Análisis vectorial

Teoría Electromagnética

Código: IEL-822

Nivel: VIII

MSc. Ing. Jefry Mendoza Robles

Escalares y campos escalares

Escalar: Cantidad cuyo valor puede ser representado por un simple número real positivo o negativo

Campos escalares: Función matemática del vector que relaciona el origen (arbitrario) con un punto cualquiera en el espacio.

Generalmente es común asociar efectos físicos con un campo.

Ejemplos de campos escalares: Temperatura local en una taza de te, densidad de la corteza terrestre. El valor de un campo no es necesariamente constante.

Puede variar, por ejemplo, con la posición y con el tiempo.

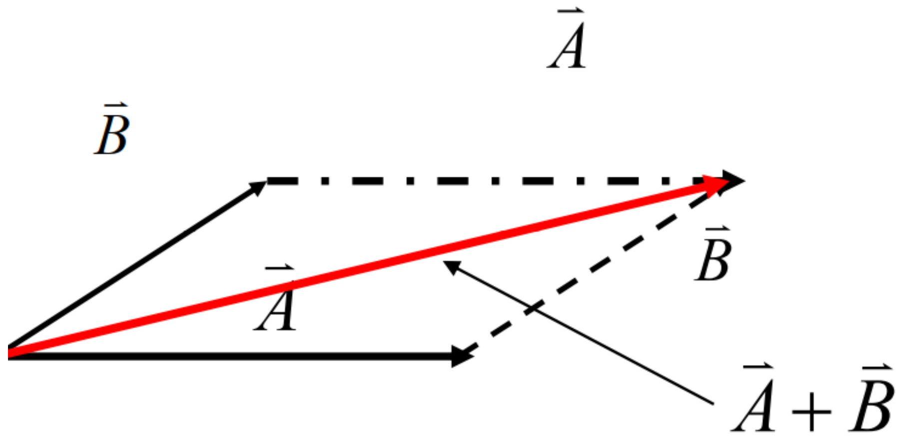
Vectores y campos vectoriales

Cantidad vectorial: Describe un objeto que tiene tanto una magnitud como una dirección. Los hay en 2, 3 ó *n* espacios. Ejemplos: fuerza, velocidad, aceleración, etc.

Campo vectorial: Función matemática del vector que relaciona el origen (arbitrario) con un punto cualquiera en el espacio. Generalmente es común asociar efectos físicos con un campo. Ejemplos de campos vectoriales: Campo magnético y campo gravitacional de la Tierra, gradiente del voltaje en un cable eléctrico, el gradiente de temperatura en la punta de un cautín. El valor de un campo no es necesariamente constante. Puede variar, por ejemplo, con la posición y con el tiempo.

Álgebra vectorial

- Algebra vectorial:
  Suma vectorial Regla del paralelogramo



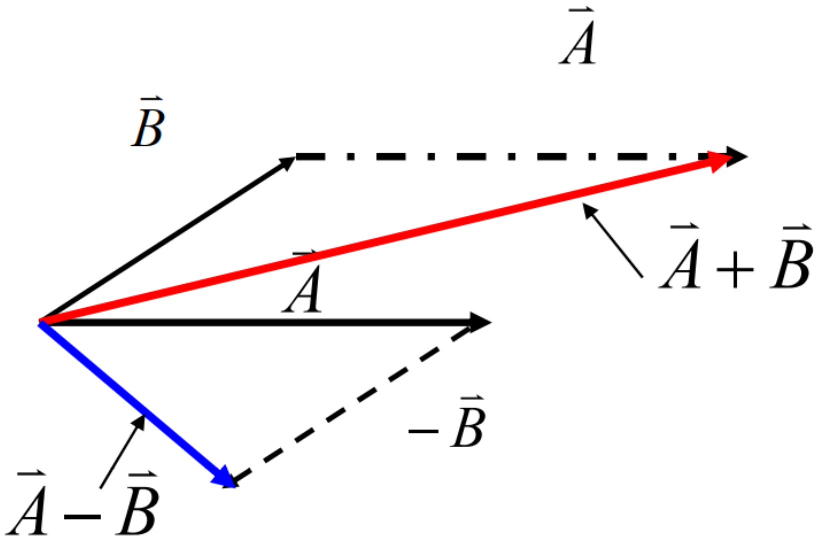
Es evidente que: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

Álgebra vectorial

Algebra vectorial: $\Rightarrow$

Suma vectorial Regla del paralelogramo

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = -\vec{B} + \vec{A}$$

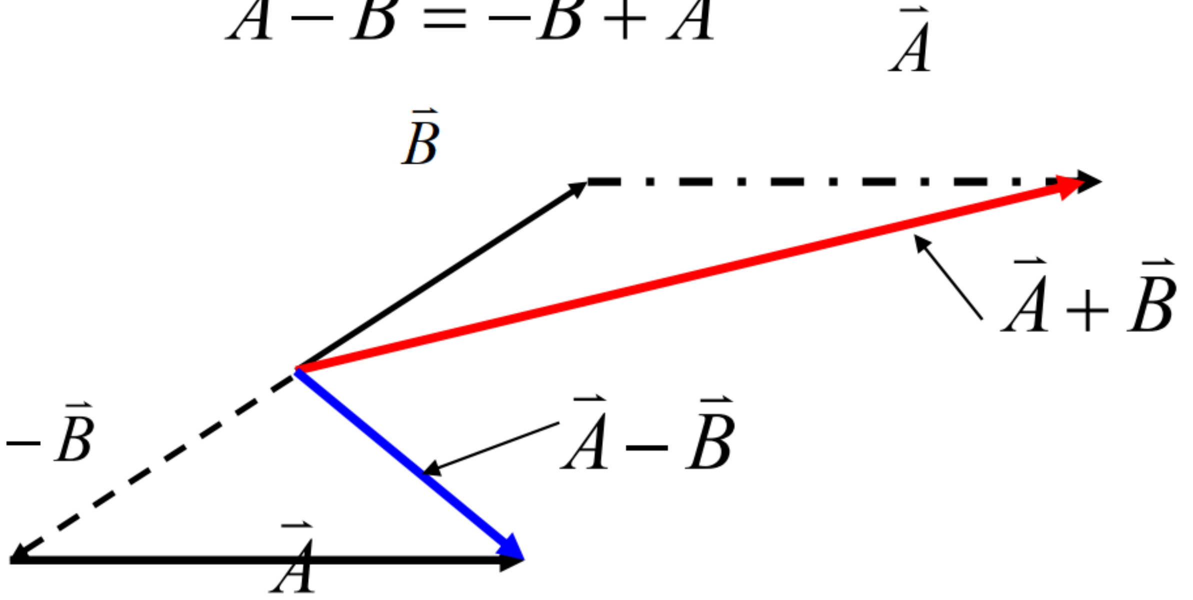


Álgebra vectorial

Algebra vectorial: $\Rightarrow$

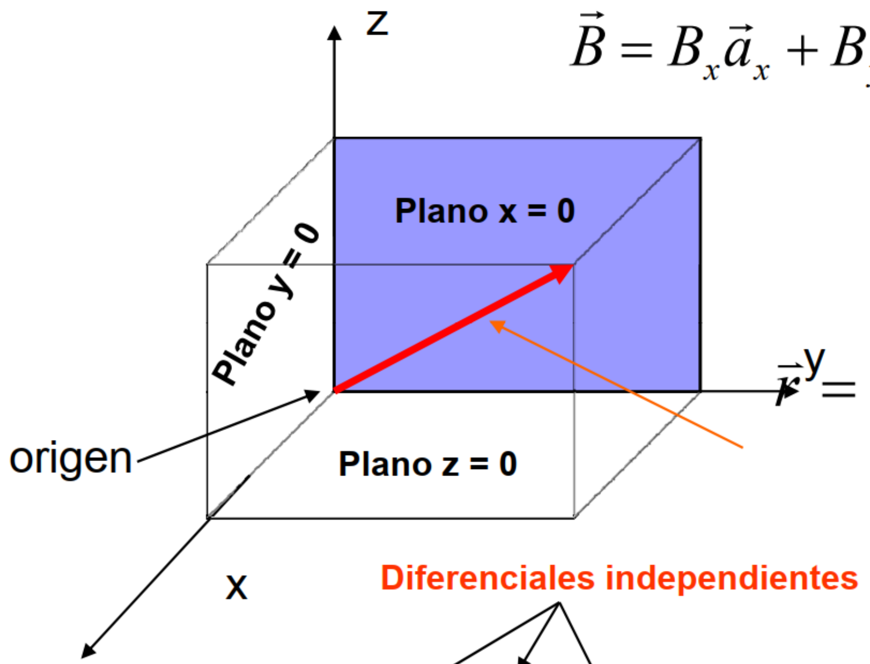
Suma vectorial Regla del paralelogramo

$$\vec{A}-\vec{B}=-\vec{B}+\vec{A}$$



Sistema de coordenadas rectangulares

$$\vec{B} = B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z$$



$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

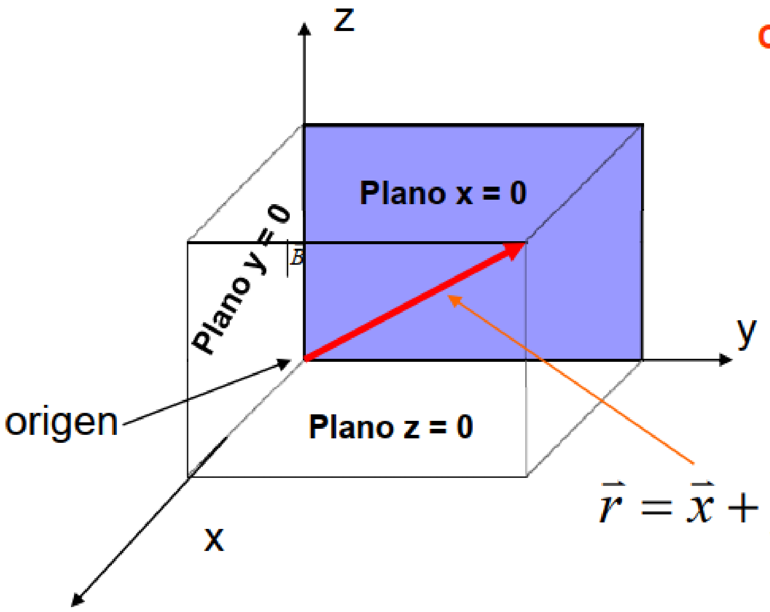
Diferencial de volumen:

$$dv = dx \cdot dy \cdot dz$$

Diferencial de longitud :

$$d\vec{l} = dx\vec{a}_x + dy\vec{a}_y + dz\vec{a}_z$$

Sistema de coordenadas rectangulares



$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

Cualquier vector B se define como:

$$\vec{B} = B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z$$

Su magnitud se define como:

$$\left|\vec{B}\right| = B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

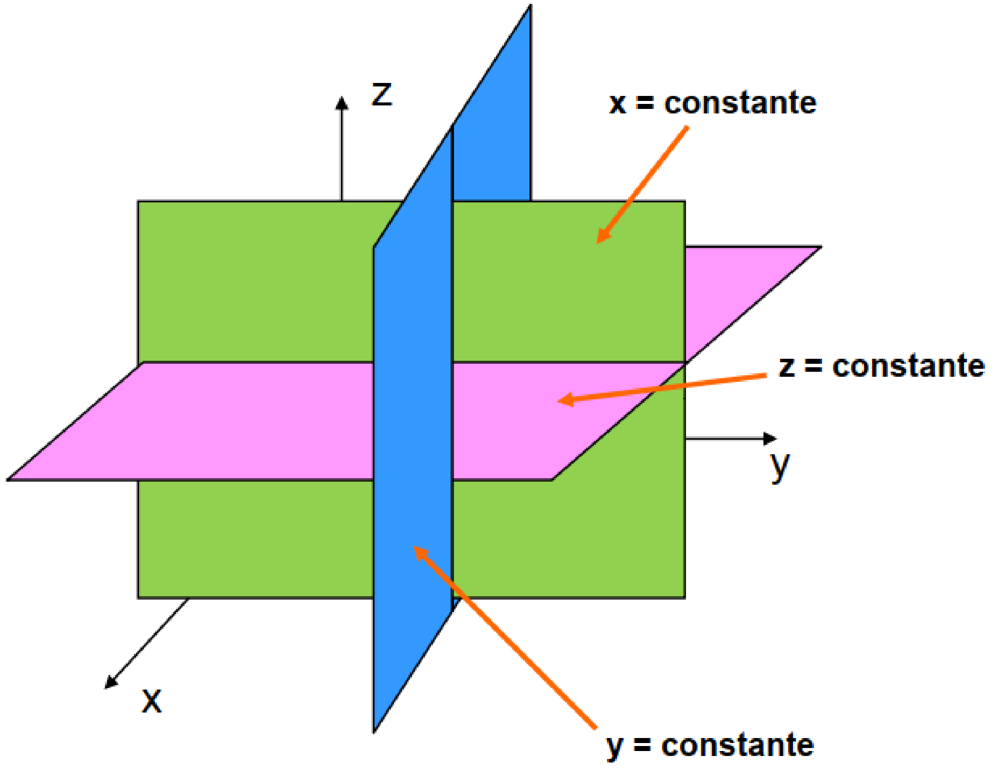
Diferenciales de área : $\begin{Bmatrix} dS_1 = dx \cdot dy \\ dS_2 = dy \cdot dz \\ dS_3 = dz \cdot dx \end{Bmatrix}$

Un vector unitario en la dirección de B es:

$$\vec{a}_B = \frac{\vec{B}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}$$

Sistema de coordenadas rectangulares

Superficies con coordenadas constantes:

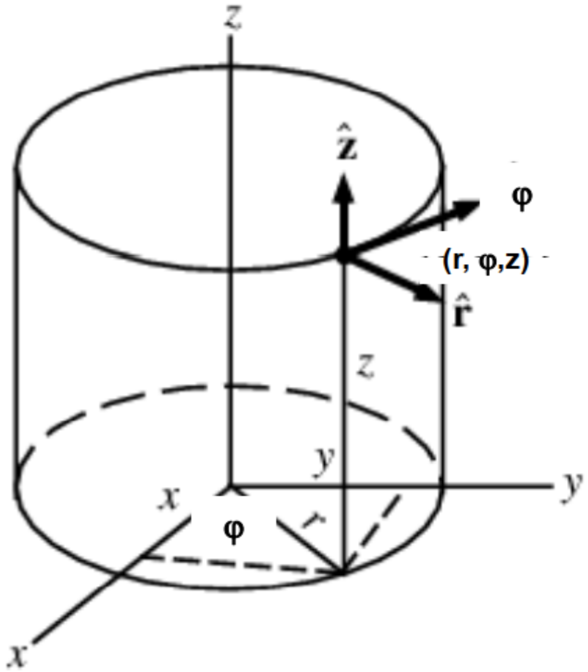


Coordenadas cilíndricas

Conversión en coordenadas cilíndricas:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\ ,\quad z=z$$

$$x=r\cos\varphi\ ,\quad y=r sen\varphi\ ,\ z=z$$



$$\boxed{dA = r \cdot d\theta \cdot dz}$$

$$Q=\oint_{A(r)}\vec{D}\cdot d\vec{A}=\oint_{A(r)}D\cdot\vec{e}_r\cdot dA\cdot\vec{e}_r$$

$$Q=D\int_0^{2\pi}\int_0^{z} r\cdot dz\cdot d\theta=$$

$$Q=D\cdot r\cdot 2\cdot\pi\cdot z$$

Coordenadas cilíndricas

Conversión de coordenadas cilíndricas:

La transformación del vector $\vec{A}(x,y,z)$ en el vector $\vec{A}(r,\varphi,z)$:

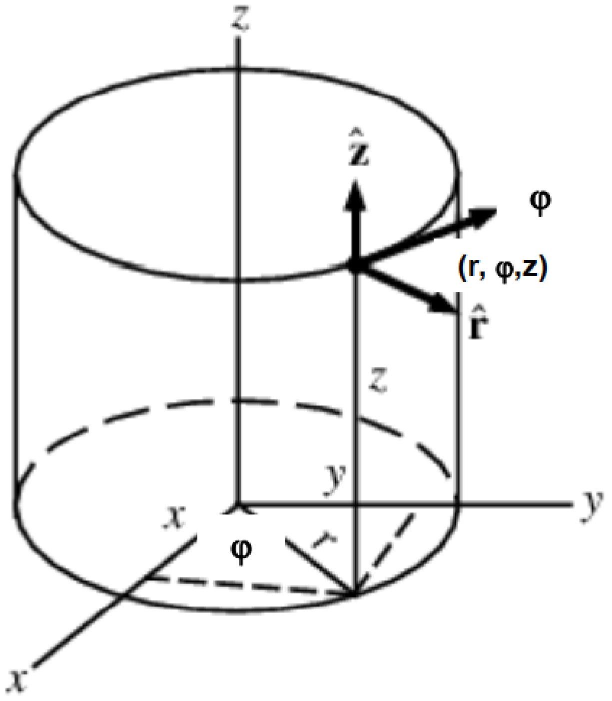
$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & sen\varphi & 0 \\ -sen\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

La transformación inversa, $\vec{A}(r,\varphi,z)$en el vector $\vec{A}(x,y,z)$:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & sen\varphi & 0 \\ -sen\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

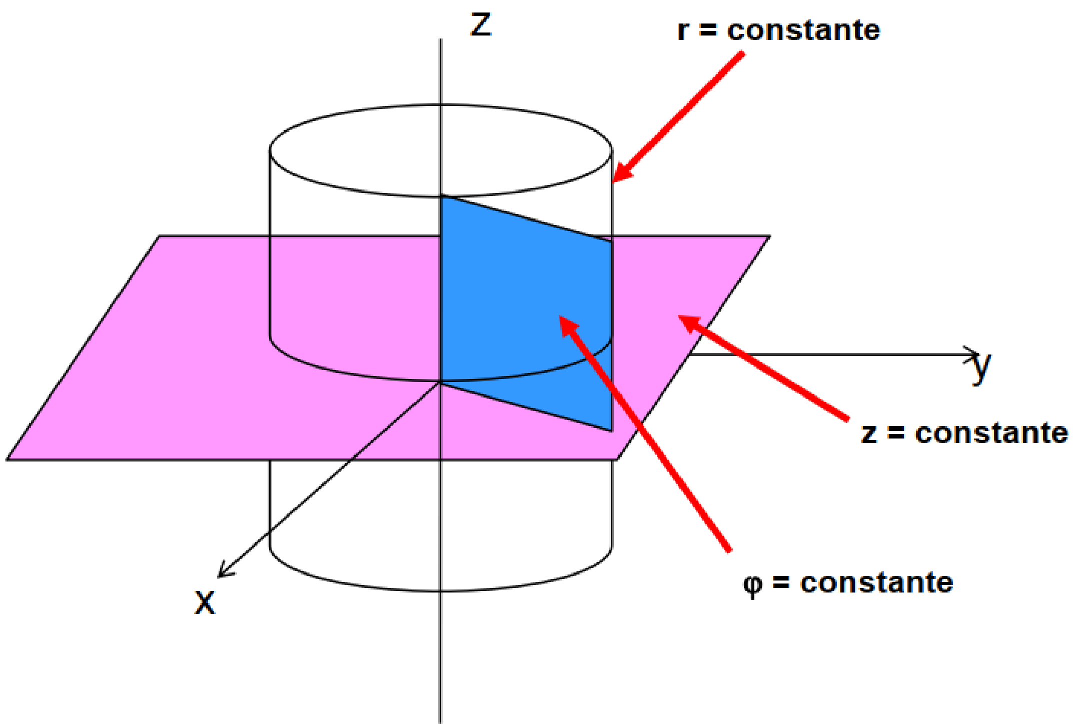
o por medio del producto punto de los vectores unitarios:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_r & \vec{a}_x \cdot \vec{a}_\varphi & \vec{a}_x \cdot \vec{a}_r \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_r & \vec{a}_y \cdot \vec{a}_\varphi & \vec{a}_y \cdot \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_z \cdot \vec{a}_r & \vec{a}_z \cdot \vec{a}_\varphi & \vec{a}_z \cdot \vec{a}_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$



Coordenadas cilíndricas

Superficies con coordenadas constantes:

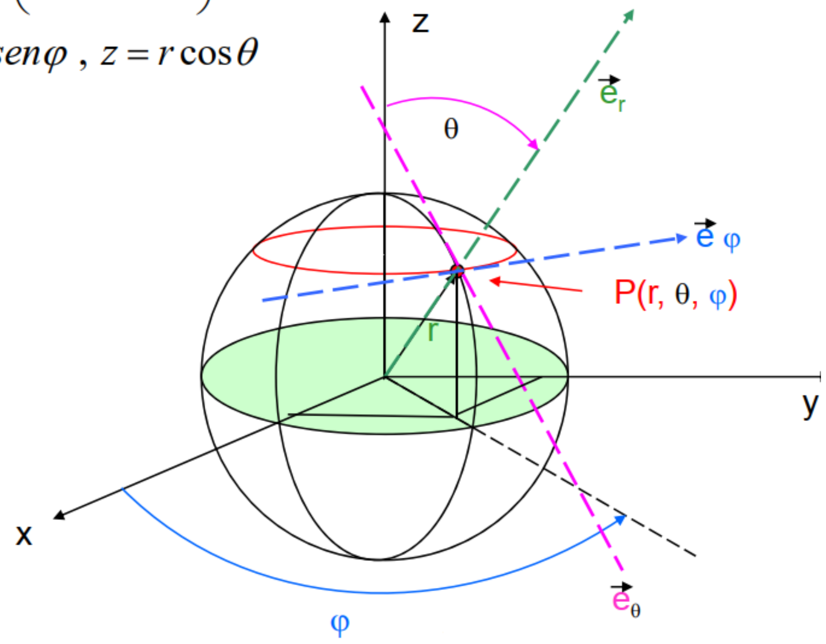


Coordenadas esféricas

La transformación en coordenadas esféricas:

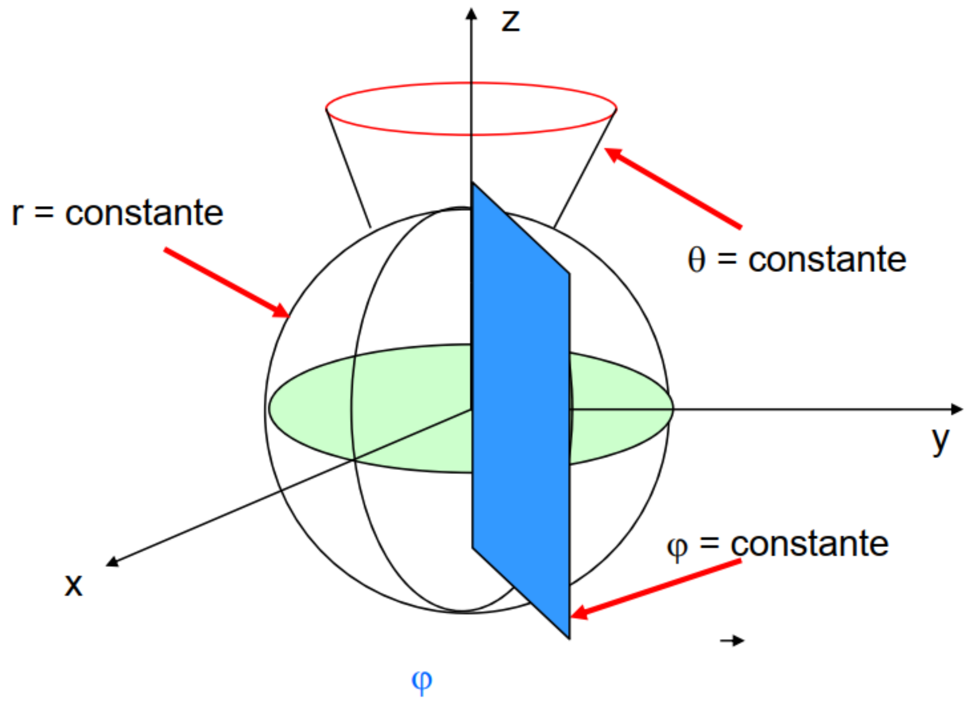
$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\;,\quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)\;,\quad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x=r sen\theta\cos\varphi\;,\quad y=r sen\theta\, sen\varphi\;,\; z=r\cos\theta$$



Coordenadas esféricas

Superficies con coordenadas constantes:



Coordenadas esféricas

La transformación del vector $\vec{A}(x, y, z)$ en el vector $\vec{A}(r, \theta, \varphi)$:

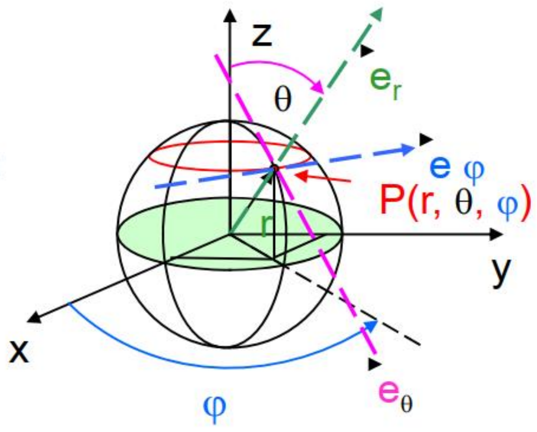
$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & sen\varphi & 0 \\ -sen\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

La transformación inversa, $\vec{A}(r, \theta, \varphi)$ en el vector $\vec{A}(x, y, z)$:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & sen\varphi & 0 \\ -sen\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

o por medio del producto punto de los vectores unitarios :

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_r \cdot \vec{a}_x & \vec{a}_r \cdot \vec{a}_y & \vec{a}_r \cdot \vec{a}_z \\ \vec{a}_\theta \cdot \vec{a}_x & \vec{a}_\theta \cdot \vec{a}_y & \vec{a}_\theta \cdot \vec{a}_z \\ \vec{a}_\varphi \cdot \vec{a}_x & \vec{a}_\varphi \cdot \vec{a}_y & \vec{a}_\varphi \cdot \vec{a}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$



Multiplicación de vectores

El producto escalar (Producto punto):

De la multiplicación escalar de dos vectores resulta un escalar.

Ejemplo: Trabajo = Fuerza • Distancia

La fuerza y la distancia son magnitudes físicas que possen magnitud y dirección, es decir son vectores. El trabajo es una magnitud escalar!

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Producto punto o producto escalar

El producto punto o producto escalar de dos vectores **A** y **B** se define como el producto de las magnitudes de ambos vectores y el coseno del ángulo entre ellos. $\vec{A}\vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \cos\theta_{AB}$

Propiedad conmutativa: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

Propiedad distributiva: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Propiedad distributiva: $s \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) \cdot = (s\vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{B} \cdot (s\vec{C}) = (\vec{B} \cdot \vec{C})s$

$$\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z \quad y \quad \vec{B} = B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z) \bullet (B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$Si \ \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \ \ y \ \vec{A} \neq 0 \ , \ \vec{B} \neq 0, \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

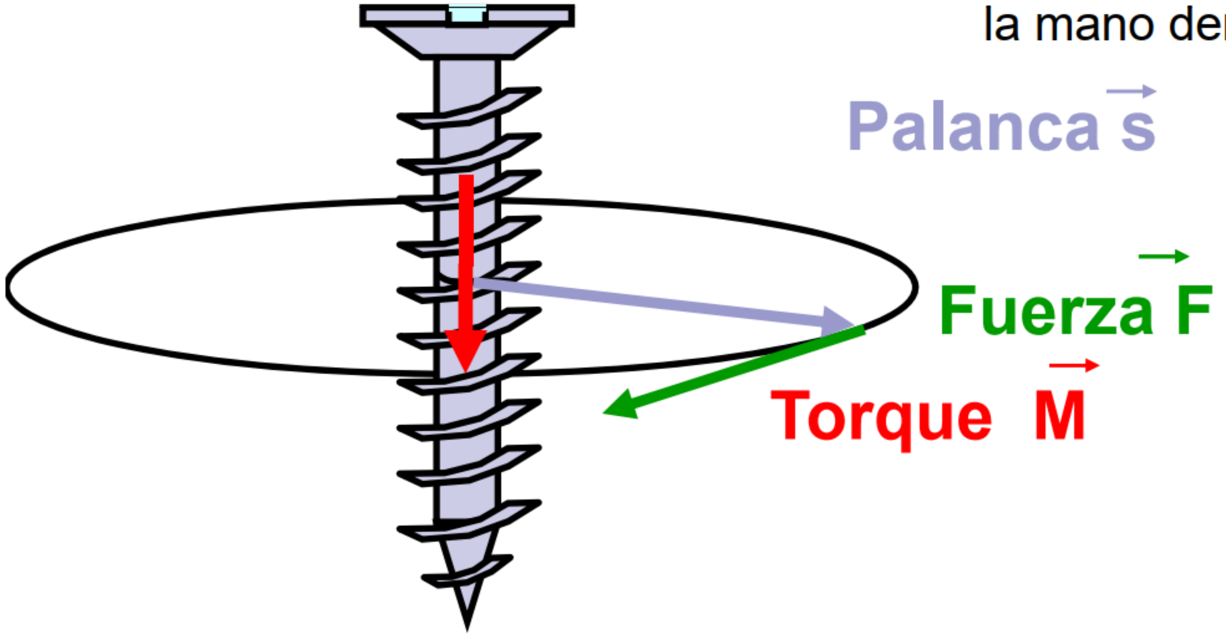
Multiplicación de vectores

El producto vectorial (producto cruz):

<u>**De la multiplicación vectorial de dos vectores resulta un nuevo vector!**</u>

Ejemplo: Momento de giro(torque) = Fuerza x Palanca

Regla del tornillo con rosca derecha (Regla de la mano derecha)



$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{s}$$

Producto cruz o producto vectorial

$$\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z \qquad y \qquad \vec{B} = B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z$$

Si

$$\vec{A}x\vec{B} = (A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z)x(B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z) = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}}$$

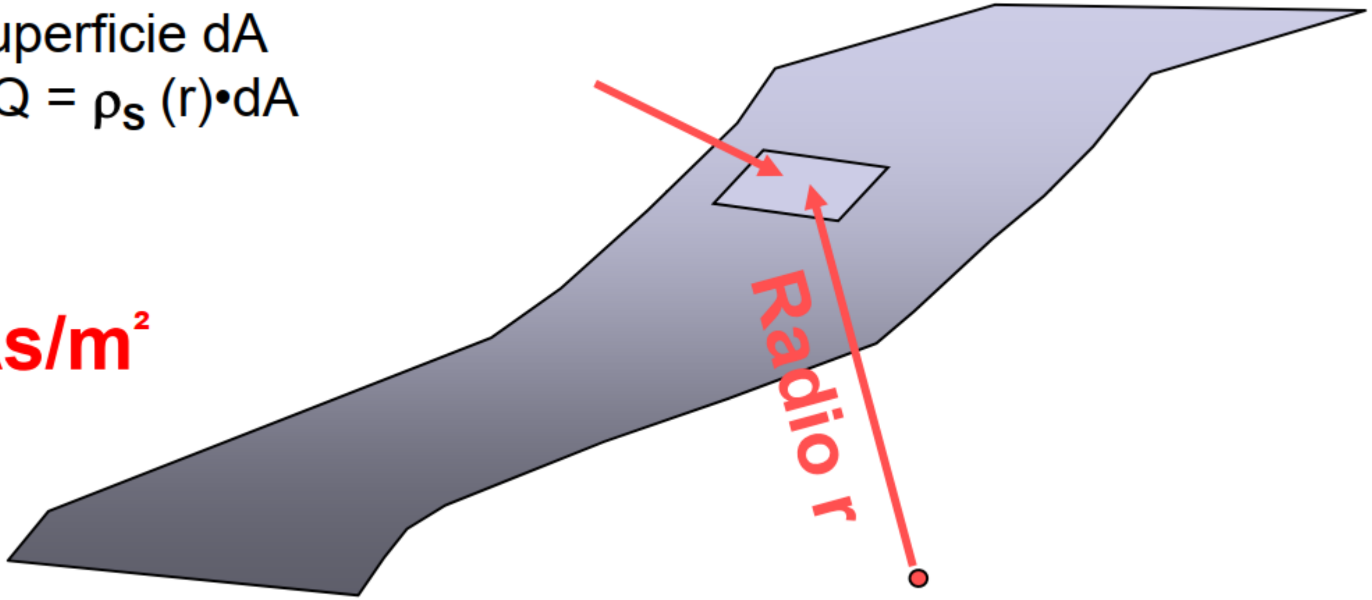
Densidad superficial de carga ρ_S

Calculo de la carga total Q sobre una superficie A:

Sobre una superficie puede existir una distribución de carga ρ_S **(r)** homogénea o una dependiente de la posición

Elemento de superficie dA
Con la carga $dQ = \rho_S\,(r) \cdot dA$

$$[\rho_s(r)] = \mathbf{As/m^2}$$



Punto de referencia P

Carga total sobre la superficie: $Q = \int \rho_S(r)\,dA$

Carga puntual

Definición:

La carga puntual es un cuerpo que tiene finita Q pero un volumen despreciable $V \to 0$.
Así en el límite $r \to 0$, la densidad de carga espacial de una carga puntual tiende a $\rho \to \infty$

Carga puntual

- Problema 1. Especificar el vector unitario dirigido desde el origen hacia el punto G(2, –2, –1).

- Problema 2. Dados los puntos M(–1, 2, 1), N(3, –3, 0) y P(–2, –3, –4), encontrar: $a)\ \boldsymbol{R}_{MN};\ b)\ \boldsymbol{R}_{MN} + \boldsymbol{R}_{MP};\ c)\ |\boldsymbol{r}_M|;\ d)\ \boldsymbol{a}_{MP};\ e)\ |2\boldsymbol{r}_P - 3\boldsymbol{r}_N|$

Tips: Para encontrar el vector unitario: encontramos la magnitud de G y, se expresa el vector unitario deseado como el cociente.

Producto cruz

Ejemplo:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Entonces, si $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$, tenemos que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= [(-3)(5) - (1(-2)]\mathbf{a}_x - [(2)(5) - (1)(-4)]\mathbf{a}_y + [(2)(-2) - (-3)(-4)]\mathbf{a}_z$$

$$= -13\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y - 16\mathbf{a}_z$$

Problema 3. Los tres vértices de un triángulo localizan en: A(6, –1, 2), B(–2, 3, –4) y C(–3, 1, 5).

Encuentre: a) $R_{AB} \times R_{AC}$; b) el área del triángulo; c) un vector unitario perpendicular al plano en el cual se localiza el triángulo

Sistemas de coordenadas

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi$$

$$z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Tabla 1.1 Producto punto de vectores unitarios del sistema de coordenadas cilíndricas y del sistema cartesiano

	$\mathbf{a}_\rho$	$\mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\cos \phi$	$-\operatorname{sen} \phi$	0
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\operatorname{sen} \phi$	$\cos \phi$	0
$\mathbf{a}_z \cdot$	0	0	1

Transformar el vector $\mathbf{B} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ en coordenadas cilíndricas.

Solución. Las nuevas componentes son:

$$B_\rho = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\rho = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho)$$
$$= y \cos \phi - x \operatorname{sen} \phi = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \phi - \rho \cos \phi \operatorname{sen} \phi = 0$$
$$B_\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\phi = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi)$$
$$= -y \operatorname{sen} \phi - x \cos \phi = -\rho \operatorname{sen}^2 \phi - \rho \cos^2 \phi = -\rho$$

De esta manera,

$$\mathbf{B} = -\rho \mathbf{a}_\phi + z\mathbf{a}_z$$

Sistemas de coordenadas

Problema 4: a) Dé las coordenadas cartesianas del punto C(ρ = 4.4, φ = –115°, z = 2).

b) Dé las coordenadas cilíndricas del punto D(x = –3.1, y = 2.6, z = –3).

c) Especifique la distancia de C a D.

Respuesta. C(x =–1.860, y =–3.99, z = 2); D(ρ = 4.05, φ = 140.0°, z=–3); 8.36

PROBLEMAS

1.1 Dados los vectores $\mathbf{M} = -10\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 8\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{N} = 8\mathbf{a}_x + 7\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$, hallar: *a*) un vector unitario en la dirección de $-\mathbf{M} + 2\mathbf{N}$; *b*) la magnitud de $5\mathbf{a}_x + \mathbf{N} - 3\mathbf{M}$; *c*) $|\mathbf{M}|\,|2\mathbf{N}|(\mathbf{M} + \mathbf{N})$.

1.2 El vector **A** va del origen a (1, 2, 3), y el vector **B** va del origen a (2, 3, −2). Hallar *a*) el vector unitario en la dirección de $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$; *b*) el vector unitario en dirección de la línea que va desde el origen hasta el punto medio de la recta que une los extremos de **A** y **B**.

1.3 Un vector desde el origen hasta el punto *A* está dado por (6, −2, −4), y un vector unitario dirigido desde el origen hasta el punto *B* está dado por (2, −2, 1)/3. Si los puntos *A* y *B* se encuentran a diez unidades entre sí, hallar las coordenadas del punto *B*.

1.4 Un círculo con centro en el origen y un radio de 2 unidades está en el plano *xy*. Determinar el vector unitario en coordenadas cartesianas que está en el plano *xy*, es tangente al círculo en el punto $(-\sqrt{3}, 1, 0)$, y está en la dirección positiva del eje *y*.

1.5 Un campo vectorial está dado por $\mathbf{G} = 24xy\mathbf{a}_x + 12(x^2 + 2)\mathbf{a}_y + 18z^2\mathbf{a}_z$. Dados dos puntos, $P(1, 2, -1)$ y $Q(-2, 1, 3)$, hallar: *a*) **G** en *P*; *b*) un vector unitario en la dirección de **G** en *Q*; *c*) un vector unitario de *Q* a *P*; *d*) la ecuación de la superficie en la que $|\mathbf{G}| = 60$.

1.6 Encontrar el ángulo agudo entre los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ usando la definición de *a*) el producto punto; *b*) el producto cruz.