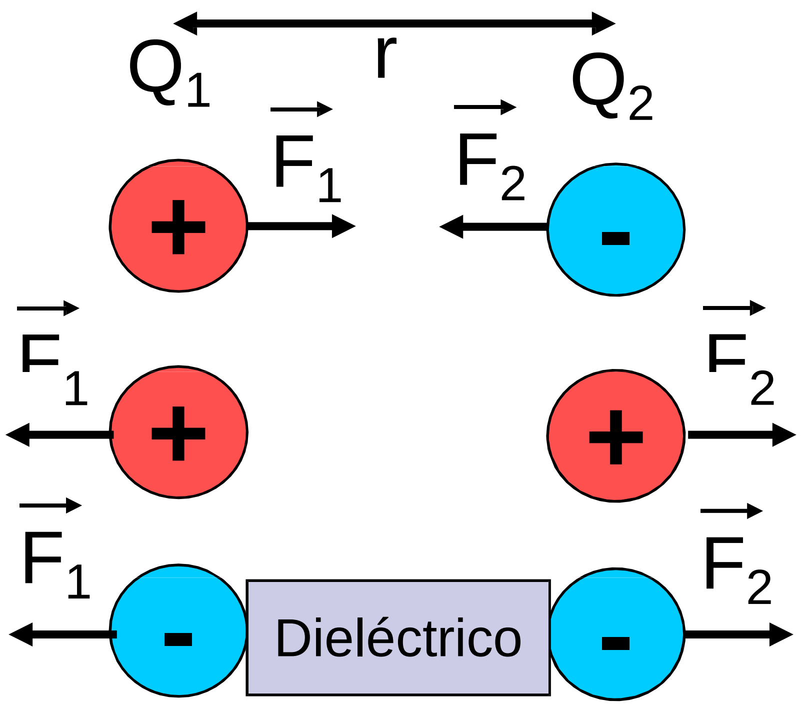
Campos electrostáticos

Teoría Electromagnética 1

Ing. Jefry Mendoza Robles

La ley de Coulomb

La fuerza entre cargas eléctricas fue formulada cuantitativamente como la primera ley de la Teoría de la Electricidad por el científico francés Coulomb (1736 - 1806) en 1785.



$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_1\right| \quad F_1 = F_2 \sim 1/r^2$$

$$F_1 = F_2 \sim Q_1$$

$$F_1 = F_2 \sim Q_2$$

$$F_1 = F_2 \sim k$$

Charles Augustin de Coulomb

*14. Junio 1736 - † 23. Agosto 1806
1761 Estudios de ingeniería (25 años)

1777 compás magnético

1781 Fricción mecánica

1785-91 Fuerza eléctrica (7 publicaciones)

Con las conclusiones experimentales, la Ley de Coulomb se puede expresar como:

$$\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_1}\right| = k\,\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

La unidad para la constante k:

$$k = \frac{\left|\vec{F_1}\right| \cdot r^{2}}{Q_1 Q_2} \qquad unidad \ \ de \ \ k \Rightarrow [k] = \frac{Nm^2}{(As)^2} = \frac{Wsm}{(As)^2} = \frac{Vm}{As} = \frac{Vm}{C}$$

$$[k] = \frac{Vm}{C}$$

De experimentos y mediciones exactas se obtiene que:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

ε es una nueva constante que depende del material el cual se compone de la constante natural ε_0 y de la parte constante dependiente del material. Se denomina la permitividad del material.

$$k = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_r\, \varepsilon_0}$$

$$\boxed{\textbf{La unidad de } \varepsilon\textbf{:} \quad [\varepsilon] = \frac{C}{Vm}}$$

Permitividad ε

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \qquad \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}$$

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{C}{Vm} = \frac{1}{36\pi} \frac{nC}{Vm}}$$

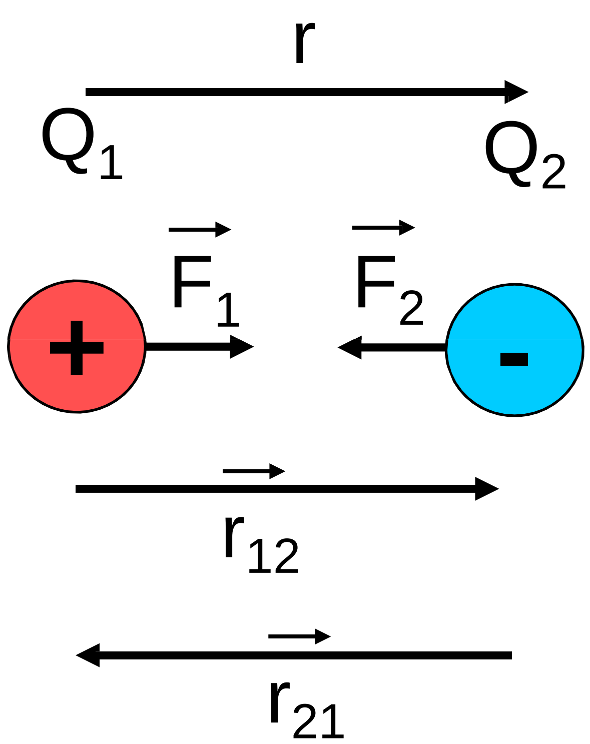
ε_r = Factor de permitividad

ε_0 = Constante física o constante de campo eléctrico

ε_r = Constante dieléctrica del material (sin dimensiones)

Vacío	$\varepsilon_r = 1$
Agua pura	$\varepsilon_r = 80$
Aislantes	$\varepsilon_r = 2...10$

La ley de Coulomb



$$\vec{r}_{12} = - \vec{r}_{21}$$

$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \frac{|Q_1| \bullet |Q_2|}{4\pi\, \varepsilon r\, \varepsilon 0\, r^2}$$

$\vec{r}_{12}$ = Vector unitario con sentido positivo de r

$$\vec{F}_1 = \frac{Q_1 \bullet Q_2}{4\pi\, \varepsilon_r\, \varepsilon_0\, r^2} \bullet \vec{r}_{12}$$

$$\vec{F}_2 = - \frac{Q_1 \bullet Q_2}{4\pi\, \varepsilon_r\, \varepsilon_0\, r^2} \bullet \vec{r}_{21}$$

Descripción de efectos eléctricos por medio del modelo de campo

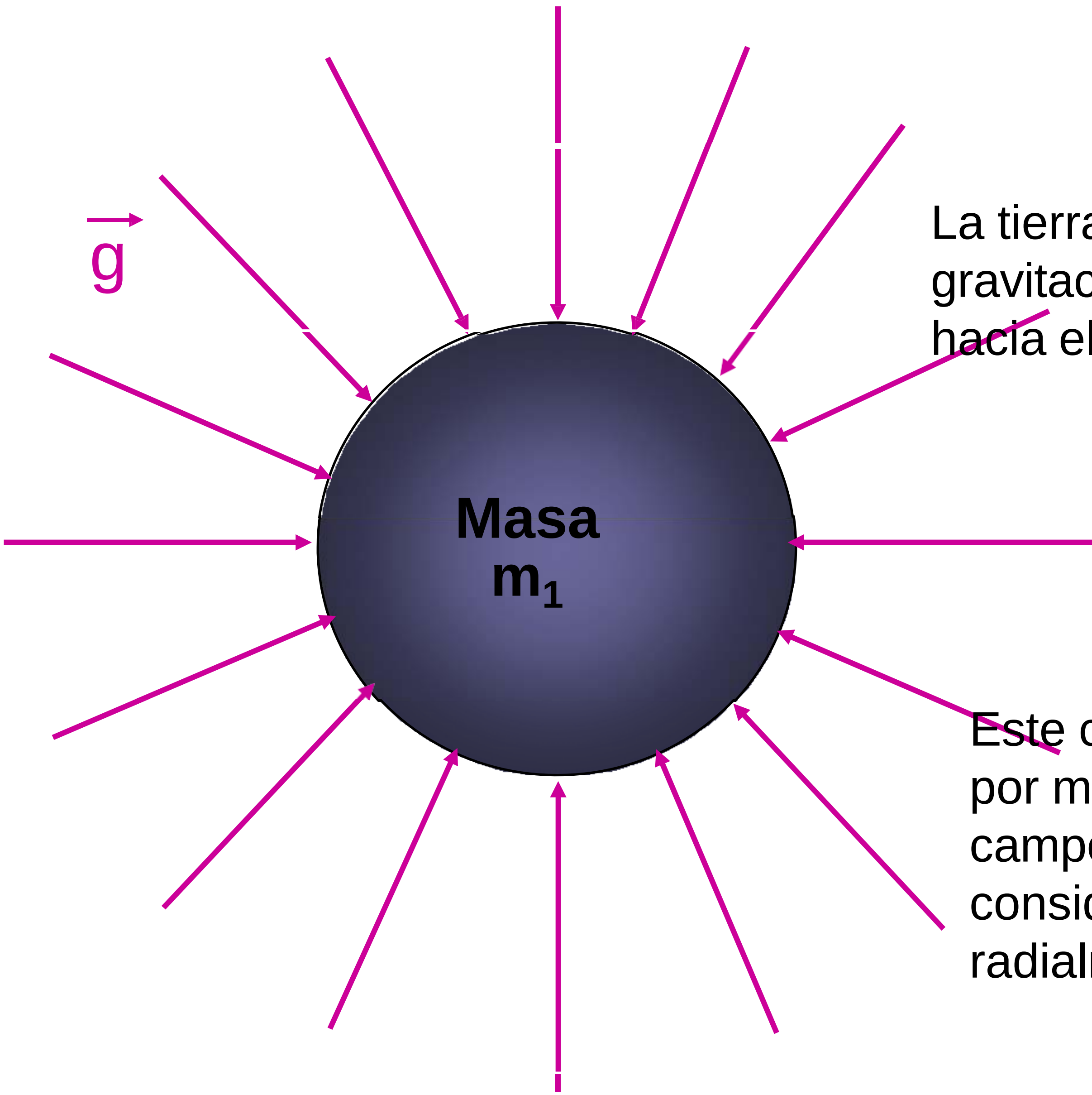
De las leyes de la gravitación se conoce que **no es necesario** que dos cuerpos entren en contacto para que se presente una transmisión de fuerza.
En forma consecuente **cualquier modificación del primer cuerpo,** se debería propagar en forma inmediata en el segundo cuerpo, es decir con una velocidad de propagación espacial infinita. Esto contradice el postulado, de que la velocidad de la luz es la máxima velocidad que se puede presentar.

Para obviar esta contradicción Faraday formuló la suposición de que **en forma inherente, el espacio en el entorno de todo cuerpo, es el portador de características físicas importantes asociadas al mismo.**

Según esta suposición de Faraday se concluye que el efecto fuerza sobre un cuerpo se presenta por medio de un **estado especial** que experimenta el espacio por la presencia de otro cuerpo.

A este particular estado del espacio, que se caracteriza por ejercer fuerzas sobre otros cuerpos (Masa, carga eléctrica, polos magnéticos) se le ha asignado el concepto de **CAMPO**

Introduciendo este concepto se puede decir que el **modelo de campo** describe la fuerza (efecto) sobre un cuerpo en un punto en el espacio como consecuencia de la presencia de otro cuerpo (causa)



La tierra está rodeada de un campo gravitacional, que actúa en dirección hacia el centro de la misma

Este campo se puede representar por medio de líneas de campo. El campo terrestre se puede considerar como homogéneo radialmente visto.

Recuerde:

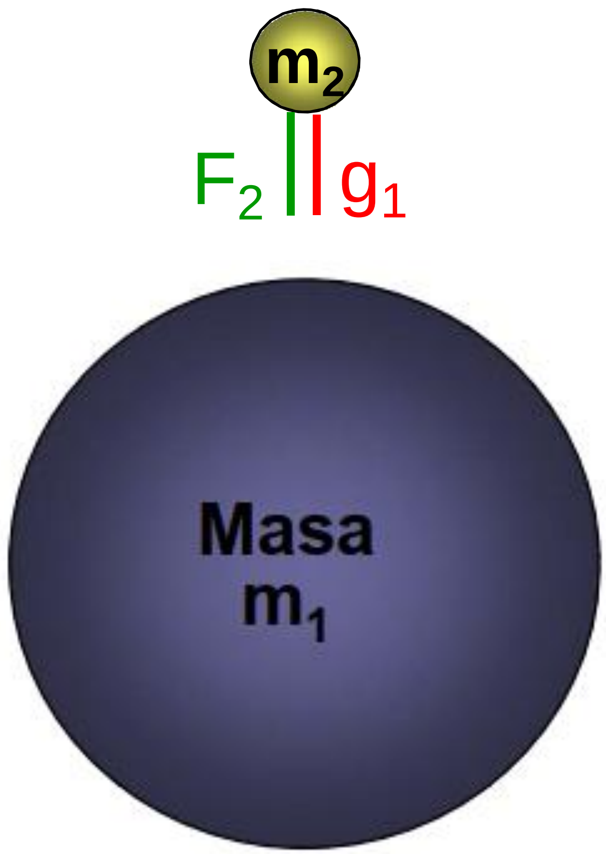
Un campo es un estado del espacio, en el cual, en todo punto del mismo se le puede asignar a la magnitud física ***–la magnitud de campo-*** un valor, y en caso necesario, una dirección.

Un **campo escalar** si sólo tiene magnitud

Un **campo vectorial** si tiene magnitud y dirección.

En el caso de los **campos vectoriales** se diferencia entre vectores homogéneos e inhomogéneos.

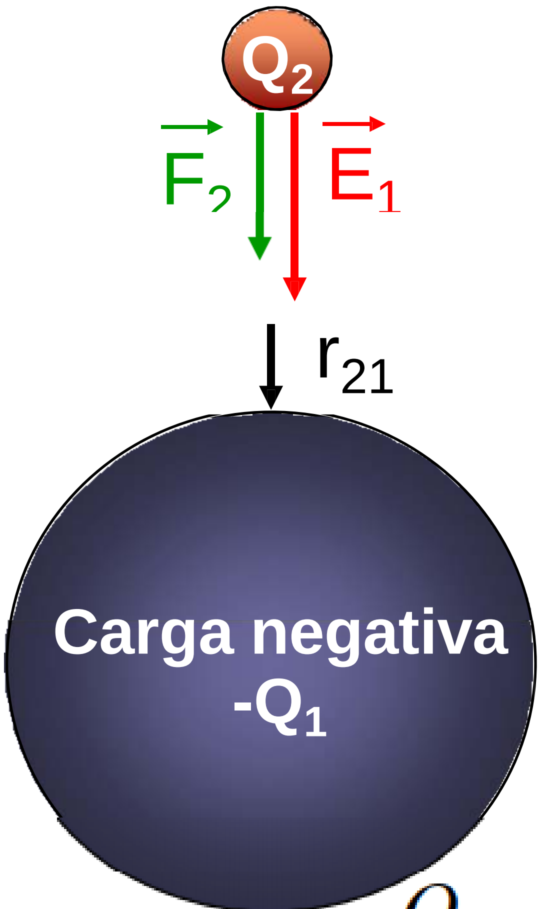
Analogía entre el campo gravitacional y el campo eléctrico



La fuerza de atracción $\vec{F}_2$ que actúa sobre el cuerpo 2 se obtiene del producto de la característica del cuerpo 2 (la masa m_2) y la característica física del cuerpo 1 en el punto en que se encuentra m_2 (es decir la característica $\vec{g}_1$ del campo gravitacional en el punto 2.

$$\vec{F}_2 = m_2 \bullet \vec{g}_1$$

El campo eléctrico



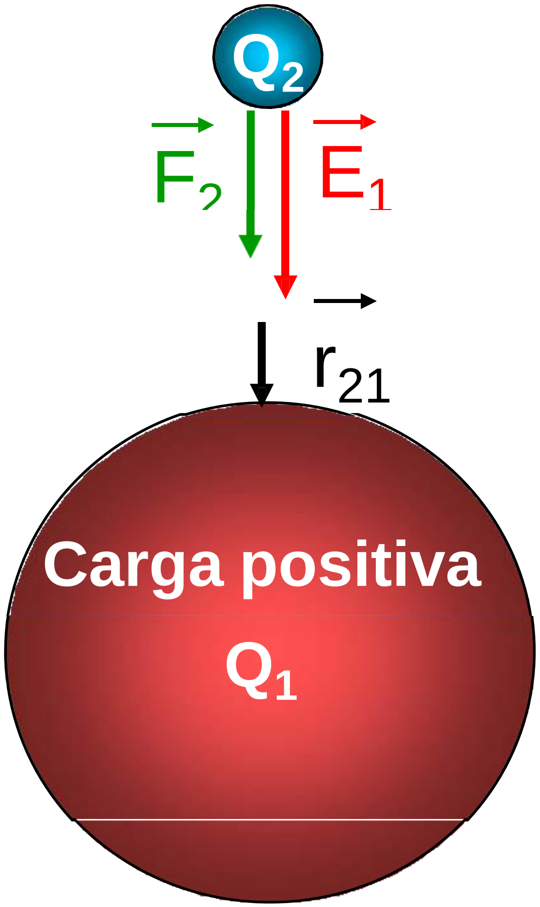
Según Coulomb:

$$F_2 = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{r_{21}}{r_{21}^3}$$

La fuerza de atracción $\vec{F}_2$ que actúa sobre el cuerpo 2 se obtiene del producto de la característica del cuerpo 2 (la carga $+Q_2$) y la característica física del cuerpo 1 en la posición de Q_2 o sea la magnitud del campo eléctrico $\vec{E}_1$ en 2.

$$\vec{F}_2 = Q_2 \underbrace{\frac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r_{21}^2}}_{-E_1} \underbrace{\frac{\vec{r}_{21}}{\vec{r}_{21}^{\,1}}}_{\vec{a}_{21}} = -Q_2 E_1 \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^{1}}$$

El campo eléctrico

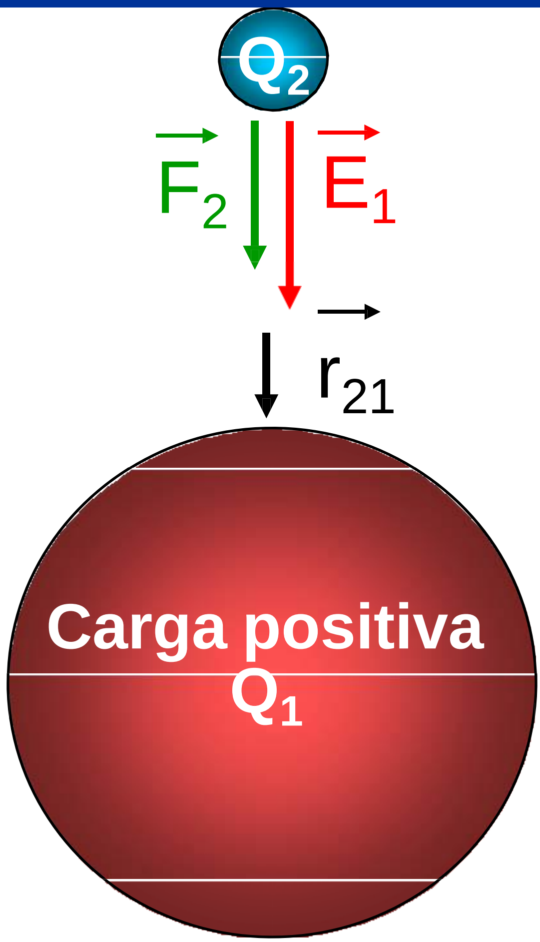


Según Coulomb:

$$\vec{F}_2 = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

La fuerza de atracción $\vec{F}_2$ que actúa sobre el cuerpo 2 se obtiene del producto de la característica del cuerpo 2 (la carga -Q_2) y la característica física física del cuerpo 1 en la posición de Q_2 o sea la magnitud del campo eléctrico en 2. $\vec{E}_1$).

$$\vec{F}_2 = -Q_2 \underbrace{\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r_{21}^2}}_{\vec{E}_1} \underbrace{\frac{\vec{r}_{21}}{\vec{r}_{21}^{\,1}}}_{\vec{a}_{21}} = -Q_2 E_1 \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^1}$$



$$\vec{F}_2 = \vec{Q}_2 \bullet \vec{E}_1$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{21}}{\vec{r}_{21}^{\,3}}$$

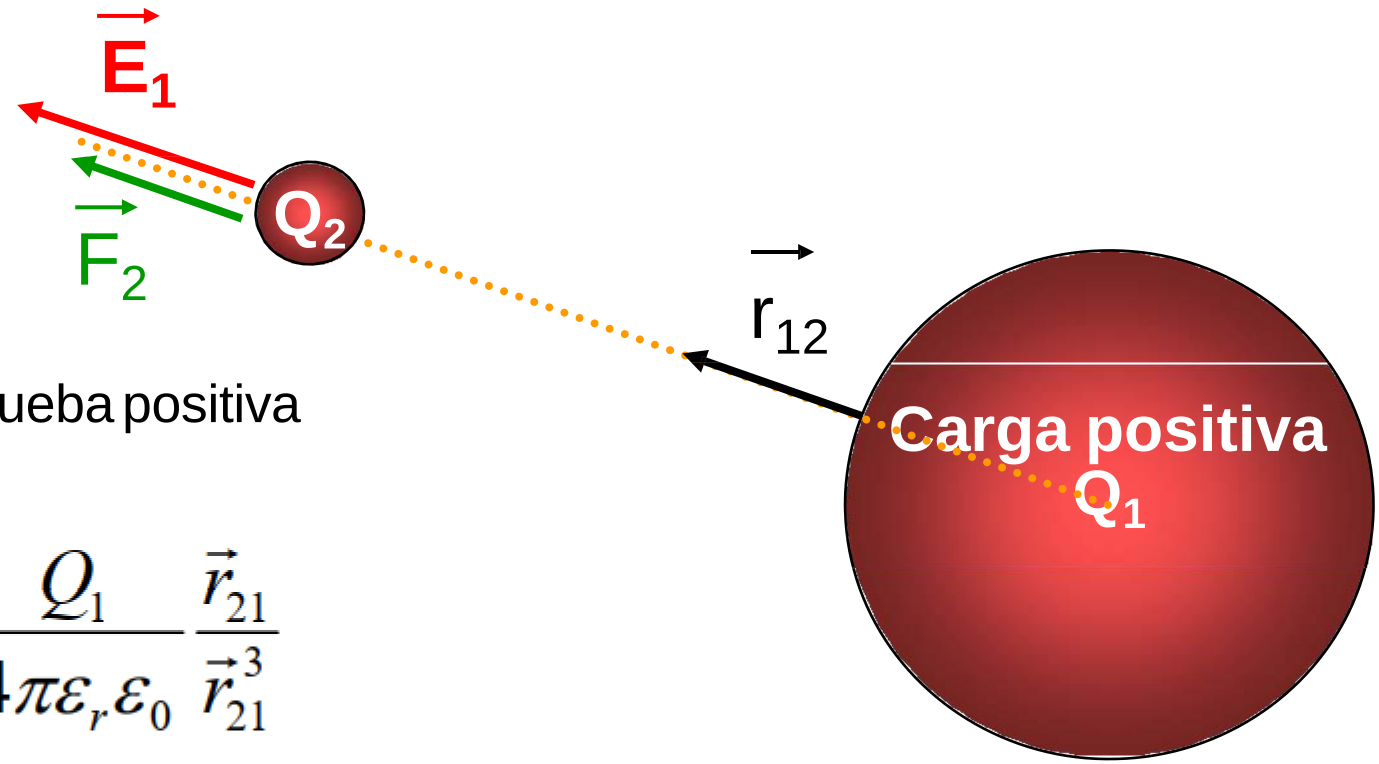
Característica del cuerpo bajo observación en el espacio: Q_2

Característica del espacio en la posición de Q_2: Magnitud de campo: E_1

$$\vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{21}}{\vec{r}_{21}^{\,3}}$$

Definición de la dirección de $\vec{E}$

La dirección de la intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$, está definida por la dirección que tendría la fuerza que actúa sobre una carga puntual positiva.

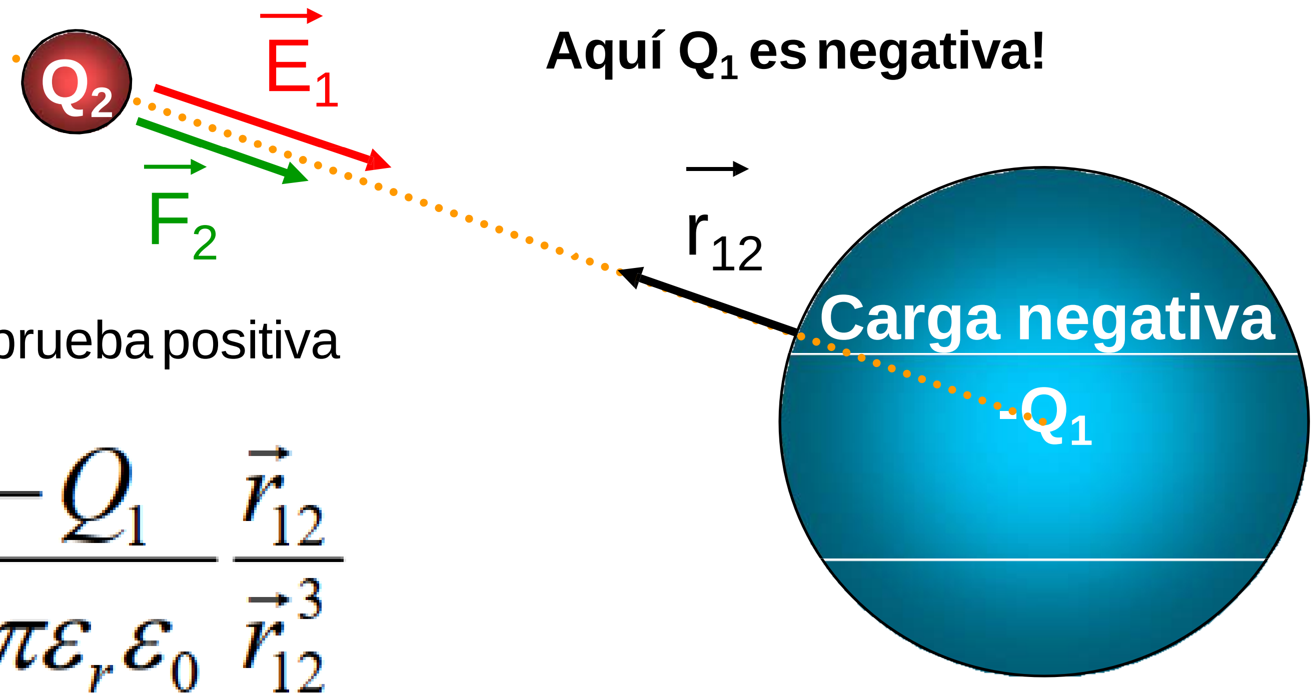


Q_2 = carga de prueba positiva

$$\vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{21}}{\vec{r}_{21}^{\,3}}$$

Definición de la dirección de $\vec{E}$

La dirección de la intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$, está definida por la dirección que tendría la fuerza que actúa sobre una carga puntual positiva.



Q_2 = carga de prueba positiva

$$\vec{E}_1 = \frac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{12}}{\vec{r}_{12}^{\,3}}$$

El fìsico inglés James Clerk **Maxwell** (1831-1879) definió en su obra fundamental publicada en 1873 en Oxford y titulada "A Treatise on Electricity and Magnetism":

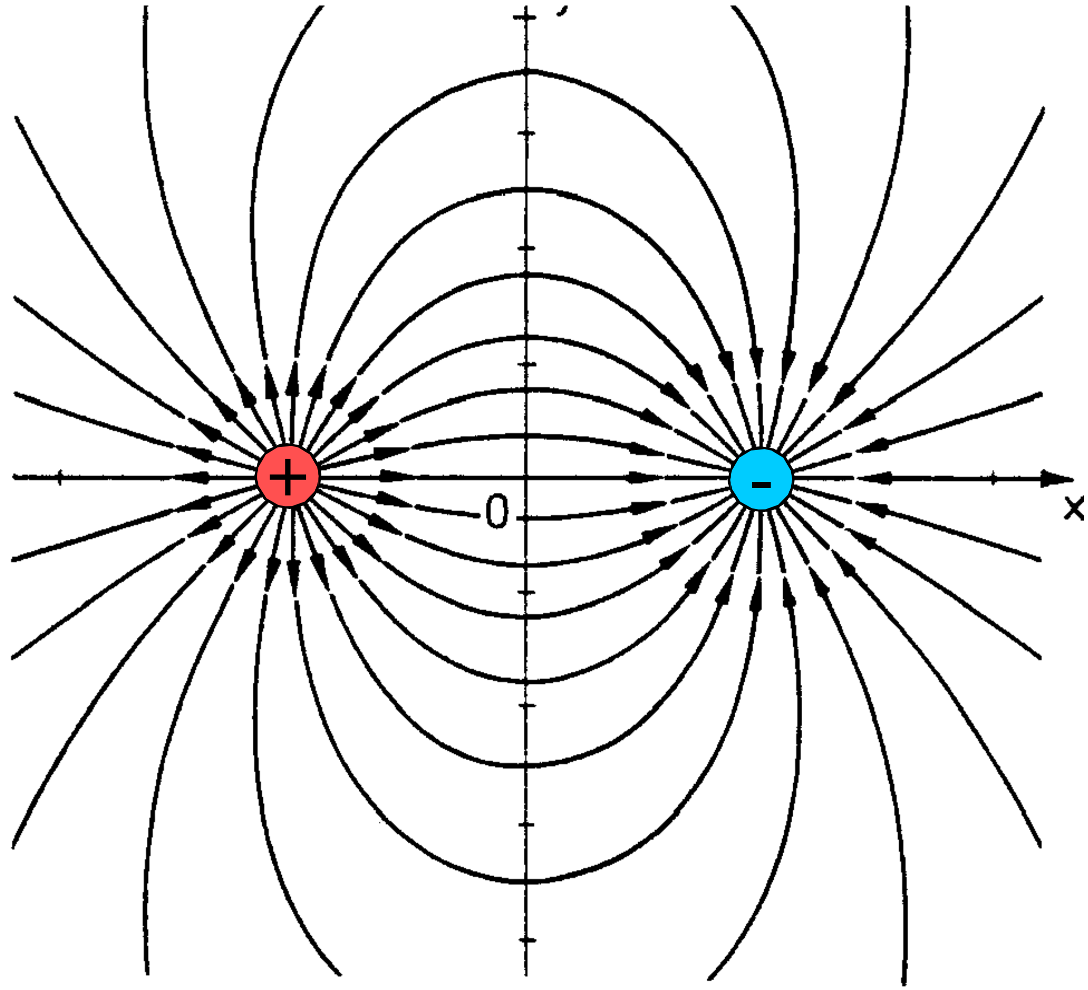
"**El campo eléctrico es el espacio, que rodea a los portadores de carga, caracterizado por los efectos eléctricos en él demostrados.**
Él puede estar lleno de aire o de otros cuerpos ,puede ser un llamado *vacío*, es decir un espacio en el cual se han eliminado, con todos los medios para nosotros posibles, todas las sustancias sobre las cuales podemos actuar."

El campo eléctrico es un campo de fuentes. Las fuentes del campo eléctrico son las cargas.

+ Las cargas positivas son las

fuentes del campo**.**

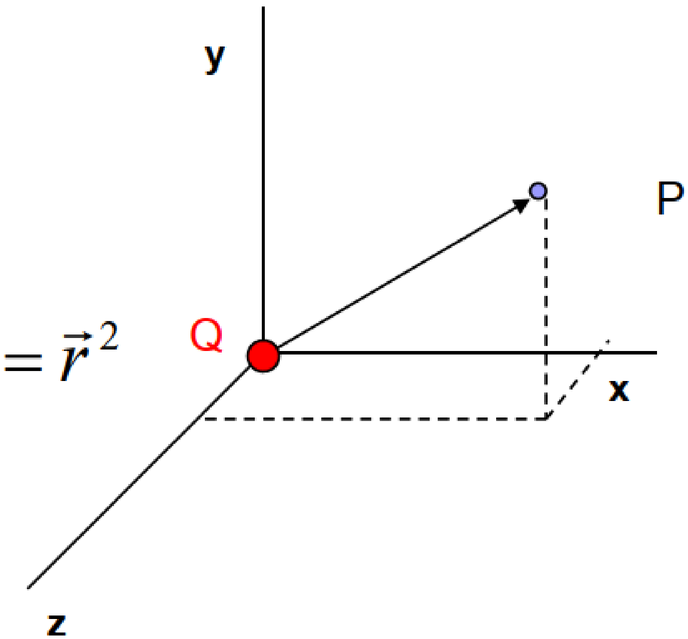
- Las cargas negativas son los sumideros del campo.



La intensidad de campo eléctrico en coordenadas rectangulares

$$\vec{r} = r\vec{a}_r = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$$

$$\vec{a}_r = \frac{x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \vec{r}^{\,2}$$



por lo tanto :

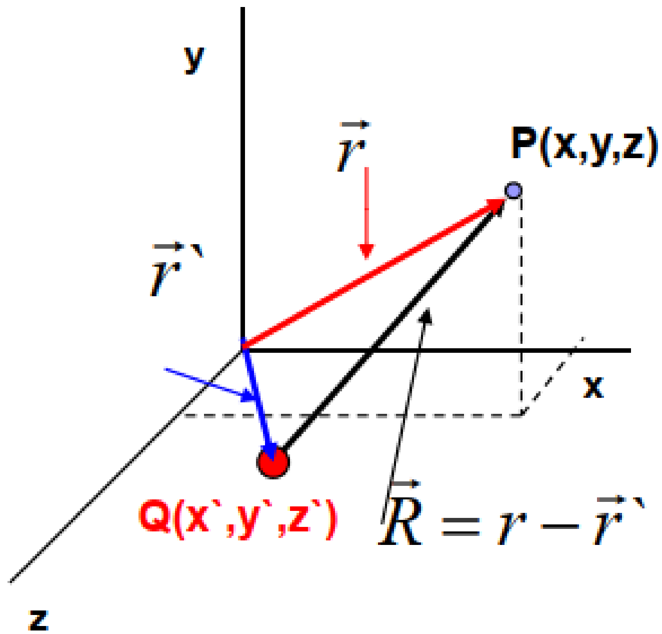
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{a}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{a}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{a}_z\right)$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

La intensidad de campo eléctrico en coordenadas rectangulares (Fórmula general)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{Q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{Q\left[(x-x`)\vec{a}_x+(y-y`)\vec{a}_y+(z-z`)\vec{a}_z\right]}{4\pi\varepsilon_0\left[(x-x`)^2+(y-y`)^2+(z-z`)^2\right]^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{R}}$$

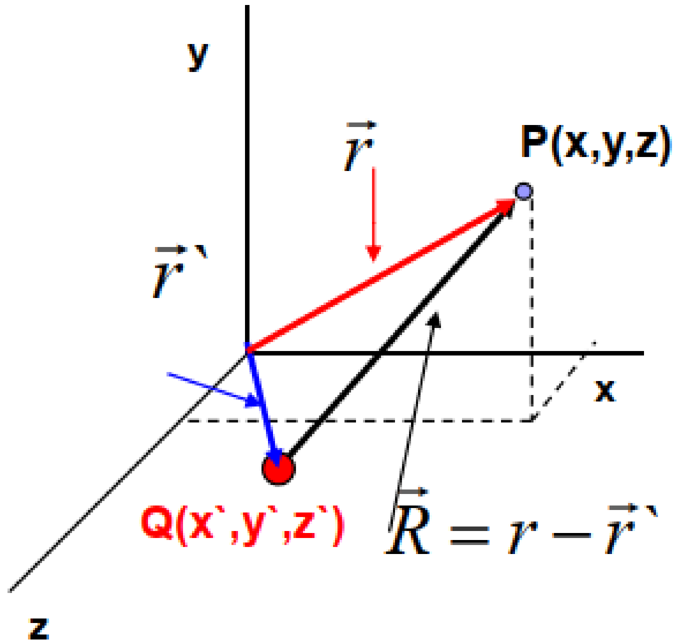


La intensidad de campo eléctrico con varias cargas:

y cuando hay n-cargas presentes:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^2}\vec{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|^2}\vec{a}_2 + \ldots + \frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_n\right|^2}\vec{a}_n$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_m\right| r^2}\vec{a}_m}$$



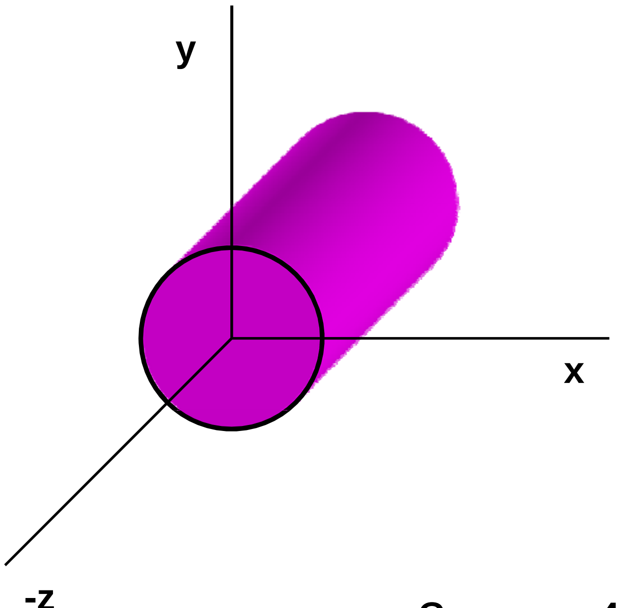
Campo causado por una distribución volumétrica uniforme de carga.

Ejemplo 2.3:

$$\Delta Q = \rho_v \Delta V$$

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v}$$

$$Q = \int_{vol} {}_v dv$$



2 < z < 4 cm
0 < r < 1 cm
0 < φ < 2π

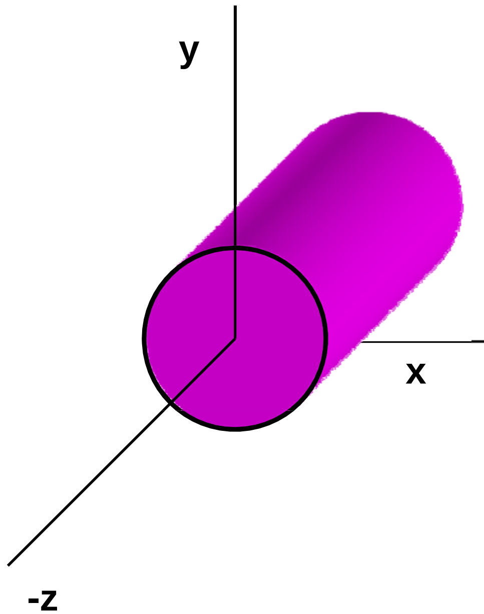
$$\rho_v = -5e^{-10^5 rz} \quad \mu\mathrm{C/m^3}$$

$$Q = \int_{vol} \rho_v dv$$

Campo causado por una distribución volumétrica uniforme de carga.

Ejemplo 2.3:

$$Q=\int_{vol}\rho_v dv \quad Q=\int_{0,02}^{0,04}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{0,01}-5e^{-10^5\rho z}\rho\, d\rho\, d\phi\, dz \quad \boxed{\mu C/m^3}$$



Se integra primero con respecto a ϕ (más fácil)

$$Q=\int_{0,02}^{0,04}\int_{0}^{0,01}-10^{-5}\pi e^{-10^5\rho z}\rho\, d\rho\, dz \quad \boxed{C/m^3}$$

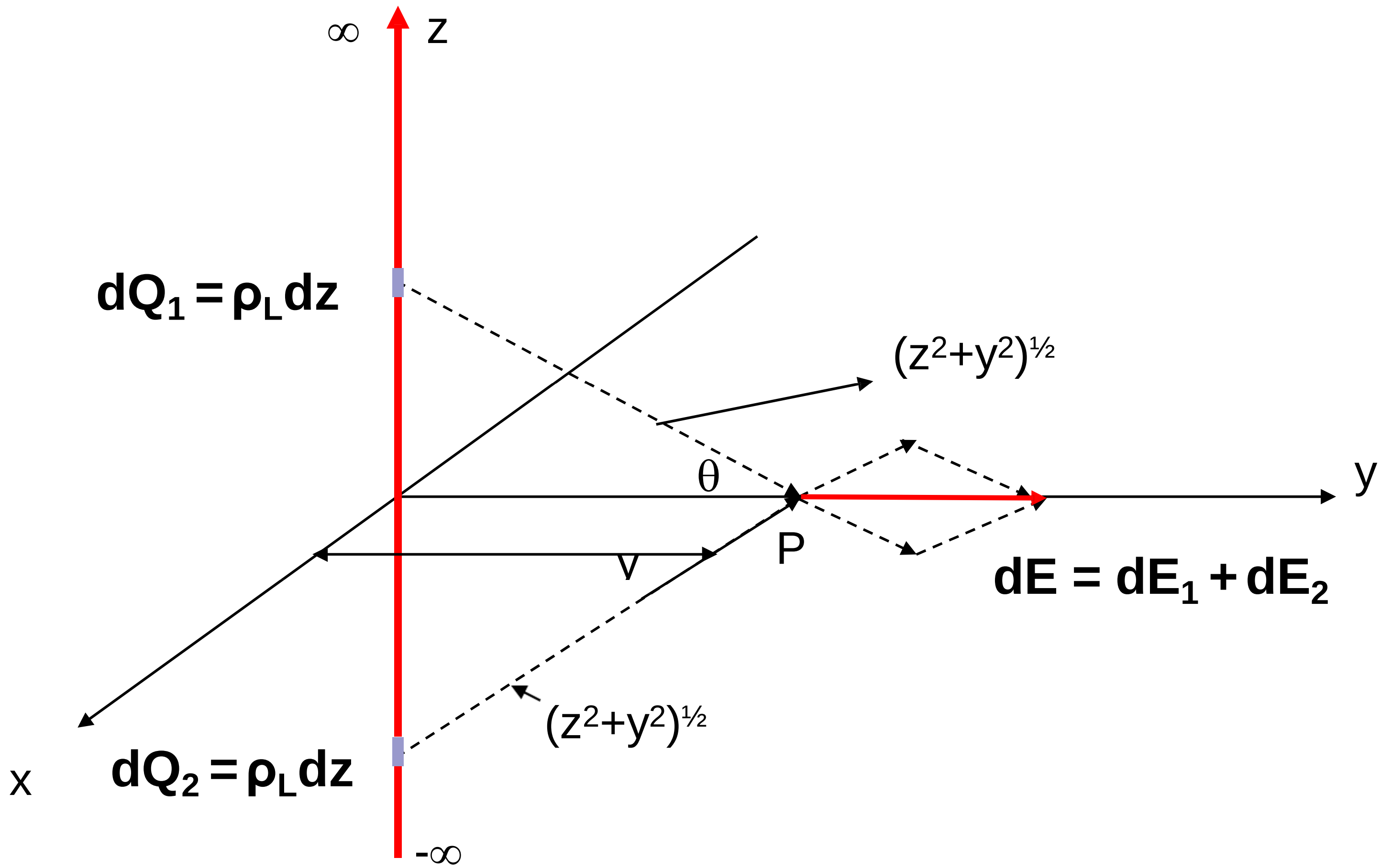
Luego se integra con respecto a z:

$$Q=\int_{0}^{0,01}\left(\frac{-10^{-5}\pi}{-10^5\rho}e^{-10^5\rho z}\rho\, d\rho\right)_{z=0,02}^{z=0,04} \quad Q=\int_{0}^{0,01}+10^{-10}\pi\left(e^{-4000\rho}-e^{-2000\rho}\right)d\rho$$

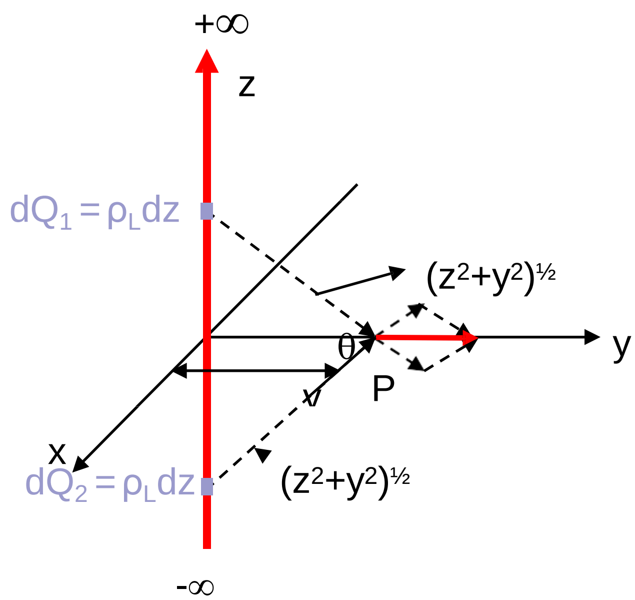
$$Q=\int_{0}^{0,01}-10^{-10}\pi\left(e^{-2000\rho}-e^{-4000\rho}\right)d\rho \quad Q=-10^{-10}\pi\left(\frac{e^{-2000\rho}}{-2000}-\frac{e^{-4000\rho}}{-4000}\right)_{0}^{0,01}$$

$$Q\approx-10^{-10}\pi\left(\frac{1}{2000}-\frac{1}{4000}\right)=\frac{-\pi}{40}10^{-12}C=-0,0785\,pC$$

Campo de un conductor infinito de carga lineal ρ_L uniforme



Campo de un conductor infinito de carga lineal ρ_L uniforme

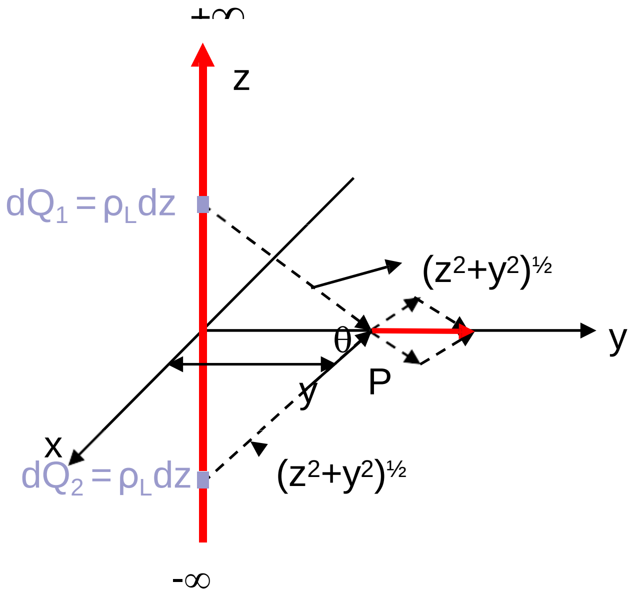


$$d\vec{E}_1 = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}$$

$$d\vec{E}_2 = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\vec{r}_2$$

Por simetría con respecto a φ, la componente con dirección z se cancela para todo punto P:

Campo de un conductor infinito de carga lineal ρ_L uniforme



$$d\vec{E}y = d\vec{E}\cos\theta = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\,\vec{a}_y$$

con magnitud solamente :

$$dEy = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{y}{r} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}y$$

$$dEy = \frac{\rho_L dz}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{y^2+z^2}^{\,3}}y = \frac{\rho_L y}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dz}{\sqrt{y^2+z^2}^{\,3}}$$

$$E_y = \frac{\rho_L y}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\sqrt{y^2+z^2}^{\,3}} = \frac{\rho_L y}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{z}{y^2\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$E_y = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{y} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y}$$

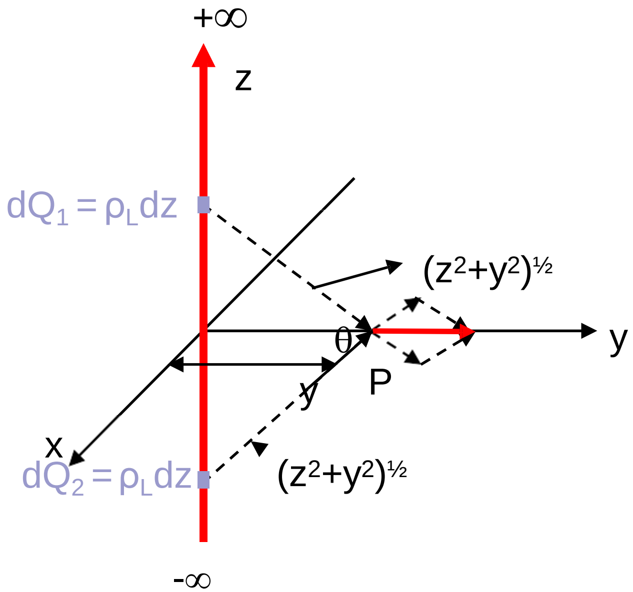
$$\boxed{E_y = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 y}}$$

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} =$$

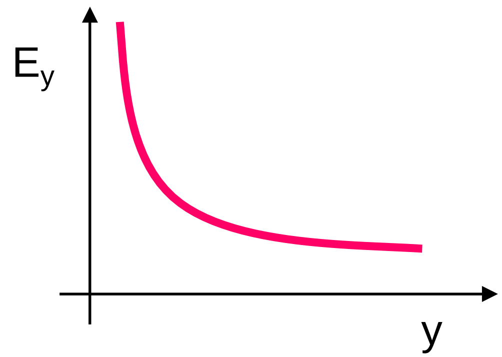
$$= \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}} + C$$

$(Bro.\ 206)$

Campo de un conductor infinito de carga lineal ρ_L uniforme



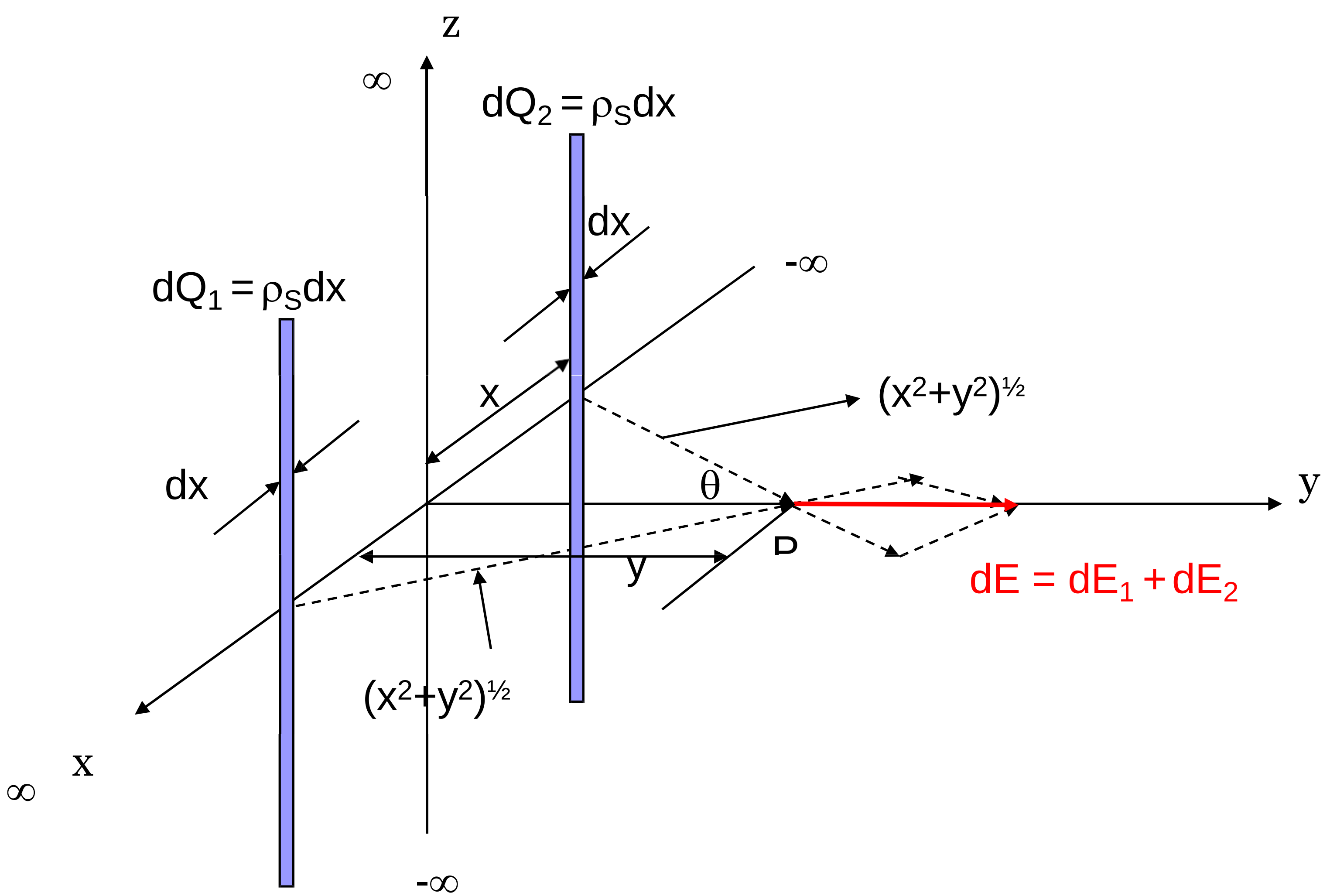
$$\boxed{E_y = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 y}}$$



$$\boxed{E_y \propto \frac{1}{y}}$$

Ejemplo tubos fluorescentes vrs. lámparas filamento (bombillos)!

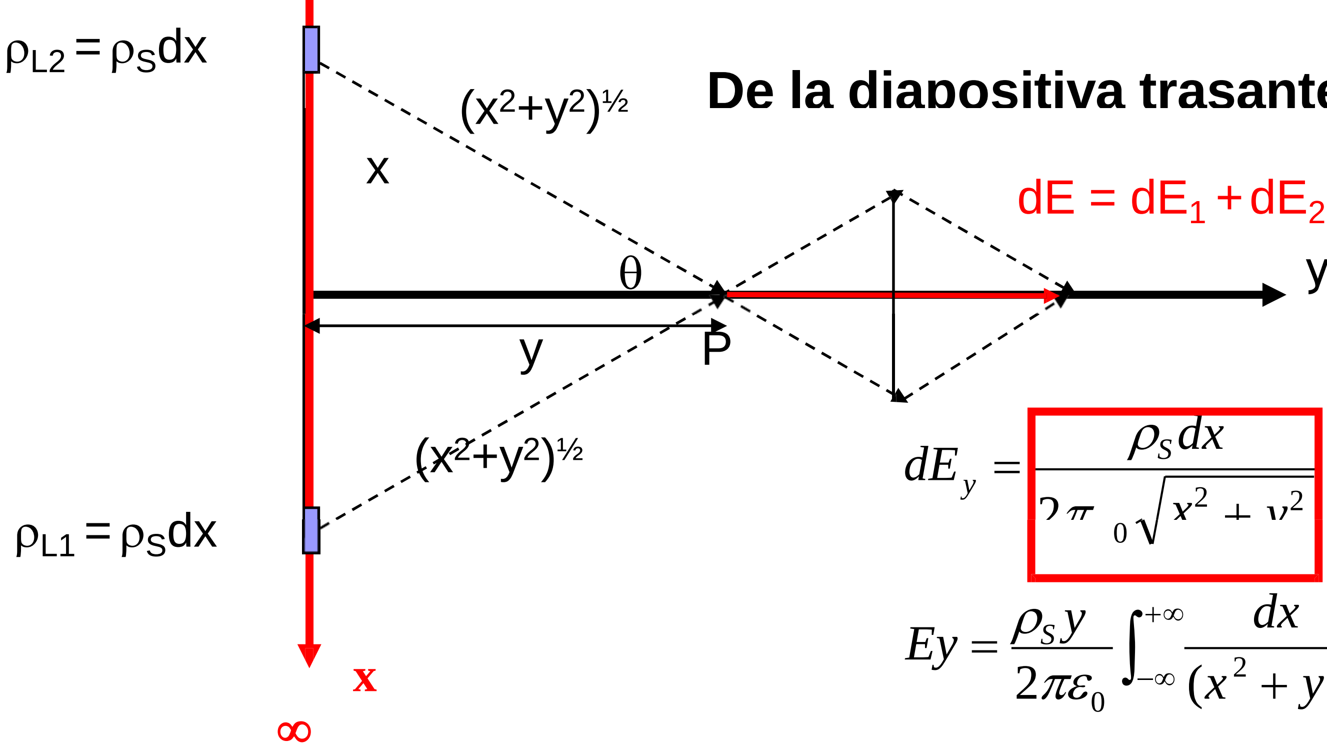
Campo de una lámina infinita de carga superficial ρ_S



Campo de una lámina infinita de carga superficial ρ_S

Vista superior de la transparencia anterior!

De la diapositiva trasanterior ⇒ $\boxed{E_y = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 y}}$



$$dE_y = \boxed{\frac{\rho_S dx}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}}\cos\theta = \frac{\rho_S y dx}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}$$

$$Ey = \frac{\rho_S y}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y^2)} = \frac{\rho_S y}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{y}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty}$$

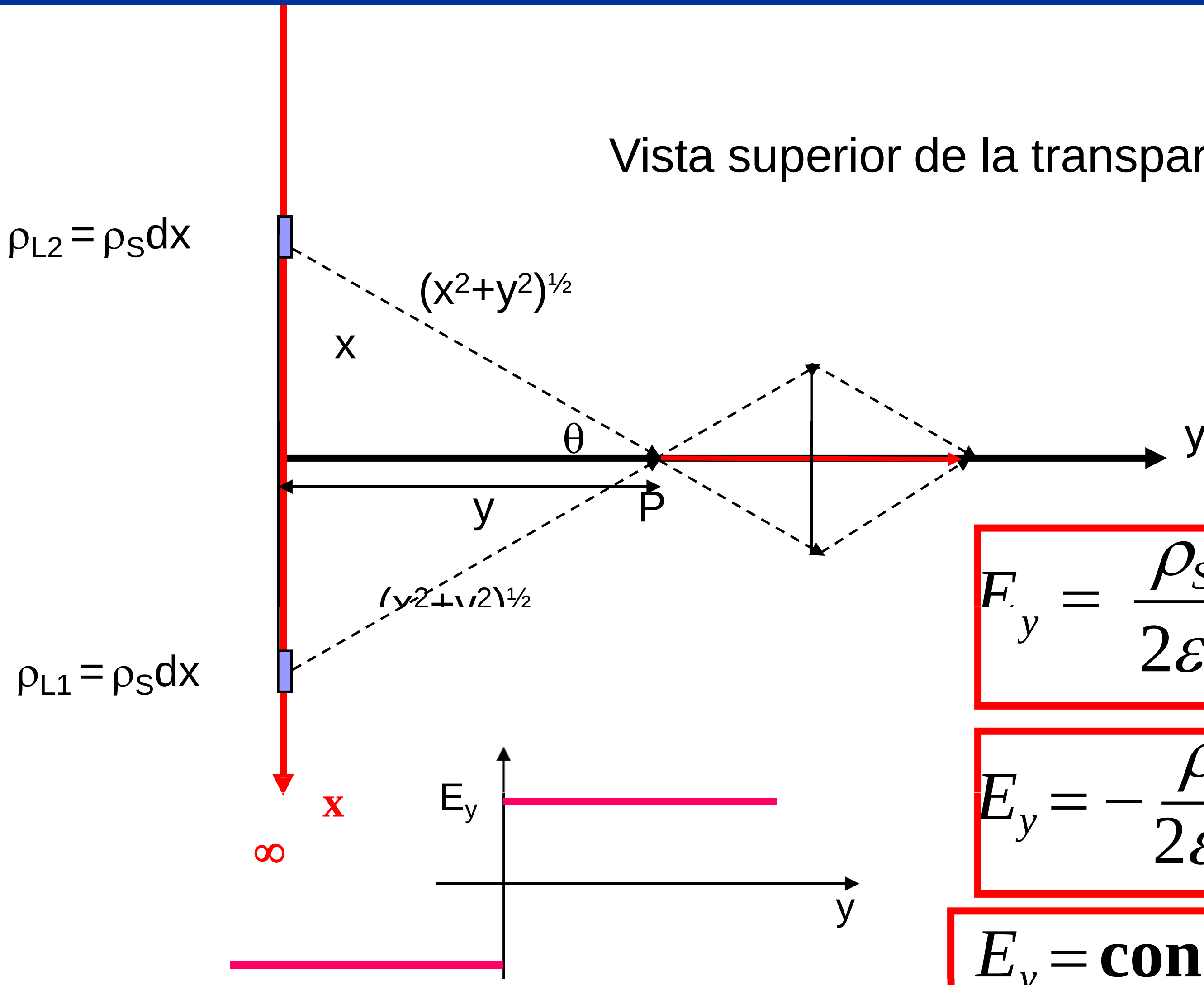
$$Ey = \frac{\rho_S}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0} \quad para \quad y > 0}$$

$$Ey = -\frac{\rho_S}{2\pi\varepsilon_0} \qquad \boxed{= \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0} \quad para \quad y < 0}$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad (Bro.57)$$

Campo de una lámina infinita de carga superficial ρ_S

Vista superior de la transparencia anterior!

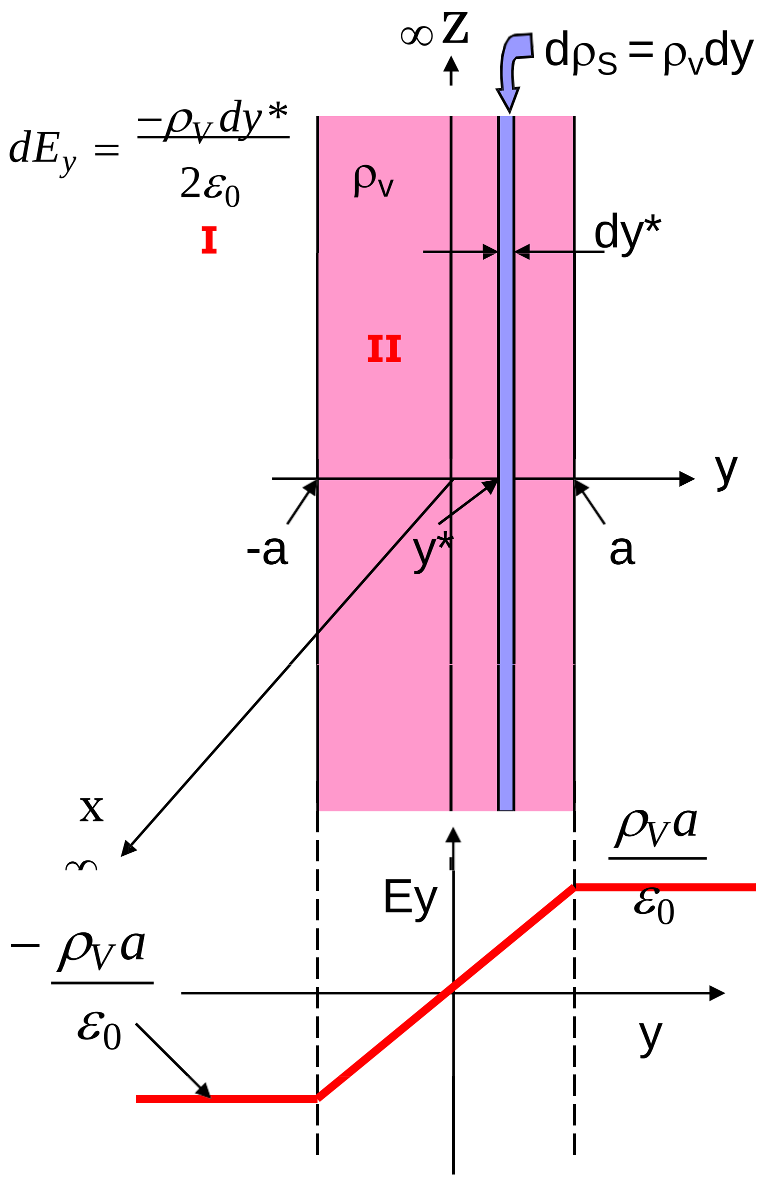


$$\boxed{E_y = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}} \quad para \;\; y > 0$$

$$\boxed{E_y = -\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}} \quad para \;\; y < 0$$

$$\boxed{E_y = \textbf{constante}}$$

Campo de un volumen uniformemente cargado ρ_V



III $\quad dE_y = \dfrac{\rho_V dy^*}{2\varepsilon_0}$ $\qquad$ x→∞, z→∞

Para las regiones I y III:

$$\boxed{Ey = \int_{y^*=-a}^{y^*=+a} \frac{-\rho_V}{2\varepsilon_0} dy^* = \frac{-\rho_V a}{\varepsilon_0} \quad para \quad y \leq -a}$$

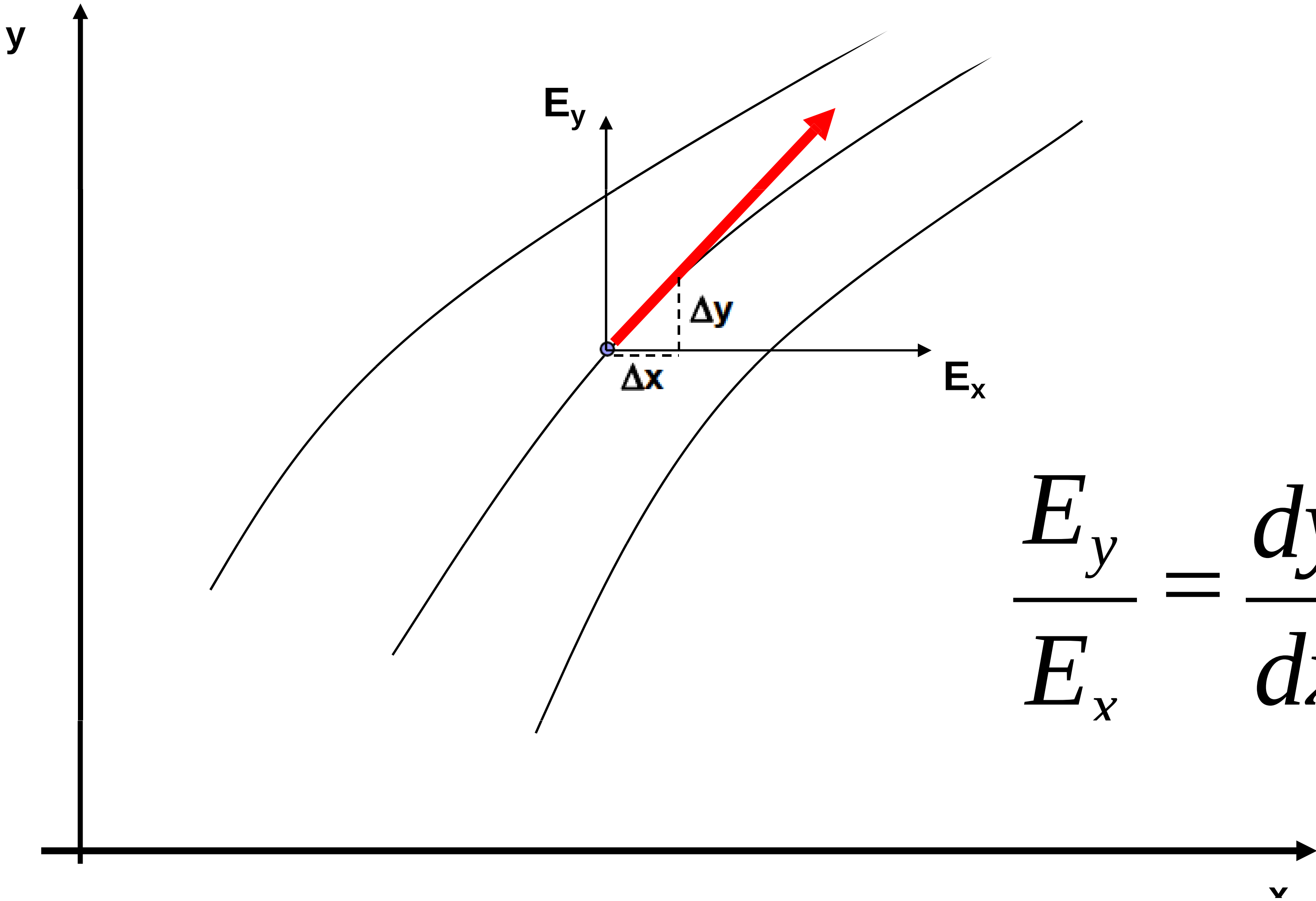
$$\boxed{Ey = \int_{y^*=-a}^{y^*=+a} \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0} dy^* = \frac{\rho_V a}{\varepsilon_0} \quad para \quad y \geq a}$$

Para la regiòn II: $-a \leq y \leq a$

$$Ey = \int_{y^*=-a}^{y^*=+y} \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0} dy^* + \int_{y^*=y}^{y^*=a} \frac{-\rho_V}{2\varepsilon_0} dy^* = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0} y$$

$$\boxed{Ey = \frac{\rho_V y}{\varepsilon_0} \quad para \quad -a \leq y \leq a}$$

Líneas de flujo y esquemas de campo



$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx}$$

Líneas de flujo y esquemas de campo

Ejemplo:
Obtenga las ecuaciones de líneas de flujo para una línea de carga uniforme con

$$\rho_L = 2\pi\varepsilon_0$$

$$\text{con} \quad \vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{a}_r \quad y \;\; \rho_L = 2\pi\varepsilon_0 :$$

$$\vec{E} = \frac{1}{r}\vec{a}_r \quad \text{en coordenadas rectangulares}$$

$$\vec{E} = \frac{x}{r^2}\vec{a}_x + \frac{y}{r^2}\vec{a}_y = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{a}_x + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{a}_y$$

Líneas de flujo y esquemas de campo

Así se establece la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ey}{Ex} = \frac{\dfrac{y}{x^2+y^2}}{\dfrac{x}{x^2+y^2}} = \frac{y}{x} \quad \text{o bien:}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \text{si se integra:}$$

$$\ln(y) = \ln(x) + C_1 \quad \text{o también:}$$

$$\ln(y) = \ln(x) + \ln C \quad \text{y aplicando la función inversa:}$$

$$e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)\cdot C} \Rightarrow y = Cx$$

Líneas de flujo y esquemas de campo

La dirección de **E** es conocida!: