UNIVERSIDAD TECNICA NACIONAL
INGENIERIA ELECTRONICA

Examen 2

Angie Marchena Mondell
604650904

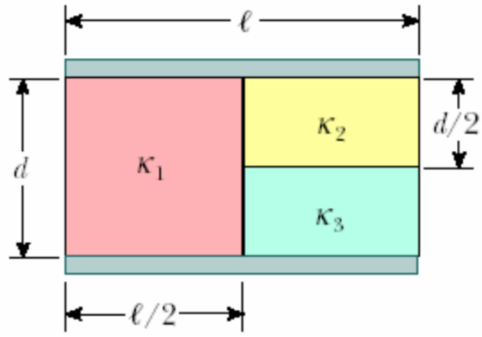
Teoría electromagnética

Diciembre, 2021

Problema 1. (10 puntos) Capacitores y dieléctrico.

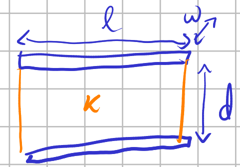
(a) **(3 puntos)** Considere un capacitor de placas paralelas completamente lleno de un material dieléctrico de constante dieléctrica k. ¿Cuál es la capacitancia de este sistema?

(b) **(5 puntos)** Un capacitor de placas paralelas está construido de forma que se llena el espacio entre dos placas cuadradas con bloques de tres materiales dieléctricos, como en la figura siguiente. Puede suponer que $\ell >> d$. Encuentre una expresión para la capacitancia del dispositivo en términos del área de la placa $A, d, k_1, k_2 y\ k_3$.



c) **(2 puntos)** Si las placas tienen una diferencia de potencial V_1, calcule la carga total del sistema.

a)



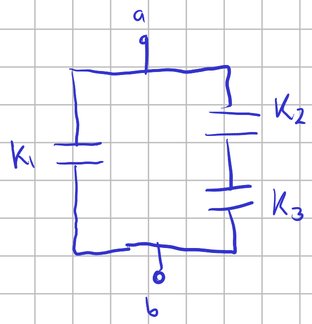
$A = \ell w$

$C = K \cdot C_0$

$C = K \cdot \dfrac{\epsilon_0 A}{d}$

$$\boxed{\therefore\ C = \frac{K \epsilon_0 A}{d}}$$ R/a

b)



$C_{ab} = C_{K_1}$ paralelo (K_2 serie K_3)

$C_{K_1} = \dfrac{K_1 \epsilon_0 A/2}{d} = \dfrac{K_1 \epsilon_0 A}{2d}$

$C_{K_2} = \dfrac{K_2 \epsilon_0 A/2}{d/2} = \dfrac{K_2 \epsilon_0 A}{d}$

$C_{K_3} = \dfrac{K_3 \epsilon_0 A/2}{d/2} = \dfrac{K_3 \epsilon_0 A}{d}$

$C_{serie} = \dfrac{C_{K_2} \cdot C_{K_3}}{C_{K_2} + C_{K_3}}$

$$C_{serie} = \frac{\frac{K_2 \epsilon_0 A}{d} \cdot \frac{K_3 \epsilon_0 A}{d}}{\frac{K_2 \epsilon_0 A}{d} + \frac{K_3 \epsilon_0 A}{d}}$$

$$C_{serie} = \frac{\frac{K_2 K_3 \epsilon_0^{\cancel{2}} A^{\cancel{2}}}{d^{\cancel{2}}}}{\frac{\cancel{\epsilon_0 A}}{\cancel{d}}(K_2 + K_3)}$$

$$C_{serie}\ \frac{\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_2 \cdot K_3}{K_2 + K_3}\right)$$

$C_{paralelo} = C_{K_1} + (C_{K_2}$ serie $C_{K_3})$

$C_{paralelo} = \dfrac{\epsilon_0 A}{d} \cdot \left(\dfrac{K_1}{2}\right) + \dfrac{\epsilon_0 A}{d}\left(\dfrac{K_2 \cdot K_3}{K_2 + K_3}\right)$

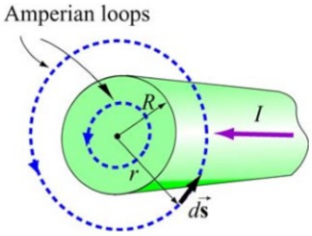
$$\boxed{C_{eq} = \frac{\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_1}{2} + \frac{K_2 K_3}{K_2 + K_3}\right)\ [F]}$$ R/b

c) $C = \dfrac{Q}{V} \rightsquigarrow Q = C \cdot V$

$$\boxed{Q = \frac{\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_1}{2} + \frac{K_2 K_3}{K_2 + K_3}\right) \cdot V_1\ [C]}$$

Problema 2. (20 puntos) La ley de Ampere es aplicable a las siguientes configuraciones actuales: Conductor coaxial infinito, lámina infinita, solenoide infinito y toroide.

a) **Calcule el campo dentro y fuera de un cable portador de corriente.** Considere un cable recto largo de radio R que lleva una corriente I de densidad de corriente uniforme, como se muestra en la Figura.
   1. Encuentra el campo magnético en todas partes.
   2. Calcule la inductancia de un conductor coaxial infinito.



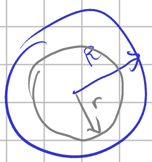
$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$I_{total} = I$

$A_{total} = \pi R^2$

$S = 2\pi r$

1- Para $r < R$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B \cdot S = \mu_0 I_{en}$$

$$B = \frac{\mu_0 I_{enc}}{S}$$

$$J = \frac{I_{Total}}{A_{Total}} \rightsquigarrow \frac{I}{\cancel{\pi} R^2} = \frac{I_{enc}}{\cancel{\pi} r^2}$$

$$I_{enc} = \frac{I r^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r} \longrightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi \cancel{r}}\left(\frac{I r^{\cancel{2}}}{R^2}\right)$$

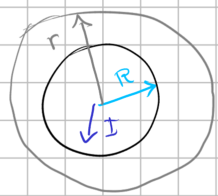
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad \text{para} \quad r < R}$$

Para $r > R$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{enc}$$

$$J = \frac{I_{Total}}{A_{Total}}$$

$I_{encerrada} = I$

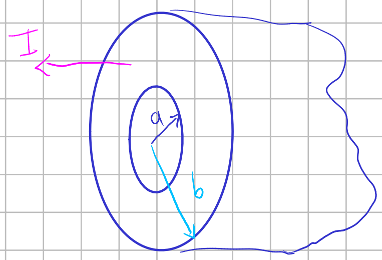


$$B \cdot S = \mu_0 I_{en}$$

$$B = \frac{\mu_0 I_{enc}}{S}$$

$$B = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r} \longrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{Para} \quad r > R}$$

2- conductor coaxial infinito



$$\phi = \int B \cdot dr$$

$$\phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L = \frac{N\phi}{I} \qquad N=1$$

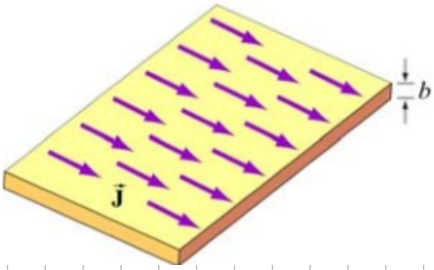
$$L = \frac{\phi}{I}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

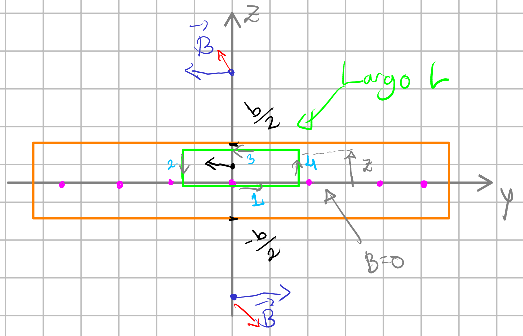
$$L = \frac{\mu_0 \cancel{I}}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) / \cancel{I}$$

$$\boxed{L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) [H/m]}$$ R/

b) **Campo magnético debido a una hoja de corriente infinita.** Considere una hoja infinitamente grande de espesor b que se encuentra en el plano xy con una uniforme densidad de corriente $\vec{J} = J_0\vec{a_x}$. 1. Encuentra el campo magnético en todas partes: $para\ z > \frac{b}{2}$ $,para\ -\frac{b}{2} < z < \frac{b}{2},\ para\ z < -\frac{b}{2}$.



$\vec{J} = J_0\,\vec{a_x}$



$\boxed{\text{Para el plano XY } \vec{B} = 0}$

$\oint B\,ds = \mu_0 I_{enc}$

$$\oint_C \vec{B}\,d\vec{s} = \cancel{\oint_1 \vec{B}\,d\vec{s}} + \cancel{\oint_2 \vec{B}\,d\vec{s}} + \oint_3 \vec{B}\,d\vec{s} + \cancel{\oint_4 \vec{B}\,d\vec{s}}$$

$0 \qquad 0 \qquad 0$

$$\oint_C \vec{B}\,d\vec{s} = \oint_3 \vec{B}\cdot d\vec{s}$$
$$= \oint B\,ds \cdot \cos 0°$$
$$= B\,s$$
$$= \underline{BL}$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{enc}$$
$$B\cdot L = \mu_0 I_{enc}$$
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I_{enc}}{L}}$$

$I_{enc} = J\cdot A \qquad A = z\cdot L$

$I_{enc} = J_0 \cdot z L$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J z L}{L}\,(a_y)$$

$$\vec{B} = \mu_0 J_0 z \quad (a_y)$$

* Para $-\frac{b}{2} < z < \frac{b}{2}$

$$\vec{B} = -\mu_0 J_0 z \ (a_y)$$

* Para $z > \frac{b}{2}$

$$\vec{B} = -\mu_0 J_0 \frac{b}{2}\ (a_y)$$

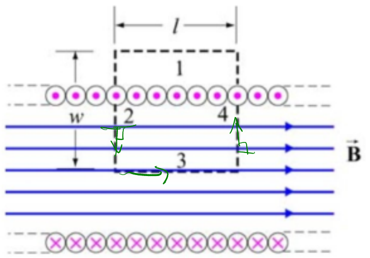
* Para $z < \frac{-b}{2}$

$$\vec{B} = \mu_0 J_0 \frac{b}{2}\ (a_y)$$

R/

c) **1. Calcule el campo magnético de un solenoide ideal de N vueltas y**
2. Calcule la inductancia de un solenoide ideal.

$$\oint \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_1 \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_2 \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_3 \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_4 \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}$$
$$= 0 + 0 + Bl + 0$$



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint_3 \vec{B}\, d\vec{s}$$
$$= \oint_3 B\, ds \cdot \cos 0°$$
$$= \int_l B\, ds$$
$$= \underline{B \cdot l}$$

Por ley de Amperè

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{enc}$$
$$B \cdot l = \mu_0\, n\, l\, I$$
$$B = \frac{\mu_0\, n\, \cancel{l}\, I}{\cancel{l}}$$

$$n = \frac{\#\text{Vuetas}}{\text{Longitud}} = \frac{N}{l} \rightsquigarrow N = n l$$

$$I_{enc} = \#\text{Vuetas} \cdot I \qquad n = \frac{N}{l}$$
$$I_{enc} = N \cdot I$$
$$I_{enc} = n\, l\, I$$

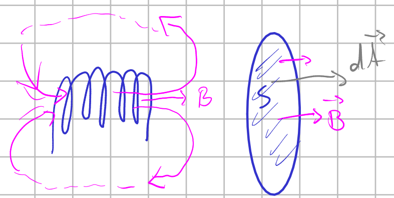
$$B = \mu_0 n I$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 N I}{l}\ [T]} \quad R/_1$$

---

2 - Inductancia

$$\phi_M = L \cdot I$$
$$L = \frac{\phi_M}{I}$$
$$\phi_M = \oint_S \vec{B}\, d\vec{A}$$



$$\phi_{M_1} = \oint_S B \cdot dA \cos 0°$$
$$\phi_{M_1} = B \cdot A$$
$$\phi_{M\,Total} = N \cdot B \cdot A$$
$$\phi_M = N \cdot \left(\frac{\mu_0 N I}{l}\right) \cdot A$$
$$\phi_M = \frac{N^2 \mu_0 I A}{l}$$

A = area del solenoide

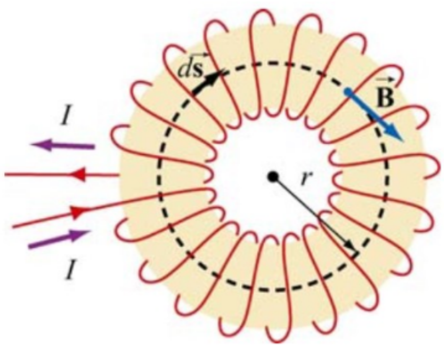
$$L = \frac{\phi_M}{I}$$
$$L = \frac{\left[\frac{N^2 \mu_0 I A}{l}\right]}{I}$$

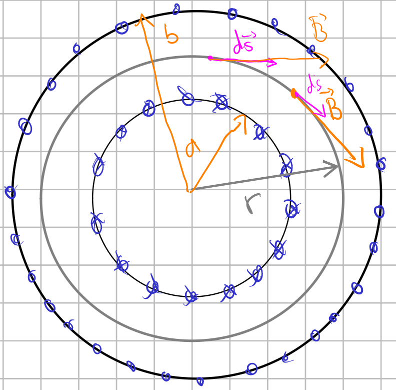
$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}} \quad R$$

d) **Considere un toroide que consta de N vueltas**, como se muestra en la figura siguiente.

1. **Encuentra el magnético campo en todas partes y la inductancia.**
2. **Calcule la inductancia de un ~~solenoide~~ ideal.**

Toroide





$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \oint_c B\, ds \cos 0^\circ$$

$$= \oint_c B\, ds$$

$$= B \int_c ds$$

$$= B \cdot C$$

$C = 2\pi r$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = B \cdot 2\pi r$$

$$I_{enc} = N \cdot I$$

$$\oint_c \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad [T]$$

* Para $a < r < b$ [dentro]

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

* Para $r > b$ ó $r < a$ [fuera]

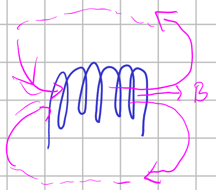
$$B = 0$$

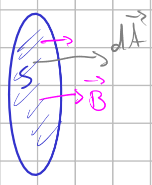
R/1

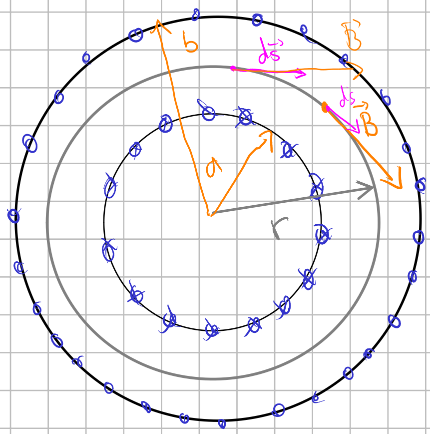
$$\phi_M = L \cdot I$$

$$L = \frac{\phi_M}{I}$$

$$\phi_M = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$







$$\phi_M = \int B\, dA \cos 0°$$

$$\phi_{M_1} = \int B \cdot dA$$

$$\phi_{M_1} \approx B A$$

$$\phi_M \approx N \cdot B \cdot A$$

$$\phi_M \approx N \cdot \left(\frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\right) \cdot A$$

$$\phi_M \approx \frac{\mu_0 N^2 I A}{2\pi r}$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

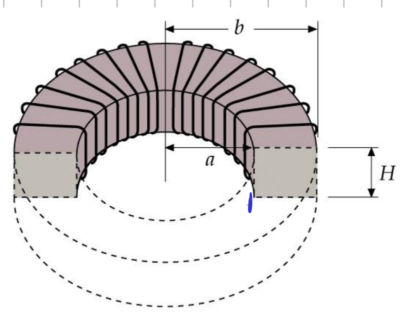
$$L \approx \phi_M / I$$

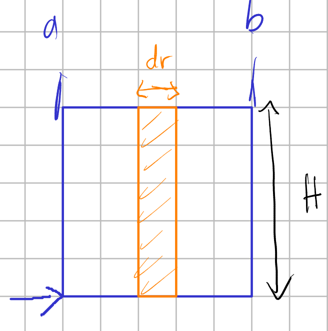
$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 \cancel{I} A}{2\pi r} / \cancel{I}$$

$$\boxed{L \approx \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}}$$ R/2.

Por Aproximación

Respuesta exacta





$$dA = N \cdot H\, dr$$

$$\phi_M = \int B \cdot dA$$

$$\phi_M = \int \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \cdot N H \cdot dr$$

$$\phi_M = \frac{\mu_0 N^2 I H}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

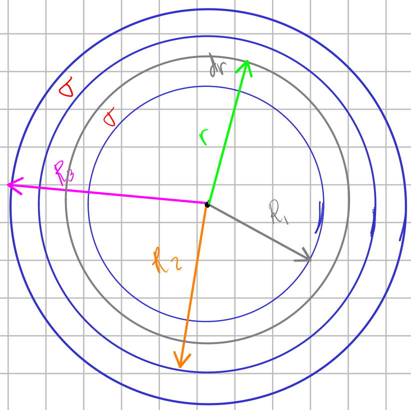
$$\phi_M = \frac{\mu_0 N^2 I H}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{\phi_M}{I} = \left[\frac{\mu_0 N^2 \cancel{I} H}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right] / \cancel{I}$$

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 H}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$ R/exacta

Asumiendo A rectangular //

Problema 3. (10 puntos) Encuentre la resistencia entre tres superficies esféricas concéntrico de radio R_1, R_2 y R_3 $(R_1 < R_2 < R_3)$ si el espacio entre las superficies está relleno con un material homogéneo e isótropo con conductividad σ.



$$R = \frac{L}{\sigma A}$$

$$dR = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dr}{4\pi r^2}$$

$$dR = \frac{1}{\sigma 4\pi} \cdot \frac{dr}{r^2}$$

$$R = \frac{1}{\sigma 4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

a y b radios

$$R = \frac{1}{\sigma 4\pi} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^b$$

$$R = \frac{1}{\sigma 4\pi}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_b^a \Rightarrow \underbrace{R = \frac{1}{\sigma 4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}_{\text{Formula General}}$$

$$R_{Total} = R_{12} + R_{23}$$

$$R_{12} = \frac{1}{\sigma 4\pi}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$R_{23} = \frac{1}{\sigma 4\pi}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$$R_T = \frac{1}{\sigma 4\pi}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\sigma 4\pi}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$$R_T = \frac{1}{\sigma 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \cancel{\frac{1}{R_2}} + \cancel{\frac{1}{R_2}} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\boxed{R_T = \frac{1}{\sigma 4\pi}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right) \ [\Omega]} \quad R/$$