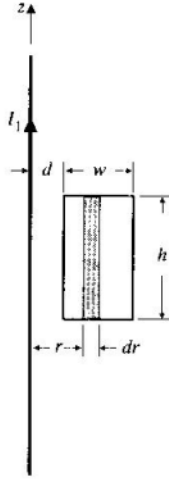


## Unidad VIII. Inductancia, materiales magnéticos y fuerzas magnéticas

1. Determine la inductancia mutua entre una espira rectangular conductora y un alambre recto muy largo.



$$B_1 = B_{\phi 1} a_{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a_{\phi}$$

$$\Phi = \int_{s_1} B_{\phi 1} \cdot ds_2$$

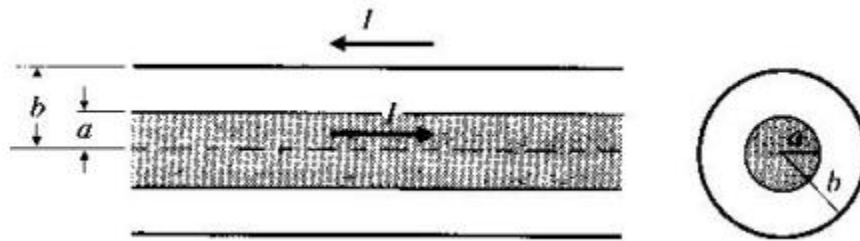
$$ds_2 = h dr a_{\phi}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \int_d^{d+w} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{w}{d} \right)$$

$$L_{12} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{w}{d} \right) \text{ (H)}$$

2. Una línea de transmisión coaxial de aire tiene un conductor interior sólido de radio  $a$  y un conductor externo muy delgado de radio interior  $b$ . Determine la inductancia por unidad de longitud de la línea.

Suponga que una corriente  $I$  fluye por el conductor interno y regresa en la dirección contrario por el conductor externo.  $B$  sólo tiene componente en  $\phi$  debido a la simetría. Suponga también, que la corriente  $I$  se distribuye de manera uniforme por la sección transversal del conductor interno. Primero hallamos los valores de  $B$ .



En el conductor interno,  $0 \leq r \leq a$

$$B_1 = a_\phi B_{\phi 1} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} a_\phi$$

Entre los conductores interno y externo,  $a \leq r \leq b$

$$B_1 = a_\phi B_{\phi 1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a_\phi$$

$$\Phi = \int_r^a B_{\phi 1} dr + \int_a^b B_{\phi 2} dr$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \int_r^a r dr + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} (a^2 - r^2) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi a^2} (a^2 - r^2) + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

¿Qué unidad tiene el L calculado?

3. Además de los conductores coaxiales, las configuraciones de conductores más comunes para los que se requiere la inductancia están el toroide y el solenoide.

## Problemas resueltos

- 11.1. Halle la inductancia por unidad de longitud en el cable coaxial de la figura 11-2 si  $a = 1$  mm y  $b = 3$  mm. Suponga  $\mu_r = 1$  y omita la inductancia interna.

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \ln 3 = 0.22 \mu\text{H/m}$$

- 11.2. Halle la inductancia por unidad de longitud de los conductores cilíndricos paralelos que aparecen en la figura 11-5, donde  $d = 25$  pies,  $a = 0.803$  pul.

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a} = (4 \times 10^{-7}) \cosh^{-1} \frac{25(12)}{2(0.803)} = 2.37 \mu\text{H/m}$$

La fórmula aproximada da

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} = 2.37 \mu\text{H/m}$$

Cuando  $d/a \geq 10$ , la fórmula aproximada puede usarse con un error menor de 0.5%.

- 11.3. Un conductor circular con el mismo radio que el del problema 11.2 está a 12.5 pies de un plano conductor infinito. Halle la inductancia.

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d}{a} = (2 \times 10^{-7}) \ln \frac{25(12)}{0.803} = 1.18 \mu\text{H/m}$$

Este resultado es 1/2 del problema 11.2. Un plano conductor puede insertarse en el medio de los conductores de la figura 11-5. La inductancia entre cada conductor y el plano es  $1.18 \mu\text{H/m}$ . Como están en serie, la inductancia total es la suma,  $2.37 \mu\text{H/m}$ .

- 11.4. Un solenoide con núcleo de aire de 300 vueltas y de 0.50 m de longitud tiene una capa sencilla de conductores enrollados con radio de 0.02 m. Halle la inductancia  $L$ .

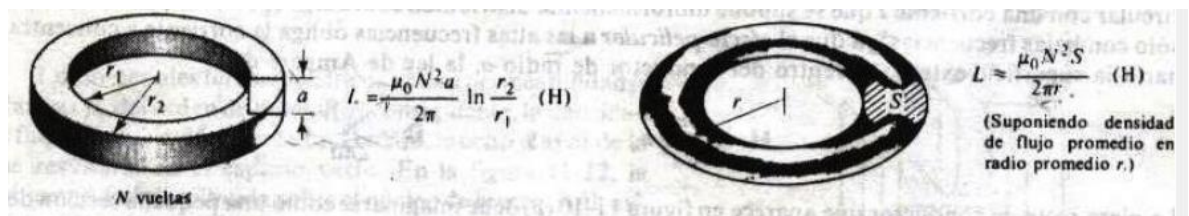
Usando la fórmula empírica

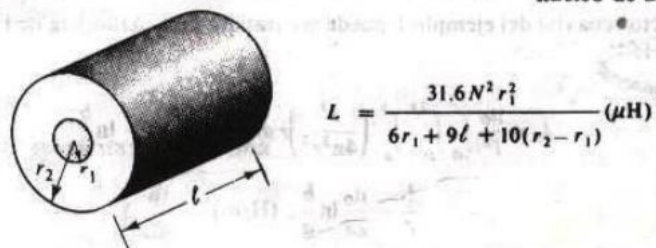
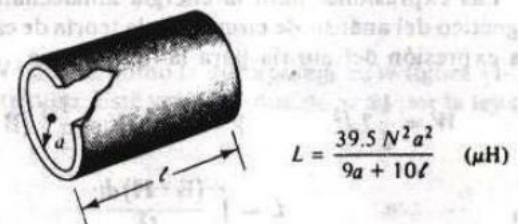
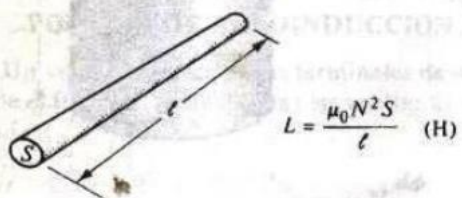
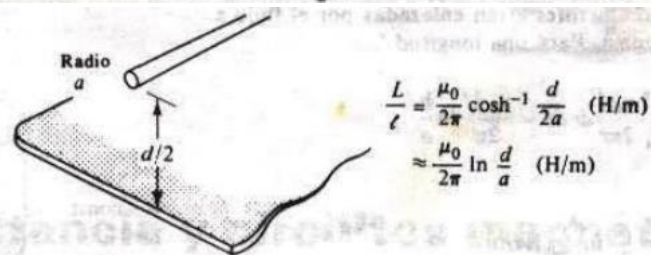
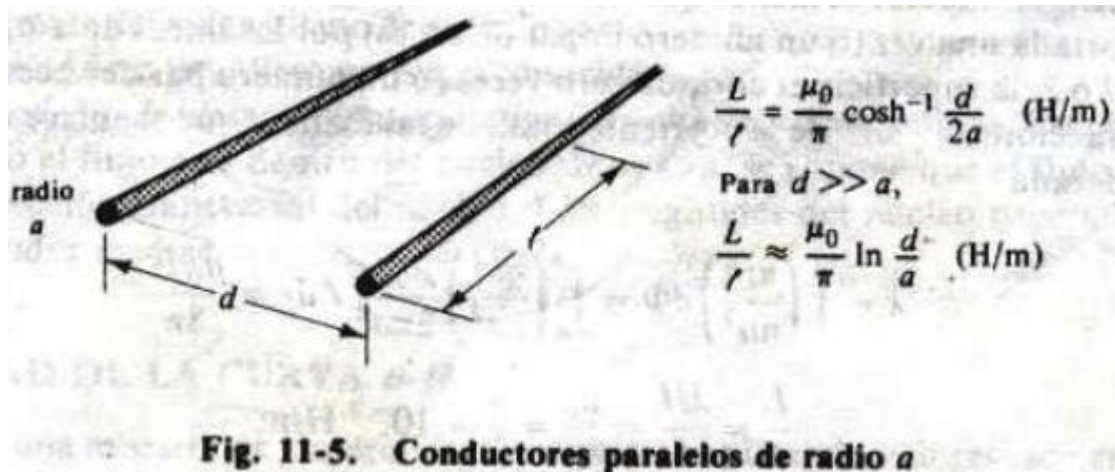
$$L = \frac{39.5 N^2 a^2}{9a + 10\ell} = 275 \mu\text{H}$$

La ecuación para un solenoide largo de pequeña sección transversal es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(300)^2 \pi (0.02)^2}{0.50} = 284 \mu\text{H}$$

Esta última ecuación es una aproximación basada en la suposición de que la intensidad del campo magnético  $H$  es constante en todo el interior de la bobina.





4.1. Halle la inductancia mutua por unidad de longitud en el cable coaxial si radio interno  $a=1\text{mm}$  y radio externo  $b=3\text{mm}$ ,  $z=2$  y  $N=400$  vueltas.

- 4.2. Halle la inductancia mutua por unidad de longitud de los conductores cilíndricos que aparecen en la figura 11-5, donde  $d=25$  pies y  $a = 0.803$  pulg.
- 4.3. Halle la inductancia mutua por unidad de longitud de un solenoide cuadrado si radio interno  $a=3$  mm y radio externo  $b=6$  mm. Suponga que  $\mu_r = 1$  y omita la inductancia interna.
- 4.4. Un solenoide con núcleo de aire de 300 vueltas y de 0.50 m de longitud tiene una capa sencilla de conductores enrollados con radio de 0.02 m. Halle la inductancia  $L$ .

## 5-6 MAGNETIZACIÓN Y DENSIDADES DE CORRIENTE EQUIVALENTES

De acuerdo con el modelo atómico elemental de la materia, todos los materiales están compuestos por átomos, cada uno de éstos con un núcleo cargado positivamente y varios electrones de carga negativa en órbita alrededor. Los electrones orbitantes originan corrientes circulantes y forman dipolos magnéticos microscópicos. Así mismo, tanto los electrones como el núcleo de un átomo rotan (giran) sobre sus ejes con ciertos momentos dipolares magnéticos. El momento dipolar magnético de un núcleo giratorio por lo general es despreciable en comparación con el de un electrón orbitante o giratorio, debido a la masa mucho mayor y a la menor velocidad angular del núcleo.

En ausencia de un campo magnético externo, los dipolos magnéticos de los átomos de la mayoría de los materiales (con excepción de los imanes permanentes) tienen orientaciones aleatorias, de manera que no hay momento magnético neto. La aplicación de un campo magnético externo ocasiona tanto la alineación de los momentos magnéticos de los electrones giratorios como un momento magnético inducido que se debe a un cambio en el movimiento orbital de los electrones. Para obtener una fórmula que nos permita determinar el cambio cuantitativo en la densidad de flujo magnético ocasionado por la presencia de un material magnético, sea  $\mathbf{m}_k$  el momento dipolar magnético de un átomo. Si hay  $n$  átomos por unidad de volumen, definimos un *vector de magnetización*  $\mathbf{M}$  como

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n \Delta v} \mathbf{m}_k}{\Delta v} \quad (\text{A/m}), \quad (5-48)$$

El vector de magnetización es la densidad de volumen del momento dipolar magnético.



o, de acuerdo con el teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathcal{L} = I \quad (\text{A}), \quad (5-63)$$

donde  $C$  es el contorno (trayectoria cerrada) que limita la superficie  $S$ , e  $I$  es la corriente libre total que pasa a través de  $S$ . Las direcciones relativas de  $C$  y el flujo de corriente  $I$  siguen la regla de la mano derecha. La ecuación (5-63) es otra forma de la *ley circuital de Ampère*, válida en medios magnéticos y no magnéticos. Establece que *la circulación de la intensidad de campo magnético alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a la corriente libre que fluye a través de la superficie limitada por la trayectoria*.

Cuando las propiedades magnéticas del medio son *lineales e isotropas*, la magnetización es directamente proporcional a la intensidad de campo magnético:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (5-64)$$

donde  $\chi_m$  es una cantidad sin dimensiones llamada *susceptibilidad magnética*. Al sustituir la ecuación (5-64) en la ecuación (5-60) se obtiene la siguiente relación constitutiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \\ &= \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad (\text{Wb/m}^2), \end{aligned} \quad (5-65)$$

o

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (\text{A/m}), \quad (5-66)$$

donde

$$\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (5-67)$$

En la ecuación (5-64) de la sección anterior describimos la propiedad magnética macroscópica de un medio lineal e isótropo definiendo la susceptibilidad magnética  $\chi_m$ , un coeficiente de proporcionalidad sin dimensiones entre la magnetización  $\mathbf{M}$  y la intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$ . La permeabilidad relativa,  $\mu_r$ , es simplemente  $1 + \chi_m$ . Los materiales magnéticos pueden clasificarse de manera general en tres grupos principales de acuerdo con sus valores de  $\mu_r$ . Se dice que un material es

**Diamagnético**, si  $\mu_r \lesssim 1$  ( $\chi_m$  es un número negativo muy pequeño).

**Paramagnético**, si  $\mu_r \gtrsim 1$  ( $\chi_m$  es un número positivo muy pequeño).

**Ferromagnético**, si  $\mu_r \gg 1$  ( $\chi_m$  es un número positivo grande).

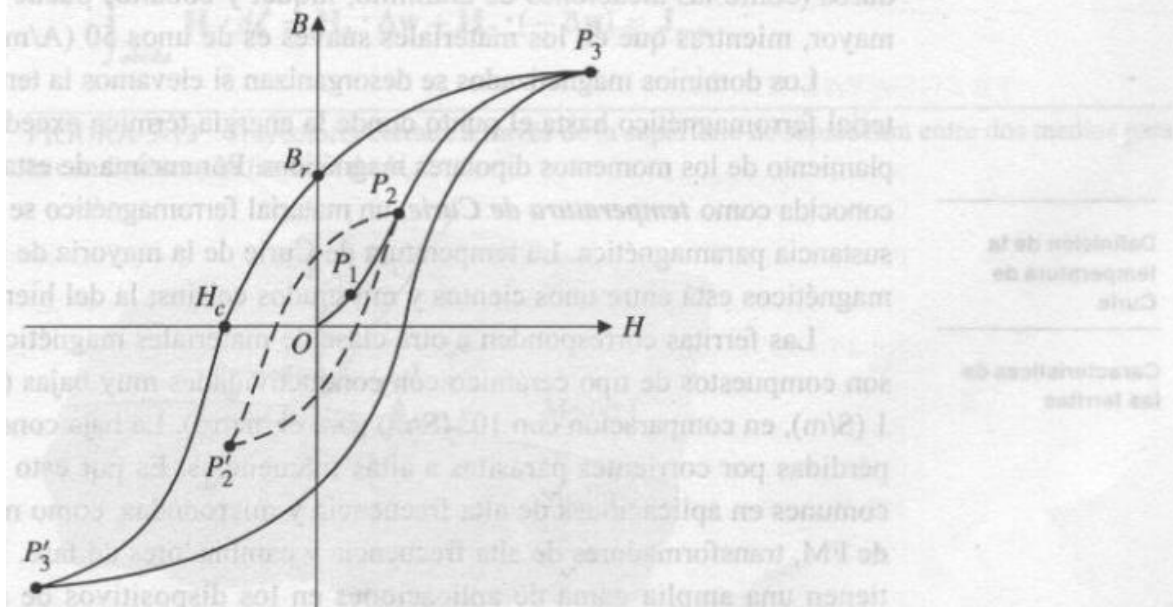
Para comprender con detalle los fenómenos magnéticos microscópicos se requieren conocimientos de la teoría cuántica. Aquí sólo diremos que el diamagnetismo se debe principalmente al movimiento orbital de los electrones en el átomo, mientras que el paramagnetismo se debe sobre todo a los momentos dipolares magnéticos de los electrones giratorios. La susceptibilidad magnética de la mayoría de los materiales *diamagnéticos* conocidos (cobre, germanio, plata, oro) es del orden de  $-10^{-5}$  y la de los materiales *paramagnéticos*, como aluminio, magnesio, titanio y tungsteno, es del orden de  $10^{-5}$ .

La magnetización de los materiales *ferromagnéticos* puede ser varios órdenes de magnitud mayor que la de las sustancias paramagnéticas. (Véase el apéndice B-5 para conocer los valores típicos de la permeabilidad relativa.)

El *ferromagnetismo* puede explicarse en función de **dominios** magnetizados. De acuerdo con este modelo, que se ha confirmado experimentalmente, un material ferromagnético (como cobalto, níquel o hierro) está compuesto por varios dominios pequeños, cuyas dimensiones lineales van de unas cuantas micras a aproximadamente 1 mm. Estos dominios, que contienen cerca de  $10^{15}$  o  $10^{16}$  átomos, están totalmente magnetizados, en el sentido de que contienen dipolos magnéticos alineados como resultado de los electrones giratorios, incluso en ausencia de un campo magnético aplicado. La teoría cuántica

magnético. Los movimientos de las paredes de los dominios son reversibles en el caso de la aplicación de un campo débil, digamos hasta cierto punto  $P_1$  en la curva de magnetización  $B-H$  de la figura 5-12. Sin embargo, si el campo aplicado es más fuerte (superior al punto  $P_1$ ), los movimientos de las paredes de los dominios ya no son reversibles y se produce también una orientación del dominio en la dirección del campo aplicado. Por ejemplo, si un campo aplicado se reduce a cero en el punto  $P_2$ , la relación  $B-H$  ya no sigue la curva continua  $P_2P_1O$ , sino pasará de  $P_2$  a  $P'_2$  por la curva punteada de la figura. Este fenómeno de retardo de la magnetización con respecto al campo que la produce se denomina **histéresis**, término derivado de una palabra griega que significa "ir detrás". Si el campo aplicado es más fuerte (por encima de  $P_2$ , hasta  $P_3$ ), el movimiento de la pared de dominio y la rotación del dominio ocasionarán, en esencia, una alineación total de los momentos magnéticos microscópicos con respecto al campo aplicado, diciéndose que en este punto el material magnético ha llegado a la **saturación**. La curva  $OP_1P_2P_3$  en el plano  $B-H$  se denomina **curva de magnetización normal**.

FIGURA 5-12 Curvas de histéresis en el plano  $B-H$  de un material magnético.





## 5-9 CONDICIONES EN LA FRONTERA PARA CAMPOS MAGNETOSTÁTICOS

Para resolver problemas relacionados con campos magnéticos en regiones con medios que tienen propiedades físicas diferentes, es necesario estudiar las condiciones (en la frontera) que deben satisfacer los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en las superficies de separación de los distintos medios. Si empleamos técnicas similares a las que se usaron en la sección 3-8 para obtener las condiciones en la frontera de campos electrostáticos, podemos derivar las condiciones en la frontera magnetostáticas aplicando las dos ecuaciones fundamentales (Ecs. (5-6) y (5-61)) a una pequeña caja cilíndrica y a una pequeña trayectoria cerrada, respectivamente, que incluyen la superficie de separación. A partir de la divergencia nula del campo  $\mathbf{B}$  expresada en la ecuación (5-6), podemos llegar directamente a la conclusión de que, al igual que en la ecuación (4-34), **la componente normal de  $\mathbf{B}$  es continua a través de una superficie de separación;** es decir,

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (\text{T}). \quad (5-68)$$

La componente normal de  $\mathbf{B}$  es continua a través de la superficie de separación.

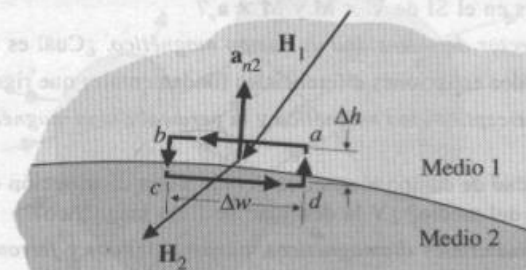
En el caso de materiales lineales e isotrópicos,  $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1$  y  $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$ , y la ecuación (5-68) se convierte en

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}. \quad (5-69)$$

La componente tangencial de un campo magnético no será continua si hay una corriente superficial por la superficie de separación. Podemos derivar una condición en la frontera de las componentes tangenciales de  $\mathbf{H}$  aplicando la ecuación (5-63) a una trayectoria cerrada  $abcda$  en la superficie de separación de dos medios, como se ilustra en la figura 5-13. Al dejar que los lados  $bc = da = \Delta h$  se aproximen a cero, tenemos

$$\int_{abcda} \mathbf{H}_i \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta \mathbf{w} + \mathbf{H}_2 \cdot (-\Delta \mathbf{w}) = \mathbf{J}_{sn},$$

FIGURA 5-13 Trayectoria cerrada a través de la superficie de separación entre dos medios para la condición en la frontera de  $H_r$ .



$$\boxed{H_{1t} - H_{2t} = J_{sn} \quad (\text{A/m}),} \quad (5-70)$$

donde  $J_{sn}$  es la densidad superficial de corriente en la superficie de separación normal al contorno  $abcd$ . La dirección de  $J_{sn}$  es la del dedo pulgar cuando los dedos de la mano derecha siguen la dirección de la trayectoria. La dirección positiva de  $J_{sn}$  para la trayectoria elegida es hacia afuera del papel en la figura 5-13. La forma más general de la ecuación (5-70) es

$$\boxed{\mathbf{a}_{n2} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (\text{A/m}),} \quad (5-71)$$

donde  $\mathbf{a}_{n2}$  es la *normal unitaria hacia afuera del medio 2* en la superficie de separación.

Cuando las conductividades de ambos medios son finitas, las corrientes vienen dadas por las densidades de corriente de volumen y las corrientes libres superficiales no están definidas en la superficie de separación. Por lo tanto,  $\mathbf{J}_s$  es igual a cero y *la componente tangencial de  $\mathbf{H}$  es continua a través de la frontera de casi todos los medios físicos; es discontinua únicamente cuando se supone la superficie de separación con un conductor ideal perfecto o con un superconductor.* De esta manera, para los campos magnetostáticos normalmente tenemos

$$\boxed{\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}.} \quad (5-72)$$

La intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}_1$  en un medio 1 con permeabilidad  $\mu_1$  forma un ángulo  $\alpha_1$  con la normal a la superficie de separación con un medio 2 que tiene permeabilidad  $\mu_2$ . Determine la relación entre el ángulo  $\alpha_2$  (que forma  $\mathbf{H}_2$  con la normal) y  $\alpha_1$ .

**RESPUESTA:**  $\tan \alpha_2 / \tan \alpha_1 = \mu_2 / \mu_1$ .