

Análise Numérica

Ficha de exercícios nº3 - Equações não-lineares

-
1. No Matlab escreva uma função $[raiz, \text{funevals}] = \text{bisec}(fun, a, b, tol)$ que usa o método da bissecção para calcular uma aproximação com erro inferior a tol para um zero da função fun que tem sinais contrários nos pontos a e b . O valor de funevals é o número de vezes que bisec calcula a função fun .
 2.
 - a) Determine um intervalo de amplitude um que contenha a raiz da equação $x \log x - 1 = 0$.
 - b) Estime, à priori, o número de iterações necessárias a efectuar para, usando o método da bissecção, determinar uma aproximação com um erro inferior a 10^{-10} .
 - c) Use a função bisec com $tol = 10^{-10}$ para aproximar a raiz. Verifique que o número de iterações realizadas está de acordo com a previsão feita antes.
 - d) Use de novo a função bisec agora com $tol = 10^{-20}$. O que sucede?
 3. Use o método de *Newton-Raphson* para calcular tão exactamente quanto possível a raiz da mesma equação $x \log x - 1 = 0$, partindo de $x^{(0)} = 1$. Compare, do ponto de vista da precisão obtida e do número de iterações requeridas, com os resultados obtidos anteriormente com o método da bissecção.
 4. Pretende-se resolver a equação $\frac{1}{x} - e^x = 0$, a qual admite uma raiz r que está próxima de $x^{(0)} = 0.5$.

a) Quais das seguintes fórmulas iterativas

$$i) \ x^{(k+1)} = e^{-x^{(k)}}, \quad ii) \ x^{(k+1)} = -\log x^{(k)}, \quad iii) \ x^{(k+1)} = \frac{x^{(k)} + e^{-x^{(k)}}}{2}$$

produz uma sucessão que converge para a raiz? E em que caso a convergência é mais rápida? Justifique.

- b) Calcule uma aproximação para essa raiz, usando a fórmula mais eficiente, iterando até que $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq 0.5 \times 10^{-3}$. Estime o valor do erro $|r - x^{(k)}|$.
5. Sendo f uma função com derivadas de primeira e segunda ordem contínuas num intervalo I que contem a raiz r , e sendo $x^{(k)} \in I$ uma aproximação de r , tem-se, com θ entre r e $x^{(k)}$,

$$r = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} - \frac{f''(\theta)}{2f'(x^{(k)})} (r - x^{(k)})^2 \quad (1)$$

Use esta expressão para mostrar que se f' não se anula e f'' é limitada em I , então o método de *Newton-Raphson*, se converge, tem convergência quadrática.

6. Nos primeiros modelos de computadores digitais a divisão não era efectuada por *hardware* mas sim por *software*. Assim, a divisão de a por b com $a, b > 0$ era efectuada multiplicando a pelo inverso de b , pelo que o problema se transferia para o cálculo do inverso de um número.

- a) Uma vez que $1/b$ é a solução da equação $b - \frac{1}{x} = 0$, mostre que o método de *Newton-Raphson* fornece a seguinte fórmula iterativa para o cálculo de $1/b$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} \cdot (2 - bx^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

- b) Calcule por este processo o valor de $1/7$ tão exactamente quanto possível, partindo de $x^{(0)} = 0.1$
- c) Observe que nas últimas iterações, o número de algarismos correctos praticamente duplica em cada iteração. Para perceber por que é que isto acontece, use a expressão (1) para mostrar que os erros evoluem de acordo com a relação $e^{(k+1)} \approx b \left(e^{(k)} \right)^2$.
- d) Tente calcular o valor de $1/7$ partindo de $x^{(0)} = 0.3$. O que acontece?
7. No caso de raízes de multiplicidade superior a 1, a convergência do método de Newton é apenas linear.
- a) Para ilustrar este facto considere o polinómio $p(x) = (x - a)^m$ e mostre que para os erros de truncatura nas iterações produzidas pelo método de Newton tem-se $e^{(k+1)} = e^{(k)} \left(1 - \frac{1}{m} \right)$. O que conclui desta relação?
- b) Para $m > 2$ é preferível usar o método da bissecção? Porquê?
8. a) No Matlab execute
- $$>> p = \text{poly}([2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2])$$
- para produzir os coeficientes do polinómio $(x - 2)^9$.
- b) Use a função *roots* para calcular os zeros de p . O que conclui ?
9. O exercício anterior ilustra o problema do condicionamento de zeros múltiplos. No entanto, mesmo zeros simples podem ser mal-condicionados. Para verificar isto, repita o exercício anterior com o polinómio cujos zeros são os inteiros desde 1 até 20.
10. Usada na forma $X = FZERO(FUN, X0)$, a função *fzero* do Matlab tenta encontrar um zero da função FUN a partir da aproximação inicial $X0$ (*fzero* é uma implementação de um método híbrido que combina bissecção, interpolação linear e interpolação quadrática inversa).
- a) Use a função *fplot* para sobrepor os gráficos, no intervalo $[-2, 2]$, das funções definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sin x$.
- b) Para calcular as raízes da equação $x^2 - 1 = \sin x$, use a função *fzero* com aproximações iniciais obtidas a partir dos gráficos produzidos.
- c) Repita a alínea anterior usando *fzero* na forma
- $$[X, FVAL, EXITFLAG, OUTPUT] = FZERO(FUN, X0)$$
- e interprete toda a informação produzida.
- d) A equação tem outras raízes para além das que já foram calculadas ? Justifique.
11. a) Execute *fzero*($x^2 + 1 - \sin(x)$, 0). Explique o resultado obtido.
- b) Execute *fzero*(\tan , 5). O resultado obtido é de facto um zero da função $\tan(x)$? Explique qual é o problema.