

Probabilidades e Aplicações

1. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Mostre que a transformada de Laplace de X é

$$L_X(t) = \exp \left\{ -t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2 \right\}, t \in \mathbb{R}.$$

Nota: Comece por determinar a transformada de Laplace da lei $N(0, 1)$ e depois generalize.

2. Mostre que, se X_1, X_2, \dots, X_n são v.a.r.'s independentes e tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, então a v.a.r.:

- i) $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ segue a lei

$$N \left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right);$$

- ii) $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$, com a_1, a_2, \dots, a_n quaisquer constantes reais não todas nulas, segue a lei

$$N \left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2 \right).$$

3. Mostre que a transformada de Laplace da lei $Poisson(\lambda)$ é dada por

$$L(t) = \exp\{-\lambda(1 - e^{-t})\}, t \in \mathbb{R},$$

Use este resultado para provar que, se X_1, X_2, \dots, X_n são v.a.r.'s independentes e tais que $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, então

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim Poisson \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right).$$

4. Certo produto tem peso médio de 10g e desvio-padrão de 0.5g. Este produto é embalado em caixas de 12 unidades que, quando estão vazias, apresentam peso médio de 150g e desvio-padrão de 8g. Supondo que todos os pesos considerados são v.a.r.'s independentes e com lei normal,

- (a) identifique a lei da v.a.r. que representa o peso de uma caixa cheia deste produto.
(b) determine a probabilidade de uma caixa cheia deste produto pesar mais de 285g.

5. Uma empresa tem dois vendedores, A e B, cujos montantes diários de vendas são v.a.'s independentes e que seguem uma lei Normal, com parâmetros, respectivamente, $\mu_A = 100$ e $\sigma_A^2 = 100$, $\mu_B = 80$ e $\sigma_B^2 = 9$. Qual a probabilidade do vendedor B vender mais do que o A?

6. Um investigador pretende recolher uma amostra aleatória que lhe permita estimar a média de uma população (entenda-se, de uma variável aleatória real). Para o efeito ele precisa que a dimensão da amostra seja suficiente para garantir que seja de pelo menos 0.95 a probabilidade de a média amostral não se afastar da média da população em mais de 25% do desvio-padrão da população. Supondo que a v.a.r. em causa tem lei Normal, qual deve ser a dimensão da amostra aleatória a recolher?