

## Álgebra Universal e Categorias

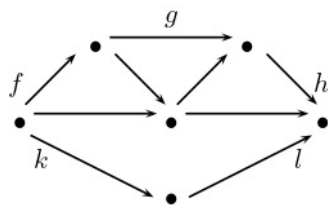
### Exercícios - Folha 8

51. Justifique que cada uma das estruturas seguintes define uma categoria.

- (a)  $\mathbf{M} = (\{\mathcal{M}\}, \text{hom}, \text{id}, \circ)$ , onde  $\mathcal{M} = (M; \cdot, 1_M)$  é um monóide;  $\text{hom}$  associa a  $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  o conjunto  $M$ ;  $\text{id}$  associa a  $\mathcal{M}$  o elemento  $\text{id}_{\mathcal{M}} = 1_M$ ;  $\circ$  é a operação binária do monóide.
- (b)  $\mathbf{P} = (P, \text{hom}, \text{id}, \circ)$ , onde  $(P, \leq)$  é um conjunto parcialmente ordenado;  $\text{hom}$  associa a cada par  $(a, b) \in P \times P$ , o conjunto  $\{(a, b)\} \cap \leq$ ;  $\text{id}$  associa a cada  $a \in P$  o elemento  $\text{id}_a = (a, a)$ ; para quaisquer  $(a, b), (b, c) \in \leq$ ,  $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$ .
- (c)  $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \text{hom}, \text{id}, \circ)$ , onde, para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{hom}(m, n)$  é a coleção de todas as matrizes reais do tipo  $n \times m$ ; para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{id}$  associa a cada  $n \in \mathbb{N}$  a matriz identidade  $I_n$  de ordem  $n$ ;  $\circ$  é a multiplicação usual de matrizes.

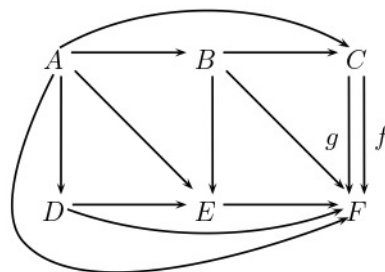
52. Seja  $A$  um objeto de uma categoria  $\mathbf{C}$ . Justifique que  $(\text{hom}(A, A); \circ, \text{id}_A)$  é um monóide.

53. Considere o diagrama a seguir representado



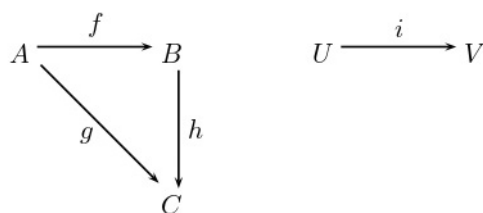
Mostre que se os quatro triângulos internos do diagrama comutam, então  $h \circ g \circ f = l \circ k$ .

54. Seja  $\mathbf{C}$  a categoria definida pelo diagrama



Construa:

- (a) A subcategoria plena  $\mathbf{C}'$  de  $\mathbf{C}$  tal que  $\text{Obj}(\mathbf{C}') = \{A, B, C, F\}$ .
  - (b) A categoria dos objetos sobre  $B$ .
  - (c) A categoria dos objetos sobre  $F$ .
55. (a) Sejam  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  as categorias definidas, respetivamente, pelos diagramas seguintes



Defina por meio de um diagrama a categoria produto  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ .

- (b) Sejam  $R$  e  $S$  monóides vistos como categorias. O que é a categoria produto  $R \times S$ ?
56. (a) Seja  $P$  um conjunto parcialmente ordenado visto como uma categoria. O que é a categoria dual  $P^{op}$ ?
- (b) Seja  $R$  um monóide visto como uma categoria. O que é a categoria dual  $R^{op}$ ?