Emanuel Esquivel Lopez - 2016133597
Problema 1:

Solución:

a) Se puede ver que la fuerza de empuje tiene la forma:

$$\vec{F}_E = -\frac{mg}{d} y\,\hat{\jmath}$$

Similar a la formula de la fuerza restauradora $F = -k\mathbf{r}$. Por lo que se puede deducir que

$$k = \frac{mg}{d}$$

b) Podemos ver que la segunda ley de Newton

$$\sum F_y = ma = -ky$$

Al usar esto podemos realizar el cambio de a como derivada de la posición:

$$\begin{aligned} ma &= -ky \\ m\frac{dy^2}{dt^2} &= -ky \\ \frac{dy^2}{dt^2} + ky &= 0 \\ \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{k}{m}y &= 0 \\ \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{g}{d}y &= 0 \end{aligned}$$

Puede compararse con el movimiento armónico simple que tiene por ecuación:

$$\frac{dy^2}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

c) La frecuencia angulas puede obtenerse fácil haciendo una comparación entre la ecuación obtenida y la del MAS.

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{g}{d} \\ \omega &= \sqrt{\frac{g}{d}} \end{aligned}$$

Con esto podemos calcular la frecuencia f y el periodo T:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{d}}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

d) Tenemos como datos iniciales y_0 = 1 cm y $v = 0$ m/s
Calculamos A

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$
$$A = y_0$$

Ahora el angulo de fase:

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{y_0\omega}\right)$$
$$\phi = 0$$

La ecuación de la posición que es la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$y(t) = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$

La ecuación de la velocidad es y' y la aceleración y''

$$v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$
$$v(t) = -y_0\sqrt{\frac{g}{d}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$
$$a(t) = -y_0\frac{g}{d}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$

e) Los valores máximos de posición, velocidad y aceleración son los siguientes:

$$\begin{aligned}
x_{\text{máx}} &= A \\
x_{\text{máx}} &= |y_0| \\
v_{\text{máx}} &= A\omega \\
v_{\text{máx}} &= |y_0|\sqrt{\frac{g}{d}} \\
a_{\text{máx}} &= A\omega^2 \\
a_{\text{máx}} &= |y_0|\frac{g}{d}
\end{aligned}$$

f) Luego de $t = 3$ s podemos calcular el valor de y, v, a.

$$\begin{aligned}
y(3) &= y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}} \cdot 3\right) \\
v(3) &= -y_0\sqrt{\frac{g}{d}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{d}} \cdot 3\right) \\
a(3) &= -y_0\frac{g}{d} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}} \cdot 3\right)
\end{aligned}$$

Para el valor de y debemos tomar en cuenta que el corcho estaba sumergido 3.25 cm

g) La energía cinética se describe con la formula:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}mv^2 \\
K &= \frac{1}{2}my_0^2\frac{g}{d} \operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)
\end{aligned}$$

La energía potencial:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}kx^2 \\
U &= \frac{1}{2}\frac{mg}{d}y_0^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)
\end{aligned}$$

Cuando $U = \frac{1}{2}K$?

$$U = \frac{1}{2}K$$

$$\frac{1}{2}\frac{mg}{d}y_0^2\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right) = \frac{1}{4}my_0^2\frac{g}{d}\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$

$$\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$

$$\frac{\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)}{\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)}{\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)}$$

$$1 = \frac{1}{2}\tan^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$

$$2 = \tan^2\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$

$$\sqrt{2} = \tan\left(\sqrt{\frac{g}{d}}t\right)$$

$$\arctan\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{\frac{g}{d}}t$$

$$t = \arctan\left(\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{d}{g}}$$

Con el valor anterior se evalua en $y\left(\arctan\left(\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{d}{g}}\right)$

h) Es el valor de t obtenido anteriormente.

$$t = \arctan\left(\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{d}{g}}$$

NOTA: El valor de y_0 en las ecuaciones es negativo ya que esta pos debajo del equilibrio