Universidade do Minho **Curso: LCC**

Departamento de Matemática **Folha 1** **2023/2024**

Probabilidades e Aplicações

---

1. Sejam A, B e C subconjuntos quaisquer de um conjunto Ω. Diga, sem demonstrar, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$
   (b) se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$
   (c) se $A \subseteq B$ então $A = A \cap B$
   (d) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$
   (e) se $A \cap B = \emptyset$ e $C \subseteq A$ então $B \cap C = \emptyset$
   (f) $A \cup \overline{A} = \Omega$, em que $\overline{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\}$
   (g) $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$
   (h) $\overline{A \cap B} = A \cup B$
   (i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   (j) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   (k) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2. Considere o conjunto $A = \{\{2, 3\}, \{4, 5\}, 6\}$. Em cada alínea identifique a afirmação verdadeira:

   (a) $\{4, 5\} \subseteq A$ ou $\{4, 5\} \in A$.
   (b) $\{6\} \in A$ ou $6 \in A$.
   (c) $\{\{2, 3\}\} \subseteq A$ ou $\{\{2, 3\}\} \in A$.
   (d) $\emptyset \in A$ ou $\emptyset \subseteq A$.
   (e) $A \in A$ ou $A \subseteq A$.

3. Considere r conjuntos finitos, $A_1, A_2, \ldots, A_r$, com $\#A_i = n_i > 0$, $i \in \{1, \ldots, r\}$. Recorde que o produto cartesiano destes r conjuntos, denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$, tem $n_1 \times n_2 \ldots \times n_r$ elementos.

   (a) Mostre que o número de <u>sequências ordenadas</u> formadas por r elementos, retirados de um mesmo conjunto A, com $\#A = n$, é igual a n^r.
   (b) Mostre que número de <u>sequências ordenadas</u> formadas por r elementos <u>distintos</u> retirados de um mesmo conjunto A, com $\#A = n$, é igual a $\frac{n!}{(n-r)!}$, $n \geq r$.
   (c) Mostre que o número de <u>subconjuntos</u> formados por r elementos (distintos), retirados de um mesmo conjunto A, com $\#A = n$, é igual a $\frac{n!}{r!(n-r)!} \equiv \binom{n}{r}$, $n \geq r$.

4. (a) Seja $\Omega = \{a, b, c\}$. Identifique o conjunto partes de Ω, denotado por $\mathcal{P}(\Omega)$, e indique o seu cardinal.
   (b) Se Ω tiver n elementos, qual é o cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$?

5. Averigue se existe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\,,$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por:

i) $f(x) = \begin{cases} 10 & se \quad -0.1 \le x \le 0 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & se \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2 & se \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} e^x & se \quad x \le 0 \\ 1 & se \quad c.c. \end{cases}$

iv) $f(x) = \begin{cases} e^x & se \quad x \le 0 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$

v) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & se \quad x \ge 0 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$

vi) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & se \quad x \ge 0 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$

vii) $f(x) = \begin{cases} x^2e^{-x} & se \quad x \ge 0 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$

viii) $f(x) = \frac{1}{4}e^{-|x|}$

6. Seja Ω um conjunto e S uma álgebra sobre Ω, isto é, S é uma família de subconjuntos de Ω que satisfaz as seguintes condições:

i. $\Omega \in S$ ii. $F \in S \Rightarrow \overline{F} \in S$, iii. $F, G \in S \Rightarrow F \cup G \in S$.

Mostre que:

(a) $\emptyset \in S$,
(b) se $F, G \in S$ então $F \cap G \in S$
(c) se $F, G \in S$ então $F - G \equiv F \setminus G \equiv F \cap \overline{G} \in S$.
(d) se $F_1, F_2, \ldots, F_m \in S$ então $\bigcup_{i=1}^{m} F_i \in S$, com $m \in \mathbb{N}$ e $m \ge 2$.
(e) se $F_1, F_2, \ldots, F_m \in S$ então $\bigcap_{i=1}^{m} F_i \in S$, com $m \in \mathbb{N}$ e $m \ge 2$.

7. (a) Seja E um subconjunto qualquer de Ω. Conclua que $\{\emptyset, E, \overline{E}, \Omega\}$ é uma álgebra sobre Ω.
(b) Dê um exemplo de uma álgebra sobre o conjunto $\Omega = \{a, b, c, d\}$ distinta de $\mathcal{P}(\Omega)$.

8. Sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra e $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$. Mostre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$.

leis de morgan aplicam se em mais de 2 parcelas

9. (a) Mostre que a intersecção de duas σ-álgebras sobre um conjunto Ω é uma σ-álgebra sobre Ω.
(b) Dê exemplo de duas σ-álgebras, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{F}$, sobre um conjunto Ω tais que $\mathcal{A} \cup \mathcal{F}$ não seja uma σ-álgebra sobre Ω.

10. Sejam $\Omega = \{i, s, e, g\}$ e $\mathcal{C} = \{\{i, s, e\}, \{s, e\}\}$. Determine $\sigma(\mathcal{C})$.