Emanuel Esquivel Lopez - 2016133597
**Problema 1:**

Solución:

a) Se puede ver que la fuerza de empuje tiene la forma:

$$\vec{F}_E = -\frac{mg}{d}y\,\hat{\jmath}$$

Similar a la formula de la fuerza restauradora $F = -k\mathbf{r}$. Por lo que se puede deducir que

$$k = \frac{mg}{d}$$

b) Podemos ver que la segunda ley de Newton

$$\sum F_y = ma = -ky$$

Al usar esto podemos realizar el cambio de $a$ como derivada de la posición:

$$ma = -ky$$
$$m\frac{dy^2}{dt^2} = -ky$$
$$\frac{dy^2}{dt^2} + ky = 0$$
$$\frac{dy^2}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$
$$\frac{dy^2}{dt^2} + \frac{g}{d}y = 0$$

Puede compararse con el movimiento armónico simple que tiene por ecuación:

$$\frac{dy^2}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

c) La frecuencia angulas puede obtenerse fácil haciendo una comparación entre la ecuación obtenida y la del MAS.

$$\omega^2 = \frac{g}{d}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

Con esto podemos calcular la frecuencia $f$ y el periodo $T$:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{d}}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

d) Tenemos como datos iniciales $y_0$ = 1 cm y $v = 0$ m/s
Calculamos $A$

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$
$$A = y_0$$

Ahora el angulo de fase:

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{y_0\omega}\right)$$
$$\phi = 0$$

La ecuación de la posición que es la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$y(t) = y_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$

La ecuación de la velocidad es $y'$ y la aceleración $y''$

$$v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$
$$v(t) = -y_0\sqrt{\frac{g}{d}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$
$$a(t) = -y_0\frac{g}{d}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$

e) Los valores máximos de posición, velocidad y aceleración son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
x_{\text{máx}} &= A \\
x_{\text{máx}} &= |y_0| \\
v_{\text{máx}} &= A\omega \\
v_{\text{máx}} &= |y_0|\sqrt{\frac{g}{d}} \\
a_{\text{máx}} &= A\omega^2 \\
a_{\text{máx}} &= |y_0|\frac{g}{d}
\end{aligned}
$$

f) Luego de $t = 3$ s podemos calcular el valor de $y, v, a$.

$$
\begin{aligned}
y(3) &= y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}} \cdot 3\right) \\
v(3) &= -y_0\sqrt{\frac{g}{d}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{d}} \cdot 3\right) \\
a(3) &= -y_0\frac{g}{d} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}} \cdot 3\right)
\end{aligned}
$$

Para el valor de $y$ debemos tomar en cuenta que el corcho estaba sumergido 3.25 cm

g) La energía cinética se describe con la formula:

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}mv^2 \\
K &= \frac{1}{2}my_0^2\frac{g}{d} \operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)
\end{aligned}
$$

La energía potencial:

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}kx^2 \\
U &= \frac{1}{2}\frac{mg}{d}y_0^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)
\end{aligned}
$$

Cuando $U = \frac{1}{2}K$?

$$U = \frac{1}{2}K$$
$$\frac{1}{2}\frac{mg}{d}y_0^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right) = \frac{1}{4}my_0^2\frac{g}{d}\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$
$$\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$
$$\frac{\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)}{\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)}{\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)}$$
$$1 = \frac{1}{2}\tan^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$
$$2 = \tan^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$
$$\sqrt{2} = \tan\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$
$$\arctan\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{\frac{g}{d}}t$$
$$t = \arctan\left(\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{d}{g}}$$

Con el valor anterior se evalua en $y\left(\arctan\left(\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{d}{g}}\right)$

h) Es el valor de $t$ obtenido anteriormente.

$$t = \arctan\left(\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{d}{g}}$$

**NOTA:** El valor de $y_0$ en las ecuaciones es negativo ya que esta pos debajo del equilibrio

**Problema 1:**

Solución:

a) Al tener la función de onda $y(t,x) = A\,\mathrm{sen}(kx \pm \omega t)$, podemos comprobar que es solucion de la ecuación de onda de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} y &= A\,\mathrm{sen}(kx \pm \omega t) \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= Ak\cos(kx \pm \omega t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -Ak^2\,\mathrm{sen}(kx \pm \omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= A\,\mathrm{sen}(kx \pm \omega t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= A\omega\cos(kx \pm \omega t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -A\omega^2\,\mathrm{sen}(kx \pm \omega t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -Av^2k^2\,\mathrm{sen}(kx \pm \omega t) \end{aligned}$$

Si sustituimos en la ecuación de onda tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ -Av^2k^2\,\mathrm{sen}(kx \pm \omega t) &= v^2 \cdot -Ak^2\,\mathrm{sen}(kx \pm \omega t) \end{aligned}$$

Como se ve son exactamente iguales a ambos lados, por lo tanto se comprueba que $y(t,x) = A\,\mathrm{sen}(kx \pm \omega t)$ es solución de la ecuación de onda