

Ficha 6

Semântica das Linguagens de Programação

2023/24

1. Indique as variáveis livres e ligadas de cada uma das seguintes expressões:

- (a) $\lambda x.((\lambda z.\lambda u.\lambda v.u\ v\ z)\ x\ f\ y)$
- (b) $\lambda y.\lambda z.(x\ z)\ (y\ z)$
- (c) $(\lambda x.f\ x\ (\lambda y.y))\ x$
- (d) $\lambda x.((\lambda z.\lambda u.\lambda v.u\ v\ z)\ x\ f\ y)\ z\ x$

2. Indique o resultados das seguintes substituições:

- (a) $(\lambda x.\lambda y.x\ z)[(\lambda v.v\ (r\ w))/z]$
- (b) $(\lambda x.\lambda y.x\ z)[(\lambda y.w)/z]$
- (c) $(\lambda x.\lambda y.x\ z)[(\lambda y.x)/z]$
- (d) $((\lambda x.\lambda y.x\ z)\ x)[y\ w/x]$
- (e) $((\lambda x.\lambda y.x\ z)\ z)[y\ w/z]$

3. Considere a seguinte expressão do λ -calculus puro:

$$(\lambda y.\lambda a.(\lambda x.\lambda y.y\ x\ z)(y\ a))((\lambda x.\lambda y.x)(\lambda x.\lambda y.x))$$

- (a) Indique as variáveis livres e ligadas da expressão.
 - (b) Quantos β -redexes encontra na expressão? Sublinhe cada um deles e indique a expressão resultante de fazer a sua redução (isto é, um passo de redução a partir da expressão inicial).
4. Apresente λ -termos com as seguintes características:
- (a) o λ -termo está na forma normal;
 - (b) o λ -termo não está na forma normal, mas é fortemente normalizável;
 - (c) o λ -termo é normalizável, mas não fortemente normalizável;
 - (d) o λ -termo não é normalizável.

5. Apresente todas as possíveis sequências de redução dos seguintes termos:

- (a) $(\lambda x.(\lambda y.y\ x)\ z)\ (z\ w)$
- (b) $(\lambda u.\lambda v.v)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x))$

6. Considere os termos

$$\begin{aligned} I &\equiv \lambda x. x \\ K &\equiv \lambda x. \lambda y. x \\ S &\equiv \lambda x. \lambda y. \lambda z. x z (y z) \\ \Omega &\equiv (\lambda x. x x)(\lambda x. x x) \end{aligned}$$

Construa as sequências de redução para as expressões abaixo indicadas, seguindo como estratégia de redução a “normal-order reduction” e a “applicative-order reduction”, respectivamente.

- (a) $S K K$
- (b) $K S \Omega$
- (c) $I (I (\lambda z. I z))$

7. Calcule, se existir, a norma normal do termo $(\lambda a. \lambda b. a a b)(\lambda x. \lambda y. y)(\lambda x. \lambda y. y)$. Diga se o termo é fortemente normalizável, fracamente normalizável, ou não normalizável.

8. Apresente as sequências de redução correspondente à avaliação “call-by-name” e “call-by-value” para as seguintes expressões:

- ~~(a)~~ $(\lambda x. (\lambda y. x y) x) ((\lambda a. \lambda b. a b) (\lambda z. z))$
- ~~(b)~~ $(\lambda z. \lambda y. z y) ((\lambda x. x x x)(\lambda y. y y))$

9. Considere os seguintes termos do lambda calculus puro:

$$\begin{aligned} I &\equiv \lambda x. x \\ K &\equiv \lambda a. \lambda b. a \\ S &\equiv \lambda x. \lambda y. \lambda z. x z (y z) \end{aligned}$$

Apresente a sequência correspondente à *ordem applicativa* de redução da expressão

$$K S (I K) I$$

até à sua *forma normal*. Sublinhe o β -redex que é seleccionado em cada passo de redução.

10. Considere o seguinte λ -termo:

$$(\lambda a. \lambda b. a b) ((\lambda y. y) (\lambda x. x)) ((\lambda x. \lambda y. y) (\lambda z. z))$$

Apresente a sequência de redução deste termo até à sua *forma normal* de acordo com a *ordem normal de avaliação*. Sublinhe sempre o β -redex que é seleccionado em cada passo de redução.

11. Considere o seguinte termo do lambda calculus puro:

$$(\lambda a. \lambda b. \lambda c. a (b a) c) (\lambda x. \lambda y. y) ((\lambda u. u) (\lambda u. u)) (\lambda a. \lambda b. a)$$

Apresente a sequência correspondente à avaliação “call-by-name” deste termo até à sua *forma canónica*. Sublinhe o β -redex que é seleccionado em cada passo de redução.