

Tema 6: Magnetostática

II ciclo 2020

*Profesor: Iván Cordero**Estudiante:*

Introduciendo el campo de inducción magnética como objeto fundamental, y de manera completamente análoga a como se hizo con el campo eléctrico, estudiaremos sus propiedades físicas y matemáticas, así como la forma de calcularlo y su relación con otras cantidades físicas de interés.

1. Electrostática (repaso)

Antes de comenzar con el estudio de los fenómenos magnéticos vamos a recordar los principales resultados de electrostática. Vimos que en ese tema la cantidad física fundamental es el campo eléctrico \vec{E} , un campo vectorial función de la posición \vec{r} que debe cumplir con las ecuaciones diferenciales

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{ley de Gauss, y} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{ley de Faraday (estática).} \quad (2)$$

Aunque la solución de dichas ecuaciones está muy por encima del nivel del curso, un estudio cualitativo nos permitió obtener piezas de información importante a partir de ellas.

El lado derecho de la ley de Gauss tiene tres posible signos

$$\nabla \cdot \vec{E} > 0 \quad \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \quad \nabla \cdot \vec{E} < 0$$

lo que indica que la divergencia $\nabla \cdot$ del campo eléctrico puede ser positiva (divergente), cero (ni divergente ni convergente) o negativa (convergente), de acuerdo con las tres posibilidades para el signo de la densidad volumétrica de carga

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{Q}{V} \quad (3)$$

pues la carga eléctrica neta Q puede ser positiva, cero o negativa. Vimos que el campo eléctrico puede representarse por medio de flechas (líneas de campo) y de acuerdo con lo anterior pueden ser de tres tipos

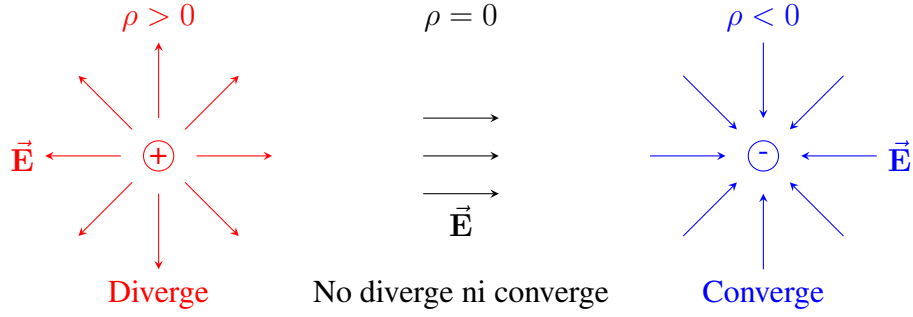


Figura 1: Divergencia del campo eléctrico.

Además vimos (sin demostrar) que la anulación del rotacional $\nabla \times$ de un campo vectorial implica que puede escribirse como el gradiente negativo de un campo escalar. De modo que en electrostática, podemos usar la ley de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \implies \quad \vec{E} = -\nabla \varphi \quad (4)$$

para escribir el campo eléctrico como el gradiente negativo de un campo escalar $\varphi(\vec{r})$ que identificamos como el potencial electrostático.

La forma funcional específica que tiene el campo eléctrico \vec{E} (o bien el potencial φ) es diferente para cada problema y en principio puede determinarse usando las expresiones

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (5)$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6)$$

siendo las primeras expresiones utilizadas para el caso de cargas puntuales y las que tienen integrales para distribuciones de carga. Basta con hechar un vistazo a estas expresiones para reconocer que **siempre** será más fácil determinar un potencial que un campo.

Aunque el campo y potencial electrostáticos son cantidades cuya interpretación física no es tan directa, están relacionados con dos conceptos bien conocidos como son fuerza y energía potencial. Así, podemos decir que la fuerza electrostática \vec{F}_E que experimenta una carga (de prueba)¹ es igual al producto de la carga q_0 con el valor del campo eléctrico \vec{E}_0 que se obtiene al evaluar el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ en la posición \vec{r}_0 de la carga de prueba.

$$\vec{F}_E = q_0 \vec{E}_0 = q_0 \vec{E}(\vec{r}_0) \quad (7)$$

¹Carga de prueba es aquella que es tan pequeña (comparada con las demás cargas del problema) que su contribución al campo (potencial) electrostático es despreciable y para efectos prácticos ella simplemente "siente" los efectos del campo (potencial) que producen las demás cargas del problema.

Además, la energía potencial electrostática U_E que experimenta una carga de prueba es igual al producto de la carga q_0 por el valor del potencial eléctrico φ_0 que se obtiene al evaluar el potencial $\varphi(\vec{r})$ en la posición \vec{r}_0 de la carga de prueba.

$$U_E = q_0\varphi_0 = q_0\varphi(\vec{r}_0) \quad (8)$$

2. Magnetostática

2.1. Campo de inducción magnética \vec{B}

Consideramos que el objeto fundamental en el magnetismo es el *campo de inducción magnética* \vec{B} o simplemente *campo magnético*². Su unidad de medida en el Sistema Internacional es el Tesla (T)

$$[\vec{B}] = \text{T}. \quad (9)$$

Al igual que en el caso del campo eléctrico, el objeto matemático que usaremos para representarlo es un *campo vectorial* (una función vectorial de variable vectorial), es decir, una función que toma vectores (de posición, \vec{r}) y les asigna otros vectores (de campo magnético, \vec{B}). Usando la notación de funciones podemos escribir $\vec{B}(\vec{r})$ que indica que el vector de campo magnético \vec{B} es una función del vector de posición \vec{r} .³

Aunque en el caso general podría ser dinámico (cambiar de valor), es decir, que además de la posición sea función del tiempo $\vec{B}(\vec{r}, t)$, en magnetostática solamente consideramos situaciones estacionarias de modo que dicha función nunca va a tener una dependencia explícita de la variable temporal t .

Como cualquier función, es posible evaluarla para obtener un resultado numérico, sin embargo al tratarse de un campo vectorial, para poder evaluar necesitaremos de un *vector numérico* (un vector que sus tres componentes son números conocidos) de posición y el resultado no será un simple número, sino un vector numérico de campo magnético.

Claro está que además necesitamos conocer la forma funcional del campo y en general ésta será diferente para cada problema en cuestión. De esta forma no podemos decir que haya una "fórmula" para calcular el campo magnético, sino que primero será necesario determinar la forma apropiada para un problema particular (esto a partir de una expresión más general) y luego de haber hecho

²Aunque vamos a utilizar esta designación, es necesario indicar que no es del todo correcta. Para efectos del curso, sin embargo, no hay problema ya que no será necesario distinguirlo de otra cantidad relacionada (pero diferente) denominada *campo de intensidad magnética* \vec{H} .

³Entonces hay que tener mucho cuidado, la expresión $\vec{B}(\vec{r})$ denota un solo objeto (una función). No es correcto pensar que se trata del producto del vector \vec{B} con el vector \vec{r} , pues para esto no solamente tendría indicarse el tipo de multiplicación (punto \cdot o cruz \times), sino que es igual de malo que pensar que en la conocida expresión $f(x)$, f es una cantidad que multiplica a x .

esto, sería posible calcular valores para el campo.

2.2. Ecuaciones diferenciales

De igual forma a como el campo eléctrico debe satisfacer las ecuaciones diferenciales Ec. (1) y Ec. (2), el campo magnético debe satisfacer dos ecuaciones diferenciales fundamentales

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{ley de Gauss (magnética), y} \quad (10)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \text{ley de Ampère.} \quad (11)$$

Al igual que en electrostática, la solución de dichas ecuaciones está fuera de los objetivos del curso de modo que simplemente vamos a tratar de entenderlas y extraer información de cada una de ellas.

2.2.1. Ley de Gauss magnética⁴

Usando la expresión para el operador nabla en coordenadas cartesianas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (12)$$

podemos desarrollar el producto punto en Ec. (10) y escribir

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

de lo cual vemos que dicha ecuación es una forma compacta, pero que en realidad se trata de una ecuación diferencial en derivadas parciales para hallar las componentes B_x , B_y , y B_z del campo vectorial \vec{B} , cada una de las cuales son funciones de las coordenadas x , y , y z

$$B_x(x, y, z) \quad , \quad B_y(x, y, z) \quad , \quad B_z(x, y, z).$$

A diferencia del caso electrostático, donde tuvimos tres posibles interpretaciones de la divergencia del campo eléctrico $\nabla \cdot \vec{E}$ según el signo de la densidad de carga ρ del lado derecho de la ley de Gauss Ec. (1), en este caso la ecuación Ec. (10) nos dice que la divergencia del campo magnético se anula siempre, de modo que la única posible interpretación que tenemos es que las líneas de campo magnético nunca divergen ni convergen

Esto a su vez, se interpreta como el hecho de que no existen cargas magnéticas, desde las cuales "salgan" o "lleguen" las líneas de campo magnético, como si sucedió con las cargas eléctricas en

⁴Aunque este nombre no es estándar, vamos a utilizarlo para referirnos a la ecuación Ec. (10) pues involucra la divergencia del campo magnético al igual que la ley de Gauss (eléctrica) Ec. (1) involucra la divergencia del campo eléctrico.

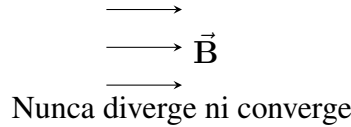


Figura 2: Divergencia del campo magnético.

el caso de las líneas de campo eléctrico (ver Fig. 1).⁵

Este hecho se relaciona directamente con la experiencia de que al tomar un imán de barra y partirlo exactamente por la mitad, en lugar de obtener por separado los polos norte y sur del imán original, obtendremos dos imanes más pequeños, que funcionan igual que el imán original, cada uno con sus dos polos, norte y sur.

Las implicaciones del hecho de que no existan cargas magnéticas son de suma importancia para la física teórica y en la actualidad hay una búsqueda activa (por medio de muy elaborados experimentos) de partículas con dichas cargas (llamadas *monopolos magnéticos*) pues la detección de aunque sea solamente una de estas partículas, traería consigo profundos cambios a los fundamentos de la física.

2.2.2. Ley de Ampère

Usando el operador nabla Ec. (12) para desarrollar el producto cruz en la Ec. (11) obtenemos

$$\nabla \times \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{k} = \mu_0 \vec{J} \quad (13)$$

una segunda ecuación diferencial en derivadas parciales (más compleja que la primera) para las componentes B_x , B_y y B_z . La constante μ_0 del lado derecho tiene el valor

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \quad (14)$$

en unidades del Sistema Internacional y se llama *permeabilidad del vacío*⁶.

A diferencia del caso electrostático, donde vimos que el rotacional del campo eléctrico $\nabla \times \vec{E}$ siempre se anulaba, hecho que nos permitió escribir el campo como el gradiente negativo del potencial $\vec{E} = -\nabla\varphi$, ahora tenemos que el rotacional del campo magnético no se anula en general, sino que es proporcional a la *densidad de corriente eléctrica*

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad (15)$$

⁵Recuerde que no es correcto pensar que el campo eléctrico es algo que "sale" de o "entra" a las cargas, por eso las comillas.

⁶En la calculadora se puede acceder usando la combinación *SHIFT+7+33* y para esta constante en particular es **necesario** introducirla de esta manera ya que de otras formas presenta un error de escritura.

donde ρ es la densidad volumétrica de carga Ec. (3) y \vec{v} es la velocidad con que se mueve dicha carga.

Ahora, con base en la Ec. (15), podemos ver que la misma densidad de carga ρ que sirve de fuente para el campo eléctrico en la ley de Gauss Ec. (1) nos permite calcular la densidad de corriente \vec{J} que sirve de fuente en la ley de Ampère, con el requisito que dicha carga debe moverse con una velocidad \vec{v} . Entonces, a como vimos que las cargas eléctricas son fuentes del campo eléctrico, ahora vemos que las mismas cargas eléctricas en *movimiento* son las fuentes del campo magnético. A este fenómeno de carga eléctrica en movimiento se le denomina *corriente eléctrica*.

2.2.3. Intensidad de corriente eléctrica

Se define la intensidad de corriente eléctrica

$$I \equiv \frac{dQ}{dt} \quad (16)$$

como la razón a la cual se transporta carga, pasando por un punto en un sistema conductor. Aquí, $Q = Q(t)$ es la carga neta transportada en el tiempo t . Su unidad de medida en el Sistema Internacional es el Ampere (A)

$$[I] = \text{A}. \quad (17)$$

2.3. ¿Potencial magnético?⁷

El potencial eléctrico $\varphi(\vec{r})$ aunque de un carácter algo abstracto, fue de suficiente importancia en el tema de electrostática, como para haber aprendido a calcularlo con las expresiones generales Ec. (6) en la mayoría de los problemas que encontramos.

Su importancia, que proviene de la relación que guarda con la energía potencial electrostática Ec. (8) además de la conveniencia matemática de ser mucho más fácil de calcular (como pudimos comprobar en todos los ejemplos resueltos) y luego poder utilizar su definición $\vec{E} = -\nabla\varphi$ para determinar el campo eléctrico por derivación, naturalmente debe hacernos considerar si existe su homólogo en el tema de magnetostática.

Para responder esta pregunta, primero debemos recordar cómo fué que hizo su aparición dicho potencial. Estudiamos (sin demostración) que la ley de Faraday estática implicaba que el campo eléctrico podía escribirse como el gradiente de un campo escalar Ec. (4). Es decir, el hecho de que el rotacional del campo \vec{E} *siempre* se anule es lo que nos permite introducir el potencial φ .

⁷A pesar de su existencia y utilidad en diversas situaciones, en este curso **NO** vamos a calcular ninguno de los dos potenciales magnéticos. Su estudio se reduce simplemente a mencionar su existencia para evitar un vacío conceptual ya que estamos desarrollando el presente tema en analogía a como lo hicimos con el tema de electrostática.

Sin embargo, acabamos de ver (ley de Ampère) que el rotacional del campo magnético no siempre se anula. Solamente en el caso especial que la densidad de corriente eléctrica sea cero tendremos que el rotacional de \vec{B} se anula. Entonces, podremos decir

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \quad \implies \quad \vec{B} = -\nabla \varphi_M \quad \text{cuando} \quad \vec{J} = 0 \quad (18)$$

que cuando la densidad de corriente eléctrica vale cero, el campo magnético puede escribirse como el gradiente negativo de un campo escalar $\varphi_M(\vec{r})$ denominado *potencial (escalar) magnético*.

De forma general podríamos demostrar que la anulación de la divergencia de un campo vectorial, implica la existencia de un *potencial vectorial* asociado a dicho campo. Así, vamos a usar (sin demostrar) la ley de Gauss magnética para indicar que la anulación de la divergencia del campo magnético implica que éste se puede escribir como el rotacional de un nuevo campo vectorial

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \implies \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (19)$$

este nuevo campo vectorial \vec{A} se denomina *potencial (vectorial) magnético* y es mucho más general que el potencial (escalar) magnético φ_M ya que se puede determinar aún cuando la densidad de corriente sea distinta de cero, además en situaciones no estáticas e inclusive a nivel cuántico.

Gracias a esta generalidad, resulta de mucha utilidad desde un punto de vista teórico (llegando, en ocasiones, a ser incluso más importante que el propio campo magnético), sin embargo, desde un punto de vista práctico usualmente resulta ser inapropiado, pues calcularlo puede ser tan complicado (o incluso más) que determinar directamente el campo magnético.

2.4. Cálculo del campo \vec{B}

Para determinar la forma funcional del campo de inducción magnética vamos a utilizar las siguientes expresiones

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times (\vec{r} - \vec{r}') \quad (20)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dq' \vec{v}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times (\vec{r} - \vec{r}') \quad (21)$$

una para cargas puntuales y la otra para distribuciones de carga, ambas en movimiento. Inmediatamente debemos compararlas lado a lado con las correspondientes expresiones para determinar el campo eléctrico Ec. (5)

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times (\vec{r} - \vec{r}') & \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dq' \vec{v}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times (\vec{r} - \vec{r}') & \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

y así poder notar una serie de similitudes y diferencias.

Primero, la constante μ_0 aparece en el numerador y no en el denominador como lo hace ε_0 , esto debido a su posición en el numerador de la ley de Ampère $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ a diferencia de la posición de ε_0 en el denominador de la ley de Gauss $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. El factor de 4π en el denominador permanece igual.

Segundo, la presencia del vector \vec{v} al lado de la carga q (o del diferencial de carga dq) en el numerador que indica el movimiento de la carga (o del diferencial de carga) con velocidad constante. La magnitud elevada a la tres del vector de separación $|\vec{r} - \vec{r}'|^3$ en el denominador permanece igual.

Tercero (y esto es consecuencia del punto anterior), es la presencia del operador \times que indica un producto cruz. Esta operación es necesaria porque la presencia del vector velocidad provoca que el numerador $q\vec{v}$ sea un vector,⁸ de modo que para multiplicarlo con un segundo vector, el vector de separación $(\vec{r} - \vec{r}')$ y obtener como resultado un tercer vector, el campo magnético \vec{B} , es necesario este tipo de multiplicación. El vector de separación $(\vec{r} - \vec{r}')$ multiplicando permanece igual.

Habiendo notado esto, nos damos cuenta de que gran parte del procedimiento necesario para calcular el campo magnético será similar al que ya aprendimos a realizar para calcular el campo eléctrico. Para ser más específico, el determinar los vectores \vec{r} , \vec{r}' , el vector de separación $\vec{r} - \vec{r}'$ y su magnitud $|\vec{r} - \vec{r}'|$ será **EXACTAMENTE IGUAL** que lo que habíamos realizado en el tema de electrostática. De hecho, veremos que realmente lo único nuevo que hay que agregar a la solución es el cálculo del producto cruz mencionado anteriormente⁹.

De particular importancia para el curso será determinar el campo magnético que produce una *distribución de carga en movimiento* Ec. (21), o lo que es lo mismo decir, una *corriente eléctrica* Sec. (2.2.3). Usando la definición de velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

y la definición de intensidad de corriente eléctrica Ec. (16), podemos cambiar el numerador de la Ec. (21)

$$dq'\vec{v}' = dq' \frac{d\vec{\ell}'}{dt'} = \frac{dq'}{dt'} d\vec{\ell}' = I' d\vec{\ell}' \quad (22)$$

y reescribirla como

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I' d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (23)$$

⁸Recuerde que un escalar (como la carga q) multiplicado por un vector (como la velocidad \vec{v}), da como resultado otro vector.

⁹De ninguna manera esto significa que resolver estos productos sea algo trivial. En realidad esto requerirá la mayor parte del esfuerzo en la solución de este nuevo tipo de problemas.

Esta será la expresión que vamos a utilizar para determinar el campo de inducción magnética que produce una corriente eléctrica (estacionaria).

2.5. Fuerza magnética

De igual forma a como vimos que una carga de prueba q_0 en presencia de un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ experimenta una fuerza electrosática dada por $\vec{F}_E = q_0\vec{E}_0$, Ec. (7), ahora tendremos que una carga de prueba q_0 *moviéndose* con velocidad constante \vec{v} , en presencia de un campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ experimentará una *fuerza magnética* que viene dada por

$$\vec{F}_B = q_0\vec{v} \times \vec{B}_0 \quad (24)$$

donde \vec{B}_0 es el valor del campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ evaluado en la posición de la carga de prueba \vec{r}_0 , es decir $\vec{B}_0 = \vec{B}(\vec{r}_0)$.¹⁰

Para una distribución de carga en movimiento tenemos

$$= IRB\hat{i}(0) + IRB\hat{j}(2) = 2IRB\hat{j} \quad (25)$$

y haciendo el mismo cambio de la Ec. (22) obtenemos

$$\vec{F}_B = \int I_0 d\vec{\ell} \times \vec{B}_0 \quad (26)$$

la fuerza magnética que experimenta una corriente eléctrica de prueba I_0 en presencia de un campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$.

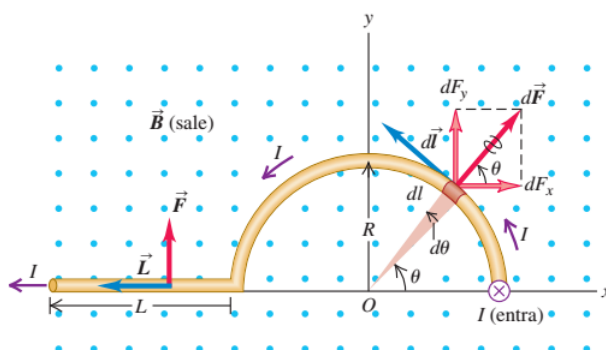
2.6. Ejemplos

A continuación veremos una serie de ejemplos principales cuyas soluciones es necesario comprender y dominar pues forman la base que con ligeras modificaciones permiten la solución de una amplia variedad de problemas.

¹⁰Es importante enfatizar que para que una carga de prueba experimente este tipo de fuerza *necesariamente* debe estar en movimiento. Si la carga no se mueve, su velocidad \vec{v} es cero y la fuerza se anula.

2.6.1. Ejemplo 27.8: Fuerza magnética en un conductor curvo

En la figura,



el campo magnético \vec{B} es uniforme y perpendicular al plano de la figura, apuntando hacia afuera. El conductor, que transporta la corriente I hacia la izquierda, tiene tres segmentos: **1.** un segmento rectilíneo con longitud L perpendicular al plano de la figura, **2.** un semicírculo con radio R y **3.** otro segmento rectilíneo con longitud L paralelo al eje x . Calcule la fuerza magnética total sobre este conductor.

Solución:

El alambre consta de dos segmentos rectilíneos (1 y 3) y de un segmento curvo en forma de semicírculo, de modo que podemos calcular la fuerza debido al campo magnético sobre cada uno de ellos y obtener la fuerza total sumando los resultados.

La fuerza magnética sobre un alambre recto con corriente viene dada por

$$\vec{F}_B = I\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (27)$$

donde I es la corriente que transporta el alambre, $\vec{\ell}$ es el vector cuya magnitud es igual a la longitud del alambre y su dirección es igual al sentido de la corriente mientras que \vec{B} es el campo magnético en el cual se encuentra inmerso el alambre. Así, podemos calcular

$$\vec{F}_{B1} = I_1\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_1 \quad \text{y} \quad \vec{F}_{B3} = I_3\vec{\ell}_3 \times \vec{B}_3 \quad (28)$$

las fuerzas magnéticas \vec{F}_{B1} y \vec{F}_{B3} que experimentan los alambres rectos **1** y **2**.

La corriente I es la misma que pasa por los dos alambres, de modo que $I_1 = I_3 = I$. El campo magnético que experimenta cada uno también es el mismo, sale del plano de la página y por tanto va en la dirección del eje z positivo $\vec{B}_1 = \vec{B}_3 = \vec{B} = B\hat{k}$ sin embargo el vector de longitud $\vec{\ell}$ es diferente para los dos segmentos rectilíneos de alambre.

Para el segmento de alambre recto **1**, tenemos que su longitud es igual a L mientras que el sentido de la corriente a que circula través de él es hacia dentro del plano de la página, de modo

que podemos escribir $\vec{\ell}_1 = L(-\hat{\mathbf{k}})$. Para el segmento de alambre **3**, también su longitud es igual a L , pero en este caso el sentido de la corriente es a lo largo del eje x , hacia la izquierda, de modo que escribimos $\vec{\ell}_3 = L(-\hat{\mathbf{i}})$.

Habiendo construido los vectores, podemos calcular los productos cruz

$$\vec{\ell}_1 \times \vec{\mathbf{B}}_1 = L(-\hat{\mathbf{k}}) \times B\hat{\mathbf{k}} = -LB(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}) = -LB(\vec{\mathbf{0}}) = \vec{\mathbf{0}} \quad (29)$$

$$\vec{\ell}_3 \times \vec{\mathbf{B}}_3 = L(-\hat{\mathbf{i}}) \times B\hat{\mathbf{k}} = -LB(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}) = -LB(-\hat{\mathbf{j}}) = LB\hat{\mathbf{j}} \quad (30)$$

para lo cual hemos usado sin demostrar los siguientes resultados

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{0}} \quad , \quad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \quad , \quad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}} \quad (31)$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}} \quad , \quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{0}} \quad , \quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \quad (32)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \quad , \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}} \quad , \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}} \quad (33)$$

Otra forma de resolver los productos cruz (de la manera “tradicional”) es hacer un desarrollo de los mismos usando determinantes. Solamente para efectos de comparación vamos a incluir dichos cálculos

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_1 \times \vec{\mathbf{B}}_1 &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ (\ell_1)_x & (\ell_1)_y & (\ell_1)_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \\ &= (0 \cdot B - (-L) \cdot 0)\hat{\mathbf{i}} - (0 \cdot B - (-L) \cdot 0)\hat{\mathbf{j}} + (0 \cdot 0 - 0 \cdot 0)\hat{\mathbf{k}} = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_3 \times \vec{\mathbf{B}}_3 &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ (\ell_3)_x & (\ell_3)_y & (\ell_3)_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \\ &= (0 \cdot B - 0 \cdot 0)\hat{\mathbf{i}} - ((-L) \cdot B - 0 \cdot 0)\hat{\mathbf{j}} + ((-L) \cdot 0 - 0 \cdot 0)\hat{\mathbf{k}} = 0\hat{\mathbf{i}} + LB\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (35)$$

pero luego de observar que obtenemos los mismos resultados usando las relaciones (31), (32) y (33) pero de forma más directa que con los determinantes, en adelante vamos a preferir este nuevo método por sobre el tradicional, aunque así lo hubieramos aprendido en el curso de Física I.

Volviendo al cálculo de los vectores de fuerza magnética (28)

$$\vec{\mathbf{F}}_{B1} = I_1 \vec{\ell}_1 \times \vec{\mathbf{B}} = I(\vec{\mathbf{0}}) = \vec{\mathbf{0}}, \quad (36)$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{B3} = I_3 \vec{\ell}_3 \times \vec{\mathbf{B}}_3 = I(LB\hat{\mathbf{j}}) = ILB\hat{\mathbf{j}}. \quad (37)$$

Para la fuerza sobre el segmento curvo tenemos

$$\vec{\mathbf{F}}_{B2} = \int I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{\mathbf{B}}_2 \quad (38)$$

pero en este caso hay que tener un cuidado adicional, pues el sentido de la corriente no puede definirse fácilmente como en los alambres rectos, donde vimos que la corriente tenía un sentido definido, como hacia la izquierda, o hacia adentro de la página. En este caso la corriente tiene sentido “contrario al movimiento de las manecillas del reloj” como puede verse en el dibujo, pero esto no podemos expresarlo de forma simple en términos de los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} .

Como necesitamos definir la dirección de un vector que es cambiante, introducimos un nuevo vector unitario apropiado para el problema en cuestión. Así, tenemos

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (39)$$

cuya dirección es hacia los valores positivos del ángulo polar θ , es decir, contrario al movimiento de las manecillas del reloj (antihorario).

Usando este nuevo vector unitario, podemos escribir fácilmente

$$d\vec{\ell}_2 = d\ell_2 \hat{\theta} = ds \hat{\theta} = Rd\theta(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \quad (40)$$

donde además usamos el resultado conocido $d\ell = ds = Rd\theta$ para cuando construimos el diferencial de longitud de un segmento de circunferencia.

Con esto, podemos calcular el producto cruz

$$\begin{aligned} d\vec{\ell}_2 \times \vec{B} &= Rd\theta(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \times (B\hat{k}) = \\ &= Rd\theta B[-\sin \theta(\hat{i} \times \hat{k}) + \cos \theta(\hat{j} \times \hat{k})] = \\ &= Rd\theta B[-\sin \theta(-\hat{j}) + \cos \theta(\hat{i})] = \\ &= Rd\theta B(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \end{aligned}$$

Para obtener la fuerza total, sobre todo el semicírculo es necesario sumar las contribuciones de todos los pequeños segmentos, sin embargo, como son diferenciales, la suma es una integral

$$\begin{aligned} \vec{F}_{B2} &= \int I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B} = \\ &= \int_0^\pi I_2 Rd\theta B(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = \\ &= IRB\hat{i} \int_0^\pi d\theta \cos \theta + IRB\hat{j} \int_0^\pi d\theta \sin \theta = \\ &= IRB\hat{i}(0) + IRB\hat{j}(2) = 2IRB\hat{j} \end{aligned}$$

cuyos límites de integración corresponden al menor y mayor ángulo en el cual se localizan elementos diferenciales del alambre curvo.

Finalmente, la fuerza magnética total sobre el alambre

$$\vec{F}_{BT} = \vec{F}_{B1} + \vec{F}_{B2} + \vec{F}_{B3} = \vec{0} + 2IRB\hat{j} + ILB\hat{j} = IB(2R + L)\hat{j}. \quad (41)$$

2.6.2. Campo magnético de una espira circular con corriente

Considere una espira de alambre circular, de radio R , que transporta una corriente estacionaria uniforme I , la cual fluye en sentido antihorario (en contra de las manecillas del reloj). Determine el campo de inducción magnética producido por la espira en un punto P a una distancia z de su centro.

Solución:

El campo de inducción magnética (campo magnético) debido a una corriente eléctrica estacionaria viene dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I' d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times (\vec{r} - \vec{r}') \quad (42)$$

y para calcularlo hay que determinar los vectores \vec{r} (posición del punto P), \vec{r}' (posición del diferencial de longitud $d\vec{\ell}'$), el vector de separación $\vec{r} - \vec{r}'$ y su magnitud $|\vec{r} - \vec{r}'|$, todo esto exactamente igual a como se hizo al calcular campo y potencial eléctrico. Sin embargo, donde antes fue necesario una expresión para el diferencial de carga dq' ahora tendremos que determinar el diferencial de longitud (vectorial) $d\vec{\ell}'$ y calcular su producto cruz con el vector de separación $d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$.

Ubicando la espira en el plano xy , su eje coincidirá con el eje z (saliendo de la página) y el punto P donde se quiere determinar el campo magnético, en general estará a una distancia z del centro de la espira como se observa en el siguiente diagrama

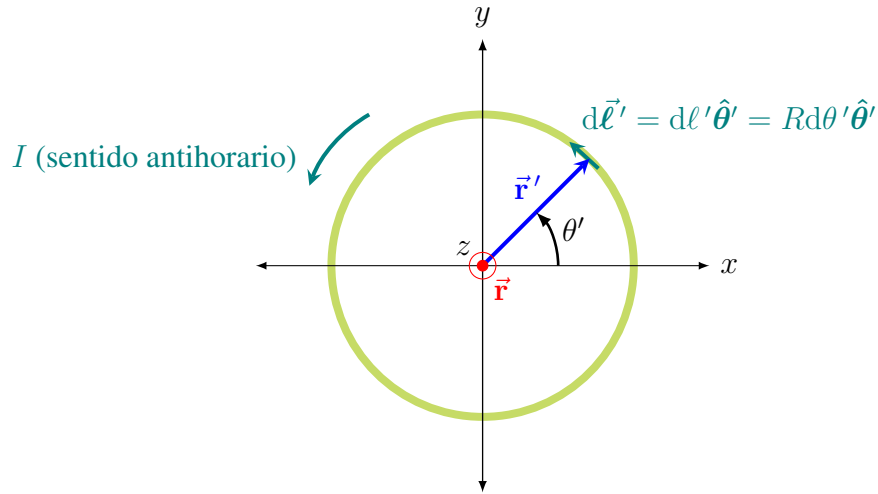


Figura 3: Espira circular, vista frontal.

El vector \vec{r} (rojo) es el vector que señala la posición del punto P donde queremos calcular el campo magnético, mientras que el vector \vec{r}' (azul) es el vector que señala la posición del diferencial de longitud $d\vec{\ell}'$. Aunque ambos se ubicaron en el diagrama anterior, es posible apreciarlos mejor en la vista lateral del mismo donde además es posible dibujar el vector $\vec{r} - \vec{r}'$ (negro) que sale desde

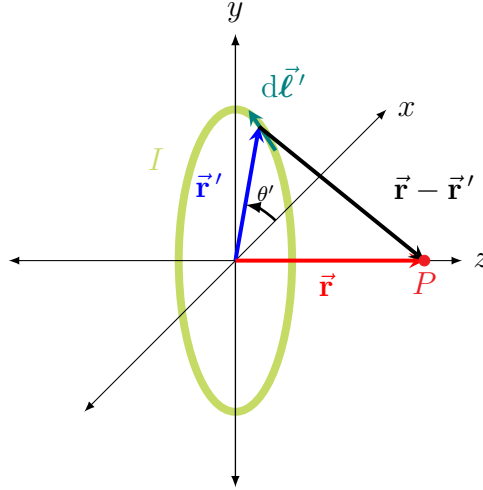


Figura 4: Espira circular, vista lateral.

el diferencial de carga y llega hasta el punto P . Entonces, para los vectores de posición tenemos

$$\vec{r} = z\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{r}' = R \cos \theta' \hat{i} + R \sin \theta' \hat{j} \quad (43)$$

con lo cual podemos calcular

$$\vec{r} - \vec{r}' = -R \cos \theta' \hat{i} - R \sin \theta' \hat{j} + z\hat{k} \quad \implies \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}. \quad (44)$$

el vector de separación $\vec{r} - \vec{r}'$ y su magnitud.

Por simplicidad, hemos ubicado el diferencial de longitud genérico $d\vec{\ell}'$ en el primer cuadrante, a pesar de que este puede estar localizado en cualquier punto sobre el anillo.¹¹ De acuerdo con la geometría, recordamos que dicho diferencial corresponde a un pequeño arco de circunferencia (diferencial) cuya expresión se obtiene tomando el diferencial de la expresión para la longitud de arco

$$s = R\theta \quad \implies \quad ds = R d\theta \quad (45)$$

de modo que podemos escribir

$$d\vec{\ell}' = ds' \hat{\theta}' = R d\theta' (-\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j}) \quad (46)$$

donde usamos el vector unitario angular $\hat{\theta}$ para dar la dirección, pues de acuerdo con el enunciado del problema, la corriente circula en sentido antihorario, es decir, dando vueltas alrededor de la espira en dirección contraria hacia donde giran las manecillas del reloj.

¹¹Recuerde que no importa donde elegimos el diferencial de longitud ya que la integral en la expresión del campo magnético indica que habrá una suma sobre todos los diferenciales.

Para resolver el producto cruz usamos las expresiones para $d\vec{\ell}'$, $\vec{r} - \vec{r}'$ y simplemente tenemos que distribuir

$$\begin{aligned}
d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= Rd\theta'(-\sin\theta'\hat{i} + \cos\theta'\hat{j}) \times (-R\cos\theta'\hat{i} - R\sin\theta'\hat{j} + z\hat{k}) = \\
&= Rd\theta'(-\sin\theta'\hat{i} \times -R\cos\theta'\hat{i} + -\sin\theta'\hat{i} \times -R\sin\theta'\hat{j} + -\sin\theta'\hat{i} \times z\hat{k} + \\
&+ \cos\theta'\hat{j} \times -R\cos\theta'\hat{i} + \cos\theta'\hat{j} \times -R\sin\theta'\hat{j} + \cos\theta'\hat{j} \times z\hat{k}) = \\
&= Rd\theta'[\sin\theta'R\cos\theta'(\hat{i} \times \hat{i}) + \sin\theta'R\sin\theta'(\hat{i} \times \hat{j}) - \sin\theta'z(\hat{i} \times \hat{k}) - \\
&- \cos\theta'R\cos\theta'(\hat{j} \times \hat{i}) - \cos\theta'R\sin\theta'(\hat{j} \times \hat{j}) + \cos\theta'z(\hat{j} \times \hat{k})]
\end{aligned}$$

como cualquier multiplicación de varios términos, note que los factores algebraicos se multiplican como es bien sabido, sin embargo, para resolver los productos cruz (entre paréntesis) de los vectores unitarios usaremos las expresiones (31), (32) y (33) con lo que podemos escribir

$$\begin{aligned}
d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= Rd\theta'[R\sin\theta'\cos\theta'(0) + R\sin^2\theta'(\hat{k}) - z\sin\theta'(-\hat{j}) - \\
&- R\cos^2\theta'(-\hat{k}) - R\cos\theta'\sin\theta'(0) + z\cos\theta'(\hat{i})] = \\
&= Rd\theta'[z\cos\theta'\hat{i} + z\sin\theta'\hat{j} + R(\sin^2\theta' + \cos^2\theta')\hat{k}] = \\
&= Rd\theta'(z\cos\theta'\hat{i} + z\sin\theta'\hat{j} + R\hat{k})
\end{aligned}$$

donde usamos la identidad trigonométrica elemental $\sin^2\theta' + \cos^2\theta' = 1$ para simplificar.

Insertando en la expresión (42) obtenemos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I'Rd\theta'}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} (z\cos\theta'\hat{i} + z\sin\theta'\hat{j} + R\hat{k}) \quad (47)$$

la integral que hay que resolver.

Podemos separar en tres términos y factorizar fuera todas las constantes¹²

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (\sqrt{R^2 + z^2})^3} \left(z\hat{i} \int_0^{2\pi} d\theta' \cos\theta' + z\hat{j} \int_0^{2\pi} d\theta' \sin\theta' + R\hat{k} \int_0^{2\pi} d\theta' \right) \quad (48)$$

utilizando la calculadora para resolver las integrales restantes y obtener

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (\sqrt{R^2 + z^2})^3} [z\hat{i}(0) + z\hat{j}(0) + R\hat{k}(2\pi)] = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (\sqrt{R^2 + z^2})^3} \hat{k}. \quad (49)$$

la expresión integrada para el campo magnético.

¹²Como el problema lo indica, la corriente eléctrica es uniforme, de modo que $I' = I$ es una constante y puede salir de la integral.

2.6.3. Campo magnético de una bobina¹³ circular con corriente

Un alambre conductor se enrolla para formar una bobina con N espiras circulares muy juntas de radio R . El conductor transporta una corriente eléctrica I que fluye a través de las espiras dando vueltas en círculo a favor de las manecillas del reloj. Determine el campo de inducción magnética que produce la bobina en su centro.

Solución:

Ubicando la bobina en el plano xy , su eje coincidirá con el eje z (saliendo de la página) y el punto donde se quiere calcular el campo magnético coincide con el origen O como se observa en el siguiente diagrama

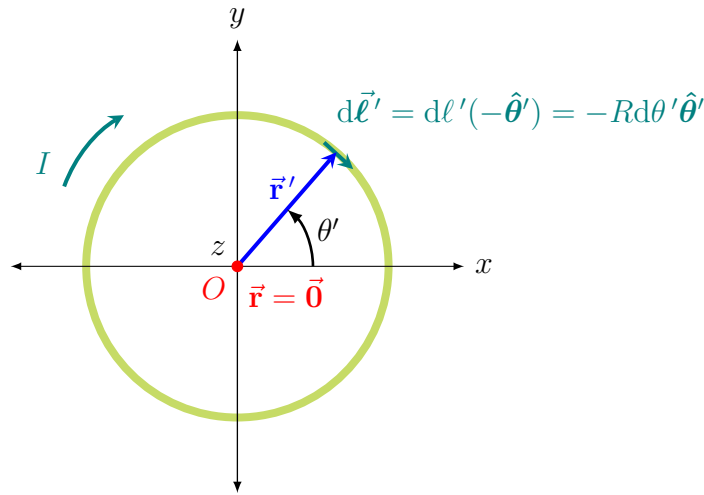


Figura 5: Bobina circular, vista frontal.

El vector \vec{r} (rojo) es el vector que señala la posición del punto P donde queremos calcular el campo magnético, mientras que el vector \vec{r}' (azul) es el vector que señala la posición del diferencial de longitud $d\vec{\ell}'$. Aunque ambos se ubicaron en el diagrama anterior, es posible apreciarlos mejor en la vista lateral del mismo donde además es posible dibujar el vector $\vec{r} - \vec{r}'$ (negro) que sale desde el diferencial de carga y llega hasta el origen. Entonces, para los vectores de posición tenemos

$$\vec{r} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \vec{r}' = R \cos \theta' \hat{i} + R \sin \theta' \hat{j} \quad (50)$$

con lo cual podemos calcular

$$\vec{r} - \vec{r}' = -R \cos \theta' \hat{i} - R \sin \theta' \hat{j} \quad \implies \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = R. \quad (51)$$

¹³Se denomina bobina a un conductor que se enrolla formando un devanado con una determinada cantidad de espiras muy juntas, tan juntas que la separación entre ellas y la longitud a lo largo de la cual se extiende el devanado sean pequeñas en comparación con otras medidas del dispositivo.

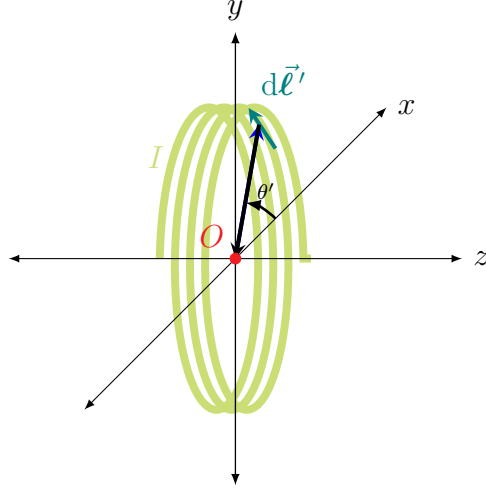


Figura 6: Bobina circular, vista lateral.

el vector de separación $\vec{r} - \vec{r}'$ y su magnitud.

Por simplicidad, ubicamos el diferencial de longitud genérico $d\vec{\ell}'$ en el primer cuadrante. Recordando que corresponde a un pequeño arco de circunferencia podemos escribir

$$d\vec{\ell}' = ds'(-\hat{\theta}') = -Rd\theta'(-\sin\theta'\hat{i} + \cos\theta'\hat{j}) \quad (52)$$

donde el vector unitario angular $\hat{\theta}'$ aparece negativo indicando que la corriente circula en sentido horario (contrario al sentido del problema anterior).

Usando las expresiones para $d\vec{\ell}'$, $\vec{r} - \vec{r}'$ y la propiedad distributiva del producto cruz, podemos calcular

$$\begin{aligned} d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= -Rd\theta'(-\sin\theta'\hat{i} + \cos\theta'\hat{j}) \times (-R\cos\theta'\hat{i} - R\sin\theta'\hat{j}) = \\ &= -Rd\theta'(-\sin\theta'\hat{i} \times -R\cos\theta'\hat{i} + -\sin\theta'\hat{i} \times -R\sin\theta'\hat{j} + \\ &+ \cos\theta'\hat{j} \times -R\cos\theta'\hat{i} + \cos\theta'\hat{j} \times -R\sin\theta'\hat{j}) = \\ &= -Rd\theta'[\sin\theta'R\cos\theta'(\hat{i} \times \hat{i}) + \sin\theta'R\sin\theta'(\hat{i} \times \hat{j}) - \\ &- \cos\theta'R\cos\theta'(\hat{j} \times \hat{i}) - \cos\theta'R\sin\theta'(\hat{j} \times \hat{j})] = \\ &= -Rd\theta'[R\sin\theta'\cos\theta'(\vec{0}) + R\sin^2\theta'(\hat{k}) - R\cos^2\theta'(-\hat{k}) - R\cos\theta'\sin\theta'(\vec{0})] = \\ &= -Rd\theta'[R(\sin^2\theta' + \cos^2\theta')\hat{k}] = -R^2d\theta'\hat{k} \end{aligned}$$

donde usamos los resultados de (31),(32), (3) y la identidad $\sin^2\theta' + \cos^2\theta' = 1$.

Insertando en la expresión (42) obtenemos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{N2\pi} \frac{I'(-R^2d\theta'\hat{k})}{R^3} \quad (53)$$

la integral que hay que resolver¹⁴.

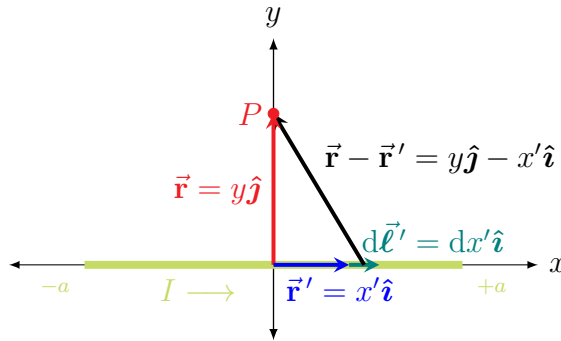
Factorizando todas las constantes

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{-\mu_0 I \hat{k}}{4\pi R} \int_0^{N2\pi} d\theta' = \frac{-\mu_0 I \hat{k}}{4\pi R} (N2\pi) = \frac{-\mu_0 I N}{2R} \hat{k} \quad (54)$$

y utilizando la calculadora para resolver la integral obtenemos la expresión requerida para el campo magnético.

2.6.4. Campo magnético alrededor de un alambre conductor recto delgado

Considere un alambre recto delgado de longitud L que transporta una corriente constante I y se ubica a lo largo del eje x , como se muestra en la figura.



Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P debido a esta corriente.

Solución:

El campo magnético debido a una distribución continua de corriente viene dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I' d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

Igual como se hizo en el cálculo de campos eléctricos, hay que encontrar el vector de separación $\vec{r} - \vec{r}'$ y su magnitud $|\vec{r} - \vec{r}'|$ para construir la expresión anterior. Pero además será necesario construir el diferencial de longitud $d\vec{\ell}'$ y calcular el producto cruz de este con el vector de separación.

El vector $d\vec{\ell}'$ es un pequeño segmento del alambre (diferencial) cuya dirección viene dada por el sentido de la corriente I . Como todo el alambre yace a lo largo del eje x , podemos escribir

¹⁴Note que el límite superior de la integral $N2\pi$ lo que indica es que estamos integrando la variable angular alrededor de N vueltas, con 2π radianes cada una.

simplemente $d\vec{\ell}' = dx'\hat{i}$, pues vemos del dibujo que el sentido de la corriente es hacia la derecha.

El vector \vec{r} señala la posición del punto P donde queremos calcular el campo, que al encontrarse sobre el eje y a una distancia determinada, podemos escribirlo $\vec{r} = y\hat{j}$.

El vector \vec{r}' señala la posición del diferencial $d\vec{\ell}'$, como el alambre yace completamente a lo largo del eje x , cualquier trozo del mismo se encontrará a una distancia x' del origen y entonces podemos escribir $\vec{r}' = x'\hat{i}$.

Con esto, podemos calcular el vector de separación

$$\vec{r} - \vec{r}' = -x'\hat{i} + y\hat{j} \quad \implies \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y^2}. \quad (55)$$

y su magnitud.

Además, podemos calcular el producto cruz

$$d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = dx'\hat{i} \times (-x'\hat{i} + y\hat{j}) = -dx'x'(\hat{i} \times \hat{i}) + dx'y(\hat{i} \times \hat{j}) = dx'y\hat{k}.$$

Insertando en la expresión para \vec{B} obtenemos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{I'dx'y\hat{k}}{(\sqrt{x'^2 + y^2})^3} = \frac{\mu_0 I y \hat{k}}{4\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{dx'}{(\sqrt{x'^2 + y^2})^3} \quad (56)$$

la integral que hay que resolver. Aquí, los límites de integración corresponden a los extremos izquierdo $-a$ y derecho $+a$ del alambre. Debido a que el alambre tiene su centro en el origen, ambos extremos se encuentran a la mitad de su longitud.

Ahora, podemos usar la fórmula

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C \quad (57)$$

para obtener

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I y \hat{k}}{4\pi} \left[\frac{x'}{y^2 \sqrt{x'^2 + y^2}} \right]_{-a}^{+a} = \frac{\mu_0 I y \hat{k}}{4\pi} \left[\frac{+a}{y^2 \sqrt{(+a)^2 + y^2}} - \frac{-a}{y^2 \sqrt{(-a)^2 + y^2}} \right] = \\ &= \frac{\mu_0 I y \hat{k}}{4\pi} \left[\frac{2a}{y^2 \sqrt{a^2 + y^2}} \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

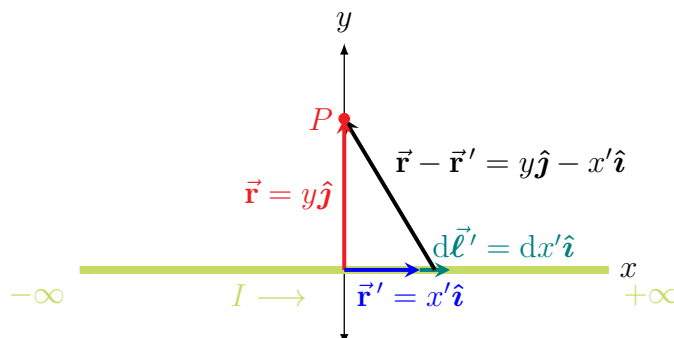
Finalmente podemos usar $a = L/2$ para escribir

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I L}{4\pi y \sqrt{(L/2)^2 + y^2}} \hat{k}, \quad (59)$$

el campo magnético para un alambre recto de longitud L que transporta una corriente I en un punto ubicado a una distancia y de su centro.

2.6.5. Campo magnético de un alambre infinito

Considere un alambre recto delgado y muy largo que transporta una corriente estacionaria I y se ubica a lo largo del eje x , como se muestra en la figura.



Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P debido a esta corriente.

Solución:

El campo magnético debido a una distribución continua de corriente viene dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I' d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

Igual como se hizo en el cálculo de campos eléctricos, hay que encontrar el vector de separación $\vec{r} - \vec{r}'$ y su magnitud $|\vec{r} - \vec{r}'|$ para construir la expresión anterior. Pero además será necesario construir el diferencial de longitud $d\vec{\ell}'$ y calcular el producto cruz de este con el vector de separación.

El vector $d\vec{\ell}'$ es un pequeño segmento del alambre (diferencial) cuya dirección viene dada por el sentido de la corriente I . Como todo el alambre yace a lo largo del eje x , podemos escribir simplemente $d\vec{\ell}' = dx' \hat{i}$, pues vemos del dibujo que el sentido de la corriente es hacia la derecha.

El vector \vec{r} señala la posición del punto P donde queremos calcular el campo, que al encontrarse sobre el eje y a una distancia determinada, podemos escribirlo $\vec{r} = y \hat{j}$.

El vector \vec{r}' señala la posición del diferencial $d\vec{\ell}'$, como el alambre yace completamente a lo largo del eje x , cualquier trozo del mismo se encontrará a una distancia x' del origen y entonces podemos escribir $\vec{r}' = x' \hat{i}$.

Con esto, podemos calcular el vector de separación

$$\vec{r} - \vec{r}' = -x' \hat{i} + y \hat{j} \quad \implies \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y^2}. \quad (60)$$

y su magnitud.

Además, podemos calcular el producto cruz

$$d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = dx' \hat{i} \times (-x' \hat{i} + y \hat{j}) = -dx' x' (\hat{i} \times \hat{i}) + dx' y (\hat{i} \times \hat{j}) = dx' y \hat{k}.$$

Insertando en la expresión para \vec{B} obtenemos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I' dx' y \hat{k}}{(\sqrt{x'^2 + y^2})^3} = \frac{\mu_0 I y \hat{k}}{4\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} \frac{dx'}{(\sqrt{x'^2 + y^2})^3} \quad (61)$$

la integral que hay que resolver. Aquí, los límites de integración corresponden a los extremos izquierdo $-a$ y derecho $+a$ del alambre. Debido a que el alambre es muy largo, ambos extremos se encuentran en el infinito.

Ahora, podemos usar la fórmula

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C \quad (62)$$

para obtener

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I y \hat{k}}{4\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{x'}{y^2 \sqrt{x'^2 + y^2}} \right]_{-a}^{+a} = \frac{\mu_0 I y \hat{k}}{4\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{+a}{y^2 \sqrt{(+a)^2 + y^2}} - \frac{-a}{y^2 \sqrt{(-a)^2 + y^2}} \right] = \\ &= \frac{\mu_0 I y \hat{k}}{4\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{2a}{y^2 \sqrt{a^2 + y^2}} \right] = \frac{\mu_0 I \hat{k}}{2\pi y} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{2a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Finalmente podemos evaluar el límite

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{a}{a \sqrt{1 + (y/a)^2}} \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (y/a)^2}} \right] = 1 \quad (64)$$

para escribir

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{k}, \quad (65)$$

el campo magnético para un alambre infinito que transporta una corriente I en un punto ubicado a una distancia y del alambre.