Comunidad aprendiente #2

Angie Marchena Mondell
Christopher Torrentes Delgado
María Mercedes rojas Alvarado
Rodolfo Marten Guidotti

1. **Primer Problema**

   a) $\{b_n\} = \dfrac{n}{n^2+1}$

   b) Asumo que $b_{n+1} \leq b_n$

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{(n+1)^2+1} &\leq \frac{n}{n^2+1} \\
(n+1)(n^2+1) &\leq n[((n+1)^2+1)] \\
n^3+n+n^2+1 &\leq n[(n^2+2n+2] \\
n^3+n^2+n+1 &\leq n^3+2n^2+2n \\
n^2+n+1 &\leq 2n^2+2n \\
1 &\leq n^2+n
\end{aligned}$$

   Como se ve $1 \leq n^2+n$ es correcto ya que $n \geq 1$ por lo que n^2+n siempre es mayor que 1
   Se concluye que $b_{n+1} \leq b_n$ por lo que es **DECRECIENTE**.

   c) Se determina el limite

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} b_n \\
&\lim_{n\to} \frac{n}{n^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \\
&\lim_{n\to} \frac{n}{n(n+1/n)} = \frac{1}{\infty+0} = 0
\end{aligned}$$

   Concluimos que es convergente a 0.

2. **Segundo Problema**
Dividimos en dos la expresión:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^2+3n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+2}}$$

Empezamos por la primera serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^2+3n}$$

Separamos en fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{n^2+3n} &= \frac{3}{n(n+3)} \\
\frac{3}{n(n+3)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3} \\
3 &= A(n+3) + Bn
\end{aligned}$$

Si $n = 0$

$$\begin{aligned}
3 &= 3A + 0 \\
A &= 1
\end{aligned}$$

Si $n = -3$

$$\begin{aligned}
3 &= 0 + -3B \\
B &= -1
\end{aligned}$$

Por lo que reescribimos la suma como:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$$

Como se puede ver es una serie telescópica con $a_n = \frac{1}{n}$ Tenemos como resultado:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) &= a_1 + a_2 + a_3 - \lim_{n\to\infty} a_{n+3} \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0 \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) &= \frac{13}{12} \\
S_1 &= \frac{13}{12}
\end{aligned}$$

Para la segunda expresión tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+2}} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n \cdot 2^{-1}}{3^n \cdot 3^2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{18} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&= \frac{1}{18} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Se puede ver que es una serie geométrica con $r = 2/3$ y se ve claro que $|r| \leq 1$. Usamos la formula para averiguar la suma.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} r^n &= \frac{r^k}{1-r} \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n &= \frac{(2/3)^2}{1-2/3} \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n &= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{18} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
S_2 &= \frac{1}{18} \cdot \frac{4}{3} \\
S_2 &= \frac{2}{27}
\end{aligned}$$

Finalizamos sumando las dos partes:

$$\begin{aligned}
S &= S_1 + S_2 \\
S &= \frac{13}{12} + \frac{2}{27} \\
S &= \frac{125}{108}
\end{aligned}$$

3. **Tercer Problema**

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+1}$
Podemos realizar una comparación en el limite de la siguiente manera:
Como tenemos que $1 \ll 2n^3$.

$$\frac{n}{2n^3+1} \sim \frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2}$$

Podemos usar como serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ Que como sabemos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ converge ya que es una p serie con $p > 1$.
Realizamos el limite:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2n^3-1}}{\frac{1}{2n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2n^2}{2n^3-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{2n^3-1} \\ &=1\end{aligned}$$

Como el resultado del limite es un numero positivo determinamos que la serie **CONVERGE**.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)+1}{n^3}$

Para este caso podemos usar comparación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}-1 \leq &\cos(n) \leq 1 \\ 0 \leq &\cos^2(n) \leq 1 \\ 1 \leq &\cos^2(n)+1 \leq 2 \\ \frac{1}{n^3} \leq &\frac{\cos^2(n)+1}{n^3} \leq \frac{2}{n^3}\end{aligned}$$

Si tomamos como $a_n = \dfrac{\cos^2(n)+1}{n^3}$ y $b_n = \dfrac{2}{n^3}$ Verificamos la convergencia de b_n.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Como vemos es una p serie con $p \geq 1$ por lo que si converge, y a su vez $a_n \leq b_n$ por lo que se concluye por **comparación directa** que $a_n = \frac{\cos^2(n)+1}{n^3}$ **CONVERGE**.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^{2k-1}$

En este caso podemos usar el criterio de la **raíz**, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^{2k-1}\right|} &= \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^{2k}\cdot\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^{-1}}\\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^{2}\cdot\sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^{-1}}\\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^{2}\cdot\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^{-1/k}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Como obtenemos $\frac{1}{4}$ vemos que $\frac{1}{4}<1$ por lo que la serie **CONVERGE**.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}$

Utilizando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{5^{n+1}\cdot(n+1)!}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)(3(n+1)-1)}}{\frac{5^n\cdot n!}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}}\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^n\cdot5\cdot n!(n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)(3n+2)}}{\frac{5^n\cdot n!}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5(n+1)}{(3n+2)}}{\frac{1}{1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{5n+5}{3n+2}\\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Como se puede ver el valor del limite es $\frac{5}{3}$ que es mayor que 1, por lo que concluimos por el criterio del cociente que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}$ **DIVERGE**.