Universidad Técnica Nacional

UTN

Profesora: Jackeline Cascante Paniagua

FOLLETO 3

DERIVADAS CON NUMEROS COMPLEJOS

Definición en Reales

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definición en complejos

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Sea $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$; si f(z) es diferenciable en $z_0 = x_0 + i\,y_0$ entonces las funciones de u y v poseen derivadas parciales en (x_0, y_0) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}$$

Se dice que si una función cumple con las condiciones de Cauchy – Riemann es una **función analítica**

Funciones armónicas

Cumplen con las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

En esas condiciones se deduce que la parte real e imaginaria satisfacen la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y} = 0 \qquad \nabla^2 \psi = 0 \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

∇^2 : Se llama Laplaciano

Ejemplo 1

Sea $f(z) = \bar{z}$. Calcule $f'(z)$

Sea $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$ $\quad u = x \quad v = -y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$1 = -1 \qquad 0 = 0$$

$\times$ No es analítica, por lo tanto no posee derivada

Ejemplo 2

Sea $f(z) = |z|^2$. Determine si dicha función puede ser diferenciable

$z = x + yi \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad |z|^2 = x^2 + y^2$

$u = x^2 + y^2 \qquad v = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$2x = 0 \qquad 2y = 0$

$x = 0 \qquad y = 0$ Solo es derivable para el punto $(0,0)$

Ejemplo 3

Muestre que $f(z) = sen(4z)$ es una función analítica y encuentre su derivada

$$\text{Sen } 4z = \frac{e^{i4z} - e^{-i4z}}{2i}$$

$$\text{Sen } 4z = \frac{e^{i4(x+yi)} - e^{-i4(x+yi)}}{2i}$$

$$\text{Sen } 4z = \frac{e^{i4x} \cdot e^{-4y} - e^{-i4x} \cdot e^{4y}}{2i}$$

$$\text{Sen } 4z = \frac{e^{-4y}[\text{Cos } 4x + i \text{ Sen } 4x] - e^{4y}[\text{Cos}(-4x) + i \text{ Sen}(-4x)]}{2i}$$

$$\text{Sen } 4z = \frac{e^{-4y}\text{Cos } 4x + e^{-4y} i \text{ Sen } 4x - e^{4y}\text{Cos } 4x + i e^{4y} \text{Sen } 4x}{2i}.$$

$$\text{Sen } 4z = \frac{e^{-4y}\text{Cos } 4x + e^{-4y} i \text{ Sen } 4x - e^{4y}\text{Cos } 4x + i e^{4y} \text{Sen } 4x}{2i} \cdot \frac{i}{i}$$

$$\text{Sen } 4z = \frac{i e^{-4y}\text{Cos } 4x - e^{-4y}\text{Sen } 4x - i e^{4y}\text{Cos } 4x - e^{4y}\text{Sen } 4x}{-2}$$

$$\text{Sen } 4z = \frac{e^{-4y}\text{Sen } 4x + e^{4y}\text{Sen } 4x}{2} + \frac{i e^{4y}\text{Cos } 4x - i e^{-4y}\text{Cos } 4x}{2}$$

$$u = \frac{e^{-4y}\text{Sen } 4x + e^{4y}\text{Sen } 4x}{2} \qquad v = \frac{e^{4y}\text{Cos } 4x - e^{-4y}\text{Cos } 4x}{2}$$

Para que sea analítica

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{4e^{-4y}\cos 4x + 4e^{4y}\cos 4x}{2} \checkmark \quad \frac{4e^{4y}\cos 4x + 4e^{4y}\cos 4x}{2} \checkmark$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$-\frac{4e^{-4y}\operatorname{Sen} 4x + 4e^{4y}\operatorname{Sen} 4x}{2} \quad \frac{4e^{4y}\operatorname{Sen} 4x - e^{-4y}\operatorname{Sen} 4x}{2}$$

$\Rightarrow f(z)$ es analítica

por tanto tiene derivada $\quad f'(z) = 4\cos 4z$ //

otra forma

$$\operatorname{Sen} 4z = \operatorname{Sen} 4(x+yi) = \operatorname{Sen}(4x+4yi)$$

$$\operatorname{Sen}(4x+4yi) = \underbrace{\operatorname{Sen} 4x \cosh 4y}_{u} + i\,\underbrace{\cos 4x \operatorname{Senh} 4y}_{v}$$

$u = \operatorname{Sen} 4x \cosh 4y \qquad v = \cos 4x \operatorname{Senh} 4y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$4\cos 4x \cosh 4y = 4\cos 4x \cosh 4y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$4 \,\text{Sen}\, 4x \,\text{Senh}\, 4y = 4 \,\text{Sen}\, 4x \,\text{Senh}\, 4y$$

$\Rightarrow$ Es analítica.

Ejemplo 4

Muestre que la función $f(z) = z^3 - 2z$ es analítica

$$z = x + yi$$

$$f(z) = (x+yi)^3 - 2(x+yi)$$

$$(x+yi)(x+yi)^2 - 2(x+yi) =$$

$$(x+yi)(x^2 + 2xyi - y^2) - 2x - 2yi =$$

$$x^3 + \underline{\underline{2x^2yi}} - xy^2 + \underline{\underline{x^2yi}} - 2xy^2 - y^3i - 2x - 2yi =$$

$$f(z) = (x^3 - 3y^2x - 2x) + (3x^2y - y^3 - 2y)i$$

$$u = x^3 - 3y^2x - 2x \qquad v = 3x^2y - y^3 - 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \checkmark$$

$$3x^2 - 3y^2 - 2 = 3x^2 - 3y^2 - 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \checkmark$$

$$-6xy = -6xy \quad \Rightarrow \text{Analítica}$$

$$f'(z) = 3z^2 - 2$$

Ejemplo 5

Encuentre las siguientes derivadas

a) $\left\{Tan\ h^{-1}(iz+2)\right\}^{-1}$

$$\left\{ Tan\ h^{-1}(iz+2) \right\}^{-1}$$

$$-\left\{ Tan\ h^{-1}(iz+2) \right\}^{-2} \cdot \frac{1}{1-(iz+2)^2} \cdot i$$

$$\frac{-i\left\{ Tan\ h^{-1}(iz+2) \right\}^{-2}}{1-(iz+2)^2}$$

b) $(z-3i)^{4z+2}$

$(z-3i)^{4z+2}$ Función potencia compleja

$$\left[e^{(4z+2)\ln(z+3i)}\right]'$$

$$e^{(4z+2)\ln(z+3i)}\cdot\left(4\ln(z+3i)+(4z+2)\cdot\frac{1}{z+3i}\right)$$

$$e^{(4z+2)\ln(z+3i)}\cdot\left[\frac{4z+2}{z+3i}+4\ln(z+3i)\right]$$

Ejercicio: Demuestre que $u=e^{-x}\left(x\ sen\ y-y\cos y\right)$ es armónica

Practica 3

1. Muestre que las siguientes funciones son analíticas y luego encuentre la derivada

a) $f(z)=z^2$

b) $f(z)=\tan z$

b) $f(z)=\cos 2z$

2. Encuentre las siguientes derivadas

a) $\cos^2(2z+3i)$

b) $z\cdot\tan^{-1}(\ln z)$

c) $(2z-5i)^{z-1}$

d) $Cosh^{-1}(2z+3)e^{z-3}$