Universidade do Minho **Curso: LCC**

Departamento de Matemática **Folha 3** **2023/2024**

Probabilidades e Aplicações

---

1. Calcule a probabilidade de ocorrer pelo menos uma coincidência nos dias de aniversário de $n \geq 2$ pessoas escolhidas ao acaso (considere o ano com 365 dias). Para que valores de n essa probabilidade é superior a $\frac{1}{2}$?

2. Considere a experiência aleatória ξ: "lançamento de uma moeda equilibrada $n-1$ vezes consecutivas", com $n \geq 3$.
   (a) Construa o modelo de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associado a esta experiência.
   (b) Considere os seguintes n acontecimentos
   $$E_j = \begin{cases} \text{“ocorre cara no } j\text{-ésimo lançamento”} & \text{se} \quad j \in \{1, \ldots, n-1\} \\ \text{“ocorrem uma cara e uma coroa nos 2 primeiros lançamentos”} & \text{se} \quad j = n \end{cases}.$$
      i. Prove que $P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_j)$, para todo o $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$.
      ii. Calcule $P\left(\bigcap_{j=1}^{n} E_j\right)$.
      iii. Comente a afirmação: "Uma família finita de acontecimentos independentes 2 a 2 é uma família de acontecimentos independentes."

3. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes e generalize-as para uma qualquer família finita de acontecimentos:
   (a) A e B são independentes
   (b) A e $\overline{B}$ são independentes
   (c) $\overline{A}$ e B são independentes
   (d) $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são independentes

   Mostre ainda que A é independente de A sse $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

4. Dispomos de n caixas e n bolas, numeradas de 1 a n, e colocamos, ao acaso, uma (e uma só) bola em cada caixa. Designando por E_i o acontecimento: "a bola numerada com i está colocada na caixa i", $i \in \{1, \ldots, n\}$,
   (a) Calcule $P(E_i)$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   (b) Identifique o acontecimento $(E_i \cap E_j)$ e calcule $P(E_i \cap E_j)$, para $1 \leq i < j \leq n$.
   (c) Calcule $P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \ldots \cap E_{i_k})$, para $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.
   (d) Identifique o acontecimento $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ e calcule a sua probabilidade.
   (e) Seja Z_n o número de bolas, entre as n, que estão colocadas na caixa correspondente ao seu número. Mostre que $\lim_{n \to \infty} P(Z_n = 0) = e^{-1}$.

5. Tenho duas moedas normais, e equilibradas, e ainda uma moeda falsa que tem 'cara' nas duas faces. Escolho ao acaso uma moeda entre estas três, lanço-a n vezes e observo que saíram n caras. Qual a probabilidade de eu ter escolhido a moeda falsa?