Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 9

57. Considere a categoria $\mathbf{C}$ definida pelo diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend left, "q \circ p"] \arrow[drr, bend right, "j"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "i"] & C \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\ & & F \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} i &= g \circ q \\ &= f \circ q \\ j &= i \circ p \\ &= g \circ q \circ p \\ &= f \circ g \circ p \end{aligned}$$

Indique, caso exista:

(a) Um monomorfismo de $\mathbf{C}$.
(b) Um morfismo que não seja um epimorfismo de $\mathbf{C}$.
(c) Um bimorfismo de $\mathbf{C}$.
(d) Um isomorfismo de $\mathbf{C}$.

58. Considere o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rrr] \arrow[dr, "e"] \arrow[ddd] & & & \bullet \arrow[dl] \arrow[ddd] \\ & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & \\ & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[dr, "m"] & \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & \bullet \end{tikzcd}$$

Sabendo que os quatro trapézios deste diagrama são comutativos, mostre que:

(a) Se o quadrado mais pequeno é comutativo, então o quadrado maior também é comutativo.
(b) Se e é um epimorfismo, m é um monomorfismo e o quadrado maior é comutativo, então o quadrado pequeno também é comutativo.

59. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que:

(a) Se f e g são invertíveis à esquerda (respetivamente, direita), então $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita).
(b) Se $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita), então f é invertível à esquerda (respetivamente, g é invertivel à direita).

60. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Mostre que:

(a) Se f é invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.
(b) Se f é invertível à direita, então f é um epimorfismo.

61. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita, então g é um monomorfismo.

62. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se f e g são isomorfismos, então $g \circ f$ é um isomorfismo e o seu inverso é $f^{-1} \circ g^{-1}$.

63. Mostre que as seguintes condições sobre uma categoria $\mathbf{C}$ são equivalentes:

(I1) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível à direita;
(I2) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível à esquerda;

(I3) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível.

64. Seja $f : A \to B$ um isomorfismo numa categoria $\mathbf{C}$. Para cada objeto $C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, mostre que a função $f_C : \hom(B, C) \to \hom(A, C)$ definida por $f_C(g) = gf$ é uma bijeção.

65. Mostre que na categoria **Poset**, um morfismo é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo) se e só se for injetivo (respetivamente, sobrejetivo).

66. Mostre que se $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ são duas categorias com objetos terminais (iniciais), então $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ também tem objetos terminais (iniciais).

67. Mostre que se uma categoria tem objeto zero, então todo o objeto inicial (terminal) é objeto zero. Deduza que a categoria **Set** não tem objetos zero.

68. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T. Mostre que se $f : T \to I$ é um morfismo em $\mathbf{C}$, então f é um isomorfismo. Conclua que I e T são objetos zero.