

Probabilidades e Aplicações

1. Mostre que

- (a) se $X \sim \text{Bin}(n, p)$ então $E[X] = np$ e $\text{Var}[X] = np(1-p)$;
- (b) se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então $E[X] = \text{Var}[X] = \lambda$;
- (c) se $X \sim \text{Geom}(p)$ então $E[X] = \frac{1}{p}$ e $\text{Var}[X] = (1-p)/p^2$;
- (d) se $X \sim U([a, b])$ então $E[X] = (a+b)/2$ e $\text{Var}[X] = (b-a)^2/12$;
- (e) se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ então $E[X] = 1/\lambda$ e $\text{Var}[X] = 1/\lambda^2$;
- (f) se $X \sim N(m, \sigma^2)$ então $E[X] = m$ e $\text{Var}[X] = \sigma^2$.

Nota: Antes de avançar para o cálculo de $E[X]$ e de $\text{Var}[X]$ mostre que estas existem.

2. Averigue se existem e, se sim, determine a esperança matemática, a variância e o desvio-padrão:

- (a) das v.a.r.'s: discretas referidas no exercício 5 da Folha Prática 5;
 - (b) das v.a.r.'s: absolutamente contínuas referidas nos exercícios 5, 6 e 8 da Folha Prática 6.
- Determine ainda os quartis de cada uma das v.a.r.'s indicadas.

3. Sejam $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $Y = \frac{1}{1+X}$. Averigue se existe e, em caso afirmativo, calcule $E[Y]$.

4. Sejam $X \sim \text{Exp}(1)$ uma v.a.r. e $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

- (a) Mostre que a v.a.r. $Y = \phi(X)$ tem esperança matemática e determine-a.
- (b) Identifique a lei de Y e refaça a alínea anterior. Diga ainda o valor de $\text{Var}[Y]$

5. A proporção de álcool num certo composto é uma v.a.r. absolutamente contínua, X , com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se c.c.} \end{cases}.$$

(a) Determine a função de distribuição de X e, caso existam, calcule $E[X]$ e $\text{Var}[X]$.

(b) O preço de venda, em €, deste composto depende da proporção de álcool: se a proporção de álcool é inferior a $1/3$, o preço é v_1 € por litro; se é superior ou igual a $1/3$ e inferior a $2/3$, o preço é v_2 € por litro; caso contrário, o preço é v_3 € por litro. O custo de produção é sempre de k € por litro. Qual o lucro médio, por litro? E o desvio-padrão? Expresse os resultados em função das constantes reais v_1 , v_2 , v_3 e k .

6. (*) Para diferentes valores dos parâmetros das respectivas leis, esboce os gráficos das funções de probabilidade (caso discreto) e das funções densidade de probabilidade (no caso absolutamente contínuo) das v.a.r.'s referidas no Ex. 1. Comente sobre o efeito que esses parâmetros têm na forma dos gráficos [ver, por exemplo, <https://imedil2023-statistics.streamlit.app/>].

7. (*) Seja U uma v.a.r. tal que $U \sim U([0, 1])$ e seja F a função de distribuição de uma qualquer v.a.r.. Define-se a *inversa generalizada* de F como sendo a função

$$\mathbb{F}^{-1}:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ v \rightarrow \mathbb{F}^{-1}(v) = \inf\{u \in \mathbb{R} : F(u) \geq v\}.$$

Mostre que a função de distribuição da v.a.r. $X = \mathbb{F}^{-1}(U)$ é F .

Nota: \mathbb{F}^{-1} também é conhecida como *função quantil de F* . Esta designação é óbvia. Porquê?

(*) Exercícios desafio