

LICENCIATURA EM CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO

COMPUTABILIDADE E COMPLEXIDADE

3. FUNÇÕES PARCIAIS RECURSIVAS

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho
Braga, Portugal

1º semestre 2023/2024

Em 1921/22, o matemático alemão [David Hilbert](#) (1862-1943) deu um curso sobre [fundações da matemática](#) no qual propõe que estas sejam reformuladas de forma rigorosa, partindo da [aritmética](#). O programa de Hilbert era que toda a matemática poderia ser reduzida a um [número finito de axiomas](#) a partir dos quais qualquer proposição da matemática poderia ser provada.

Em 1931, o matemático austríaco [Kurt Gödel](#) (1906-1978) provou, através do seu [Teorema da incompletude](#), que esta tarefa é impossível. Este teorema diz que em qualquer sistema axiomático contendo a aritmética de Peano, existem afirmações verdadeiras que não podem ser demonstradas a partir dos axiomas.

As *funções recursivas primitivas* são aquelas que podem ser obtidas de certas *funções básicas* usando *composição* e *recursão primitiva*. A maior parte das funções “usuais” (tais como *adição*, *multiplicação*, *exponenciação*,...) são recursivas primitivas.

Em “*On the Infinite*” (1925), Hilbert conjecturou que a (agora chamada) *função de Ackermann* não é recursiva primitiva, mas esse facto só foi provado em 1928 por um seu aluno, o matemático alemão *Wilhelm Ackermann* (1896-1962), no artigo “*On Hilbert’s construction of the real numbers*”.

As funções recursivas primitivas formam uma subclasse estrita da classe das *funções parciais recursivas* (que, como se pode provar, coincide com a classe das *funções computáveis*) à qual pertence a função de Ackermann.

Note-se que na demonstração do Teorema da incompletude, Gödel mostrou que existem funções não computáveis.

DEFINIÇÃO

As funções *iniciais* ou *básicas* são as seguintes:

- ① Funções *zero*: para cada inteiro $k \geq 0$, a função *zero* de aridade k é a função

$$\begin{aligned} \text{zero}^k : \quad \mathbb{N}_0^k &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

- ② Função *sucessor*: é a função

$$\begin{aligned} s : \mathbb{N}_0 &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

- ③ Funções *projeção*: para cada natural k e cada $j \in \{1, \dots, k\}$, a função de aridade k de *projeção* sobre a componente j é a função

$$\begin{aligned} p_j^k : \quad \mathbb{N}_0^k &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto x_j \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO (OPERADOR DE COMPOSIÇÃO)

Seja

$$f : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$$

uma função k -ária e sejam

$$g_1, \dots, g_k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$$

k funções n -árias. A função n -ária

$$h : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$$

definida, para cada $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0$, por

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

é chamada a *composição* de f com g_1, \dots, g_k , e escreve-se

$$h = f \circ (g_1, \dots, g_k).$$

EXEMPLO

Seja

$$\textcolor{red}{ad} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ (x, y) \mapsto x + y$$

a função de adição em \mathbb{N}_0 e consideremos as funções

$$\textcolor{red}{g_1} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{e} \quad \textcolor{red}{g_2} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 . \\ x \mapsto x^3 \qquad \qquad \qquad x \mapsto 2x$$

Então $h = \textcolor{red}{ad} \circ (g_1, g_2)$ é a função

$$\textcolor{red}{h} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ x \mapsto x^3 + 2x.$$

TEOREMA

Se $f : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ e $\textcolor{red}{g_1}, \dots, \textcolor{red}{g_k} : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ são funções computáveis, então a função composição $f \circ (\textcolor{red}{g_1}, \dots, \textcolor{red}{g_k})$ é computável.

EXERCÍCIOS

1 Calcule os valores de:

a) $\text{zero}^2(1, 5)$;

b) $p_3^4(0, 3, 8, 2)$;

c) $p_2^3(5, s(6), 22)$;

d) $s \circ s \circ p_1^1(15)$.

2 Considere as funções $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definidas por

$$g_1(x, y) = x + y, \quad g_2(x, y) = 2xy^2, \quad g_3(x, y) = 5y,$$

e a função $f : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definida por $f(x, y, z) = x + y + z^2$.

a) Identifique a função $h = f \circ (g_1, g_2, g_3)$.

b) Calcule $h(1, 1)$.

DEFINIÇÃO (OPERADOR DE RECURSÃO PRIMITIVA)

Sejam $f : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ e $g : \mathbb{N}_0^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ duas funções. A função $h : \mathbb{N}_0^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ definida, para cada $x_1, \dots, x_k, y \in \mathbb{N}_0$, por

$$h(x_1, \dots, x_k, 0) = f(x_1, \dots, x_k)$$

$$h(x_1, \dots, x_k, y + 1) = g(x_1, \dots, x_k, y, h(x_1, \dots, x_k, y))$$

é dita a função obtida de f e g por *recursão primitiva* (ou *definida recursivamente* por f e g), e denota-se $h = \text{Rec}(f, g)$.

TEOREMA

Se $f : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ e $g : \mathbb{N}_0^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ são funções computáveis, então a função $h = \text{Rec}(f, g)$ obtida de f e g por recursão primitiva também é computável.

EXEMPLO

Seja h a função obtida por recursão primitiva das funções $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, x \mapsto x^2$, e $g : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{N}_0, (x, y, z) \mapsto y + z$. Identifiquemos a função h .

Da definição do operador de recursão primitiva resulta que h é a função, de aridade 2, $h : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definida, para cada $x, y \in \mathbb{N}_0$, por

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= f(x) \\ h(x, y + 1) &= g(x, y, h(x, y)). \end{aligned}$$

Tem-se, assim,

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= x^2 \\ h(x, 1) &= g(x, 0, h(x, 0)) = 0 + h(x, 0) = x^2, \\ h(x, 2) &= g(x, 1, h(x, 1)) = 1 + h(x, 1) = 1 + x^2, \\ h(x, 3) &= g(x, 2, h(x, 2)) = 2 + h(x, 2) = 2 + 1 + x^2, \\ h(x, 4) &= g(x, 3, h(x, 3)) = 3 + h(x, 3) = 3 + 2 + 1 + x^2, \\ &\vdots \\ h(x, y) &= x^2 + 1 + 2 + \dots + (y - 1) = x^2 + y(y - 1)/2 \quad \text{para } y > 1. \end{aligned}$$

Como $y(y - 1)/2$ é igual a 0 quando $y = 0$ ou $y = 1$, pode escrever-se

$$h(x, y) = x^2 + y(y - 1)/2$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}_0$.

EXEMPLO

Mostremos que a função de adição

$$\begin{aligned} ad : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

pode ser obtida por recursão primitiva de funções f e g , ou seja, $ad = \text{Rec}(f, g)$. Para tal tem que se verificar

$$\begin{aligned} ad(x, 0) &= f(x) \\ ad(x, y + 1) &= g(x, y, ad(x, y)) \end{aligned}$$

para cada $x, y \in \mathbb{N}_0$. Ora dado que

$$ad(x, 0) = x, \quad ad(x, y + 1) = x + y + 1 \quad \text{e} \quad ad(x, y) = x + y,$$

basta tomar

$$\begin{aligned} f = p_1^1 : \mathbb{N}_0 &\rightarrow \mathbb{N}_0 & \text{e} & & g : \mathbb{N}_0^3 &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ a &\mapsto a & & & (a, b, c) &\mapsto c + 1 \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO

As *funções recursivas primitivas* são as *funções iniciais* e todas aquelas que podem ser obtidas das *funções iniciais* pela aplicação de um número finito de vezes das operações de *composição* e de *recursão primitiva*.

EXEMPLO

A função *ad*, de adição em \mathbb{N}_0 , é *recursiva primitiva*. De facto, como vimos no exemplo anterior, *ad* = Rec(*f*, *g*) é obtida por *recursão primitiva* das funções

$$\begin{array}{ll} f = p_1^1 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 & \text{e} \quad g : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ a \mapsto a & (a, b, c) \mapsto c + 1 \end{array}$$

Ora

- $f = p_1^1$ é uma *função inicial*;
- $g = s \circ p_3^3$ é a *composição* de duas *funções iniciais*.

Logo a adição em \mathbb{N}_0 é *recursiva primitiva*. Podemos decompô-la como

$$ad = \text{Rec}(p_1^1, s \circ p_3^3).$$

EXERCÍCIOS

1 Mostre que as seguintes funções são recursivas primitivas.

$$a) \text{ pred}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$b) \text{ sgn}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$c) \text{ monus}(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ 0 & \text{se } x < y \end{cases}$$

$$d) \text{ max}(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y \\ y & \text{se } x < y \end{cases}$$

$$e) \text{ dist}(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x < y \end{cases}$$

2 Verifique quais das seguintes funções $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ são totais calculando o seu domínio D_f .

$$a) f(x) = x/4$$

$$c) f(x) = x^2 - 9$$

$$e) f(x) = x \dot{-} 8$$

$$b) f(x) = x + 5$$

$$d) f(x) = (x - 3)^2$$

TEOREMA

Todas as funções **recursivas primitivas** são **computáveis**.

Demonstração: Basta notar que todas as funções iniciais são computáveis e que as funções obtidas de funções computáveis por composição ou recursão primitiva ainda são computáveis. □

TEOREMA

Todas as funções **recursivas primitivas** são **funções totais**.

Demonstração: Basta notar que as funções iniciais são totais e que as funções obtidas de funções totais por composição ou recursão primitiva ainda são totais. □

Dado que existem funções computáveis que não são totais, deduz-se que a classe das **funções recursivas primitivas** está propriamente contida na classe das **funções computáveis**. Pode-se provar mesmo o seguinte resultado.

TEOREMA

Existem funções totais computáveis que não são recursivas primitivas.

EXEMPLO

Seja $A : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ a função definida por:

- i) $A(0, y) = y + 1$;
- ii) $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$;
- iii) $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$.

A função A é chamada **função de Ackermann**.

A função A é uma função *total computável*. Tem-se por exemplo,

$$\begin{aligned}
 A(1, 1) &= A(0, A(1, 0)) \quad \text{por iii)} \\
 &= A(1, 0) + 1 \quad \text{por i)} \\
 &= A(0, 1) + 1 \quad \text{por ii)} \\
 &= 3 \quad \text{por i)}.
 \end{aligned}$$

$$A(4, y) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}}_{y+3 \text{ vezes}} - 3.$$

TEOREMA

A função de Ackermann *não é recursiva primitiva*.

EXERCÍCIO

a) Determine $A(1, 2)$ e $A(2, 1)$.

b) Sabendo que $A(2, y) = 2y + 3$ para todo o $y \in \mathbb{N}_0$, prove que $A(3, y) = 2^{y+3} - 3$ para qualquer $y \in \mathbb{N}_0$.

c) Mostre que $A(4, y) = \underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{y+3 \text{ vezes}} - 3$ para qualquer $y \in \mathbb{N}_0$.

DEFINIÇÃO (OPERADOR DE MINIMIZAÇÃO)

Se $f : \mathbb{N}_0^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ é uma função, então a *minimização* (ilimitada) de f é a função (parcial)

$$\begin{aligned} M_f : \mathbb{N}_0^k &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ \vec{x} &\mapsto \min\{y \in \mathbb{N}_0 : f(\vec{x}, y) = 0\}, \end{aligned}$$

onde \vec{x} representa um k -uplo $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ arbitrário.

Por vezes usa-se a notação

$$\mu y[f(\vec{x}, y) = 0] \text{ em vez de } M_f(\vec{x}).$$

EXEMPLO

Seja f a função ternária

$$f = p_1^3 : \quad \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1$$

de projecção na primeira componente. A função M_f , de minimização de f , é dada por

$$M_f : \quad \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ (x_1, x_2) \mapsto \min\{y \in \mathbb{N}_0 : f(x_1, x_2, y) = 0\} \\ = \min\{y \in \mathbb{N}_0 : x_1 = 0\}$$

Logo, a função M_f apenas está definida nos pontos (x_1, x_2) tais que $x_1 = 0$, tendo-se

$$M_f(0, x_2) = \min \mathbb{N}_0 = 0.$$

EXEMPLO

Consideremos agora a função ternária

$$\begin{aligned} g = p_3^3 : \quad \mathbb{N}_0^3 &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto x_3 \end{aligned}$$

de projeção na terceira componente. Neste caso tem-se

$$\begin{aligned} M_g : \quad \mathbb{N}_0^2 &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ (x_1, x_2) &\mapsto \min\{y \in \mathbb{N}_0 : g(x_1, x_2, y) = 0\} \\ &= \min\{y \in \mathbb{N}_0 : y = 0\} \\ &= \min\{0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$M_g = \text{zero}^2.$$

EXEMPLO

Seja g a função

$$g : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = y^2 \\ 1 & \text{senão} \end{cases}$$

A função M_g , de minimização de g , é a função

$$M_g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ x \mapsto \min\{y \in \mathbb{N}_0 : g(x, y) = 0\} \\ = \min\{y \in \mathbb{N}_0 : x = y^2\} \\ = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \text{ é um quadrado perfeito} \\ n.d. & \text{senão} \end{cases}$$

DEFINIÇÃO

Uma função diz-se *parcial μ -recursiva* (ou simplesmente *parcial recursiva*) se é uma *função inicial* ou pode ser obtida destas pela aplicação de um número finito de vezes das operações de *composição*, *recursão primitiva* e *minimização*.

Uma função parcial recursiva que seja *total* diz-se *recursiva*.

TEOREMA

Uma função $f : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ é *parcial recursiva* se e só se é *computável*.