Universidade do Minho

Ano Lectivo de 2022/2023

Departamento de Matemática

 1^o Semestre

Lic. em Ciências da Computação

Análise Numérica

Ficha de exercícios Nº4 - Interpolação polinomial

1. De uma certa função y = f(x) conhecem-se os valores seguintes

x	-0.5	-1	0	3
y	-2.35	-6.7	-0.3	5.7

a) No Matlab execute

$$>>p3=@(x) x^3-3.1*x^2+2.3*x-0.3$$

para definir o polinómio $p_3(x) = x^3 - 3.1x^2 + 2.3x - 0.3$ e verifique que $p_3(x_i) = y_i$, para cada i = 0, 1, 2, 3. (nota: diz-se que p_3 é polinómio interpolador de f nos pontos dados; x_0, x_1, x_2, x_3 são os "nós de interpolação" e y_0, y_1, y_2, y_3 são os "valores nodais").

- **b)** Execute >> fplot(p3, [-1, 4]) para obter o gráfico do polinómio p_3 no intervalo [-1, 4] e, em seguida, $>> hold \ on, \ plot([-0.5, -1, 0, 3], [-2.35, -6.7, -0.3, 5.7],' o')$ para sobrepôr no mesmo gráfico os pontos (x_i, y_i) , i = 0, 1, 2, 3.
- c) Existe outro polinómio, digamos q_3 , de grau não superior a 3, tal que $q_3(x_i) = y_i$, para cada i = 0, 1, 2, 3? Porquê? E de grau superior a 3?
- 2. a) Para os nós x_i dados no exercício anterior, construa a respectiva matriz de Vandermonde $V = V(x_0, x_1, x_2, x_3)$ e verifique que se tem $\det(V) = \prod_{i,j=0, i>j}^3 (x_j x_i)$.
 - b) Sem resolver o sistema, diga qual é a solução do sistema Va = y, onde y é o vector (coluna) dos valores nodais dados no exercício anterior. Confirme a sua resposta, resolvendo o sistema.
- 3. Dada uma tabela de n+1 pontos

a fórmula de Lagrange para calcular num ponto $x \neq x_i$ o valor do polinómio p_n , de grau não superior a n, tal que $p_n(x_i) = y_i$, para cada $i = 0, \dots, n$, é

$$p_n(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + \dots + y_n \cdot L_n(x)$$

onde, para cada $i = 0, \dots, n$,

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^n (x-x_j)}{\prod_{i=0, j\neq i}^n (x_i-x_j)} = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

a) Use a fórmula interpoladora de Lagrange para determinar o polinómio interpolador de grau não superior a 3 para os pontos

0	1	2	4
1	-2	0	3

- b) Determine o número de operações aritméticas necessárias para o cálculo de $p_n(x)$ pela fórmula de Lagrange.
- c) No Matlab escreva uma função $\mathbf{px=poLagrange}(\mathbf{xi,yi,x})$ para implementar a fórmula interpoladora de Lagrange. Dados os vectores $xi = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ e $yi = [y_0, y_1, \dots, y_n]$ e o ponto x, a função calcula o valor $px = p_n(x)$.
- d) Use vectores xi (nós) e yi (valores nodais) à sua escolha (por exemplo, usando a função rand) e certifique-se de que para cada nó a função polagrange produz o correspondente valor nodal.
- 4. a) No Matlab defina os nós e valores nodais com $>> xi = [1, 3, 10]; yi = \log(xi)$ e, em seguida, execute

$$>> x = 1:0.1:10; \ for \ k = 1: length(x), \ y(k) = poLagrange(xi, \ yi, x(k)); \ end, \ plot(x, y, rr)$$

para obter aproximadamente o gráfico do polinómio interpolador de log nos nós 1, 3 e 10.

- b) Use a função fplot para sobrepôr ao gráfico anterior o gráfico da função log no intervalo [1, 10].
- 5. O erro do polinómio interpolador é dado por

$$f(x) - p_n(x) = W_n(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

onde $W_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ é o polinómio nodal (de grau n+1) e ξ_x é um ponto que depende de x e que está no intervalo $\Omega = [\min\{x_0 \cdots, x_n, x\}, \max\{x_0 \cdots, x_n, x\}].$

- a) Use a expressão dada para encontrar um limite para o erro $\log(1.5) p_1(1.5)$, onde p_1 é o polinómio interpolador de $\log(x)$ nos nós xi = [1, 2].
- b) Use a mesma expressão para encontrar limites para os erros $\log(1.5) p_n(1.5)$, para n = 2, 3, 4, 5, 6, onde p_n é o polinómio interpolador de $\log(x)$ nos nós xi = [1, 2, 3, ..., n + 1].
- 6. a) Construa a tabela das diferenças divididas para os dados (xi, yi) com xi = [0, 0.2, 0.4] e $yi = \sinh(xi)$. Use a fórmula de Newton com diferenças divididas para calcular $p_2(0.3)$, sendo p_2 o polinómio interpolador da função seno hiperbólico [no Matlab é $\sinh(x)$] nos nós dados.
 - b) Repita o exercício, acrescentando o nó 0.6 aos anteriores.
- 7. a) No Matlab escreva o código da função $\mathbf{T}=\mathbf{TabDifDiv}(\mathbf{xi,yi})$ para calcular a tabela das diferenças divididas na forma de uma matriz triangular inferior T. Dados os vectores $xi=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ e $yi=[y_0,y_1,\ldots,y_n]$ a primeira coluna de T armazena os valores nodais, a segunda coluna armazena as diferenças divididas de 1^a ordem, etc. As diferenças a usar na fórmula interpoladora de Newton estão na diagonal principal de T.
 - b) No Matlab escreva o código da função $\mathbf{px=polNewton(xi,yi,x)}$. Dados os nós $xi = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ e os valores nodais $yi = [y_0, y_1, \dots, y_n]$, usa a fórmula de Newton com diferenças divididas (invoca **TabDifDiv(xi,yi)**) para calcular o valor do polinómio interpolador no ponto x.
 - c) Para valores xi, yi, x à sua escolha, certifique-se de que as funções poLagrange e polNewton dão o mesmo resultado.