconjuntos finitos de A).
(b) $(\text{Subg}(G), \subseteq)$, onde $\text{Subg}(G)$ representa o conjunto dos subgrupos de um grupo G e \subseteq é a relação de inclusão usual (os elementos compactos de $(\text{Subg}(G), \subseteq)$ são os subgrupos de G finitamente gerados).

18. Sejam \mathcal{R} e \mathcal{S} reticulados. Mostre que:

- (a) Se \mathcal{R} é distributivo (modular), então qualquer subreticulado de \mathcal{R} é distributivo (modular).
(b) Se \mathcal{R} e \mathcal{S} são distributivos (modulares), então $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é distributivo (modular).
(c) Se \mathcal{R} é distributivo (modular) e \mathcal{S} é uma imagem homomorfa de \mathcal{R} , então \mathcal{S} é distributivo (modular).

19. Diga, justificando, quais dos seguintes reticulados são distributivos e quais são modulares.



20. Prove que

(a) Um reticulado $(R; \wedge, \vee)$ é distributivo se e só se, para quaisquer $a, b, c \in R$,

$$(a \vee c = b \vee c \text{ e } a \wedge c = b \wedge c) \Rightarrow a = b;$$

(b) O reticulado $(\mathbb{N}, m.d.c., m.m.c.)$ é distributivo.