Álgebra Universal e Categorias

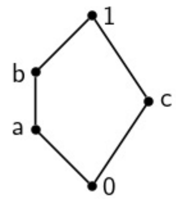
Exercícios - Folha 5

28. Seja $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, f)$ a álgebra de tipo (1) onde f é a operação definida por

x	a	b	c	d
$f(x)$	c	b	a	d

Determine todas as relações de congruência em $\mathcal{A}$.

29. Considere o reticulado N_5 representado pelo diagrama de Hasse



Determine

(a) $\Theta(a, 0)$; (b) $\Theta(a, 1)$; (c) $\Theta(a, b)$.

30. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{R}$. Mostre que, para quaisquer $a, b, c \in R$, se $a \leq c \leq b$ e $(a, b) \in \theta$, então $(a, c) \in \theta$ e $(b, c) \in \theta$.

31. Sejam $\mathcal{S} = (S, \cdot)$ um semirreticulado e $\leq$ a relação de ordem parcial em S definida por $x \leq y$ se $x \cdot y = x$. Dado $a \in S$, define-se

$$\theta_a = \{(b, c) \in S^2 \,|\, (a \leq b \text{ e } a \leq c) \text{ ou } (a \nleq b \text{ e } a \nleq c)\}.$$

Mostre que, para qualquer $a \in S$, θ_a é uma congruência em $\mathcal{S}$.

32. Seja $\mathcal{S} = (S; \cdot)$ um semigrupo. Um subconjunto não vazio I de S diz-se um *ideal* de $\mathcal{S}$ se, para quaisquer $s \in S$ e $i \in I$, tem-se $is \in I$ e $si \in I$. Mostre que, para qualquer ideal I, $I^2 \cup \triangle_S$ é uma congruência em $\mathcal{S}$, designada a *congruência de Rees induzida por I*.

33. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo $(O; \tau)$. Mostre que $\triangle_A = \{(a, a) \,|\, a \in A\}$ e $\nabla_A = \{(a, b) \,|\, a, b \in A\}$ são congruências em $\mathcal{A}$.

34. Sejam θ, ψ relações binárias num conjunto A. Mostre que:

(a) Se θ e ψ são relações de equivalência em A, não é necessariamente verdade que $\theta \cup \psi$ e $\theta \circ \psi$ sejam relações de equivalência em A.

(b) Se θ e ψ satisfazem a propriedade de substituição numa álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$, então $\theta \circ \psi$ satisfaz a propriedade de substituição em $\mathcal{A}$.

(c) Se θ e ψ são congruências numa álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$, então $\theta \cap \psi$ e a relação $\theta * \psi$ definida por

$$\begin{aligned}\theta * \psi = \{(x, y) \in A^2 \,|\, \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, z_0, z_1, \ldots, z_n \in A, x = z_0, y = z_n \\ \text{e } \forall 1 \leq k \leq n, z_{k-1}\,\theta\,z_k \text{ ou } z_{k-1}\,\psi\,z_k\},\end{aligned}$$

são conguências em $\mathcal{A}$.

35. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X, Y \subseteq A \times A$. Mostre que

(a) $X \subseteq \Theta(X)$.

(b) $X \subseteq Y \Rightarrow \Theta(X) \subseteq \Theta(Y)$.

(c) $\Theta(\Theta((X)) = \Theta(X)$.

(d) $\Theta(X) = \bigcup\{\Theta(Z) \,|\, Z \text{ é um subconjunto finito de } X\}$.