1. Considere o seguinte subconjunto de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) Mostre que $D$ é um subanel de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (b) Mostre que a aplicação $f : \mathbb{C} \to D$ dada por $f(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ é um isomorfismo de anéis.

   (c) Seja $A \in D$ com $\det A \neq 0$. Calculando $A \cdot A^T$, verifique que $A^{-1} \in D$.

   (d) Mostre que todo o elemento não nulo de $\mathbb{C}$ é invertível (uma unidade do anel $\mathbb{C}$) e indique o seu inverso.

2. Determine todos os endomorfismos do anel $\mathbb{Z}$.

3. Mostre que os anéis $\mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ são isomorfos.

4. Mostre que o *centro* de um anel $A$, $Z(A) = \{x \in A \,|\, \forall y \in A \ xy = yx\}$, é um subanel de $A$.

5. Seja $n \geq 1$ um inteiro. Mostre que $[k]_n \in \mathbb{Z}_n \setminus \{[0]_n\}$ é uma unidade do anel $\mathbb{Z}_n$ se e só se $k$ e $n$ são primos entre si.

6. Sejam $A$ um anel e $n \in \mathbb{Z}$. Verifique que $nA = \{nx \,|\, x \in A\}$ é um ideal de $A$.

7. Seja $A$ um anel comutativo e seja $a \in A$. Verifique que $I = \{x \in A \,|\, ax = 0\}$ é um ideal de $A$.

8. Sejam $m$ e $n$ dois números inteiros primos entre si. Mostre que o único ideal de $\mathbb{Z}$ que contém $m$ e $n$ é $\mathbb{Z}$.

9. Sejam $A$ um anel e $I$ um ideal de $A$. Mostre que o anel quociente $A/I$ é comutativo se e só se $ab - ba \in I$ para todos os $a, b \in A$.