# Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 6

36. Sejam $\mathcal{A} = (\{1,2,3,4,5\}; *^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\{1,2\}; *^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo $(2,0)$ cujas operações nulárias são dadas por $c^{\mathcal{A}} = 2$, $c^{\mathcal{B}} = 1$ e cujas operações binárias são definidas por

| $*^{\mathcal{A}}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | 5 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | 5 | 2 | 2 | 4 | 2 |
| 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| $*^{\mathcal{B}}$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 1 |

Seja $\alpha : \{1,2\} \to \{1,2,3,4,5\}$ a aplicação definida por $\alpha(1) = 2$ e $\alpha(2) = 3$. Mostre que a aplicação $\alpha$ é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$. Justifique que $\mathcal{B}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

37. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que se $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ e $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C})$, então $\beta \circ \alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{C})$.

38. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que se $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um isomorfismo, então $\alpha^{-1}$ é um isomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$.

39. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$, $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Mostre que:
    (a) Se $A_1$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$, então $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$.
    (b) Se $B_1$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$, então $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

40. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Mostre que
$$\mathrm{Eq}(\alpha,\beta) = \{a \in A \mid \alpha(a) = \beta(a)\}$$
é um subuniverso de $\mathcal{A}$. A este subuniverso chama-se *equalizador de $\alpha$ e $\beta$*.

41. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $\theta$, $\psi$ relações binárias em $A$.
    (a) Mostre que $\theta$ satisfaz a propriedade de substituição em $\mathcal{A}$ se e só se $\theta$ é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.
    (b) Mostre que se $\theta$ e $\psi$ são subuniversos de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, então $\theta \circ \psi$ é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

42. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Mostre que $\alpha$ é injetiva se e só se $\ker \alpha = \triangle_A$.

43. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta, \rho \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$.
    (a) Mostre que a aplicação $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho$ definida por $\alpha(a) = ([a]_\theta, [a]_\rho)$ é um homomorfismo.
    (b) Mostre que $\ker \alpha = \theta \cap \rho$. Conclua que $\alpha$ é injetiva se e só se $\theta \cap \rho = \triangle_A$.
    (c) Mostre que $\alpha$ é sobrejetiva se e só se $\theta \circ \rho = \nabla_A$.

44. Sejam $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f \in O})$, $\mathcal{B} = (B; (f^{\mathcal{B}})_{f \in O})$ e $\mathcal{C} = (C; (f^{\mathcal{C}})_{f \in O})$ álgebras de tipo $(O, \tau)$, $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{C})$. Seja $\alpha : A \to B \times C$ a aplicação definida por $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$, para todo $a \in A$.
    (a) Mostre que $\alpha$ é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$.
    (b) Mostre que $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$.
    (c) Mostre que se $\alpha$ é um epimorfismo, então $\alpha_1$ e $\alpha_2$ são epimorfismos e
$$\mathcal{A}/(\ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2) \cong \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \times \mathcal{A}/\ker \alpha_2.$$

45. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra, $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$ e $[\theta, \nabla_A] = \{\rho \in \mathrm{Con}(\mathcal{A}) \mid \theta \subseteq \rho\}$. Para $\phi \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$ tal que $\theta \subseteq \phi$, define-se a congruência $\phi/\theta$ em $\mathcal{A}/\theta$ por
$$\phi/\theta = \{([a]_\theta, [b]_\theta) \in (A/\theta)^2 \mid (a,b) \in \phi\}.$$
    (a) Determine a congruência $\phi/\theta$ quando:
    i. $\phi = \nabla_A$;  ii. $\phi = \theta$.
    (b) Mostre que os reticulados $([\theta, \nabla_A], \subseteq)$ e $(\mathrm{Con}(\mathcal{A}/\theta), \subseteq)$ são isomorfos.
    (Sugestão: prove que a aplicação $\alpha : [\theta, \nabla_A] \to \mathrm{Con}(\mathcal{A}/\theta)$ definida por $\alpha(\phi) = \phi/\theta$ é um isomorfismo de reticulados.)