Actividad 1: MAS y ondas mecánicas

Problema 1: (50 puntos)

Un tapón de corcho cuya masa m es de $10.2\,\mathrm{g}$ tiene forma de cilindro circular recto con radio $r = 1.0\,\mathrm{cm}$ y altura $h = 5.0\,\mathrm{cm}$. El tapón se encuentra en equilibrio flotando en un recipiente lleno con agua. La cara inferior del cilindro está a una profundidad $d = 3.25\,\mathrm{cm}$ bajo la superficie. El corcho se empuja verticalmente hacia abajo de manera que se sumerge una profundidad adicional y.

De acuerdo con el principio de Arquimedes, al sumergirse experimentará una fuerza hacia afuera del agua cuya magnitud es igual al peso del líquido desplazado. Dicha fuerza se denomina empuje, fuerza boyante o de flotación y para el problema en cuestión puede escribirse como

$$\vec{\mathbf{F}}_E = -\frac{mg}{d} y \hat{\jmath}.$$

(a) La expresión para la fuerza de empuje tiene forma similar a la de una fuerza restauradora. ¿Cuál es la constante de fuerza? (2 puntos)

(b) Luego de soltarlo, el tapón empezará a moverse arriba y abajo de la superficie del agua. Muestre que este movimiento es armónico simple. (10 puntos)

Ayuda: Use la II ley de Newton para obtener la ecuación diferencial de Movimiento Armónico Simple.

(c) ¿Cuáles son el periodo y la frecuencia del movimiento del corcho? (6 puntos)

(d) Sabiendo que inicialmente el corcho se sumerge una profundidad adicional $y_0 = 1.0\,\mathrm{cm}$ antes de liberarlo desde el reposo, determine las expresiones que describen la posición, velocidad y aceleración del movimiento en todo momento. (10 puntos)

(e) ¿Cuáles son los valores máximos de rapidez y aceleración que puede alcanzar el corcho? (6 puntos)

(f) Calcule la posición, velocidad y aceleración del corcho $3.0\,\mathrm{s}$ luego de haber inciado su movimiento. (6 puntos)

(g) ¿En qué valor de y es la energía potencial del corcho igual a la mitad de su energía cinética? (5 puntos)

(h) ¿Cuánto tiempo le toma al corcho llegar hasta esta posición partiendo desde su posición inicial? (5 puntos)

Problema 2: (50 puntos)

En clase vimos que la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

tiene como solución la siguiente expresión

$$y(t,x) = A\cos\left[k(x \pm vt)\right] = A\cos\left(kx \pm \omega t\right)$$

denominada *función de onda* ya que es la expresión matemática que usamos para representar una onda periódica. Sin embargo, es posible demostrar matemáticamente un resultado mucho más general, ***cualquier*** función cuyo argumento sea $x \pm vt$ es solución a la ecuación de onda. En este problema en particular, estudiaremos otra solución a la ecuación de onda que permite describir ondas periódicas.

(a) Muestre que $y(t,x) = A\sin\left(kx \pm \omega t\right)$ es solución a la ecuación de onda. (10 puntos)

Ayuda: calcue las derivadas con respecto a las variables t y x para luego insertar en ambos lados de la ecuación de onda y verificar que se cumple la igualdad.

(b) Estudie la nueva función de onda bajo los mismos tres casos particulares que vimos en clase (1) $x = 0$, (2) $t = 0$ y (3) $x = t = 0$. Describa las interpretaciones que se dan a cada uno de estos casos particulares. (10 puntos)

(c) ¿Representa el caso particular (1) del inciso anterior un Movimiento Armónico Simple? Si, no, explique. (5 puntos)

Ahora, considere una cuerda de largo L que se encuentra extendida horizontalmente y con ambos extremos fijos. A través de dicha cuerda viaja, de izquierda a derecha, una onda con ampitud A, número de onda k y frecuencia angular ω. Cuando esta onda (incidente) llega al extremo derecho de la cuerda y se encuentra con que está fijo, se refleja, y regresa de derecha a izquierda como una segunda onda (reflejada).

(d) Use la nueva función de onda que se estudió en la primera parte del problema para escribir expresiones para la onda incidente y reflejada. Dibuje en un mismo diagrama cómo se vería la cuerda cuando a través de ella viajan cada una de estas dos ondas. (4 puntos)

(e) Usando las expresiones para las ondas incidente y reflejada, construya la expresión para las ondas estacionarias que se forman en la cuerda. (6 puntos)

(f) ¿Qué es un nodo? ¿Existen nodos en la cuerda cuando en ella hay ondas estacionarias como las que se obtuvieron en el inciso anterior? De ser así, encuentre la posición de los nodos a lo largo de la cuerda. (8 puntos)

(g) Represente por medio de diagramas a la cuerda en sus primeros cuatro modos normales de oscilación. Escriba las expresiones para la longitud de onda y frecuencia del n-ésimo modo normal. (7 puntos)