Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 8

51. Justifique que cada uma das estruturas seguintes define uma categoria.

    (a) $\mathbf{M} = (\{\mathcal{M}\}, \hom, \mathrm{id}, \circ)$, onde $\mathcal{M} = (M; \cdot, 1_M)$ é um monóide; $\hom$ associa a $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ o conjunto M; id associa a $\mathcal{M}$ o elemento $\mathrm{id}_{\mathcal{M}} = 1_M$; $\circ$ é a operação binária do monóide.

    (b) $\mathbf{P} = (P, \hom, \mathrm{id}, \circ)$, onde $(P, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado; $\hom$ associa a cada par $(a, b) \in P \times P$, o conjunto $\{(a, b)\} \cap \leq$; id associa a cada $a \in P$ o elemento $\mathrm{id}_a = (a, a)$; para quaisquer $(a, b), (b, c) \in \leq$, $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$.

    (c) $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \hom, \mathrm{id}, \circ)$, onde, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $\hom(m, n)$ é a coleção de todas as matrizes reais do tipo $n \times m$; para cada $n \in \mathbb{N}$, id associa a cada $n \in \mathbb{N}$ a matriz identidade I_n de ordem n; $\circ$ é a multiplicação usual de matrizes.

52. Seja A um objeto de uma categoria $\mathbf{C}$. Justifique que $(\hom(A, A); \circ, \mathrm{id}_A)$ é um monóide.

53. Considere o diagrama a seguir representado

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dr, "h"] & \\
\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr] \arrow[drr, "k"'] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \\
& & \bullet \arrow[urr, "l"'] & &
\end{tikzcd}$$

Mostre que se os quatro triângulos internos do diagrama comutam, então $h \circ g \circ f = l \circ k$.

54. Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr, bend right=70] & B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & C \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\
D \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & E \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

Construa:

(a) A subcategoria plena $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}') = \{A, B, C, F\}$.

(b) A categoria dos objetos sobre B.

(c) A categoria dos objetos sobre F.

55. (a) Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ as categorias definidas, respetivamente, pelos diagramas seguintes

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\
& C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "i"] & V
\end{tikzcd}$$

Defina por meio de um diagrama a categoria produto $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

(b) Sejam R e S monóides vistos como categorias. O que é a categoria produto $R \times S$?

56. (a) Seja P um conjunto parcialmente ordenado visto como uma categoria. O que é a categoria dual P^{op}?

    (b) Seja R um monóide visto como uma categoria. O que é a categoria dual R^{op}?