Universidade do Minho **Curso: LCC**

Departamento de Matemática **Folha 9** **2023/2024**

Probabilidades e Aplicações

---

1. Considere a experiência aleatória que consiste em efetuar 2 lançamentos consecutivos de um dado equilibrado. Seja (X, Y) o par aleatório em que X representa o número de ases e Y representa o número de faces par obtidas nos dois lançamentos.
   (a) Determine a função de probabilidade conjunta do par (X, Y).
   (b) Calcule $P(Y < X)$.
   (c) Identifique as funções de probabilidade das margens.
   (d) Diga se X e Y são independentes.
   (e) Calcule $Cov(X, Y)$ e $\rho(X, Y)$.

2. Considere a experiência aleatória que consiste em efetuar 4 lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada. Seja X_1 a v.a.r. que representa o número de caras nos 2 primeiros lançamentos e X_2 a v.a.r. que representa o número de caras nos 3 últimos lançamentos.
   (a) Determine a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X_1, X_2).
   (b) Determine o valor da função de distribuição conjunta do par (X_1, X_2) no ponto $(1, 2)$.
   (c) Identifique as funções de probabilidade das margens e diga se X_1 e X_2 são independentes.
   (d) Calcule $Cov(X_1, X_2)$ e $\rho(X_1, X_2)$.

3. Considere o par aleatório (X, Y) com função de probabilidade conjunta dada por
$$p((x,y)) = \begin{cases} \frac{1}{32}(x^2 + y^2) & se \quad x \in \{0,1,2,3\},\ y \in \{0,1\} \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}.$$
   (a) Identifique $C_{(X,Y)}$ e determine as funções de probabilidade das margens.
   (b) X e Y são independentes? Justifique.
   (c) Calcule $E[X], E[Y], Var[X], Var[Y], Cov(X, Y)$ e $\rho(X, Y)$.

4. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.'s) com função de distribuição F.
   (a) Considere agora as v.a.r.'s M e N definidas por
$$M = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \quad e \quad N = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$
   Escreva, em função de F, a função de distribuição das v.a.r.'s M e N.
   (b) Assuma agora que F é a função de distribuição da lei $Exp(\lambda)$, i.e., que
$$F(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ 1 - e^{-\lambda c} & se \quad c \geq 0 \end{cases}.$$
   Identifique a lei da v.a.r. N.

5. Sejam X e Y duas v.a.r.'s discretas e i.i.d.'s que seguem a lei Uniforme no conjunto $\{-1, 1\}$. Diga, justificando, se as v.a.r.'s X e XY ainda são independentes.

6. Sejam X_1 e X_2 v.a.r.'s discretas e i.i.d.'s com função de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & se \quad x \in \{0,1\} \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases},$$

com $0 < p < 1$. Prove que $X_1 + X_2 \sim Bin(2,p)$ e generalize o resultado para a soma de n v.a.r.'s discretas e i.i.d.'s com função de probabilidade f.
<u>Notas</u>:
1) Observe que f corresponde à função de probabilidade da lei $Bernoulli(p)$.
2) Pode usar, sem demonstrar, que se $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n$ são n v.a.r.'s independentes então $\sum_{k=1}^{n-1} X_k$ e X_n ainda são v.a.r.'s independentes.

7. Seja (X,Y) um par aleatório com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f((x,y)) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & se \quad x>0,\ y>0 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}.$$

   (a) Determine as funções densidade de probabilidade das margens.
   (b) Calcule $P(X \leq Y)$.
   (c) Calcule, para todo $u \in \mathbb{R}$, $P(X+Y \leq u)$. Use o resultado para calcular $P(1 < X+Y \leq 2)$.
   (d) X e Y são independentes?
   (e) Determine $E[X], E[Y], Var(X), Var(Y)$, $Cov(X,Y)$ e $\rho(X,Y)$.

8. Seja X é uma v.a.r. discreta que segue a lei Uniforme no conjunto $\{-2,-1,1,2\}$. Calcule $Cov(X,X^2)$ e $\rho(X,X^2)$ e comente o resultado obtido.

9. Seja (X,Y) um par aleatório com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f((x,y)) = \begin{cases} kx(x-y) & se \quad 0<x<2,\ -x<y<x \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases},$$

em que k é uma constante real.

   (a) Determine k e as funções densidade de probabilidade das margens.
   (b) X e Y são independentes?
   (c) Determine $E[X], E[Y], Var[X], Var[Y]$, $Cov(X,Y)$ e $\rho(X,Y)$.

10. Suponha que, numa certa cidade, a v.a.r. X representa a proporção de potenciais compradores de um produto A e a v.a.r. Y representa a proporção de compradores de um produto B, ambos produzidos pela mesma empresa. Sabe-se que a função densidade de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y) é dada por

$$f((x,y)) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+4y) & se \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}.$$

   (a) Determine as funções densidade de probabilidade das margens e diga se são independentes.
   (b) Calcule a proporção esperada de potenciais compradores de A.
   (c) Qual a probabilidade de o produto A ser preferido ao produto B?
   (d) Determine $E[X], E[Y], Var[X], Var[Y]$, $Cov(X,Y)$ e $\rho(X,Y)$.

11. Numa lotaria com 10.000 bilhetes, numerados de 0000 a 9999, qual a probabilidade de o primeiro prémio calhar num número com exactamente dois algarismos ímpares e exactamente um zero?

12. No lançamento de um dado equilibrado 12 vezes consecutivas, qual é a probabilidade de cada uma das faces aparecer exactamente duas vezes?

13. O par aleatório (X, Y) referido no Ex. 1 tem uma lei de probabilidade discreta conhecida. Identifique-a. Pode afirmar o mesmo sobre o par aleatório do Ex. 2?

14. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_p$ v.a.r.'s independentes e tais que $X_i \sim N(u_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, p$. Mostre que
$$(X_1, X_2, \ldots, X_p) \sim N_p(\mathbf{u}, \Sigma),$$
com $\mathbf{u} = [u_1\, u_2\, \ldots\, u_p]^\top$ e $\Sigma = \text{Diagonal}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_p^2)$.

15. Seja (X_1, X_2) um par aleatório que segue uma lei Normal bivariada e tal que $|\rho(X_1, X_2)| \neq 1$.
    (a) Mostre que a função densidade de probabilidade conjunta de (X_1, X_2) é dada por:
    $$f((x_1, x_2)) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-u_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-u_1}{\sigma_1}\frac{x_2-u_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-u_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$
    com $u_1 = E[X_1]$, $u_2 = E[X_2]$, $\sigma_1^2 = Var[X_1] > 0, \sigma_2^2 = Var[X_2] > 0$ e $\rho = \rho(X_1, X_2)$.
    (b) Considere o caso em que $\rho(X_1, X_2) = 0$. Identifique a lei de probabilidade das margens, X_1 e X_2, e conclua que, neste caso, X_1 e X_2 são independentes.

16. Considere o par aleatório (X_1, X_2) absolutamente contínuo com função densidade de probabilidade conjunta dada por
$$f((x_1, x_2)) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\} & se \quad (x_1 < 0 \wedge x_2 < 0) \vee (x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0) \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}.$$
    (a) Mostre que as margens, X_1 e X_2, têm lei Normal standard.
    (b) Determine $Cov(X_1, X_2)$ e $\rho(X_1, X_2)$.
    (c) Utilize este par aleatório para concluir que um vetor aleatório cujas margens têm lei Normal não tem necessariamente uma lei Normal multivariada.

17. Seja X a v.a.r. que representa a venda diária de um produto (em Kg) num certo estabelecimento comercial A. Sabe-se que X é absolutamente contínua com função de distribuição
$$F(c) = \begin{cases} 0 & se & c < k \\ \frac{c-1}{a} & se & k \leq c < 4 \\ 1 & se & c \geq 4 \end{cases}$$
em que a e k são constantes reais. Sabe-se também que $P_X(]2, +\infty[) = \frac{2}{3}$, onde P_X denota a lei de probabilidade de X.
    (a) Mostre que $a = 3$, $k = 1$ e determine os quartis de X.
    (b) Determine a probabilidade de, em 15 dias de vendas, haver 4 dias em que se vende menos de 3kg e de haver 5 dias em que se vende mais de 3.5kg. Assuma que as quantidades vendidas em dias distintos são independentes.
    (c) Seja agora Y a v.a.r. que representa a venda diária do mesmo produto num outro estabelecimento B. Suponha que X e Y são i.i.d.'s.
        i. Determine a função densidade de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y).
        ii. Calcule a probabilidade de, num dia, a quantidade vendida deste produto no estabelecimento A ser superior à vendida no estabelecimento B.
        iii. Calcule a probabilidade de, num dia, se vender mais do que 2kg de produto em cada um dos estabelecimentos.