Ley de Gauss

Semana 5. Teoría Electromagnética

Ley de Gauss

- La ley de Gauss establece que el flujo de salida total del campo **E** a través de cualquier superficie cerrada en el espacio libre es igual a la carga total encerrada en la superficie, dividida por ε_0. Observamos quqe la superficie S puede ser cualquier superficie cerrada hipotética (matemática) elegida por conveniencia; no tiene que ser (y usualmente no es) una superficie física.
- La ley de Gauss es muy útil para determinar el campo E de distribuciones de carga con ciertas condiciones de simetría, tal como la componente normal de la intensidad de campo eléctrico sea constante sobre una superficie cerrada.
- Por otra parte, la ley de Gauss no es muy útil cuando no existen condiciones de simetría.

Loss puntos cruciales para la aplicación de la Ley de Gauss son, primero, la identificación de las condiciones de simetría y, Segundo, la elección de una superficie apropiada de donde la componente normal de E debida a la distribución de carga dada sea constante.

Tal superficie se conoce como **superficie gaussiana**.

Este principio básico ya lo usamos para obtener la ecuación 1, de una carga puntual con simetría esférica; por consiguiente, una superficie gaussiana apropiada es la superfice de una esfera centrada en la carga puntual.

APLICACIÓN DE LA LEY DE GAUSS

- Considerando la Ley de Gausss:

$$\boxed{Q = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}}$$

$\vec{a}_r \to dS = r^2 \, d\phi \, d\theta \, \text{sen}\theta$

- Considerando una carga punctual Q, en coordenadas esféricas:

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\text{esf}} D_S dS$$

$$= D_S \oint_{\text{esf}} dS = D_S \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \,\text{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= 4\pi r^2 D_S$$

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r \qquad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

$\vec{D} = \vec{E} \cdot \varepsilon_0$

Ejemplo. 1

- Un cilindro circular cerrado recto de radio ρ que abarca desde z = 0 a z = L.

$$Q = \oint_{\text{cil}} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = D_S \int_{\text{lados}} dS + 0 \int_{\text{arriba}} dS + 0 \int_{\text{abajo}} dS$$

$$= D_S \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho \, d\phi \, dz = D_S 2\pi\rho L$$

$$D_S = D_\rho = \frac{Q}{2\pi\rho L}$$

- En término de densidad de carga lineal uniforme:

$$Q = \rho_L L$$

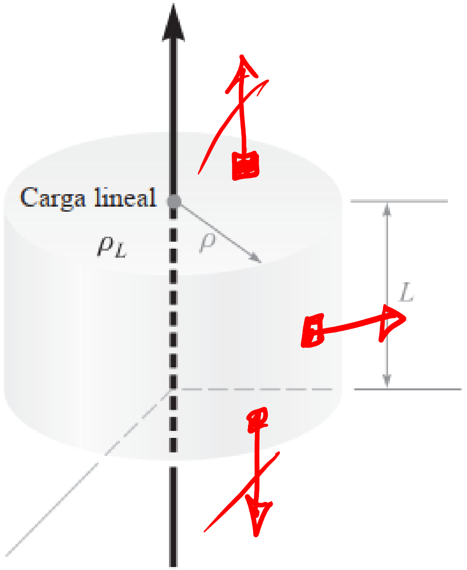
$$\rho_L = \frac{Q}{L} \quad \frac{C}{m}$$

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

$$\rho_S = \frac{Q}{A} \quad \frac{C}{m^2}$$

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

$$\rho_V = \frac{Q}{V} \quad \frac{C}{m^3}$$



Ejemplo. 2

- Un cilindro circular recto de longitud L y de radio ρ, donde $a < \rho < b$, debe elegirse necesariamente como la superficie gaussiana, y con rapidez obtenemos:

$$Q = D_S 2\pi\rho L$$

$$Q = \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_S a \, d\phi \, dz = 2\pi a L \rho_S$$

$$D_S = \frac{a\rho_S}{\rho} \qquad \mathbf{D} = \frac{a\rho_S}{\rho}\mathbf{a}_\rho \qquad (a < \rho < b)$$

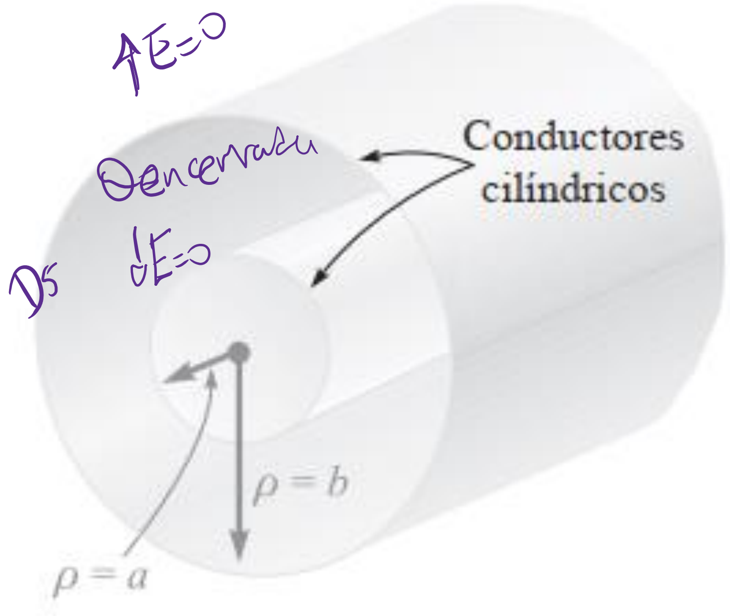
- Para una carga lineal infinita:

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho}$$

cada línea de flujo eléctrico que sale de la carga en el cilindro interior debe terminar en una carga negativa en la superficie interior del cilindro exterior, la carga total en esta superficie debe ser:

$$Q_{\text{cilindro exterior}} = -2\pi a L \rho_{S,\text{cilindro interior}}$$

$$2\pi b L \rho_{S,\text{cilindro exterior}} = -2\pi a L \rho_{S,\text{cilindro interior}}$$



Consideremos un cable coaxial de 50 cm de longitud, con un radio interior de 1 mm y un radio exterior de 4 mm. Se supone que el espacio entre ambos conductores está lleno de aire. La carga total en el conductor interior es 30 nC. Deseamos conocer la densidad de carga en cada conductor, así como los campos **E** y **D**.

Solución. Empezamos averiguando la densidad de carga superficial del cilindro interior,

$$\rho_{S,\text{cilindro interior}} = \frac{Q_{\text{cilindro interior}}}{2\pi a L} = \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi(10^{-3})(0.5)} = 9.55\ \mu\text{C/m}^2$$

La densidad de carga negativa en la superficie interior del cilindro externo es

$$\rho_{S,\text{cilindro exterior}} = \frac{Q_{\text{cilindro exterior}}}{2\pi b L} = \frac{-30 \times 10^{-9}}{2\pi(4 \times 10^{-3})(0.5)} = -2.39\ \mu\text{C/m}^2$$

Por tanto, los campos internos pueden calcularse fácilmente:

$$D_\rho = \frac{a\rho_S}{\rho} = \frac{10^{-3}(9.55 \times 10^{-6})}{\rho} = \frac{9.55}{\rho}\ \text{nC/m}^2$$

y

$$E_\rho = \frac{D_\rho}{\epsilon_0} = \frac{9.55 \times 10^{-9}}{8.854 \times 10^{-12}\rho} = \frac{1\,079}{\rho}\ \text{V/m}$$

Ambas expresiones se aplican a la región donde $1 < \rho < 4$ mm. Para $\rho < 1$ mm o $\rho > 4$ mm, **E** y **D** son cero.

Divergencia y la primera ecuación de Maxwell

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v} = \rho_v$$

$$\boxed{\text{Divergencia } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}}$$

La divergencia de un vector del tipo densidad de fl ujo **A** *es el límite de la cantidad de fl ujo por unidad*
de volumen que sale de una pequeña superfi cie cerrada cuando el volumen tiende a cero.

$$\text{div}\,\mathbf{D} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \qquad \text{(rectangular)}$$

$$\text{div}\,\mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad \text{(cilíndrica)}$$

$$\text{div}\,\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\text{sen}\theta\, D_\theta) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \qquad \text{(esférica)}$$

Hallar div **D** en el origen si $\mathbf{D} = e^{-x}\,\text{sen}\,y\,\mathbf{a}_x - e^{-x}\cos y\,\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$.

Solución. Utilizamos (10) para obtener

$$\begin{aligned}\text{div}\,\mathbf{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\\ &= -e^{-x}\,\text{sen}\,y + e^{-x}\,\text{sen}\,y + 2 = 2\end{aligned}$$

Práctica

3.4 Un campo eléctrico en el espacio libre es $\mathbf{E} = (5z^3/\epsilon_0)\,\hat{\mathbf{a}}_z$ V/m. Hallar la carga total contenida en una esfera de 3 m de radio con centro en el origen.

3.5 Sea $\mathbf{D} = 4xy\mathbf{a}_x + 2(x^2 + z^2)\mathbf{a}_y + 4yz\mathbf{a}_z$ nC/m^2. Evaluar las integrales de superficie para encontrar la carga total encerrada en el paralelepípedo rectangular $0 < x < 2$, $0 < y < 3$, $0 < z < 5$ m.

3.6 Una densidad de carga volumétrica constante $\rho_v = \rho_0$ está en el espacio libre dentro de una región $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, y $-d/2 < z < d/2$. Hallar **D** y **E** en cualquier parte.

Práctica 1

3.4 Un campo eléctrico en el espacio libre es $\mathbf{E} = (5z^3/\epsilon_0)\,\hat{\mathbf{a}}_z$ V/m. Hallar la carga total contenida en una esfera de 3 m de radio con centro en el origen.

$$Q_{enc} = \oint D_s \cdot dS = \oint \varepsilon_0 E \cdot dS \quad , \quad dS = r^2 \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta\, d\phi$$

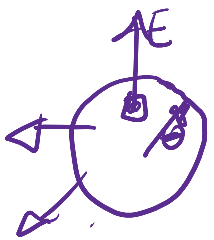
$0 < \theta < \pi$

$0 < \phi < 2\pi$

$r = 3m$

$z = r\cos\theta$

$\vec{a}_z \cdot \vec{a}_r = \cos\theta$



$$Q_{Enc} = \oint_S \frac{\cancel{\varepsilon_0} \cdot 5 \cdot r^3 \cos^4\theta \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}{\cancel{\varepsilon_0}}$$

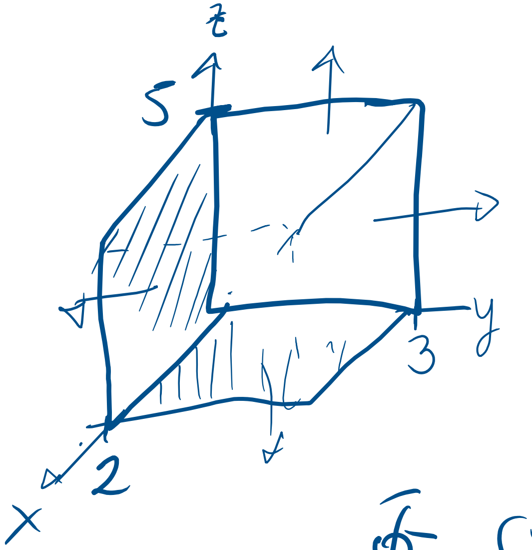
$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 5 \cdot 3^5 \cdot \cos^4\theta \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$Q_{enc} = 5 \cdot 3^5 \cdot \phi \Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos^4\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 5 \cdot 3^5 \cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cos^5\theta \Big|_0^{\pi}$$

$$Q_{enc} = \underline{972\pi}$$

Práctica 2

3.5 Sea $\mathbf{D} = 4xy\mathbf{a}_x + 2(x^2 + z^2)\mathbf{a}_y + 4yz\mathbf{a}_z$ nC/m^2. Evaluar las integrales de superficie para encontrar la carga total encerrada en el paralelepípedo rectangular $0 < x < 2$, $0 < y < 3$, $0 < z < 5$ m.



$Q = \oint D \cdot dS$, 6 superficies

plano $x=0$ $D_x=0$, $z=0$, $D_z=0$

Quedan 2 superficies en $x=2$ y $z=5$

$$\Phi = \int_0^5\int_0^3 D_{x=2} \cdot \vec{a}_x \cdot dy\,dz\,\hat{a}_x + \int_0^3\int_0^2 D_{z=5} \cdot \vec{a}_z \cdot dx\,dy\,\vec{a}_z$$

$$\Phi = 5\int_0^3 4 \cdot 2 \cdot y\,dy + 2\int_0^3 4 \cdot 5 \cdot y\,dy = \underline{360\ C}$$

Resuelva los siguientes ejercicios

3.17 Un cubo está definido por $1 < x, y, z < 1.2$. Si $\mathbf{D} = 2x^2y\mathbf{a}_x + 3x^2y2\mathbf{a}_y$ C/m^2. *a*) Aplicar la ley de Gauss para encontrar el flujo total que abandona la superficie cerrada del cubo. *b*) Evaluar $\nabla \cdot \mathbf{D}$ en el centro del cubo. *c*) Estimar la carga total encerrada dentro del cubo utilizando la ecuación (8).

3.21 Calcular $\nabla \cdot \mathbf{D}$ en el punto especificado si *a*) $\mathbf{D} = (1/z^2)[10xyz\,\mathbf{a}_x + 5x^2z\,\mathbf{a}_y + (2z^3 - 5x^2y)\,\mathbf{a}_z]$ en el punto $P(-2, 3, 5)$; *b*) $\mathbf{D} = 5z^2\,\mathbf{a}_\rho + 10\rho z\,\mathbf{a}_z$ en $P(3, -45°, 5)$; *c*) $\mathbf{D} = 2r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_r + r\cos\theta \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\theta + r\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi$ en $P(3, 45°, -45°)$.