Universidade do Minho **Curso: LCC**

Departamento de Matemática **Folha 2** **2023/2024**

Probabilidades e Aplicações

---

1. Sejam Ω um conjunto finito e P a função definida por
$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \; A \in \mathcal{P}(\Omega).$$
Mostre que P é uma medida de probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. [Observação: Esta medida P é conhecida por medida de probabilidade de Laplace.]

2. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $B \in \mathcal{F}$ tal que $P(B) > 0$. Prove que a função P_B definida por
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; A \in \mathcal{F},$$
é uma medida de probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. [Observação: P_B é designada de *probabilidade condicionada por* B.]

3. Verifique se a função $Q : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to [0, +\infty]$ definida por
$$Q(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } \; A \text{ tem um número infinito de elementos} \\ 0, & \text{se } \; A \text{ tem um número finito de elementos} \end{cases}$$
é uma medida de probabilidade sobre $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$.

4. Seja $Q : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ uma função σ-aditiva que satisfaz as seguintes propriedades:
   (a) $Q(I) > 0$, para todo o intervalo real I de amplitude não nula,
   (b) $Q(]k, k+1[) = \frac{1}{k(k+1)}, k \in \mathbb{N}$.

   Mostre que Q não é uma medida de probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

5. Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$.
   (a) Mostre que, se $P(A_n) = 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 0$.
   (b) Mostre que, se $P(A_n) = 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$.

6. Identifique os espaços de probabilidade das seguintes experiências aleatórias e dê exemplos de dois acontecimentos incompatíveis (mas não impossíveis) para cada uma delas. Calcule ainda a probabilidade de cada um dos acontecimentos indicados.
   (a) Lançamento de uma moeda seguido do lançamento de um dado, ambos equilibrados.
   (b) Lançamento de uma moeda equilibrada três vezes consecutivas.
   (c) Lançamento de um dado equilibrado três vezes consecutivas.
   (d) Lançamento de um dado com faces numeradas de 1 a 6, em que sair a face i é duas vezes mais provável do que sair a face $i-1$, $i \in \{2, \ldots, 6\}$.

   Relativamente à experiência indicada na alínea (c), mostre que De Mére tinha razão ao afirmar que sai mais vezes a soma 10 do que a soma 9.