Universidade do Minho Ano Lectivo de 2022/2023

Departamento de Matemática 1^o Semestre

Lic. em Ciências da Computação

Análise Numérica

Ficha de exercícios n^o 5 - Integração numérica

---

1. **a)** Usa a regra do ponto médio para calcular o valor de $\int_0^2 (3x+2)\,dx$. Compara com o valor exacto.

   b) No mesmo gráfico, esboça as rectas $y = p(x)$ e $y = p\left(\frac{a+b}{2}\right)$, com $a = 0$, $b = 2$ e $p(x) = 3x + 2$, e interpreta a igualdade verificada na alínea anterior.

   c) Com $p(x) = mx + r$, mostra que se tem, quaisquer que sejam os limites de integração a e b e os coeficientes m e r,
   $$\int_a^b p(x)\,dx = (b-a)\cdot p\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
   ou seja, a regra do ponto médio é exacta para todos os polinómios de grau não superior a 1 (isto é, o *grau de exactidão* desta regra é um).

2. A regra (simples) dos trapézios baseia-se na interpolação da função nos nós que são os limites de integração, isto é, para aproximar o valor do integral $\int_a^b f(x)\,dx$ substitui-se a função integranda f pelo polinómio de grau não superior a um que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Resulta
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,[f(a) + f(b)] + E_T$$
   onde E_T representa o erro cometido na aproximação.

   a) Calcula $I = \int_0^1 \exp(-x)dx$ pela regra descrita anteriormente e compare com o valor exacto.

   b) Calcula $I = \int_0^{1/2} \exp(-x)dx + \int_{1/2}^1 \exp(-x)dx$ usando a regra dos trapézios para cada um dos integrais. Compare com o valor exacto.

   c) Calcula $I = \int_0^{1/4} \exp(-x)dx + \int_{1/4}^{1/2} \exp(-x)dx + \int_{1/2}^{3/4} \exp(-x)dx + \int_{3/4}^1 \exp(-x)dx$ usando a regra dos trapézios para cada um dos integrais. Compare com o valor exacto.

3. Sendo f uma função de classe C^2 no intervalo $[a, b]$, tem-se, com $h = (b-a)/n$ e $x_i = a + ih$, para $i = 0, 1, \ldots, n$
   $$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] - \frac{h^2}{12}\,(b-a)\,f''(\eta)$$
   onde $\eta \in (a, b)$. No Matlab escreve uma função **T=trapezios (f,a,b,n)** para calcular uma aproximação para o valor do integral $I = \int_a^b f(x)dx$, usando a *regra dos trapézios composta* (n é o número de subintervalos de igual amplitude em que se divide o intervalo de integração).

4. Sendo f uma função de classe C^4 no intervalo $[a, b]$, tem-se, com $h = (b-a)/n$ e $x_i = a + ih$, para $i = 0, 1, \ldots, n$, e $m = n/2$ (n tem de ser par):
   $$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b)\right] - \frac{h^4}{180}\,(b-a)\,f^{(iv)}(\eta)$$

onde $\eta \in (a,b)$. No Matlab escreve uma função **S=simpson(f,a,b,n)** para calcular uma aproximação para o valor do integral $I = \int_a^b f(x)dx$, usando a *regra de Simpson composta.*

5. Considera o integral $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$.

   a) Usa a função **trapezios** para calcular, para cada $k = 1, \cdots, 8$, o valor de $T(k)$ que é a aproximação obtida com $n = 2^k$. Verifique que a sequência $T(k)$ das aproximações converge para o valor exacto que é π.

   b) Repete o exercício com a função **simpson** para calcular $S(1), \cdots, S(8)$. No Matlab execute

   $$>> [T' - pi \quad S' - pi]$$

   para comparar os erros obtidos com as regras.

6. Repete o exercício anterior para calcular $I = \int_0^1 x^{1/2} dx$ pelas regras dos trapézios e de Simpson. Compare os resultados obtidos com o valor exacto.

7. Para se saber a quantidade M de massa radioactiva que entra ou sai de um reactor durante um certo período de tempo (entre os instantes t_1 e t_2) pode ser usada a fórmula

   $$M = \int_{t_1}^{t_2} (Q \times c)\, dt$$

   onde c representa a *concentração* e Q representa o *fluxo*. Se o fluxo for constante e igual a $5m^3/min$ e os valores da concentração medidos à saída do reactor forem os que se encontram na tabela seguinte

t, min	0	5	10	15	20	25	30
$c, mg/m^3$	10.00	21.62	35.00	52.16	44.59	37.07	32.91

   usa a regra de Simpson, com $h = 5$, para calcular a quantidade de massa radioactiva que sai do reactor entre os instantes $t = 0$ e $t = 30$.

8. Uma cobertura de material ondulado vai ser construída usando uma máquina de pressão a partir de uma folha plana de alumínio e o perfil da folha ondulada tem a forma de uma onda sinusoidal. A cobertura deve ter o comprimento de 3.7 m e pretende-se que cada onda tenha 10 cm de altura e um período de aproximadamente 2π dm. O comprimento da folha plana que vai ser usada é dado pelo comprimento do arco da curva $f(x) = \sin(x)$ desde $x = 0$ até $x = 37$ (dm), ou seja, pelo integral

   $$\int_0^{37} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

   a) Determina as aproximações $T20$, $T40$, $S20$ e $S40$ para o comprimento da folha plana, usando as funções **trapezios** e **simpson** com $n = 20$ e $n = 40$, respectivamente.

   b) Compara as aproximações obtidas com o valor dado pela função **quad** do Matlab (esta função usa a regra de Simpson de forma “adaptativa”, quer dizer, usa mais pontos nas regiões de [a,b] onde tal é necessário para garantir a precisão desejada).