UNIVERSIDAD TECNICA NACIONAL
INGENIERIA ELECTRONICA

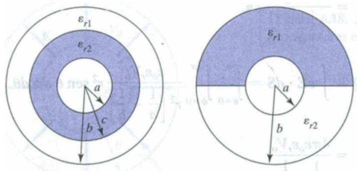
# Tarea 6

Angie Marchena Mondell

Teoría electromagnética

Noviembre de 2021

1-



**(a)** (3pts.) Determine la capacitancia del capacitor. Sea $a = 10mm, b = 30mm, c = 20mm, \varepsilon_{r1} = 2.5$ y $\varepsilon_{r2} = 3.5$.

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}} \qquad r_a < r_b$$

Estan en serie

$$C_1 = \frac{4\pi \cdot 3{,}5}{\frac{1}{10mm} - \frac{1}{20mm}}$$

$$C_{Tot} = \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1}$$

$$C_1 = 0{,}88\ F$$

$$C_2 = \frac{4\pi \cdot 2{,}5}{\frac{1}{20mm} - \frac{1}{30mm}}$$

$$C_{tot} = \left[\frac{1}{0{,}88} + \frac{1}{1{,}88}\right]^{-1}$$

$$C_2 = 1{,}88\ F$$

$$\boxed{C_{tot} = 0{,}6\ F}$$ R/

**(b)** (3pts.) Si los cascarones esféricos con radios $a = 10mm, b = 30mm$ se mantienen en una diferencia de potencial de 100 V, de modo que $V(r = b) = 0$ y $V(r = a) = 150V$. Determine la carga total inducida en los cascarones.

Estan en paralelo

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \qquad C_{tot} = C_1 + C_2$$

$$C_1 = \frac{2\pi \cdot 2{,}5}{\frac{1}{10mm} - \frac{1}{30mm}} = 0{,}24\ F \qquad C_2 = \frac{2\pi \cdot 3{,}5}{\frac{1}{10mm} - \frac{1}{30mm}} = 0{,}33\ F$$

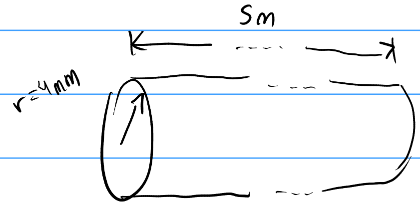
$$C_{Tot} = 0{,}24 + 0{,}33 = 0{,}57\ F$$

$$Q = C \cdot V \qquad V_{ab} = 100V \Rightarrow Q = 0{,}57 \cdot 100 \qquad \boxed{Q = 57\ C}$$ R/

**2.** (4 puntos)

**(a)** (2pts.) ¿Calcule la conductividad de un alambre de 4mm de diámetro y 5 m de longitud, si su resistencia medida es de 1mΩ?

**(b)** (2pts.) ¿Cuál es el nombre del material con esa conductividad?




$R = 10\,m\Omega$

$S = \pi r^2$

$S = \pi (4mm)^2$

$S = 12{,}5\,mm^2$

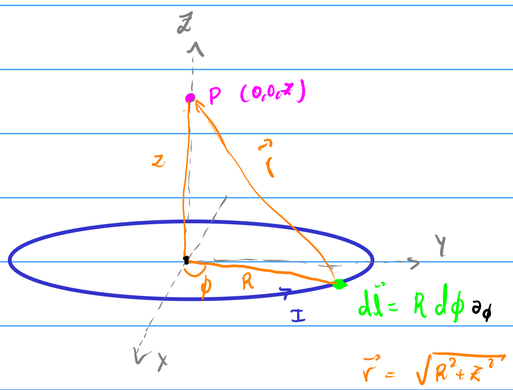
$$R = \frac{d}{\sigma \cdot S}$$

$$\sigma = \frac{d}{R \cdot S} \qquad \sigma = \frac{5\,m}{10\,m\Omega \cdot 12{,}5\,mm^2}$$

$$\boxed{\sigma = 39{,}78\,k \approx 40.000\ \Omega/m} \quad R/$$

El material es ~ carbón o Grafito

**3.** (6 puntos) Encuentre el campo magnético H para los tres casos: **(a)** en el centro de la espira, **(b)** como una función de la distancia a lo largo del eje de la espira, **(c)** a una gran distancia de la espira $z \gg R$.




$$\vec{H} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \times r}{r^2}$$

$$\vec{H} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R\,d\phi\, a_\phi) \times a_r}{(R^2+z^2)}$$

$$\vec{H} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2+z^2)} \int_0^{2\pi} d\phi\, a_\phi \times a_r$$

$$\vec{H} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R}{(R^2+z^2)} \cdot \int_0^{2\pi} d\phi\, a_z$$

$$\vec{H} = \frac{\mu_0 I}{\cancel{4\pi}_{\,2}} \frac{R}{R^2+z^2} \cdot \cancel{2\pi}$$

$$\boxed{\therefore \quad \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R}{R^2+z^2} a_z}$$

a) $z = 0$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R}{R^2+0^2} a_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{1}{R} a_z} \quad R/a$$

b) $z = z$ $\quad \therefore$ $\boxed{\vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R}{R^2+z^2} a_z}$ $R/b$

c) $z = \infty \Rightarrow z \gg R$

$$\vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R}{R^2+\infty^2} a_z$$

$$\vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R}{\infty} a_z$$

$$\boxed{\vec{H} = 0\, a_z} \quad R/c$$

**4.** (6 puntos) Dado el potencial magnético vectorial $\vec{A} = \frac{10}{\rho^2}\vec{a_z}\ Wb/m$, **(a)** Halle la densidad de corriente **J** para $\rho = 10m$ , **(b)** Halle la expresión $\vec{B}$, dado **A**, **(c)** Calcule el flujo magnético total que cruza la superficie $\varphi = \frac{\pi}{2}, 1 \leq \rho \leq 2\ m, 0 \leq z \leq 5\ m$.

$\vec{J} = \nabla \times (\nabla \times A)$

$\vec{B} = \nabla \times A$

a) Como $A = (0, 0, \frac{10}{\rho^2}) \Rightarrow \nabla \times A = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} a_\phi$

$$\nabla \times A = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{10}{\rho^2}\right) a_\phi$$

$$\nabla \times A = -\frac{\partial 10\rho^{-2}}{\partial \rho} = \frac{20}{\rho^3} a_\phi \leftarrow \vec{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{20}{\rho^2}\right)$$

$$\nabla \times \nabla \times A = -\frac{40}{\rho^4} a_z$$

$$\vec{J} = \frac{-40}{\rho^4} a_z \qquad \vec{J}(\rho = 10) = \frac{-40}{10^4} a_z$$

$$\boxed{\therefore\ \vec{J}(\rho = 10) = -4 \times 10^{-3}\ a_z\ A/m}$$ R/a

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times A = \frac{20}{\rho^3} a_\phi}$$ R/b

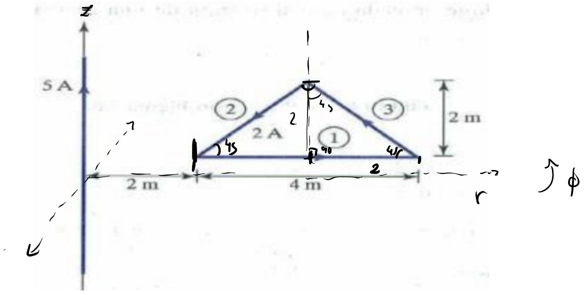
c) $\psi = \int B \cdot dS \qquad d\vec{S} = d\rho\, dz\, a_\phi \qquad \vec{B} = \frac{20}{\rho^3} a_\phi$

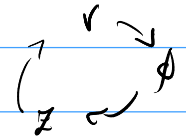
$$\psi = \int_0^5 \int_1^2 \frac{20}{\rho^3} d\rho\, dz \Rightarrow \psi = \int_0^5 \frac{15}{2} dz = 37{,}5\ Wb$$

$$\boxed{\psi = 37{,}5\ Wb}$$ R/c

**5.** (8 puntos) Una espira conductora triangular portadora de una corriente de 2 A se sitúa cerca de un conductor recto de longitud infinita con una corriente de 5 A, como se muestra en la figura.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (a_\phi)$$




Calcule **(a)** (2 pts.) la fuerza sobre el lado 1 de la espira triangular, **(b)** (3 pts.) la fuerza total sobre la espira, **(c)** (3 pts.) Determine la inductancia mutua entre un alambre recto muy largo y la espira conductora con forma de triángulo.

$$F = I(L \times B)$$

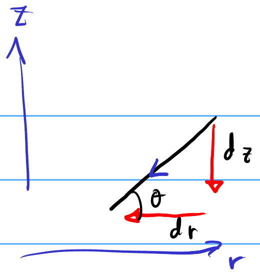
$$dF = I\, dl \times B \qquad dl = dr\,(a_r)$$

$$F = I_{2A} \int dr \; a_r \times \left( \frac{\mu_0 I_{5A}}{2\pi r} \right) (a_\phi) \qquad a_r \times a_\phi = a_z$$

$$F = \frac{2A \cdot 5A \cdot \mu_0}{2\pi} \int_2^6 \frac{1}{r} dr \; a_z$$

$$F = \frac{10A \cdot}{2\pi} \mu_0 \ln\left(\frac{6}{2}\right) \rightsquigarrow \boxed{F = 2,20 \times 10^{-6} \; N \; a_z} \quad R/a$$

b) $dF_2 = I \cdot dl_2 \times B$



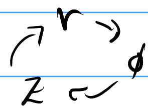

$d\vec{l}_2 = dz\,(-a_z) + dr\,(-a_r)$

$\tan\theta = \dfrac{dz}{dr}$

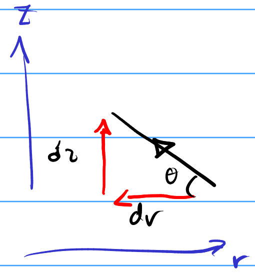
$$dF_2 = 2A \cdot (dz(-a_z) + dr(-a_r)) \times \frac{\mu_0 S A}{2\pi r}(a_\phi)$$

$\vec{B} = \left(\dfrac{\mu_0 I_{SA}}{2\pi r}\right)(a_\phi)$

$$dF_2 = \frac{2 \cdot dz\, \mu_0 \cdot S}{2\pi r}\, a_r + \cancel{\frac{2 \cdot dr \cdot \mu_0 S}{2\pi r}(-a_z)}$$




$$dF_3 = 2 \cdot dl_3 \times B$$




$dl = dr\,(-a_r) + dz\,(a_z)$

$\tan\theta = \dfrac{dz}{dr}$

$$dF_3 = \frac{2 \cdot dz\, \mu_0 S}{2\pi r}\, a_r + \cancel{\frac{2 dr\, \mu_0 S}{2\pi r}(a_z)}$$

$dz = \tan\theta \cdot dr$

$F_2 = F_3 = 0$

$$\boxed{F_{Total} = 2{,}77 \times 10^{-6}\,(a_r) + 2{,}20 \times 10^{-6}\,(a_z)\ N}$$

R/b

$$dF_{23} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot S \cdot \mu_0}{\cancel{2}\pi r} \cdot dz\ (a_r)$$

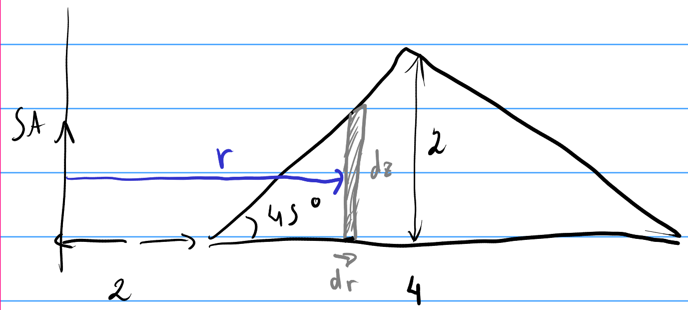
$$dF_{23} = \frac{10\,\mu_0}{\pi r} \tan\theta\, dr\ (a_r)$$

$$F_{23} = \frac{10\,\mu_0}{\pi} \tan\theta \int_2^4 \frac{dr}{r}\ (a_r)$$

$$F_{23} = \frac{10}{\pi}\mu_0 \tan\theta \ln\left(\frac{4}{2}\right)\ N\ (a_r)$$

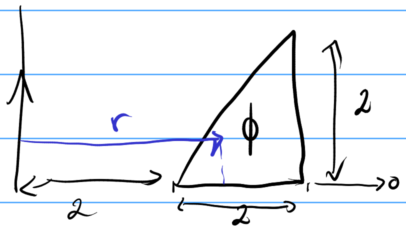
$$F_{23} = 2{,}77 \times 10^{-6} \tan\theta\ N\ (a_r$$

$$F_{23} = 2{,}77 \times 10^{-6}\ N\ (a_r)$$




$$\phi = \int B\, dA \qquad dA = dr\, dz$$

$$B = \frac{\mu_0 S}{2\pi r}$$




$$2\phi = \phi_{Total}$$

$$\phi = \iint \frac{\mu_0 S}{2\pi r} \cdot dr\, dz$$

$$\phi = \int_0^2 \int_2^4 \frac{\mu_0 S}{2\pi r}\, dr\, dz$$

$$\phi = \int_0^2 \frac{S \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{2}\right) dz$$

$$\phi = \frac{S}{2} \frac{\mu_0}{\pi} \ln(2) \cdot 2$$

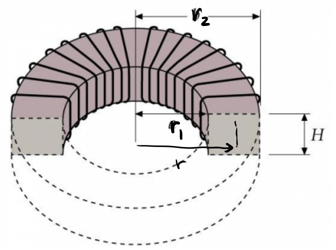
$$\phi_{Total} = S \mu_0 \ln(2)\, 2$$

$$\phi_{tot} = 8{,}71 \times 10^{-6}\ Wb$$

$$\boxed{M = \frac{\phi_{Total}}{I_{SA}} = 1{,}74 \times 10^{-6}\ H}$$

R/c

**6.** (6 puntos) Un toroide de núcleo de aire con sección cuadrada tiene un radio interno $r_1 = 80cm$, un radio externo $r_2 = 82cm$, una altura $a = 1.5cm$ y 700 vueltas.
Halle la inductancia L utilizando **(a)** la fórmula para toroides de sección transversal cuadrada, **(b)** la fórmula aproximada para un toroide general, que supone un H uniforme a un radio medio. Compare ambos resultados.
**(c)** Calcule la energía total guardada en el campo magnético del toroide si conduce una corriente de 8,5 A.




$r_1 = 0{,}8\ m$ $\qquad$ $h = 0{,}015\ m$

$r_2 = 0{,}82\ m$ $\qquad$ $N = 700$

$A = 0{,}015 \times 0{,}02$

$A = 3{,}00 \times 10^{-4}\ m^2$

a) $$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$L = \frac{\mu_0 \cdot (700)^2 \cdot 0{,}015}{2\pi} \ln\left(\frac{0{,}82}{0{,}80}\right)$$

$$\boxed{L = 3{,}63 \times 10^{-5}\ H}$$

$\Longleftrightarrow$

b) $$L \approx \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} \qquad r = 0{,}81\ m$$

$$L \approx \frac{\mu_0 (700)^2 \cdot 3{,}00 \times 10^{-4}}{2\pi \cdot (0{,}81)}$$

$$\boxed{L \approx 3{,}63 \times 10^{-5}\ H}$$

$\therefore$ Tienen aprox el mismo resutado

c)

$$U_B = \frac{1}{2} L \cdot I$$

$$U_B = \frac{1}{2}(3{,}63 \times 10^{-5}\ H) \cdot (8{,}5\ A)$$

$$\boxed{U_B = 1{,}54 \times 10^{-4}\ J}$$