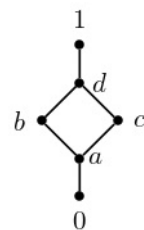


## Álgebra Universal e Categorias

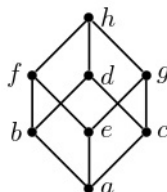
### Exercícios - Folha 2

7. Seja  $(R, \leq)$  o reticulado representado ao lado.

Considere este reticulado interpretado como uma estrutura algébrica  $(R; \wedge, \vee)$  e indique as tabelas das operações  $\wedge$  e  $\vee$ .



8. Considere o reticulado  $(R, \leq)$  a seguir representado.



Para cada um dos conjuntos  $R'$  a seguir indicados, diga se  $(R', \leq|_{R'})$  é um subreticulado de  $(R, \leq)$ .

- (a)  $R' = \{a, b, c, d\}$ . (b)  $R' = \{b, c, f, g\}$ . (c)  $R' = \{a, b, f, g, h\}$ .

9. Seja  $(R; \wedge, \vee)$  um reticulado. Um subconjunto não vazio  $I$  de  $R$  diz-se um *ideal* de  $R$  se

1.  $(\forall x, y \in R) \ x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$ ;
2.  $(\forall x \in I)(\forall y \in R) \ y \wedge x = y \Rightarrow y \in I$ .

Mostre que  $\mathcal{I} = (I; \wedge_{\mathcal{I}}, \vee_{\mathcal{I}})$  é um subreticulado de  $R$ , onde  $I$  é um ideal de  $\mathcal{R}$  e  $\wedge_{\mathcal{I}}$  e  $\vee_{\mathcal{I}}$  são as correspondências de  $I^2$  em  $I$  definidas por

$$x \wedge_{\mathcal{I}} y = x \wedge y, \quad x \vee_{\mathcal{I}} y = x \vee y, \quad \forall x, y \in I,$$

10. Sejam  $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$  um reticulado,  $\text{Sub}(\mathcal{R}) = \{K \subseteq R \mid K \text{ é subreticulado de } \mathcal{R}\}$ ,  $\emptyset \neq X \subseteq R$  e

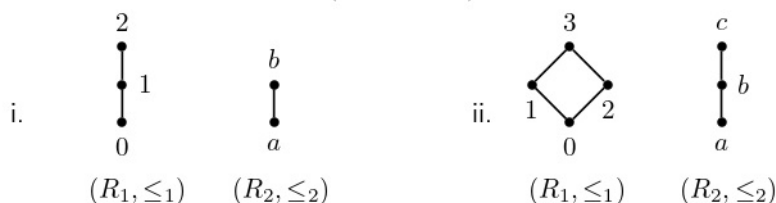
$$Sg^{\mathcal{R}}(X) = \bigcap \{K \in \text{Sub}(\mathcal{R}) \mid X \subseteq K\}.$$

Mostre que  $Sg^{\mathcal{R}}(X) = (Sg^{\mathcal{R}}(X); \wedge', \vee')$ , onde

$$x \wedge' y = x \wedge y, \quad x \vee' y = x \vee y, \quad \forall x, y \in Sg^{\mathcal{R}}(X),$$

é o menor subreticulado de  $\mathcal{R}$  que contém  $X$ . Ao reticulado  $Sg^{\mathcal{R}}(X)$  dá-se a designação de *subreticulado de  $\mathcal{R}$  gerado por  $X$* .

11. (a) Sejam  $(R_1, \leq_1)$  e  $(R_2, \leq_2)$  reticulados. Mostre que o par  $(R_1 \times R_2, \leq)$  é um reticulado, onde  $\leq$  é a relação binária em  $R_1 \times R_2$  definida por:  $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$  sse  $a_1 \leq_1 b_1$  e  $a_2 \leq_2 b_2$ .  
(b) Considerando que  $(R_1, \leq_1)$  e  $(R_2, \leq_2)$  representam os reticulados a seguir indicados, desenhe o diagrama de Hasse do reticulado  $(R_1 \times R_2, \leq)$ :



12. Considerando os reticulados  $(\mathbb{N}, m.d.c., m.m.c.)$  e  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$ , diga se cada uma das aplicações a seguir definidas é um homomorfismo de reticulados.

- (a)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(x) = nx$ , para todo  $x \in \mathbb{N}$  (com  $n \in \mathbb{N}$  fixo).
- (b)  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $g(x) = x + 2$ , para todo  $x \in \mathbb{N}$ .
- (c)  $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  definida por  $h(\emptyset) = \emptyset$  e  $h(A) = \mathbb{N}$ , para todo  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ .
- (d)  $k : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  definida por  $k(A) = A \cap \{1, 2\}$ , para todo  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ .