UTN

Universidad Técnica Nacional

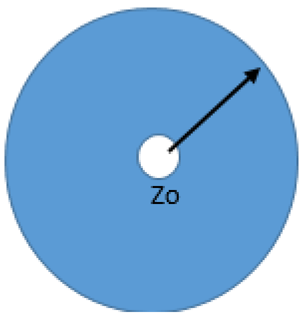
Profesora: Jackeline Cascante P

FOLLETO 5

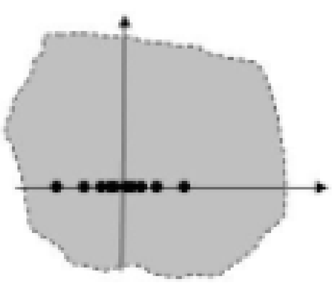
Singularidades y polos

Las singularidades pueden ser aisladas o no aisladas.

Una singularidad aislada es cuando una función tiene un problema en un solo punto



Una singularidad no aislada es cuando la función tiene problemas o no está definida a lo largo de una línea. Como lo es el caso de las funciones logarítmicas.



Estudiaremos las singularidades aisladas. Estas pueden ser de 3 tipos: evitables, polos esenciales. Lo que las distingue es el resultado del siguiente límite:

$$\lim_{z\to a} f(z) = \begin{cases} \#\ complejo \Rightarrow evitable \\ \\ \infty \Rightarrow es\ un\ polo \\ \\ NO\ existe \Rightarrow esencial \end{cases}$$

Veamos ahora cuál es el desarrollo de la serie de Laurent en cada caso:

Evitable: **No tiene potencias negativas**

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+a_3(z-a)^3$$

Polos: **Tiene potencias negativas**

Cuando es un polo simple la serie empieza con a_{-1}

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-1}+a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+a_3(z-a)^3$$

El polo con multiplicidad “m” es la patencia “m” negativa de mayor exponente

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+....+\frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+....\frac{a_{-1}}{z-1}+a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+a_3(z-a)^3$$

Esencial: **Es cuando tiene infinitos números negativos**

$$f(z)=....+\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+....+\frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+....\frac{a_{-1}}{z-1}+a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+a_3(z-a)^3$$

Como se ha venido mencionando anteriormente, el residuo de una serie de Laurent alrededor de una singularidad “a” es el coeficiente de a_{-1}

RESIDUOS

- Si la singularidad es evitable el residuo es cero

- Si es un polo simple el residuo es el resultado del siguiente límite

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=a_{-1}$$

Sino da un número ser debe volver a sacar el límite, pero subiendo un grado el factor:

$$\lim_{z\to a}(z-a)^2 f(z)=a_{-1}$$

En caso de no dar el número se debe ir subiendo hasta la potencia que del número y ella me va a dar el grado del polo

Una vez que ese límite da el número, el residuo se calcula de la siguiente manera:

$$- a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\}$$

- Esencial: tengo que desarrollar la serie de Laurent

Ejemplos. Determine el tipo de singularidad de cada una de las siguientes funciones y calcule el residuo

$$f\,(z) = \frac{Sen\,z}{z}$$

La función se indefine en:

$$F(z) = \frac{Sen\,z}{z}$$

$z = 0$ Singularida

$$Sen\,z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{Sen\,z}{z} = \frac{z}{z} - \frac{z^3}{z \cdot 3!} + \frac{z^5}{z \cdot 5!} - \frac{z^7}{z \cdot 7!}$$

$$\frac{Sen\,z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

$$\lim_{z \to 0} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots \right) = 1 \Rightarrow \text{Evitable}$$

Hay una singularidad evitable en $z = 0$ y su residuo es cero.

Ejemplo 2:

$$f\,(z) = \frac{1}{\left(z^{4}-16\right)}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 16}$$

Se indefine en:

$z^4 - 16 = 0$

$(z^2-4)(z^2+4) = 0$

$z^2 - 4 = 0 \qquad z^2+4=0$

$z = \pm 2 \qquad z = \sqrt{-4}$

$z = \pm 2i$

Tenemos 4 puntos donde se indefine la función:

$z = 2 \qquad z = 2i$

$z = -2 \qquad z = -2i$

Calculemos el límite para $z=2$

$$\lim_{z\to 2} \frac{1}{\underbrace{(z-2)}(z+2)(z-2i)(z+2i)} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \text{Es un polo}$$

Para ver el orden del polo:

$$\lim_{z\to 2} (z-a)\, f(z) = \#$$

$$\lim_{z\to 2} \cancel{(z-2)} \cdot \frac{1}{\cancel{(z-2)}(z+2)(z-2i)(z+2i)} = \frac{1}{(4)(2-2i)(2+2i)}$$

$$= \frac{1}{4\cdot(4+4)} = \frac{1}{32}$$

En $z=2$ hay un polo simple y el residuo es $a_{-1} = \frac{1}{32}$

En $z=-2i$

$$\lim_{z \to -2i} \frac{1}{(z-2)(z+2)(z-2i)\underbrace{(z+2i)}} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Es un polo}$$

Para ver el orden del polo y el residuo:

$$\lim_{z \to -2i} \cancel{(z+2i)} \cdot \frac{1}{(z-2)(z+2)(z-2i)\cancel{(z+2i)}} = \frac{1}{(-2i-2)(-2i+2)(-2i-2i)}$$

$$= \frac{1}{(-4-4)\cdot(-4i)}$$

$$= \frac{1}{32i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-32}$$

En $z=-2i$ hay un polo simple y el residuo es $a_{-1} = \frac{-i}{32}$

Ejemplo 3. Determine el tipo de singularidad de cada una de las siguientes funciones y calcule el residuo

$$f(z) = \frac{1}{z\left(1 - e^{z}\right)}$$

$$f(z) = \frac{1}{z(1-e^{z})}$$

La función se indefine en:

$z = 0$ $\qquad$ $1 - e^{z} = 0$

$z = 0$ $\qquad$ $1 = e^{z} \Leftrightarrow z = 0$

Calculemos el límite cuando $z = 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z(1-e^{z})} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{Es un polo}$$

Si es un polo simple $\lim_{z \to 0} (z-0) \cdot \frac{1}{z(1-e^{z})} = \#$

$$\lim_{z \to 0} \cancel{z} \cdot \frac{1}{\cancel{z}(1-e^{z})} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{No es un polo simple}$$

Vamos a ver si es de orden 2

$$\lim_{z \to 0} z^{2} \cdot \frac{1}{z(1-e^{z})} \rightarrow \lim_{z \to 0} \frac{z}{1-e^{z}} = \frac{0}{0}$$

L' Hôpital

$$\rightarrow \lim_{z \to 0} \frac{1}{-e^{z}} = -1 \rightarrow \text{Polo de orden 2}$$

Ahora calculemos el residuo:

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m \cdot f(z) \right] \right\}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{d}{dz} \; (z)^2 \cdot \frac{1}{z(1-e^z)} \right\}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{1-e^z} \right] \right\}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{1\cdot(1-e^z) - z\cdot -e^z}{(1-e^z)^2} \right\}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{1 - e^z + z e^z}{(1-e^z)^2} \right\} = \frac{0}{0}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{\cancel{-e^z} + \cancel{1 e^z} + z\cdot e^z}{2(1-e^z)\cdot -e^z} \right\} = \frac{0}{0}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{z\cdot e^z}{-2e^z + e^{2z})} \right\} = \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{1\cdot e^z + z\cdot e^z}{-2e^z + 2e^{2z}} \right\} = \frac{1}{2}$$

En $z=0$ hay un polo de orden 2 y el residuo es $\frac{1}{2}$

Ejemplo 4. Determine el tipo de singularidad de cada una de las siguientes funciones y calcule el residuo

$$f\,(z) = Cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$f(z) = Cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

No existe en $z=0$

$$\lim_{z \to 0} Cos\left(\frac{1}{z}\right) = \nexists$$

$\Rightarrow$ Por tanto es una singularida esencial

Como es esencial hay que desarrollar la serie de Laurent

$$Cos\, z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

$$Cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^6}{6!} + \ldots$$

$$Cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \frac{1}{6!\,z^6} + \ldots$$

$$a_{-1} = 0$$

En $z=0$ la singularidad es esencial y el residuo es cero

Ejemplo 5. Determine el tipo de singularidad de cada una de las siguientes funciones y calcule el residuo

$$f\,(z) = \frac{z-1}{z^4 - z^2\left(1+i\right)+i}$$

$$f(z) = \frac{z-1}{z^4 - z^2(1+i) + i}$$

La función se indefine en:

$$z^4 - z^2(1+i) + i = 0$$

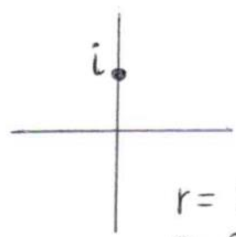
$$\begin{matrix} z^2 & & -i \\ & \times & \\ z^2 & & -1 \end{matrix}$$

$$(z^2 - i)(z^2 - 1) = 0$$

$$z^2 - i = 0$$

$$z = \sqrt{i}$$

$$\frac{360}{2} = 180$$



$r = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$$z^2 - 1 = 0$$

$$z = \pm 1$$

$K = 0 \rightarrow$

$$(1)^{1/2}\left[\cos\frac{90}{2} + i\,\text{Sen}\,\frac{90}{2}\right]$$

$$(1)^{1/2}\left[\cos 45 + i\,\text{Sen}\,45\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$K = 1 \rightarrow$

$$(1)^{1/2}\left[\cos 225 + i\,\text{Sen}\,225\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Calculemos para $z=1$

$$\lim_{z\to 1} \frac{\cancel{z-1}}{\cancel{(z-1)}(z+1)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$$

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{(z+1)\left(z-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)}$$

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{2\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]} =$$

$$\frac{1}{2\left[1-\frac{1}{2}-i-\frac{1}{2}\right]} = \frac{1}{-2i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i}{2} \;//$$

Singularidad evitable en $z=1$
El residuo es cero.

En $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{z\to\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{z-1}{(z-1)(z+1)\underbrace{\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{0}{\infty} \Rightarrow \text{Polo}$$

En $z=-1$, $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ } Hay polos.

Ejemplo 6: Determine donde se indefine la función y calcule el residuo en las singularidades z = 2i   z = -1

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

La función se indefine en:

$z+1=0$ $\quad$ $z^2+4=0$

$z=-1$ $\quad$ $z = 2i \quad -2i$

$$\lim_{z\to 2i} \frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)} = \frac{2i(2i-2)}{0} = \frac{-4-4i}{0} = \infty \text{ Polo.}$$

Calculemos el residuo:

$$\lim_{z\to 2i} \frac{\cancel{(z-2i)}\, z(z-2)}{(z+1)^2\cancel{(z-2i)}(z+2i)} = \frac{2i(2i-2)}{(2i+1)^2 \cdot 4i} =$$

$$\frac{-4-4i}{4i(-4+4i+1)} = \frac{-4-4i}{-16-12i} = \frac{\cancel{-4}(1+i)}{\cancel{-4}(4+3i)}$$

$$\frac{1+i}{(4+3i)} \cdot \frac{(4-3i)}{(4-3i)} = \frac{4-3i+4i+3}{16+9} = \frac{7}{25} + \frac{i}{25} \text{ Residuo.}$$

En $z=2i$ hay un polo y el residuo es $\frac{7}{25} + \frac{i}{25}$

En $z=-1$ Es un polo.

Calculemos el residuo

$$\lim_{z\to -1} \frac{\cancel{(z+1)}}{(z+1)^{\cancel{2}}(z+2i)(z-2i)} = \lim_{z\to -1} \frac{1}{(z+1)(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{0}$$

$\Rightarrow$ No es un polo simple

$$\lim_{z\to -1} \frac{\cancel{(z+1)^2}}{\cancel{(z+1)^2}(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow$ polo orden 2

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m \cdot f(z) \right] \right\}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to -1} \left\{ \frac{d}{z} \left[\cancel{(z+1)^2} \cdot \frac{(z^2-2z)}{\cancel{(z+1)^2}(z^2+4)} \right] \right\}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to -1} \frac{(2z-2)(z^2+4) - (z^2-2z)\cdot 2z}{(z^2+4)^2} = \frac{-4\cdot 5 - 3)\cdot -2}{25}$$

$$= \frac{-14}{25} \Rightarrow \text{Residuo}$$

En $z=-1$ hay un polo de orden 2 y su residuo es $-\frac{14}{25}$

En $z=-2i$ hay un polo

Práctica

Calcule las singularidades de la función e indique de que tipo son

a) $f(z) = \dfrac{2z}{(z^2+1)(2z-1)}$

b) $f(z) = \dfrac{1}{z^5 - z^3}$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

d) $f(z) = \dfrac{z}{(z-3)^4}$

e) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z}$

f) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{(z-1)^2}$

2. Calcule el residuo

a) $f(z) = z^2\, sen\left(\dfrac{1}{z}\right)$ $R/\dfrac{-1}{6}$

b) $f(z) = \dfrac{-z}{(z^2+1)}$

c) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

d) $f(z) = \dfrac{2z}{(2z-1)(z^2+1)}$

Respuestas

Parte 1

a) $z = \pm i \quad z = \frac{1}{2}$

$z = i$ Polo simple Residuo $-\frac{2}{5}i - \frac{1}{5}$

$z = -i$ Polo simple Residuo $-\frac{2}{5} + \frac{i}{5}$

$z = \frac{1}{2}$ Polo simple Residuo $\frac{4}{5}$

b) $z = 0$ Polo orden 3 Residuo: -1

$\left.\begin{matrix} z = 1 \\ z = -1 \end{matrix}\right\}$ Polos simples

c) $z = 0$ Polo simple

d) $z = 3$ Polo orden 4

e) $z = 0$ Singularidad evitable

f) $z = 1$ Polo orden 2

Parte 2

a) $-\frac{1}{6}$

b) $z=-i \Rightarrow R=-\frac{1}{2}$

$z=i \quad R=-\frac{1}{2}$

c) $z=0 \quad R=1$

d) $z=i \quad R| -\frac{2i}{5}-\frac{1}{5}$

$z=-i \quad R| \frac{2i}{5}-\frac{1}{5}$

$z=\frac{1}{2} \quad R| \frac{2}{5}$