1. Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e $x \in G$. Mostre que as três seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) Hx é subgrupo de G

   (b) $x \in H$

   (c) $Hx = H$

2. Seja G um grupo finito tal que $|G|$ é primo. Usando o Teorema de Lagrange, mostre que para todo o $a \in G \setminus \{e\}$ tem-se $G = \langle a \rangle$. Podemos concluir que G é abeliano?

3. Sejam G um grupo e H e K dois subgrupos finitos de G tais que $|H|$ e $|K|$ são primos entre si. Mostre que $H \cap K = \{e\}$.

4. Sejam G um grupo e H um subgrupo de índice 2. Prove que para todo o $x \in G$, $x^2 \in H$.

5. Seja G um grupo e sejam H e K subgrupos finitos de G. Mostre que se $H \cap K = \{e\}$ então a aplicação $f : H \times K \to HK$ dada por $f(h,k) = hk$ é bijetiva.

6. Seja G um grupo de ordem 20 e sejam H e K subgrupos de G de ordem 5. Mostre que $H = K$ (*Sugestão:* Usando o exercício anterior, comece por mostrar que $|H \cap K| = 5$.). Qual o índice de H em G?

7. Considere o grupo simétrico S_3 e o subgrupo $H = \langle \sigma \rangle$ gerado pela permutação σ dada por $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$ e $\sigma(3) = 3$.

   (a) Qual a ordem de σ? Qual o índice $|S_3 : H|$?

   (b) Usando a permutação τ dada por $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = 3$ e $\tau(3) = 2$, mostre que H não é normal em S_3.

8. Seja G um grupo. Mostre que o centro de G dado por $Z(G) = \{x \in G \ : \ \forall g \in G, gx = xg\}$ é um subgrupo normal de G.

9. Sejam G um grupo e H e K normais de G tais que $H \cap K = \{e\}$. Mostre que para todos os $h \in H$ e $k \in K$, $hk = kh$.