Universidade do Minho **Curso: LCC**

Departamento de Matemática **Folha 7** **2023/2024**

Probabilidades e Aplicações

---

1. Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Mostre que:
   (a) se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.
   (b) se $Y \sim N(0,1)$ então $Z = \sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$.
   (c) se $X \sim N(0,1)$ então a função de distribuição de X, F_X, satisfaz a condição
   $$F_X(c) = 1 - F_X(-c),\ \forall c \in \mathbb{R}.$$

2. Suponha que o saldo diário, em milhares de euros, de um estabelecimento comercial é uma v.a.r., X, absolutamente contínua e tal que $X \sim N(1.7, 2)$.
   (a) Qual a probabilidade de, num dia escolhido ao acaso, este estabelecimento ter:
      i) saldo superior 1 800€?
      ii) saldo inferior a 1 700€?
      iii) saldo superior a 1 700€ e inferior a 1 900€?
      iv) ter prejuízo?
   (b) Qual a probabilidade de, numa semana, haver pelo menos 2 dias em que este estabelecimento tem prejuízo? (assuma que a semana tem 6 dias e que os saldos obtidos em dias distintos são quantidades independentes).

3. Calcule o valor das seguintes probabilidades quando $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:
   (a) $P(|X-\mu| \leq \sigma)$
   (b) $P(|X-\mu| \leq 2\sigma)$
   (c) $P(|X-\mu| \leq 3\sigma)$

4. Sejam a um número real estritamente positivo e X uma v.a.r. tal que $X \sim N(0,1)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:
   (a) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 0$
   (b) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 1$
   (c) $P(X \leq a) = P(X > a)$
   (d) $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$

5. Sejam $\mu \in \mathbb{R}^+$ e $X \sim N(\mu, \mu^2)$. Determine $P(X < -\mu | X < u)$.

6. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < a \vee x > b \\ \frac{1}{10} & se \quad a \leq x \leq b \end{cases},$$
   com a e b constantes reais, e tal que $P_X(]8, +\infty[) = 0.4$ (com P_X a lei de probabilidade de X).
   (a) Mostre que $a = 2$ e $b = 12$. Determine a função de distribuição de X.
   (b) A lei de probabilidade de X é conhecida. Identifique-a.

(c) Suponha agora que a v.a.r. X representa o consumo diário de água, em metros cúbicos (m^3), de uma certa empresa.

i. Calcule a probabilidade de, num dia, o consumo de água ser de inferior a $8m^3$?

ii. Determine a probabilidade de, em 10 dias, haver dois dias em que o consumo de água é superior a $8m^3$ (assuma que os consumos de água em dias diferentes são quantidades independentes).

7. O rótulo de uma garrafa de água indica que o seu conteúdo é de 350 ml. A linha de produção, que enche estas garrafas, pode não conseguir colocar exatamente os 350 ml mas garante que uma garrafa contém uma quantidade de água aleatória que segue a lei Uniforme no intervalo $[340, 360]$.

   (a) Qual é a probabilidade de uma garrafa conter menos do que 345 ml de água?

   (b) Qual é a probabilidade de uma garrafa conter mais de 355 ml de água?

   (c) O controle de qualidade aceita uma garrafa se a quantidade de água que esta contém não se afastar em mais de 4 ml do indicado no rótulo. Qual é a probabilidade de uma garrafa de água produzida nesta linha ser rejeitada no controle de qualidade?

   (d) Determine o valor de água (em ml) abaixo do qual estão 95% das garrafas enchidas..

8. O tempo decorrido, em minutos, entre chegadas consecutivas de dois clientes a uma repartição pública é uma v.a.r. que segue a lei $Exp(0.1)$. De igual modo, o tempo decorrido entre a abertura da repartição e até à chegada do primeiro cliente também é uma v.a.r. com a mesma lei Exponencial.

   (a) Determine a probabilidade de o tempo entre chegadas de dois clientes ser inferior a 5 minutos.

   (b) Determine a probabilidade de o tempo entre chegadas de dois clientes ser de pelo menos 10 minutos.

   (c) Sabendo que nos primeiros 10 minutos de abertura da repartição ainda não tinha chegado qualquer cliente, qual a probabilidade de o primeiro cliente chegar durante os 5 minutos seguintes?

9. (*) Sejam $X \sim Exp(\lambda)$, a uma constante real positiva e considere a v.a.r. $Y = \begin{cases} X - a & se \quad X > a \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$. Calcule $P(Y = 0)$ e determine a função de distribuição de Y.

10. (*) Seja X uma v.a.r. com função de distribuição dada por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} & t < -1 \\ 1/2 & \text{se} & -1 \le t < 1/2 \\ (t+1)/3 & \text{se} & 1/2 \le t \le 2 \\ 1 & \text{se} & t \ge 2 \end{cases}.$$

   (a) Mostre que $P(X = -1) = \frac{1}{2}$ e que $P(X = a) = 0$, $\forall\, a \neq -1$.

   (b) Mostre que a função H se pode escrever da seguinte forma

$$H(t) = \frac{1}{2} H_1(t) + \frac{1}{2} H_2(t), \; t \in \mathbb{R},$$

   onde H_1 e H_2 são, respectivamente, funções de distribuição de uma lei discreta e de uma lei absolutamente contínua. Identifique as funções H_1 e H_2 e as correspondentes leis de probabilidade. *Obs.: Neste caso, diz-se que a lei de probabilidade da v.a.r. X é uma lei mista ou de mistura.*

(*) Exercícios desafio