1. Diga, justificando, se as expressões seguintes definem operações binárias nos conjuntos indicados:

   (a) $x * y = x - y$ em $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$
   (b) $x * y = x|y|$ em $\mathbb{Z}$
   (c) $x * y = x + y + xy$ em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   (d) $x * y = \frac{x+y}{2}$ em $\mathbb{N}$

   Quais das operações binárias encontradas são comutativas?

2. Seja X um conjunto com 2 elementos. Quantas operações binárias é possível definir em X? Quantas destas são comutativas? E se X tiver n elementos com $n \geq 1$?

3. Para cada um dos seguintes casos, verifique se $(\mathbb{R}, *)$ é um semigrupo.

   (a) $x * y = \frac{x+y}{2}$
   (b) $x * y = x + y - 1$
   (c) $x * y = |x + y|$
   (d) $x * y = |x|y$

   Quais dos semigrupos encontrados são monóides?

4. Seja $(G, *)$ um grupóide com elemento neutro tal que

   $$\forall a, b, c, d \in G \quad (a * b) * (c * d) = (a * d) * (b * c).$$

   Mostre que G é um monóide comutativo.

5. Seja S um conjunto com pelo menos dois elementos. Considere a operação $*$ definida em $S \times S$ por $(a, b) * (c, d) = (a, d)$. Mostre que $(S \times S, *)$ é um semigrupo sem elemento neutro.

6. Sejam S um semigrupo e $a, b \in S$ tais que $ab = ba$. Mostre que para qualquer inteiro $n \geq 1$, $a^n b = ba^n$ e $(ab)^n = a^n b^n$.

7. Dê exemplo de um semigrupo S no qual existem dois elementos a e b tais que $(ab)^2 \neq a^2 b^2$.

8. Considere o grupóide $(M, *)$ em que $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 1\}$ e a operação $*$ é dada por

   $$(x, y, z) * (a, b, c) = (xa, b + ya, c + za).$$

   Mostre que $(M, *)$ é um monóide e que um elemento $(x, y, z) \in M$ é invertível se e só se $x \neq 0$. Se $(x, y, z) \in M$ é invertível, qual é o seu inverso?

9. Sejam M um monóide e $a, b \in M$. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

   (a) Se a é invertível e $ab = e$, então $b = a^{-1}$.
   (b) Se a é invertível à esquerda, então para quaisquer dois elementos $x, y \in M$, $ax = ay \Rightarrow x = y$.
   (c) Se para quaisquer dois elementos $x, y \in M$, $ax = ay \Rightarrow x = y$, então a é invertível à esquerda.