

LÓGICA CC
LICENCIATURA EM CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO

Notas de apoio à UC

LUÍS PINTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE DO MINHO

Dezembro 2020

Capítulo 1

Preliminares: definições indutivas e linguagens

Exemplo 1: Seja C o menor¹ subconjunto de \mathbb{N}_0 que satisfaz as seguintes condições:

1. $0 \in C$;
2. para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se $n \in C$, então $n + 2 \in C$.

Exemplos de elementos de C são: 0, 2, 4. De facto:

- 0 é um elemento de C , por C satisfazer 1;
- sabendo que $0 \in C$, por C satisfazer 2, segue $0 + 2 = 2 \in C$;
- sabendo que $2 \in C$, por C satisfazer 2, segue $2 + 2 = 4 \in C$.

Adiante (e como é fácil de intuir), mostraremos que C é o conjunto dos números pares.

Esta forma de definir o conjunto C é um caso particular das chamadas *definições indutivas de conjuntos*, um mecanismo muito útil para definir conjuntos (e de uso frequente em Ciências de Computação), que apresentaremos de seguida.

Definição 2: Sejam X um conjunto e B um subconjunto não vazio de X . Seja O um conjunto de *operações* em X (*i.e.*, funções do tipo $X^n \rightarrow X$, com $n \in \mathbb{N}$). Um subconjunto I de X tal que

- i) $B \subseteq I$ e
- ii) I é *fechado* para as operações de O (*i.e.*, as operações de O quando aplicadas a elementos de I produzem elementos de I ou, por outras palavras, para cada operação $f : X^n \rightarrow X$ de O e para cada $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $f(x_1, \dots, x_n) \in I$)

¹Dizemos que um conjunto A é mais pequeno que um conjunto B quando $A \subseteq B$

é chamado um *conjunto indutivo*, sobre X , de base B e conjunto de operações O .

Observação 3: Admitamos as suposições da definição anterior. Então:

- i) X é um conjunto indutivo para qualquer O ;
- ii) B é um conjunto indutivo quando $O = \emptyset$.

Donde, podemos concluir que, os subconjuntos indutivos de um conjunto, para uma dada base e um dado conjunto de operações, não são necessariamente únicos, pois X e B são ambos conjuntos indutivos, sobre X , de base B e conjunto de operações \emptyset .

Definição 4: Sejam X um conjunto, B um subconjunto não vazio de X e O um conjunto de operações em X . O menor conjunto indutivo, sobre X , de base B e conjunto de operações O é chamado o *conjunto definido indutivamente* (ou *conjunto gerado*) por O em B . Chamaremos ao par (B, O) uma *definição indutiva* sobre o conjunto suporte X .

Exercício 5: Explicite X , B e O no caso do conjunto definido indutivamente no exemplo inicial.

Observação 6: Nas condições da definição anterior, demonstra-se que o conjunto G gerado por O em B é a interseção de todos os conjuntos indutivos, sobre X , de base B e conjunto de operações O . Alternativamente, demonstra-se que os elementos de G são exatamente os objetos que podem ser obtidos a partir de B , aplicando um número finito de operações de O .

Definição 7:

1. Chamaremos *alfabeto* a um conjunto de símbolos e chamaremos *letras* aos elementos de um alfabeto.
2. Dado um alfabeto A , chamaremos *palavra* (ou *string*) sobre o alfabeto A a uma sequência finita de letras de A . A notação A^* representará o conjunto de todas as palavras sobre A .
3. À sequência vazia de letras de A chamaremos *palavra vazia*, notando-a por ϵ .
4. Dado $n \in \mathbb{N}$ e dadas n letras a_1, a_2, \dots, a_n de um alfabeto A (possivelmente com repetições), utilizamos a notação $a_1 a_2 \dots a_n$ para representar a palavra sobre A cuja i -ésima letra (para $1 \leq i \leq n$) é a_i .

5. O *comprimento* de uma palavra é o comprimento da respetiva sequência de letras. Em particular, a única palavra de comprimento 0 é ϵ . Dada uma palavra u , denotamos por $|u|$ o comprimento de u .
6. Duas palavras sobre um alfabeto dizem-se *iguais* quando têm o mesmo comprimento e coincidem letra a letra.
7. Dadas duas palavras u, v sobre um alfabeto, utilizamos a notação uv para representar a *concatenação* de u com v (i.e., a concatenação das respetivas sequências de letras, colocando primeiro a sequência de letras relativa a u).
8. Uma *linguagem* sobre um alfabeto A é um conjunto de palavras sobre A (i.e. um subconjunto de A^*).

Exemplo 8: Seja A o alfabeto $\{0, s, +, \times, (,)\}$. Consideremos a linguagem E em A (E para *expressões*), definida indutivamente pelas seguintes *regras*:

1. $0 \in E$;
2. $e \in E \Rightarrow s(e) \in E$, para todo $e \in A^*$;
3. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 + e_2) \in E$, para todo $e_1, e_2 \in A^*$;
4. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 \times e_2) \in E$, para todo $e_1, e_2 \in A^*$.

Por exemplo, as palavras 0 , $s(0)$, (0×0) , $(s(0) + (0 \times 0))$ pertencem a E . De facto:

- $0 \in E$, pela regra 1;
- de $0 \in E$, pela regra 2, segue $s(0)$;
- de $0 \in E$, pela regra 4, segue (0×0) ;
- de $s(0) \in E$ e (0×0) , pela regra 3, segue $(s(0) + (0 \times 0))$.

Já as palavras sobre A $+(00)$ e $s0$ não pertencem a E . Note-se que nenhuma palavra de E tem a letra $+$ como primeira letra e nenhuma palavra de E , com exceção da palavra 0 , tem 0 como última letra.

Definição 9: Seja (B, O) uma definição indutiva sobre um conjunto suporte X de um conjunto I e seja $e \in X$. Uma *sequência de formação* de e é uma sequência finita de elementos de X na qual:

1. o último elemento é e ;
2. cada elemento pertence a B ou é imagem de elementos anteriores na sequência por uma operação de O .

Na representação de uma sequência de formação, habitualmente, usaremos vírgulas para separar os elementos da sequência.

Exemplo 10: Retomemos o exemplo anterior. A sequência de 4 palavras

$$0, s(0), (0 \times 0), (s(0) + (0 \times 0))$$

é uma sequência de formação de $(s(0) + (0 \times 0))$. Porquê? Esta sequência de formação representa o essencial da justificação que apresentámos no Exemplo 8 para provar que $(s(0) + (0 \times 0))$ é uma palavra da linguagem E .

Proposição 11: Seja I um conjunto definido indutivamente, sobre um conjunto suporte X , e seja $e \in X$. Então, e é um dos elementos de I se e somente se e admite uma sequência de formação.

Observação 12: Retomemos o Exemplo 10. A sequência de formação de $(s(0) + (0 \times 0))$ que aí apresentamos não é única. Por exemplo,

$$0, (0 \times 0), s(0), (s(0) + (0 \times 0))$$

é também uma sequência de formação de $(s(0) + (0 \times 0))$. Porquê?

Na verdade, quando um objeto tem uma sequência de formação, esse objeto admite uma infinidade de sequências de formação. Por exemplo, no caso anterior, podemos aumentar o comprimento da sequência acima, tanto quanto queiramos, adicionando 0's no início da sequência.

Observação 13: A demonstração da Proposição 11, em particular, requer a ferramenta de *indução estrutural*, que estudaremos de seguida.

Teorema 14 (Princípio de indução estrutural associado a uma definição indutiva): Considere-se uma definição indutiva (B, O) de um conjunto I sobre X e seja $P(e)$ uma condição sobre $e \in I$. Se:

1. para todo $b \in B$, $P(b)$ é verdadeira;
2. para cada operação $f : X^n \rightarrow X$ de O , para todo $e_1, \dots, e_n \in I$, se $P(e_1), \dots, P(e_n)$ são verdadeiras, então $P(f(e_1, \dots, e_n))$ é verdadeira;

então, para todo $e \in I$, $P(e)$ é verdadeira.

Dem.: Seja $Y = \{e \in I : P(e) \text{ é verdadeira}\}$. Então, Y é um conjunto indutivo, pois contém B e é fechado para as operações de O . Logo, como I é o menor dos conjuntos

indutivos, $I \subseteq Y$. Como da definição de Y se tem também $Y \subseteq I$, segue que $Y = I$. Portanto, por definição de Y , tem-se que, para todo $e \in I$, $P(e)$ é verdadeira. \square

Observação 15:

1. A cada definição indutiva de um conjunto I está associado um princípio de indução estrutural.
2. O usual Princípio de indução sobre os naturais é o princípio de indução estrutural associado à seguinte caracterização indutiva de \mathbb{N} : \mathbb{N} é o menor subconjunto de \mathbb{N} que satisfaz as seguintes condições:
 - (a) $1 \in \mathbb{N}$;
 - (b) para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Exemplo 16: O Princípio de indução estrutural associado à definição indutiva do conjunto C do Exemplo 1 é o seguinte:

Seja $P(n)$ uma condição sobre $n \in C$. Se:

1. $P(0)$;
2. se $P(k)$, então $P(k + 2)$, para todo $k \in C$;

então, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in C$.

Consideremos a condição $P(n)$, com $n \in C$, dada por: “ n é par”. Provemos que $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in C$. Pelo Princípio de indução estrutural para C , basta mostrar que as duas condições acima são verificadas.

1. 0 é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.
2. Seja $k \in C$. Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira. Então, k é par. Logo, $k + 2$ é também par e, portanto, $P(k + 2)$ é verdadeira. Provámos, assim, a condição 2 do Princípio de indução estrutural para C .

Para mostrar que C é efetivamente o conjunto dos números pares, falta ainda mostrar que C contém o conjunto dos números pares. Para tal, pode provar-se, por indução em \mathbb{N}_0 , que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $2n \in C$. (Exercício.)

Exemplo 17: O Princípio de indução estrutural associado à definição indutiva da linguagem de expressões E do Exemplo 8 é o seguinte:

Seja $P(e)$ uma condição sobre $e \in E$. Se:

1. $P(0)$;

2. se $P(e)$, então $P(s(e))$, para todo $e \in E$;
3. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 + e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;
4. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 \times e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;

então $P(e)$, para todo $e \in E$.

Exemplo 18: Consideremos de novo a linguagem de expressões E do Exemplo 8 e consideremos a função $np : E \rightarrow \mathbb{N}_0$ que, a cada expressão de E , faz corresponder o número de ocorrências de parênteses na expressão. Esta função pode ser definida por *recursão estrutural em E* do seguinte modo:

1. $np(0) = 0$;
2. para todo $e \in E$, $np(s(e)) = 2 + np(e)$;
3. para todo $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 + e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$;
4. para todo $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 \times e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$.

Notemos que, nos casos relativos às regras indutivas de E (casos 2, 3 e 4), a caracterização da imagem é feita em termos da imagem da *subexpressão direta* (caso 2) ou das imagens das *subexpressões diretas* (casos 3 e 4).

Mostremos, agora, uma das propriedades das expressões de E relativa à função np . Designadamente, mostremos que, para todo $e \in E$, $np(e)$ é par. A prova será feita com recurso ao Princípio de indução estrutural para E , descrito no exemplo anterior.

Para cada $e \in E$, seja $P(e)$ a afirmação “ $np(e)$ é par”.

1. $P(0)$ é a afirmação “ $np(0)$ é par”. Ora, $np(0) = 0$, que, evidentemente, é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.
2. Seja $e \in E$ e suponhamos que $P(e)$ é válida (a hipótese de indução (H.I.)). Ou seja, suponhamos que $np(e)$ é par. Queremos provar que $P(s(e))$ é válida, i.e., que $np(s(e))$ é par. Ora, $np(s(e)) = 2 + np(e)$. Sendo $np(e)$ par, por H.I., e sendo a soma de dois pares um par, é óbvio que também $np(s(e))$ é par. Logo, podemos deduzir que $P(s(e))$ é válida.
3. Sejam $e_1, e_2 \in E$ e suponhamos que $P(e_1)$ e $P(e_2)$ são válidas (as hipóteses de indução (H.I.)). Ou seja, suponhamos que $np(e_1)$ é par, assim como $np(e_2)$. Queremos provar que $P((e_1 + e_2))$ é válida, i.e., que $np(e_1 + e_2)$ é par. Note-se que $np((e_1 + e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$. Por H.I., sabemos que $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Como a soma de pares é também par, é claro que $np((e_1 + e_2))$ é par. Assim, pode-se concluir que $P((e_1 + e_2))$ é válida.

4. Sejam $e_1, e_2 \in E$ e suponhamos que $P(e_1)$ e $P(e_2)$ são válidas (H.I.). Logo, $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Queremos mostrar que $P((e_1 \times e_2))$ é válida, ou seja, que $np(e_1 \times e_2)$ é par. Temos que $np((e_1 \times e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$. Ora, sabemos, por H.I., que $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Consequentemente, $np((e_1 \times e_2))$ é par. Assim, podemos afirmar que $P((e_1 \times e_2))$ é válida.

Mostrámos assim que as condições 1, 2, 3 e 4 do Princípio de indução estrutural para E são verificadas. Logo, por esse princípio, conclui-se que $P(e)$ é verdadeira, para todo o $e \in E$, ou seja, que $np(e)$ é par, para todo o $e \in E$.

Exemplo 19: A definição indutiva do conjunto C do Exemplo 1 também permite a definição de funções por recursão estrutural. Por exemplo, existe uma e uma só função $f : C \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(0) = 0$;
2. para todo $n \in C$, $f(n + 2) = 1 + f(n)$.

Acerca desta função, pode provar-se, com recurso ao Princípio de indução para C (ver Exemplo 1), que, para todo $n \in C$, $f(n) = \frac{n}{2}$. (Exercício.)

Observação 20: Ao contrário do que sucede em relação ao *Princípio de indução estrutural*, nem todas as definições indutivas têm um *Princípio de recursão estrutural* associado. Este princípio é válido apenas para as chamadas *definições indutivas deterministas*. As definições indutivas de C e E , que vimos nos Exemplos 1 e 8, inserem-se nesta classe. As definições indutivas deterministas caracterizam-se por permitirem *decomposições únicas* dos seus elementos.

Vejamos um exemplo de uma definição indutiva não-determinista e de problemas que surgiriam com um hipotético princípio de recursão estrutural associado.

Tomemos a definição indutiva de C do Exemplo 1 e acrescentemos-lhe, agora, a regra:

3. para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se $n \in C$, então $2 \times n \in C$.

Simultaneamente, às condições que definem a função f , no exemplo anterior, acrescentemos, agora, a seguinte condição associada à regra que acabámos de introduzir:

3. para todo $n \in C$, $f(2n) = 2 + f(n)$.

O princípio de recursão estrutural associado asseguraria que esta condição, juntamente com as condições 1 e 2 do exemplo anterior, definiriam uma função.

Mas, por exemplo, qual seria a imagem de 4 por f ?

Por um lado, $f(4) = f(2 \times 2) = 2 + f(2) = 2 + f(2 + 0) = 2 + 1 + f(0) = 3 + 0 = 3$ (fazendo na primeira igualdade a *decomposição de 4 pela regra 3* e usando a condição 3 na segunda igualdade).

Por outro lado, $f(4) = f(2+2) = 1 + f(2) = 1 + 1 = 2$ (fazendo na primeira igualdade a *decomposição de 4 pela regra 2* e usando a condição 2 na segunda igualdade).

Teríamos, portanto, duas imagens distintas para 4, o que é impossível. Consequentemente, o princípio de recursão estrutural não pode ser válido para esta definição indutiva.

Capítulo 2

Cálculo Proposicional da Lógica Clássica

Notação 21: Normalmente, usaremos CP para abreviar Cálculo Proposicional da Lógica Clássica.

2.1 Sintaxe

Definição 22: O alfabeto do CP é notado por \mathcal{A}^{CP} e é constituído pelos seguintes símbolos (letras):

- a) $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ (com $n \in \mathbb{N}_0$), chamados *variáveis proposicionais*, formando um conjunto numerável, denotado por \mathcal{V}^{CP} ;
- b) $\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, chamados *conetivos proposicionais* (respetivamente, *absurdo*, *negação*, *conjunção*, *disjunção*, *implicação* e *equivalência*);
- c) $(,)$ (abrir e fechar parênteses), chamados *símbolos auxiliares*.

Exemplo 23: As sequências de símbolos $\perp p_{20}$ e (p_1) são palavras sobre \mathcal{A}^{CP} , ambas de comprimento 3. A sequência de símbolos p_1 (de comprimento 1) é também uma palavra sobre \mathcal{A}^{CP} , sendo diferente da palavra (p_1) .

Definição 24: O conjunto das *fórmulas do CP* é notado por \mathcal{F}^{CP} e é a linguagem sobre \mathcal{A}^{CP} definida indutivamente pelas seguintes regras:

- a) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;
- b) $p \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

- c) $\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}^{CP})^*$;
- d) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\varphi \square \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}^{CP})^*$.

Exemplo 25: A palavra $((\neg \perp) \wedge (p_6 \rightarrow p_0))$ é uma fórmula do CP. Por exemplo,

$$\perp, (\neg \perp), p_6, p_0, (p_6 \rightarrow p_0), ((\neg \perp) \wedge (p_6 \rightarrow p_0))$$

é uma sua sequência de formação (de comprimento 6).

As palavras \perp e p_0 não são fórmulas do CP. De facto, nenhuma palavra sobre \mathcal{A}^{CP} de comprimento 3 é uma fórmula do CP.

Exercício 26: Particularize o conceito de sequência de formação, apresentado na Definição 9, ao caso da definição indutiva do conjunto \mathcal{F}^{CP} .

Notação 27: Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações são muitas vezes omitidos. Por exemplo, a palavra $(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \perp$ será utilizada como uma representação da fórmula $((p_5 \wedge (\neg p_0)) \vee \perp)$. Por abuso de linguagem, chamaremos fórmulas a tais representações de fórmulas.

Teorema 28 (Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade sobre fórmulas $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Se:

- a) $P(\perp)$;
- b) $P(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;
- c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dem.: Basta particularizar o Princípio de indução estrutural associado a uma definição indutiva ao caso da definição indutiva de \mathcal{F}^{CP} . \square

Observação 29: Uma aplicação do resultado anterior para demonstrar uma proposição é chamada uma *demonstração por indução estrutural em fórmulas do CP*.

Exemplo 30: Podemos recorrer a uma demonstração por indução estrutural em fórmulas do CP para provar que: para toda a fórmula, o número de ocorrências de “(” é igual ao número de ocorrências de “)”.

Consideremos a propriedade sobre fórmulas $P(\varphi)$, dada por “ $npe(\varphi) = npd(\varphi)$ ”, onde $npe(\varphi)$ e $npd(\varphi)$ denotam o número de ocorrências em φ de “(” e de “)”, respetivamente.

- a) $npe(\perp) = 0 = npd(\perp)$, pelo que $P(\perp)$.
- b) Para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $npe(p) = 0 = npd(p)$ e, portanto, $P(p)$.
- c) Seja $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e (como hipótese de indução) suponhamos $P(\psi)$. Então,

$$npe((\neg\psi)) = 1 + npe(\psi) = 1 + npd(\psi) = npd((\neg\psi)),$$

onde a segunda igualdade segue da hipótese de indução. Assim, $npe((\neg\psi)) = npd((\neg\psi))$, provando $P(\neg\psi)$.

- d) Para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$. (Exercício.)

De **a)** a **d)**, pelo Princípio de indução estrutural para \mathcal{F}^{CP} , segue que, para toda a fórmula φ , $P(\varphi)$ é verdadeira, ou seja, o número de ocorrências de “(” em φ é igual ao número de ocorrências de “)” em φ .

Observação 31: A definição indutiva de \mathcal{F}^{CP} é determinista. Por esta razão, \mathcal{F}^{CP} admite um *princípio de recursão estrutural*. Uma aplicação deste princípio para definir uma função é chamada uma *definição por recursão estrutural em fórmulas do CP*.

Definição 32: A função $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$, que a cada fórmula faz corresponder o conjunto das variáveis proposicionais que nela ocorrem, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

- a) $var(\perp) = \emptyset$;
- b) $var(p) = \{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;
- c) $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- d) $var(\varphi \square \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 33:

$$\begin{aligned}
& \text{var}(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \vee \perp)) \\
&= \text{var}(p_1) \cup \text{var}(\neg p_2 \vee \perp) \\
&= \{p_1\} \cup \text{var}(\neg p_2) \cup \text{var}(\perp) \\
&= \{p_1\} \cup \text{var}(p_2) \cup \emptyset \\
&= \{p_1\} \cup \{p_2\} \\
&= \{p_1, p_2\}.
\end{aligned}$$

Definição 34: Sejam ψ uma fórmula e p uma variável proposicional. A função $[\psi/p] : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$, que a cada fórmula φ faz corresponder a fórmula notada por $\varphi[\psi/p]$, que resulta de φ por *substituição* das ocorrências de p por ψ , é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

- a) $\perp[\psi/p] = \perp$;
- b) $p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se } p_i = p \\ p_i & \text{se } p_i \neq p \end{cases}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
- c) $(\neg\varphi_1)[\psi/p] = \neg\varphi_1[\psi/p]$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$;
- d) $(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p] = \varphi_1[\psi/p] \square \varphi_2[\psi/p]$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 35:

- a)
$$\begin{aligned}
& (\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_2] \\
&= (\neg p_1)[p_0 \vee p_1/p_2] \rightarrow (p_2 \wedge \perp)[p_0 \vee p_1/p_2] \\
&= \neg p_1[p_0 \vee p_1/p_2] \rightarrow (p_2[p_0 \vee p_1/p_2] \wedge \perp[p_0 \vee p_1/p_2]) \\
&= \neg p_1 \rightarrow ((p_0 \vee p_1) \wedge \perp)
\end{aligned}$$
- b) Verifique que $(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_0] = (\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))$. Esta igualdade corresponde a um caso particular da proposição que se segue (observe que $p_0 \notin \text{var}(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))$).

Proposição 36: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $p \in \mathcal{V}^{CP}$, se $p \notin \text{var}(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em φ . (Exercício.) □

Definição 37: A função $\text{subf} : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}^{CP})$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

- a) $\text{subf}(\varphi) = \{\varphi\}$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$;
- b) $\text{subf}(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup \text{subf}(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $subf(\varphi \square \psi) = \{\varphi \square \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dadas fórmulas φ e ψ , diremos que φ é uma *subfórmula* de ψ quando $\varphi \in subf(\psi)$.

Exemplo 38:

$$\begin{aligned}
 & subf(\neg p_1 \rightarrow p_2) \\
 = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup subf(\neg p_1) \cup subf(p_2) \\
 = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup subf(p_1) \cup \{p_2\} \\
 = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup \{p_1\} \cup \{p_2\} \\
 = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2, \neg p_1, p_1, p_2\}.
 \end{aligned}$$

Proposição 39: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, φ é uma subfórmula de ψ se e só se uma das seguintes condições é satisfeita:

- a) $\psi = \varphi$;
- b) existe $\psi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \neg \psi_1$ e φ é uma subfórmula de ψ_1 ;
- c) existe um conetivo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e existem fórmulas $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \psi_1 \square \psi_2$ e φ é uma subfórmula de ψ_1 ou de ψ_2 .

Dem.: Por análise de casos em ψ .

Caso $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$. Então,

| | |
|-----|--------------------------------|
| | φ subfórmula de ψ |
| sse | $\varphi \in subf(\psi)$ |
| sse | $\varphi \in \{\psi\}$ |
| sse | $\varphi = \psi$. |

Assim, supondo que φ é uma subfórmula de ψ , temos $\varphi = \psi$, pelo que a condição **a)** é satisfeita. Reciprocamente, uma vez que $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$, as condições **b)** e **c)** não são satisfeitas, pelo que teremos que ter $\varphi = \psi$. Logo, pela sequência de equivalências anterior, segue que φ é uma subfórmula de ψ .

Restantes casos (caso $\psi = \neg \psi_1$, para algum $\psi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$, e caso $\psi = \psi_1 \square \psi_2$, para algum $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para alguns $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$): exercício. \square

2.2 Semântica

Definição 40: Os *valores lógicos* do CP são o *verdadeiro* e o *falso*. Estes valores serão denotados por 1 e 0, respetivamente.

Definição 41: Uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ é uma *valoração* quando satisfaz as seguintes condições:

- a) $v(\perp) = 0$,
- b) $v(\neg\varphi) = f_{\neg}(v(\varphi))$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,
- c) $v(\varphi \square \psi) = f_{\square}(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

onde $f_{\neg}, f_{\wedge}, f_{\vee}, f_{\rightarrow}, f_{\leftrightarrow}$ são as *funções booleanas* determinadas pelas *tabelas de verdade* dos respectivos conectivos; concretamente:

$$\begin{array}{ccc}
 f_{\neg} : \{0, 1\} & \longrightarrow & \{0, 1\} \\
 0 & \mapsto & 1 \\
 1 & \mapsto & 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 f_{\wedge} : \{0, 1\}^2 & \longrightarrow & \{0, 1\} \\
 (1, 1) & \mapsto & 1 \\
 (1, 0) & \mapsto & 0 \\
 (0, 1) & \mapsto & 0 \\
 (0, 0) & \mapsto & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 f_{\vee} : \{0, 1\}^2 & \longrightarrow & \{0, 1\} \\
 (1, 1) & \mapsto & 1 \\
 (1, 0) & \mapsto & 1 \\
 (0, 1) & \mapsto & 1 \\
 (0, 0) & \mapsto & 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 f_{\rightarrow} : \{0, 1\}^2 & \longrightarrow & \{0, 1\} \\
 (1, 1) & \mapsto & 1 \\
 (1, 0) & \mapsto & 0 \\
 (0, 1) & \mapsto & 1 \\
 (0, 0) & \mapsto & 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 f_{\leftrightarrow} : \{0, 1\}^2 & \longrightarrow & \{0, 1\} \\
 (1, 1) & \mapsto & 1 \\
 (1, 0) & \mapsto & 0 \\
 (0, 1) & \mapsto & 0 \\
 (0, 0) & \mapsto & 1
 \end{array}$$

Proposição 42: Seja v uma valoração e sejam φ, ψ fórmulas do CP. Então,

- a) $v(\neg\varphi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$; $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;
- b) $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$; $v(\varphi \wedge \psi) = \text{mínimo}(v(\varphi), v(\psi))$;
- c) $v(\varphi \vee \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$; $v(\varphi \vee \psi) = \text{máximo}(v(\varphi), v(\psi))$;
- d) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 1$;
- e) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$.

Dem.: Exercício. □

Proposição 43: Seja $f : \mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ uma função. Então, existe uma e uma só valoração v t.q. $v(p) = f(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.

Dem.: Consequência imediata do Princípio de recursão estrutural para fórmulas do CP. □

Definição 44: O *valor lógico* de uma fórmula φ para uma valoração v é $v(\varphi)$.

Exemplo 45: Sejam v_1 a única valoração t.q. $v_1(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, e v_2 a única valoração t.q.

$$v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{p_0, p_2\} \\ 0 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_2\} \end{cases}.$$

Sejam ainda $\varphi = (p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$ e $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow \perp)$. Então:

- a) Como $v_1(p_1) = v_1(p_2) = 0$, $v_1(p_1 \vee p_2) = 0$, donde, de imediato, segue $v_1(\varphi) = 1$.
(Exercício: verifique que $v_2(\varphi) = 0$.)
- b) Como $v_1(p_1) = 0$, por um lado, temos $v_1(\neg p_1) = 1$ e, por outro, temos $v_1(p_1 \rightarrow \perp) = 1$. Assim, $v_1(\psi) = 1$.
(Exercício: verifique que $v_2(\psi) = 1$; em particular, observe que v_2 e v_1 atribuem o mesmo valor lógico à única variável proposicional que ocorre em ψ .)

Proposição 46: Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula do CP. Se, para todo $p \in \text{var}(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Dem.: Por indução estrutural em fórmulas do CP.

Seja $P(\varphi)$ a condição: para todo $p \in \text{var}(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p) \Rightarrow v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

- a) $P(\perp)$ é verdadeira, pois $v_1(\perp) = 0 = v_2(\perp)$, por definição de valoração.
- b) Suponhamos que p' é uma variável proposicional e que, para todo $p \in \text{var}(p')$, $v_1(p) = v_2(p)$. Assim, como $p' \in \text{var}(p') (= \{p'\})$, temos $v_1(p') = v_2(p')$. Deste modo, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.
- c) Mostremos que $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ implicam $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
Suponhamos que, para todo $p \in \text{var}(\varphi_1 \Box \varphi_2)$, $v_1(p) = v_2(p)$. Então, como $\text{var}(\varphi_1 \Box \varphi_2) = \text{var}(\varphi_1) \cup \text{var}(\varphi_2)$, para $i \in \{1, 2\}$, tem-se $v_1(p) = v_2(p)$, para todo $p \in \text{var}(\varphi_i)$. Daqui, aplicando as hipóteses de indução $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$, segue que $v_1(\varphi_1) = v_2(\varphi_1)$ e $v_1(\varphi_2) = v_2(\varphi_2)$.
Assim, $v_1(\varphi_1 \Box \varphi_2) = f_{\Box}(v_1(\varphi_1), v_1(\varphi_2)) = f_{\Box}(v_2(\varphi_1), v_2(\varphi_2)) = v_2(\varphi_1 \Box \varphi_2)$, e, portanto, $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira.
- d) Exercício: demonstrar que $P(\varphi_1)$ implica $P(\neg \varphi_1)$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$. □

Definição 47:

1. Uma fórmula φ é uma *tautologia* quando, para qualquer valoração v , $v(\varphi) = 1$.
2. Uma fórmula φ é uma *contradição* quando, para qualquer valoração v , $v(\varphi) = 0$.

Notação 48: A notação $\models \varphi$ significará que φ é uma tautologia e a notação $\not\models \varphi$ significará que φ não é uma tautologia.

Exemplo 49:

1. A fórmula $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow \perp)$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, dada uma valoração arbitrária v , sabemos que $v(p_1) = 0$ ou $v(p_1) = 1$, e:
 - (a) caso $v(p_1) = 0$, então $v(\neg p_1) = 1$ e $v(p_1 \rightarrow \perp) = 1$, donde $v(\psi) = 1$.
 - (b) caso $v(p_1) = 1$, então $v(\neg p_1) = 0$ e $v(p_1 \rightarrow \perp) = 0$, donde $v(\psi) = 1$.
2. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \wedge \neg\varphi$ é uma contradição. De facto, dada uma valoração arbitrária v , sabemos que $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = 1$, e:
 - (a) caso $v(\varphi) = 0$, então, de imediato, sabemos $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = 0$.
 - (b) caso $v(\varphi) = 1$, então $v(\neg\varphi) = 0$, donde $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = 0$.
3. As fórmulas $p_0, \neg p_0, p_0 \vee p_1, p_0 \wedge p_1, p_0 \rightarrow p_1, p_0 \leftrightarrow p_1$ não são tautologias nem são contradições. (Porquê?)

Proposição 50: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

1. φ é tautologia se e só se $\neg\varphi$ é contradição;
2. φ é contradição se e só se $\neg\varphi$ é tautologia.

Dem.: Exercício. □

Observação 51: Sabendo que φ não é uma tautologia, não podemos concluir que φ é uma contradição e, analogamente, sabendo que φ não é uma contradição, não podemos concluir que φ é uma tautologia. Tenha-se em atenção que existem fórmulas que não são tautologias, nem são contradições (como vimos no exemplo anterior).

Observação 52: Pela Proposição 46, para decidir se uma fórmula φ é uma tautologia, basta calcular o valor lógico de φ para $2^{\#var(\varphi)}$ valorações (o número de atribuições, possíveis, às variáveis proposicionais de φ). Tal pode ser descrito através de uma *tabela de verdade*, como se segue. Introduzimos: uma coluna para cada variável proposicional de φ ; uma coluna para φ ; e colunas (auxiliares) para cada uma das restantes subfórmulas de φ . Introduzimos linhas para cada uma das atribuições, possíveis, de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ (*i.e.*, sequências de 0's e 1's de comprimento igual ao número de variáveis proposicionais em φ). Preenchemos as colunas respeitantes às variáveis proposicionais com essas atribuições. Nas restantes

posições pos_{ij} da tabela, escrevemos o valor lógico da fórmula respeitante à coluna j , para uma valoração que satisfaz as atribuições às variáveis proposicionais na linha i .

Exemplo 53: Seja φ a fórmula $(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$. Da tabela de verdade para φ , apresentada de seguida, podemos concluir que φ é uma tautologia, uma vez que φ assume o valor lógico 1, para todas as possíveis atribuições de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ .

| p_1 | p_2 | $\neg p_1$ | $\neg p_2$ | $\neg p_1 \rightarrow \neg p_2$ | $p_2 \rightarrow p_1$ | $(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$ |
|-------|-------|------------|------------|---------------------------------|-----------------------|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela de verdade de $(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$.

Teorema 54 (Generalização): Sejam p uma variável proposicional e sejam φ e ψ fórmulas do CP. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ é também uma tautologia.

Dem.: Qualquer que seja a valoração v , demonstra-se, por indução estrutural na fórmula φ , que a valoração v' definida, a partir de v e de ψ , do seguinte modo

$$v'(p') = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p' = p \\ v(p') & \text{se } p' \in \mathcal{V}^{CP} - \{p\} \end{cases}$$

é tal que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$. Portanto, se φ é uma tautologia, $v'(\varphi) = 1$ e, pela igualdade anterior, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$. Assim, qualquer que seja a valoração v , $v(\varphi[\psi/p]) = 1$, *i.e.*, $\varphi[\psi/p]$ é uma tautologia. \square

Exemplo 55: A fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia. Logo, para qualquer fórmula ψ , a fórmula $(p_0 \vee \neg p_0)[\psi/p_0] = \psi \vee \neg \psi$ é ainda uma tautologia.

Definição 56: Uma fórmula φ diz-se *logicamente equivalente* a uma fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia, ou seja, quando para qualquer valoração v , $v(\varphi) = v(\psi)$.

Exemplo 57: Para toda a fórmula φ , $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$. A demonstração deste resultado pode ser sintetizada numa *tabela de verdade*, como se segue:

| φ | $\neg\varphi$ | $\varphi \rightarrow \perp$ | $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$ |
|-----------|---------------|-----------------------------|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |

Tabela de verdade de $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$.

Na primeira linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 1. Na segunda linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 0.

Proposição 58: A relação de equivalência lógica satisfaz as seguintes propriedades:

1. para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (*reflexividade*);
2. para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\psi \Leftrightarrow \varphi$ (*simetria*);
3. para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\psi \Leftrightarrow \sigma$, então $\varphi \Leftrightarrow \sigma$ (*transitividade*).

Dem.: Para mostrar 1, temos que mostrar que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a fórmula $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia. De facto, dado $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, para qualquer valoração v , $v(\varphi) = v(\varphi)$, donde $v(\varphi \Leftrightarrow \varphi) = 1$, e, consequentemente, $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia. (Exercício: mostrar 2 e 3.) \square

Corolário 59: A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em \mathcal{F}^{CP} .

Dem.: Imediata, a partir da proposição anterior. \square

Proposição 60: As seguintes equivalências lógicas são válidas.

$$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \quad (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$

(associatividade)

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi \quad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$$

(comutatividade)

$$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi \quad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$$

(idempotência)

$$\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi \quad \varphi \wedge \neg \perp \Leftrightarrow \varphi$$

(elemento neutro)

$$\varphi \vee \neg \perp \Leftrightarrow \neg \perp \quad \varphi \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$$

(elemento absorvente)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \quad \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$$

(distributividade)

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

(leis de De Morgan)

$$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \quad \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

(lei da dupla negação) (contrarrecíproco)

$$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \quad \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \perp \quad \perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$$

(expressão de um conetivo em termos de outros conetivos)

Dem.: Exercício. □

Notação 61: Uma vez que a conjunção é uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ (com $n \in \mathbb{N}$) para representar qualquer associação, através da conjunção, das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ duas a duas. Analogamente, e uma vez que a disjunção é também uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ para representar qualquer associação, através da disjunção, das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ duas a duas. Em ambos os casos, quando $n = 1$, as notações anteriores representam simplesmente a fórmula φ_1 .

Teorema 62 (Substituição): Sejam $p \in \mathcal{V}^{CP}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$. Então: $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ sse para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Dem.:

- i) Suponhamos que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. Então, em particular, teremos que $p[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p[\varphi_2/p]$. Logo, por definição de substituição, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.
- ii) Suponhamos agora que $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$. Vamos demonstrar, por indução estrutural em fórmulas do CP, que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\psi)$, onde $P(\psi)$ é a condição: $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

a) Por definição de substituição, $\perp[\varphi_1/p] = \perp = \perp[\varphi_2/p]$. Assim, como a relação \Leftrightarrow é reflexiva, $\perp \Leftrightarrow \perp$, ou equivalentemente $\perp[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \perp[\varphi_2/p]$, e, portanto, $P(\perp)$ é verdadeira.

b) Seja $p' \in \mathcal{V}^{CP}$. Consideremos dois casos.

b.1) Caso $p' = p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = \varphi_1$ e $p'[\varphi_2/p] = \varphi_2$. Assim, como por hipótese $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, segue que $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$,

b.2) Caso $p' \neq p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = p'$ e $p'[\varphi_2/p] = p'$. Assim, tal como em a), por \Leftrightarrow ser reflexiva, $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$.

Assim, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

c) Seja ψ_1 uma fórmula e suponhamos $P(\psi_1)$ (H.I.), tendo em vista mostrar que $P(\neg\psi_1)$ é verdadeira, ou, dito por outras palavras, pretende-se mostrar que $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \Leftrightarrow (\neg\psi_1)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

Seja v uma valoração. Então:

$$\begin{aligned}
 & v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p]) \\
 = & v(\neg\psi_1[\varphi_1/p]) \quad (\text{definição de substituição}) \\
 = & f_{\neg}(v(\psi_1[\varphi_1/p])) \quad (\text{definição de valoração}) \\
 = & f_{\neg}(v(\psi_1[\varphi_2/p])) \quad (*) \\
 = & v(\neg\psi_1[\varphi_2/p]) \quad (\text{definição de valoração}) \\
 = & v((\neg\psi_1)[\varphi_2/p]) \quad (\text{definição de substituição}).
 \end{aligned}$$

onde a igualdade assinalada com $(*)$ é consequência da HI, pois da HI, por definição de \Leftrightarrow , segue que $\psi_1[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi_1[\varphi_2/p]$ é uma tautologia, donde, em particular, $v(\psi_1[\varphi_1/p]) = v(\psi_1[\varphi_2/p])$.

Assim sendo, $v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \Leftrightarrow (\neg\psi_1)[\varphi_2/p]) = 1$ e, portanto, a fórmula $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \Leftrightarrow (\neg\psi_1)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

d) Para completar a prova, falta mostrar que, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$, se $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$, então $P(\psi_1 \Box \psi_2)$. (Exercício.) \square

Exemplo 63: Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

$$\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \neg\neg\varphi \vee \neg\psi \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \varphi \vee \neg\psi.$$

Justificações

- (1) Lei de De Morgan.
 (2) Dada uma variável proposicional $p \notin \text{var}(\psi)$ (que existe sempre, pois o número de variáveis proposicionais que ocorrem em φ é finito), pelo Teorema da Substituição, como $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] \Leftrightarrow (p \vee \psi)[\varphi/p]$ e assim, uma vez que $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] = \neg\neg\varphi \vee \psi$ e $(p \vee \psi)[\varphi/p] = \varphi \vee \psi$, segue-se que $\neg\neg\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \varphi \vee \psi$.

Donde, como \Leftrightarrow é transitiva, podemos concluir a equivalência lógica entre a primeira fórmula e a última fórmula, ou seja, $\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi \vee \neg\psi$.

Definição 64: Seja $X \subseteq \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ um conjunto de conetivos. X diz-se *completo* quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e todos os conetivos de ψ estão em X .

Proposição 65: Os conjuntos de conetivos $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \perp\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são completos.

Dem.: Vamos demonstrar que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos. (A demonstração de que os outros conjuntos de conetivos mencionados são completos é deixada como exercício.) Para tal, comecemos por definir, por recursão estrutural em fórmulas, a função $f : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}$ como a única função t.q.:

- a) $f(\perp) = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$;
- b) $f(p) = p$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;
- c) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- e) $f(\varphi \vee \psi) = \neg f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- f) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(f(\varphi) \rightarrow \neg f(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- g) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg((f(\varphi) \rightarrow f(\psi)) \rightarrow \neg(f(\psi) \rightarrow f(\varphi)))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Lema: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e os conetivos de $f(\varphi)$ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.

Dem.: Por indução estrutural em φ . Exercício.

Do lema anterior concluímos de imediato que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos, pois, para toda a fórmula φ , existe uma fórmula ψ —a fórmula $f(\varphi)$ — tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e os conetivos de ψ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$. \square

Exemplo 66: Da demonstração da proposição anterior, podemos concluir que a fórmula $f((\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \perp) = \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_0)$ é logicamente equivalente a $(\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \perp$ e os seus conetivos estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.

Definição 67: As variáveis proposicionais e as negações de variáveis proposicionais são chamadas *literais*.

Definição 68: Fórmulas do CP das formas

$$\text{i)} \quad (l_{11} \vee \dots \vee l_{1m_1}) \wedge \dots \wedge (l_{n1} \vee \dots \vee l_{nm_n})$$

$$\text{ii)} \quad (l_{11} \wedge \dots \wedge l_{1m_1}) \vee \dots \vee (l_{n1} \wedge \dots \wedge l_{nm_n})$$

em que os l_{ij} são literais e n , bem como os m_i , pertencem a \mathbb{N} , serão designadas por *formas normais conjuntivas* (FNC) e *formas normais disjuntivas* (FND), respetivamente.

Exemplo 69:

- a) Todo o literal l é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e disjuntiva (na definição de formas normais, basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $l_{11} = l$).
- b) A fórmula $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_0$ é uma FNC (faça-se $n = 3$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $l_{11} = p_1$, $l_{21} = \neg p_2$ e $l_{31} = \neg p_0$) e é também uma FND (faça-se $n = 1$, $m_1 = 3$, $l_{11} = p_1$, $l_{12} = \neg p_2$ e $l_{13} = \neg p_0$). Também a fórmula $p_1 \vee p_2$ é, em simultâneo, uma FND e uma FNC. Mais geralmente, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.
- c) A fórmula $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_0 \vee \neg p_1)$ é uma FNC, mas não é uma FND.
- d) A fórmula $\neg(p_1 \vee p_0)$ não é nem uma FNC nem uma FND.

Proposição 70: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe uma forma normal conjuntiva φ^c tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e existe uma forma normal disjuntiva φ^d tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

Dem.: Dada uma fórmula φ , uma forma normal conjuntiva e uma forma normal disjuntiva logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo, utilizando as equivalências lógicas $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\perp \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \neg\varphi_1$.
2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. □

Exemplo 71: Seja $\varphi = ((\neg p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3) \wedge p_0$. Então:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & \varphi \\
 & \Leftrightarrow ((\neg p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3) \wedge p_0 \\
 & \Leftrightarrow (\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
 & \Leftrightarrow ((\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
 & \Leftrightarrow ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
 & \Leftrightarrow (p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_0
 \end{aligned}$$

e a última fórmula é uma FNC;

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & \varphi \\
 & \Leftrightarrow ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \quad (\text{por i}) \\
 & \Leftrightarrow (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_0) \vee (p_3 \wedge p_0),
 \end{aligned}$$

sendo a última fórmula uma FND.

Observação 72: Consideremos de novo a Proposição 70 e a sua demonstração. Uma demonstração alternativa, que permite obter uma FND e uma FNC logicamente equivalentes a uma dada fórmula φ , pode ser feita com recurso à tabela de verdade de φ . Em particular, vejamos como obter uma FND φ^d , logicamente equivalente a φ , a partir da tabela de verdade de φ .

- Se φ é uma contradição ou uma tautologia, basta tomar, respetivamente, uma FND que seja uma contradição e uma FND que seja uma tautologia; por exemplo, tome-se, respetivamente, $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$ e $\varphi^d = p_0 \vee \neg p_0$.
- Doutro modo, sem perda de generalidade, suponhamos, que p_1, p_2, \dots, p_n são as variáveis proposicionais que ocorrem em φ ¹. A tabela de verdade de φ terá 2^n linhas e pode ser representada da seguinte forma:

¹Note-se que uma fórmula que não é tautologia nem é contradição terá que ter pelo menos uma variável proposicional. (Exercício)

| | | | | | | |
|-----------------------|-----------|-----------|----------|-------------|-----------|-----------|
| | p_1 | p_2 | \cdots | p_{n-1} | p_n | φ |
| | 1 | 1 | \cdots | 1 | 1 | b_1 |
| | \vdots | \vdots | | \vdots | \vdots | \vdots |
| linha $i \rightarrow$ | $a_{i,1}$ | $a_{i,2}$ | \cdots | $a_{i,n-1}$ | $a_{i,n}$ | b_i |
| | \vdots | \vdots | | \vdots | \vdots | \vdots |
| | 0 | 0 | \cdots | 0 | 0 | b_{2^n} |

onde, para cada $i \in \{1, \dots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Para cada $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \quad (\text{para todo } j \in \{1, \dots, n\})$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.^2$$

Finalmente, suponhamos que i_1, i_2, \dots, i_k são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Prova-se que φ^d assim definida, de facto, é uma FND e é logicamente equivalente a φ .

Exemplo 73: Consideremos a fórmula $\varphi = ((p_3 \rightarrow p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)) \wedge p_2$. Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \rightarrow p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)$ de φ . A tabela de verdade de φ é:

| | | | | | | | | | |
|-----------------------|-------|-------|-------|---------|------------|-----------------------|----------------------------------|--------|-----------|
| | p_1 | p_2 | p_3 | \perp | $\neg p_1$ | $p_3 \rightarrow p_1$ | $\neg p_1 \leftrightarrow \perp$ | ψ | φ |
| linha 1 \rightarrow | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| linha 2 \rightarrow | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| linha 6 \rightarrow | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

²Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0.

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1^a , a 2^a e a 6^a . Portanto, uma FND logicamente equivalente a φ é: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$.

Definição 74: Seja v uma valoração.

1. Dada uma fórmula do CP φ , dizemos que v *satisfaz* φ (ou que v *é modelo de* φ), e escrevemos $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$. Quando v *não satisfaz* φ (*i.e.*, quando $v(\varphi) = 0$), escrevemos $v \not\models \varphi$.
2. Dado um conjunto de fórmulas do CP Γ , dizemos que v *satisfaz* Γ (ou que v *é modelo de* Γ), e escrevemos $v \models \Gamma$, quando v satisfaz todas as fórmulas de Γ . Quando v *não satisfaz* Γ (*i.e.*, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v \not\models \varphi$ ou, equivalentemente, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$) escrevemos $v \not\models \Gamma$.

Exemplo 75: Seja v_0 a valoração que atribui o valor lógico 0 a todas as variáveis proposicionais.

1. $v_0 \models p_1 \leftrightarrow p_2$ e $v_0 \models \neg p_1 \wedge \neg p_2$;
2. $v_0 \not\models p_1 \vee p_2$ e $v_0 \not\models p_1 \leftrightarrow \neg p_2$;
3. $v_0 \models \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ (por 1);
4. $v_0 \not\models \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2^a fórmula);
5. $v_0 \not\models \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2^a fórmula).

Observação 76: Dado que no conjunto vazio não há qualquer fórmula, tem-se, trivialmente, que: para toda a valoração v , $v \models \emptyset$.

Definição 77: Seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *consistente* ou *satisfazível* quando alguma valoração satisfaz Γ .
2. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *inconsistente* ou *insatisfazível* quando não há valorações que satisfaçam Γ .

Exemplo 78:

- a) Como vimos no exemplo anterior, o conjunto de fórmulas $\Delta_1 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ é satisfeito pela valoração v_0 desse exemplo e, portanto, Δ_1 é consistente.
- b) O conjunto $\Delta_2 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$, considerado no exemplo anterior, não é satisfeito pela valoração v_0 , mas é satisfeito, por exemplo, pela valoração que atribui valor lógico 1 a qualquer variável proposicional. Logo, Δ_2 é também consistente.
- c) O conjunto $\Delta_3 = \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$, considerado no exemplo anterior, é inconsistente.

Dem.: Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz Δ_3 . Então, $v(\neg p_1 \wedge \neg p_2) = 1$, e portanto $v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$, e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Ora, de $v(p_2) = 0$, segue $v(\neg p_2) = 1$ e daqui e de $v(p_1) = 0$, segue $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 0$, o que contradiz $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Logo, não podem existir valorações que satisfaçam Δ_3 e, assim, Δ_3 é inconsistente.

Proposição 79: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas do CP tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então:

- i) se Δ é consistente, então Γ é consistente;
- ii) se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Dem.: Exercício. □

Definição 80: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Dizemos que φ é uma *consequência semântica* de Γ , e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a valoração v , se $v \models \Gamma$, então $v \models \varphi$.
2. Escrevemos $\Gamma \not\models \varphi$ quando φ não é *consequência semântica* de Γ , i.e., quando para alguma valoração v se tem $v \models \Gamma$ e, no entanto, $v \not\models \varphi$.

Observação 81: Da definição anterior, aplicando as definições de satisfação de uma fórmula e satisfação de um conjunto de fórmulas, segue de imediato que:

1. $\Gamma \models \varphi$ se e só se para toda a valoração v , se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.
2. $\Gamma \not\models \varphi$ se e só se para alguma valoração v se tem, para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, bem como $v(\varphi) = 0$.

Exemplo 82:

1. Seja $\Gamma = \{p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$. Então:
 - (a) $\Gamma \models p_1$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, *i.e.*, uma valoração tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, em particular, temos $v(p_1) = 1$.)
 - (b) $\Gamma \models p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos $v(\neg p_1) = 0$ e, daqui e de $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, segue $v(p_2) = 1$.)
 - (c) $\Gamma \models p_1 \wedge p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos necessariamente $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 1$ (tal como vimos nos exemplos anteriores) e, por isso, temos $v(p_1 \wedge p_2) = 1$.)
 - (d) $\Gamma \not\models p_3$. (Existem valorações v tais que $v \models \Gamma$ e $v(p_3) = 0$. Por exemplo, a valoração que atribui valor lógico 1 a p_1 e p_2 e valor lógico 0 às restantes variáveis proposicionais é uma tal valoração.)
 - (e) $\Gamma \not\models \neg p_1 \vee \neg p_2$. (Por exemplo, para a valoração v_1 tal que $v_1(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, temos $v_1 \models \Gamma$ e, no entanto, $v_1(\neg p_1 \vee \neg p_2) = 0$.)
 - (f) $\Gamma \models p_3 \vee \neg p_3$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, temos $v(p_3 \vee \neg p_3) = 1$. De facto, $p_3 \vee \neg p_3$ é uma tautologia e, como tal, o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração (em particular, para aquelas valorações que satisfazem Γ).)
2. Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \models \psi$. De facto, para qualquer valoração v , se $v(\varphi) = 1$ e $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.
3. Já a afirmação “para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi \rightarrow \psi\} \models \psi$ ” é falsa. Por exemplo, $\{p_1 \rightarrow p_2\} \not\models p_2$ (uma valoração v tal que $v(p_1) = v(p_2) = 0$ satisfaz $\{p_1 \rightarrow p_2\}$ e não satisfaz p_2).

Proposição 83: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\models \varphi$ se e só se $\emptyset \models \varphi$.

Dem.: Suponhamos que φ é uma tautologia. Então, para toda a valoração v , $v \models \varphi$ e, assim, a implicação “ $v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi$ ” é verdadeira (o seu consequente é verdadeiro), pelo que, $\emptyset \models \varphi$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$, *i.e.*, suponhamos que para toda a valoração v ,

$$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi.$$

Seja v uma valoração arbitrária. Pretendemos mostrar que $v \models \varphi$. Ora, trivialmente, $v \models \emptyset$ (Observação 76). Assim, da suposição, segue imediatamente $v \models \varphi$. \square

Observação 84: Se Γ é um conjunto de fórmulas inconsistente, então $\Gamma \models \varphi$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. (Porquê?) Como tal, é possível ter-se $\Gamma \models \varphi$ sem que existam valorações que satisfaçam Γ .

Notação 85: Muitas vezes, no contexto da relação de consequência semântica, usaremos a vírgula para denotar a união de conjuntos e escrevemos uma fórmula para denotar o conjunto singular composto por essa fórmula. Assim, por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ e conjuntos de fórmulas Γ, Δ , escrevemos:

- a) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$;
- b) $\Gamma, \varphi \models \psi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$;
- c) $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$.

Proposição 86: Sejam φ e ψ fórmulas e sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

- a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.
- b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.
- c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Delta, \Gamma \models \psi$.
- d) $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.
- e) Se $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

- a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Γ . (Queremos mostrar que v satisfaz φ , *i.e.*, $v(\varphi) = 1$.) Então, da definição de satisfação de conjuntos, sabemos que v atribui valor lógico 1 a todas as fórmulas de Γ . Assim, dado que por hipótese $\varphi \in \Gamma$, temos $v(\varphi) = 1$.
- b) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Δ . Assim, em particular, v satisfaz Γ , pois (por hipótese) $\Gamma \subseteq \Delta$. Onde, pela hipótese de que φ é uma consequência semântica de Γ , segue que $v(\varphi) = 1$.
- c) Exercício.
- d) \Rightarrow) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, por definição de satisfação de conjuntos, v satisfaz Γ e $v(\varphi) = 1$ (*). Assim, como v satisfaz Γ , da hipótese $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ segue que $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Daqui e de (*) segue $v(\psi) = 1$.
- \Leftarrow) Exercício.

- e) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Γ . Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, podemos concluir que $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ e, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$. De $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ e de $v(\varphi) = 1$ segue $v(\psi) = 1$. \square

Proposição 87: Sejam $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ fórmulas, onde $n \in \mathbb{N}$. As seguintes proposições são equivalentes:

- i) $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$;
- ii) $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \models \varphi$;
- iii) $\models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$.

Dem.: A equivalência entre ii) e iii) é um caso particular de d) da proposição anterior. A equivalência entre i) e ii) pode ser demonstrada a partir da equivalência mais geral: para todo o conjunto Γ de fórmulas,

$$\Gamma, \varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma, \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \models \varphi,$$

a qual pode ser demonstrada por indução em n (exercício). A equivalência entre i) e iii) segue, então, por transitividade. \square

Proposição 88: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP. Então: $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Dem.:

- \Rightarrow) Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, *i.e.*, suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, v satisfaz Γ e $v(\neg\varphi) = 1$, *i.e.*, $v(\varphi) = 0$ (*). Contudo, da hipótese, uma vez que v satisfaz Γ , podemos concluir que $v(\varphi) = 1$, o que é contraditório com (*). Logo, por redução ao absurdo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.
- \Leftarrow) Suponhamos que v satisfaz Γ . Então, $v(\neg\varphi) = 0$, de outra forma teríamos $v(\neg\varphi) = 1$, donde, como v satisfaz Γ , $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. Mostrámos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ também satisfaz φ e, portanto, $\Gamma \models \varphi$.

\square

2.3 Sistema Formal de Dedução Natural

Observação 89: O sistema formal de demonstrações que estudaremos nesta secção será notado por DNP e designado por *Dedução Natural Proposicional*.

Observação 90: O sistema DNP constitui uma certa formalização da noção de *demonstração* para as fórmulas do Cálculo Proposicional, num estilo conhecido como *dedução natural*. As demonstrações permitirão uma abordagem alternativa à relação de consequência semântica (definida à custa do conceito de valoração) e, em particular, permitirão identificar as tautologias com as fórmulas para as quais podem ser construídas demonstrações.

Exemplo 91: Demonstrações em DNP serão construídas usando um certo conjunto de *regras de inferência*, que codificam raciocínios elementares utilizados habitualmente na elaboração de demonstrações matemáticas.

Um raciocínio elementar que usamos frequentemente na construção de demonstrações é o seguinte: de φ e $\varphi \rightarrow \psi$ podemos concluir ψ . Representaremos este raciocínio do seguinte modo:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Esta regra é habitualmente conhecida por *modus ponens*, embora no formalismo DNP adotemos um nome diferente para esta regra, como veremos adiante.

Outro raciocínio elementar é o seguinte: se assumindo φ por hipótese podemos concluir ψ , então podemos concluir $\varphi \rightarrow \psi$.

Utilizemos a notação $\begin{smallmatrix} \vdots \\ \varphi \end{smallmatrix} \psi$ para simbolizar a possibilidade de concluir ψ a partir de φ . Então, este raciocínio poderá ser representado do seguinte modo:

$$\frac{\begin{smallmatrix} \cancel{\vdots} \\ \psi \end{smallmatrix}}{\varphi \rightarrow \psi}$$

Neste raciocínio, φ é uma *hipótese temporária* usada para concluir ψ . A notação $\cancel{\vdots}$ reflete o facto de que a conclusão $\varphi \rightarrow \psi$ já *não depende* da hipótese temporária φ .

Notação 92: O conceito de demonstração em DNP será formalizado adiante, através de uma definição indutiva. As demonstrações corresponderão a certas *árvores finitas de fórmulas*, onde uma fórmula φ que ocorra como *folha* poderá estar *cancelada*, o que será notado por $\cancel{\varphi}$ ou por $[\varphi]$. Na apresentação das regras de inferência de DNP, usaremos a notação

$$\begin{array}{c} \cancel{\phi} \\ \vdots \\ \psi \end{array}$$

para representar uma árvore de fórmulas cuja *raiz* é ψ e cujas eventuais ocorrências da fórmula ϕ como folha estão necessariamente canceladas.

Definição 93: As *regras de inferência* do sistema formal DNP são apresentadas de seguida. Cada regra origina uma regra na definição indutiva do *conjunto das derivações* (Definição 95). As regras de inferência recebem derivações (uma ou mais) e produzem uma nova derivação.

Regras de Introdução

Regras de Eliminação

$$\frac{\begin{array}{c} \cancel{\phi} \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow I$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \phi \rightarrow \psi \end{array}}{\psi} \rightarrow E$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \wedge \psi} \wedge I$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \wedge \psi \end{array}}{\phi} \wedge_1 E \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \wedge \psi \end{array}}{\psi} \wedge_2 E$$

$$\frac{\begin{array}{c} \cancel{\phi} \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \phi} \neg I$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \neg \phi \end{array}}{\perp} \neg E$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \end{array}}{\phi \vee \psi} \vee_1 I \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \vee \psi} \vee_2 I$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \vee \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\phi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\psi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array}}{\sigma} \vee E$$

$$\frac{\begin{array}{c} \cancel{\phi} \\ \vdots \\ \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\psi} \\ \vdots \\ \phi \end{array}}{\phi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \phi \leftrightarrow \psi \end{array}}{\psi} \leftrightarrow_1 E \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \phi \leftrightarrow \psi \end{array}}{\phi} \leftrightarrow_2 E$$

$$\frac{\begin{array}{c} \cancel{\phi} \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\phi} (RAA)$$

$$\frac{\vdots}{\phi} (\perp)$$

Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do *traço de inferência* serão chamadas as *premissas* da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a *conclusão* da regra de inferência.

Uma *aplicação* ou *instância* de uma regra de inferência é uma *substituição das fórmulas da regra (meta-variáveis) por fórmulas do CP*. Chamaremos *inferência* a uma aplicação de uma regra de inferência.

Exemplo 94: Vejamos dois exemplos de inferências $\wedge_1 E$:

$$\frac{p_1 \wedge p_2}{p_1} \wedge_1 E \quad \frac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2} \wedge_1 E \quad (2.1)$$

Estas duas inferências podem ser *combinadas* do seguinte modo:

$$\frac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)}{\frac{p_1 \wedge p_2}{p_1} \wedge_1 E} \wedge_1 E \quad (2.2)$$

Combinando esta construção com uma inferência $\rightarrow I$ podemos obter:

$$\frac{\frac{[(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)]}{\frac{p_1 \wedge p_2}{p_1} \wedge_1 E} \wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)) \rightarrow p_1} \rightarrow I \quad (2.3)$$

As duas inferências em (2.1), assim como as combinações de inferências em (2.2) e (2.3), são exemplos de *derivações* no sistema formal DNP.

Definição 95: O conjunto \mathcal{D}^{DNP} das derivações de DNP é o menor conjunto X , de árvores finitas de fórmulas, com folhas possivelmente canceladas, tal que:

- a) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a árvore cujo único nodo é φ pertence a X ;
- b) X é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DNP; por exemplo, X é fechado para as regras $\rightarrow E$ e $\rightarrow I$ quando as seguintes condições são satisfeitas (respetivamente):

$$\text{i) } \frac{D_1}{\varphi} \in X \text{ e } \frac{D_2}{\varphi \rightarrow \psi} \in X \implies \frac{\frac{D_1}{\varphi} \quad \frac{D_2}{\varphi \rightarrow \psi}}{\psi} \rightarrow E \in X;$$

$$\text{ii) } \frac{D}{\psi} \in X \implies \frac{\cancel{D}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I \in X$$

(onde: $\frac{D}{\psi}$ denota uma árvore de fórmulas cuja raiz é ψ ; e $\frac{\cancel{D}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I$ denota

a árvore de fórmulas obtida de D adicionando um novo nodo $\varphi \rightarrow \psi$, que passa a ser a nova raiz e tem por único *descendente* a raiz de D , e cancelando todas as eventuais ocorrências de φ como folha).

As derivações de DNP são também chamadas *deduções*. No nosso estudo, privilegiaremos a terminologia derivação. A terminologia *demonstração* será reservada para uma classe especial de derivações (ver Definição 99).

Observação 96: O conjunto \mathcal{D}^{DNP} das derivações de DNP admite princípios de indução estrutural e de recursão estrutural. Existe também um conceito natural de *subderivação*. Por exemplo, a derivação (2.3) tem as seguintes quatro subderivações:

$$\begin{array}{c} (p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3), \quad \frac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2} \wedge_1 E, \\ \\ \frac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)}{\frac{p_1 \wedge p_2}{p_1} \wedge_1 E} \wedge_1 E, \quad \frac{\frac{[(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)]}{\frac{p_1 \wedge p_2}{p_1} \wedge_1 E} \wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)) \rightarrow p_1} \rightarrow I. \end{array}$$

De facto, estas quatro derivações, lidas como uma sequência, constituem uma sequência de formação da derivação (2.3).

Exemplo 97: Para quaisquer fórmulas do CP φ , ψ e σ , as construções abaixo são exemplos de derivações de DNP.

$$1) \quad \frac{\frac{\varphi \cancel{\psi}^{(1)}}{\varphi} \wedge_1 E \quad \frac{\frac{\varphi \cancel{\psi}^{(1)}}{\psi} \wedge_2 E \quad \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)}{\varphi \rightarrow \sigma} \rightarrow E}{\frac{\sigma}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \sigma} \rightarrow I^{(1)}} \rightarrow E$$

$$2) \quad \frac{\frac{\cancel{\varphi}^{(2)} \quad \neg \cancel{\varphi}^{(1)}}{\frac{\perp}{\varphi} RAA^{(2)}} \neg E}{\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi} \rightarrow I^{(1)}$$

$$3) \quad \frac{\frac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\psi \rightarrow \varphi} \rightarrow I^{(2)}}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)} \rightarrow I^{(1)}$$

Os números naturais que aparecem a anotar inferências e fórmulas canceladas estabelecem uma correspondência, unívoca, entre as fórmulas canceladas e as regras que permitem efetuar esses cancelamentos. Por exemplo, em **3)**, a inferência $\rightarrow I$ anotada com (1) é utilizada para cancelar a única ocorrência como folha de φ , enquanto que a inferência $\rightarrow I$ anotada com (2) não é utilizada para efetuar qualquer cancelamento.

Definição 98: Numa derivação D : a raiz é chamada a *conclusão* de D ; as folhas são chamadas as *hipóteses* de D ; as folhas canceladas são chamadas as *hipóteses canceladas* de D ; as folhas não canceladas são chamadas as *hipóteses não canceladas* de D .

Definição 99: Seja D uma derivação de DNP e φ uma fórmula do Cálculo Proposicional.

Diremos que D é uma *derivação* de φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ quando φ é a conclusão de D e o conjunto das hipóteses não canceladas de D é um subconjunto de Γ .

Diremos que D é uma *demonstração* de φ quando D é uma derivação de φ a partir do conjunto vazio.

Exemplo 100: Sejam φ , ψ e σ fórmulas.

1. Seja D_1 a seguinte derivação de DNP.

$$\frac{\frac{\frac{\cancel{\varphi}^{(2)}}{\psi} \varphi \rightarrow \psi \rightarrow E}{\psi} \quad \psi \not\vdash \sigma^{(1)}}{\frac{\sigma}{\varphi \rightarrow \sigma} \rightarrow I^{(2)}} \rightarrow E$$

$$\frac{}{(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow I^{(1)}}$$

Então:

- (a) o conjunto de hipóteses de D_1 é $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \sigma\}$;
- (b) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_1 é $\{\varphi \rightarrow \psi\}$;
- (c) a conclusão de D_1 é $(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)$;
- (d) D_1 é uma derivação de $(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)$ a partir de $\{\varphi \rightarrow \psi\}$.

2. Seja D_2 a seguinte derivação de DNP.

$$\frac{\frac{\varphi \not\vdash \neg \varphi^{(1)}}{\varphi} \wedge_1 E \quad \frac{\varphi \not\vdash \neg \varphi^{(1)}}{\neg \varphi} \wedge_2 E}{\frac{\perp}{\neg(\varphi \wedge \neg \varphi)} \neg E} \neg I^{(1)}$$

Então:

- (a) o conjunto de hipóteses de D_2 é $\{\varphi \wedge \neg \varphi\}$;
- (b) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_2 é vazio;
- (c) a conclusão de D_2 é $\neg(\varphi \wedge \neg \varphi)$;
- (d) D_2 é uma demonstração de $\neg(\varphi \wedge \neg \varphi)$.

Definição 101: Diremos que uma fórmula φ é *consequência sintática* de um conjunto de fórmulas Γ ou que φ é *derivável a partir de* Γ (notação: $\Gamma \vdash \varphi$) quando existem derivações em DNP de φ a partir de Γ . Escreveremos $\Gamma \nvdash \varphi$ para denotar que φ não é consequência sintática de Γ .

Definição 102: Uma fórmula φ diz-se um *teorema* de DNP (notação: $\vdash \varphi$) quando existe uma demonstração de φ . Escreveremos $\nvdash \varphi$ para denotar que φ não é teorema de DNP.

Proposição 103: Para toda a fórmula φ , φ é teorema de DNP se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Dem.: Imediata a partir das definições. \square

Exemplo 104: Atendendo ao exemplo anterior:

1. $\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)$ (i.e., $(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)$ é consequência sintática de $\{\varphi \rightarrow \psi\}$).
2. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (i.e., $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ é um teorema de DNP).

Definição 105: Um conjunto de fórmulas Γ diz-se *sintaticamente inconsistente* quando $\Gamma \vdash \perp$ e diz-se *sintaticamente consistente* no caso contrário (i.e. quando $\Gamma \nvdash \perp$, ou seja, quando não existem derivações de \perp a partir de Γ).

Exemplo 106: O conjunto $\Gamma = \{p_0, p_0 \leftrightarrow p_1, p_0 \leftrightarrow \neg p_1\}$ é sintaticamente inconsistente. Uma derivação de \perp a partir de Γ é:

$$\frac{\frac{p_0 \quad p_0 \leftrightarrow p_1}{p_1} \leftrightarrow_1 E \quad \frac{p_0 \quad p_0 \leftrightarrow \neg p_1}{\neg p_1} \leftrightarrow_1 E}{\perp} \neg E$$

Proposição 107: Seja Γ um conjunto de fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

- a) Γ é sintaticamente inconsistente;
- b) para alguma fórmula φ , $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$;
- c) para toda a fórmula φ , $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Por exemplo, é suficiente provar as implicações **a)** \Rightarrow **b)**, **b)** \Rightarrow **c)** e **c)** \Rightarrow **a)**.

a) \Rightarrow **b)**: admitindo que Γ é sintaticamente inconsistente, existe uma derivação D de \perp a partir de Γ . Assim, fixando uma (qualquer) fórmula φ , tem-se que

$$D_1 = \frac{D}{\varphi} (\perp) \qquad D_2 = \frac{D}{\neg\varphi} (\perp)$$

(as derivações obtidas de D acrescentando, em ambos os casos, uma inferência final (\perp), com conclusão φ e $\neg\varphi$, respetivamente) são, respetivamente, derivações de (i) φ a partir de Γ (a conclusão de D_1 é φ e as hipóteses não canceladas de D_1 são as mesmas que em D) e de (ii) $\neg\varphi$ a partir de Γ (a conclusão de D_2 é $\neg\varphi$ e as hipóteses não canceladas de D_2 são as mesmas que em D). Por conseguinte, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Exercício: prove as outras duas implicações. \square

Notação 108: Na representação de consequências sintáticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ , a notação $\Gamma, \Delta, \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ abrevia $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Proposição 109: Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas. Então:

- a) se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$;
- b) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$;
- c) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Delta, \Gamma \vdash \psi$;
- d) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$;
- e) se $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Delta \vdash \varphi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

Dem.:

- a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore cuja única fórmula é φ é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ , pois $\varphi \in \Gamma$. Assim, encontramos uma derivação de φ a partir de Γ , pelo que $\Gamma \vdash \varphi$.
- b), c) e e): Exercício.
- d) Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de $\varphi \rightarrow \psi$ a partir de Γ . Então,

$$D' = \frac{\varphi \quad \frac{D}{\varphi \rightarrow \psi}}{\psi} \rightarrow E$$

(D' é a derivação cuja última inferência é $\rightarrow E$ e as derivações das premissas são φ e D , respetivamente) é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, pois: i) ψ é a conclusão de D' ; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas de D' é constituído por φ e pelas hipóteses não canceladas de D , que formam um subconjunto de Γ , sendo portanto Δ um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, a derivação

$$D' = \frac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi}^{(1)} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I^{(1)},$$

(D' é a derivação obtida de D acrescentando uma inferência final $\rightarrow I$, que cancela todas as ocorrências de φ como hipótese) é uma derivação de $\varphi \rightarrow \psi$ a partir de Γ , pois: i) $\varphi \rightarrow \psi$ é a conclusão de D' ; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas de D' é constituído por todas as hipóteses não canceladas de D (um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$), exceto φ e, portanto, Δ é um subconjunto de Γ .

□

Teorema 110 (*Correção*): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.

Dem.: Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de φ a partir de Γ . Aplicando o lema que se segue, conclui-se de imediato o resultado pretendido.

Lema: Para todo $D \in \mathcal{D}^{DNP}$, se D é uma derivação de φ a partir de Γ , então $\Gamma \models \varphi$.

Dem. do Lema: Por indução estrutural em derivações.

- a) Suponhamos que D é uma derivação, de φ a partir de Γ , com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Onde, pela Proposição 86(a), $\Gamma \models \varphi$.
- b) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\frac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D_1 \\ \sigma \end{array}}{\psi \rightarrow \sigma} \rightarrow I.$$

Então: (i) $\varphi = \psi \rightarrow \sigma$ e (ii) D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Assim, aplicando a hipótese de indução relativa à subderivação D_1 , $\Gamma, \psi \models \sigma$. Onde, pela Proposição 86(d), $\Gamma \models \psi \rightarrow \sigma$.

c) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\frac{\frac{D_1}{\sigma} \quad \frac{D_2}{\sigma \rightarrow \psi}}{\psi} \rightarrow E.$$

Então: (i) $\varphi = \psi$; (ii) D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ ; e (iii) D_2 é uma derivação de $\sigma \rightarrow \psi$ a partir de Γ . Assim, aplicando as hipóteses de indução relativas às subderivações D_1 e D_2 , segue $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \rightarrow \psi$, respetivamente. Daqui, pela Proposição 86(e), conclui-se $\Gamma \models \psi$.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D , são deixados como exercício.

□

Observação 111: O Teorema da Correção constitui uma ferramenta para provar a não derivabilidade de fórmulas a partir de conjuntos de fórmulas. De facto, do Teorema da Correção segue que

$$\Gamma \not\models \varphi \implies \Gamma \nvdash \varphi,$$

o que significa que, para mostrar que não existem derivações em DNP de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ , basta mostrar que φ não é consequência semântica de Γ .

Exemplo 112: Seja $\Gamma = \{p_1 \vee p_2, p_1 \rightarrow p_0\}$.

1. Em DNP não existem derivações de $p_0 \vee p_1$ a partir de Γ . Se existisse uma tal derivação, pelo Teorema da Correção, teríamos $\Gamma \models p_0 \vee p_1$, mas esta consequência semântica não é válida (tome-se, por exemplo, a valoração que atribui 1 a p_2 e 0 às restantes variáveis proposicionais).
2. De forma análoga, pode mostrar-se que não existem derivações de \perp a partir de Γ (exercício) e, então, concluir que Γ é sintaticamente consistente.

Definição 113: Um conjunto de fórmulas Γ diz-se *maximalmente consistente* quando:

- i) Γ é sintaticamente consistente; e
- ii) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$.

Proposição 114: Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Se Γ é maximalmente consistente e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.

Dem.: Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\varphi \notin \Gamma$. Logo, por Γ ser maximalmente consistente, $\neg\varphi \in \Gamma$. Por hipótese, existe uma derivação D de φ a partir de Γ . Assim, podemos construir a seguinte derivação de \perp a partir de Γ

$$\frac{\frac{D}{\varphi} \quad \neg\varphi}{\perp} \neg E.$$

e concluir que Γ é sintaticamente inconsistente, uma contradição com a hipótese de Γ ser maximalmente consistente. Logo, por redução ao absurdo, $\varphi \in \Gamma$. \square

Proposição 115: Se Γ é um conjunto de fórmulas sintaticamente consistente, então existe um conjunto de fórmulas Γ^* tal que: **i)** $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ e **ii)** Γ^* é maximalmente consistente.

Dem.: Prova-se que \mathcal{F}^{CP} é um conjunto numerável. Seja $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ uma enumeração de \mathcal{F}^{CP} . Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, Γ_n como:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Gamma; \\ \Gamma_{n+1} &= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ é sintaticamente consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ é sintaticamente inconsistente} \end{cases} \end{aligned}$$

Demonstra-se que $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma_n$ satisfaz **i)** e **ii)**, com o auxílio do seguinte lema:

Lema: Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, Γ_n é sintaticamente consistente.

Este lema demonstra-se por indução em \mathbb{N}_0 . \square

Proposição 116: Se Γ é um conjunto de fórmulas sintaticamente consistente, então Γ é semanticamente consistente.

Dem.: Suponhamos que Γ é um conjunto sintaticamente consistente. Então, pela proposição anterior existe um conjunto Γ^* , maximalmente consistente, que contém Γ . Seja v a única valoração tal que,

$$\text{para todo } p \in \mathcal{V}^{CP}, v(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \Gamma^* \\ 0 & \text{se } p \notin \Gamma^* \end{cases}.$$

Demonstra-se que:

Lema: $v(\varphi) = 1$ sse $\varphi \in \Gamma^*$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Deste lema, uma vez que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ e que $v(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \Gamma^*$, concluimos que v satisfaz Γ e, assim, Γ é semanticamente consistente.

O lema anterior é demonstrado por indução estrutural em fórmulas do Cálculo Proposicional. A sua demonstração evidencia a necessidade das várias regras de inferência do sistema DNP.

□

Teorema 117 (Equivalência entre consistência sintática e semântica): Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então, Γ é sintaticamente consistente sse Γ é semanticamente consistente.

Dem.:

\Rightarrow) Proposição 116.

\Leftarrow) Tendo em vista um absurdo, suponhamos que Γ é sintaticamente inconsistente, *i.e.*, $\Gamma \vdash \perp$. Então, pelo Teorema da Correção,

$$\Gamma \models \perp . (*)$$

Como (por hipótese) Γ é semanticamente consistente, existe uma valoração v que satisfaz Γ . Daqui, por (*), segue $v(\perp) = 1$, o que contradiz a definição de valoração. Logo, por redução ao absurdo, Γ é sintaticamente consistente.

□

Observação 118: No resto desta secção, uma vez que consistência semântica de um conjunto de fórmulas é equivalente à sua consistência sintática, simplificaremos a terminologia e referir-nos-emos apenas a *consistência de conjuntos de fórmulas*.

Teorema 119 (Completeness): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

se $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Provaremos o contrarrecíproco. Suponhamos $\Gamma \not\vdash \varphi$. Então, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é sintaticamente consistente, de outra forma, existiria uma derivação D de \perp a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ e, assim,

$$\begin{array}{c} \neg\varphi^{(1)} \\ D \\ \frac{}{\perp} \\ \varphi \text{ RAA}^{(1)} \end{array}$$

(onde todas as ocorrências de $\neg\varphi$ como hipótese de D ficam canceladas com a aplicação de RAA) seria uma derivação de φ a partir de Γ , contrariando a suposição $\Gamma \not\vdash \varphi$. Sendo $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ sintaticamente consistente, segue da Proposição 116 que existe uma valoração v tal que $v \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Assim, $v \models \Gamma$ e $v(\varphi) = 0$, donde $\Gamma \not\models \varphi$. □

Teorema 120 (Adequação): Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então, $\Gamma \vdash \varphi$ sse $\Gamma \models \varphi$.

Dem.: Consequência imediata dos Teoremas da Correção e da Completude. \square

Corolário 121: Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Então, φ é um teorema de DNP sse φ é uma tautologia.

Dem.: Exercício. \square

Teorema 122 (Compacidade): Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então, Γ é consistente sse todo o subconjunto finito de Γ é consistente.

Dem.:

\Rightarrow) Imediata (recorde-se a Proposição 79).

\Leftarrow) Tendo em vista um absurdo, suponhamos que Γ é sintaticamente inconsistente. Então, existe uma derivação D de \perp a partir de Γ . Seja Γ' o conjunto das hipóteses não canceladas de D , que, por definição de derivação, é finito. Assim, D é também uma derivação de \perp a partir de Γ' , ou seja, Γ' é sintaticamente inconsistente. Mas, isto contradiz a hipótese inicial, uma vez que Γ' seria um subconjunto de Γ finito e inconsistente. Logo, por redução ao absurdo, Γ é sintaticamente consistente.

\square

Capítulo 3

Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica

Observação 123: O *Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica* (adiante abreviado por *Cálculo de Predicados*) é também conhecido na literatura por *Lógica de Primeira Ordem Clássica* ou, simplesmente, por *Lógica de Primeira Ordem*.

3.1 Sintaxe

Observação 124: Ao contrário do Cálculo Proposicional, no Cálculo de Predicados existem duas classes sintáticas: a classe dos *termos* e a classe das *fórmulas*. Os termos serão usados para denotar *objetos* do domínio de discurso em questão (por exemplo, *números naturais*, *conjuntos*, etc.) e as fórmulas corresponderão a *afirmações* relativas aos objetos (por exemplo, “dois é um número par” ou “o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto”).

O Cálculo de Predicados será *parametrizado* por um *tipo de linguagem*, que fixará quais os símbolos que poderão ser usados para construir termos (que designaremos por *símbolos de função*) ou para denotar *relações elementares* entre os objetos (que designaremos por *símbolos de relação*). Este conjunto de símbolos dependerá, naturalmente, do problema em estudo.

Por exemplo, se estivermos a considerar a *Aritmética* (a teoria dos números naturais), entre outros, será útil ter símbolos que denotem o número 0, a operação de adição e a relação de igualdade. Já no caso de estarmos a considerar *Teoria de Conjuntos*, será útil, por exemplo, ter símbolos para denotar o conjunto vazio, as operações de reunião de conjuntos e de conjunto potência, e as relações de pertença, inclusão e igualdade de conjuntos.

Definição 125: Um *tipo de linguagem* é um terno $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$ tal que:

- a) \mathcal{F} e \mathcal{R} são conjuntos disjuntos;
- b) \mathcal{N} é uma função de $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ em \mathbb{N}_0 .

Os elementos de \mathcal{F} são chamados *símbolos de função* e os elementos de \mathcal{R} são chamados *símbolos de relação* ou *símbolos de predicado*.

A função \mathcal{N} é chamada *função aridade*, chamando-se ao número natural $n = \mathcal{N}(s)$ (para cada $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$) a *aridade* de s e dizendo-se que s é um símbolo *n-ário*. Intuitivamente, a aridade de um símbolo corresponde ao seu *número de argumentos*.

Os símbolos de função de aridade 0 são chamados *constantes*. Neste estudo, assumiremos que os símbolos de relação nunca têm aridade 0.

Os símbolos de aridade 1 dir-se-ão também símbolos *unários*, os de aridade 2 *binários*, etc.

Exemplo 126: O terno $L_{Arit} = (\{0, s, +, \times\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(\times) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$, é um tipo de linguagem. Chamaremos a L_{Arit} o *tipo de linguagem para a Aritmética*.

Exemplo 127: O terno $L_{grupo} = (\{\cdot, 1, ^{-1}\}, \{=\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(\cdot) = 2$, $\mathcal{N}(1) = 0$, $\mathcal{N}({}^{-1}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$, é uma linguagem. Chamaremos a L_{grupo} o *tipo de linguagem para grupos*.

Exemplo 128: O terno $L_{cpo} = (\{\}, \{=, \leq\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(\leq) = 2$, é uma linguagem. Chamaremos a L_{cpo} o *tipo linguagem para conjuntos parcialmente ordenados*.

Notação 129: Habitualmente, usaremos a letra L (possivelmente indexada) para denotar tipos de linguagens.

Caso nada seja dito em contrário, durante este capítulo L denotará um tipo de linguagem $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$, sendo o respetivo conjunto de constantes denotado por \mathcal{C} .

Definição 130: O *alfabeto* \mathcal{A}_L induzido pelo tipo de linguagem L é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

- a) $\perp, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ e \leftrightarrow (os *conetivos proposicionais*);
- b) \exists e \forall , chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal*, respetivamente;
- c) $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, chamados *variáveis (de primeira ordem)*, formando um conjunto numerável, denotado por \mathcal{V} ;

- d) “(”, “)” e “,”, chamados *símbolos auxiliares*;
- e) os símbolos de função e os símbolos de relação de L (que se assume serem distintos de todos os símbolos anteriores).

Exemplo 131: A sequência de 8 símbolos $\exists x_0 \neg(x_0 = 0)$ é uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, mas a sequência de 8 símbolos $\exists x_0 \neg(x_0 = 1)$ não é uma palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ (1 não é uma das letras do alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$).

Definição 132: O conjunto \mathcal{T}_L é o menor conjunto de palavras sobre \mathcal{A}_L que satisfaz as seguintes condições:

- a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{T}_L$;
- b) para toda a constante c de L , $c \in \mathcal{T}_L$;
- c) para todo o símbolo de função f de L , de aridade $n \geq 1$,

$$t_1 \in \mathcal{T}_L \text{ e } \dots \text{ e } t_n \in \mathcal{T}_L \implies f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}_L, \text{ para todo } t_1, \dots, t_n \in (\mathcal{A}_L)^*.$$

Aos elementos de \mathcal{T}_L chamaremos *termos de tipo L* ou, abreviadamente, *L -termos*.

Exemplo 133:

1. As seguintes seis palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são termos de tipo L_{Arit} :

$$x_1, x_2, 0, s(0), \times(x_1, x_2), +(\times(x_1, x_2), s(0)).$$

Lida como uma sequência de palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, esta sequência constitui uma sequência de formação de $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

2. As palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}} = (0, x_1)$ e $< (0, x_1)$ (ambas de comprimento 6) não são L_{Arit} -termos. Apesar de $=$ e $<$ serem símbolos de aridade 2 e de 0 e x_1 serem dois L_{Arit} -termos, $=$ e $<$ são símbolos de relação e não símbolos de função, como exigido na condição **c)** da definição anterior. Estas duas palavras são exemplos do que adiante designaremos por *fórmulas atômicas*.
3. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{grupo}}$ são termos de tipo L_{grupo} (e lidas em sequência constituem uma sequência de formação da última palavra):

$$x_1, x_2, 1, {}^{-1}(x_1), \cdot(x_2, 1), \cdot(\cdot(x_2, 1), {}^{-1}(x_1)).$$

4. O conjunto dos termos de tipo L_{cpo} é o conjunto das variáveis \mathcal{V} .

Exemplo 134: Seja L_0 o tipo de linguagem $(\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$. As seguintes quatro palavras sobre \mathcal{A}_{L_0} são L_0 -termos (e constituem uma sequência de formação do último termo):

$$c, x_1, f_2(c, x_1), f_1(f_2(c, x_1)).$$

Notação 135: Quando f é um símbolo de função binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação $t_1 f t_2$, possivelmente entre parênteses, para representar o L -termo $f(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $(x_1 \times x_2) + s(0)$ representará o L_{Arit} -termo $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

No contexto do tipo de linguagem L_{grupo} , termos da forma $^{-1}(t)$ serão, normalmente, denotados por t^{-1} ou $(t)^{-1}$. Por exemplo, $x_1 \cdot x_1^{-1}$ denotará o L_{grupo} -termo $\cdot(x_1, ^{-1}(x_1))$.

Teorema 136 (Indução Estrutural em L -Termos): Seja $P(t)$ uma condição um L -termo t . Se:

- a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$;
- b) para todo $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$;
- c) para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$P(t_1) \text{ e } \dots \text{ e } P(t_n) \implies P(f(t_1, \dots, t_n));$$

então para todo $t \in \mathcal{T}_L$, $P(t)$.

Dem.: Exercício. □

Observação 137: A definição indutiva do conjunto dos L -termos é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto dos L -termos. Este princípio é usado nas três definições que se seguem.

Definição 138: O *conjunto das variáveis* que ocorrem num L -termo t é notado por $VAR(t)$ e é definido, por recursão estrutural em L -termos, do seguinte modo:

- a) $VAR(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;
- b) $VAR(c) = \emptyset$, para todo $c \in \mathcal{C}$;
- c) $VAR(f(t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^n VAR(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 139: O conjunto das variáveis que ocorrem no L_{Arit} -termo $x_2 + s(x_1)$ é:

$$VAR(x_2 + s(x_1)) = VAR(x_2) \cup VAR(s(x_1)) = \{x_2\} \cup VAR(x_1) = \{x_2, x_1\}.$$

Definição 140: O conjunto dos subtermos de um L -termo t é notado por $subt(t)$ e é definido, por recursão estrutural em L -termos, do seguinte modo:

- a) $subt(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;
- b) $subt(c) = \{c\}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;
- c) $subt(f(t_1, \dots, t_n)) = \{f(t_1, \dots, t_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^n subt(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 141: O conjunto dos subtermos do L_{Arit} -termo $(x_2 + s(x_1)) \times 0$ é:

$$\{x_2, x_1, s(x_1), x_2 + s(x_1), 0, (x_2 + s(x_1)) \times 0\}$$

Definição 142: A operação de *substituição* de uma variável x por um L -termo t num L -termo t' é notada por $t'[t/x]$ e é definida por recursão estrutural (em t') do seguinte modo:

- a) $y[t/x] = \begin{cases} t, & \text{se } y = x \\ y, & \text{se } y \neq x \end{cases}$, para todo $y \in \mathcal{V}$;
- b) $c[t/x] = c$, para todo $c \in \mathcal{C}$;
- c) $f(t_1, \dots, t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$, para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 143:

1. O L_{Arit} -termo que resulta da substituição da variável x_1 pelo L_{Arit} -termo $s(0)$ no L_{Arit} -termo $x_2 + s(x_1)$ é:

$$\begin{aligned} & (x_2 + s(x_1))[s(0)/x_1] \\ &= x_2[s(0)/x_1] + s(x_1)[s(0)/x_1] \\ &= x_2 + s(x_1[s(0)/x_1]) \\ &= x_2 + s(s(0)) \end{aligned}$$
2. $(x_2 + s(x_1))[s(0)/x_0] = x_2 + s(x_1)$ (observe que $x_0 \notin VAR(x_2 + s(x_1))$).

Proposição 144: Sejam x uma variável e t_1 e t_2 L -termos. Se $x \notin VAR(t_1)$, então $t_1[t_2/x] = t_1$.

Dem.: Por indução estrutural em t_1 . (Exercício.) □

Definição 145: Uma palavra sobre o alfabeto induzido por L da forma $R(t_1, \dots, t_n)$, onde R é um símbolo de relação n -ário e t_1, \dots, t_n são L -termos, é chamada uma *fórmula atômica de tipo L* ou, abreviadamente, uma *L -fórmula atômica*. O conjunto das L -fórmulas atômicas é notado por At_L .

Exemplo 146:

1. As três palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ que se seguem são fórmulas atômicas de tipo L_{Arit} :

$$= (0, x_1), < (0, x_1), = (+ (0, x_1), \times (s(0), x_1)).$$

2. Já a palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $\times (0, x_1)$ não é uma L_{Arit} -fórmula atômica (note-se que \times é um símbolo de função e não um símbolo de relação; de facto, esta palavra é um L_{Arit} -termo).

3. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{grupo}}$ são fórmulas atômicas de tipo L_{grupo} :

$$= (x_0, x_1) \text{ e } = (x_0 \cdot x_0^{-1}, 1).$$

4. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{cpo}}$ são fórmulas atômicas de tipo L_{cpo} :

$$= (x_0, x_1) \text{ e } \leq (x_0, x_0).$$

Notação 147: Quando R é um símbolo de relação binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação $t_1 R t_2$, possivelmente entre parênteses, para representar o L -fórmula atômica $R(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $x_0 < s(0)$ representará a L_{Arit} -fórmula atômica $< (x_0, s(0))$.

Definição 148: O conjunto \mathcal{F}_L é o menor conjunto de palavras sobre \mathcal{A}_L que satisfaz as seguintes condições:

- a) $\varphi \in \mathcal{F}_L$, para toda a L -fórmula atômica φ ;
- b) $\perp \in \mathcal{F}_L$;
- c) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg \varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$;
- d) $\varphi \in \mathcal{F}_L$ e $\psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \square \psi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}_L)^*$;
- e) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (Qx \varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$.

Aos elementos de \mathcal{F}_L chamaremos *fórmulas de tipo L* ou, abreviadamente, *L -fórmulas*.

Exemplo 149:

1. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são fórmulas de tipo L_{Arit} (fazendo uso das simplificações anteriormente mencionadas na representação de fórmulas atômicas):

$$\begin{aligned} &(x_0 < s(0)), \\ &(\neg(x_0 < s(0))), \\ &x_0 = x_1, \\ &((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow x_0 = x_1), \\ &(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow x_0 = x_1)), \\ &(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow x_0 = x_1))). \end{aligned}$$

Lida como uma sequência de palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, esta sequência constitui uma sequência de formação de $(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow x_0 = x_1)))$.

2. $(\forall x_0(x_0 \leq x_0))$ é uma fórmula de tipo L_{cpo} .
3. $(\exists x_0(\forall x_1(x_0 \cdot x_1 = 1)))$ é uma fórmula de tipo L_{grupo} .

Exemplo 150: Recordemos o tipo de linguagem L_0 do Exemplo 134: $L_0 = (\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$.

As seguintes quatro palavras sobre \mathcal{A}_{L_0} são L_0 -fórmulas (e constituem uma sequência de formação da última fórmula):

$$\begin{aligned} &R_1(x_1), \\ &R_2(x_1, f_2(c, x_1)), \\ &(R_1(x_1) \rightarrow R_2(x_1, f_2(c, x_1))), \\ &(\forall x_1(R_1(x_1) \rightarrow R_2(x_1, f_2(c, x_1)))). \end{aligned}$$

Notação 151: Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações ou de quantificadores são geralmente omitidos. Por exemplo, a L_{Arit} -fórmula

$$(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow x_0 = x_1)))$$

pode ser abreviada por

$$\forall x_0 \exists x_1 (\neg(x_0 < s(0)) \rightarrow x_0 = x_1).$$

Teorema 152 (Indução Estrutural em L -Fórmulas): Seja $P(\varphi)$ uma condição sobre uma L -fórmula φ . Se:

- a) $P(\psi)$, para toda a L -fórmula atômica ψ ;
- b) $P(\perp)$;
- c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;
- d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- e) $P(\psi) \implies P(Qx\psi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Dem.: Exercício □

Observação 153: A definição indutiva do conjunto das L -fórmulas é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto das L -fórmulas. Este princípio é usado na definição seguinte.

Definição 154: O conjunto das *subfórmulas* de uma L -fórmula φ é notado por $subf(\varphi)$ e é definido, por recursão estrutural, do seguinte modo:

- a) $subf(\psi) = \{\psi\}$, para todo $\psi \in At_L$;
- b) $subf(\perp) = \{\perp\}$;
- c) $subf(\neg\psi) = subf(\psi) \cup \{\neg\psi\}$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;
- d) $subf(\psi_1 \square \psi_2) = subf(\psi_1) \cup subf(\psi_2) \cup \{\psi_1 \square \psi_2\}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- e) $subf(Qx\psi) = subf(\psi) \cup \{Qx\psi\}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Definição 155: Seja φ uma L -fórmula e seja $Qx\psi$ uma subfórmula de φ , onde $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$. O *alcance* desta ocorrência do quantificador Qx em φ é a L -fórmula ψ .

Exemplo 156: Na L_{Arit} -fórmula

$$\forall x_0(\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \rightarrow (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0))) :$$

1. o alcance da única ocorrência de $\forall x_0$ é

$$\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \rightarrow (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0));$$

2. o alcance da primeira ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_0 = s(x_1)$;
3. o alcance da segunda ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_1 < x_0$.

Definição 157: Numa L -fórmula φ , uma ocorrência (em subfórmulas atômicas de φ) de uma variável x diz-se *livre* quando x não está no alcance de nenhuma ocorrência de um quantificador Qx (com $Q \in \{\exists, \forall\}$); caso contrário, essa ocorrência de x diz-se *ligada*.

Escrevemos $LIV(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências livres em φ e $LIG(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências ligadas em φ .

Exemplo 158: Seja φ a L_{Arit} -fórmula

$$\exists x_1(\underbrace{\neg(x_0 < s(0))}_{(a)} \rightarrow \forall x_0(\underbrace{x_0}_{(b)} = \underbrace{x_1}_{(a)})).$$

A ocorrência (a) de x_0 é livre, enquanto que a ocorrência (b) de x_0 é ligada. A ocorrência (a) de x_1 é ligada. Assim, $LIV(\varphi) = \{x_0\}$ e $LIG(\varphi) = \{x_0, x_1\}$.

Observação 159: Note-se que $LIV(\varphi) \cap LIG(\varphi)$ não é necessariamente o conjunto vazio (veja-se o exemplo anterior).

Definição 160: A operação de *substituição das ocorrências livres* de uma variável x por um L -termo t numa L -fórmula φ é notada por $\varphi[t/x]$ e é definida, por recursão estrutural em L -fórmulas, do seguinte modo:

- a) $R(t_1, \dots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$ para todo $R \in \mathcal{R}$, de aridade n , e para todo $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$;
- b) $\perp[t/x] = \perp$;
- c) $(\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;
- d) $(\psi_1 \square \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \square \psi_2[t/x]$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- e) $(Qy\psi)[t/x] = \begin{cases} Qy\psi & \text{se } y = x \\ Qy\psi[t/x] & \text{se } y \neq x \end{cases}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Exemplo 161:

1. $(x_0 < s(x_1))[0/x_0]$
 $= x_0[0/x_0] < s(x_1)[0/x_0]$ (def. anterior **a**)
 $= 0 < s(x_1)$ (substituição em L -termos)
2. $(\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_0]$
 $= \exists x_0(x_0 < s(x_1))$ (def. anterior **e**), 1º caso)
3. $(\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_1]$
 $= \exists x_0(x_0 < s(x_1))[0/x_1]$ (def. anterior **e**), 2º caso
 $= \exists x_0(x_0 < s(0))$ (def. anterior **a**) e substituição em L -termos)
4. $(\exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge (0 < x_0))[0/x_0]$
 $= \exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge 0 < 0$ (porquê?)

Exemplo 162: Seja φ a L_{Arit} -fórmula $\exists x_1(x_0 < x_1)$. Então,

$$\varphi[s(x_1)/x_0] = \exists x_1(s(x_1) < x_1).$$

Observe que em φ a ocorrência livre de x_0 “não depende” da quantificação $\exists x_1$, mas, após a substituição, o termo $s(x_1)$, que substituiu x_0 , “depende” da quantificação $\exists x_1$.¹ Na definição seguinte, identificaremos as condições que evitam este fenómeno indesejado de *captura de variáveis* em substituições.

Definição 163: Sejam x uma variável, t um L -termo e φ uma L -fórmula. Diz-se que x é *substituível* (sem captura de variáveis) por t em φ ou que t é *livre para* x em φ quando para todas as ocorrências livres de x em φ no alcance de algum quantificador Qy , $y \notin VAR(t)$.

Observação 164: Se x é uma variável que não tem ocorrências livres numa L -fórmula φ ou t é um L -termo onde não ocorrem variáveis, x é substituível por t em φ .

Exemplo 165: Seja $\varphi = \forall x_1(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2)$. Então:

- a)** x_0 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ , pois x_0 não tem ocorrências livres na fórmula;

¹Note que tomando \mathbb{N}_0 como domínio de interpretação das variáveis e interpretando s como a função *sucessor* em \mathbb{N}_0 e $<$ como a relação de igualdade em \mathbb{N}_0 , φ é verdadeira, enquanto $\varphi[s(x_1)/x_0]$ é falsa. Esta noção de interpretação de fórmulas será tornada precisa na secção seguinte.

- b) x_1 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ , pois a única ocorrência livre de x_1 não está no alcance de qualquer quantificador;
- c) x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ , pois x_2 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall x_1$ e $x_1 \in VAR(x_1 + s(x_2))$;
- d) x_2 é substituível por $x_0 + s(x_2)$ em φ , pois, embora exista uma ocorrência livre de x_2 no alcance do quantificador $\forall x_1$, $x_1 \notin VAR(x_0 + s(x_2))$.

Observação 166: Note-se que, mesmo quando uma variável x não é substituível por um L -termo t numa L -fórmula φ , a operação de substituição de x por t em φ encontra-se definida.

Por exemplo, x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em

$$\varphi = \forall x_1 (x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2));$$

a L_{Arit} -fórmula resultante da substituição de x_2 por $x_1 + s(x_2)$ em φ encontra-se definida e é igual a

$$\forall x_1 (x_1 < x_1 + s(x_2)) \vee \neg(x_1 < x_1 + s(x_2))),$$

no entanto, ao efetuar a substituição, acontece o fenómeno da captura de variáveis.

Proposição 167: Sejam φ uma L -fórmula, x uma variável e t um L -termo. Se $x \notin LIV(\varphi)$, então $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em L -fórmulas. A prova está organizada por casos, consoante a *forma* de φ .

- a) Caso $\varphi = \perp$. Então, $\varphi[t/x] = \perp [t/x] \stackrel{(1)}{=} \perp = \varphi$.

Justificações

(1) Definição de substituição.

- b) Caso $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$, com $R \in \mathcal{R}$, n -ário, e $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$. Então, $x \notin VAR(t_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$, de outra forma teríamos $x \in LIV(\varphi)$, e contrariaríamos a hipótese. Assim, aplicando a Proposição 144, $t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo:

$$\varphi[t/x] = R(t_1, \dots, t_n)[t/x] \stackrel{(1)}{=} R(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x]) \stackrel{(2)}{=} R(t_1, \dots, t_n) = \varphi.$$

Justificações

(1) Definição de substituição.

(2) $t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

c) Caso $\varphi = Qy \varphi_1$, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

c.1) Caso $x = y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy \varphi_1)[t/x] \stackrel{(1)}{=} Qy \varphi_1 = \varphi.$$

Justificações

(1) Definição de substituição.

c.2) Caso $x \neq y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy \varphi_1)[t/x] \stackrel{(1)}{=} Qy \varphi_1[t/x] \stackrel{(2)}{=} Qy \varphi_1 = \varphi.$$

Justificações

(1) Definição de substituição.

(2) Por hipótese, $x \notin LIV(\varphi)$. Como $LIV(\varphi_1) \subseteq LIV(\varphi) \cup \{y\}$ e $x \neq y$, segue que $x \notin LIV(\varphi_1)$. Logo, por H.I., $\varphi_1[t/x] = \varphi_1$.

d) Os restantes casos são deixados como exercício.

□

Definição 168: Uma L -fórmula φ diz-se uma *sentença de tipo L* ou uma *fórmula fechada de tipo L* (abreviadamente, uma *L -sentença* ou uma *L -fórmula fechada*), quando $LIV(\varphi) = \emptyset$.

Proposição 169: Seja φ uma L -sentença. Então, para toda a variável x e para todo o L -termo t ,

1. x é substituível por t em φ ;
2. $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Exercício.

□

3.2 Semântica

Observação 170: As fórmulas do Cálculo de Predicados são construídas a partir das fórmulas atômicas (símbolos de relação “aplicados” a termos) e, por esta razão, as fórmulas atômicas desempenham papel semelhante ao das variáveis proposicionais no Cálculo Proposicional. Contudo, ao passo que no Cálculo Proposicional podemos atribuir “diretamente” um valor lógico a uma variável proposicional, a atribuição de valores lógicos às fórmulas atômicas é um processo mais complexo.

Para atribuírmos valores lógicos a fórmulas atômicas, em particular, será necessário fixar previamente a *interpretação dos termos*. Tal requer que indiquemos qual o *universo de objetos* (*domínio de discurso*) pretendido para a denotação dos termos (por exemplo, números naturais, conjuntos, etc.), bem como a interpretação pretendida quer para os símbolos de função do tipo de linguagem em questão (por exemplo, para indicar que tomando \mathbb{N}_0 por universo, o símbolo de função binário $+$ denotará a *operação* de adição) quer para as variáveis de primeira ordem. Para a interpretação das fórmulas atômicas, será ainda necessário fixar a interpretação dos símbolos de relação como *relações* entre objetos do domínio de discurso.

A indicação de qual o domínio de discurso pretendido e de quais as interpretações que deverão ser dadas aos diversos símbolos será efetuada através daquilo que designaremos por *estrutura para um tipo de linguagem*. A interpretação de variáveis de primeira ordem será feita no contexto de um domínio de discurso, através daquilo a que chamaremos *atribuições numa estrutura*. Um par (*estrutura, atribuição*) permitirá fixar o valor lógico de qualquer fórmula e, portanto, pode ser pensado como uma *valoração*, uma vez que estes pares desempenharão papel idêntico ao das valorações do Cálculo Proposicional.

Definição 171: Seja L um tipo de linguagem. Uma *estrutura de tipo L* , que abreviadamente designaremos por *L -estrutura*, é um par $(D, \bar{})$ tal que:

- a) D é um conjunto não vazio, chamado o *domínio da estrutura*;
- b) $\bar{}$ é uma função, chamada a *função interpretação da estrutura*, e é tal que:
 - a cada constante c de L faz corresponder um elemento de D , que será notado por \bar{c} ;
 - a cada símbolo de função f de L , de aridade $n \geq 1$, faz corresponder uma função de tipo $D^n \rightarrow D$, que será notada por \bar{f} ;
 - a cada símbolo de relação R de L , de aridade n , faz corresponder uma relação n -ária em D (i.e. um subconjunto de D^n), que será notada por \bar{R} .

Para cada símbolo de função ou relação s de L , \bar{s} é chamada a *interpretação* de s na estrutura.

Se L incluir o símbolo $=$ como símbolo de relação binário, $E = (D, \bar{})$ diz-se uma *estrutura normal de tipo L* quando a interpretação de $=$ é a relação de igualdade em D (i.e., $\bar{=} = \{(x, y) \in D \times D : x = y\}$).

Notação 172: Habitualmente, usaremos a letra E (possivelmente indexada) para denotar estruturas. Dada uma estrutura E , a notação $\text{dom}(E)$ denotará o domínio de E .

Exemplo 173:

a) Seja $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \neg)$, onde:

- $\bar{0}$ é o número *zero*;
- \bar{s} é a função *sucessor* em \mathbb{N}_0 , i.e., $\bar{s} : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$;

$$n \mapsto n + 1$$
- $\bar{+}$ é a função *adição* em \mathbb{N}_0 , i.e., $\bar{+} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$;

$$(m, n) \mapsto m + n$$
- $\bar{\times}$ é a função *multiplicação* em \mathbb{N}_0 , i.e., $\bar{\times} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$;

$$(m, n) \mapsto m \times n$$
- \equiv é a relação de *igualdade* em \mathbb{N}_0 , i.e., $\equiv = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m = n\}$;
- $\bar{<}$ é a relação *menor do que* em \mathbb{N}_0 , i.e., $\bar{<} = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m < n\}$.

Então, E_{Arit} é uma estrutura normal de tipo L_{Arit} . Habitualmente, designaremos esta estrutura por *estrutura standard* para o tipo de linguagem L_{Arit} .

b) O par $E_0 = (\{a, b\}, \neg)$, onde:

- $\bar{0} = a$;
- \bar{s} é a função $\{a, b\} \longrightarrow \{a, b\}$;

$$x \mapsto x$$
- $\bar{+}$ é a função $\{a, b\} \times \{a, b\} \longrightarrow \{a, b\}$;

$$(x, y) \mapsto b$$
- $\bar{\times}$ é a função $\{a, b\} \times \{a, b\} \longrightarrow \{a, b\}$;

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} a & \text{se } x = y \\ b & \text{se } x \neq y \end{cases}$$
- $\equiv = \{(a, a), (b, b)\}$;
- $\bar{<} = \{(a, b)\}$,

é também uma L_{Arit} -estrutura normal.

Existem $2 \times 4 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16$ L_{Arit} -estruturas cujo domínio é $\{a, b\}$, das quais $2 \times 4 \times 16 \times 16 \times 16$ são normais. (Porquê?)

Exemplo 174:

a) Seja $E_1 = (\mathbb{R}, \neg)$, onde:

- $\bar{+}$ é operação de adição em \mathbb{R} ;
- $\bar{1}$ é o número real 0;

- $\overline{}$ é a operação que a cada real faz corresponder o seu simétrico;
- \equiv é a relação de *igualdade* em \mathbb{R} .

Então, E_1 é uma estrutura normal de tipo L_{grupo} .

- b) Seja E_2 definida tal como E_1 , com exceção da interpretação do símbolo $^{-1}$ que em E_2 é interpretado como a operação que a cada real x faz corresponder $x - 1$. Então, E_2 é também uma estrutura normal de tipo L_{grupo} .

Exemplo 175:

- a) Seja $E_3 = (\mathcal{P}(\{a, b\}), \neg)$, onde:

- \equiv é a relação de *igualdade* em subconjuntos de $\{a, b\}$;
- \leq é a relação de *contido ou igual* em subconjuntos de $\{a, b\}$.

Então, E_3 é uma estrutura normal de tipo L_{cpo} .

- b) Seja $A = (X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Então, $E_A = (X, \neg)$, onde \equiv é a relação de *igualdade* em X e \leq é a relação \leq em X , é uma estrutura normal de tipo L_{cpo} .

Definição 176: Seja E uma L -estrutura. Uma função $a : \mathcal{V} \longrightarrow \text{dom}(E)$ (do conjunto \mathcal{V} das variáveis de primeira ordem para o domínio de E) diz-se uma *atribuição* em E .

Exemplo 177: As funções $a_0 : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ e $a^{ind} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ são atribuições em E_{Arit} .

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & 0 \\ x_i & \mapsto & i \end{array}$$

Definição 178: Sejam $E = (D, \neg)$ uma L -estrutura, a uma atribuição em E e t um L -termo. O *valor de t em E para a* , notado por $t[a]_E$ ou por $t[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada), é o elemento de D definido, por recursão estrutural em L -termos, do seguinte modo:

- $x[a] = a(x)$, para todo $x \in \mathcal{V}$;
- $c[a] = \bar{c}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;
- $f(t_1, \dots, t_n)[a] = \bar{f}(t_1[a], \dots, t_n[a])$ para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 179: Seja t o L_{Arit} -termo $s(0) \times (x_0 + x_2)$.

1. O valor de t para a atribuição a^{ind} , na L_{Arit} -estrutura E_{Arit} , é

$$\begin{aligned} & (s(0) \times (x_0 + x_2))[a^{ind}] \\ = & s(0)[a^{ind}] \times (x_0 + x_2)[a^{ind}] \\ = & (0[a^{ind}] + 1) \times (x_0[a^{ind}] + x_2[a^{ind}]) \\ = & (0 + 1) \times (0 + 2) \\ = & 2 \end{aligned}$$

2. Já para a atribuição a_0 (do exemplo anterior), o valor de t é 0 (porquê?).
3. Consideremos agora a L_{Arit} -estrutura E_0 do Exemplo 173 e a seguinte atribuição nesta estrutura:

$$\begin{array}{ccc} a' : \mathcal{V} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ x & \mapsto & b \end{array}$$

O valor de t em E_0 para a' é:

$$\begin{aligned} & (s(0) \times (x_0 + x_2))[a'] \\ = & \overline{\times}(s(0)[a'], (x_0 + x_2)[a']) \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(0[a']), \overline{+}(x_0[a'], x_2[a'])) \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(a), \overline{+}(b, b)) \\ = & \overline{\times}(a, b) \\ = & b \end{aligned}$$

Exemplo 180: Consideremos a estrutura de tipo L_{grupo} E_1 do Exemplo 174 e consideremos a atribuição a em E_1 tal que $a(x_i) = i$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

1. $(x_1^{-1}.1)[a]_{E_1} = -1$ e $(x_1^{-1}.x_2)[a]_{E_1} = 1$. Porquê?
2. $(1.1)^{-1}[a]_{E_1} = 0$ e, de facto, para toda a atribuição a' em E_1 , tem-se $(1.1)^{-1}[a']_{E_1} = 0$, pois:

$$(1.1)^{-1}[a']_{E_1} = -((1.1)[a']_{E_1}) = -(1[a']_{E_1} + 1[a']_{E_1}) = -(0 + 0) = 0.$$

Proposição 181: Seja t um L -termo e sejam a_1 e a_2 duas atribuições numa L -estrutura $E = (D, \neg)$. Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in VAR(t)$, então $t[a_1] = t[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em t . A prova está organizada por casos, consoante a forma de t .

- a) Caso t seja uma variável. Então, $t \in VAR(t)$. Logo, por hipótese, $a_1(t) = a_2(t)$ (*). Assim,

$$t[a_1] \stackrel{(1)}{=} a_1(t) \stackrel{(*)}{=} a_2(t) \stackrel{(1)}{=} t[a_2].$$

Justificações

- (1) Definição de valor de um termo para uma atribuição.

- b) Caso t seja uma constante. Então,

$$t[a_1] \stackrel{(1)}{=} \bar{t} \stackrel{(1)}{=} t[a_2].$$

Justificações

- (1) Definição de valor de um termo para uma atribuição.

- c) Caso $t = f(t_1, \dots, t_n)$, com $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$. Então,

$$\begin{aligned} & t[a_1] \\ = & f(t_1, \dots, t_n)[a_1] \\ \stackrel{(1)}{=} & \bar{f}(t_1[a_1], \dots, t_n[a_1]) \\ \stackrel{(2)}{=} & \bar{f}(t_1[a_2], \dots, t_n[a_2]) \\ \stackrel{(1)}{=} & f(t_1, \dots, t_n)[a_2] \\ = & t[a_2]. \end{aligned}$$

Justificações

- (1) Definição de valor de um termo para uma atribuição.
 (2) Para $1 \leq i \leq n$, como $VAR(t_i) \subseteq VAR(t)$, da hipótese segue-se que: $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in VAR(t_i)$. Logo, por H.I., para todo $1 \leq i \leq n$, $t_i[a_1] = t_i[a_2]$.

□

Notação 182: Sejam a uma atribuição numa L -estrutura E , $d \in dom(E)$ e x uma variável. Escrevemos $a \begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}$ para a atribuição $a' : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ em E definida por:

$$\text{para todo } y \in \mathcal{V}, \quad a'(y) = \begin{cases} d & \text{se } y = x \\ a(y) & \text{se } y \neq x \end{cases}.$$

Exemplo 183: $a^{ind}\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ denota a atribuição em L_{Arit} definida por

$$\text{para todo } i \in \mathbb{N}_0, \quad a^{ind}\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ i & \text{se } i \neq 0 \end{cases}.$$

Exemplo 184: Verifique que $(x_0 + 0)[a^{ind}\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] = 1 = (x_0 + 0)[s(0)/x_0][a^{ind}]$. De facto, esta igualdade é um caso particular da proposição seguinte, que fornece uma alternativa para o cálculo do valor de um termo que resulta de uma substituição.

Proposição 185: Sejam t_0 e t_1 L -termos e seja a uma atribuição numa L -estrutura. Então, $t_0[t_1/x][a] = t_0[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ t_1[a] \end{smallmatrix}\right)]$.

Dem.: Por indução estrutural em t_0 . (Exercício.) □

Definição 186: Sejam $E = (D, \neg)$ uma L -estrutura, a uma atribuição em E e φ um L -fórmula. O *valor lógico de φ em E para a* é o elemento do conjunto dos valores lógicos $\{0, 1\}$, notado por $\varphi[a]_E$ ou por $\varphi[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada), definido, por recursão em L -fórmulas, do seguinte modo:

- a) $\perp[a] = 0$;
- b) $R(t_1, \dots, t_n)[a] = 1$ sse $(t_1[a], \dots, t_n[a]) \in \overline{R}$, para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todo $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$;
- c) $(\neg\varphi_1)[a] = f_{\neg}(\varphi_1[a])$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$;
- d) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)[a] = f_{\wedge}(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- e) $(\varphi_1 \vee \varphi_2)[a] = f_{\vee}(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- f) $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)[a] = f_{\rightarrow}(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- g) $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[a] = f_{\leftrightarrow}(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- h) $(\exists x\varphi_1)[a] = 1$ sse para algum $d \in D$, $\varphi_1[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)] = 1$, para todo $x \in \mathcal{V}$, $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$;
- i) $(\forall x\varphi_1)[a] = 1$ sse para todo $d \in D$, $\varphi_1[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)] = 1$, para todo $x \in \mathcal{V}$, $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

Proposição 187: Para quaisquer L -estrutura E , atribuição a em E , L -fórmula φ e variável x ,

- a) $(\exists x\varphi)[a] = 0$ sse para todo $d \in \text{dom}(E)$, $\varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)] = 0$;
- b) $(\forall x\varphi)[a] = 0$ sse para algum $d \in \text{dom}(E)$, $\varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)] = 0$;
- c) $(\exists x\varphi)[a] = \text{máximo}\{\varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)] : d \in D\}$;
- d) $(\forall x\varphi)[a] = \text{mínimo}\{\varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)] : d \in D\}$.

Dem.: Imediata, tendo em atenção a definição de valor lógico e as propriedades de *máximo* e de *mínimo*. \square

Exemplo 188: Consideremos a estrutura L_{Arit} e as atribuições em E_{Arit} a^{ind} e a_0 definidas no Exemplo 177.

1. Para a L_{Arit} -fórmula $\varphi_0 = s(0) < x_2$, tem-se:

- i) $\varphi_0[a^{ind}] = 1$, dado que $s(0)[a^{ind}] = 1$, $x_2[a^{ind}] = 2$ e $(1, 2) \in \overline{<}$ (pois 1 é menor que 2);
- ii) $\varphi_0[a_0] = 0$, dado que $s(0)[a_0] = 1$, $x_2[a_0] = 0$ e $(1, 0) \notin \overline{<}$ (pois 1 não é menor que 0);

2. Para a L_{Arit} -fórmula $\varphi_1 = \exists x_2(s(0) < x_2)$ tem-se:

- i) $\varphi_1[a^{ind}] = 1$, pois existe $n \in \mathbb{N}_0$ t.q. $s(0) < x_2[a^{ind}\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ n \end{smallmatrix}\right)] = 1$ (como $s(0)[a^{ind}\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ n \end{smallmatrix}\right)] = 1$, basta tomar $n > 1$);
- ii) $\varphi_1[a_0] = 1$, pois existe $n \in \mathbb{N}_0$ t.q. $s(0) < x_2[a_0\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ n \end{smallmatrix}\right)] = 1$ (também neste caso se tem $s(0)[a_0\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ n \end{smallmatrix}\right)] = 1$, pelo que, basta tomar $n > 1$);

3. Para a L_{Arit} -fórmula $\varphi_2 = \exists x_2 \neg(s(0) < x_2)$ tem-se também o valor lógico 1, quer para a^{ind} quer para a_0 (porquê?);

4. Já para a L_{Arit} -fórmula $\varphi_3 = \forall x_2(s(0) < x_2)$ tem-se valor lógico 0 para ambas as atribuições (de facto, a afirmação “para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $1 < n$ ” é falsa).

Exemplo 189: Consideremos agora a L_{Arit} -estrutura E_0 do Exemplo 173 e as atribuições a' e a'' em E_0 t.q., para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a'(x_i) = b$ e $a''(x_i) = a$ sse i é par.

1. Para a L_{Arit} -fórmula $\varphi_0 = s(0) < x_2$ (considerada no exemplo anterior), tem-se:
 - i) $\varphi_0[a'] = 1$, dado que $s(0)[a'] = a, x_2[a'] = b$ e $(a, b) \in \prec$;
 - ii) $\varphi_0[a''] = 0$, dado que $s(0)[a''] = a, x_2[a''] = a$ e $(a, a) \notin \prec$;
2. Para a L_{Arit} -fórmula $\varphi_1 = \exists x_2(s(0) < x_2)$ o valor lógico é 1 para ambas as atribuições (porquê?).
3. Verifique que as fórmulas φ_2 e φ_3 do exemplo anterior recebem valores lógicos 1 e 0, respetivamente, para ambas as atribuições.

Exemplo 190: Consideremos a L_{grupo} -fórmula $\varphi_0 = \forall x_0(x_0 \cdot x_0^{-1} = 1)$ e as L_{grupo} -estruturas E_1 e E_2 do Exemplo 174.

1. Para qualquer atribuição em E_1 , o valor lógico de φ_0 em E_1 é 1, uma vez que a afirmação “para todo $x \in \mathbb{R}, x + (-x) = 0$ ” é verdadeira.
2. Já em E_2 , o valor lógico de φ_0 é 0, independentemente da atribuição, uma vez que a afirmação “para todo $x \in \mathbb{R}, x + (x - 1) = 0$ ” é falsa.

Exemplo 191: Em relação à L_{cpo} -estrutura E_3 (considerada no Exemplo 175) e a uma atribuição qualquer em E_3 que atribua o conjunto vazio à variável x_1 :

1. a L_{cpo} -fórmula $\exists x_0(x_0 \leq x_1)$ tem valor lógico 1 (a afirmação “existe $X \in \mathcal{P}(\{a, b\})$ tal que $X \subseteq \emptyset$ ” é verdadeira);
2. a L_{cpo} -fórmula $\exists x_0(x_0 \leq x_1 \wedge \neg(x_0 = x_1))$ tem valor lógico 0 (a afirmação “existe $X \in \mathcal{P}(\{a, b\})$ tal que $X \subseteq \emptyset$ e $X \neq \emptyset$ ” é falsa)

Definição 192: Sejam E uma L -estrutura, a uma atribuição em E e φ uma L -fórmula. Dizemos que E *satisfaz* φ para a , escrevendo $E \models \varphi[a]$, quando $\varphi[a]_E = 1$. Escrevemos $E \not\models \varphi[a]$ quando E não satisfaz φ para a , ou seja, quando $\varphi[a]_E = 0$.

Proposição 193: Sejam E uma L -estrutura e a uma atribuição em E . Então:

- a) $E \models \exists x \varphi[a]$ sse existe $d \in \text{dom}(E)$ t.q. $E \models \varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)]$;
- b) $E \models \forall x \varphi[a]$ sse $E \models \varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)]$, para todo $d \in \text{dom}(E)$;
- c) $E \not\models \exists x \varphi[a]$ sse $E \not\models \varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)]$, para todo $d \in \text{dom}(E)$;
- d) $E \not\models \forall x \varphi[a]$ sse existe $d \in \text{dom}(E)$ t.q. $E \not\models \varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)]$.

Dem.: Consequência imediata da definição de satisfação e da Proposição 187. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
 & E \not\models \exists x \varphi[a] \\
 \text{sse } & \exists x \varphi[a]_E = 0 && (\text{por definição de } \not\models) \\
 \text{sse } & \varphi[a \left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix} \right)]_E = 0, \text{ para todo } d \in \text{dom}(E) && (\text{Proposição 187 b) }) \\
 \text{sse } & E \not\models \varphi[a \left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix} \right)], \text{ para todo } d \in \text{dom}(E) && (\text{por definição de } \not\models).
 \end{aligned}$$

□

Proposição 194: Seja φ uma L -fórmula e sejam a_1 e a_2 atribuições numa L -estrutura E . Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in \text{LIV}(\varphi)$, então $E \models \varphi[a_1]$ sse $E \models \varphi[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em φ . (Exercício.)

□

Corolário 195: Sejam φ uma L -sentença e E uma L -estrutura. Se para alguma atribuição a em E , $E \models \varphi[a]$, então para toda a atribuição a em E , $E \models \varphi[a]$.

Dem.: Exercício.

□

Proposição 196: Sejam φ uma L -fórmula, $E = (D, \neg)$ uma L -estrutura, a uma atribuição em E e x uma variável substituível sem captura de variáveis por um L -termo t em φ . Então,

$$E \models \varphi[t/x][a] \text{ sse } E \models \varphi[a \left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix} \right)].$$

Dem.: A demonstração segue por indução estrutural em φ . Vejamos alguns casos.

- 1) Caso $\varphi \neq \perp$. Então, $\varphi[t/x] = \perp$ e ambos os lados da equivalência são falsos.
- 2) Caso $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$, com $R \in \mathcal{R}$, de aridade $n \geq 1$, e $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$. Então:

$$\begin{aligned}
 & E \models R(t_1, \dots, t_n)[a \left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix} \right)] \\
 \stackrel{(1)}{\text{sse}} & (t_1[a \left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix} \right)], \dots, t_n[a \left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix} \right)]) \in \overline{R} \\
 \stackrel{(2)}{\text{sse}} & (t_1[t/x][a], \dots, t_n[t/x][a]) \in \overline{R} \\
 \stackrel{(1)}{\text{sse}} & E \models R(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])[a] \\
 \stackrel{(3)}{\text{sse}} & E \models R(t_1, \dots, t_n)[t/x][a].
 \end{aligned}$$

Justificações

- (1) Definição de satisfação.
- (2) Pela Proposição 185, $t_i[a \left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix} \right)] = [t/x]t_i[a]$, para todo $1 \leq i \leq n$
- (3) Definição de substituição.

3) Caso $\varphi = \forall y\varphi_1$.

3.a) Subcaso $y = x$. Então,

$$\begin{aligned} E &\models \varphi[t/x][a] \\ \text{(1)} \\ \text{sse} \quad E &\models \varphi[a] \\ \text{(2)} \\ \text{sse} \quad E &\models \varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix}\right)]. \end{aligned}$$

Justificações

- (1) Definição de substituição.
- (2) Pela proposição anterior, uma vez que, como $x \notin LIV(\varphi)$, as duas atribuições coincidem no valor das variáveis com ocorrências livres em φ .

3.b) Subcaso $y \neq x$. Então, $y \notin VAR(t)$ (de outra forma x não seria substituível sem captura de variáveis por t em φ). Assim,

$$\begin{aligned} E &\models (\forall y\varphi_1)[t/x][a] \\ \text{(1)} \\ \text{sse} \quad E &\models \forall y(\varphi_1[t/x])[a] \\ \text{(2)} \\ \text{sse} \quad E &\models \varphi_1[t/x][a\left(\begin{smallmatrix} y \\ d \end{smallmatrix}\right)], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \text{(3)} \\ \text{sse} \quad E &\models \varphi_1[a\left(\begin{smallmatrix} y \\ d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a\left(\begin{smallmatrix} y \\ d \end{smallmatrix}\right)] \end{smallmatrix}\right)], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \text{(4)} \\ \text{sse} \quad E &\models \varphi_1[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y \\ d \end{smallmatrix}\right)], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \text{(2)} \\ \text{sse} \quad E &\models \forall y\varphi_1[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix}\right)] \end{aligned}$$

Justificações

- (1) Definição de substituição.
- (2) Proposição 193.
- (3) Hipótese de indução.
- (4) Como $y \neq x$, $a\left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y \\ d \end{smallmatrix}\right) = a\left(\begin{smallmatrix} y \\ d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix}\right)$ e, da Proposição 181, por $y \notin VAR(t)$, $t[a] = t[a\left(\begin{smallmatrix} y \\ d \end{smallmatrix}\right)]$.

4) Restantes casos: exercício.

□

Definição 197: Dizemos que uma L -fórmula φ é válida numa L -estrutura E ou que E valida φ (notação: $E \models \varphi$) quando, para toda a atribuição a em E , $E \models \varphi[a]$. Utilizamos a notação $E \not\models \varphi$ quando φ não é válida em E , i.e., quando existe uma atribuição a em E tal que $E \not\models \varphi[a]$.

Exemplo 198: Consideremos a estrutura E_{Arit} .

1. A fórmula $x_0 = x_0$ é válida em E_{Arit} ; de facto, para qualquer atribuição a em E_{Arit} , tem-se $E_{Arit} \models x_0 = x_0[a]$, uma vez que $x_0[a] = a(x_0)$ e $(a(x_0), a(x_0)) \in \equiv$ ($a(x_0)$ e $a(x_0)$ são naturais iguais).
2. A fórmula $x_0 = x_1$ não é válida em E_{Arit} ; por exemplo, para a atribuição a^{ind} tem-se $x_0[a^{ind}] = 0$, $x_1[a^{ind}] = 1$ e $(0, 1) \notin \equiv$, pelo que $E_{Arit} \not\models x_0 = x_1[a^{ind}]$.
3. A fórmula $\neg(x_0 = x_1)$ não é válida em E_{Arit} ; por exemplo, para a atribuição a_0 que atribui 0 a todas as variáveis tem-se $x_0[a_0] = 0$, $x_1[a_0] = 0$ e $(0, 0) \in \equiv$, pelo que $E_{Arit} \models x_0 = x_1[a_0]$ e, consequentemente, $E_{Arit} \not\models \neg(x_0 = x_1)[a_0]$.
4. A fórmula $x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para qualquer atribuição a em E_{Arit} , a afirmação “ $(a(x_0), a(x_1)) \in \equiv$ ou $(a(x_0), a(x_1)) \notin \equiv$ ” é verdadeira).
5. A fórmula $\exists x_0 \neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para toda a atribuição a em E_{Arit} a afirmação “existe $n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq a(x_1)$ ” é verdadeira (tome-se, por exemplo, $n = a(x_1) + 1$)) e a fórmula $\forall x_1 \exists x_0 \neg(x_0 = x_1)$ é também válida em E_{Arit} (porquê?).

Exemplo 199:

1. A L_{grupo} -fórmula $\forall x_0 (x_0 \cdot x_0^{-1} = 1)$ é válida na estrutura E_1 do Exemplo 174 (a afirmação “para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + (-x) = 0$ ” é verdadeira).
2. A L_{cpo} -fórmula $\forall x_0 \forall x_1 ((x_0 \leq x_1 \wedge x_1 \leq x_0) \rightarrow x_0 = x_1)$ é válida na estrutura E_3 do Exemplo 175 (a afirmação “para todo $X_0, X_1 \in \mathcal{P}(\{a, b\})$, se $X_0 \subseteq X_1$ e $X_1 \subseteq X_0$, então $X_0 = X_1$ ” é verdadeira).

Proposição 200: Seja E uma L -estrutura. Se φ é uma L -sentença, então $E \models \varphi$ sse para alguma atribuição a em E , $E \models \varphi[a]$.

Dem.: Se $E \models \varphi$, é imediato que $E \models \varphi[a]$ para alguma atribuição a , pois $E \models \varphi$ significa que $E \models \varphi[a]$ para toda a atribuição a .

Admitamos agora que $E \models \varphi[a]$ para alguma atribuição a . Tomemos uma atribuição a' arbitrária em E . (Queremos provar que $E \models \varphi[a']$.) Como φ é uma L -sentença e portanto $LIV(\varphi) = \emptyset$, tem-se trivialmente que $a(x) = a'(x)$ para todo $x \in LIV(\varphi)$. Assim, atendendo à Proposição 194 e a que $E \models \varphi[a]$, conclui-se $E \models \varphi[a']$. \square

Definição 201: Uma L -fórmula φ é (*universalmente*) *válida* (notação: $\models \varphi$) quando é válida em toda a L -estrutura. Utilizamos a notação $\not\models \varphi$ quando φ não é (*universalmente*) *válida*, i.e., quando existe uma L -estrutura E tal que $E \not\models \varphi$.

Observação 202: Uma L -fórmula φ não é universalmente válida quando existe alguma L -estrutura que não valida φ , ou seja, quando existe alguma L -estrutura E e alguma atribuição a em E t.q. $E \not\models \varphi[a]$.

Exemplo 203:

1. A L_{Arit} -fórmula $x_0 = x_1$ não é universalmente válida. Como vimos no exemplo anterior, esta fórmula não é válida na estrutura E_{Arit} .
2. No exemplo anterior, vimos que a fórmula $x_0 = x_0$ é válida na estrutura E_{Arit} . No entanto, esta fórmula não é válida em todas as L_{Arit} -estruturas. Por exemplo, se considerarmos uma L_{Arit} -estrutura $E_1 = (\{a, b\}, \equiv)$ em que \equiv seja a relação $\{(a, a)\}$, E_1 não valida $x_0 = x_0$, pois considerando uma atribuição a' em E_1 t.q. $a'(x_0) = b$ teremos $E_1 \not\models x_0 = x_0[a']$, uma vez que o par $(x_0[a'], x_0[a'])$, que é igual ao par (b, b) , não pertence à relação \equiv .
3. A L_{Arit} -fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida. De facto, dadas uma qualquer L_{Arit} -estrutura $E = (D, \equiv)$ e uma qualquer atribuição a em E , tem-se:

$$\begin{aligned}
 & E \models \forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))[a] \\
 \text{sse } & E \models (x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))[a\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ d \end{smallmatrix}\right)], \text{ para todo } d \in D \\
 \text{sse } & E \models x_0 = x_1[a\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ d \end{smallmatrix}\right)] \text{ ou } E \models \neg(x_0 = x_1)[a\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ d \end{smallmatrix}\right)], \text{ para todo } d \in D \\
 \text{sse } & (d, a(x_1)) \in \equiv \text{ ou } E \not\models x_0 = x_1[a\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ d \end{smallmatrix}\right)], \text{ para todo } d \in D \\
 \text{sse } & (d, a(x_1)) \in \equiv \text{ ou } (d, a(x_1)) \notin \equiv, \text{ para todo } d \in D
 \end{aligned}$$

e a última afirmação é verdadeira.

Definição 204: Uma L -fórmula φ é *logicamente equivalente* a uma L -fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, i.e., quando para toda a L -estrutura E e para toda a atribuição a em E , $E \models \varphi[a]$ sse $E \models \psi[a]$.

Observação 205: As propriedades enunciadas para a equivalência lógica no capítulo anterior, mantêm-se válidas no contexto do Cálculo de Predicados. Por exemplo, \Leftrightarrow é uma relação de equivalência em \mathcal{F}_L .

Proposição 206: Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$.

- a) $\neg \forall x \varphi \Leftrightarrow \exists x \neg \varphi$ b) $\neg \exists x \varphi \Leftrightarrow \forall x \neg \varphi$
- c) $\forall x \varphi \Leftrightarrow \neg \exists x \neg \varphi$ d) $\exists x \varphi \Leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi$
- e) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$ f) $\exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x \varphi \vee \exists x \psi$
- g) $\models (\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \rightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$, mas não necessariamente $\models \forall x(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \vee \forall x \psi)$
- h) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)$, mas não necessariamente $\models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \rightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$
- i) $\forall x \forall y \varphi \Leftrightarrow \forall y \forall x \varphi$ j) $\exists x \exists y \varphi \Leftrightarrow \exists y \exists x \varphi$
- k) $\models \exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$, mas não necessariamente $\models \forall x \exists y \varphi \rightarrow \exists y \forall x \varphi$
- l) $Qx \varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin LIV(\varphi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$
- m) $Qx \varphi \Leftrightarrow Qy \varphi[y/x]$ se $y \notin LIV(\varphi)$ e x é substituível por y em φ , para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$
- n) $Qx(\varphi \Box \psi) \Leftrightarrow (Qx \varphi) \Box \psi$ e $Qx(\psi \Box \varphi) \Leftrightarrow \psi \Box (Qx \varphi)$, se $x \notin LIV(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee\}$ e para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

Dem.:

- c) Sejam L uma linguagem, E uma L -estrutura e a uma atribuição em E . (Queremos demonstrar que: $E \models \forall x \varphi[a]$ sse $E \models \neg \exists x \neg \varphi[a]$.)

$$\begin{aligned}
 & E \models \forall x \varphi[a] \\
 \stackrel{(1)}{\text{sse}} & E \models \varphi[a \left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix} \right)], \text{ para todo } d \in \text{dom}(E) \\
 \stackrel{(2)}{\text{sse}} & E \not\models \neg \varphi[a \left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix} \right)], \text{ para todo } d \in \text{dom}(E) \\
 \stackrel{(3)}{\text{sse}} & E \not\models \exists x \neg \varphi[a] \\
 \stackrel{(2)}{\text{sse}} & E \models \neg \exists x \neg \varphi[a]
 \end{aligned}$$

Justificações

- (1) Por (b) da Proposição 193.
- (2) Para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$, $E \models \psi[a]$ sse $E \not\models \neg \psi[a]$ (Exercício).
- (3) Por (c) da Proposição 193.
- (4) Para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$, $E \not\models \psi[a]$ sse $E \models \neg \psi[a]$ (Exercício).

- k) Mostremos que $\models \forall x \exists y \varphi \rightarrow \exists y \forall x \varphi$ não é necessariamente válida.

Seja L uma linguagem contendo um símbolo R de relação, binário. Seja E uma L -estrutura de domínio $\{a, b\}$, onde a interpretação de R é o conjunto $\{(a, b), (b, a)\}$. Então, $E \models \forall x_0 \exists x_1 R(x_0, x_1)$, mas $E \not\models \exists x_1 \forall x_0 R(x_0, x_1)$ (Porquê?). Logo, $E \not\models \forall x_0 \exists x_1 R(x_0, x_1) \rightarrow \exists x_1 \forall x_0 R(x_0, x_1)$.

Demonstração das restantes afirmações: exercício. □

Definição 207: Chamaremos *instanciação* (de variáveis proposicionais com L -fórmulas) a uma função do tipo $\mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}_L$. Cada instanciação i determina uma função do tipo $\mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}_L$ que satisfaz as seguintes condições²:

- a) $i(\perp) = \perp$;
- b) $i(\neg\varphi) = \neg i(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- c) $i(\varphi \square \psi) = i(\varphi) \square i(\psi)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Definição 208: Uma L -fórmula ψ é uma *instância* de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional quando existe alguma instanciação i tal que $i(\varphi) = \psi$.

Exemplo 209: A L_{Arit} -fórmula $(x_0 = x_1) \rightarrow (\exists x_0(x_0 = 0) \rightarrow (x_0 = x_1))$ é uma instância da fórmula $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$ do Cálculo Proposicional. De facto, considerando-se uma instanciação i tal que $i(p_0)$ é a fórmula $(x_0 = x_1)$ e $i(p_1)$ é a fórmula $\exists x_0(x_0 = 0)$, tem-se:

$$\begin{aligned} & i(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)) \\ = & i(p_0) \rightarrow i(p_1 \rightarrow p_0) \\ = & (x_0 = x_1) \rightarrow (i(p_1) \rightarrow i(p_0)) \\ = & (x_0 = x_1) \rightarrow (\exists x_0(x_0 = 0) \rightarrow (x_0 = x_1)). \end{aligned}$$

Mas, esta fórmula L_{Arit} -fórmula é também instância, por exemplo, de $p_0 \rightarrow p_1$ e de p_0 . Porquê?

Teorema 210 (Teorema da Instanciação): Se φ é uma tautologia do Cálculo Proposicional, então toda a instância de φ é universalmente válida.

Dem.: Suponhamos que φ uma tautologia do Cálculo Proposicional e que ψ é uma L -fórmula que é instância de φ . Seja E uma L -estrutura e a uma atribuição em E . (Queremos demonstrar que $E \models \psi[a]$.) Uma vez que ψ é instância de φ , existe uma instanciação i tal que $i(\varphi) = \psi$. Seja v a valoração do Cálculo Proposicional que satisfaz as seguintes condições:

$$\text{para todo } p \in \mathcal{V}^{CP}, \quad v(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } E \models i(p)[a] \\ 0 & \text{se } E \not\models i(p)[a] \end{cases}.$$

Demonstra-se (por indução estrutural em φ) que: $v(\varphi) = 1$ sse $E \models \psi[a]$. Donde, como $v(\varphi) = 1$ (pois φ é uma tautologia), se segue que $E \models \psi[a]$. \square

²A função determinada por uma instanciação i pode ser vista como uma operação de *substituição simultânea*, onde cada variável proposicional p é substituída por $i(p)$.

Exemplo 211: Como vimos no exemplo anterior, a L_{Arit} -fórmula $(x_0 = x_1) \rightarrow (\exists x_0(x_0 = 0) \rightarrow (x_0 = x_1))$ é instância da tautologia $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$. Logo, pelo Teorema da Instanciação, podemos concluir que esta L_{Arit} -fórmula é universalmente válida.

Observação 212: Como seria de esperar, nem todas as fórmulas universalmente válidas são instâncias de tautologias. Por exemplo, vimos no Exemplo 203 que a fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida e esta fórmula não é instância de qualquer tautologia (esta fórmula é apenas instância de variáveis proposicionais, que não são tautologias).

Definição 213: Uma L -fórmula diz-se uma *forma normal prenexa* quando é constituída por um prefixo de quantificações (eventualmente vazio), seguido de uma fórmula sem quantificações, ou seja, quando é uma fórmula da forma $Q_1y_1 \dots Q_ny_n\varphi$, onde $n \in \mathbb{N}_0$, para cada i , $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ e $y_i \in \mathcal{V}$ e φ é uma L -fórmula sem quantificações.

Exemplo 214:

1. As L_{Arit} -fórmulas $x_0 < x_1$, $\exists x_1(x_0 < x_1 \wedge \neg(x_1 = 0))$, $\forall x_0 \exists x_1(x_0 < x_1 \wedge \neg(x_1 = 0))$ são formas normais prenexas.
2. A L_{Arit} -fórmula $\forall x_0(\exists x_1(x_1 < x_0) \rightarrow \exists x_2(x_0 = s(x_2)))$ não é uma forma normal prenexa (por causa das quantificações existenciais debaixo da implicação), mas

$$\begin{aligned}
 & \forall x_0(\exists x_1(x_1 < x_0) \rightarrow \exists x_1(x_0 = s(x_1))) \\
 \Leftrightarrow & \forall x_0(\neg \exists x_1(x_1 < x_0) \vee \exists x_1(x_0 = s(x_1))) \\
 \Leftrightarrow & \forall x_0(\forall x_1 \neg(x_1 < x_0) \vee \exists x_1(x_0 = s(x_1))) \\
 \Leftrightarrow & \forall x_0 \forall x_1(\neg(x_1 < x_0) \vee \exists x_1(x_0 = s(x_1))) \\
 \Leftrightarrow & \forall x_0 \forall x_1(\neg(x_1 < x_0) \vee \exists x_2(x_0 = s(x_2))) \\
 \Leftrightarrow & \forall x_0 \forall x_1 \exists x_2(\neg(x_1 < x_0) \vee (x_0 = s(x_2)))
 \end{aligned}$$

e a última fórmula é uma forma normal prenexa.

Proposição 215: Para toda a L -fórmula φ , existe uma forma normal prenexa ψ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

Dem.: Dada uma L -fórmula φ , uma forma normal prenexa ψ que lhe seja logicamente equivalente pode ser obtida com recurso às seguintes transformações:

1. escrever implicações e equivalências em termos de negações, conjunções e disjunções;
2. mover quantificações para fora de negações, conjunções e disjunções (renomeando, se necessário, o nome de variáveis ligadas), com recurso às equivalências lógicas **a)**, **b)**, **m)** e **n)** da Proposição 206. \square

Definição 216: Sejam E uma L -estrutura, a uma atribuição em E e Γ um conjunto de L -fórmulas. Dizemos que E *satisfaz* Γ para a ou que o par (E, a) *satisfaz* Γ , escrevendo $E \models \Gamma[a]$, quando para todo $\varphi \in \Gamma$, $E \models \varphi[a]$. Caso contrário, dizemos que E *não satisfaz* Γ para a ou que o par (E, a) *não satisfaz* Γ , escrevendo $E \not\models \Gamma[a]$.

Exemplo 217: O par (E_{Arit}, a^{ind}) satisfaz o conjunto de L_{Arit} -fórmulas

$$\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_0) = x_1)\},$$

mas não satisfaz o conjunto de L_{Arit} -fórmulas

$$\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_2) = x_1)\}.$$

Definição 218: Um conjunto de L -fórmulas Γ diz-se *satisfazível* ou (*semanticamente*) *consistente* quando para alguma L -estrutura E e para alguma atribuição a em E , (E, a) satisfaz Γ . Caso contrário, Γ diz-se *insatisfazível* ou (*semanticamente*) *inconsistente*.

Exemplo 219:

- a) O conjunto de L_{Arit} -fórmulas $\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_0) = x_1)\}$ é semanticamente consistente (por exemplo, (E_{Arit}, a^{ind}) satisfá-lo). O conjunto de L_{Arit} -fórmulas $\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_2) = x_1)\}$ também é semanticamente consistente (exercício).
- b) O conjunto de L_{Arit} -fórmulas $\{\forall x_0(x_0 = x_0), \neg(0 = 0)\}$ é semanticamente inconsistente (exercício).

Definição 220: Sejam E uma L -estrutura e Γ um conjunto de L -fórmulas. Dizemos que E *valida* Γ ou que E é um *modelo* de Γ , escrevendo $E \models \Gamma$, quando para toda a atribuição a em E , $E \models \Gamma[a]$. Caso contrário, dizemos que E *não valida* Γ ou que E *não é modelo* de Γ , escrevendo $E \not\models \Gamma$. Dizemos que E é um *modelo normal* de Γ quando E é um modelo de Γ e E é uma L -estrutura normal.

Exemplo 221: E_{Arit} é um modelo normal do conjunto formado pelas seguintes

L_{Arit} -sentenças:

$$\begin{aligned} & \forall x_0 \neg(0 = s(x_0)); \\ & \forall x_0 \forall x_1 ((s(x_0) = s(x_1)) \rightarrow (x_0 = x_1)); \\ & \forall x_0 \neg(s(x_0) < 0); \\ & \forall x_0 \forall x_1 ((x_0 = s(x_1)) \rightarrow ((x_0 < x_1) \vee (x_0 = x_1))); \\ & \forall x_0 (x_0 + 0 = x_0); \\ & \forall x_0 \forall x_1 (s(x_0) + x_1 = s(x_0 + x_1)); \\ & \forall x_0 (x_0 \times 0 = 0); \\ & \forall x_0 \forall x_1 (s(x_0) \times x_1 = (x_0 \times x_1) + x_1). \end{aligned}$$

A *axiomática de Peano* para a Aritmética é constituída por estas fórmulas, juntamente com um princípio de indução para \mathbb{N}_0 .

Exemplo 222: Os grupos são os modelos normais do conjunto formado pelas seguintes L_{grupo} -sentenças:

$$\begin{aligned} & \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 ((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2 = x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)); \\ & \forall x_0 ((x_0 \cdot 1 = x_0) \wedge (1 \cdot x_0 = x_0)); \\ & \forall x_0 ((x_0 \cdot x_0^{-1} = 1) \wedge (x_0^{-1} \cdot x_0 = 1)). \end{aligned}$$

De facto, uma L_{grupo} -estrutura normal $E = (D, \neg)$ é um modelo deste conjunto de fórmulas se e só se $(D, \cdot, \bar{1}, \bar{\cdot}^{-1})$ é um grupo.

Exemplo 223: Os conjuntos parcialmente ordenados são os modelos normais do conjunto formado pelas seguintes L_{cpo} -sentenças:

$$\begin{aligned} & \forall x_0 (x_0 \leq x_0); \\ & \forall x_0 \forall x_1 (((x_0 \leq x_1) \wedge (x_1 \leq x_0)) \rightarrow (x_0 = x_1)); \\ & \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 (((x_0 \leq x_1) \wedge (x_1 \leq x_2)) \rightarrow (x_0 \leq x_2)). \end{aligned}$$

Uma L_{cpo} -estrutura normal $E = (D, \neg)$ é um modelo deste conjunto de fórmulas se e só se (D, \leq) é um conjunto parcialmente ordenado.

Proposição 224: Seja Γ um conjunto de L -sentenças.

1. Uma L -estrutura E é um modelo de Γ sse para alguma atribuição a em E , (E, a) satisfaz Γ .
2. Γ é satisfazível sse existem modelos de Γ .

Dem.: Exercício. □

Definição 225: Uma L -fórmula φ diz-se uma *consequência (semântica)* de um conjunto de L -fórmulas Γ (notação: $\Gamma \models \varphi$) quando para toda a L -estrutura E e para toda a atribuição a em E , se $E \models \Gamma[a]$, então $E \models \varphi[a]$.

Observação 226: Na denotação de relações de consequência semântica, usaremos simplificações semalhantes às utilizadas no contexto do Cálculo Proposicional. Por exemplo, dadas L -fórmulas φ e ψ e dado um conjunto de L -fórmulas Γ , a notação $\Gamma, \varphi \models \psi$ abrevia $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Exemplo 227: No contexto do tipo de linguagem L_{Arit} ,

$$\forall x_0 \neg(x_0 = s(x_0)) \models \neg(0 = s(0)).$$

De facto, dada uma L_{Arit} -estrutura $E = (D, \neg)$ e dada uma atribuição a em E tais que $E \models \{\forall x_0 \neg(x_0 = s(x_0))\}[a]$, temos que, para todo o $d \in D$, $(d, \bar{s}(d)) \notin \equiv$. Assim, como $\bar{0} \in D$, em particular, temos que $(\bar{0}, \bar{s}(\bar{0})) \notin \equiv$. Consequentemente, $E \models \neg(0 = s(0))[a]$.

Proposição 228: Sejam Γ um conjunto de L -sentenças e φ uma L -sentença. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se todos os modelos de Γ validam φ .

Dem.: Exercício. □

Notação 229: Adiante, usaremos a notação $LIV(\Gamma)$, com Γ um conjunto de L -fórmulas, para representar o conjunto $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} LIV(\varphi)$.

Proposição 230: Sejam φ e ψ L -fórmulas, seja Γ um conjunto de L -fórmulas, seja x uma variável e seja t um L -termo.

- a) Se $\Gamma \models \forall x \varphi$ e x é substituível sem captura de variáveis por t em φ , então $\Gamma \models \varphi[t/x]$.
- b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $x \notin LIV(\Gamma)$, então $\Gamma \models \forall x \varphi$.
- c) Se $\Gamma \models \varphi[t/x]$ e x é substituível sem captura de variáveis por t em φ , então $\Gamma \models \exists x \varphi$.
- d) Se $\Gamma \models \exists x \varphi$ e $\Gamma, \varphi \models \psi$, e $x \notin LIV(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

- a) Suponhamos que (E, a) satisfaz Γ . (Queremos demonstrar que: $E \models \varphi[t/x][a]$.) Então, pela hipótese, $E \models \forall x \varphi[a]$. Assim, por definição de satisfação,

$$E \models \varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)], \text{ para todo } d \in \text{dom}(E).$$

Daqui, em particular, $E \models \varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix}\right)]$, pois $t[a] \in \text{dom}(E)$. Logo, como por hipótese x é substituível sem captura de variáveis por t em φ , aplicando a Proposição 196, $E \models \varphi[t/x][a]$.

- b) Suponhamos que (E, a) satisfaz Γ . (Queremos demonstrar que: $E \models \forall x\varphi[a]$.) Por hipótese, $x \notin LIV(\Gamma)$. Logo, para todo $\psi \in \Gamma$, $x \notin LIV(\psi)$ e, para todo $d \in \text{dom}(E)$, as atribuições a e $a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)$ atribuem os mesmos valores a todas as variáveis livres de ψ . Assim, para todo $\psi \in \Gamma$, segue da Proposição 194 que

$$E \models \psi[a] \text{ sse } E \models \psi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)], \text{ para todo } d \in \text{dom}(E).$$

Consequentemente, uma vez que (E, a) satisfaz Γ , para todo $d \in \text{dom}(E)$, $(E, a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right))$ também satisfaz Γ . Como por hipótese $\Gamma \models \varphi$, segue que

$$E \models \varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)], \text{ para todo } d \in \text{dom}(E),$$

o que permite concluir $E \models \forall x\varphi[a]$.

c) e d): exercício.

□

3.3 Sistema Formal de Dedução Natural

Notação 231: O sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica será usualmente denotado por DN_L ou, simplesmente, por DN , se for claro qual o tipo de linguagem que deve ser considerado.

Definição 232: As regras de inferência de DN_L são as regras de DNP (que, agora, em vez de se aplicarem a fórmulas do Cálculo Proposicional se aplicam a L -fórmulas), juntamente com as seguintes regras para quantificadores:

*Regras de Introdução**Regras de Eliminação*

$$\frac{\vdots}{\forall x\varphi} \forall I \quad (a)$$

$$\frac{\vdots}{\varphi[t/x]} \forall E \quad (b)$$

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi} \exists I \quad (b)$$

$$\frac{\vdots}{\psi} \exists E \quad (c)$$

- (a) Na derivação da premissa, x não tem ocorrências livres nas hipóteses não canceladas.
- (b) x é substituível sem captura de variáveis por t em φ .
- (c) x não tem ocorrências livres em ψ e, na derivação da segunda premissa, x não tem ocorrências livres nas hipóteses não canceladas distintas de φ .

Definição 233: O conjunto \mathcal{D}^{DN_L} das *derivações* de DN_L é definido de modo análogo a \mathcal{D}^{DNP} , ou seja, \mathcal{D}^{DN_L} é o menor conjunto X de árvores finitas de L -fórmulas (com folhas possivelmente canceladas) que contém as árvores com uma única L -fórmula e é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DN_L . Por exemplo, X é fechado para a regra $\forall I$ quando satisfaz a condição:

se $\frac{D}{\varphi} \in X$ e x é uma variável que não ocorre livre nas hipóteses não canceladas de D , então

$$\frac{D}{\forall x\varphi} \forall I \in X.$$

Observação 234: O conjunto \mathcal{D}^{DN_L} das derivações de DN_L admite princípios de indução estrutural e de recursão estrutural.

Definições 235: Em DN_L , as definições e as notações de *hipótese* de uma derivação, de *hipótese cancelada* de uma derivação, de *conclusão* de uma derivação, de *derivação de uma fórmula a partir de um conjunto de fórmulas*, de *demonstração de uma fórmula*,

de *consequência sintática* e de *teorema* são obtidas das correspondentes definições e notações de DNP, substituindo fórmulas do Cálculo Proposicional por L -fórmulas.

Exemplo 236:

- a) A seguinte árvore (com duas L_{Arit} -fórmulas)

$$\frac{\forall x_0(x_0 < s(x_0))}{0 < s(0)} \forall E$$

é uma derivação em DN de $0 < s(0)$ a partir de $\{\forall x_0(x_0 < s(x_0))\}$ (note-se que $(x_0 < s(x_0))[0/x_0] = 0 < s(0)$ e x_0 é substituível sem captura de variáveis por 0 em $x_0 < s(x_0)$) e, portanto, tem-se: $\forall x_0(x_0 < s(x_0)) \vdash 0 < s(0)$.

- b) A seguinte árvore (com três L_{Arit} -fórmulas)

$$\frac{\frac{\forall x_0(x_0 < s(x_0))}{x_0 < s(x_0)} \forall E}{\exists x_0(x_0 < s(x_0))} \exists I$$

é uma derivação em DN, também a partir de $\{\forall x_0(x_0 < s(x_0))\}$, mas agora com conclusão $\exists x_0(x_0 < s(x_0))$. Note-se que $(x_0 < s(x_0))[x_0/x_0] = x_0 < s(x_0)$ e x_0 é substituível sem captura de variáveis por x_0 em $x_0 < s(x_0)$, pelo que nas inferências $\forall E$ e $\exists I$ as respectivas *condições laterais* são satisfeitas. Desta derivação pode concluir-se: $\forall x_0(x_0 < s(x_0)) \vdash \exists x_0(x_0 < s(x_0))$.

- c) Sejam φ uma L -fórmula e x uma variável. Seja D a seguinte árvore de L -fórmulas:

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \cancel{\varphi}^{(1)}}{\varphi} \forall E}{\exists x \varphi} \exists I}{\forall x \varphi \rightarrow \exists x \varphi} \rightarrow I^{(1)}$$

D é uma demonstração de $\forall x \varphi \rightarrow \exists x \varphi$ (note-se que $\varphi[x/x] = \varphi$ e que x é substituível sem captura de variáveis por x em φ ; por isto, as inferências $\forall E$ e $\exists I$ satisfazem as respectivas *condições laterais*), pelo que a L -fórmula $\forall x \varphi \rightarrow \exists x \varphi$ é um teorema.

- d) Sejam φ uma L -fórmula e x uma variável. Se $x \in LIV(\varphi)$, a seguinte árvore de L -fórmulas não é uma derivação em DN, uma vez que a inferência $\exists E^{(2)}$ não é correta, pois a condição de x não ter ocorrências livres na premissa direita não é satisfeita.

$$\frac{\frac{\frac{\exists x \cancel{\varphi}^{(1)}}{\varphi} \exists E^{(2)}}{\forall x \varphi} \forall I}{\exists x \varphi \rightarrow \forall x \varphi} \rightarrow I^{(1)}$$

- e) Sejam φ uma L -fórmula e x e y variáveis. A árvore de L -fórmulas abaixo é uma demonstração em DN de $\exists x\forall y\varphi \rightarrow \forall y\exists x\varphi$, pelo que esta fórmula é um teorema.

$$\frac{\frac{\frac{\exists x\forall y\varphi^{(1)}}{\forall y\varphi} \quad \frac{\frac{\forall y\varphi^{(2)}}{\varphi} \forall E}{\exists x\varphi} \exists I}{\exists x\varphi} \exists E^{(2)} (a)}{\frac{\exists x\varphi}{\forall y\exists x\varphi} \forall I (b)} \rightarrow I^{(1)}$$

(a) x não ocorre livre na premissa direita (a fórmula $\exists x\varphi$) e x não ocorre livre em nenhuma hipótese não cancelada da derivação da premissa direita que seja distinta de $\forall y\varphi$ (na derivação da premissa direita, a única hipótese não cancelada é $\forall y\varphi$).

(b) y não ocorre livre em nenhuma hipótese não cancelada da derivação da premissa (a única hipótese não cancelada na derivação da premissa é $\exists x\forall y\varphi$, que não tem ocorrências livres de y).

- f) A seguinte árvore de L_{Arit} -fórmulas não é uma derivação em DN. Note-se que x_0 não é substituível sem captura de variáveis por x_1 em $\exists x_1\neg(x_1 = x_0)$. Assim, a primeira inferência não é uma aplicação correta da regra $\forall E$.

$$\frac{\frac{\forall x_0\exists x_1\neg(x_1 = x_0)^{(1)}}{\exists x_1\neg(x_1 = x_1)} \forall E}{\forall x_0\exists x_1\neg(x_1 = x_0) \rightarrow \exists x_1\neg(x_1 = x_1)} \rightarrow I^{(1)}$$

Proposição 237: Sejam φ e ψ L -fórmulas, seja Γ um conjunto de L -fórmulas, seja x uma variável e seja t um L -termo.

- a) Se $\Gamma \vdash \forall x\varphi$ e x é substituível sem captura de variáveis por t em φ , então $\Gamma \vdash \varphi[t/x]$.
- b) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $x \notin LIV(\Gamma)$, então $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.
- c) Se $\Gamma \vdash \varphi[t/x]$ e x é substituível sem captura de variáveis por t em φ , então $\Gamma \vdash \exists x\varphi$.
- d) Se $\Gamma \vdash \exists x\varphi$ e $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e $x \notin LIV(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Dem.:

a), b) e c): exercício.

- d) Pela hipótese $\Gamma \vdash \exists x\varphi$, existe uma derivação D_1 de $\exists x\varphi$ a partir de Γ . Pela hipótese $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, existe uma derivação D_2 de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Ainda

por hipótese, x não tem ocorrências livres nas fórmulas do conjunto $\Gamma \cup \{\psi\}$. Assim, x não tem ocorrências livres nem na conclusão de D_2 , nem em nenhuma das hipóteses não canceladas de D_2 diferentes de φ . Logo,

$$\frac{\begin{array}{c} D_1 \\ \exists x\varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D_2 \\ \psi \end{array}}{\psi} \exists E,$$

é uma derivação de ψ a partir de Γ .

□

Teorema 238 (Correção): Sejam Γ um conjunto de L -fórmulas e φ uma L -fórmula. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.

Dem.: O resultado é consequência imediata da seguinte propriedade: para toda a derivação D em DN, se D é uma derivação de φ a partir de Γ , então $\Gamma \models \varphi$. Esta propriedade demonstra-se por indução nas derivações de DN.

Por exemplo, caso D seja uma derivação da forma:

$$\frac{\begin{array}{c} D_1 \\ \exists x\psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D_2 \\ \varphi \end{array}}{\varphi} \exists E.$$

Então: i) D_1 é uma derivação de $\exists x\psi$ a partir de Γ ; ii) D_2 é uma derivação de φ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$; iii) x não ocorre livre nem em φ nem nas hipóteses não canceladas de D_2 que são diferentes de ψ . Pela H.I. relativa à subderivação D_1 , segue que $\Gamma \models \exists x\psi$ e, pela H.I. relativa à subderivação D_2 , segue que $\Gamma, \psi \models \varphi$. Por fim, destas duas relações de consequência e de iii), aplicando **d**) da Proposição 230, segue $\Gamma \models \varphi$. □

Observação 239: O contrarrecíproco do Teorema da Correção estabelece que, para todo o conjunto de L -fórmulas Γ e para toda a L -fórmula φ ,

$$\Gamma \not\models \varphi \Rightarrow \Gamma \not\vdash \varphi$$

e permite mostrar resultados de “não-derivabilidade” no sistema DN.

Por exemplo, uma vez que E_{Arit} valida $\exists x_0(x_0 = 0)$ e valida $\exists x_0 \neg(x_0 = 0)$, mas E_{Arit} não valida $\exists x_0((x_0 = 0) \wedge \neg(x_0 = 0))$, então

$$\exists x_0(x_0 = 0), \exists x_0 \neg(x_0 = 0) \not\models \exists x_0((x_0 = 0) \wedge \neg(x_0 = 0)),$$

pelo que

$$\exists x_0(x_0 = 0), \exists x_0 \neg(x_0 = 0) \not\vdash \exists x_0((x_0 = 0) \wedge \neg(x_0 = 0)).$$

Teorema 240 (Completeness): Sejam Γ um conjunto de L -fórmulas e φ uma L -fórmula. Se $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Ver bibliografia recomendada. □

Teorema 241 (Adequação): Sejam Γ um conjunto de L -fórmulas e φ uma L -fórmula. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Imediata, a partir dos teoremas da Correção e da Completeness. □

Corolário 242: Uma L -fórmula é um teorema de DN se e só se é universalmente válida.

Dem.: Pelo Teorema da Adequação (particularizando Γ com o conjunto vazio), tem-se que uma L -fórmula φ é teorema de DN se e só se $\emptyset \models \varphi$ e prova-se, facilmente, que $\emptyset \models \varphi$ se e só se φ é universalmente válida. □