

Análise Numérica

Ficha de exercícios nº 2 - Erros e estabilidade numérica

1. Escreva aproximações com 3 e 5 algarismos significativos para os números π , $1/3$, $1/11$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, e^3 e $\log 5$.
2. Calcule, recorrendo ao Matlab, o valor da expressão

$$z = [(x + y)^2 - x^2 - 2xy] / y^2$$

para valores de $x = 100$ e $y = 10^{-k}$, para $k = 0, 1, \dots, 10$. Explique os erros nos resultados obtidos para os valores de k maiores.

3. A sucessão de termo geral $(1 + \frac{1}{n})^n$ é monótona crescente e convergente. O limite é o conhecido número e . No Matlab execute

$$\gg S = inline('(1 + 1/n)^n')$$

para definir a função S e calcule $S(n)$ com $n = 2^{52}$ e $n = 2^{53}$. Compare o valor de $e = \exp(1)$ com as aproximações obtidas e explique o resultado "estranho" que se obtém para $n = 2^{53}$.

4. Tente obter no seu computador o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} (100^n/n!)$, tomando valores de n sucessivamente mais elevados. O que conclui? Reorganize o cálculo dos quocientes $100^n/n!$ por forma a verificar que o limite é zero.
5. Sendo \tilde{x}_i , para cada $i = 1, \dots, n$, uma aproximação de x_i tal que $|\tilde{x}_i - x_i| \leq E$, mostre que se tem

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \right| \leq n \cdot E$$

(nota: neste limite do erro da soma total não entramos em linha de conta com os eventuais erros de representação das somas parciais).

6. a) No Matlab, execute

$$\gg x = \text{sqrt}(1 : 100); \text{xtil} = \text{chop}(x, 24);$$

para produzir aproximações das raízes quadradas dos primeiros 100 números inteiros positivos; os valores de xtil são aproximações dos valores de x com mantissas de 24 bits. Verifique que, para cada $i = 1, \dots, 100$, tem-se $|x(i) - \text{xtil}(i)| < 10^{-6}$ (para isto basta executar $\gg \max(\text{abs}(x - \text{xtil}))$).

- b) Escreva um limite para o erro $\left| \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \right|$. Execute no Matlab

$$\gg \text{erro} = \text{sum}(x) - \text{sum}(\text{xtil})$$

e compare o erro efectivamente cometido com o limite anterior.

7. Calcule a soma das seguintes séries com erro de truncatura inferior a 0.001.

- a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$
 b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-\frac{1}{2})^n + \dots$

8. Escreva a fórmula de Taylor com resto para $\sin x$ e determine um majorante para o erro de truncatura que se comete quando se usa

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

para aproximar $\sin x$ no ponto $x = \pi/4$.

9. Considere o desenvolvimento em série da função exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

- a) No Matlab escreva o código de uma função **[soma, n]=expTaylor(x, tol)** que calcula a soma de termos da série até encontrar um termo cujo valor absoluto seja inferior à tolerância **tol** (dada). O parâmetro de saída **n** representa o grau do último termo adicionado.
 b) Teste a função **expTaylor** para $x = -1$ e $tol = 10^{-5}$ e verifique que se tem $|soma - \exp(-1)| < tol$.
 c) Com o mesmo valor de tol , repita para $x = -100$.
 d) Tendo em conta que $e^{-x} = 1/e^x$, use a função **expTaylor** para $x = 100$ e $tol = 10^{-5}$. Compare o inverso aritmético deste valor com o resultado obtido anteriormente. Qual dos resultados está correcto? Explique os enormes erros cometidos.

10. Considere as funções

$$F_1(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \quad \text{e} \quad F_2(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}.$$

- a) Prove que $F_1(x) = F_2(x)$, para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 b) Calcule o valor das duas expressões para $x = \pi 10^{-8}$ e $x = \pi 10^{-9}$ utilizando o Matlab. Comente os resultados obtidos.
11. a) No Matlab calcule sucessivamente os valores de \sqrt{x} e $\sqrt{x+\delta}$ com $\delta = 0.001$ e $x = 1$, $x = 100$ e $x = 1000$. Compare o número de algarismos significativos correctos de $x + \delta$ com o número de algarismos significativos correctos de $\sqrt{x + \delta}$.
 b) A função é $f(x) = \sqrt{x}$ é bem ou mal condicionada? Justifique, calculando o número de condição (relativo).
12. Sejam f e g definidas, para $x > 0$, por $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.

- a) Verifique que as expressões de f e g são matematicamente equivalentes.
 b) Verique que o número de condição (relativo) de f é igual ao número de condição (relativo) de g e tem-se

$$\text{cond}f(x) = \text{cond}g(x) = -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

- c) No Matlab, calcule $f(x)$ e $g(x)$ para $x = 10$, $x = 10^7$, $x = 10^{11}$ e $x = 10^{16}$. Como explica a discrepância em muitos dos algarismos de $f(x)$ e $g(x)$?