1. Verifique quais dos grupóides seguintes são grupos:

   (a) $(\mathbb{N}, *)$ onde $a * b = 2^{ab}$

   (b) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ onde $a * b = a + b + ab$

   (c) $(\mathbb{Q}, *)$ onde $a * b = ab + a + b + 1$

2. Mostre que existe no máximo uma estrutura de grupo no conjunto $V = \{e, a, b, c\}$ tal que e é o elemento neutro e $a^2 = b^2 = e$. Se existir, será um grupo abeliano? Nota-se que existe um tal grupo, é chamado *grupo de Klein*.

3. Diga quais das aplicações seguintes são homomorfismos de grupos e, nesses casos, classifique-os.

   (a) $f\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $f(x) = x + 3$

   (b) $g\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $g(x) = 4x$

   (c) $h\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $h(x) = x^2$

   (d) $\ln\colon (]0, +\infty[, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$

   (e) $\det : (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

4. Considere a operação binária $*$ definida em $\mathbb{Z}$ por $x * y = x + y - 3$. Mostre que:

   (a) $(\mathbb{Z}, *)$ é um grupo

   (b) A aplicação $f\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, *)$ definida por $f(x) = x + 3$ é um isomorfismo.

5. Sejam G um grupo e $n \in \mathbb{Z}$. Considere a aplicação $f\colon G \to G$ definida por $f(x) = x^n$. Mostre que, se G é abeliano, então a aplicação f é um endomorfismo de G.

6. Quais dos seguintes conjuntos é um subgrupo do grupo $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$?

   (a) $C = \{\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \ : \ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}\}$.

   (b) $C = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \ : \ a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}\}$.

   (c) $O(2) = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_2\}$.

7. Sejam G um grupo e $a \in G$. Mostre que o conjunto $C(a) = \{x \in G \,|\, xa = ax\}$ é um subgrupo de G. O conjunto $C(a)$ é chamado *centralizador* de a.

8. Seja G um grupo. Seja $H \neq \emptyset$ um subconjunto finito de G tal que para quaisquer $x, y \in H$, tem-se $xy \in H$.

   (a) Justifique que H é um semi-grupo.

   (b) Justifique que H é subgrupo de G.

9. Considere o grupo simétrico S_3. Seja H o subgrupo gerado pela permutação σ dada por $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$ e $\sigma(3) = 3$ e seja K o subgrupo gerado pela permutação τ dada por $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = 3$ e $\tau(3) = 2$. Determine HK. É um subgrupo de S_3?

10. Sejam G um grupo e H e K subgrupos de G. Mostre que HK é um subgrupo de G se e só se $HK = KH$.