1. Máquinas de Turing

1.1 Considere a máquina de Turing

$$\mathcal{T} = (\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, \{a,b\}, \{a,b,\Delta\}, \delta, 0, 8, \Delta)$$

onde a função transição δ é definida pela tabela seguinte:

δ	a	b	Δ
0			$(1,\Delta,D)$
1	$(1,a,D)$	$(1,b,D)$	$(2,\Delta,E)$
2	$(3,\Delta,D)$	$(5,\Delta,D)$	$(8,\Delta,D)$
3			$(4,a,D)$
4	$(4,a,D)$	$(4,b,D)$	$(7,a,E)$
5			$(6,b,D)$
6	$(6,a,D)$	$(6,b,D)$	$(7,b,E)$
7	$(7,a,E)$	$(7,b,E)$	$(2,\Delta,E)$

a) Represente a máquina de Turing $\mathcal{T}$ através de um grafo.

b) Indique a sequência de configurações que podem ser computadas a partir da configuração $(0, \underline{\Delta}ab)$; e a partir da configuração $(0, \underline{\Delta}baa)$?

c) Indique informalmente o comportamento de $\mathcal{T}$, quando a configuração inicial é $(0, \underline{\Delta}u)$, onde u é uma palavra de $\{a,b\}^*$.

1.2 Considere a máquina de Turing $\mathcal{T} = (\{0,1,2\}, \{a,b\}, \{a,b,\Delta\}, \delta, 0, 2, \Delta)$, onde a função transição δ é definida pela tabela seguinte:

δ	a	b	Δ
0	$(0,a,C)$	$(0,b,E)$	$(1,\Delta,D)$
1	$(1,a,D)$		$(2,\Delta,C)$

a) Indique a sequência de configurações que podem ser computadas a partir de $(0, \underline{\Delta}aab)$.

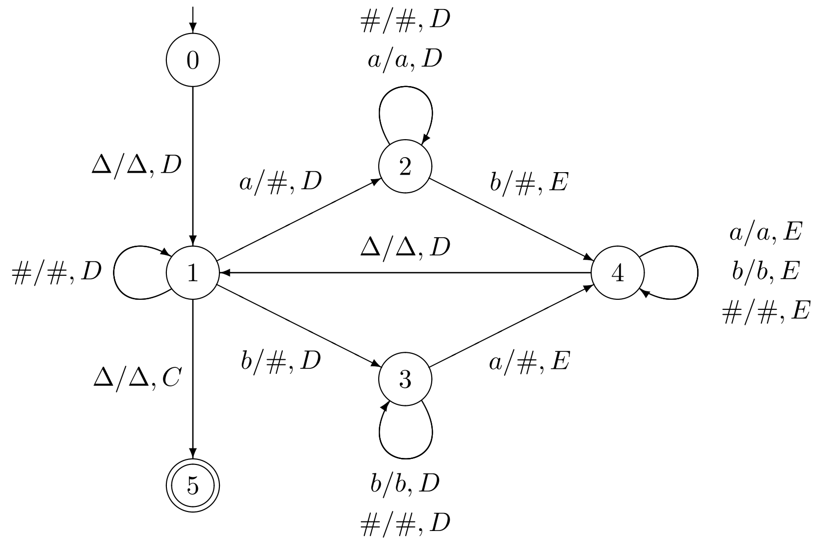
b) Indique uma palavra $u \in \{a,b,\Delta\}^*$ tal que, a partir da configuração $(0, \underline{u})$ pode ser computada uma configuração de:

i) paragem;
ii) ciclo;
iii) aceitação;
iv) rejeição.

c) Descreva informalmente o comportamento de $\mathcal{T}$ quando a configuração inicial é $(0, \underline{u})$, onde u é uma palavra sobre $\{a,b,\Delta\}$.

d) Calcule a linguagem reconhecida por $\mathcal{T}$.

1.3 Considere a seguinte máquina de Turing $\mathcal{T}$ de alfabeto de entrada $A = \{a, b\}$,



a) Indique a sequência de configurações que podem ser computadas a partir da configuração $(0, \underline{\Delta}ababba)$.

b) Identifique a linguagem reconhecida por $\mathcal{T}$.

1.4 Construa máquinas de Turing que reconheçam cada uma das seguintes linguagens:

a) ab^*a^+, sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

b) $\{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

c) $\{a^n b^{2n} a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

d) $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m < n\}$, sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

e) $\{a^n b^{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$, sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

f) $\{a^m bc^n : m + n \text{ é par}\}$, sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.

g) $\{wcw^I \in A^* \mid w \in \{a, b\}^*\}$, sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.

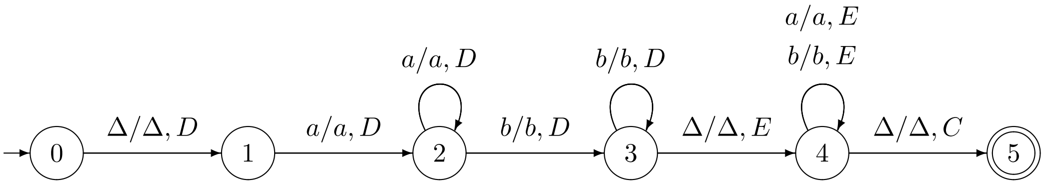
h) $\{abab^2ab^3 \cdots ab^n a : n \geq 1\}$, sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

1.5 Mostre que, para toda a máquina de Turing $\mathcal{T} = (Q, A, T, \delta, i, f, \Delta)$, existe uma máquina de Turing $\mathcal{T}'$ que reconhece a mesma linguagem que $\mathcal{T}$, e tal que $\mathcal{T}'$ nunca rejeita uma palavra (ou seja, para qualquer palavra $w \in A^*$, $\mathcal{T}'$ aceita w ou a configuração inicial $(i, \underline{\Delta}w)$ associada a w é uma configuração de ciclo).

1.6 Dada uma máquina de Turing $\mathcal{T}$, defina uma máquina de Turing $\mathcal{T}_{aba}$ tal que:

$$\mathcal{T} \text{ aceita a palavra vazia } \epsilon \iff \mathcal{T}_{aba} \text{ aceita a palavra } aba.$$

1.7 Considere a seguinte máquina de Turing $\mathcal{M}$ de alfabeto de entrada $A = \{a, b\}$,



a) Identifique a linguagem reconhecida pela máquina $\mathcal{M}$.

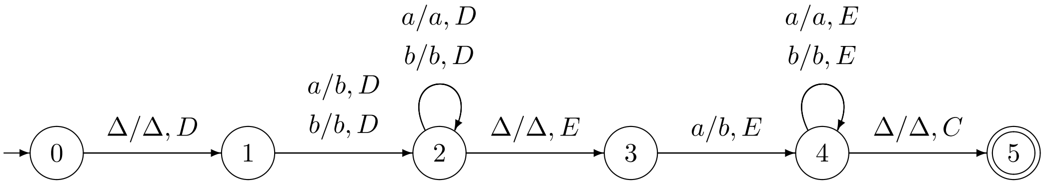
b) Identifique a linguagem reconhecida pela máquina $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{T}$, onde $\mathcal{T}$ é a máquina de Turing do Exercício 1.3.

1.8 Construa uma máquina de Turing $\mathcal{T} = (Q, A, T, \delta, i, f, \Delta)$, com alfabeto de entrada $A = \{a, b\}$, que insira uma letra $x \in A$ na célula onde o cursor está posicionado: ou seja, em rigor, que seja capaz de efetuar a computação

$$(i, u\underline{v}) \xrightarrow{*} (f, u\underline{x}v)$$

para quaisquer palavras $u \in T^*$ e $v \in A^*$.

1.9 Considere a seguinte máquina de Turing $\mathcal{T}$ de alfabeto de entrada $A = \{a, b\}$,

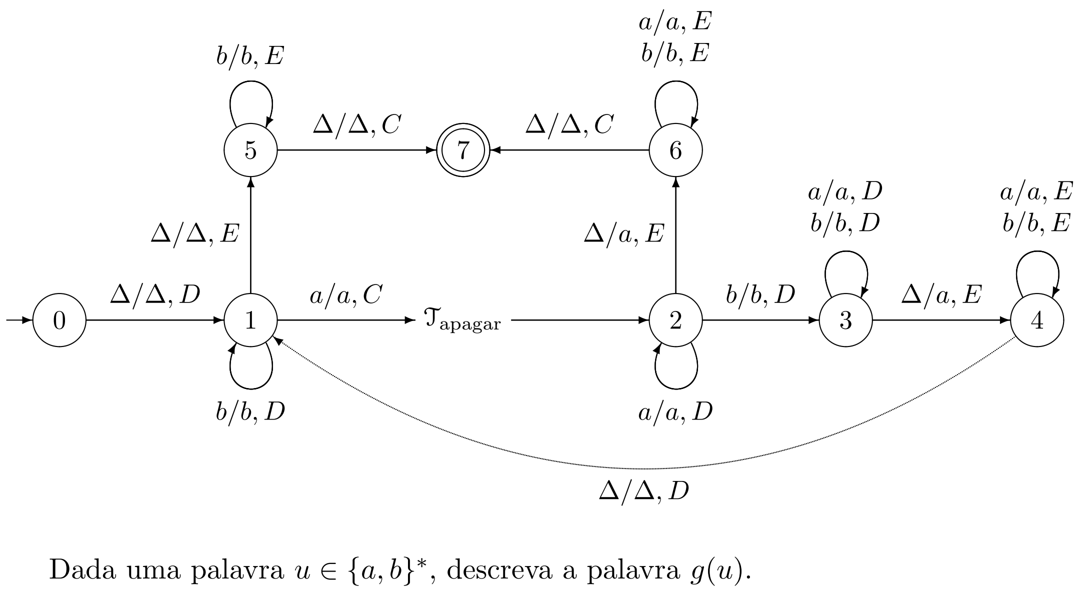


a) Indique a sequência de configurações que podem ser computadas a partir da configuração $(0, \underline{\Delta}babba)$.

b) Identifique o domínio D da função parcial $g : A^* \to A^*$ calculada por $\mathcal{T}$.

c) Para cada palavra $u \in D$, determine a palavra $g(u)$.

1.10 A seguinte máquina de Turing calcula uma função g de $\{a, b\}^*$ para $\{a, b\}^*$:



Dada uma palavra $u \in \{a, b\}^*$, descreva a palavra $g(u)$.

1.11 Indique máquinas de Turing que calculem cada uma das seguintes funções:

a) $$\begin{array}{rccl} g: & \{a,b\}^* & \longrightarrow & \{1\}^* \\ & u & \longmapsto & 1^{|u|_a} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rccl} g: & \{a,b\}^* & \longrightarrow & \{a,b\}^* \\ & u & \longmapsto & u^I \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & n & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } n = 3 \\ 0 & \text{senão.} \end{cases} \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & n & \longmapsto & n+2 \end{array}$$

e) $$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

f) $$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \{0,1,2\} \\ & n & \longmapsto & r, \quad \text{onde } n \equiv r \pmod 3 \end{array}$$

g) $$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ n.d. & \text{senão} \end{cases} \end{array}$$

h) $$\begin{array}{rccl} p_2: & {\mathbb{N}_0}^3 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & (n_1,n_2,n_3) & \longmapsto & n_2 \end{array}$$

1.12 Sejam $\mathcal{T}_f$, $\mathcal{T}_g$ e $\mathcal{T}_h$ máquinas de Turing que calculam funções $f : {\mathbb{N}_0}^2 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ e $g, h : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ respetivamente. Mostre que as seguintes funções são ainda computáveis:

a) *[função composta]*
$$\begin{array}{rccl} g \circ h: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & n & \longmapsto & g(h(n)) \end{array}$$

b) *[função soma]*
$$\begin{array}{rccl} g + h: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & n & \longmapsto & g(n) + h(n) \end{array}$$

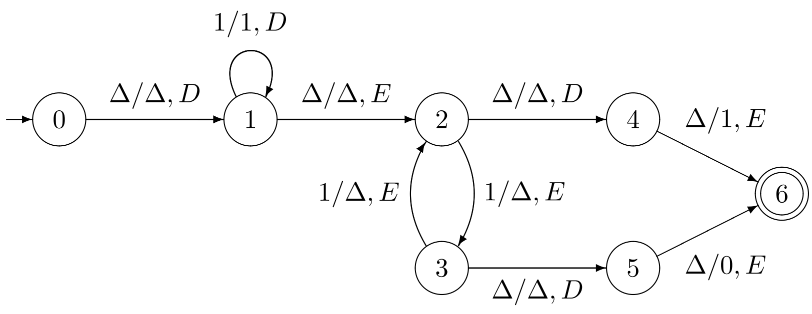
c) *[função mínimo]*
$$\begin{array}{rccl} \min(g,h): & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & n & \longmapsto & \min(g(n),h(n)) \end{array}$$

d) *[função troca de variáveis]*
$$\begin{array}{rccl} t: & {\mathbb{N}_0}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & (n,m) & \longmapsto & f(m,n) \end{array}$$

e) *[função identificação de variáveis]*
$$\begin{array}{rccl} i: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & n & \longmapsto & f(n,n) \end{array}$$

f) *[função parametrização da 2ª variável]*
$$\begin{array}{rccl} f_k: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & n & \longmapsto & f(n,k), \quad \text{onde } k \in \mathbb{N}_0 \end{array}$$

1.13 A máquina de Turing $\mathcal{T}$ seguinte, com alfabeto de entrada $A = \{1\}$, calcula a função característica χ_L de uma linguagem L sobre A.



a) Indique as configurações de $\mathcal{T}$ que podem ser computadas a partir de $(0, \underline{\Delta}111)$.
b) Indique, justificando, o valor de $\chi_L(1111)$.
c) Diga qual é a linguagem L. Justifique.
d) Diga, justificando, qual é a linguagem reconhecida por $\mathcal{T}$.
e) Modifique a máquina $\mathcal{T}$ de forma a obter uma máquina de Turing que reconheça L.

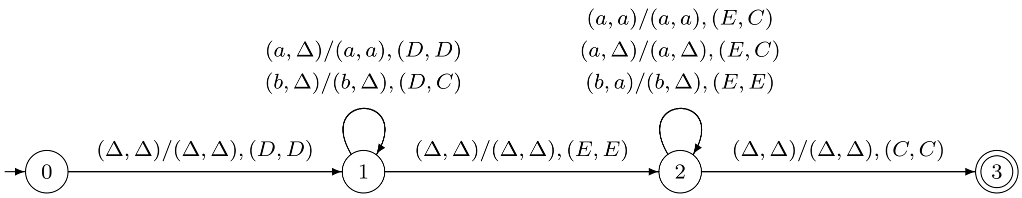
1.14 Considere a linguagem $L = (ba)^*b^+$ sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$.

a) Construa uma máquina de Turing $\mathcal{T}$ que calcule a função característica χ_L de L.

b) Indique a sequência de configurações de $\mathcal{T}$ que podem ser computadas a partir da configuração $(i, \underline{\Delta}bab^3)$, onde i é o estado inicial de $\mathcal{T}$.

c) Qual é a linguagem reconhecida por $\mathcal{T}$? Justifique.

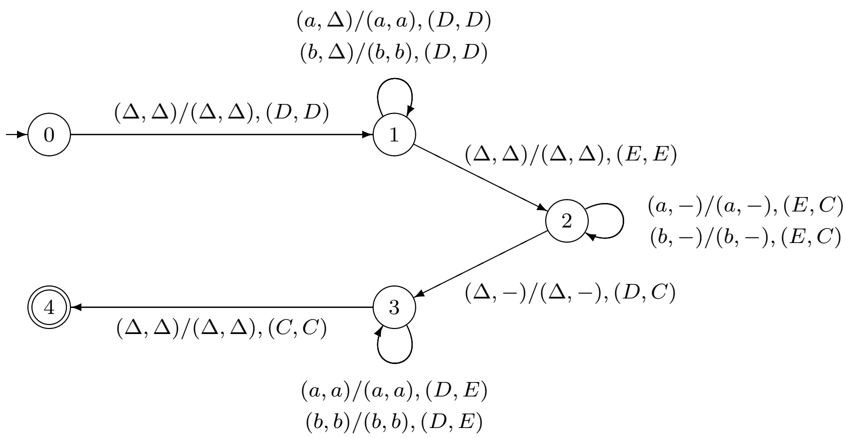
1.15 Seja $A = \{a, b\}$ e seja $\mathcal{T}$ a seguinte máquina de Turing sobre A com duas fitas,



a) Indique a sequência de configurações que podem ser computadas a partir da configuração $(0, \underline{\Delta}abbaba, \underline{\Delta})$ e diga se a palavra *abbaba* é aceite por $\mathcal{T}$.

b) Identifique a linguagem reconhecida por $\mathcal{T}$.

1.16 Seja $A = \{a, b\}$ e seja $\mathcal{T}$ a seguinte máquina de Turing sobre A com duas fitas,



Identifique a linguagem reconhecida por $\mathcal{T}$.

1.17 Considere a seguinte linguagem sobre o alfabeto $\{a, b\}$,

$$L = \{a^m b^n a^m : 1 \leq n \leq m\}.$$

Construa uma máquina de Turing com duas fitas que reconheça L.

1.18 Construa uma máquina de Turing $\mathcal{T}$, com duas fitas, que calcule a função

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{N}_0^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & (m, n) & \longmapsto & 2m + n. \end{array}$$

1.19 Considere a máquina de Turing não-determinista

$$\mathcal{T} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1\}, \{1, \Delta\}, \delta, q_0, q_3, \Delta)$$

onde a função transição δ é definida pela tabela seguinte:

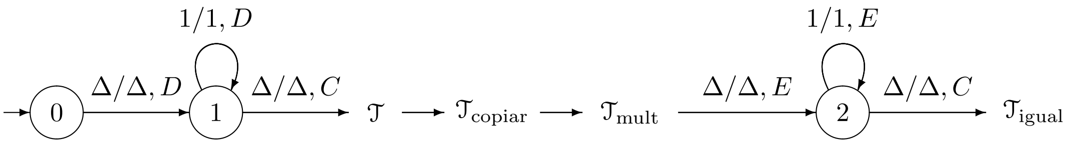
δ	1	Δ
q_0	$\emptyset$	$\{(q_1, \Delta, D)\}$
q_1	$\emptyset$	$\{(q_1, 1, D), (q_2, \Delta, E)\}$
q_2	$\{(q_2, 1, E)\}$	$\{(q_3, \Delta, C)\}$

Indique o comportamento de $\mathcal{T}$ a partir da configuração inicial $(q_0, \underline{\Delta}u)$ associada a uma palavra $u \in \{1\}^*$.

1.20 Seja $\mathcal{T}$ a máquina de Turing do exercício anterior e sejam:

- $\mathcal{T}_{\text{copiar}}$ a máquina de Turing capaz de copiar uma palavra, ou seja, de transformar o conteúdo da fita de $\underline{\Delta}u$ em $\underline{\Delta}u\Delta u$;
- $\mathcal{T}_{\text{mult}}$ a máquina de Turing capaz de multiplicar dois números, ou seja, de transformar o conteúdo da fita de $\underline{\Delta}1^m\Delta 1^n$ em $\underline{\Delta}1^{mn}$;
- $\mathcal{T}_{\text{igual}}$ a máquina de Turing capaz de testar a igualdade entre palavras, ou seja, começando com a fita em $\underline{\Delta}u\Delta v$, atinge uma configuração de aceitação se e só se $u = v$.

Considere a seguinte máquina de Turing não-determinista.



Qual é a linguagem que esta máquina de Turing reconhece?

1.21 Seja

$$L = \{1^n : n > 1 \text{ é um natural não primo}\}.$$

Usando a ideia do exercício anterior, construa uma máquina de Turing que reconheça a linguagem L.

1.22 Prove que a linguagem $L = \{wa^n : w \in A^*, n \in \mathbb{N}_0, |w|_b = n\}$ sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ é recursiva.

1.23 Suponha que $L_1, \ldots, L_k$ são linguagens recursivamente enumeráveis que formam uma partição de A^*. Mostre que cada L_i é uma linguagem recursiva.

1.24 Esboce uma prova de que, se L_1 e L_2 são linguagens recursivamente enumeráveis, então L_1L_2 e L_1^* são também recursivamente enumeráveis, construindo máquinas de Turing não-deterministas que aceitem estas linguagens.

1.25 Mostre que existe uma linguagem L tal que nem L nem $\overline{L}$ são recursivamente enumeráveis.

1.26 Seja L uma linguagem sobre um alfabeto A. Indique quais das situações seguintes são possíveis e quais são impossíveis.

a) L e $\overline{L}$ são recursivas.

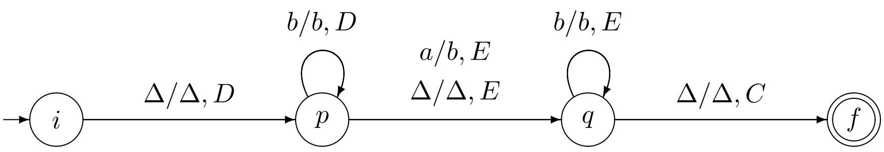
b) L e $\overline{L}$ são recursivamente enumeráveis.

c) L e $\overline{L}$ são recursivamente enumeráveis, mas nenhuma delas é recursiva.

d) L é recursiva e $\overline{L}$ é recursivamente enumerável mas não recursiva.

e) L é recursivamente enumerável e $\overline{L}$ não é recursivamente enumerável.

1.27 Seja $\mathcal{T}$ a máquina de Turing



que transforma uma dada palavra sobre o alfabeto $\{a, b\}$ numa outra em que a primeira ocorrência da letra a (caso exista) é substituída por b. Codifique a máquina $\mathcal{T}$.

1.28 Desenhe a máquina de Turing codificada por:

$$x^2yx^2yxyx^3yxyx^3y^2\ x^3yx^2yx^3yx^2yx^3y^2\ x^3yx^3yx^3yx^3yx^3y^2\ x^3yxyx^4yxyx^2y^2$$
$$x^4yx^2yx^5yx^2yx^3y^2\ x^4yx^3yx^6yx^3yx^3y^2\ x^5yxyx^7yx^2yx^2y^2\ x^6yxyx^7yx^3yx^2y^2$$
$$x^7yx^2yx^7yx^2yx^2y^2\ x^7yx^3yx^7yx^3yx^2y^2\ x^7yxyxyxyxy^2$$

1.29 Dê exemplos de palavras u sobre $\{x, y\}$ tais que u não é codificação de uma máquina de Turing.

1.30 Desenhe a parte da máquina de Turing universal $\mathcal{T}_U$ que é responsável por modificar as 3 fitas e por recolocar o cursor nas posições adequadas, depois da operação de procura ter identificado o quíntuplo correto na fita 1. Por exemplo, a configuração

$$\Delta xxyxyxxxyxyxxxyyxxxyxxy\underline{x}xxxyxxxyxxyyxxy\cdots$$
$$\Delta xyxxy\underline{x}xyxxxy\Delta\cdots$$
$$\Delta\underline{x}xx\Delta\cdots$$

seria transformada em

$$\Delta\underline{x}xyxyxxxyxyxxxyyxxxyxxyxxxxyxxxyxxyyxxy\cdots$$
$$\Delta xy\underline{x}xyxxxyxxxy\Delta\cdots$$
$$\Delta\underline{x}xxx\Delta\cdots$$

2. Problemas de decisão

2.1 Seja $A = \{a, b\}$. Mostre que as seguintes propriedades de palavras $w \in A^*$ são decidíveis.

a) w tem comprimento ímpar.

b) ab não é um fator de w.

c) w tem o mesmo número de ocorrências das letras a e b.

2.2 Indique quais das afirmações seguintes sobre palavras $w \in \{x, y\}^*$ são decidíveis. Indique ainda quais das afirmações indecidíveis são semi-decidíveis.

a) $w = c(\mathcal{T})$ para alguma máquina de Turing $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ aceita w.

b) $w = c(\mathcal{T})$ para alguma máquina de Turing $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ não aceita w.

c) $w = c(\mathcal{T})$ para alguma máquina de Turing $\mathcal{T}$.

d) $w \neq c(\mathcal{T})$ para toda a máquina de Turing $\mathcal{T}$.

2.3 Sejam P e Q predicados de domínio D, e sejam $\neg P$, $P \wedge Q$ e $P \vee Q$ os predicados definidos, para cada $d \in D$, por:

$$\begin{aligned}(\neg P)(d) &= \neg P(d)\\ (P \wedge Q)(d) &= P(d) \wedge Q(d)\\ (P \vee Q)(d) &= P(d) \vee Q(d).\end{aligned}$$

Mostre que:

a) se P e Q são decidíveis, então $P \wedge Q$ e $P \vee Q$ são decidíveis;

b) se P e Q são semi-decidíveis, então $P \wedge Q$ e $P \vee Q$ são semi-decidíveis;

c) P é decidível se e só se $\neg P$ é decidível;

d) P é decidível se e só se P e $\neg P$ são semi-decidíveis.

e) P ser semi-decidível não implica que $\neg P$ seja semi-decidível.

2.4 O objetivo deste exercício é fazer uma redução do problema da aceitação ao problema da paragem. Seja A um alfabeto.

a) Dada uma máquina de Turing $\mathcal{T}$, defina uma máquina de Turing $\mathcal{T}'$ tal que, para toda a palavra $w \in A^*$, $\mathcal{T}$ aceita w se e só se $\mathcal{T}'$ pára com w.

b) Mostre que existe uma máquina de Turing $\mathcal{R}$ que calcula a função $r : c(\mathcal{T}) \mapsto c(\mathcal{T}')$.

c) Conclua que *Aceitação* $\leq$ *Paragem*.

2.5 O objetivo deste exercício é fazer outra demonstração da indecidibilidade do problema da paragem.

a) Mostre que a linguagem $\{w : w = c(\mathcal{T})$ e $\mathcal{T}$ não pára com w, para alguma MT $\mathcal{T}\}$ não é recursiva.

b) Conclua que o problema $Q(\mathcal{T})$: "$\mathcal{T}$ pára com $c(\mathcal{T})$" é indecidível.

c) Reduza Q ao problema da paragem e conclua que o problema da paragem é indecidível.

2.6 Das afirmações seguintes selecione as que são verdadeiras, sejam quais forem os problemas de decisão P_1, P_2, Q_1 e Q_2 tais que $P_1 \leq Q_1$, $Q_1 \leq P_2$ e $Q_2 \leq P_2$.

a) Se P_2 é decidível, então P_1, Q_1 e Q_2 são também decidíveis.
b) Se P_1 é indecidível, então P_2, Q_1 e Q_2 são também indecidíveis.
c) $P_1 \leq P_2$.
d) Se Q_1 é semi-decidível, então P_1 e P_2 são também semi-decidíveis.

2.7 Considere os problemas de decisão

- *Pára*$_\epsilon$*:* dada uma máquina de Turing $\mathcal{T}$, será que $\mathcal{T}$ pára com ϵ?
- *Pára*$_{ab}$*:* dada uma máquina de Turing $\mathcal{T}$, será que $\mathcal{T}$ pára com a palavra ab?

a) Mostre que *Pára*$_\epsilon \leq$ *Pára*$_{ab}$.
b) Conclua que o problema *Pára*$_{ab}$ é indecidível.

2.8 Considere o problema *Equivalência:* dadas máquinas de Turing $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, será que $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ reconhecem a mesma linguagem?

a) Mostre que o problema *AceitaTudo* se reduz a *Equivalência*.
b) Conclua que o problema da equivalência é indecidível.

2.9 Mostre que os seguintes problemas de decisão são indecidíveis.

a) Dadas máquinas de Turing $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, será que $L(\mathcal{T}_1) \subseteq L(\mathcal{T}_2)$?
b) Dadas máquinas de Turing $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, será que $L(\mathcal{T}_1) \cap L(\mathcal{T}_2) = \emptyset$?
c) Dada uma máquina de Turing $\mathcal{T}$ e um estado não final q, será que $\mathcal{T}$ atinge o estado q quando iniciada com a fita vazia?

2.10 Porque é que o seguinte argumento é incorreto?

> O problema da aceitação da palavra vazia é um subproblema do problema da aceitação, que é indecidível, e portanto é ele próprio indecidível.

2.11 Mostre que as seguintes propriedades de máquinas de Turing $\mathcal{T}$ são decidíveis.

a) O estado inicial de $\mathcal{T}$ é q_6.
b) $\mathcal{T}$ tem 4 estados.
c) O símbolo s_{12} pertence ao alfabeto da fita de $\mathcal{T}$.
d) $\delta(q_3, \Delta) = (q_5, \Delta, E)$ é uma transição de $\mathcal{T}$.
e) O código de $\mathcal{T}$ é w_0, onde $w_0 \in \{x, y\}^*$ é uma palavra fixa.

2.12 Mostre que as seguintes propriedades de linguagens recursivamente enumeráveis L são indecidíveis.

a) L contém w_0, onde w_0 é uma palavra fixa.
b) L é regular.
c) L é finita.
d) $L \neq \{a, b\}^*$.

2.13 Dê exemplo de uma propriedade de linguagens que nenhuma linguagem recursivamente enumerável verifica.