Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2023/2024

Álgebra Universal e Categorias

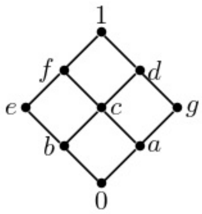
Exercícios - Folha 4

21. Sejam $A = \{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}$, $B = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$ e $(A, \leq)$ o c.p.o. correspondente ao diagrama de Hasse a seguir representado. Considere as álgebras $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f\in\{\wedge,\vee,\delta,0,1\}})$ e $\mathcal{B} = (B; (f^{\mathcal{B}})_{f\in\{\wedge,\vee,\delta,0,1\}})$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$, onde as operações binárias de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são definidas por

$$x \wedge^{\mathcal{A}} y = \inf\{x, y\} \text{ e } x \vee^{\mathcal{A}} y = \sup\{x, y\}, \forall x, y \in A,$$

$$x \wedge^{\mathcal{B}} y = \inf\{x, y\} \text{ e } x \vee^{\mathcal{B}} y = \sup\{x, y\}, \forall x, y \in B,$$

as operações unárias são definidas pelas tabelas a seguir indicadas e $0^{\mathcal{A}} = 0^{\mathcal{B}} = 0$ e $1^{\mathcal{A}} = 1^{\mathcal{B}} = 1$.



x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$\delta^{\mathcal{A}}(x)$	1	b	a	c	f	g	d	e	0

x	0	a	b	c	d	f	1
$\delta^{\mathcal{B}}(x)$	1	b	a	c	f	b	0

(a) Dê exemplo de um reduto de $\mathcal{A}$ que seja:
i. um semigrupo. ii. um reticulado.

(b) Para cada um dos conjuntos C a seguir indicados, diga se C é um subuniverso de $\mathcal{A}$:
i. $C = \emptyset$. ii. $C = \{0, f, d, 1\}$. iii. $C = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$.

(c) Diga se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

22. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $a \in R$. Mostre que $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$ é um subuniverso de $\mathcal{R}$.

23. Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e considere a cadeia $(A, \leq)$ tal que $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3$. Sejam $\wedge$, $\vee$ e $+$ as operações binárias definidas em A por

$$\wedge(x, y) = \inf\{x, y\},\ \ \vee(x, y) = \sup\{x, y\},\ \ \forall x, y \in A,$$

$$+(x, y) = \text{ resto de } x + y \text{ na divisão inteira por } 4,\ \forall x, y \in A,$$

e seja $-$ a operação unária definida por: $-(x) =$ resto de $3-x$ na divisão inteira por 4, $\forall x \in A$. Considere a álgebra $\mathcal{A} = (A; \wedge, \vee, +, -)$. Determine todas as subálgebras de $\mathcal{A}$.

24. (a) Dê um exemplo de uma subálgebra de $(\mathbb{Z}, +)$, vista como uma álgebra de tipo (2), que não seja um grupo.
(b) Mostre que toda a subálgebra de um grupo finito visto como uma álgebra de tipo (2), é ainda um grupo.

25. Uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ diz-se *mono-unária* se F é formado por uma única operação e essa operação é unária. Uma subálgebra $\mathcal{B} = (B; G)$ de $\mathcal{A}$ diz-se uma *subálgebra própria* se $B \subsetneq A$.

(a) Para cada inteiro $n > 0$, dê exemplo de uma álgebra mono-unária $\mathcal{A}_n = (\{0, 1, ..., n-1\}; f)$ que não admita subálgebras próprias.

(b) Mostre que qualquer álgebra mono-unária infinita tem subálgebras próprias.

26. Considere a álgebra $\mathcal{A}$ definida no exercício 21..

(a) Dê exemplo de conjuntos $X, Y \subseteq A$ tais que:
i. $X \neq Y$ e $Sg^{\mathcal{A}}(X) = Sg^{\mathcal{A}}(Y)$. ii. $|X| = 2$ e $Sg^{\mathcal{A}}(X) = A$.

(b) Determine $\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(\{e\})$ e $\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(\{f, g\})$.

27. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X, Y \subseteq A$. Mostre que:

(a) $X \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$.
(b) $X \subseteq Y \Rightarrow Sg^{\mathcal{A}}(X) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y)$.
(c) $Sg^{\mathcal{A}}(Sg^{\mathcal{A}}(X)) = Sg^{\mathcal{A}}(X)$.
(d) $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup\{Sg^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z$ é subconjunto finito de $X\}$.