Métodos Numéricos

Profesor: Ing. Félix David Suárez Bonilla — Noviembre, 2021

Universidad Técnica Nacional

Angie Marchena Mondell — 604650904

Práctica Examen Parcial #1

La siguiente práctica se debe resolver en forma individual. Su objetivo principal es preparar a los estudiantes para el examen. Se atenderán consultas por correo.

Ejercicio #1

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, obtenga: la matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas y la matriz ampliada.

$$2x+2y+3z=0\ 7x+3y+4z=1\ 5x+2y+2z=2$$

Respuesta

$$2x+2y+3z=0$$

$$7x+3y+4z=1$$

$$5x+2y+2z=2$$

Matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 7 & 3 & 4\\ 5 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Matriz aumentada

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & 0\\ 7 & 3 & 4 & 1\\ 5 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$F_2-\left(\frac{7}{2}\right)F_1\rightarrow F_2$

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -4 & -13/2 & 1\\ 5 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$F_3 - \left(\frac{5}{2}\right) F_1 \rightarrow F_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -13/2 & 1 \\ 0 & -3 & -11/2 & 2 \end{pmatrix}$$

$F_3 - \left(\frac{3}{4}\right) F_2 \rightarrow F_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -13/2 & 1 \\ 0 & 0 & -5/8 & 5/4 \end{pmatrix}$$

Con esto podemos resolver el sistema:

$$2x + 2y + 3z = 0$$

$$0x - 4y - \frac{13}{2} z = 1$$

$$0x + 0y - \frac{5}{8} z = \frac{5}{4}$$

Vamos hallando de manera regresiva

$$-\frac{5}{8} z = \frac{5}{4} \rightarrow z = -2$$

Vamos remplazando

$$0x - 4y - \frac{13}{2}(-2) = 1 \rightarrow y = 3$$

$$2x + 2(3) + 3(-2) = 0 \rightarrow x = 0$$

Por lo que obtenemos la solución del sistema (matriz de solución)

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio #2

2. Determine $f'(1.2)$ usando diferencias centrales para $f(x) = x^2 + e^{2x} + x$ y $h = 0.1$.

Respuesta

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$f'(1.2) \approx \frac{f(1.2 + 0.1) - f(1.2 - 0.1)}{2(0.1)}$$

$$f'(1.2) \approx \frac{f(1.3) - f(1.1)}{0.2}$$

$$f'(1.2) \approx \frac{(1.3)^2 + e^{2(1.3)} + (1.3) - ((1.1)^2 + e^{2(1.1)} + (1.1))}{0.2}$$

$$f'(1.2) \approx 25.29$$

Ejercicio #3

3. Determine $f'(1.1)$ usando diferencias hacia adelante y diferencias hacia atrás para $f(x) = x^2 + e^x$ y $h = 0.1$.

Respuesta

Diferencias hacia adelante

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{f(1.1 + 0.1) - f(1.1)}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{f(1.2) - f(1.1)}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{(1.2)^2 + e^{1.2} - ((1.1)^2 + e^{1.1})}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{(1.2)^2 + e^{1.2} - ((1.1)^2 + e^{1.1})}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx 5.46$$

Diferencias hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{f(1.1) - f(1.1 - 0.1)}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{f(1.1) - f(1.0)}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{(1.1)^2 + e^{1.1} - ((1.0)^2 + e^{1.0})}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx 4.96$$

Ejercicio #4

4. Use la regla de Simpson para calcular la siguiente integral definida. Considere radianes. (10 pts)

$$\int_1^2 e^x \; dx$$

Respuesta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$\int_1^2 e^x dx \approx \frac{2-1}{6}\left[f(1) + 4f\left(\frac{1+2}{2}\right) + f(2)\right]$$

$$\int_1^2 e^x dx \approx \frac{1}{6}\left[e^1 + 4(e^{3/2}) + e^2\right]$$

$$\int_1^2 e^x dx \approx \frac{1}{6}\left[e^1 + 4(e^{3/2}) + e^2\right]$$

$$\int_1^2 e^x dx \approx 4.6723$$

Ejercicio #5

5. Use la regla del trapecio para calcular la siguiente integral definida. Considere radianes. (10 pts)

$$\int_0^1 e^{x^2}\ dx$$

Respuesta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)[f(a)+f(b)]}{2}$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{(1-0)[f(0)+f(1)]}{2}$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{(1-0)[e^{0^2}+e^{1^2}]}{2}$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1.8591$$

Ejercicio #6

6. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, obtenga: la matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas y la matriz ampliada. (10 pts)

$$2x + 2y + 3z = 0$$
$$7x + 3y + 4z = 1$$
$$5x + 2y + 2z = 2$$

Respuesta

Matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$F_2 - \left(\frac{7}{2}\right) F_1 \to F_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -13/2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$F_3 - \left(\frac{5}{2}\right) F_1 \to F_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -13/2 & 1 \\ 0 & -3 & -11/2 & 2 \end{pmatrix}$$

$F_3 - \left(\frac{3}{4}\right) F_2 \to F_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -13/2 & 1 \\ 0 & 0 & -5/8 & 5/4 \end{pmatrix}$$

Con esto podemos resolver el sistema:

$$2x + 2y + 3z = 0$$

$$0x - 4y - \frac{13}{2} z = 1$$

$$0x + 0y - \frac{5}{8}z = \frac{5}{4}$$

Vamos hallando de manera regresiva

$$-\frac{5}{8}z = \frac{5}{4} \rightarrow z = -2$$

Vamos remplazando

$$0x - 4y - \frac{13}{2}(-2) = 1 \rightarrow y = 3$$

$$2x + 2(3) + 3(-2) = 0 \rightarrow x = 0$$

Por lo que obtenemos la solución del sistema (matriz de solución)

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$