Universidade do Minho **Curso: LCC**

Departamento de Matemática **Folha 6** **2023/2024**

Probabilidades e Aplicações

---

1. Numa empresa existem computadores que sofrem avarias ocasionais. O número de mensal de computadores que avaria é uma v.a.r. que segue a lei de Poisson de parâmetro 3.

   (a) Qual a probabilidade de, num mês, não haver computadores avariados?

   (b) Qual a probabilidade de, num mês, haver no máximo 3 computadores avariados?

   (c) Qual a probabilidade de, num mês, haver pelo menos 5 computadores avariados?

   (d) Sabendo que, num mês, houve pelo menos 5 computadores avariados, qual a probabilidade de este número não exceder 10?

   (e) Suponha que a oficina de recuperação de computadores consegue recuperar K computadores por mês. Calcule K de modo a que seja de pelo menos 0.8 a probabilidade de não haver computadores a aguardar recuperação no final de um mês.

2. É editado um manual de probabilidades com uma tiragem de 100000 exemplares. A probabilidade de um manual ter defeitos na encadernação é de 10^{-4}. Calcule o valor exato e uma aproximação para a probabilidade de o número de manuais defeituosos nessa tiragem ser de:

   ~~*i)*~~ exactamente 5 manuais; ~~*ii)*~~ pelo menos 3 manuais; ~~*iii)*~~ mais de 5 manuais.

3. Assuma que o número de artigos de luxo vendidos diariamente num certa loja é uma v.a. discreta, X, que segue a lei de Poisson com parâmetro 0.6.

   (a) Determine a probabilidade de, num dia, se vender 2 artigos de luxo.

   (b) Qual a probabilidade de, numa semana, haver exatamente 3 dias em que se vende 2 artigos de luxo? (assuma que a semana tem 6 dias e que as quantidades vendidas em dias distintos são independentes)

   ~~(c)~~ Suponha agora que cada artigo de luxo tem, independentemente dos outros, probabilidade p (com $0 < p < 1$) de ter defeito. Determine a função de probabilidade da v.a.r. que representa o número de artigos defeituosos vendidos diariamente. Em particular, mostre que esta v.a.r. segue a lei $Poisson(0.6 \times p)$.

   ~~(d)~~ Generalize a alínea anterior quando $X \sim Poisson(\lambda)$, com um qualquer $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

4. Uma empresa quer recrutar um profissional para preencher um cargo de chefia que exige liderança, iniciativa, flexibilidade e criatividade. É sabido que apenas 10% dos profissionais no mercado possuem este tipo de perfil. Como não tem pressa para contratar um tal profissional, não foi fixado um número máximo de candidatos a entrevistar e a empresa tem disponibilidade para ir fazendo sucessivamente entrevistas até encontrar o candidato com o perfil pretendido.

   ~~(a)~~ Qual a probabilidade de na 3.ª entrevista aparecer o 1.º candidato com o perfil desejado?

   ~~(b)~~ Qual a probabilidade de serem necessárias no máximo 2 entrevistas até que apareça o 1.º candidato com o perfil desejado?

   ~~(c)~~ Qual a probabilidade de serem necessárias mais do que 6 entrevistas até que apareça o 1.º candidato com o perfil desejado?

   ~~(d)~~ Sabendo que já foram entrevistados 6 candidatos sem que tenha aparecido um com o perfil desejado, qual a probabilidade de ser necessário entrevistar pelo menos mais 3 candidatos?

5. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por
$$f(x) = \max\{0, 1 - |x|\}, x \in \mathbb{R}.$$

Observação: A lei de probabilidade de X é conhecida por lei *triangular* (ver gráfico de f).

(a) Determine a função de distribuição de X e esboce o seu gráfico.
(b) Calcule $P(X = 0)$, $P(X \leq 1/2)$, $P(0 \leq X \leq 1/2)$, $P(X \geq 1/2)$, $P(|X| < 1/3)$.

6. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por
$$f(x) = ke^{-|x|}, x \in \mathbb{R},$$
em que k é uma constante real.

(a) Determine k, construa a função de distribuição, F, e esboce os gráficos de f e de F.
(b) Calcule: $P(X < 0)$, $P(X > 0)$, $P(0 < X < 1)$, $P(0 \leq X \leq 1)$ e $P(X^2 < 1)$.
(c) Identifique a lei de probabilidade da v.a.r. $Y = |X|$.

7. Seja T uma v.a.r. absolutamente contínua que segue a lei exponencial de parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$, i.e., T tem função densidade de probabilidade dada por
$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & se \quad x \geq 0 \end{cases}.$$
Observação: Abrevia-se por $T \sim Exp(\lambda)$.

(a) Determine a função de distribuição de T, esboçe o seu gráfico e calcule $P(T > c)$, $c \in \mathbb{R}$.
(b) Mostre que T tem a propriedade de falta de memória, i.e., para todo o $x, t \in \mathbb{R}^+$ tem-se
$$P(T > t + x | T > t) = P(T > x).$$
(c) Uma colónia contém bactérias de dois tipos A e B, aparentemente iguais, na proporção de 1 para 3. A duração de vida de uma bactéria do tipo A (em horas) é uma v.a.r. com lei exponencial de parâmetro 0.1 enquanto que a de uma bactéria do tipo B é exponencial com parâmetro 0.2. Selecionou-se uma bactéria ao acaso nesta população e observou-se que após 20h ela ainda vivia. Qual a probabilidade de ela ser do tipo B?

8. O director de compras de uma empresa pretende definir uma política de aquisição de matéria prima. As necessidades diárias de matéria prima (em 1 000kg) são representadas por uma v.a.r. X absolutamente contínua com função de distribuição dada por
$$F(c) = \begin{cases} a & se \quad c < 0 \\ c - \frac{c^2}{4} & se \quad 0 \leq c < k \\ b & se \quad c \geq k \end{cases},$$
com a, b e k constantes reais.

(a) Determine a, b e k e obtenha uma função densidade de probabilidade de X.
(b) Calcule a probabilidade de num dia o consumo de matéria prima ser superior a 1 500kg.
(c) Calcule a probabilidade de, numa semana, haver pelo menos 2 dias em que o consumo de matéria prima é superior a 1 500kg? (suponha que a semana tem 5 dias e que os consumos de matéria prima em dias diferentes são quantidades independentes)
(d) Se se quiser que a probabilidade de ruptura de matéria prima num dia não ultrapasse os 0.02, qual o nível de abastecimento que deve ser assegurado diariamente?

9. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por
$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-1)} & se \quad x > \beta \\ 0 & se \quad x \leq \beta \end{cases}.$$
Mostre que $\beta = 1$ e identifique a lei de probabilidade da v.a.r. $Y = 2X - 2$.