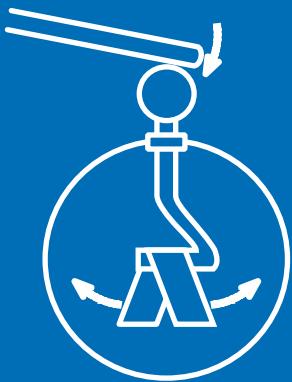
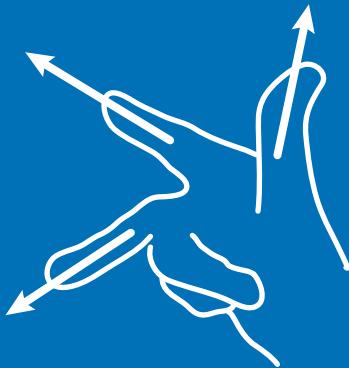
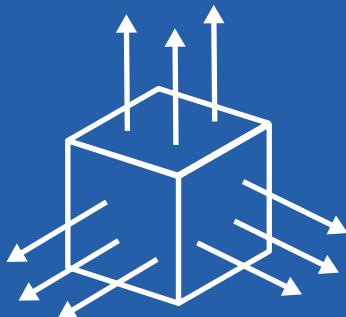
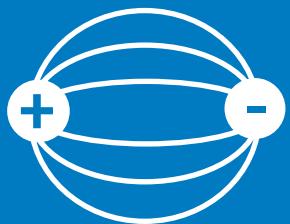
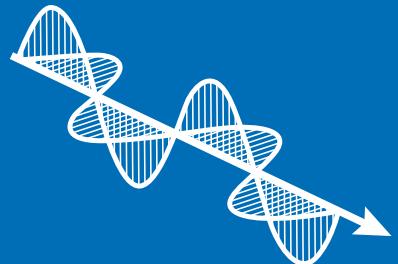
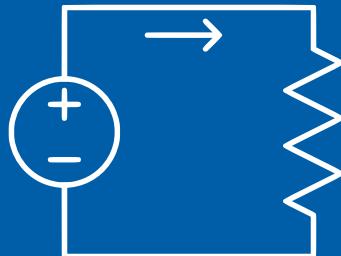
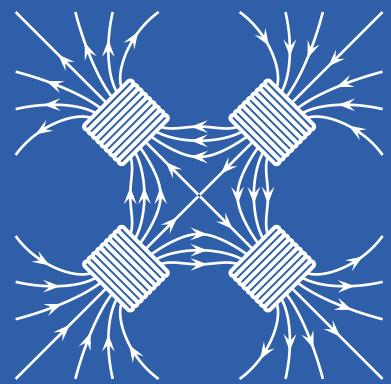


# Problemas Propuestos y Resueltos de Electromagnetismo



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



Rodrigo Chi Durán

Versión Marzo 2017



# Índice general

<b>I    Electrostática</b>	<b>1</b>
1. Distribuciones Discretas de Cargas	3
2. Distribuciones Continuas de Cargas	19
3. Ley de Gauss	45
4. Conductores	65
5. Ecuación de Laplace y Poisson	99
6. Dipolo Eléctrico	129
7. Dieléctricos	149
<b>II    Corriente Eléctrica</b>	<b>171</b>
8. Medios Conductores	173
9. Circuitos Eléctricos	195

## ÍNDICE GENERAL

<b>III Magnetostática</b>	<b>207</b>
<b>10. Ley de Biot-Savart</b>	<b>209</b>
<b>11. Fuerza de Lorentz</b>	<b>223</b>
<b>12. Ley de Ampère</b>	<b>241</b>
<b>13. Potencial y Momento Magnético</b>	<b>261</b>
<b>14. Medios Magnéticos</b>	<b>279</b>
<b>IV Campos Electromagnéticos Variantes en el Tiempo</b>	<b>295</b>
<b>15. Ley de Faraday-Lenz</b>	<b>297</b>
<b>16. Inductancia y Energía Magnética</b>	<b>315</b>
<b>17. Corriente Alterna</b>	<b>335</b>
<b>18. Leyes de Maxwell</b>	<b>349</b>



## Prólogo

El Electromagnetismo es posiblemente una de las ramas más bonitas de la física, la cual tiene muchas aplicaciones cotidianas de las cuales no nos damos cuenta: prender la luz, llamar por celular o usar el computador. El estudio de esta área en el último siglo ha provocado un avance considerable en la tecnología y nos entrega un mayor bienestar diariamente.

El apunte aquí presente, nace como una recopilación de problemas propuestos y resueltos durante el tiempo que he sido Profesor Auxiliar en la Universidad de Chile y mi breve paso por la Universidad de los Andes. La mayoría de los problemas disponibles han sido extraídos de evaluaciones (controles, ejercicios, tareas, etc) y de guías de problemas propuestos que elaboré para que mis alumnos estudiaran. Aclaro que la mayoría de los problemas presentes no son de mi autoría sino de los profesores de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile y algunos otros inspirados en la bibliografía.

Mi principal objetivo con este apunte es entregar un buen material de estudio para las personas que necesiten estudiar y/o que simplemente quieran aprender. Además, el hecho de reunir el material que confeccioné durante varios semestres en un solo lugar hace que el trabajo sea mucho más útil y duradero para las personas que quieran utilizarlo.

Este compilado posee dos tipos de problemas: algunos con su solución completa y otros que solamente poseen su respuesta final. Como siempre es recomendado, es importante que al momento de usar este apunte se den el tiempo de pensar el problema antes de mirar su solución (si es que la posee). Un rol activo en la resolución de problemas les traerá muy buenos resultados durante este curso.

He querido ser detallista en la selección de problemas, de modo que en la mayoría de los capítulos he intentado plasmar un espectro representativo de los de problemas que suelen ser preguntados en la FCFM (aunque hay profesores que su ingenio siempre puede más).

Dado lo reciente de esta recopilación, probablemente existan errores de los cuales han pasado desapercibidos. Les pido por favor a los estudiantes que los encuentren que me los notifiquen, así ganarán buen karma y otros futuros estudiantes se los agradecerán.

¡Mucho Éxito!



## Agradecimientos

Quiero agradecer a las personas que han hecho posible realizar este proyecto, a los profesores Pablo Zegers, Daniel Escaff, Simón Casassus, Carlos Cartes, Takeshi Asahi, Matías Montesinos y en particular, a Marcel Clerc y Claudio Romero.

A mis compañeros auxiliares que aportaron con problemas y soluciones: Susana Márquez y Luis Mateluna.

Y finalmente a Matías Mattamala por su ayuda en la confección de la portada.



## Notas de la Edición - Marzo 2017

- La presente versión cuenta con 18 capítulos, donde existen 222 problemas propuestos de los cuales 111 tienen solución.
- Cada capítulo posee un resumen de fórmulas que le serán útiles.
- Los problemas tienen una simbología de acuerdo a su dificultad:
  - ● significa que un problema es sencillo y debería ser resuelto en forma rápida.
  - ◆ significa que el problema intermedio y requiere un mayor análisis o trabajo algebraico.
  - ★ significa que es un problema difícil, que requiere un análisis prolongado.
- Todos los problemas del apunte cuentan con su respectiva respuesta al final de cada capítulo. Se indica su solución con el símbolo ✓.
- En el enunciado de cada problema se detalla si este tiene solución mediante el símbolo S.
- En caso que el problema no posea solución, este contará con indicaciones I que lo ayudarán a resolverlo.
- Cualquier error o corrección, por favor contactarse al correo rchi@ing.uchile.cl .



## ÍNDICE GENERAL



# **Parte I**

## **Electrostática**



# Distribuciones Discretas de Cargas

## I. Resumen Teórico

---

### Ley de Coulomb

La fuerza entre dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  separadas una distancia  $r$ , es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente al cuadrado de la distancia que las separa.

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

Si las cargas son de distinto signo la fuerza es atractiva, en caso contrario, la fuerza es repulsiva. Vectorialmente, si las cargas  $q_1$  y  $q_2$  se encuentran en las posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , respectivamente, la fuerza que siente la carga  $q_1$  es

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (1.2)$$


---

### Definición de Campo Eléctrico

El campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto dado por el vector posición  $\vec{r}_2$  provocado por una carga  $q_1$  en una posición  $\vec{r}_1$ , puede ser determinado como

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (1.3)$$


---

### Principio de Superposición

El campo eléctrico  $\vec{E}$  existente en un punto del espacio es igual a la suma de todos los campos eléctricos generados por todas las distribuciones de cargas existentes en ese espacio.

## Campo Eléctrico por Cargas Puntuales

El campo eléctrico en una posición  $\vec{r}$  provocado por  $N$  cargas puntuales  $q_1, q_2, \dots, q_N$  ubicadas respectivamente en las posiciones  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  se encuentra dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (1.4)$$


---

## Conservación del Campo Eléctrico

El campo eléctrico debido a cargas estáticas es conservativo, es decir

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (1.5)$$

O equivalentemente para cualquier camino cerrado  $\Gamma$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.6)$$

Por otro lado, esto implica que existe una función escalar  $V$  tal que

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (1.7)$$

La función  $V$  se denomina Potencial Eléctrico.

---

## Potencial y Trabajo Eléctrico

El trabajo eléctrico de mover una carga  $q$  desde un posición  $A$  a otra ubicación  $B$  bajo la oposición de un campo eléctrico  $\vec{E}$  está dado por

$$W = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.8)$$

Físicamente, el potencial eléctrico es el trabajo por unidad de carga que es necesario aplicar para mover una carga desde una posición inicial  $A$  (conocida como referencia) a otra final  $B$ . Usando las Ecuaciones 1.7 y 1.8, se obtiene que

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.9)$$



## Potencial Eléctrico por Cargas Puntuales

El potencial eléctrico debido a una carga puntual  $q$  es

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.10)$$

donde  $r$  es la distancia de la carga al punto donde se quiere conocer el potencial.

---

## Potencial Eléctrico por Cargas Puntuales

Por principio de potencial eléctrico, para  $N$  cargas puntuales está dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (1.11)$$

---

## Recomendaciones

- Nunca olvidar que el campo eléctrico es un campo vectorial (a todo punto en el espacio se le asigna un vector) y el potencial un campo escalar (a todo punto en el espacio se le asigna un número real).
- Es muy importante tomar la intuición que el campo eléctrico de una carga puntual es siempre radial al punto donde se quiere conocer el campo.
- Para distribuciones finitas de carga, como las cargas puntuales, se suele tomar de referencia el infinito, ie.  $V(A \rightarrow \infty) = 0$ . Esto siempre puede ser tomado así excepto cuando exista carga en el infinito (distribuciones infinitas de carga).

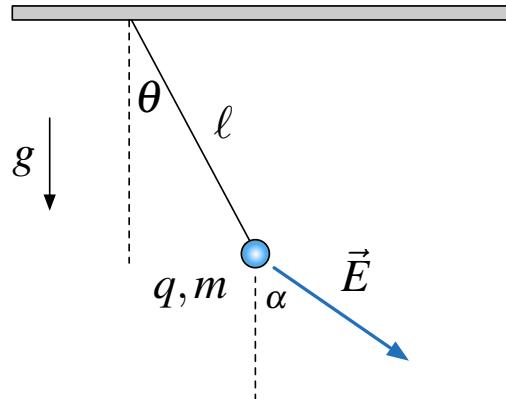


## II. Problemas Propuestos

### Problema 1.1

Considere una partícula puntual con carga  $q$  y masa  $m$  la cual está sujetada mediante un péndulo de largo  $\ell$ . En el espacio donde se encuentra la carga existe un campo eléctrico conocido  $\vec{E}$  que forma un ángulo  $\alpha$  con respecto a la vertical (ver Figura).

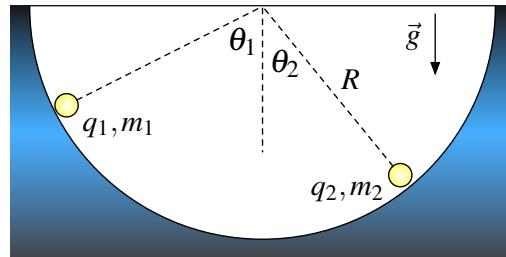
- Encuentre en ángulo de equilibrio  $\theta_0$  el cual tendrá la carga.
- Si la carga es perturbada débilmente de su posición equilibrio, ¿Cuál será su frecuencia de pequeñas oscilaciones?.



### Problema 1.2

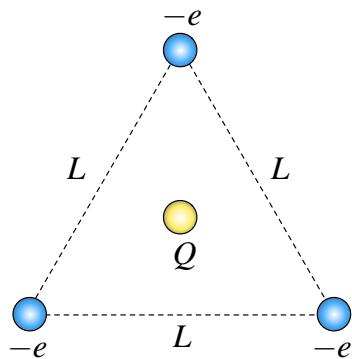
Considere dos partículas puntuales de carga positiva  $q_1$  y  $q_2$  y masas  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Ambas cargas se encuentran sobre una plataforma circular de radio  $R$  sin roce y bajo el efecto de la gravedad. En el equilibrio las partículas forman ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con respecto a la vertical.

- Determine la relación de las entre las masas  $m_1$  y  $m_2$ .
- Demuestre que  $m_1 = m_2$  es condición necesaria y suficiente para que  $\theta_1 = \theta_2$ , independiente del valor de las cargas  $q_1$  y  $q_2$ .
- Ahora, suponga que  $q_1 = q_2$ ,  $m_1 = m_2$  y por ende  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ . Si ambas cargas se dejan caer desde un ángulo  $\theta \ll 1$  y éstas pierden carga a razón  $\frac{dq}{dt} = -\alpha$  [C/s]. ¿A qué velocidad  $\vec{v}(\theta)$  se acercan ambas partículas?.



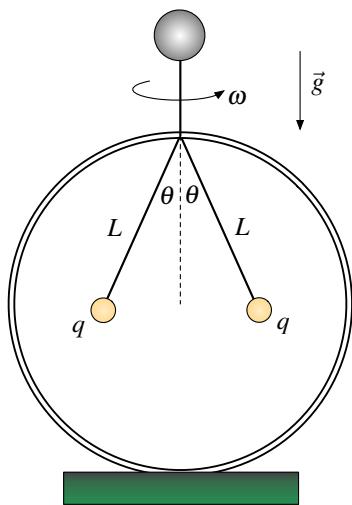
**Problema 1.3**

En los vértices de un triángulo equilátero de lado  $L$  se han situado tres cargas negativas  $-e$ . Si en el centro de gravedad del triángulo se sitúa una carga de magnitud  $Q$ , determine el valor que debe poseer esa carga para mantener el sistema en equilibrio.

**Problema 1.4**

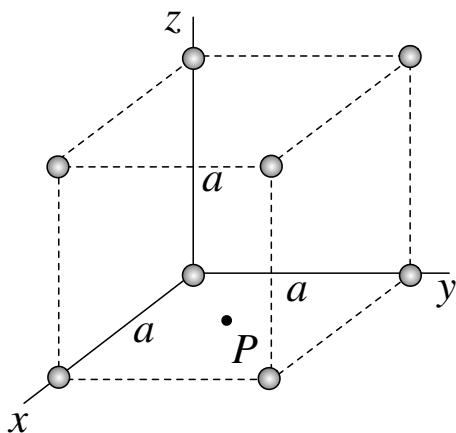
Un electroscopio es un instrumento para determinar si un objeto se encuentra cargado. Un modelo simplificado para explicar su funcionamiento son dos esferas metálicas de igual masa  $m$  las cuales cuelgan por dos hilos conductores de largo  $L$ . Estas esferas adquieren igual carga  $q$  al momento en que se toca el objeto cargado con la esfera metálica superior.

- Determine el valor de la carga  $q$  de las esferas si experimentalmente se ha medido que  $\theta = 30^\circ$ .
- El sistema se hace girar con una velocidad angular  $\omega$  observándose que el ángulo de equilibrio cambia a  $\theta = 60^\circ$ . Determine el valor de  $\omega$ .

**Problema 1.5**

En los vértices de un cubo de lado  $a$  se han puesto ocho cargas puntuales de igual carga  $q$  como se indica en la Figura. Sea  $P$  el punto ubicado en el centro de la cara del cubo que yace sobre el plano  $xy$ . Determine

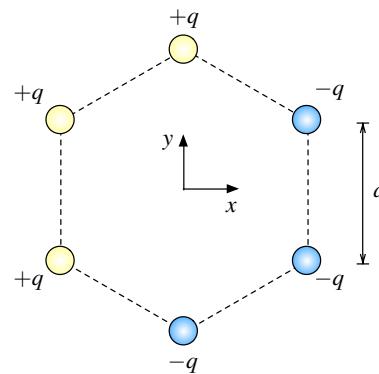
- El campo eléctrico en  $P$ .
- Determine el trabajo necesario para traer desde el infinito una carga  $Q$  y dejarla en el punto  $P$ .



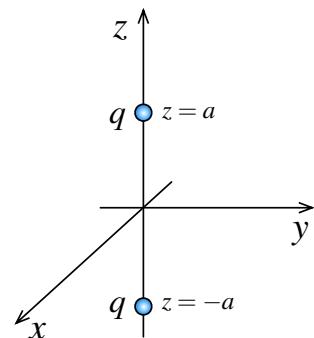
**Problema 1.6**   

Considere un polígono regular de lado  $a$  y  $2n$  vértices, donde consecutivamente se han puesto  $n$  cargas positivas  $q$  y luego  $n$  cargas negativas  $-q$ . En la Figura se muestra el caso  $n = 3$ . Determine

- El campo eléctrico y el potencial eléctrico en el centro de hexágono ( $n = 3$ ).
- El módulo del campo eléctrico en el centro del polígono para el caso general de  $n$  vértices.


**Problema 1.7**   

Considere dos cargas positivas  $q$  puestas sobre en el eje  $z$ . Si las cargas se ubican  $z = a$  y  $z = -a$  determine el lugar geométrico de los puntos los cuales maximizan el módulo del campo eléctrico sobre el plano  $xy$ .

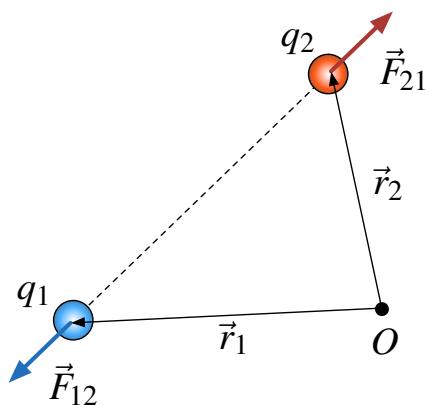

**Problema 1.8**   

Suponga que en lugar de la Ley de Coulomb, uno hubiera encontrado experimentalmente que la fuerza entre dos cargas puntuales fuera

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \sqrt{\alpha|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|})}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

donde  $\alpha$  es una constante.

- Escriba el campo eléctrico a una carga puntual. Coloque el origen de coordenadas en la carga puntual.
- Elija una trayectoria cerrada alrededor de la carga y calcule la integral  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Compare el resultado obtenido con la Ley de Coulomb.
- Encuentre en valor de la integral  $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$  sobre una superficie esférica centrada en la carga. Compare el resultado obtenido con la Ley de Coulomb.

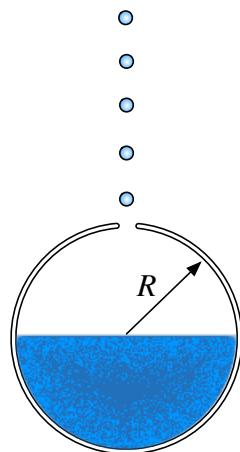


**Problema 1.9**   

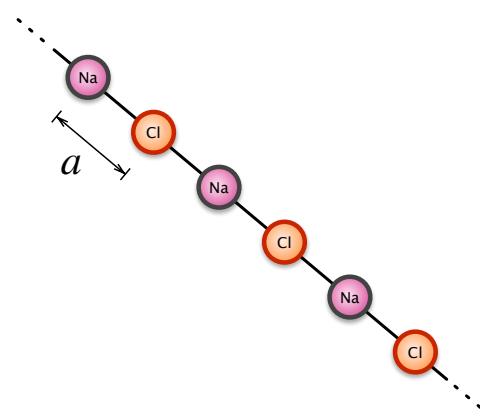
En un recipiente metálico existe un líquido cargado el cual se encuentra a un potencial  $V_0$  constante. El recipiente posee muy pequeño orificio por el cual caen gotas esféricas de radio  $a$  hacia otro recipiente esférico de radio  $R$  el cual posee una pequeña abertura. Este segundo recipiente se encuentra inicialmente descargado y muy alejado del otro recipiente.

- Determine la carga que posee cada gota al momento de caer del primer recipiente.
- Determine el potencial al cual se encuentra el recipiente esférico una vez que está completamente lleno.

## Líquido Cargado

**Problema 1.10**   

La cohesión en los cristales iónicos se debe a las fuerzas eléctricas de atracción entre los iones positivos y negativos. Considere un modelo unidimensional de un cristal de Cloruro de Sodio ( $\text{NaCl}$ ) que consiste en una línea recta infinita en que están colocados los iones, alternándose los iones positivos de  $\text{Na}$  y los iones negativos de  $\text{Cl}$ . La distancia entre iones vecinos es  $a$ . Los iones positivos tienen carga  $+e$  y los iones negativos  $-e$ . Calcule la energía que hay que entregarle a un ion positivo de  $\text{Na}$  para sacarlo de su lugar y llevarlo a una distancia muy grande respecto a  $a$ .



### III. Soluciones

#### Solución 1.1

Para enfrentar este problema es necesario fijar un sistema de referencia cómodo, para luego plantear las ecuaciones de movimiento.

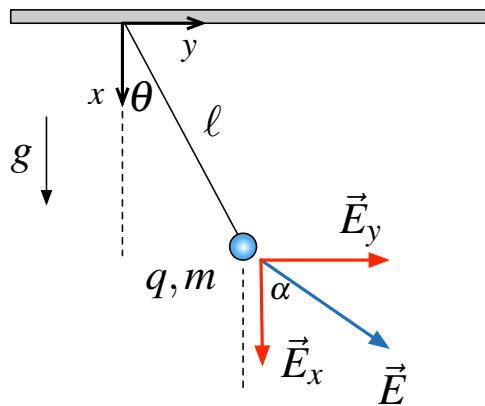


Figura 1.1: Descomposición del campo eléctrico.

Según la Figura 1.1 es posible afirmar que  $\vec{E}_x = E \cos \alpha \hat{x}$  y  $\vec{E}_y = E \sin \alpha \hat{y}$ . Notése que hay tres fuerzas actuando sobre la carga: el peso, la fuerza eléctrica y la tensión de la cuerda. Ahora, se procede a volver a descomponer las fuerzas anteriormente nombradas según  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  en coordenadas cilíndricas.

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = qE(\cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \hat{y}) + mg\hat{x} - T\hat{r}$$

Como  $\hat{x} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$  y  $\hat{y} = \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}$  la expresión anterior puede ser reescrita como

$$m\vec{a} = ((qE \cos \alpha + mg) \cos \theta + qE \sin \alpha \sin \theta) \hat{r} + (- (qE \cos \alpha + mg) \sin \theta + qE \sin \alpha \cos \theta) \hat{\theta}$$

En el equilibrio debe cumplirse  $\vec{a} = 0$ , por lo cual el ángulo de equilibrio puede ser determinado a partir de anular la componente en  $\hat{\theta}$  de la aceleración, por lo tanto

$$-(qE \cos \alpha + mg) \sin \theta_0 + qE \sin \alpha \cos \theta_0 = 0 \implies \tan \theta_0 = \frac{qE \sin \alpha}{qE \cos \alpha + mg}$$

Para encontrar las pequeñas oscilaciones del péndulo hay que hallar una ecuación diferencial de la forma

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = \text{cte}$$

Para ello se usa nuevamente la componente en  $\hat{\theta}$  de la aceleración, de modo que

$$m\ell\ddot{\theta} = -A \sin \theta + B \cos \theta$$

donde se ha definido por simplicidad  $A = qE \cos \alpha + mg$  y  $B = qE \sin \alpha$ . De la expresión anterior es necesario linealizar las funciones no lineales  $f_1(\theta) = \sin \theta$  y  $f_2(\theta) = \cos \theta$  para llegar a la



# CAPÍTULO 1. DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE CARGAS

ecuación deseada. Para encontrar la expresión es necesario usar una aproximación de Taylor al primer orden entorno a  $\theta_0$  el cual está dado por

$$f(\theta) \approx f(\theta_0) + \frac{df}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \cdot (\theta - \theta_0)$$

Luego, se tiene que

$$\sin \theta \approx \sin \theta_0 + \cos \theta_0 (\theta - \theta_0)$$

$$\cos \theta \approx \cos \theta_0 - \sin \theta_0 (\theta - \theta_0)$$

Entonces, la ecuación de movimiento de la carga se transforma en

$$m\ell\ddot{\theta} = -A(\sin \theta_0 + \cos \theta_0 (\theta - \theta_0)) + B(\cos \theta_0 - \sin \theta_0 (\theta - \theta_0))$$

Operando algebraicamente la expresión anterior se obtiene que

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{A \cos \theta_0 + B \sin \theta_0}{m\ell} \right) \theta = K$$

donde  $K$  es un valor constante. Trabajando nuevamente con la expresión

$$\ddot{\theta} + \cos \theta_0 \left( \frac{A + B \tan \theta_0}{m\ell} \right) \theta = K$$

Finalmente reemplazando los valores conocidos de  $A$ ,  $B$ ,  $\tan \theta_0$  y dado  $\cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta_0}}$  se concluye que

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{(qE \cos \alpha + mg)^2 + (qE \sin \alpha)^2}}{m\ell}$$

## Solución 1.3

En este problema se aprecia una simetría con respecto a la carga  $Q$ , ya que todas las cargas negativas sienten la misma fuerza de atracción/repulsión. Por ejemplo, haciendo el DCL a la carga superior se obtiene lo siguiente

Las fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  son repulsivas (generadas por las otras cargas negativas), mientras que la fuerza  $\vec{F}_3$  generada por la carga  $Q$  positiva es atractiva. Usando el sistema de referencia de la Figura 1.2 y la Ley de Coulomb, es posible descomponer las fuerzas de la siguiente forma

$$\vec{F}_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} \left( -\hat{x} \cos \frac{\pi}{3} + \hat{y} \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad \vec{F}_2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} \left( \hat{x} \cos \frac{\pi}{3} + \hat{y} \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad \vec{F}_3 = -\frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{y}$$

donde  $d$  es la distancia desde cualquier vértice al centro del triángulo. Usando el Teorema del Coseno, es posible despejar  $d$  como

$$L^2 = d^2 + d^2 - 2d^2 \cos \frac{2\pi}{3} \implies d^2 = \frac{L^2}{3}$$



# CAPÍTULO 1. DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE CARGAS

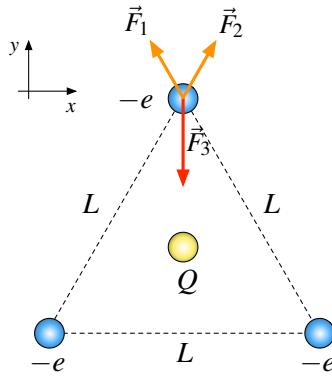


Figura 1.2: DCL Sobre la Carga Superior

por lo tanto la fuerza total vale

$$\vec{F}_T = \left( \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 L^2} \sin \frac{\pi}{3} - \frac{3eQ}{4\pi\epsilon_0 L^2} \right) \hat{y}$$

Dado que se desea el sistema en equilibrio se impone  $\vec{F}_T = 0$ , obteniéndose que

$$\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 L^2} \sin \frac{\pi}{3} - \frac{3eQ}{4\pi\epsilon_0 L^2} = 0 \implies Q = \frac{e\sqrt{3}}{3} = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

## Solución 1.8 P ✓

- a) Colocando la carga  $q_1$  en el origen se obtiene  $\vec{r}_1 = 0$ . Luego llamando  $q_1 = q$  y recordando que  $\vec{F} = q_2 \vec{E}$ , se puede obtener que

$$\vec{F} = \frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1 - \sqrt{\alpha |\vec{r}_2|})}{|\vec{r}_2|^3} \vec{r}_2 \implies \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1 - \sqrt{\alpha |\vec{r}_2|})}{|\vec{r}_2|^3} \vec{r}_2$$

Como la dirección de la fuerza y el campo es radial podemos decir que  $\vec{r}_2 = r\hat{r}$ . Finalmente

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1 - \sqrt{\alpha r})}{r^2} \hat{r}$$

- b) Basta tomar una trayectoria cerrada  $\Gamma$ , por ejemplo, una circunferencia de radio  $R$  alrededor de la carga. En ese caso se tiene que la curva queda parametrizada como:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} |\vec{E}| \hat{r} \cdot R d\theta \hat{\theta} = 0$$

Para el caso de la ley de Coulomb se tiene que el campo es siempre conservativo, es decir  $\nabla \times \vec{E} = 0$ , por lo cual  $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  para cualquier camino cerrado  $\Gamma$ . Se concluye que la ley de Coulomb y la ley encontrada experimentalmente entregan el mismo resultado.



# CAPÍTULO 1. DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE CARGAS

- c) Para este caso hay que calcular una integral de flujo. Por simplicidad se elige una esfera de radio  $R$  centrada en el origen. Luego el flujo sobre su superficie es

$$\oint_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1 - \sqrt{\alpha R})}{R^2} \hat{r} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{r} = \frac{q}{\epsilon_0} (1 - \sqrt{\alpha R})$$

Para el caso de la ley de Coulomb, se sabe que esa integral es conocida ya que coincide con la Ley de Gauss, es decir

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Para la nueva ley se tiene que difiere en un factor  $(1 - \sqrt{\alpha R})$ , además el flujo no es constante como en la Ley de Gauss y depende de la superficie esférica que se tome.

## Solución 1.9

- a) Dado que las gotas tienen forma esférica caen con un potencial inicial  $V_0$  con respecto al infinito. Suponiendo que caen con una carga  $Q$ , es conocido que el campo eléctrico que produce la gota para puntos fuera de ella es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Lo anterior implica potencial de la esfera es

$$V(a) = \int_a^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = V_0 \implies Q = 4\pi\epsilon_0 V_0 a$$

- b) Sea  $Q_T$  la carga del recipiente esférico una vez que se llena. Suponiendo que la carga se distribuye de forma uniforme en el recipiente, la densidad de carga del agua total que se acumule en el recipiente esférico debe ser igual a la de cada gota, es decir

$$\frac{\text{Carga de una gota}}{\text{Volumen de una gota}} = \frac{\text{Carga total en el recipiente}}{\text{Volumen del recipiente esférico}}$$

De lo anterior se deduce que

$$\frac{Q_T}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \implies Q_T = \frac{R^3}{a^3} Q_g = \frac{R^3}{a^2} \cdot 4\pi\epsilon_0 V_0$$

Luego, usando el resultado de la primera parte, el potencial está dado por

$$V(R) = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{R^2}{a^2} V_0$$



# CAPÍTULO 1. DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE CARGAS

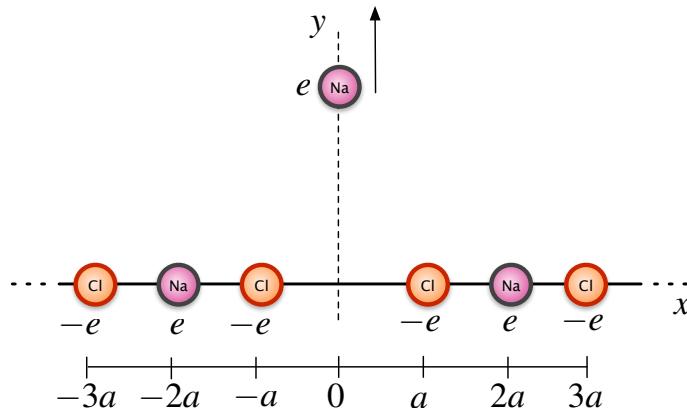


Figura 1.3: Cadena de NaCl

## Solución 1.10 P ✓

Para resolver este problema es útil definirse un sistema de referencia conveniente.

La energía necesaria para mover el ion positivo y llevarlo a un punto muy lejano con respecto a la distancia  $a$  es el equivalente al trabajo necesario para mover la carga desde el origen hacia el infinito (ver Figura 1.3). Dado lo anterior, el valor buscado es

$$W = - \int_0^\infty e \vec{E} \cdot d\vec{l} = -e \int_0^\infty (-\nabla V) \cdot d\vec{l} = e(V(\infty) - V(0)) = -eV(0)$$

El problema se reduce a encontrar el potencial en el origen, para ello se usa la superposición de los potenciales de cada carga puntual  $e$  y  $-e$  de la cadena infinita. Como las cargas están ubicadas en forma simétrica al eje  $y$ , el potencial en el origen es dos veces el potencial que genera un solo lado de la cadena, por lo tanto

$$V(0) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e(-1)^i}{ai} = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i}$$

Finalmente, recordando que  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$  se tiene que

$$U = -eV(0) = -e \cdot -\frac{e}{2\pi\epsilon_0 a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a} \ln(2)$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 1.2

- Determine las fuerzas que se aplican a ambas cargas, para ello trace la línea imaginaria que une ambas cargas y determine su longitud mediante el teorema del coseno. Note que se forma un triángulo isósceles debido a que la distancias a las cargas es  $R$  desde el centro de la circunferencia. La dificultad de este problema se radica en poder relacionar en forma correcta los ángulos.
- Una vez determinada la relación entre las masas, analice que sucede cuando  $m_1 = m_2$  y cuando  $\theta_1 = \theta_2$ . ¿Influye el valor de las cargas?.
- Para la última parte, determine el valor de  $q(\theta)$  y luego note que  $\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ . Pueden ser útiles las aproximaciones  $\sin \theta \approx \theta$  y  $\tan \theta \approx \theta$  para  $\theta \ll 1$ .

### Indicación 1.4

- Analice las fuerzas aplicadas sobre la carga considerando  $\theta = 30^\circ$ . Dado que el sistema se encuentra en equilibrio estático la fuerzas aplicadas deben sumar cero.
- Cuando el sistema comienza a rotar la aceleración ya no es nula como en la parte anterior. Modifique las ecuaciones de movimiento imponiendo lo anterior y considerando que el nuevo ángulo es  $\theta = 60^\circ$ . Se recomienda trabajar en coordenadas cilíndricas.

### Indicación 1.5

- Para encontrar el campo eléctrico en se recomienda determinar primero el campo que provocan las cuatro cargas en el plano  $xy$  en  $P$ . Luego, determine el campo eléctrico que genera una de las cuatro cargas en  $z = a$ . Finalmente, por simetría, el resultado debe apuntar sólo en la dirección de  $\hat{z}$  con lo cual puede concluir el resultado.
- Basta con determinar el potencial en  $P$ . Recuerde que el trabajo está dado por  $W = QV(P)$ .

### Indicación 1.6

- Superponga los campos eléctricos en el centro de hexágono y sume los vectores.



## CAPÍTULO 1. DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE CARGAS

- Generalizando el resultado anterior, intente encontrar alguna relación entre los  $2n$  campos eléctricos superpuestos en el origen y luego sume. La sumatoria puede ser reducida algebraicamente.

**Indicación 1.7**  

- El lugar geométrico debe ser una circunferencia. Suponga un radio  $r$  para esa circunferencia y luego derive e iguale a cero para encontrar el máximo.



## V. Respuestas

Problema	Respuestas
<b>P</b> 1.1	<p>a) <math>\tan \theta_0 = \frac{qE \sin \alpha}{qE \cos \alpha + mg}</math></p> <p>b) <math>\omega^2 = \frac{\sqrt{(qE \cos \alpha + mg)^2 + (qE \sin \alpha)^2}}{m\ell}</math></p>
<b>P</b> 1.2	<p>a) <math>\frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} = \frac{16\pi\varepsilon_0 L^2 g}{q_1 q_2} \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)(1 - \cos(\theta_1 + \theta_2))</math></p> <p>c) <math> v(\theta)  = \frac{\alpha}{3\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\theta}}</math></p>
<b>P</b> 1.3	$Q = \frac{e}{\sqrt{3}}$
<b>P</b> 1.4	<p>a) <math>q = \ell \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3} \pi \varepsilon_0 m g}</math></p> <p>b) <math>\omega = \frac{4g}{3\ell}</math></p>
<b>P</b> 1.5	<p>a) <math>\vec{E}_{total} = -\frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^2} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \hat{z}</math></p> <p>b) <math>W = \frac{Qq\sqrt{2}}{3\pi\varepsilon_0 a} (\sqrt{3} + 1)</math></p>
<b>P</b> 1.6	<p>a) <math>\vec{E}(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} (2\sqrt{3}\hat{x} - 2\hat{y}), V(0) = 0</math></p> <p>b) <math>\vec{E} = \frac{q(1-\cos\frac{\pi}{n})}{\pi\varepsilon_0 a^2} \sum_{k=0}^n \left( \sin \frac{k\pi}{n} \hat{x} + \cos \frac{k\pi}{n} \hat{y} \right)</math></p>
<b>P</b> 1.7	$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$ es una circunferencia de radio $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$



# CAPÍTULO 1. DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE CARGAS

Problema	Respuestas
<b>1.8</b>	<p>a) <math>\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(1-\sqrt{\alpha r})}{r^2} \hat{r}</math></p> <p>b) Si <math>\Gamma</math> es una circunferencia de radio <math>R</math> sobre el plano <math>xy</math> entonces <math>\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0</math> para ambos campos eléctricos (experimental y coulombiano).</p> <p>c) Para una esfera de <math>R</math> centrada en la carga, <math>\iint_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} (1 - \sqrt{\alpha R})</math>. Para el caso de un campo tradicional por Coulomb: <math>\iint_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}</math>.</p>
<b>1.9</b>	<p>a) <math>Q = 4\pi\varepsilon_0 V_0 a</math></p> <p>b) <math>V = \frac{R^2}{a^2} V_0</math></p>
<b>1.10</b>	<p><math>U = \frac{e^2 \ln(2)}{2\pi\varepsilon_0 a}</math></p>



# Distribuciones Continuas de Cargas

## I. Resumen Teórico

---

### Campo Eléctrico por Continuos de Carga

Para distribuciones continuas de carga, el campo eléctrico puede ser determinado como

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq(\vec{r}') \quad (2.1)$$

donde  $\vec{r}$  es la posición dónde se desea conocer el campo eléctrico,  $\vec{r}'$  es la parametrización del continuo de carga y  $dq(\vec{r}')$  es el elemento diferencial de línea/superficie/volumen, donde

$$dq(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}')dl = \sigma(\vec{r}')dS = \rho(\vec{r}')dV \quad (2.2)$$

Usando la expresión anterior, el campo eléctrico puede ser determinado como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Línea}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \lambda(\vec{r}')dl \quad (2.3)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{Superficie}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma(\vec{r}')dS \quad (2.4)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Volumen}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}')dV \quad (2.5)$$


---

### Potencial Eléctrico por Continuos de Carga

Para distribuciones continuas de carga, el potencial eléctrico puede ser determinado como

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.6)$$

## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

Análogamente al caso del campo eléctrico, el potencial puede ser determinado como

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Línea}} \frac{\lambda(\vec{r}')dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.7)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{Superficie}} \frac{\sigma(\vec{r}')dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.8)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Volumen}} \frac{\rho(\vec{r}')dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.9)$$

La expresión anterior considera el infinito como referencia, por lo que no debe usarse cuando exista carga en el infinito.

---

### Recomendaciones

- A pesar que siempre es posible determinar el campo eléctrico mediante la Ecuación 2.1, no siempre será fácil hacerlo. De hecho, debido a la complejidad de algunas parametrizaciones, las integrales pueden tomar una dificultad muy alta haciéndolas imposibles de resolver.



## II. Problemas Propuestos

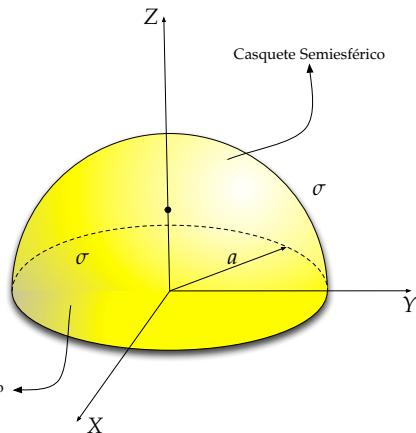
### Problema 2.1



Un disco de radio  $a$  completa un casquete semiesférico de radio  $a$ . Ambas superficies tienen densidad de carga uniforme  $\sigma$ . Calcule el campo eléctrico en un punto  $\frac{a}{2}$  sobre el eje  $Z$ .

Hint:

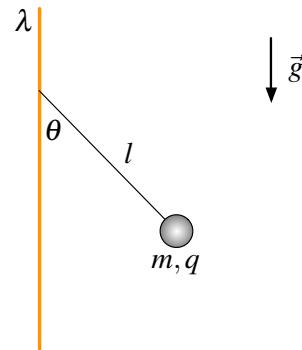
$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{r - z \cos(x)}{z^2 \sqrt{r^2 - 2rz \cos x + z^2}} \right] = \frac{(z - r \cos x) \sin x}{(r^2 \sin^2 x + (z - r \cos x)^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ Disco}$$



### Problema 2.2



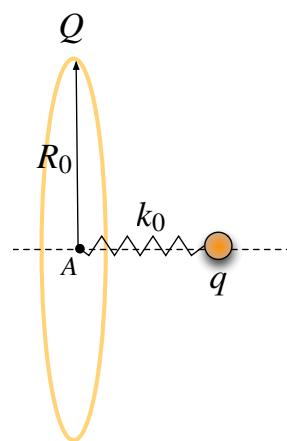
Considere una barra infinita de densidad de carga lineal  $\lambda$ . Sobre esta barra se cuelga un péndulo ideal de largo  $l$  y una masa puntual  $m$  y carga  $q$ , bajo la influencia del campo gravitatorio como se ilustra en la figura. Encuentre el ángulo de equilibrio del péndulo y determine cuál es ángulo límite cuando el valor de  $q$  crece infinitamente.



### Problema 2.3



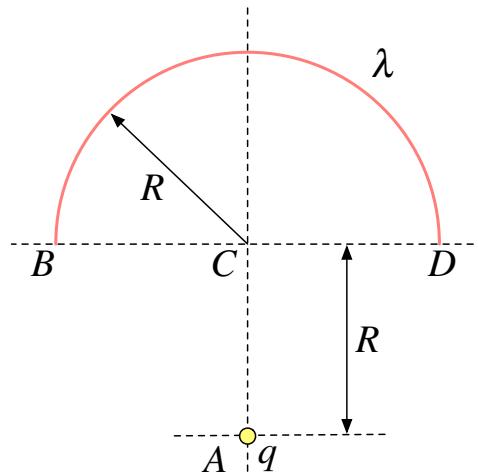
Un anillo de radio  $R_0$  tiene una carga  $Q$  positiva, la cual está distribuida de manera uniforme sobre el anillo, como se ilustra en la figura. Considere una carga puntual de carga negativa  $q$  ( $q < 0$ ) y masa  $m$ , la cual es depositada en reposo sobre el eje central del anillo cerca del centro representado por el punto  $A$ , además la carga está soldada a un resorte ideal de constante elástica  $k_0$  y largo natural cero con extremo fijo en el punto  $A$ . Calcule la frecuencia de oscilación particular puntual. Indicación: Considere que la partícula se mueve sobre el eje central del anillo.



**Problema 2.4**   

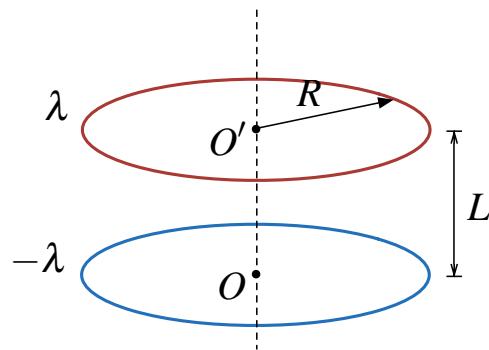
Una densidad de carga lineal  $\lambda$  está repartida de forma homogénea a lo largo de un semicírculo  $BD$  centrada en  $C$  y de radio  $R$ . Una carga puntual  $q$  está ubicada en punto  $A$  como se indica en la Figura. ( $\overline{CA} = R$ ).

- Calcule el potencial eléctrico en el punto  $C$ ,  $V(C)$ .
- Por argumentos de simetría, determine la dirección del campo eléctrico  $\vec{E}(C)$ . Calcule  $\vec{E}(C)$ .
- Determine la relación entre  $\lambda$  y  $q$  tal que  $\vec{E}(C) = 0$


**Problema 2.5**   

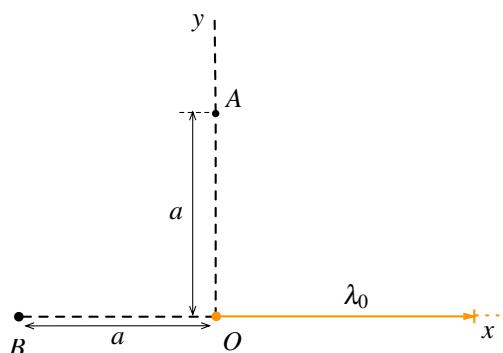
Se tienen dos anillos coaxiales del mismo radio  $a$ , contenidos en planos paralelos y separados entre sí una distancia  $L$ . Uno de los anillos tiene densidad de carga uniforme  $+\lambda$  y el otro  $-\lambda$ .

- Calcule el campo eléctrico en el eje común de los anillos, o sea en el eje  $\overline{O'O}$  en la figura.
- Calcule la diferencia de potencial entre los centros  $O'$  y  $O$  de los anillos.


**Problema 2.6**   

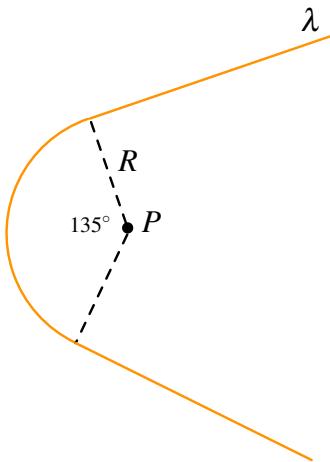
Un alambre semi-infinito cargado yace sobre el semi-eje positivo  $x$ . El alambre posee una densidad lineal homogénea  $\lambda_0$ .

- Determine el valor del campo eléctrico en el punto  $A$  de la figura el cual está ubicado sobre el eje  $y$  a una distancia  $a$  del origen.
- Determine el valor del campo eléctrico en el punto  $B$  de la figura el cual está ubicado sobre el eje  $x$  a una distancia  $a$  del origen.



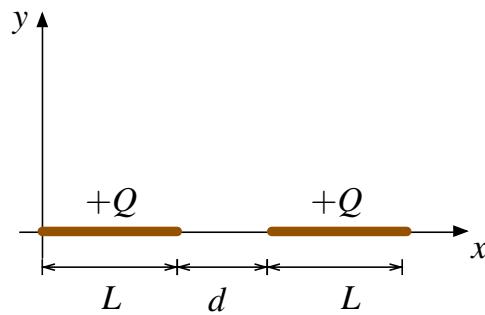
**Problema 2.7**

Considere un alambre muy delgado como el de la figura, éste está compuesto por dos rectas infinitas y una arco de círculo de  $135^\circ$ . El alambre tiene una densidad lineal de carga  $\lambda$  constante. Encuentre el campo producido en el punto  $P$ .

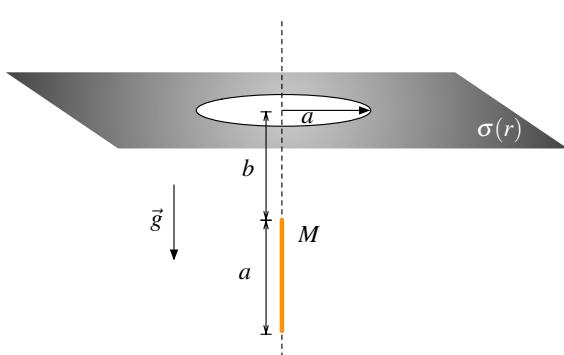
**Problema 2.8**

Dos barras delgadas e iguales de longitud  $L$  y carga total  $Q$  distribuida uniformemente, están situadas sobre el eje  $x$ , separadas una distancia  $d$  como se indica en la figura.

- Calcule el campo eléctrico producido por la carga de la izquierda para un punto situado sobre el eje  $x$ , es decir  $\vec{E}(x)$ .
- Calcule la fuerza que ejerce la carga de la izquierda sobre la carga de la derecha.
- Pruebe que si  $d \gg L$  la fuerza entre las barras equivale a la de dos cargas puntuales de carga  $Q$ . Puede ser útil la aproximación  $\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2}$  si  $|x| \ll 1$ .

**Problema 2.9**

Considere un plano infinito el cual tiene un forado circular de radio  $a$ . Sobre el plano existe una densidad superficial de carga dada por  $\sigma(r) = \sigma_0 \frac{a}{r}$  donde  $r$  es la distancia desde el centro del agujero. A distancia  $b$  sobre el eje del forado existe una barra de largo  $a$ , masa  $M$  y carga desconocida, la cual reposa inmóvil en esa posición a pesar de la gravedad. Suponiendo que la densidad de carga es uniforme, determine la carga que posee la barra.



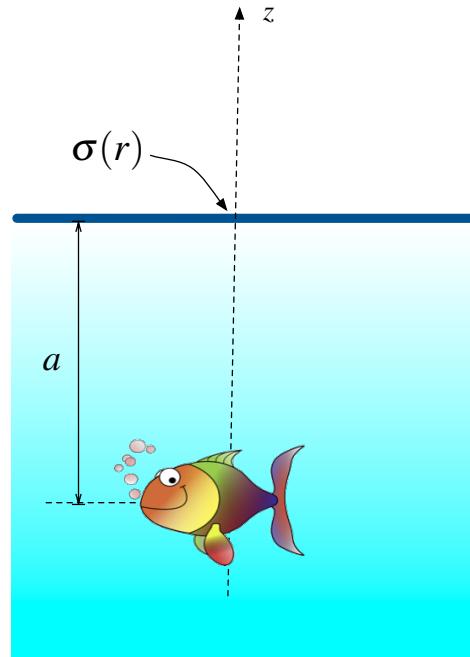
**Problema 2.10**   

La contaminación por compuestos químicos de un lago de forma circular ha dejado su densidad superficial de carga que, expresada en coordenadas polares se puede escribir como

$$\sigma(r) = -\frac{\sigma_0 a^3}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donde “ $a$ ” y  $\sigma_0$  son constantes conocidas. Aquí el origen de coordenadas es el centro del lago. Se pide:

- Determine el campo eléctrico que afectará la vida en el lago. Suponga que los peces sólo viven en las cercanías del centro del lago (eje  $z$ ) y a profundidades mucho menores que la extensión del lago, por lo cual éste puede considerarse infinito.
- Suponga que debido a esta contaminación, un pez adquiere una carga  $Q$ . Determine el trabajo electrostático que debe efectuar el pez para llegar al centro del lago si se encontraba nadando a una distancia “ $a$ ” profundidad sobre el eje  $z$  de la Figura.

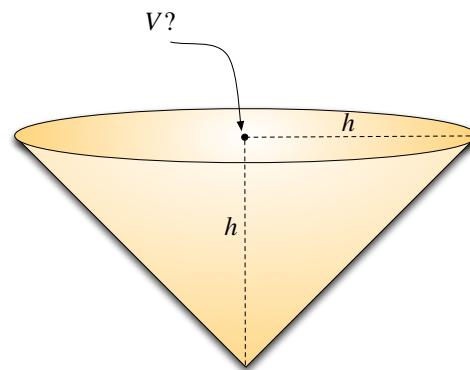


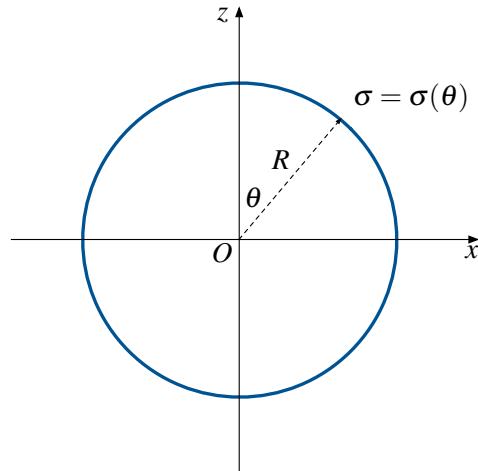
Hint:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{-(a^2 + 2r^2 + z^2)}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 + r^2)(z^2 + r^2)}} \right] = \frac{r}{((a^2 + r^2)(z^2 + r^2))^{\frac{3}{2}}}$$

**Problema 2.11**   

Considere un cono de altura  $h$  y radio basal  $h$ . La superficie (manto) del cono está cargada uniformemente con una densidad  $\sigma_0$ . Calcule el potencial en el centro de la base del cono.

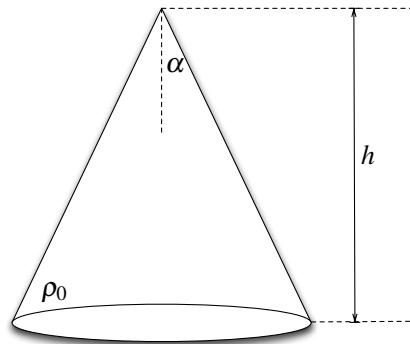


**Problema 2.12**

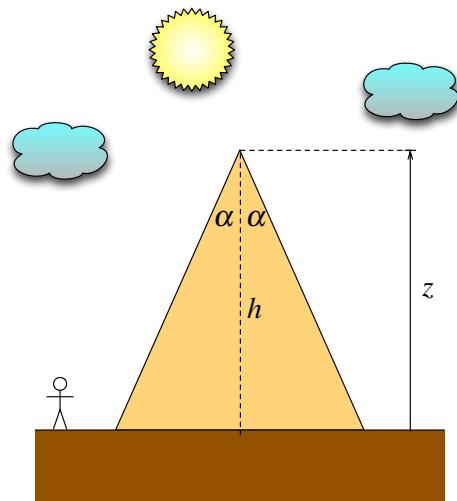
Calcular el campo electrostático que genera un casquete esférico de centro  $O$  y radio  $R$  que porta una densidad superficial de carga  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  (en coordenadas esféricas) en su mismo centro.

**Problema 2.13**

Calcule el campo eléctrico creado por un cono macizo de altura  $h$  y semi ángulo  $\alpha$ , uniformemente cargado con una densidad volumétrica de carga  $\rho_0$  en su vértice.

**Problema 2.14**

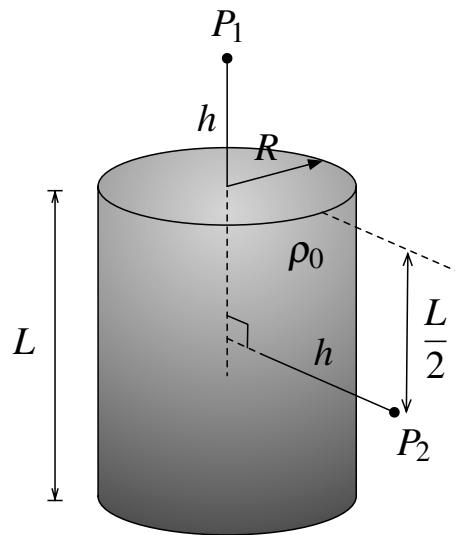
En una primera aproximación, una montaña puede ser modelada como un cono de altura  $h$  y semi ángulo  $\alpha$  de masa total  $M$  distribuida uniformemente. Geofísicos han determinado que la gravedad en su cima tiene un valor  $\vec{g}_1 = -g_1 \hat{z}$  la cual está a una distancia  $h$  sobre el nivel suelo. Los mismos científicos saben que si la montaña no existiese el campo gravitacional terrestre en el mismo punto sería  $\vec{g}_0 = -g_0 \hat{z}$ . Determine  $\Delta \vec{g} = \vec{g}_1 - \vec{g}_0$ . (Hint: Puede ser útil el Problema 2.13)



**Problema 2.15**   

Considere un cilindro macizo de radio  $R$  y largo  $L$  como se muestra en la Figura. El cilindro posee una densidad de carga volumétrica  $\rho_0$ . Determine

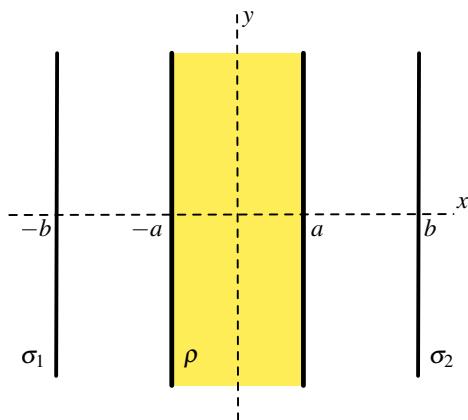
- El módulo del campo eléctrico en un punto  $P_1$  ubicado una distancia  $h$  sobre su base superior y sobre el eje del cilindro.
- El módulo del campo eléctrico en un punto  $P_2$  ubicado una distancia  $h > R$  del eje cilindro, justo a la mitad de la altura del cilindro.

**Problema 2.16**   

Un bloque infinito posee una densidad de carga uniforme  $\rho$  que ha sido localizado entre  $x = -a$  y  $x = a$ . Este bloque es infinito en la dirección  $y$  y  $z$  (saliente de página). Dos planos infinitos son localizados en  $x = -b$  y  $x = b$ , los cuales poseen una densidad de carga  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , respectivamente. Al medir el campo eléctrico se observa que:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & x < -b \\ +E_0\hat{x} & -b < x < -a \\ -E_0\hat{x} & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

- Calcule la densidad de carga  $\rho$  del bloque infinito.
- Calcule las densidades de carga superficiales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  de los planos a la izquierda y derecha del bloque respectivamente.



### III. Soluciones

#### Solución 2.1

Todos los problemas donde se pida determinar el campo eléctrico se pueden abordar mediante la definición. Sin embargo, no en todos los problemas siempre será fácil usar esta técnica (ya que se pueden llegar a integrales bastante complejas). En general en todos los problemas donde se pida determinar el campo eléctrico en un punto o en un eje (y no en todo el espacio) se pueden abordar por definición.

Dado que este problema cumple con esa característica, se debe tener claro como parametrizar la superficie para poder usar la definición. Sin embargo, no es claro que haya una fórmula matemática con que se pueda representar de una sola vez a la unión casquete-disco. La parametrización anterior se ve solucionada usando el principio de superposición; primero se calcula el campo eléctrico generado por el disco y luego el del casquete semiesférico, para luego sumar ambos resultados y obtener el campo final en el punto.

- Campo generado por el disco.

Usando definición:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot dq$$

Se debe tener claro que:

- $\vec{r}$  : Es el vector que señala dónde se quiere conocer el campo eléctrico (puede ser un punto en específico, un eje, una superficie, etc.).
- $\vec{r}'$  : Es el vector que señala dónde está lo que genera el campo eléctrico. Este vector es variable **y no representa un punto por sí solo en distribuciones continuas de carga** ya que parametriza una línea/superficie/volumen.
- $dq$  : Es el diferencial de carga, y puede valer  $dq = \lambda dl = \sigma dS = \rho dV$ , eventualmente las densidades de carga  $\lambda$ ,  $\sigma$  y  $\rho$  no necesariamente son constantes y podrían depender del vector  $\vec{r}'$  (ie. depende de alguna variable de integración).
- $\Omega$  : Es el espacio de integración de la línea/área/volumen de lo que está generando el campo eléctrico. Establece los límites de todas las integrales.

Luego, aplicado lo anterior al disco de radio  $a$  se tiene que (en coordenadas cilíndricas):

$$\vec{r} = \frac{a}{2}\hat{z}$$

$$\vec{r}' = r\hat{r}$$



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

$$dq = \sigma dS$$

Donde los límites de integración serán  $r \in [0, a]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  (¡qué es la parametrización del disco!).

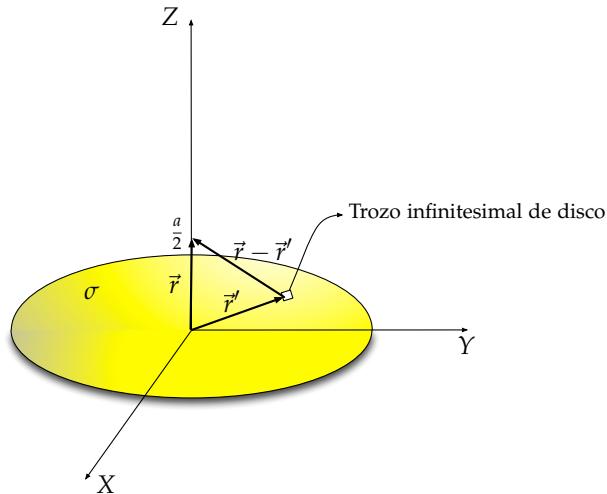


Figura 2.1: Campo Eléctrico generado por un disco.

Calculando la integral:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma dS \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - r\hat{r}}{\left|\frac{a}{2}\hat{z} - r\hat{r}\right|^3} r dr d\theta \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - r\hat{r}}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - r(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y})}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta \end{aligned}$$

En este caso se separará por cada componente del vector  $\vec{E}$ , de modo que

$$\begin{aligned} |\vec{E}_x| &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{-r \cos\theta}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta \\ &= -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta}_{=0} \cdot \int_0^a \frac{r^2}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} dr \end{aligned}$$

Dado que la integral del coseno en un período es nula, se tiene que el campo eléctrico no tiene componente según  $x$ . Análogamente, sucede lo mismo al momento de calcular  $|\vec{E}_y|$ ,



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

por lo que tampoco existe una coordenada según  $y$ . Luego

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\frac{a}{2}\hat{z}}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta \\ &= \frac{\sigma a \hat{z}}{8\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a \frac{r}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} dr \\ &= \frac{\sigma a \hat{z}}{4\epsilon_0} \cdot \int_0^a \frac{r}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} dr\end{aligned}$$

Nótese que  $\frac{d}{dr} \left[ -\frac{1}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + r^2}} \right] = \frac{r}{((\frac{a}{2})^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$  por lo tanto

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma a \hat{z}}{4\epsilon_0} \cdot \left. -\frac{1}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + r^2}} \right|_{r=0}^{r=a} \\ &= \frac{\sigma a \hat{z}}{4\epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^2}} + \frac{1}{\frac{a}{2}} \right] \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \hat{z}\end{aligned}$$

- Campo generado por el semicasquete

Al igual que el caso anterior debe procederse a calcular los vectores  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$  y  $dq$ , en este caso se tiene que (en coordenadas esféricas):

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \frac{a}{2}\hat{z} \\ \vec{r}' &= a\hat{r} \\ dq &= \sigma dS = \sigma a^2 \sin \theta d\theta d\varphi\end{aligned}$$

Donde los límites de integración serán  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma dS \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - rr\hat{r}}{\left|\frac{a}{2}\hat{z} - a\hat{r}\right|^3} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - a(\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})}{\left|\frac{a}{2}\hat{z} - a(\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})\right|^3} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - a(\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})}{(a^2 \sin^2 \theta + (\frac{a}{2} - a \cos \theta)^2)^{\frac{3}{2}}} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi\end{aligned}$$



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

En este caso vuelve a ocurrir lo mismo que pasó cuando se calculó el campo que genera un disco, ya que se anulan las componentes en  $x$  e  $y$  debido a que aparecen un  $\cos \varphi$  y  $\sin \varphi$  integrados en un período.

En general, uno también puede argumentar por simetría que algunas componentes del campo eléctrico son nulas, no siempre es necesario el cálculo (siempre se llegará a funciones sinusoidales integradas en un período).

Por lo tanto el valor del campo generado por el semicasquete es:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{a}{2} - a \cos \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + (\frac{a}{2} - a \cos \theta)^2)^{\frac{3}{2}}} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{\sigma a^2 \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{a}{2} - a \cos \theta) \sin \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + (\frac{a}{2} - a \cos \theta)^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta \\ &= \frac{\sigma a^2 \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \left. \frac{a - \frac{a}{2} \cos \theta}{(\frac{a}{2})^2 \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \cos \theta + a^2}} \right|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\sigma \hat{z}}{\epsilon_0} \cdot \left( \frac{a}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^2}} - \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2}} \right) \\ &= \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) \hat{z}\end{aligned}$$

Dado los resultados anteriores, se procede a sumarlos para encontrar el campo final en el punto

$$\vec{E}_{total} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \hat{z} + \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) \hat{z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{7}{\sqrt{5}} - 3 \right) \hat{z}$$

**Solución 2.2** 

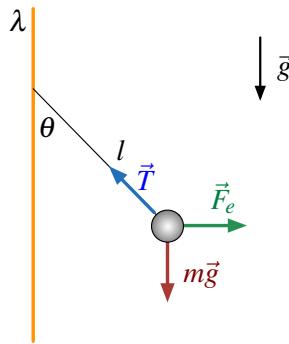
Para encontrar el ángulo de equilibrio, se debe considerar que la suma de fuerzas que actúan sobre la masa  $m$  deben anularse, por consiguiente se hace un DCL para deducir las ecuaciones de movimiento. Con lo anterior las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_e - T \sin \theta = 0 \\ m\ddot{y} &= T \cos \theta - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta}\end{aligned}$$

Como  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ , se calculará el campo  $\vec{E}$  a una distancia  $d = l \sin \theta$  producido por la barra infinita de densidad de carga lineal  $\lambda$ . Considerando que

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$




 Figura 2.2: DCL para masa  $m$ .

Donde  $\vec{r} = d\hat{x} = l \sin \theta \hat{x}$  correspondiente a la posición donde se quiere calcular el campo,  $\vec{r}' = z \hat{z}$  correspondiente a quien genera el campo, y  $dq = \lambda dz$  dónde  $z \in (-\infty, +\infty)$ . Además se considera que por la simetría del problema, el campo será el mismo independiente de la posición en  $\hat{z}$  de la masa, por lo que  $\vec{E}$  sólo tiene componente en  $\hat{x}$ . Con lo anterior la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l \sin \theta \hat{x}}{((l \sin \theta)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda dz \\ &= \frac{\lambda l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \hat{x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{((l \sin \theta)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Se hace el cambio de variable  $z = (l \sin \theta) \tan \phi$ , lo cual implica que  $dz = (l \sin \theta) \sec^2 \phi d\phi$ , y los límites de integración cambian de  $z \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow \phi \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ . Luego:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\lambda l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \hat{x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(l \sin \theta) \sec^2 \phi d\phi}{((l \sin \theta)^2 + (l \sin \theta)^2 \tan^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\lambda l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \hat{x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(l \sin \theta) \sec^2 \phi d\phi}{(l \sin \theta)^3 (1 + \tan^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 (l \sin \theta)} \hat{x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \phi d\phi}{\sec^3 \phi} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 (l \sin \theta)} \hat{x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 (l \sin \theta)} \hat{x} \sin \phi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (l \sin \theta)} \hat{x}\end{aligned}$$



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

Como ya se conoce el campo, luego  $\vec{F}_e = q \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(l \sin \theta)} \hat{x}$ . Dicho valor en las ecuaciones de movimiento y despejando  $T$ , se llega a:

$$m\ddot{x} = F_e - T \sin \theta = q \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(l \sin \theta)} - \frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = 0 \implies \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 l m g} = qK$$

Se usa la identidad trigonométrica  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ :

$$\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} = qK \implies \cos^2 \theta + qK \cos \theta - 1 = 0 \implies \cos \theta = \frac{-qK \pm \sqrt{(qK)^2 + 4}}{2}$$

Como se espera que  $\theta \in (0, \pi/2)$  (el péndulo no dará la vuelta completa),  $\cos \theta > 0$ , luego se escoge la solución positiva. Finalmente si  $q \rightarrow \infty$ , se cumple que  $\sqrt{(qK)^2 + 4} \approx qK$ , entonces

$$\cos \theta = \frac{-qK + qK}{2} = 0$$

El resultado anterior implica que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , esto es esperable ya que al ser una carga positiva se alejará lo más posible de quién genere el campo y eso de logra a la mayor distancia, es decir, con el ángulo encontrado.

### Solución 2.3

La fuerza sobre la carga  $q$  es  $\vec{F}_q = \vec{F}_e + \vec{F}_r$  donde  $F_e$  corresponde a la fuerza que el anillo ejerce sobre  $q$ , y  $F_r$ , la fuerza que ejerce el resorte.

La fuerza que ejerce el campo eléctrico que genera el anillo sobre la carga  $q$  está dada por

$$\vec{F}_e = q\vec{E}_A$$

Entonces el campo eléctrico que genera el anillo en su eje es:

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$

Donde  $\vec{r} = z\hat{z}$ ,  $\vec{r}' = R_0\hat{r}$  (en coordenadas cilíndricas) y  $dq = \lambda R_0 d\theta$  con  $\theta \in (0, 2\pi)$ . Además, dado que la carga total en el anillo es  $Q$  y se distribuye homogéneamente,  $\lambda$  se puede calcular como:

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi R_0}$$

con lo anterior:

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z} - R_0\hat{r}}{(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda R_0 d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z}}{(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda R_0 d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{R_0\hat{r}}{(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda R_0 d\theta \right)$$



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

Nótese que por la simetría del anillo la segunda integral se anulará. También se puede justificar notando que  $\hat{r} = \sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}$ , y como la integral de  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  se anulan en un intervalo entre  $(0, 2\pi)$ , el segundo sumando se anula. Luego:

$$\vec{E}_A = \frac{\lambda R_0 z \hat{z}}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda R_0 z \hat{z}}{2\epsilon_0(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Finalmente, sustituyendo  $\lambda$ , se concluye el valor de  $\vec{F}_e$ :

$$\vec{F}_e = q \vec{E}_A = q \frac{Q}{2\pi R_0} \frac{R_0 z \hat{z}}{2\epsilon_0(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} \implies \vec{F}_e = \frac{q Q z \hat{z}}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nótese que como  $q < 0$  esta fuerza apunta en la dirección  $-\hat{z}$ .

Por otro lado, la fuerza elástica para una distancia  $z$  (notar que el resorte se mueve sólo en el eje), es la que genera el resorte de constante  $k_0$ , la cual está dada por

$$\vec{F}_r = -k_0 z \hat{z}$$

Dado los cálculos anteriores, la fuerza total sobre  $q$  es:

$$\vec{F}_q = \left( \frac{q Q}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} - k_0 \right) z \hat{z}$$

Por otra parte, la fuerza en el eje  $\hat{z}$  esta dada por:

$$\vec{F}_q = m \ddot{z} \hat{z}$$

Si se desea encontrar la frecuencia para pequeñas oscilaciones, se considera que para  $z \ll 1$  se tiene que  $z^2 \approx 0$ . Finalmente

$$m \ddot{z} = \left( \frac{q Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} - k_0 \right) z \implies \ddot{z} + \frac{1}{m} \left( -\frac{q Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} + k_0 \right) z = 0$$

y como la ecuación de la frecuencia en pequeñas oscilaciones cumple  $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left( -\frac{q Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} + k_0 \right)}$$

### Solución 2.4 P ✓

- a) Es necesario calcular el potencial generado por la semicircunferencia y el creado por la carga puntual. Para el caso de la semicircunferencia se puede calcular usando la expresión

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

en este caso  $\vec{r} = 0$  y  $\vec{r}' = R\hat{r}$  con  $\theta \in [0, \pi]$  y  $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$ . Luego

$$V_{alambre}(0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{R d\theta}{| -R\hat{r}|} = \frac{\lambda}{4\epsilon_0}$$

Adicionalmente es sabido que el potencial que genera una carga puntual esta dado por

$$V_{carga}(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Por lo tanto el potencial pedido es la superposición de los resultados anteriores

$$V(C) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\lambda}{4\epsilon_0}$$

- b) Por simetría las componentes en horizontales se anulan en el punto  $C$ , por ende en ese punto sólo existe la superposición de componentes verticales. El campo generado por el alambre vale

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$

nuevamente se tiene que  $\vec{r} = 0$  y  $\vec{r}' = R\hat{r}$  con  $\theta \in [0, \pi]$  y  $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$ , por lo que

$$\vec{E}_{alambre}(0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(0 - R\hat{r}) R d\theta}{| -R\hat{r}|^3} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi [\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}] d\theta = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{y}$$

al igual que la parte anterior el campo eléctrico generado por la carga está dado por

$$\vec{E}_{carga}(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{y}$$

Finalmente, el campo total es

$$\vec{E}(C) = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \right) \hat{y}$$

- c) Imponiendo  $\vec{E}(C) = 0$ , se tiene que

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \implies q = 2R\lambda$$

### Solución 2.5

- a) Inicialmente determinaremos el potencial que genera un anillo por si sólo y luego se usará el hecho que  $\vec{E} = -\nabla V$  para determinar el campo eléctrico. De este modo el potencial de



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

un sólo anillo de radio  $a$  y densidad homogénea  $\lambda$  y con su centro en el origen provoca un potencial dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

donde  $\vec{r} = z\hat{z}$ ,  $\vec{r}' = a\hat{r}$  y  $dq = \lambda ad\theta$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Por ende

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda ad\theta}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}}$$

Extrapolando este resultado al problema se tiene que los anillos están a distancia  $L$ , de modo que suponiendo que el origen está en el punto de medio de su separación, el potencial en el eje es

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0 \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + a^2}} - \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0 \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 + a^2}} \\ &= \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 + a^2}} \right) \end{aligned}$$

Dado que

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

Por lo que finalmente

$$\vec{E} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \left( \frac{z - \frac{L}{2}}{\left(\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z + \frac{L}{2}}{\left(\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{z}$$

b) Considerando lo obtenido en a)

$$V(O') = V\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + a^2}} \right)$$

$$V(O) = V\left(z = -\frac{L}{2}\right) = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{L^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \right)$$

Por lo que la diferencia vale:

$$V(O) - V(O') = \frac{\lambda a}{\varepsilon_0} \left( -\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{L^2 + a^2}} \right)$$



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

### Solución 2.6

a) Recordando, que el campo eléctrico producido por una distribución de carga  $dq(\vec{r}')$  vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq(\vec{r}')$$

Luego se tiene que:  $\vec{r} = a\hat{y}$ ;  $\vec{r}' = x\hat{x}$ ;  $dq = \lambda dx$ , por lo tanto:

$$\vec{E}(a\hat{y}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \hat{y} \int_0^\infty \frac{adx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \hat{x} \int_0^\infty \frac{xdx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Realizando el cambio de variable:

$$x = a \tan \theta \implies dx = a \sec^2 \theta d\theta$$

Resulta:

$$\begin{aligned} \vec{E}(a\hat{y}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \hat{y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sec^2 \theta d\theta}{a^3 \sec^3 \theta} - \hat{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \tan \theta \sec^2 \theta d\theta}{a^3 \sec^3 \theta} \right) \\ \vec{E}(a\hat{y}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \left( \hat{y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta - \hat{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \right) \end{aligned}$$

Obteniendo, finalmente que:

$$\vec{E}(a\hat{y}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\hat{y} - \hat{x})$$

b) Nuevamente usando la definición se tiene que  $\vec{r} = -a\hat{x}$ ;  $\vec{r}' = x\hat{x}$ ;  $dq = \lambda dx$

$$\vec{E}(-a\hat{x}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \hat{x} \int_0^\infty \frac{-a - x}{|-a - x|^3} dx \right)$$

Manejando algebraicamente la expresión se obtiene que

$$\vec{E}(-a\hat{x}) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dx}{(x + a)^2} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{x} \cdot -\frac{1}{x + a} \Big|_0^\infty = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \hat{x}$$

### Solución 2.7

Separando el problema en dos partes:



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

- i) Campo producido por las rectas semi-infinitas: Sean  $(\hat{x}'; \hat{y}')$  el sistema de referencia para la recta superior en la figura, y  $(\hat{x}''; \hat{y}'')$  para la recta inferior, orientados de manera que coincidan con el sistema de referencia de la parte a) entonces:

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}(-\hat{x}' + \hat{y}') \quad \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}(-\hat{x}'' + \hat{y}'')$$

Ahora descomponiendo en los ejes  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  ( $\hat{x}$  horizontal hacia la derecha,  $\hat{y}$  vertical hacia arriba):

$$\begin{aligned}\hat{x}' &= \cos \frac{\pi}{8} \hat{x} + \sin \frac{\pi}{8} \hat{y} \\ \hat{y}' &= \cos \frac{3\pi}{8} \hat{x} - \sin \frac{3\pi}{8} \hat{y} \\ \hat{x}'' &= \cos \frac{\pi}{8} \hat{x} - \sin \frac{\pi}{8} \hat{y} \\ \hat{y}'' &= \cos \frac{3\pi}{8} \hat{x} + \sin \frac{3\pi}{8} \hat{y}\end{aligned}$$

Como  $\cos \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8}$ , y superponiendo los campos, entonces:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{x} \left( -\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{x} \left( -\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{x} \left( \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{8} \right)$$

Otra forma mucho más rápida de resolver esta parte es la siguiente:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Entonces, debido a la simetría con respecto al eje  $x$ , las componentes en  $\hat{y}$  de los campos producidos por las dos rectas se anulan, y se obtiene que:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -2|\vec{E}_1| \cos \frac{3\pi}{8} = -\frac{\lambda \hat{x}}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R} \cos \frac{3\pi}{8}$$

- ii) Campo producido por el sector circular: Calculando por definición, de manera similar a la parte anterior:

$$\vec{E}_3(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq(\vec{r}')$$

Con:  $\vec{r} = 0$ ;  $\vec{r}' = R\hat{r}$ ;  $dq = \lambda R d\theta$ . Entonces:

$$\vec{E}_3(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{11\pi}{8}} \hat{r} d\theta$$

Descomponiendo  $\hat{r}$  en los ejes cartesianos, y por la paridad e imparidad del coseno y seno, la integral en  $\hat{y}$  se anula (también se puede comprobar esto último debido a la simetría con respecto a  $\hat{x}$ ) resulta:

$$\vec{E}_3(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{11\pi}{8}} \hat{x} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda \hat{x}}{2\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\frac{3\pi}{8}} \cos \theta d\theta$$



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

Luego:

$$\vec{E}_3(0) = \frac{\lambda \hat{x}}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\lambda \hat{x}}{2\pi\epsilon_0 R} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \sin \frac{5\pi}{8} - \sin \frac{11\pi}{8} \right)$$

Finalmente, sumando todos los campos, se obtiene que el campo eléctrico total en el punto  $P$  vale:

$$\vec{E}_T = \frac{\lambda \hat{x}}{\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi}{8} - \frac{\cos \frac{3\pi}{8}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\lambda \hat{x}}{2\pi\epsilon_0 R} \left( \cos \frac{\pi}{8} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

### Solución 2.8

- a) Primero debe usarse el campo eléctrico por definición para hallar una expresión

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

En la fórmula anterior  $\vec{r} = x\hat{x}$ ,  $\vec{r}' = x'\hat{x}$  y  $dq = \lambda dx'$  con  $x' \in [0, L]$  donde  $\lambda = \frac{Q}{L}$ .

Analizando por intervalos

- $x > L$

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{x - x'}{(x - x')^3} dx' \\ &= \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x - x'} \Big|_0^L \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x - L} - \frac{1}{x} \right) \hat{x} \end{aligned}$$

- $x < 0$

Análogo a lo anterior:

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x - L} - \frac{1}{x} \right) \hat{x}$$

- $0 \leq x \leq L$

En este caso el campo eléctrico es infinito ya se cae en un punto de carga infinita. Esto puede verse en la integral, ya que si  $x = x'$  diverge.



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

b) En este caso un diferencial de fuerza está dado por  $d\vec{F} = \vec{E}(x)dq = \vec{E}(x)\lambda dx$ , por lo tanto

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{\lambda^2 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_{L+d}^{2L+d} \left( \frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{\lambda^2 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln\left(\frac{L+d}{d}\right) - \ln\left(\frac{2L+d}{L+d}\right) \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right) \hat{x}\end{aligned}$$

c) Para la última parte debe notarse lo siguiente

$$\ln\left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right) = \ln\left(\frac{L^2 + 2Ld + d^2}{2Ld + d^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{L^2}{2Ld + d^2}\right) \approx \ln\left(1 + \frac{L^2}{d^2}\right) \approx \frac{L^2}{d^2}$$

De lo anterior se termina deduciendo que

$$\vec{F} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\lambda L)^2}{d^2} \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} \hat{x}$$

Que coincide con la fuerza que sienten dos cargas puntuales de carga  $Q = \lambda L$ .

### Solución 2.15

a) En este caso, se usará el resultado conocido del campo eléctrico que genera un disco de radio  $R$  y densidad de carga  $\sigma$ , el cual corresponde a

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{z}$$

Ahora, usando este resultado se considerará  $z = 0$  en el punto  $P_1$  creciendo hacia arriba. A partir de esto, el cilindro está compuesto por la superposición infinitesimal de discos (uno encima del otro). El aporte de campo eléctrico  $d\vec{E}$  que provoca uno de estos discos de ancho infinitesimal es

$$d\vec{E} = \frac{\rho_0 \cdot dz}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{z}$$

Por lo que el campo total en el punto está dado por

$$\vec{E}(P_1) = \frac{\rho_0 \hat{z}}{2\epsilon_0} \int_{-(L+h)}^{-h} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) dz = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[ L - (\sqrt{h^2 + R^2} - \sqrt{(L+h)^2 + R^2}) \right] \hat{z}$$



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

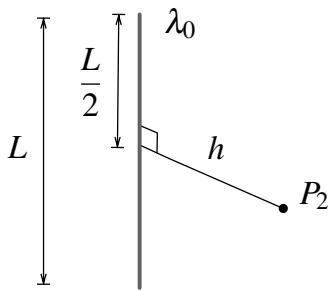


Figura 2.3: Situación análoga al cilindro.

- b) Para resolver este problema, se usará una técnica de analogías. Este problema es un poco difícil planteando las integrales correspondientes, pero se puede usar otro resultado conocido como el que genera una barra de densidad lineal  $\lambda_0$  de largo  $L$  sobre un punto ubicado un eje perpendicular a ella justo en su mitad.

En este caso, tomando el eje  $z$  coincidente con eje de la barra y el origen su punto medio, se obtiene  $\vec{r} = h\hat{r}$ ,  $\vec{r}' = z\hat{z}$  con  $z \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  y  $dq = \lambda_0 dz$ . Entonces

$$\vec{E}(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{h\hat{r} - z\hat{z}}{(h^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda_0 dz = \frac{\lambda_0 L}{2\pi\epsilon_0 h \sqrt{4h^2 + L^2}} \hat{r}$$

Ahora, volviendo al problema, si  $V$  es el volumen de un cilindro es posible afirmar que

$$\lambda_0 = \frac{dq}{dz} = \frac{dq}{dV} \frac{dV}{dz} = \rho_0 \frac{dV}{dz} = \rho_0 \frac{d}{dz}(\pi R^2 z) = \rho_0 \pi R^2$$

El valor obtenido es equivalente a la carga por unidad de largo que tiene el cilindro del problema. Finalmente el campo es

$$\vec{E}(P_2) = \frac{\rho_0 R^2 L}{2\epsilon_0 h \sqrt{4h^2 + L^2}} \hat{r}$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 2.9

- Determine el campo eléctrico en todo el eje donde se encuentra la barra. Para ello  $\vec{r} = r\hat{r}$  en coordenadas cilíndricas donde  $r \in [a, \infty)$ .
- Un diferencial de fuerza sobre la barra puede ser determinado como  $d\vec{F} = \vec{E}(z)dz = \vec{E}(z)\lambda dz$ . Integre el diferencial anterior en toda la barra y determine la fuerza que ejerce el plano sobre ella.
- Determinada la fuerza eléctrica esta debe ser igual al peso. Despeje de ahí el valor de  $\lambda$  y luego  $Q$ .

### Indicación 2.10

- Usando la definición integre la densidad de carga sobre el plano, en este caso  $\vec{r}' = r\hat{r}$  con  $r \in [0, \infty]$ . Noté que  $\sigma$  tiene una dependencia radial por lo cual quedará una integral más complicada de resolver.

### Indicación 2.11

- Este problema puede ser planteado tanto en coordenadas esféricas como cilíndricas.
- De usar coordenadas cilíndricas, puede ser útil la siguiente igualdad  $(h-z)^2 + z^2 = \frac{(2z-h)^2 + h^2}{2}$  y el cambio de variables  $2z - h = h \tan \theta$ .

### Indicación 2.12

- Use la definición de campo eléctrico para el campo eléctrico en el centro de la esfera. En este caso  $dq = \sigma_0 \cos \theta dS = \sigma_0 R^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$  en coordenadas esféricas.

### Indicación 2.13

- Este problema puede ser planteado tanto en coordenadas esféricas como cilíndricas.



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

- De usar coordenadas cilíndricas, recuerde que para un punto  $\hat{r}' = r\hat{r} + z\hat{z}$  y que  $r(z) = z \tan \alpha$ .

### Indicación 2.14

- Note la analogía entre la Ley de Coulomb y la Ley de Gravitación Universal.

$$|F_E| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad |F_G| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Tal como existe el campo eléctrico creado por un continuo de carga, también es posible determinar el campo gravitacional de un continuo de masa en forma muy parecida.

- Con ayuda del resultado obtenido en el Problema 2.13 concluya el problema.

### Indicación 2.16

- El problema debe ser abordado por definición de los campos provocados por los planos infinitos de densidad  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  y el bloque de densidad  $\rho$ .
- Por integración directa determine el campo eléctrico que genera un plano infinito.
- El campo eléctrico que genera el bloque para puntos fuera de él puede ser determinado mediante la integración del resultado del plano infinito. Recuerde que el bloque es una superposición de planos uno al lado del otro.
- Determine los campos eléctricos en todas las zonas en el intervalo  $|x| > a$  en función de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\rho$ . Concluya el problema igualando con los campos eléctricos entregados en el enunciado.



## V. Respuestas

Problema	Respuestas
	<b>2.1</b> $\vec{E}_{total} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \frac{7}{\sqrt{5}} - 3 \right) \hat{z}$
	<b>2.2</b> $\cos \theta_{eq} = \frac{-qK + \sqrt{(qK)^2 + 4}}{2}$ con $K = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 l m g}$ , $\theta(q \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{2}$
	<b>2.3</b> $\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left( k + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \right)}$
	<b>2.4</b> <b>a)</b> $V(C) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$ <b>b)</b> $\vec{E}(C) = \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \right) \hat{y}$ <b>c)</b> $q = 2R\lambda$
	<b>2.5</b> <b>a)</b> $\vec{E} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \left( \frac{z - \frac{L}{2}}{\left( (z - \frac{L}{2})^2 + a^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z + \frac{L}{2}}{\left( (z + \frac{L}{2})^2 + a^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{z}$ <b>b)</b> $V(O) - V(O') = \frac{\lambda a}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + a^2}} \right)$
	<b>2.6</b> <b>a)</b> $\vec{E}(A) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} (\hat{y} - \hat{x})$ <b>b)</b> $\vec{E}(B) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \hat{x}$
	<b>2.7</b> $\vec{E} = \frac{\lambda \hat{x}}{2\pi\varepsilon_0 R} \left( \cos \frac{\pi}{8} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} \right)$



## CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

	<b>Problema</b>	<b>Respuestas</b>
<b>2.8</b>		<p><b>a)</b> <math>\vec{E}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right) \hat{x} &amp; x &gt; L \\ -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right) \hat{x} &amp; x &lt; 0 \\ \infty &amp; 0 \leq x \leq L \end{cases}</math></p> <p><b>b)</b> <math>\vec{F} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{(L+d)^2}{d(2L+d)} \right) \hat{x}</math></p> <p><b>c)</b> <math>\ln \left( \frac{(L+d)^2}{d(2L+d)} \right) \approx \ln \left( 1 + \frac{L^2}{d^2} \right) \approx \frac{L^2}{d^2}</math> entonces <math>\vec{F} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} \hat{x}</math></p>
<b>2.9</b>		<p><b>P</b></p> $q = \frac{2\epsilon_0 Mg}{\sigma_0 a \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a + \sqrt{a^2 + (a+b)^2}} \right)}$
<b>2.10</b>		<p><b>P</b></p> <p><b>a)</b> <math>\vec{E}(z) = -\frac{\sigma a^2(a-z)}{2\epsilon_0(a+z)} \hat{x}</math>    <b>b)</b> <math>W = -\frac{3Q\sigma_0 a}{4\epsilon_0}</math></p>
<b>2.11</b>		<p><b>P</b></p> $V = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$
<b>2.12</b>		<p><b>P</b></p> $\vec{E}(0) = -\frac{\sigma}{3\epsilon_0} \hat{z}$
<b>2.13</b>		<p><b>P</b></p> $\vec{E} = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) \hat{z}$
<b>2.14</b>		<p><b>P</b></p> $\Delta \vec{g} = -\frac{6GM \cos^2 \alpha}{h^3(1 + \cos \alpha)} \hat{z}$
<b>2.15</b>		<p><b>P</b></p> <p><b>a)</b> <math> \vec{E}(P_1)  = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[ L - (\sqrt{h^2 + R^2} - \sqrt{(L+h)^2 + R^2}) \right]</math></p> <p><b>b)</b> <math> \vec{E}(P_2)  = \frac{\rho_0 R^2 L}{2\epsilon_0 h \sqrt{4h^2 + L^2}}</math></p>
<b>2.16</b>		<p><b>P</b></p> <p><b>a)</b> <math>\rho = -\frac{\epsilon_0 E_0}{a}</math></p> <p><b>b)</b> <math>\sigma_1 = \sigma_2 = \epsilon_0 E_0</math></p>



# Ley de Gauss

## I. Resumen Teórico

---

### Ley de Gauss (Forma Integral)

La ley de Gauss en su forma integral enuncia que

$$\iint_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \quad (3.1)$$

Para cualquier superficie cerrada  $\Omega$ . En otras palabras, para cualquier superficie cerrada el flujo de campo eléctrico a través de ella será igual a la carga encerrado dividida por la permitividad del vacío.

---

### Ley de Gauss (Forma Diferencial)

Por otro lado, también existe la Ley de Gauss en su forma diferencial la cual enuncia que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.2)$$


---

### Continuidad del $\vec{E}$ y $V$

- El campo eléctrico no es necesariamente continuo. Las discontinuidades del campo son provocadas generalmente por cargas puntuales o superficies cargadas.
- El potencial eléctrico es siempre continuo, ya que es la integral del campo eléctrico (la integral es siempre una función continua).

### Recomendaciones

- La ley de Gauss es sumamente poderosa, usualmente se usa sólo para determinar campo eléctrico pero sus extensiones son mucho mayores. Los problemas en los cuales se determina campo eléctrico mediante ley de Gauss son más bien acotados, y responden a las simetrías esféricas, cilíndricas y planas.
- Nótese que deben existir las simetrías necesarias para aplicar ley de Gauss directamente en la determinación de campo eléctrico. Casos típicos:
  - Carga puntual  $q$ .
  - Alambre infinito de densidad  $\lambda$  constante.
  - Cilindro macizo de densidad constante o  $\rho(r)$  ( $r$  distancia desde el eje del cilindro).
  - Casquete cilíndrico de densidad  $\sigma$  constante.
  - Esfera maciza de densidad constante o  $\rho(r)$  ( $r$  distancia del centro de la esfera).
  - Casquete esférico de densidad  $\sigma$  constante.
  - Plano infinito de densidad  $\sigma$  constante.
  - Bloque infinito en el plano  $xy$  y de espesor conocido en  $z$  con densidad de carga  $\rho(z)$ .



## II. Problemas Propuestos

### Problema 3.1

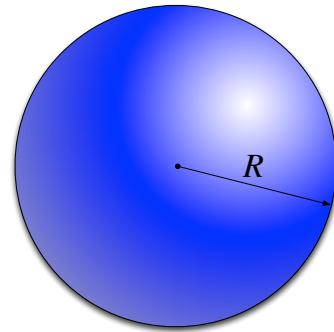


Una distribución de carga esférica  $\rho$  se extiende desde  $r = 0$  a  $r = R$ , con

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Calcular:

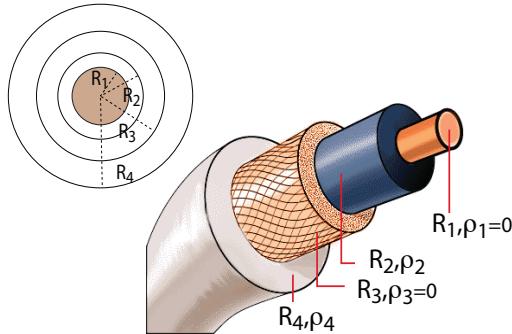
- La carga total  $Q$ .
- El campo eléctrico en todo el espacio.
- El potencial eléctrico en todo el espacio.



### Problema 3.2



Considere un cable coaxial infinito y rectilíneo, el cual está compuesto por un cilindro central y diferentes casquitos cilíndricos, de radios  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  respectivamente, como se ilustra en la figura. Cada material tiene respectivamente una densidad de carga volumétrica  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  y  $\rho_4$  (Ver Figura). En el caso que el cilindro y segundo casquete cilíndrico (de radio  $R_3$ ) tienen densidad de carga cero ( $\rho_1 = \rho_3 = 0$ ). Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.

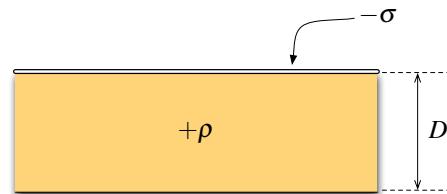


### Problema 3.3



Se tiene una placa infinita no conductora de espesor despreciable la cual posee una densidad superficial de carga  $-\sigma$ , y continua a ella, un bloque infinito de espesor  $D$  con una densidad de carga uniforme  $+\rho$ . Todas las cargas están fijas. Calcule la dirección y la magnitud del campo eléctrico:

- a una distancia  $h$  encima de la placa cargada negativamente.
- dentro del bloque a una distancia  $d$  debajo de la placa cargada negativamente ( $d < D$ ).
- a una distancia  $H$  bajo fondo del bloque.

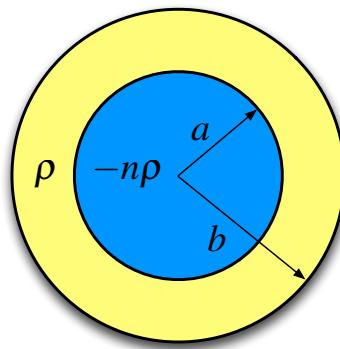


**Problema 3.4**   

Considere la siguiente distribución de volumétrica de carga en coordenadas esféricas

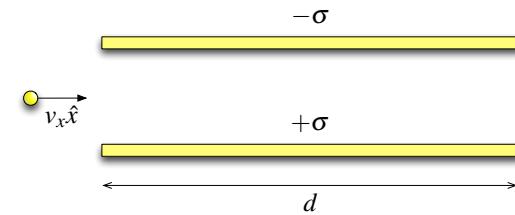
$$\rho(r) = \begin{cases} -n\rho & 0 < r < a \\ \rho & a \leq r \leq b \end{cases}$$

Donde  $\rho$  es una constante y  $n$  es un entero no negativo. Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.



**Problema 3.5**   

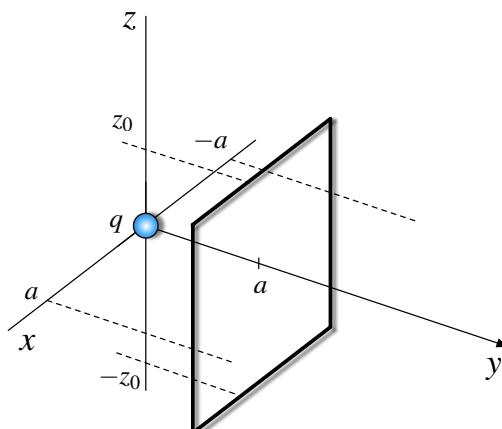
Considere el sistema de la figura compuesta por dos placas paralelas cargadas con densidad  $+\sigma$  y  $-\sigma$ . Las placas son cuadradas de lado  $d$  y separación  $2h$  donde  $d \gg 2h$ . En el plano intermedio de las placas se disparan protones y electrones de carga  $-e$  y  $e$ , respectivamente con velocidad  $v_x$  paralela a los planos. Ignorado efectos de borde y considerando la atracción gravitacional, determine la relación que debe haber entre la carga/masa de los protones y electrones para que éstos logren escapar.



**Problema 3.6**   

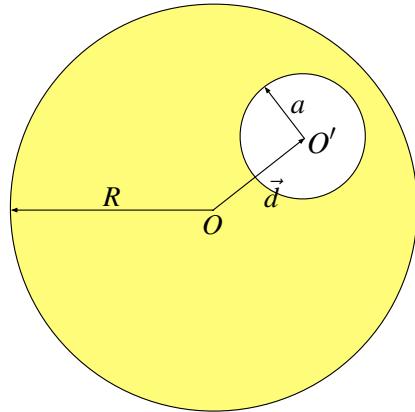
Considere una carga  $q$  en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas. En el mismo sistema de referencia existe un rectángulo paralelo al plano  $xz$  de ancho  $2a$  y altura  $2z_0$  ubicado en  $y = a$  (ver Figura).

- Usando la ley de Gauss en forma adecuada, determine el flujo sobre el rectángulo si  $z_0 = a$ .
- ¿Cuántas veces aumenta el flujo de la parte anterior en el caso  $z_0 \rightarrow \infty$ ?



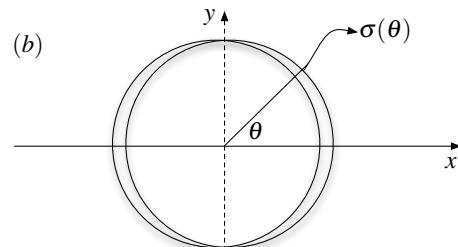
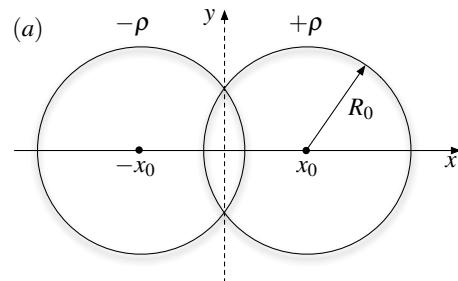
**Problema 3.7**

Considere una esfera maciza de densidad de carga  $\rho_0$  y radio  $R$  la cual posee una perforación esférica de radio  $a < \frac{R}{2}$  a una distancia de  $d$  entre sus centros. Demuestre que el campo eléctrico es constante en cualquier punto dentro de la cavidad y determine su valor.

**Problema 3.8**

Considere dos cilindros infinitos de radios  $R_0$  los cuales poseen sus ejes paralelos al eje  $z$  (entran y salen de la hoja de papel). Las densidades de carga volumétricas de los cilindros son  $\rho$  y  $-\rho$  y sus ejes centrales pasan por los puntos  $(x_0, 0)$  y  $(-x_0, 0)$ , respectivamente. Considerando que  $x_0 < R_0$ .

- Determine el campo eléctrico en la zona de intersección.
- Si  $x_0 \ll R_0$ , ambos cilindros quedan infinitesimalmente cerca, creando un único cilindro equivalente de radio  $R_0$  con una densidad de superficial de carga  $\sigma(\theta)$ . Encuentre el valor de esa densidad.

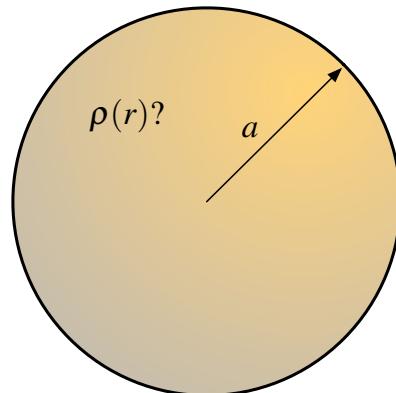
Cilindro Equivalente ( $x_0 \ll R_0$ )**Problema 3.9**

Dentro de una esfera de radio  $a$  centrada en el origen hay un campo eléctrico

$$\vec{E}(r \leq a) = E_0 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \hat{r}$$

Para  $r > a$  hay vacío. Se pide determinar

- La distribución de carga  $\rho(r)$  para  $r \leq a$ .
- El campo  $\vec{E}$  y el potencial eléctrico para  $r > a$
- El potencial eléctrico  $V(r < a)$ .



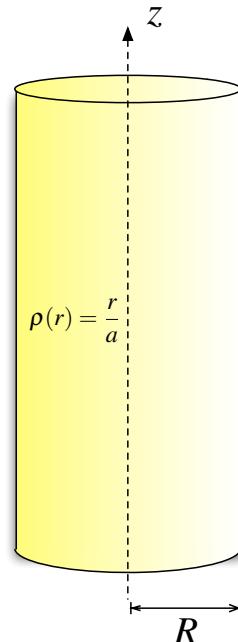
## CAPÍTULO 3. LEY DE GAUSS

### Problema 3.10



Un cilindro infinito de radio  $R$  tiene su eje coincidente con el eje  $z$ . El cilindro posee una densidad volumétrica  $\rho(r) = \frac{r}{a}$  donde  $a$  es una constante positiva y  $r$  es la distancia desde el eje del cilindro.

- Calcule la carga contenida en un cilindro centrado en el eje  $z$ , de radio  $r$  y altura  $h$  para los casos  $r < R$  y  $r > R$ .
- Determinar el campo eléctrico  $\vec{E}(r)$  en todo el espacio.
- Calcular el potencial eléctrico  $V(r)$  en todo el espacio. Tome como referencia  $V(r = 0) = 0$ .
- Grafique  $|\vec{E}(r)|$  y  $V(r)$  en función de  $r$ .

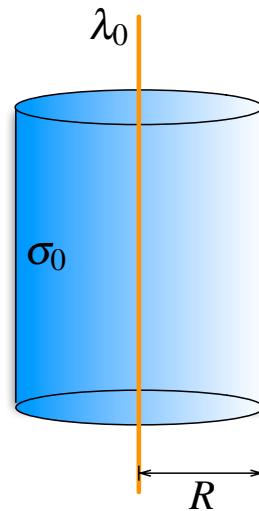


### Problema 3.11



Considere un cable infinito cargado con una densidad lineal de carga  $\lambda_0$  rodeada por un casquete cilíndrico infinito de radio  $R$  de densidad superficial homogénea  $\sigma_0$ . Si la densidad lineal coincide con el eje del cilindro, determine:

- El campo eléctrico en todo el espacio, ¿es continuo el campo eléctrico?.
- El potencial eléctrico en todo el espacio, ¿es continuo el potencial eléctrico?. (Use como referencia  $V(r = R) = 0$ )
- Si el alambre se desplazara una distancia  $\delta$  del eje del cilindro, ¿cómo determinaría el nuevo valor del campo eléctrico?.



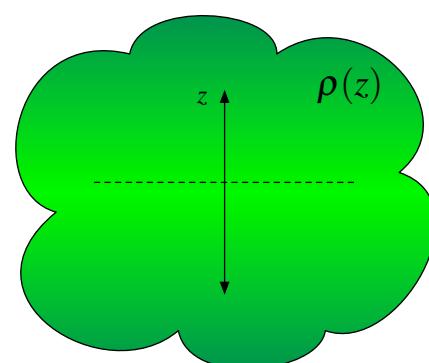
### Problema 3.12



Use el teorema de Gauss para encontrar el campo eléctrico debido a una distribución de carga

$$\rho = \rho_0 e^{-k|z|}$$

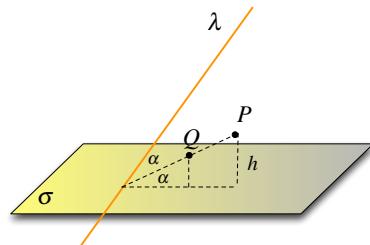
con  $\rho_0$  y  $k$  constantes positivas. Muestre que el campo es de la forma  $\vec{E} = E(z)\hat{z}$ , con  $E(-z) = -E(z)$  para  $z > 0$  y encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.



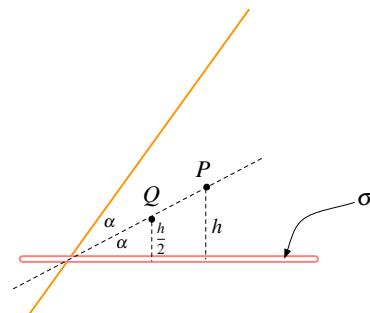
**Problema 3.13**   

Se tiene una fuente cargada que consiste en una recta infinita cargada, con densidad uniforme  $\lambda$  y un plano infinito cargado con densidad de carga uniforme  $\sigma$ . La recta forma un ángulo agudo  $2\alpha$  con el plano. Considere un punto  $P$  está a una altura  $h$  sobre el plano. Determine

- El campo eléctrico total en un punto  $P$  sobre la recta que bisecta al ángulo entre la recta y el plano.
- El trabajo necesario para mover una carga puntual  $q_0$  desde el punto  $P$  hasta el punto  $Q$  el cual está ubicado a una distancia  $\frac{h}{2}$  sobre el plano.



(a) Vista Isométrica

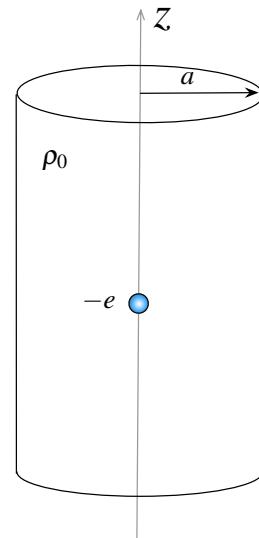


(b) Vista Frontal

**Problema 3.14**   

Un electrón de carga  $-e < 0$  y masa  $m$  e inicialmente en reposo, se encuentra en el centro de un cilindro macizo infinito de radio  $a$  y densidad de carga uniforme  $\rho_0 > 0$ .

- Determine el campo y potencial eléctrico que genera solamente el cilindro macizo en todo el espacio. Utilice como referencia  $V(r = 0) = 0$ .
- Encuentre el valor  $U_0$  correspondiente a la energía del electrón cuando se encuentra justo en el borde del cilindro  $r = a$ .
- Calcule el tiempo que le toma al electrón llegar al borde si comienza con la energía  $U_0$  calculada en (b).



### III. Soluciones

#### Solución 3.1

a) La carga total en el átomo está dada por

$$\begin{aligned}
 Q &= \iiint \rho(r) dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
 &= 4\pi \rho_0 \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right) dr \\
 &= 4\pi \rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{5}\right) \\
 &= \frac{8\pi}{15} \rho_0 R^3
 \end{aligned}$$

En general  $Q \neq \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho(r)$  (hacer esto es un error muy común en el curso). Esto es verdad solamente cuando  $\rho(r) = \text{cte}$ .

b) El campo eléctrico está dado por Ley de Gauss, para ello se deben considerar dos posibles casos (dentro y fuera de la esfera). En ambos casos se asume por simetría esférica que  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

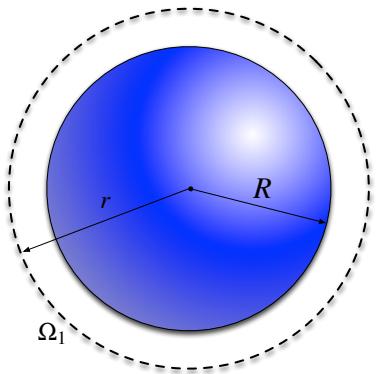


Figura 3.1: Superficie Gaussiana  $\Omega_1$  para  $r \geq R$

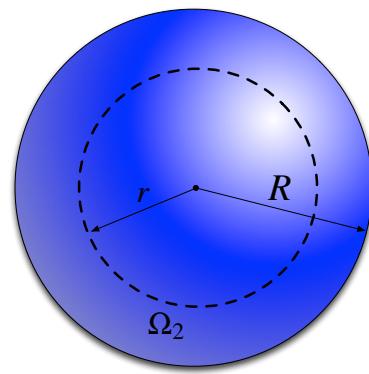


Figura 3.2: Superficie Gaussiana  $\Omega_2$  para  $r < R$

- $r \geq R$ : En este caso se toma como superficie Gaussiana  $\Omega_1$ , la cual representa un



casquete esférico de radio  $r > R$ .

$$\iint_{\Omega_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\vec{E}(r) = \frac{2\rho_0 R^3}{15\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- $r < R$ : En este caso se toma como superficie Gaussiana  $\Omega_2$ , la cual representa un casquete esférico de radio  $r < R$ .

$$\iint_{\Omega_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi \rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2} \right) \hat{r}$$

Notar que dado que  $r$  es arbitrario, el lado de izquierdo de la ecuación de ley de Gauss valdrá siempre  $4\pi r^2$  en problemas de simetría esférica.

- c) Mientras que el potencial (considerando  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ )

- $r \geq R$

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{\infty}^r E(r \geq R) dr \\ &= - \int_{\infty}^r \frac{2\rho_0 R^3}{15\varepsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{2\rho_0 R^3}{15\varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

- $r < R$

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{\infty}^R E(r \geq R) dr - \int_R^r E(r < R) dr \\ &= - \int_{\infty}^R \frac{2\rho_0 R^3}{15\varepsilon_0 r^2} dr - \int_R^r \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2} \right) dr \\ &= \frac{2\rho_0 R^2}{15\varepsilon_0} - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{6}(r^2 - R^2) - \frac{1}{20R^2}(r^4 - R^4) \right) \end{aligned}$$



## CAPÍTULO 3. LEY DE GAUSS

### Solución 3.6

- a) Usando la Ley de Gauss en el caso  $z_0 = a$ , la carga puede ser encerrada por un cubo de lado  $2a$ . Dado que la carga queda en el centro del cubo, entonces por las seis caras sale el mismo valor del flujo. Luego

$$\Phi_{\text{total}} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \implies \Phi_{\text{cara}} = \frac{Q_{\text{enc}}}{6\epsilon_0}$$

- b) Se tiene que considerar que el campo eléctrico esta dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{\frac{3}{2}}}$$

Los puntos de la cinta infinita están dados por  $\vec{r} = x\hat{x} + a\hat{y} + z\hat{z}$  donde  $x \in (-a, a)$  y  $z \in (-\infty, \infty)$ . Además  $\vec{r}' = 0$ . Luego el campo eléctrico esta dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + a\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2 + a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para calcular el flujo se recuerda que

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

En este caso  $d\vec{S}$  debe tener la dirección de la normal, es decir  $d\vec{S} = dzdx\hat{y}$ . Con lo anterior

$$\Phi = \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x\hat{x} + a\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2 + a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot (dzdx\hat{y}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{adzdx}{(x^2 + a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Notemos que denominador se puede escribir de la siguiente forma:

$$(x^2 + a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{z^2}{x^2 + a^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Con lo anterior

$$\Phi = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dz}{\left( 1 + \frac{z^2}{x^2 + a^2} \right)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\left( 1 + \frac{z^2}{x^2 + a^2} \right)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Se usa el cambio de variable  $\tan \theta = \frac{z}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$ ,  $dz = (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \sec^2 \theta d\theta$ , y como  $z \in (-\infty, \infty)$ ,  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\Phi = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \sec^2 \theta d\theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} dx$$



Pero  $(1 + \tan^2 \theta) = \sec^2 \theta$  y  $\cos \theta = \sec^{-1} \theta$

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^a \frac{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta dx \\ &= \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^a \frac{1}{x^2 + a^2} \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \frac{2qa}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{x^2 + a^2} \\ &= \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{x^2 + a^2}\end{aligned}$$

Nuevamente, usando el cambio de variable  $u = \frac{x}{a}$ ,  $dx = adu$ , y como  $x \in (-a, a)$ ,  $u \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{adu}{(au)^2 + a^2} \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \arctan u \Big|_{-1}^1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} (\arctan(1) - \arctan(-1)) \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Finalmente

$$\Phi = \frac{q}{4\varepsilon_0}$$

por lo que el flujo aumenta 0,5 veces.

### Solución 3.8

- a) Primero se debe calcular el campo eléctrico producido por un cilindro infinito cargado (radio  $R$ , densidad  $\rho$  constante) centrado en el origen. Usando Ley de Gauss:

Dada la geometría del problema:  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$  en coordenadas cilíndricas, luego:

Para  $r < R$ :

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^h Er d\theta dz = 2\pi r h E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



## CAPÍTULO 3. LEY DE GAUSS

Por otro lado

$$Q = \iiint \rho dV = \rho \pi r^2 h \implies 2\pi rhE = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0} \implies \vec{E}(r < R) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \hat{r}$$

El caso  $r > R$  es irrelevante para esta pregunta, luego no es necesario calcularlo ya que la zona donde se pide calcular el campo es tal que  $r < R$  siempre.

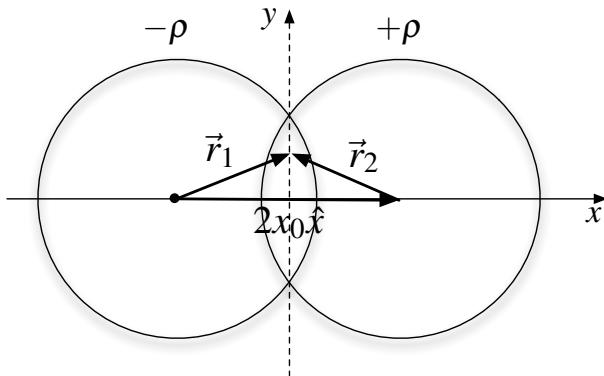


Figura 3.3: Vectores posición en el área de intersección

Ahora volviendo al problema original, sean  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  los campos producidos por los cilindros cargados con  $-\rho$  y  $+\rho$  respectivamente, usando el resultado anteriormente encontrado:

$$\vec{E}_1 = -\frac{\rho r_1}{2\varepsilon_0} \hat{r}_1 = -\frac{\rho \vec{r}_1}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho r_2}{2\varepsilon_0} \hat{r}_2 = \frac{\rho \vec{r}_2}{2\varepsilon_0}$$

Donde los vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  se miden desde el centro del cilindro correspondiente a cada uno de ellos (Figura 3.3). Finalmente, usando que:

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = 2x_0 \hat{x}$$

Se obtiene:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\frac{\rho x_0}{\varepsilon_0} \hat{x}$$

- b) Si  $x_0 \ll R$  entonces en el borde del “Cilindro equivalente” posee un espesor  $\Delta r = r_1 - r_2$ . Donde los segmentos de  $r_1$ ,  $r_2$  y  $2x_0$  forman un triángulo, cuyo ángulo opuesto al lado  $r_2$  es  $\theta$ . Así, usando el teorema del coseno (y, por simplicidad, definiendo  $d = 2x_0$ ) :

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + d^2 - 2r_1 d \cos \theta}$$

Luego como  $\frac{d}{x_0} \rightarrow 0$  entonces se realiza una aproximación de Taylor en torno a  $d = 0$ , de lo que resulta:



$$r_2 \approx r_1 + \frac{1}{2\sqrt{r_1^2 + d^2 - 2r_1 d \cos \theta}} (2d - 2r_1 \cos \theta)|_{d=0} (d - 0) = r_1 - d \cos \theta$$

Por lo tanto:

$$\Delta r = r_1 - r_2 \approx d \cos \theta$$

Por otra parte, en un pequeño volumen  $dV$  en el borde del "Cilindro equivalente" existe una carga  $\Delta Q$ , que cumple:

$$\Delta Q = \rho dV = \rho \Delta A \Delta r = \rho \Delta A d \cos \theta$$

Finalmente, de la relación anterior es posible definir una densidad de carga superficial en el borde del "Cilindro equivalente" cuando  $x_0 \ll R$ :

$$\sigma = \rho \Delta r \Rightarrow \sigma = \rho d \cos \theta = 2x_0 \rho \cos \theta$$

Nota: observar que dicha densidad  $\sigma$  es consistente en sus signo con la distribución de las cargas en el "Cilindro equivalente" pues es proporcional a  $\cos \theta$ .

### Solución 3.10

a) La carga contenida será para  $r \leq R$ :

$$Q_{enc}(r \leq R) = \iiint \rho(r) dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r}{a} \cdot r dr d\theta dz = \frac{2\pi h r^3}{3a}$$

mientras tanto, en el caso  $r > R$

$$Q_{enc}(r > R) = \iiint \rho(r) dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r}{a} \cdot r dr d\theta dz = \frac{2\pi h R^3}{3a}$$

b) Usando la ley de Gauss para  $r \leq R$ :

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{2\pi h r^3}{3a\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{r^2}{3a\varepsilon_0} \hat{r}$$

De igual forma, para  $r > R$ :

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{2\pi h R^3}{3a\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{R^3}{3a\varepsilon_0 r} \hat{r}$$

c) El potencial  $V(r)$ , usando como referencia  $V(r=0) = 0$ , estará dado por

$$V(r) = V(r) - V(0) = - \int_0^r E(r) dr$$



## CAPÍTULO 3. LEY DE GAUSS

Para un radio  $r \leq R$  el potencial está dado por

$$V(r) = - \int_0^r \frac{r^2}{3a\varepsilon_0} dr = -\frac{r^3}{9a\varepsilon_0}$$

de forma parecida, el potencial para un radio  $r > R$  es

$$V(r) = - \int_0^R \frac{r^2}{3a\varepsilon_0} dr - \int_R^r \frac{R^3}{3a\varepsilon_0 r} dr = -\frac{R^3}{3a\varepsilon_0} \left[ \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3} \right]$$

d) Los gráficos están dados por

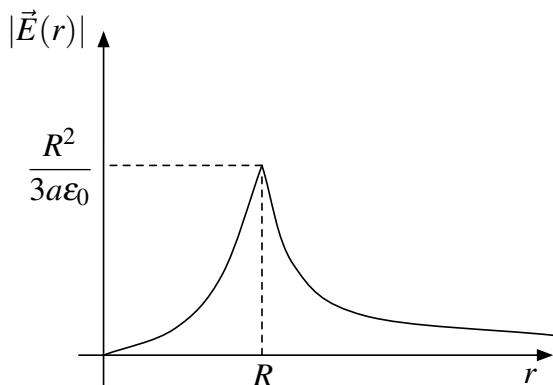


Figura 3.4: Campo Eléctrico

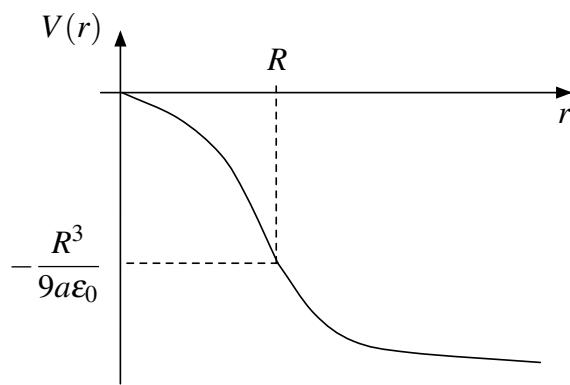


Figura 3.5: Potencial Eléctrico

### Solución 3.13

a) Dado que el sistema está compuesto por una recta infinita y un plano infinito, se determina cual es el campo eléctrico que genera cada uno de ellos y luego se procederá a la rotación del resultado. Como resultados generales para un plano infinito y una recta se tiene que:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \implies 2AE(z) = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \implies \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{z}$$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \implies 2\pi r L E(r) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \implies \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \hat{r}$$

En este problema se debe tomar como referencia la siguiente Figura

Se toma un punto  $P$  arbitrario a una distancia  $y$  desde la bisectriz hasta el plano. Sobre ese punto actúan dos campos eléctricos ( $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  provocados por el plano y por la recta, respectivamente), de modo que la superposición de ambos campos es el campo total en el punto. Usando el sistema de referencia de la Figura 3.6, el campo total vale:

$$\vec{E}_T = |\vec{E}_1| \hat{y} - |\vec{E}_2| \cos(2\alpha) \hat{y} + |\vec{E}_2| \sin(2\alpha) \hat{x}$$



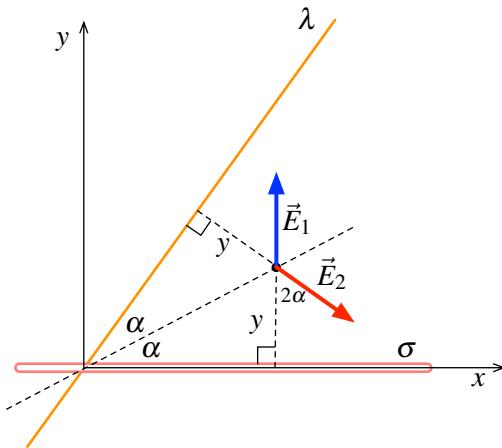


Figura 3.6: Campos Eléctricos en un punto sobre la bisectriz

Donde

$$|\vec{E}_1| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad |\vec{E}_2| = \frac{\lambda}{2\pi y \epsilon_0}$$

Nótese que dado la recta donde se quiere conocer el campo es bisectriz, la distancia del plano al punto debe ser igual a la de la recta cargada a la bisectriz (congruencia de triángulos). Finalmente el campo total cuando  $y = h$  vale

$$\vec{E}_T(h) = \frac{\lambda \sin(2\alpha)}{2\pi h \epsilon_0} \hat{x} + \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda \cos(2\alpha)}{2\pi h \epsilon_0} \right) \hat{y}$$

- b) El trabajo necesario para mover la carga está dado por la siguiente expresión

$$W = -q \int_A^B \vec{E}_T(y) \cdot d\vec{l}$$

En esta caso  $A = h$  y  $B = \frac{h}{2}$ , además dado que no es ni un camino horizontal ni vertical, se tiene que  $d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y}$ , donde en la recta bisectriz se cumple que  $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$  (pendiente de la bisectriz). Reemplazando

$$\begin{aligned} W &= -q \int_h^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\lambda \sin(2\alpha)}{2\pi y \epsilon_0} \hat{x} + \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda \cos(2\alpha)}{2\pi y \epsilon_0} \right) \hat{y} \right) \cdot \left( \frac{dy}{\tan \alpha} \hat{x} + dy \hat{y} \right) \\ &= -q \left[ \int_h^{\frac{h}{2}} \frac{\lambda \sin(2\alpha)}{2\pi y \epsilon_0} \frac{dy}{\tan \alpha} + \int_h^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda \cos(2\alpha)}{2\pi y \epsilon_0} \right) dy \right] \\ &= q \left[ \frac{\lambda \sin(2\alpha)}{2\pi \epsilon_0 \tan \alpha} \ln(2) + \left( \frac{\sigma h}{4\epsilon_0} - \frac{\lambda \cos(2\alpha)}{2\pi \epsilon_0} \ln(2) \right) \right] \\ &= \frac{q\sigma h}{4\epsilon_0} + \frac{q\lambda \ln(2)}{2\pi \epsilon_0} \left( \frac{\sin 2\alpha}{\tan \alpha} - \cos 2\alpha \right) \end{aligned}$$



## CAPÍTULO 3. LEY DE GAUSS

### Solución 3.14

a) Por ley de Gauss, se tiene que el campo eléctrico para  $r > a$  es

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \implies E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\rho_0 \pi a^2 L}{\varepsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\rho_0 a^2}{2r\varepsilon_0} \hat{r}$$

Mientras que para  $r < a$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \implies E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\rho_0 \pi r^2 L}{\varepsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \hat{r}$$

Luego el potencial para  $r < a$  es

$$V(r) = V(r) - V(0) = - \int_0^r \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} dr = - \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0}$$

y para  $r > a$

$$V(r) = V(r) - V(0) = - \int_0^a \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} dr - \int_a^r \frac{\rho_0 a^2}{2r\varepsilon_0} dr = - \frac{\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

b) Dado que la energía inicial es nula ya que el electrón está en reposo y el potencial es nulo en  $r = 0$ , la energía en  $r = a$  será igual al trabajo realizado para mover el electrón a  $r = a$ . Luego

$$U_0 = W = e \int_0^a \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} dr = \frac{e\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0}$$

c) Usando la segunda ley de Newton, se tiene que para  $r < a$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -e\vec{E} \implies m\ddot{r} = -\frac{e\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \implies \ddot{r} + \frac{e\rho_0}{2\varepsilon_0 m} r = 0$$

La ecuación diferencial anterior corresponde a un movimiento armónico simple de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{e\rho_0}{2\varepsilon_0 m}}$$

Al ser un movimiento oscilatorio e iniciar con la energía determinada en (b), el electrón podrá llegar como máximo al borde  $r = a$  y luego se dirigirá al punto diametralmente opuesto. En conclusión, el tiempo que se demorará en llegar a  $r = a$  será un cuarto del periodo de oscilación, es decir

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m}{e\rho_0}}$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 3.2

- Aplique la ley de Gauss sobre el cable coaxial. Este problema posee simetría cilíndrica.
- Debe ponerse en cinco posibles casos donde existe campo eléctrico.

### Indicación 3.3

- En este problema debe usar el principio de superposición. Determine en primera instancia determine cuanto vale el campo eléctrico que provoca el plano infinito y el bloque infinito mediante Ley de Gauss.
- Note que los campo eléctrico que provoca un plano infinito es constante (independiente de la altura). Lo mismo ocurre para los puntos fuera del bloque de ancho  $D$ .

### Indicación 3.4

- Aplique ley de Gauss a la esfera, debe ponerse en tres posibles casos.
- Recuerde que la ley de Gauss sólo ve la carga encerrada, por lo que puede ignorar la carga que esta afuera de la superficie Gaussiana que este tomando.

### Indicación 3.5

- Determine el campo eléctrico dentro de las placas paralelas mediante superposición.
- Determine la ecuación de movimiento para el caso del electrón y el protón. Las fuerzas aplicadas sobre las cargas son el peso y la fuerza eléctrica.

### Indicación 3.7

- El problema debe ser abordado mediante el principio de superposición. El campo dentro de la cavidad puede ser determinado como la resta de otros dos.



## CAPÍTULO 3. LEY DE GAUSS

- Es necesario conocer cuánto es el campo eléctrico dentro de una esfera de densidad constante  $\rho_0$ . Puede ser muy útil recordar que  $\vec{r} = r\hat{r}$ .
- Deje expresado el campo eléctrico dentro de la cavidad en función de dos sistemas de referencia (uno con respecto al centro de la esfera y otro con respecto al centro de la cavidad). Finalmente, use el vector  $\vec{d}$  para relacionarlos y concluir el problema.

### Indicación 3.11

- Note que tanto el alambre como la superficie cilíndrica tienen simetría cilíndrica. Luego es posible aplicar ley de Gauss en forma directa a la configuración.
- Al mover el alambre una distancia  $\delta$  el problema pierde la simetría del punto anterior. ¿Cómo debe calcularse el campo eléctrico en este caso?

### Indicación 3.12

- Dado que la geometría del problema es infinita en  $x$  e  $y$ , sólo puede tener dependencia de una sola variable.
- Note que la densidad de carga es simétrica con respecto al plano  $xy$ , lo cual afecta directamente al campo.
- La superficie gaussiana que puede tomar para determinar el campo eléctrico puede ser un paralelepípedo o un cilindro de altura  $2z$  (desde  $-z$  hasta  $z$ ).



## V. Respuestas

Problema	Respuestas
(P) 3.1	a) $Q = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}$
	b) $\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{15R^2\varepsilon_0}(5R^2r - 3r^3)\hat{r} & r \leq R \\ \frac{2\rho_0 R^3}{15\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R \end{cases}$
	c) $V(r) = \begin{cases} \frac{2\rho_0 R^2}{15\varepsilon_0} - \frac{\rho_0(r^2-R^2)}{15\varepsilon_0 R^2} \frac{(7R^2-3r^2)}{4} & r \leq R \\ \frac{2\rho_0 R^3}{15\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$
(P) 3.2	$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_1 \\ \frac{\rho_2(r^2-R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{\rho_2(R_2^2-R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} & R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\rho_2(R_2^2-R_1^2)+\rho_4(r^2-R_3^2)}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} & R_3 \leq r \leq R_4 \\ \frac{\rho_2(R_2^2-R_1^2)+\rho_4(R_4^2-R_3^2)}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} & r \geq R_4 \end{cases}$
(P) 3.3	a) $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} + \frac{\rho D}{2\varepsilon_0}\hat{z}$ b) $\vec{E} = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} + \frac{\rho(D-2d)}{2\varepsilon_0}\hat{z}$ c) $\vec{E} = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} - \frac{\rho D}{2\varepsilon_0}\hat{z}$
(P) 3.4	$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{n\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} & 0 < r < a \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - (n+1)\frac{a^3}{r^2}\right)\hat{r} & a \leq r \leq b \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\left(b^3 - (n+1)a^3\right)\hat{r} & r \geq b \end{cases}$
(P) 3.5	Protón: $\frac{\varepsilon_0}{\sigma}(g - 2\frac{v_x^2 h}{d^2}) < \frac{e}{m_p} < \frac{\varepsilon_0}{\sigma}(g + 2\frac{v_x^2 h}{d^2})$ Electrón: $\frac{e}{m_e} < \frac{\varepsilon_0}{\sigma}(\frac{2hv_x^2}{d^2} - g)$
(P) 3.6	a) $\Phi_E = \frac{Q}{6\varepsilon_0}$ b) Aumenta 1,5 veces.



## CAPÍTULO 3. LEY DE GAUSS

---

Problema	Respuestas
----------	------------

---

 **3.7**  $\vec{E} = \frac{\rho_0 d}{3\epsilon_0} \hat{z}$

---

 **3.8** a)  $\vec{E} = -\frac{\rho x_0}{\epsilon_0} \hat{x}$   
b)  $\sigma(\theta) = 2x_0\rho \cos \theta$

---

 **3.9** a)  $\rho(r) = \frac{4\epsilon_0 E_0 r}{a^2}$   
b)  $\vec{E}(r > a) = \frac{E_0 a^2}{r^2} \hat{r}, V(r > a) = \frac{E_0 a^2}{r}$   
c)  $V(r \leq a) = \frac{E_0}{3} \left( 4a - \frac{r^3}{a^2} \right)$

---

 **3.10** a)  $Q(r) = \begin{cases} \frac{2\pi h r^3}{3a} & r \leq R \\ \frac{2\pi h R^3}{3a} & r > R \end{cases}$   
b)  $\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{3a\epsilon_0} \hat{r} & r \leq R \\ \frac{R^3}{3a\epsilon_0 r} \hat{r} & r > R \end{cases}$   
c)  $V(r) = \begin{cases} -\frac{r^3}{9a\epsilon_0} & r \leq R \\ -\frac{R^3}{3a\epsilon_0} \left[ \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3} \right] & r > R \end{cases}$

---

 **3.11** a)  $\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} & r < R \\ \left( \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{R\sigma}{\epsilon_0 r} \right) \hat{r} & r > R \end{cases}$  El campo eléctrico es discontinuo en  $r = R$ .  
b)  $V(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) & r \leq R \\ \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{\lambda}{2\pi} + R\sigma \right) \ln\left(\frac{R}{r}\right) & r > R \end{cases}$  El potencial eléctrico es **siempre** continuo.  
c) En este caso no puede volverse a usar la ley de Gauss para ambas distribuciones de forma simultánea ya que pierde la simetría cilíndrica. En este caso debe determinarse el campo eléctrico por separado y luego superponer.

---

 **3.12**  $\vec{E}(z) = \frac{\rho}{k\epsilon_0} (1 - e^{-kz}) \hat{z}$

---

 **3.13** a)  $\vec{E}_T(h) = \frac{\lambda \sin(2\alpha)}{2\pi h \epsilon_0} \hat{x} + \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda \cos(2\alpha)}{2\pi h \epsilon_0} \right) \hat{y}$   
b)  $W = \frac{q\sigma h}{4\epsilon_0} + \frac{q\lambda \ln(2)}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sin 2\alpha}{\tan \alpha} - \cos 2\alpha \right)$

---

 **3.14** a)  $\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \hat{r} & r \leq a \\ \frac{\rho_0 a^2}{2r\epsilon_0} \hat{r} & r > a \end{cases}$   $V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0} & r \leq a \\ -\frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right) & r > a \end{cases}$   
b)  $U_0 = W = e \int_0^a \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} dr = \frac{e\rho_0 a^2}{4\epsilon_0}$   
c)  $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2\epsilon_0 m}{e\rho_0}}$

---



# Conductores

## I. Resumen Teórico

---

### Conductores

Un conductor es un material que cumple las siguientes propiedades:

- El campo eléctrico es nulo en todos los puntos dentro del conductor. Consecuencia de esto, el conductor es una equipotencial (todos sus puntos tienen el mismo potencial).
  - La carga en un conductor sólo se acumula en su/s superficie/s (ie. no existen densidades de carga volumétricas en un conductor).
  - El campo eléctrico es siempre perpendicular a la superficie de un conductor y vale  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$ . Donde  $\sigma$  es la densidad de carga sobre el conductor y  $\hat{n}$  la normal del conductor.
- 

### Condensadores

Un condensador es un dispositivo el cual tiene la capacidad de almacenar carga. Puede estar compuesto por uno o dos conductores de forma arbitraria.

Matemáticamente la capacidad de un condensador se define como

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} \quad (4.1)$$

Algunas capacitancias conocidas:

- Condensador de Placas Paralelas:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (4.2)$$

## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

Donde  $A$  es el área de las placas y  $d$  la distancia de separación.

- Condensador Cilíndrico:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(\frac{b}{a})} \quad (4.3)$$

Donde  $L$  es el largo del condensador,  $a$  radio interior y  $b$  radio exterior del condensador.

- Condensador Esférico:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a} \quad (4.4)$$

Donde  $a$  radio interior y  $b$  radio exterior del condensador.

Los condensadores pueden ser asociados en serie o paralelo dependiendo de como se conecten. En caso de la capacidad equivalente cuando están conectados en serie es

$$C_{eq} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} \quad (4.5)$$

Mientras que cuando están asociados en paralelo, la capacidad equivalente es

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (4.6)$$

---

## Energía Electrostática

La energía electrostática de un sistema es el equivalente a la suma de todos los trabajos que fueron necesarios para formar ese sistema de cargas, ya sea discreto o continuo.

Para un sistema de  $N$  cargas puntuales, la energía del sistema está dado por

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i) \quad (4.7)$$

Donde  $V(\vec{r}_i)$  es el potencial evaluado en cada posición  $\vec{r}_i$  de una de las  $N$  carga. Para un sistema continuo de carga, la energía puede ser análogamente determinada como

$$U = \frac{1}{2} \int dq(\vec{r}') V(\vec{r}') \quad (4.8)$$

Otra forma equivalente para distribuciones continuas de carga es

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{Todo el Espacio}} |\vec{E}|^2 dV \quad (4.9)$$

Para el caso de un condensador, la energía puede ser obtenida a partir de

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad (4.10)$$



## Recomendaciones

- Dentro de los materiales que se estudian en un curso tradicional de electromagnetismo, los conductores tienen la gracia de poseer sólo “carga libre” (sin ligaduras a otra carga). Al ser un conductor una equipotencial, la carga puede moverse libremente entre las superficies del conductor.
- La capacidad de un condensador sólo depende de la geometría de éste. La capacidad es una constante del sistema (ie. si la diferencia de potencial entre los dos conductores aumenta al doble, la carga sobre los conductores también lo hará).
- Las Ecuaciones 4.8, 4.9 y 4.10 son equivalentes, todas deberían llevar al mismo resultado. Cuál usar dependerá del problema y de los datos que se entreguen.

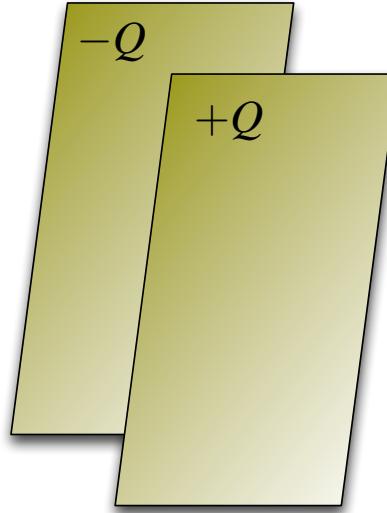


## II. Problemas Propuestos

### Problema 4.1



- Calcule la fuerza eléctrica que actúa sobre las placas de un condensador de placas planas, cargado con carga  $Q$ .
- Considere que la carga  $Q$  sobre las placas del condensador se mantiene y que su capacidad es  $C$ . Calcule el trabajo que se realiza al llevar las placas a la mitad de la distancia original, manteniendo la carga constante. Puede suponer que las placas poseen una área  $A$  muy grande.
- Este nuevo condensador se conecta en paralelo con otro condensador inicialmente descargado e igual al condensador de la parte (a). Calcule la diferencia de potencial entre las placas del condensador equivalente.

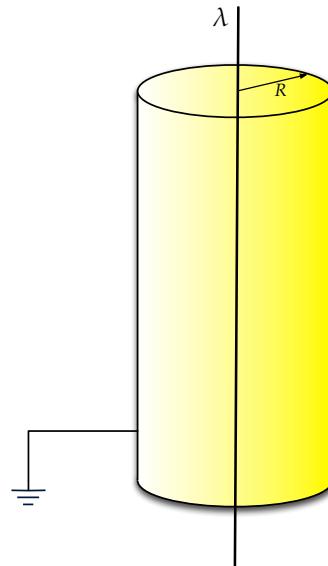


### Problema 4.2



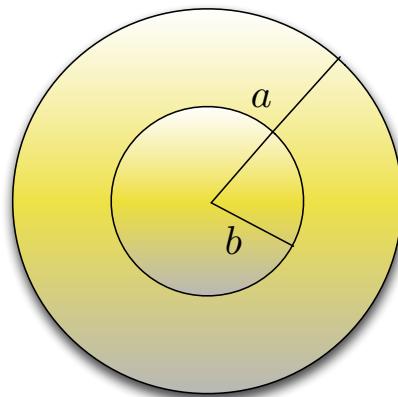
Un alambre infinito tiene una distribución lineal de carga  $\lambda > 0$ . El alambre se encuentra ubicado en el centro de una superficie cilíndrica conductora infinita muy delgada de radio  $R$  conectada a tierra como se muestra en la Figura.

- Encuentre la densidad de carga superficial inducida  $\sigma$  en la superficie interior conductora.
- Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.
- Encuentre el potencial eléctrico en todo el espacio.

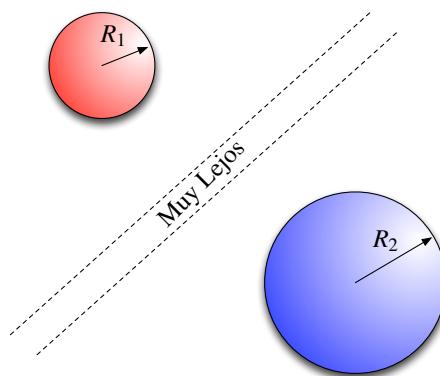


**Problema 4.3**

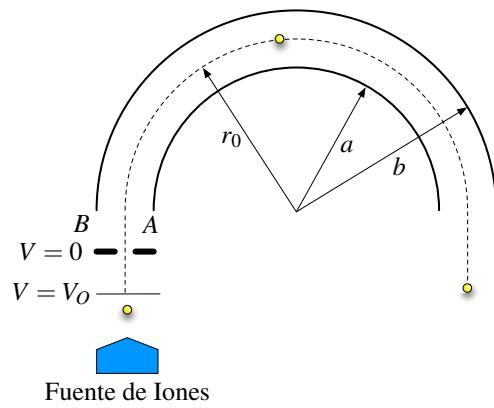
Se desea diseñar un condensador esférico a partir de un casquete conductor esférico de radio exterior  $a$ , que sea capaz de almacenar la mayor cantidad de energía posible, sujeto a la restricción que el campo eléctrico en la superficie de la esfera conductora interior, concéntrica con el casquete y de radio  $b < a$ , no pueda exceder un valor dado  $E_0$ . Calcule, en función de  $E_0$ ,  $a$  y constantes, el valor que debe tener el radio  $b$  y la magnitud de la energía que puede almacenar el conductor.

**Problema 4.4**

Se tienen dos esferas conductoras de radio  $R_1$  y  $R_2$  separadas entre sí una distancia suficientemente grande que asegura que cualquier carga sobre ellas se distribuye uniformemente, sin que la presencia de una esfera afecte a la otra. Se desea distribuir una carga  $Q$  entre las dos esferas de manera que la energía potencial electrostática del sistema de las dos esferas sea mínima. Claramente, en una esfera habrá  $Q - q$  y en la otra  $q$ . ¿Cuánto vale  $q$ , cuál es energía total y cuál es el potencial de cada esfera cuando se alcanza la condición de energía mínima?

**Problema 4.5**

Un ión es acelerado desde el reposo hasta una diferencia de potencial  $V_0$  para luego entrar en una región entre dos electrodos cilíndricos muy largos  $A$  y  $B$ , de radios  $a$  y  $b$  respectivamente ( $a < b$ ). El ión recorre una media circunferencia de radio  $r_0$  haciendo una trayectoria circular. Despreciando efectos de borde y asumiendo que los cilindros son muy largos en comparación al espacio que los separa, encuentre la diferencia de potencial  $V_{BA}$ .

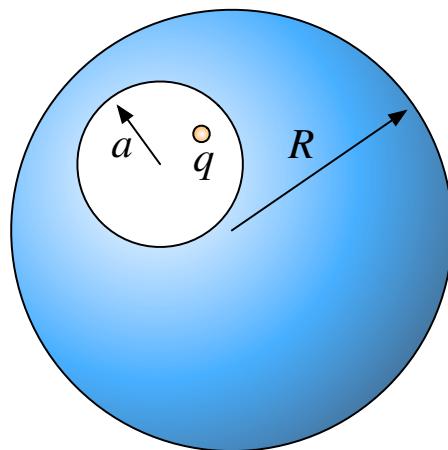


## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

### Problema 4.6

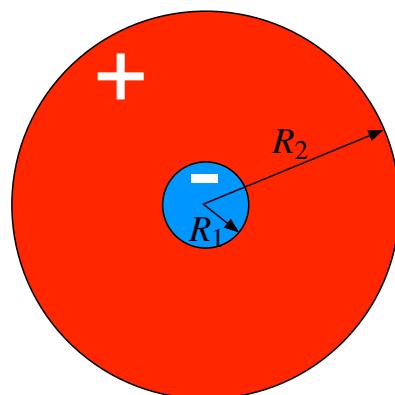
Una esfera maciza conductora de radio  $R$  tiene un cavidad esférica de radio  $a$  dentro de ella ( $a < R$ ). Dentro de la cavidad existe una carga puntual  $q$  la cual se ubica en un punto dentro de ella (no necesariamente el centro).

- Determine la carga total inducida en la superficie de la cavidad esférica de radio  $a$ . Indique cualitativamente como es la densidad superficial de carga sobre ella.
- Determine la carga total inducida en la superficie exterior de la esfera de radio  $R$ . Indique cualitativamente como es la densidad superficial de carga sobre ella.
- Indique cambian las respuestas anteriores si: (i) se acerca una carga  $q'$  a distancia  $2R$  del centro de la esfera de radio  $R$  (ii) se conecta la esfera de radio  $R$  a una fuente de tensión  $V_0$ .



### Problema 4.7

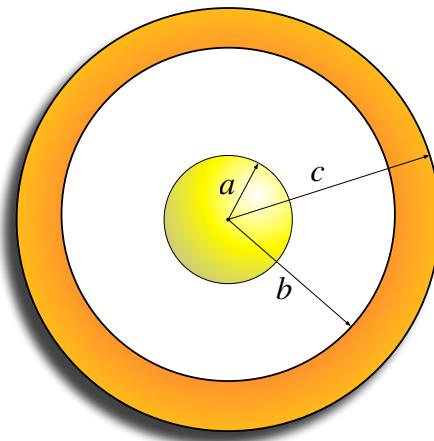
Uno de los primeros modelos de átomo, como un ente compuesto de partes cargadas, lo propuso el descubridor del electrón Joseph John Thomson en 1904. Este modelo, también conocido como *el modelo del pastel de fresas*, concibe al átomo como una esfera de carga positiva, en la cual están incrustados los electrones. En el espíritu del *modelo del pastel de fresas*, modelemos un átomo de hidrógeno (en equilibrio estático) como una esfera de radio  $R_1$  de carga negativa  $-e$  uniformemente distribuida en su volumen (el *electrón fresa*), rodeada de una esfera más grande (concéntrica a la primera), de radio  $R_2 > R_1$ , con carga positiva  $+e$  uniformemente distribuida en el volumen comprendido entre  $R_1$  y  $R_2$ . Determine la energía de formación de este átomo (i.e. el trabajo necesario para formarlo trayendo las cargas desde el infinito).



**Problema 4.8**   

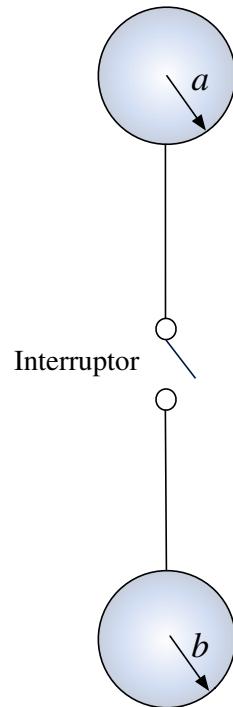
Considere una esfera maciza conductora de radio  $a$  se encuentra a un potencial  $V_0$  en toda su superficie con respecto al infinito. La esfera esta recubierta por un casquete esférico conductor de radio interno  $b$  y radio externo  $c$ .

- Determine el campo eléctrico y el potencial eléctrico en todo el espacio. Además encuentre las densidades de carga inducidas en los conductores.
- Si el casquete esférico se conecta a tierra, ¿cómo cambian sus respuestas anteriores?.

**Problema 4.9**   

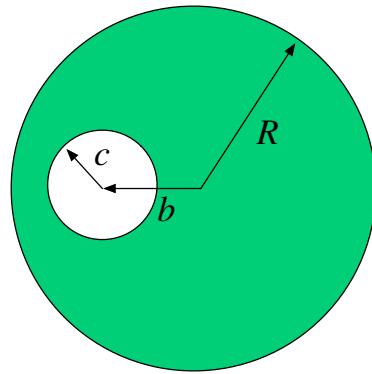
Considere dos esferas conductoras de radios  $a$  y  $b$ . Las esferas están lo suficientemente lejos una de otra como para despreciar su interacción, (i.e. el equilibrio electrostático de una esfera no se ve afectado por el campo que genera la carga contenida en la otra).

- Suponga que las esferas tienen cargas  $Q_1$  y  $Q_2$ , respectivamente. Las esferas se ponen en contacto mediante un cable lo suficientemente largo, el cual posee un interruptor. Se conectan las dos esferas y se espera hasta que el sistema alcance el equilibrio electrostático, para luego desconectar el interruptor. Determine la carga que posee cada esfera luego que se desconecta el interruptor. ¿Qué esfera queda con mayor carga?.
- Considera ahora que las esferas están descargadas y desconectadas. Suponga ahora que la distancia que separa las esferas es  $d \gg a, b$  desde sus centros. Considerando que dos conductores cualesquiera pueden formar un capacitor, determine la capacitancia de esta configuración.



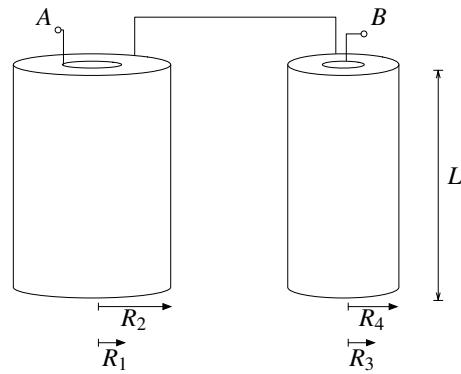
**Problema 4.10**   

Considere una esfera maciza conductora de radio  $R$  con una burbuja esférica excéntrica de radio  $c$ . El centro de la burbuja está a una distancia  $b$  del centro de la esfera metálica. La esfera tiene una carga  $Q$ . Determine el potencial en el interior de la burbuja. ¿Cómo se modifica el resultado si la burbuja no es esférica?



**Problema 4.11**   

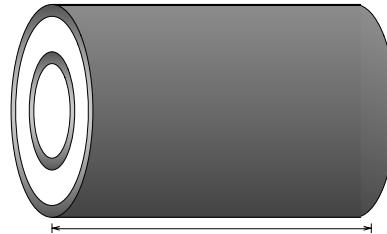
Considere dos condensadores cilíndricos como se indican en la figura. Los condensadores tienen radios  $R_1$  y  $R_2$  y el otro  $R_3$  y  $R_4$  (ver figura), determine la capacitancia equivalente entre los puntos  $A$  y  $B$ . Suponga que  $R_1, R_2, R_3, R_4 \ll L$ .



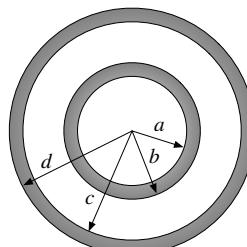
**Problema 4.12**   

Un sistema consiste de dos cascarones conductores cilíndricos concéntricos de longitud  $L \gg d$  ( $a, b, c, d$  definidos en la figura). El cascarón interior contiene una carga total  $+Q$  y el exterior una carga total  $-Q$ . Determine:

- La densidad carga en cada una de las cuatro superficies conductoras.
- El potencial en todo el espacio.
- La diferencia de potencial de los conductores cilíndricos.



(a) Vista Exterior



(b) Vista Interior



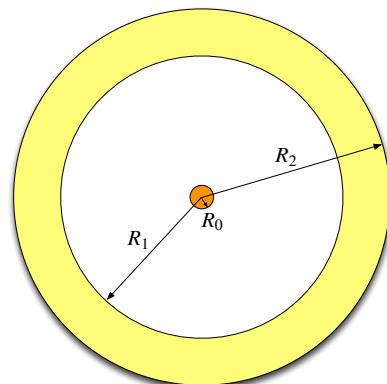
**Problema 4.13**   

Una carga  $+Q$  se encuentra inserta en un alambre conductor de largo  $L$  y radio  $R_0$  muy pequeño. Un cascarón cilíndrico conductor neutro de radios interno  $R_1$  y externo  $R_2$  y largo  $L$  es ubicado simétricamente alrededor del alambre (ver figura). Tener en cuenta que:  $R_0 \ll R_1$ ,  $R_2 \ll L$ . Calcule:

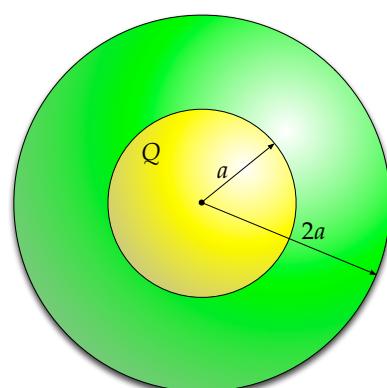
- La densidad lineal de carga  $\lambda$  del alambre.
- La densidad superficial de carga en la capa interna y externa del cascarón; y la densidad volumétrica de carga dentro del conductor.
- El campo eléctrico en todo el espacio.

Ahora deposite una carga  $-Q$  en el cascarón cilíndrico, calcule:

- Las nuevas densidades de carga superficiales en las capas interna y externa del cascarón, y también la densidad volumétrica dentro de éste.
- El nuevo campo eléctrico en todo el espacio.
- La diferencia de potencial entre el cilindro y el alambre  $\Delta V = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{alambre}}$ .
- La capacidad (o capacitancia) del sistema y la energía almacenada en el sistema.
- La capacidad  $C'$  si ahora el alambre tiene carga  $+2Q$  y el cascarón tiene carga  $-2Q$ .

**Problema 4.14**   

Una esfera maciza de radio  $a$  y carga  $Q$  uniformemente distribuida es blindada por una capa conductora de espesor uniforme  $a$ . La carga neta de la capa es nula. Calcule y grafique el potencial  $V(r)$  en todo el espacio. Considere  $V(r)$  nulo infinitamente lejos de la esfera.



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

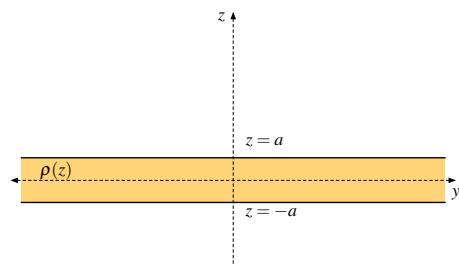
### Problema 4.15

Un bloque macizo infinito en sus coordenadas  $x$  e  $y$ , posee su espesor entre  $z = a$  y  $z = -a$ . En el espacio existe una densidad de carga dada por

$$\rho(z) = \begin{cases} 0 & |z| > a \\ \rho_0 \left[ \exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) \right] & |z| \leq a \end{cases}$$

con  $\rho_0$  y  $\delta$  constantes positivas conocidas.

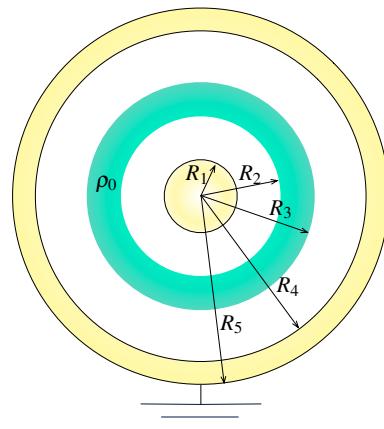
- El campo eléctrico en todo el espacio.
- Si  $\delta \ll a$ , determine nuevamente el campo eléctrico en el espacio ¿qué tipo de comportamiento presenta el material?. Justifique su respuesta. Dibuje las líneas de campo en la proximidad del material considerando la aproximación.
- Usando el campo eléctrico calculado en b) determine el potencial electrostático en todo el espacio. Use como referencia  $V(z = -a) = V_0$ . Dibuje claramente las superficies equipotenciales.



### Problema 4.16

Sean dos cilindros infinitos concéntricos conductores, uno de ellos macizo de radio  $R_1$ , y el otro un cascarón de radios  $R_4$  y  $R_5$  conectado a tierra, como muestra la figura. Se coloca una densidad volumétrica de carga  $\rho_0$  entre los cilindros de ancho ( $R_3 - R_2$ ).

- Determine el campo eléctrico en todo el espacio y las densidades de cargas inducidas en las superficies conductoras.
- Calcule la diferencia de potencial entre los conductores.



### III. Soluciones

#### Solución 4.1

- a) La energía de un condensador es  $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ , dado que un condensador es de placas paralelas su capacitancia está dada por  $C = \frac{A\epsilon_0}{z}$  donde  $A$  es el área de las placas y  $z$  la distancia que las separa, por lo que la fuerza es

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial z} \hat{z} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} \hat{z} = -\frac{1}{2} \frac{Q\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$$

- b) Si se desea disminuir a la mitad la distancia entre las placas del condensador  $C = \frac{A\epsilon_0}{z}$ , se tiene que la nueva capacitancia vale

$$C' = \frac{A\epsilon_0}{\frac{z}{2}} = 2C$$

Por lo que el trabajo puede ser calculado por la diferencia de energías que experimenta el condensador

$$W = U_{\text{final}} - U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{2C} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = -\frac{Q^2}{4C}$$

- c) En este caso los condensadores son conectados en paralelo, por lo que la capacitancia del condensador equivalente es

$$C_{eq} = C + 2C = 3C$$

donde la diferencia de potencial queda determinada por

$$\Delta V = \frac{Q}{3C}$$

#### Solución 4.2

- a) Para iniciar el problema hay calcular el campo eléctrico usando la ley de Gauss. Para  $r \leq R$  se tiene que:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \implies E(r) 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

De este resultado ya puede deducirse la densidad de carga, dado que en el borde de un conductor se tiene que  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\hat{r})$ . El resultado anterior tiene que ser igual a

$$\vec{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{r}, \text{ por lo que}$$

$$\sigma = -\frac{\lambda}{2\pi R}$$



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

- b) Luego para  $r > R$ : Dado que la capa externa del conductor está conectada a tierra, éste posee potencial cero en toda su superficie lo que provoca que solamente exista la carga negativa anteriormente calculada. Por lo tanto, volviendo a usar ley de Gauss:

$$\iint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L + (-\frac{\lambda}{2\pi R}) \cdot 2\pi RL}{\varepsilon_0} = 0 \implies \vec{E} = 0$$

Notar que la conexión a tierra provoca físicamente una descarga de la capa exterior del conductor.

- c) Para el cálculo de potenciales hay que notar que para  $r > R$  se tiene que

$$\vec{E} = -\nabla V = 0 \implies V(r) = \text{cte.}$$

Luego como el potencial es continuo y  $V(R) = 0$  (conexión a tierra) se deduce que

$$V(r) = V(R) = 0$$

Finalmente para  $r < R$  se tiene que:

$$V(r) = V(r) - V(R) = - \int_R^r E(r) dr = - \int_R^r \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

### Solución 4.3

Suponiendo una carga  $Q$  en la superficie conductora de radio  $b$ , entonces el campo eléctrico a una distancia  $r$  del origen será de la forma:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \implies V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right)$$

Donde  $V$  es la diferencia de potencial entre la superficie de radio interior y exterior. De esta manera, se obtiene la capacidad del sistema:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{a - b}$$

Por otro lado, tomando el caso límite  $r = b$  en el cual el campo eléctrico alcanza su máximo valor posible  $E(r = b) = E_0$ , se tiene:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \implies Q = 4\pi b^2 \sigma = 4\pi b^2 \varepsilon_0 E_0 \implies E(r) = \frac{b^2 E_0}{r^2}$$

Luego se usan estos valores obtenidos para calcular la energía del sistema:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{2\pi\varepsilon_0 b^3 E_0^2 (a - b)}{a}$$



Ahora para encontrar su máximo (o mínimo):

$$\frac{dU}{db} = \frac{2\pi\varepsilon_0 E_0^2}{a} (3ab^2 - 4b^3) = 0 \implies b = \frac{3a}{4}$$

Luego calculando la segunda derivada:

$$\frac{d^2U}{db^2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 E_0^2}{a} (6ab - 12b^2) \implies U''\left(b = \frac{3a}{4}\right) = \frac{2\pi\varepsilon_0 E_0^2}{a} \left(\frac{18a^2 - 27a^2}{4}\right) < 0$$

Por lo tanto,  $U\left(b = \frac{3a}{4}\right)$  es máximo, con:

$$U\left(b = \frac{3a}{4}\right) = \frac{27\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^3}{128}$$

#### Solución 4.4

Se supondrá que la esfera conductora de radio  $R_1$  tiene una carga  $Q - q$  y que la esfera conductora de radio  $R_2$  tiene una carga  $q$ . Los campos eléctricos que generan ambas esferas son

$$\vec{E}_1(r_1 > R_1) = \frac{Q - q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \hat{r}_1 \quad \vec{E}_2(r_2 > R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \hat{r}_2$$

Donde  $\hat{r}_1$  y  $\hat{r}_2$  son vectores unitarios en coordenadas esféricas con origen en las esferas  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente. Dado que las dos esferas están muy alejadas entre sí, se considera que el campo eléctrico de una no afecta sobre la otra, por lo que la energía de la esfera de radio  $R_1$  es

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\text{Todo el Espacio}} |E_1|^2 d\tau \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^\infty \left( \frac{Q - q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \right)^2 r_1^2 \sin\theta dr_1 d\theta d\varphi \\ &= \frac{(Q - q)^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^\infty \frac{dr_1}{r_1^2} \\ &= \frac{(Q - q)^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} \end{aligned}$$

Análogamente, se tiene que  $U_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$ . Luego, la energía total es

$$U_T = U_1 + U_2 = \frac{(Q - q)^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Dado que se desea encontrar un mínimo o un máximo

$$\frac{dU_T}{dq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ -\frac{Q - q^*}{R_1} + \frac{q^*}{R_2} \right] = 0 \implies q^* = \frac{QR_2}{R_1 + R_2}$$



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

Lo que es efectivamente mínimo ya que

$$\frac{d^2U_T}{dq^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] > 0$$

Por lo que la energía mínima total está dada por

$$U_{min} = \frac{(Q - q^*)^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q^{*2}}{8\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)}$$

Por lo tanto, los potenciales a mínima energía son

$$V_1(R_1) = \int_{R_1}^{\infty} E_1(r_1) \hat{r}_1 \cdot dr_1 \hat{r}_1 = \frac{Q - q^*}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)}$$

$$V_2(R_2) = \int_{R_2}^{\infty} E_2(r_2) \hat{r}_2 \cdot dr_2 \hat{r}_2 = \frac{q^*}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)}$$

### Solución 4.5

Dada la configuración de la figura, se llamará  $V_A$  y  $V_B$  a los potenciales de la placa interior y exterior respectivamente. Dado que inicialmente el ión de masa  $m$  y carga  $q$  se encuentra en reposo y es acelerado mediante una diferencia de potencial, se tiene que por conservación de la energía

$$U_{inicial} + K_{inicial} = U_{final} + K_{final} \implies \frac{1}{2}mv_{inicial}^2 + qV_{inicial} = \frac{1}{2}mv_{final}^2 + qV_{final}$$

De este modo si  $v_{inicial} = 0$ ,  $V_{inicial} = V_0$ ,  $V_{final} = 0$ , se obtiene que la velocidad con la cual el ión entra a las placas cilíndricas es

$$v = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$$

Por otra parte, si se supone una densidad de carga  $\sigma_a$  (a priori desconocida) en el electrodo interior y se obvian efectos de borde, el campo eléctrico que existe dentro de los electrodos semicilíndricos es el mismo en el que existiría en un capacitor cilíndrico completo, por lo tanto por ley de Gauss para  $r \in [a, b]$  se tiene que

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \implies E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\sigma_a \cdot 2\pi a L}{\varepsilon_0} \implies \vec{E}(r) = \frac{\sigma_a a}{\varepsilon_0 r} \hat{r}$$

Volviendo a analizar el movimiento del ión, si se desea que cumpla un movimiento circunferencia de radio  $r_0$ , su aceleración en coordenadas cilíndricas debe estar dada por

$$\vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \hat{r} \implies \vec{a} = -\frac{v^2}{r_0} \hat{r}$$



Por Newton

$$\vec{F} = q\vec{E}(r_0) = m\vec{a} \implies q \cdot \frac{\sigma_a a}{\varepsilon_0 r_0} = -m \cdot \frac{v^2}{r_0} \implies \sigma_a = -\frac{2V_0 \varepsilon_0}{a}$$

Reemplazando

$$\vec{E}(r) = -\frac{2V_0}{r}\hat{r}$$

Finalmente

$$V_B - V_A = \int_a^b \frac{2V_0}{r} dr = 2V_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

### Solución 4.8

- a) Se supondrá conocida la densidad de carga  $\sigma_a$  de la esfera de radio  $a$ . Dada la simetría esférica y que el conductor de radios  $b$  y  $c$  está descargado se tiene por ley de Gauss que

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi a^2 \sigma_a}{\varepsilon_0} \implies E(r) = \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

En resumen

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} & a \leq r < b \\ 0 & b \leq r < c \\ \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} & r \geq c \end{cases}$$

En los intervalos  $[0, a) \cup [b, c)$  el campo eléctrico es 0 debido a que en ese espacio hay un conductor.

Luego dado que el potencial sobre en la esfera es  $V_0$  se tiene que

$$V_0 = - \int_{\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^c \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} - \int_c^b 0 \cdot dr \hat{r} - \int_b^a \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)$$

De la última expresión

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2 \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)}$$

Dado que esta carga induce las otras cargas de inducción en el otro conductor, se cumple que

$$4\pi a^2 \sigma_a = -4\pi b^2 \sigma_b \quad (\text{inducción de carga en la superficie interior})$$

$$4\pi b^2 \sigma_b = -4\pi c^2 \sigma_c \quad (\text{inducción de carga en la superficie exterior})$$



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

Por lo tanto

$$\sigma_b = -\frac{a^2}{b^2} \sigma_a = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{b^2 \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)}$$

$$\sigma_c = -\frac{b^2}{c^2} \sigma_b = \frac{\varepsilon_0 V_0}{c^2 \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)}$$

Usado lo calculado en la parte anterior se tiene que el campo eléctrico es

- Si  $r \in [0, a) \cup [b, c)$

$$\vec{E} = 0$$

- Si  $r \in (a, b] \cup (c, \infty)$ .

$$\vec{E} = \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{V_0}{\left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) r^2} \hat{r}$$

El potencial estará dado por intervalos

- Si  $r \in (c, \infty)$ .

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r} = \frac{V_0}{\left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) r}$$

- Si  $r \in (b, c]$ .

$$V(r) = - \int_{\infty}^c \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} - \int_c^r 0 \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 c} = \frac{V_0}{\left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) c}$$

- Si  $r \in (a, b]$ .

$$V(r) = - \int_{\infty}^c \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} - \int_c^b 0 \hat{r} \cdot dr \hat{b} - \int_b^r \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 c} + \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

$$V(r) = \frac{V_0 \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{r} \right)}{\left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)}$$

- Si  $r \in [0, a]$ .

$$V(r) = V_0$$

- b) La conexión a tierra provoca los siguientes cambios:



- La conexión a tierra provoca por definición potencial nulo en cada punto del conductor, luego para que esta condición se cumpla es necesario que cargas negativas suban de la tierra y anulen la carga que existe en la capa de radio  $c$  del conductor. En consecuencia se tendrá  $\sigma_c = 0$ , con lo cual se cumple que el potencial es nulo en el conductor, ya que  $\sigma_b$  anula el campo eléctrico es producido por  $\sigma_a$  (las cuales se mantienen constantes). De esta forma, el potencial es nulo para cualquier radio  $r > c$ .
- El campo eléctrico en ese caso vale
  - Si  $r \in (0, a) \cup [b, \infty)$ .

$$\vec{E} = 0$$

- Si  $r \in [a, b)$ .

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)r^2} \hat{r}$$

- El potencial en este caso vale

- Si  $r \in [b, \infty)$ .

$$V(r) = 0$$

- Si  $r \in [a, b)$ .

$$V(r) = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

- Si  $r \in [0, a)$ .

$$V(r) = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

### Solución 4.10

La esfera conductora tiene una carga  $+Q$  que se puede distribuir tanto en su superficie exterior como dentro de la cavidad interior. Dado que no existe ninguna carga dentro de la burbuja, la carga que se acumula en el borde de la misma es nula. Luego, la carga  $+Q$  se distribuye homogéneamente en la superficie exterior de radio  $R$ .

De lo anterior, también se deduce que el campo eléctrico es nulo en cualquier punto dentro de la esfera ( $r \leq R$ ), incluyendo los puntos dentro de la burbuja.

Entonces, el campo eléctrico para  $r \geq R$  puede ser determinado por Ley de Gauss

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

Lo anterior implica que el potencial en  $V(R)$  es

$$V(R) = - \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Como el campo eléctrico es nulo en todos los puntos  $r \leq R$ , el potencial es constante en todos los puntos (incluyendo la cavidad) y tiene un valor de  $V(R)$  (valor del borde). Nótese el hecho que no es necesario una forma esférica para que este análisis siga siendo válido.

### Solución 4.12

- a) Dada la simetría cilíndrica del problema, es posible usar la Ley de Gauss. Para encontrar las densidades de cargas inducidas en las superficies conductoras  $\sigma_a$  y  $\sigma_b$  se aplica Gauss para un  $r \in [a, b]$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_a \cdot 2\pi a L}{\epsilon_0}$$

Por una parte dentro de un conductor siempre  $\vec{E} = 0$ , por lo que  $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ . Luego se debe cumplir que

$$\frac{\sigma_a \cdot 2\pi a L}{\epsilon_0} = 0 \implies \sigma_a = 0$$

Como el conductor interior está cargado con  $+Q$ , las densidades de sobre sus superficies deben cumplir que

$$\sigma_a \cdot 2\pi a L + \sigma_b \cdot 2\pi b L = Q \implies \sigma_b = \frac{Q}{2\pi b L}$$

Análogamente, al aplicar Gauss para  $r \in [c, d]$  se tiene que

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{Q + \sigma_c \cdot 2\pi c L}{\epsilon_0} = 0 \implies \sigma_c = -\frac{Q}{2\pi c L}$$

Finalmente como el conductor está cargado  $-Q$  se tiene que

$$\sigma_c \cdot 2\pi c L + \sigma_d \cdot 2\pi d L = -Q \implies \sigma_d = 0$$

- b) Para determinar el potencial, previamente hay que determinar el campo eléctrico. En base a lo anterior para  $r < b$  se tiene  $q_{enc} = 0$ , luego

$$\vec{E} = 0$$

Para  $r \in (b, c)$  se tiene  $q_{enc} = Q$ , por lo que

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \implies E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L} \hat{r}$$

Luego para  $r > c$  nuevamente  $q_{enc} = 0$  (notar que toda la carga  $-Q$  se acumula en la superficie en  $r = c$ ), entonces

$$\vec{E} = 0$$



Entonces tomando el potencial  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ , se obtiene que

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para un  $r > c$  se tiene que

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E}(r > c) \cdot d\vec{l} = 0$$

Para  $r \in [b, c]$  se tiene que

$$V(r) = - \int_{\infty}^c \vec{E}(r > c) \cdot d\vec{l} - \int_c^r \vec{E}(b < r < c) \cdot d\vec{l} = - \int_c^r \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{r}\right)$$

Finalmente para  $r < b$

$$V(r) = - \int_{\infty}^c \vec{E}(r > c) \cdot d\vec{l} - \int_c^b \vec{E}(b < r < c) \cdot d\vec{l} - \int_b^r \vec{E}(r < b) \cdot d\vec{l} = - \int_c^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

c) La diferencia de potencial está dada por

$$V(c) - V(b) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

#### Solución 4.14

Para iniciar este problema se debe primero intuir como será el potencial en todo el espacio, para ello se debe notar lo siguiente:

- La función potencial  $V(r)$  es continua en todo el espacio.
- Un conductor es una equipotencial, por lo que en cualquier punto dentro de él la función  $\phi$  tendrá el mismo valor. Por lo tanto para  $r \in [a, 2a]$  la función  $V(r)$  valdrá un valor  $V_0$  constante.
- La Ley de Gauss es ciega, sólo le importa la cantidad de carga encerrada dentro de la superficie gaussiana que se este tomando (respetando la simetría del problema) por lo que para  $r > 2a$  el campo eléctrico será el mismo si existiese o no el conductor. Evidentemente pasará lo mismo para  $r < a$ .

Dadas las consideraciones anteriores y la simetría esférica, procedemos a calcular el campo eléctrico en todo el espacio (para luego calcular el potencial).



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

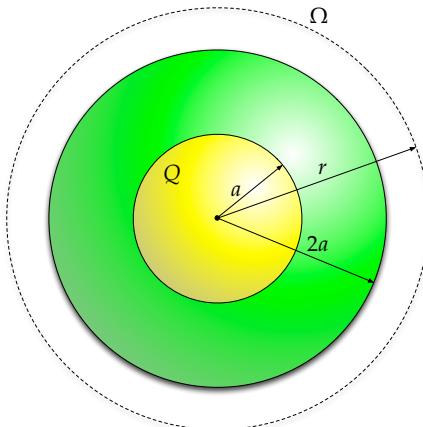


Figura 4.1: Campo Eléctrico para  $r > 2a$

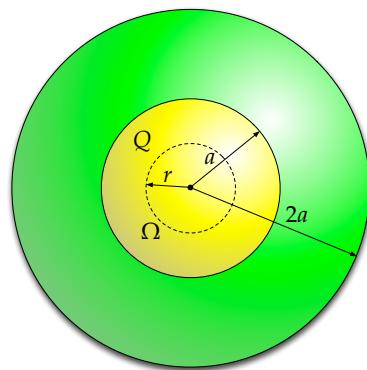


Figura 4.2: Campo Eléctrico para  $r < a$

- Para  $r > 2a$ .

$$\iint_{\Omega} \vec{E}(r) d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- Para  $a < r < 2a$ .

$$\vec{E}(r) = 0$$

- Para  $r < a$ .

$$\iint_{\Omega} \vec{E}(r) d\vec{S} = \frac{q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon_0} \implies E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 a^3} \implies \vec{E}(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \hat{r}$$

Luego el potencial estará dado por

- Para  $r > 2a$ .

$$V(r) = \int_{\Gamma} \vec{E}(r) dr = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Para  $a \leq r \leq 2a$ . Dado que el potencial es continuo, tendrá el mismo valor que tiene en la frontera para el caso anterior, es decir:

$$V(r) = V(2a) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

- Para  $r < a$ .

$$V(r) = - \int_{\infty}^r E(r) dr = - \left( \int_{\infty}^{2a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \underbrace{\int_{2a}^a E(r) dr}_{=0} + \int_a^r \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} dr \right) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q(a^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 a^3}$$



Finalmente el gráfico estará dado por

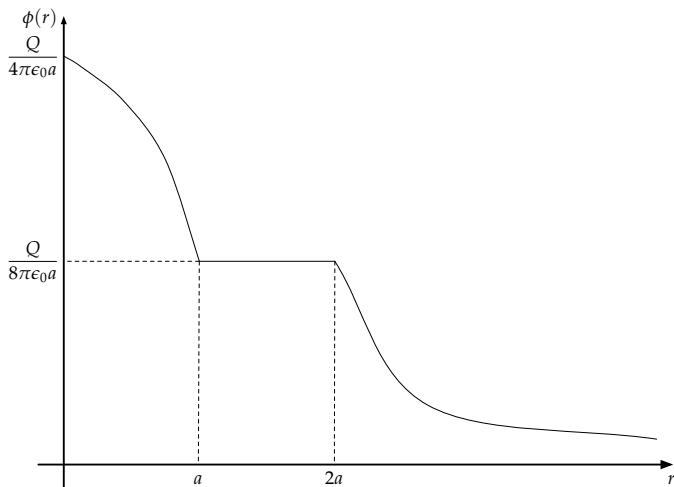


Figura 4.3: Gráfico de la función  $V(r)$

**Solución 4.15**

- a) Usando la geometría del problema, se puede deducir que el campo eléctrico es de la forma  $\vec{E} = E(z)\hat{z}$ . En particular cabe notar que como  $\rho(z) = \rho(-z)$  el campo eléctrico en un punto  $z_0$  sobre el eje  $z$  apuntará en el sentido inverso en punto  $-z_0$  de modo que  $|\vec{E}(-z_0)| = |\vec{E}(z_0)| \implies \vec{E}(-z_0) = -E(z_0)\hat{z}$  (ie. existe una simetría del campo eléctrico con respecto al plano  $xy$ ). Para encontrar el valor del campo eléctrico es necesario usar la ley de Gauss tomando un cilindro centrado en origen con tapas de área  $A$ . Luego



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

- Para  $|z_0| \leq a$

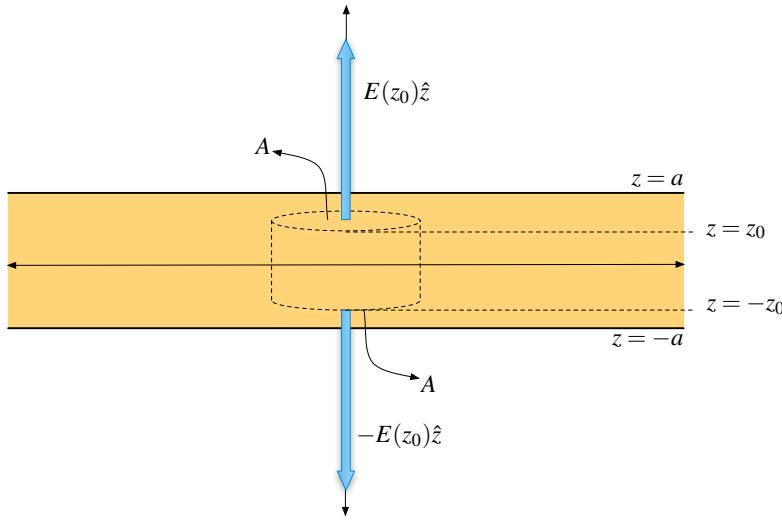


Figura 4.4: Superficie Gaussiana para  $|z| \leq a$

Usando ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en punto  $z_0 \in [-a, a]$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\text{Tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon_0} \\
 & E(z_0)\hat{z} \cdot A\hat{z} + -E(z_0)\hat{z} \cdot -A\hat{z} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\text{Cilindro}} \rho(z) dV \\
 & 2A \cdot E(z_0) = \frac{A}{\varepsilon_0} \int_{-z_0}^{z_0} \rho_0 \left[ \exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) \right] dz \\
 & E(z_0) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left[ \int_{-z_0}^{z_0} \exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) dz + \int_{-z_0}^{z_0} \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) dz \right] \\
 & = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left[ -\delta \exp\left(-\frac{z_0+a}{\delta}\right) \Big|_{-z_0}^{z_0} + \delta \exp\left(\frac{z_0-a}{\delta}\right) \Big|_{-z_0}^{z_0} \right] \\
 & = \frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \left[ -\exp\left(-\frac{z_0+a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z_0-a}{\delta}\right) \right] \\
 & = -\frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \left[ \exp\left(-\frac{z_0+a}{\delta}\right) - \exp\left(\frac{z_0-a}{\delta}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Ahora se puede concluir que  $\vec{E}(z_0) = E(z_0)\hat{z}$  para  $z_0 \in [0, a]$  y  $\vec{E}(z_0) = -E(z_0)\hat{z}$  para  $z_0 \in [-a, 0]$ , pero dado que  $E(-z_0) = -E(z_0)$ , se resume que

$$\vec{E}(z_0) = -\frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \left[ \exp\left(-\frac{z_0+a}{\delta}\right) - \exp\left(\frac{z_0-a}{\delta}\right) \right] \hat{z}$$



- Para  $|z_0| > a$

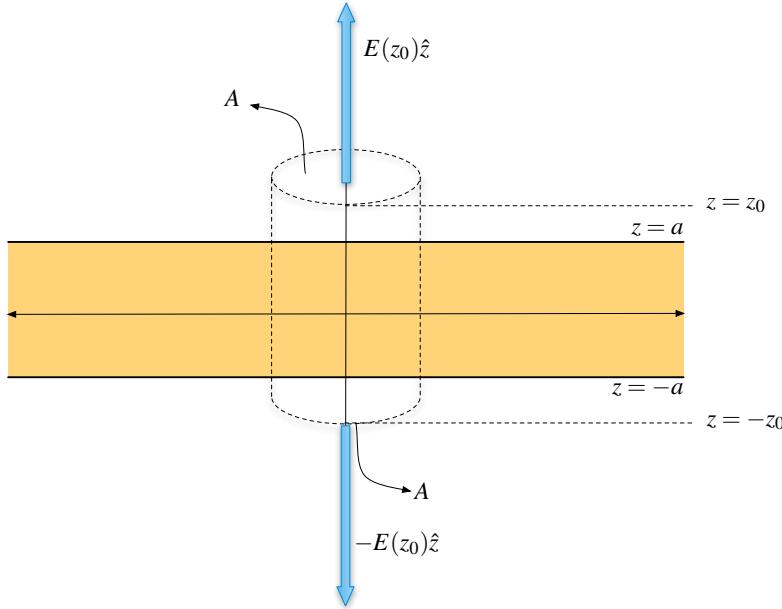


Figura 4.5: Superficie Gaussiana para  $|z| > a$

Análogo al cálculo anterior, se tiene que para un punto  $z_0$  fuera del bloque macizo se tiene

$$\begin{aligned} \iint_{\text{Tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon_0} \\ E(z_0) &= \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_{-a}^a \rho_0 \left[ \exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) \right] dz \\ &= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left[ \int_{-a}^a \exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) dz + \int_{-a}^a \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) dz \right] \\ &= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left[ -\delta \exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) \Big|_{-a}^a + \delta \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) \Big|_{-a}^a \right] \\ &= \frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \end{aligned}$$

Por lo que se concluye que

$$\vec{E}(z_0) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \hat{z} & z_0 > a \\ -\frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \hat{z} & z_0 < -a \end{cases}$$



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

- b) La aproximación dice que  $\delta \ll a$  por lo que se asumirá que  $\frac{a}{\delta} \rightarrow \infty$ . Para  $|z| > a$ , se tiene que:

$$E(z_0) = \frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \approx \frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0}$$

Por lo tanto

$$\vec{E}(z_0) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \hat{z} & z_0 > a \\ -\frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \hat{z} & z_0 < -a \end{cases}$$

Para el caso  $|z| < a$  se puede hacer de más de una forma, una es analizando la expresión

$$\begin{aligned} E(z_0) &= \frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \left[ -\exp\left(-\frac{z_0 + a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z_0 - a}{\delta}\right) \right] \\ &= \frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) \left[ -\exp\left(-\frac{z_0}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z_0}{\delta}\right) \right] \end{aligned}$$

Se tiene que  $\exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) \rightarrow 0$ , por lo que  $E(z_0) \rightarrow 0$ . Sin embargo hay que tener cuidado ya que cuando  $z_0 \rightarrow a^-$  (en las cercanías del borde), el valor de  $\exp\left(\frac{z_0}{\delta}\right)$  se vuelve muy grande y anula el efecto anterior dejando  $E(z_0 \rightarrow a)$  constante (¡la aproximación provoca que la función  $E(z_0)$  crezca muy rápido en las cercanías de  $a^-$ !).

El análisis también es válido para  $z_0 \rightarrow -a$  por simetría.

Otra forma mucho más claro para verlo es usar una aproximación según Taylor al primer orden, es decir

$$\begin{aligned} E(z_0) &= \frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \left[ -\exp\left(-\frac{z_0 + a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z_0 - a}{\delta}\right) \right] \\ &\approx \frac{\rho_0 \delta}{\varepsilon_0} \left[ -\exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) + \frac{z_0}{\delta} \exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) + \exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) + \frac{z_0}{\delta} \exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) \right] \\ &\approx \frac{2\rho_0 z_0}{\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) \end{aligned}$$

Si examina la expresión, se sabe que el valor  $z_0$  está acotado por “ $a$ ” por lo tanto la expresión no puede crecer infinitamente y no puede contrastar el hecho que  $\exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) \rightarrow 0$ .

Se concluye que  $\vec{E} = 0$  para  $z_0 \in (-a, a)$ .



Como ya se vio, los casos interesantes ocurren en los valores  $z_0 = a$  o  $z_0 = -a$ , en el cual aparece una discontinuidad entre los valores de campo eléctrico. Dado los resultados anteriores, podemos concluir que el material se comporta como un bloque conductor, dentro de él se tiene  $\vec{E} = 0$  y fuera de él se tiene un valor constante (debido a la carga en sus caras). El término  $\rho_0\delta \rightarrow \sigma$  corresponde a la densidad de carga superficial en las caras del conductor. Las líneas de carga se representan en la Figura 4.6.

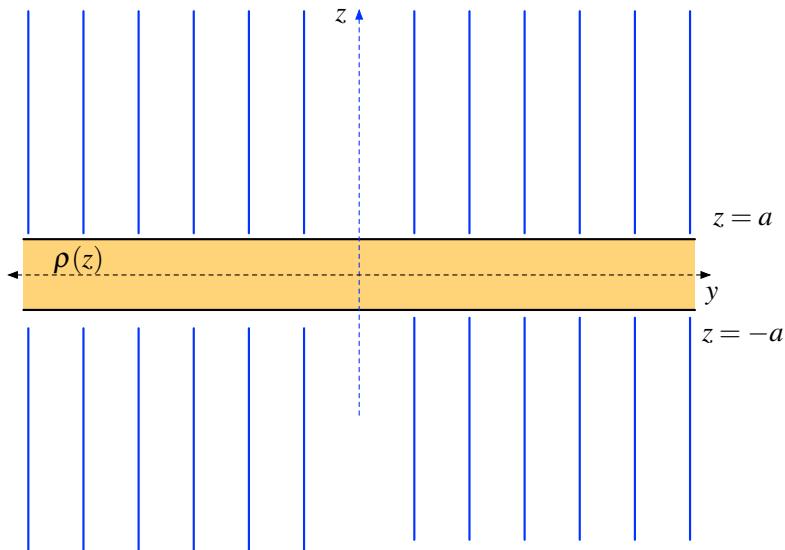


Figura 4.6: Líneas de Campo perpendiculares al bloque (en azul).

Las líneas de campo poseen esta forma debido a que siguen la dirección del campo eléctrico (paralelo al eje  $z$ ). Dentro del conductor no hay líneas debido a que no hay campo eléctrico.

- c) Usando de referencia  $V(z = -a) = V_0$  se tiene que la expresión genérica para el potencial eléctrico es

$$V(z) - V(-a) = - \int_{-a}^z E(z) dz \implies V(z) = - \int_{-a}^z E(z) dz + V_0$$

Analizando por intervalos:

- $-a \leq z \leq a$

$$V(z) = - \underbrace{\int_{-a}^z E(z) dz}_{0} + V_0 = V_0$$

- $z > a$

$$V(z) = - \underbrace{\int_{-a}^a E(z) dz}_{0} - \int_a^z E(z) dz + V_0 = V_0 - \int_a^z \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} dz = V_0 - \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} (z - a)$$



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

- $z < -a$

$$V(z) = - \int_{-a}^z E(z) dz + V_0 = V_0 - \int_{-a}^z -\frac{\rho\delta}{\varepsilon_0} dz = V_0 + \frac{\rho_0\delta}{\varepsilon_0}(z + a)$$

Notar que el valor del potencial es simétrico con respecto al plano  $xy$  en el caso que  $|z| > a$ , ya que se cumple que  $V(-z_0) = V(z_0)$ . Lo anterior es intuitivo, ya que el trabajo de mover una carga desde el origen hasta  $z_0$  será el mismo que del origen a  $-z_0$ , todo debido a la simetría.

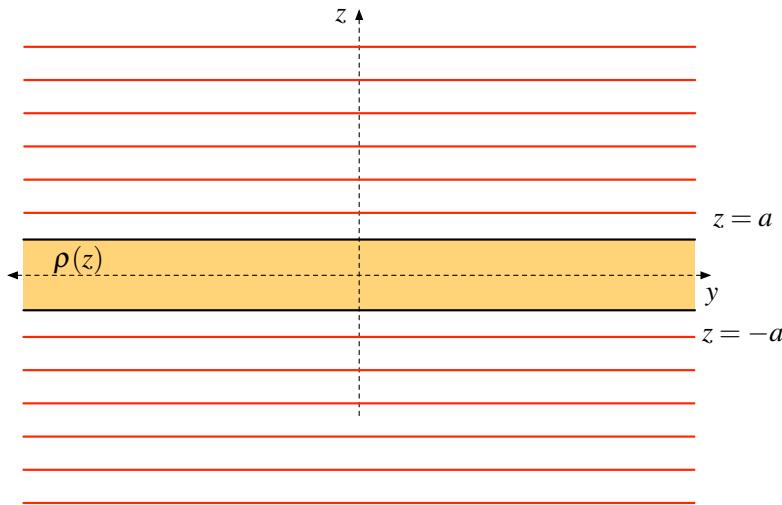


Figura 4.7: Equipotenciales paralelas al plano  $xy$  (en rojo).

Las equipotenciales son las mostradas en la Figura 4.7, estas superficies son planos paralelos al  $xy$ , ya que el potencial depende sólo del valor de la altura  $z$ .

### Solución 4.16 P ✓

a) Se consideran los distintos casos según la distancia  $r$  desde el centro de la esfera interior.

- $\vec{E}(0 < r < R_1)$

Dado que el cilindro interior es un conductor,

$$\vec{E} = 0$$

- $\vec{E}(R_1 < r < R_2)$

Considerando la simetría del problema, se puede hacer uso de la Ley de Gauss:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$



Nótese que no hay carga encerrada en el interior de un radio  $r < R_2$ , antes de la densidad de carga. Luego se tiene:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \implies \vec{E} = 0$$

La densidad de carga sobre un conductor puede ser obtenida de

$$\vec{E}(R_1) = \frac{\sigma(r = R_1)}{\epsilon_0} \hat{r} \implies \sigma(r = R_1) = 0$$

- $\vec{E}(R_2 < r < R_3)$

Haciendo uso de la Ley de Gauss con un procedimiento análogo al anterior, se tendrá que:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ \int_0^{2\pi} \int_0^h E_r dr d\theta dz &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_2}^r \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho_0 r dr d\theta dz \\ 2\pi r h E &= \frac{\rho_0 \pi (r^2 - R_2^2) h}{\epsilon_0} \\ \vec{E} &= \frac{\rho_0 (r^2 - R_2^2)}{2r\epsilon_0} \hat{r} \end{aligned}$$

- $\vec{E}(R_3 < r < R_4)$

Haciendo un cálculo similar al anterior, pero considerando que como  $r > R_3$ , la carga encerrada se considerará siempre hasta  $R_3$ . Luego:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ \int_0^{2\pi} \int_0^h E_r dr d\theta dz &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_3} \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho_0 r dr d\theta dz \\ \vec{E} &= \frac{\rho_0 (R_3^2 - R_2^2)}{2r\epsilon_0} \hat{r} \end{aligned}$$

Por otro lado,  $\vec{E}(R_4) = \frac{\sigma(r=R_4)}{\epsilon_0} (-\hat{r}) \implies \sigma(r = R_4) = -\frac{\rho_0 (R_3^2 - R_2^2)}{2R_4}$ .

- $\vec{E}(R_4 < r < R_5)$

Por tratarse del espacio interior entre conductores,

$$\vec{E} = 0$$

- $\vec{E}(R_5 < r)$

Como en  $R_5$  se tiene un casquete conectado a tierra, para  $r \geq R_5$  el campo se anulará.

Por lo cual  $\sigma(r = R_5) = 0$ .



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

b) La diferencia de potencial esta dada por la integral de camino del campo entre  $R_1$  y  $R_4$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= - \int_{R_1}^{R_4} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_{R_1}^{R_2} E(R_1 < r < R_2) dr - \int_{R_2}^{R_3} E(R_2 < r < R_3) dr - \int_{R_3}^{R_4} E(R_3 < r < R_4) dr \\
 &= - \int_{R_2}^{R_3} \frac{\rho_0 (r^2 - R_2^2)}{2r\varepsilon_0} dr - \int_{R_3}^{R_4} \frac{\rho_0 (R_3^2 - R_2^2)}{2r\varepsilon_0} dr \\
 &= - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \int_{R_2}^{R_3} r dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{R_2^2}{r} dr + \int_{R_3}^{R_4} \frac{R_3^2 - R_2^2}{r} dr \right) \\
 &= - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{R_3^2 - R_2^2}{2} + R_2^2 \ln \left( \frac{R_3}{R_2} \right) + (R_3^2 - R_2^2) \ln \left( \frac{R_4}{R_3} \right) \right)
 \end{aligned}$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 4.6

- Recuerde que el campo eléctrico dentro de un material conductor siempre es nulo. Luego, la carga inducida en el borde de la cavidad debe anular a lo que tiene adentro. La densidad de carga sobre un conductor se distribuye siempre intentando acercarse lo más posible a la carga que la induce.
- Para la superficie exterior de la esfera, la carga inducida en ese lugar no ve lo que tiene adentro (efecto conocido como jaula de Faraday).

### Indicación 4.7

- Puede determinar el campo eléctrico en todo el espacio y luego la energía electrostática mediante alguna de las fórmulas de energía electrostática.

### Indicación 4.9

- Imponga que  $Q'_1$  y  $Q'_2$  son las cargas finales de las esferas. El hecho que las dos esferas queden conectadas por un cable provoca que estén al mismo potencial (ie.  $\int_a^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \int_b^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$ ). El problema puede concluirse imponiendo que la carga se conserva, es decir  $Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$ .
- Para determinar la capacidad, asuma cargas  $Q$  y  $-Q$  en las esferas. Con ese dato, determine la diferencial de potencial entre ellas y concluya el problema.

### Indicación 4.11

- Asuma una carga  $+Q$  sobre el conductor de radio  $R_1$  y  $-Q$  sobre el radio  $R_3$  por lo cual puede determinar los campos eléctricos dentro de los condensadores. A partir de los anterior, determine diferencia de potencial entre  $R_1$  y  $R_3$ . Recuerde que el cable que conecta los conductores de radio  $R_2$  y  $R_4$  provoca que ambos estén a igual potencial.



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

### Indicación 4.13

- El cable  $R_0$  es lo suficientemente delgado para que pueda considerarlo como un cable infinito.
- El problema apunta en poder determinar el campo eléctrico. Recuerde que en los conductores sólo se acumula carga en su superficie.



## V. Respuestas

Problema	Respuestas
<b>4.1</b>	a) $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial z}\hat{z} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\hat{z}$ b) $W = -\frac{Q^2}{4C}$ c) $\Delta V = \frac{Q}{3C}$
<b>4.2</b>	a) $\sigma = -\frac{\lambda}{2\pi R}$ b) $\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}\hat{r} & r \leq R \\ 0\hat{r} & r > R \end{cases}$ c) $V(r) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right) & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$
<b>4.3</b>	$b = \frac{3a}{4}$ entonces $U = \frac{27\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^3}{128}$
<b>4.4</b>	$q = \frac{QR_2}{R_1+R_2}$ , $U_{min} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)}$ , $V_1(R_1) = V_2(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)}$
<b>4.5</b>	$V_B - V_A = 2V_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
<b>4.6</b>	a) $q_{int} = -q$ , la densidad de carga interior es mayor en los puntos más cercanos a la carga. b) $q_{ext} = -q$ , la densidad exterior es homogénea. c) (i) $q_{int} = -q$ y la densidad de carga no cambia, por otro lado $q_{ext} = q$ pero la densidad de carga deja de ser homogénea (ii) $q_{int} = -q$ y la densidad de carga no cambia, por otro lado $q_{ext} = 4\pi RV_0$ y la densidad de carga es homogénea. La conexión a la fuente carga a la esfera.
<b>4.7</b>	$U = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{5R_1} + \frac{1}{(R_2^3 - R_1^3)^{1/3}} \left[ R_2^6 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - R_2^3(R_2^2 - R_1^2) + \frac{R_2^5 - R_1^5}{5} \right] \right\}$



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES

---

<b>Problema</b>	<b>Respuestas</b>
-----------------	-------------------

---

(P)

4.8

$$\text{a)} \quad \vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})r^2} \hat{r} & a \leq r < b \\ 0 & b \leq r < c \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})r^2} \hat{r} \hat{r} & r \geq c \end{cases} \quad V(r) = \begin{cases} \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})} & 0 < r < a \\ \frac{V_0(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})} & a \leq r < b \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})c} & b \leq r < c \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})r} & r \geq c \end{cases}$$

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2 (\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})}, \quad \sigma_b = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{b^2 (\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})} \quad \text{y} \quad \sigma_c = \frac{\varepsilon_0 V_0}{c^2 (\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})}$$

$$\text{b)} \quad \vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})r^2} \hat{r} & a \leq r < b \\ 0 & b \leq r < c \\ 0 & r \geq c \end{cases} \quad V(r) = \begin{cases} \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) & 0 < r < a \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & a \leq r < b \\ 0 & b \leq r < c \\ 0 & r \geq c \end{cases}$$

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2 (\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})}, \quad \sigma_b = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{b^2 (\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})} \quad \text{y} \quad \sigma_c = 0$$

(P)

4.9

$$\text{a)} \quad Q_1^{\text{final}} = \frac{a}{a+b}(Q_1 + Q_2), \quad Q_2^{\text{final}} = \frac{b}{a+b}(Q_1 + Q_2), \quad \text{como } b > a \text{ entonces } Q_2^{\text{final}} > Q_1^{\text{final}}$$

$$\text{b)} \quad C = \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{d-b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d-a}}$$

(P)

4.10

El potencial al interior de la burbuja es  $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ , independiente si es o no esférica.

(P)

4.11

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_1 R_3 / R_2 R_4)}$$

$$\text{a)} \quad \sigma_a = 0, \quad \sigma_b = \frac{Q}{2\pi b L}, \quad \sigma_c = \frac{Q}{2\pi c L}, \quad \sigma_d = 0$$

(P)

4.12

$$\text{b)} \quad V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right) & r < b \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{r}\right) & b \leq r < c \\ 0 & r > c \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad V(c) - V(b) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\text{a)} \quad \lambda = \frac{Q}{l}$$

$$\text{b)} \quad \sigma_1 = \frac{-Q}{2\pi R_1 L}; \quad \sigma_2 = \frac{Q}{2\pi R_2 L}$$

$$\text{c)} \quad \vec{E}(r < R_0) = \vec{E}(R_1 < r < R_2) = 0; \quad \vec{E}(R_0 < r < R_1) = \frac{Q}{2\pi\rho L\varepsilon_0} \hat{r} = \vec{E}(r > R_2)$$

$$\text{d)} \quad \sigma'_1 = \frac{-Q}{2\pi R_1 L}; \quad \sigma'_2 = 0$$

(P)

4.13

$$\text{e)} \quad \vec{E}(r > R_2) = 0, \quad \text{en el resto de las zonas el campo permanece igual.}$$

$$\text{f)} \quad V = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$$

$$\text{g)} \quad C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(\frac{R_1}{R_0})} \quad U = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$$

$$\text{h)} \quad C' = C$$



---

Problema    Respuestas

---

**P** **4.14** 
$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}(a^2 - r^2) & 0 < r < a \\ \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} & a \leq r < 2a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r \geq 2a \end{cases}$$

---

**P** **4.15** **a)**  $\vec{E}(z_0) = \begin{cases} \frac{\rho_0\delta}{\varepsilon_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \hat{z} & z_0 > a \\ -\frac{\rho_0\delta}{\varepsilon_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \hat{z} & z_0 < -a \end{cases}$

**b)**  $\vec{E}(z_0) = \begin{cases} \frac{\rho_0\delta}{\varepsilon_0} \hat{z} & z_0 > a \\ -\frac{\rho_0\delta}{\varepsilon_0} \hat{z} & z_0 < -a \end{cases}$

**c)**  $V(z) = \begin{cases} V_0 & -a \leq z \leq a \\ V_0 - \frac{\rho_0\delta}{\varepsilon_0}(z - a) & z > a \\ V_0 + \frac{\rho_0\delta}{\varepsilon_0}(z + a) & z < -a \end{cases}$

---

**P** **4.16** **a)**  $\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_2 \\ \frac{\rho_0(r^2 - R_2^2)}{2r\varepsilon_0} \hat{r} & R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\rho_0(R_3^2 - R_2^2)}{2r\varepsilon_0} \hat{r} & R_3 \leq r \leq R_4 \\ 0 & r > R_4 \end{cases}$

$$\sigma(r = R_1) = 0, \sigma(r = R_4) = -\frac{\rho_0(R_3^2 - R_2^2)}{2R_4}, \sigma(r = R_5) = 0$$

**b)**  $V(R_4) - V(R_1) = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{R_3^2 - R_2^2}{2} + R_2^2 \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + (R_3^2 - R_2^2) \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right) \right)$

---



## CAPÍTULO 4. CONDUCTORES



# Ecuación de Laplace y Poisson

## I. Resumen Teórico

---

### Ecuación de Poisson y Laplace

La ecuación de Poisson puede ser obtenida juntando las ecuaciones 1.7 y 3.2, de modo que

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.1)$$

En el caso particular de espacios donde  $\rho = 0$  se tiene la Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad (5.2)$$


---

### Teoremas de Unicidad del Potencial

Primer Teorema de la Unicidad del Potencial: “*La solución de la Ecuación Laplace en un volumen  $\mathcal{V}$  está únicamente determinada si el potencial es conocido sobre la(s) superficie(s) que rodea(n) el volumen*”

Segundo Teorema de la Unicidad del Potencial: “*El campo eléctrico está únicamente determinado si da la carga total en cada conductor y el valor de la distribución de carga en las regiones entre los conductores*”

---

### Método de las Imágenes

El método de las imágenes es una forma de resolver la ecuación de Laplace y encontrar el potencial en todo un espacio. El método se basa en el Primer Teorema de Unicidad del Potencial, el cual presenta que existe un único potencial  $V(x, y, z)$  que cumpla la ecuación de Laplace y las condiciones de borde dadas. El método busca una situación “equivalente” en el cual se cumpla la

## CAPÍTULO 5. ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON

ecuación de Laplace y a su vez las condiciones de borde del problema original. Consecuencia del teorema de unicidad, la solución  $V(x, y, z)$  del potencial será la misma. Casos típicos:

- Carga puntual sobre un plano conductor conectado a tierra.
- Carga puntual entre dos planos infinitos conectados a tierra que forman un ángulo  $\pi/n$  radianes con  $n \in \mathbb{N}$ .
- Carga puntual en frente de una esfera conductora conectada a tierra, a un potencial fijo  $V_0$  o cargada con carga  $Q$ .

¡Tenga cuidado! No necesariamente debe ser una carga lo que se ponga en frente de las geometrías anteriormente descritas, por ejemplo, un cable infinito frente un plano conductor infinito conectado a tierra también puede ser resuelto por el método de las imágenes.

---

### Método de Separación de Variables

El método de separación de variables se usa cuando el potencial posee una depende dos o más variables. En particular, para el caso de dos variables en coordenadas cartesianas se puede asumir que la solución de la Ecuación de Laplace es de la forma

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \quad (5.3)$$

Es decir, es posible afirmar que el potencial  $V(x, y)$  que resuelve la solución de Laplace es el producto de una función dependiente sólo de  $x$  y otra sólo de  $y$ . Al reemplazar la Ecuación 5.3 en 5.2 se puede llegar a que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = -\alpha^2 \quad (5.4)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . A partir de lo anterior, la soluciones de  $X(x)$  e  $Y(y)$  están dadas por

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad (5.5)$$

$$Y(y) = C \cosh \alpha y + D \sinh \alpha y \quad (5.6)$$

Donde los valores  $A, B, C, D$  y  $\alpha$  pueden ser obtenidos a partir de las condiciones de borde del problema respectivo.

---

### Recomendaciones

- La Ecuaciones de Poisson y Laplace son sumamente poderosas y reduce el problema físico de la electrostática a una ecuación diferencial.
- El método de las imágenes suele ser algo incomprendible en primera instancia y requiere tiempo para poder comprenderse a cabalidad. El método es poco intuitivo, por lo cual es necesario que el estudio incluya todos los casos más básicos. La moraleja del método es: todo lo que ocurra en una situación, también pasará en la otra equivalente.



## II. Problemas Propuestos

### Problema 5.1



Una lámina **no conductora** coincide con el plano  $xy$ . Las únicas cargas en el sistema están sobre la lámina. Se sabe que en el semiespacio  $z > 0$  el potencial es  $V(x, z) = V_0 e^{-kz} \cos kx$ , donde  $V_0$  y  $k$  son constantes.

- Verifique que este potencial satisface la ecuación de Laplace en el semiespacio  $z > 0$ .
- Encuentre la ecuación para las líneas de campo eléctrico
- Encuentre la distribución de carga sobre la lámina.

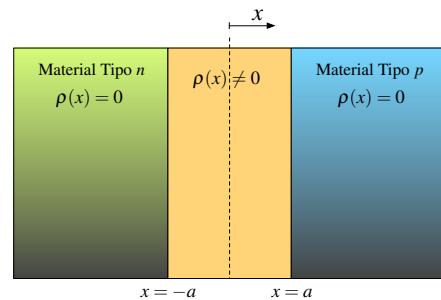
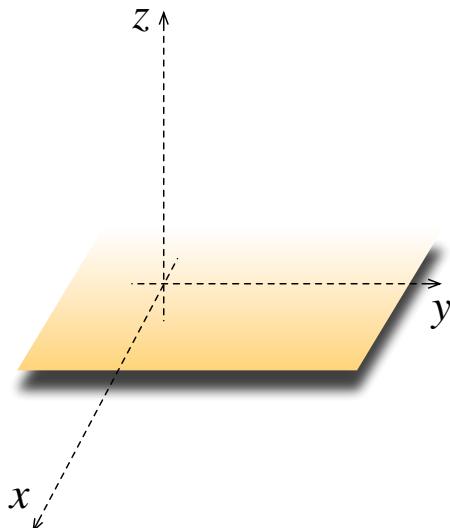
### Problema 5.2



La parte medular de una memoria RAM y otros dispositivos semiconductores es la “juntura  $np$ ”, que puede modelarse con la distribución de carga bosquejada en la figura, en que la linea punteada representa el plano  $x = 0$ :

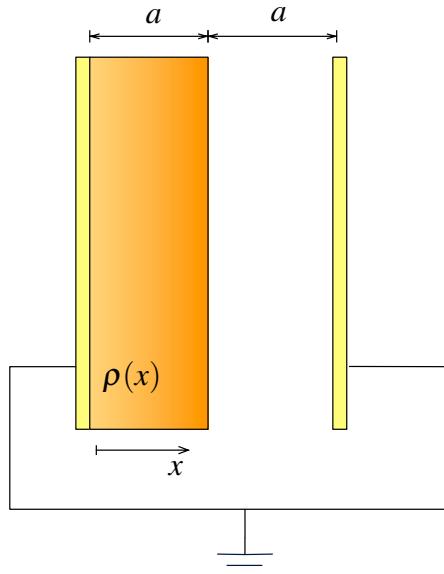
$$\rho(x) = \begin{cases} +\rho_0 & \text{si } -a < x < 0 \\ -\rho_0 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{en el resto del espacio} \end{cases}$$

- Determine la diferencia de potencial entre el seno de la zona  $n$  y el de la zona  $p$  (es decir, entre un punto  $x_1 < -a$  y otro  $x_2 > a$ ).
- Si  $a = 300 \text{ nm}$  y  $\rho_0 = 1200 \text{ C/m}^3$ , calcule numéricamente el valor de la diferencia de potencial (considere  $\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ).

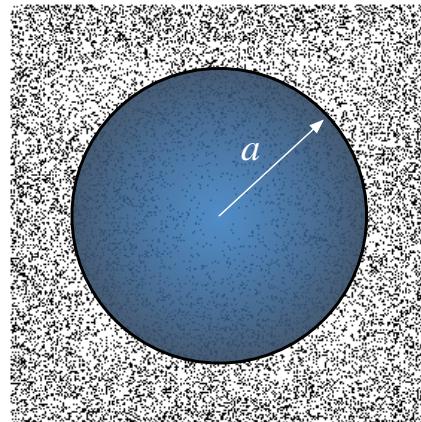


**Problema 5.3**   

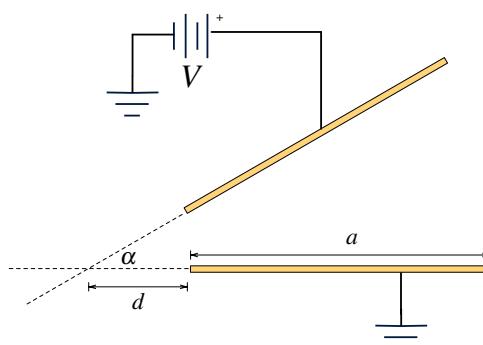
Considere dos placas paralelas infinitas conectadas a tierra separadas una distancia  $2a$ , la mitad del volumen entre las placas se ha llenado con una densidad de carga  $\rho(x) = \frac{\rho_0 x}{a}$  mientras que la otra mitad se ha dejado vacía. Usando la ecuación de Poisson y Laplace, determine el potencial en todos los puntos dentro de las placas.


**Problema 5.4**   

Considere una esfera maciza de radio  $a$  con carga desconocida, la cual se encuentra totalmente inmersa en un fluido que posee una densidad volumétrica de carga con simetría radial dada por  $\rho(r) = -\varepsilon_0 k^2 V(r)$  ( $r > a$ ) donde  $k$  es una constante,  $\varepsilon_0$  la permitividad del vacío y  $V(r)$  el potencial eléctrico. Experimentalmente se ha determinado que el potencial en el borde de la esfera es  $V_0$  con respecto al infinito ( $V(\infty) = 0$ ) y la distribución volumétrica de carga dentro de la esfera es uniforme. Determine la densidad de carga  $\rho(r)$  y el potencial eléctrico  $\Phi(r)$  en todo el espacio. Hint: Definir  $W = rV(r)$  puede ser útil.

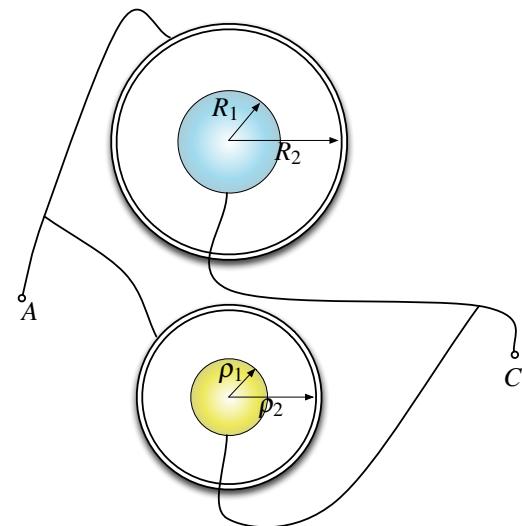

**Problema 5.5**   

Considere dos placas conductoras cuadradas de lado  $a$ , las cuales forman un pequeño ángulo  $\alpha$ . Las placas están a una distancia  $d$  del vértice como se ilustra la figura y se encuentran una diferencia de potencial  $V$ . Determine la capacidad del sistema.



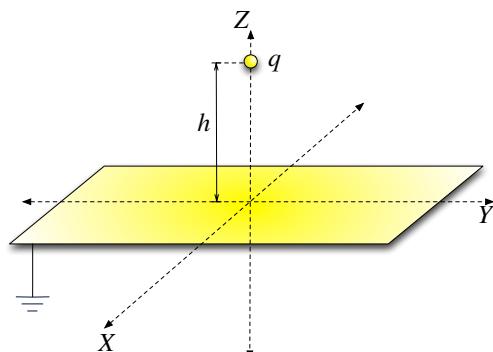
**Problema 5.6**   

Considere dos condensadores formado por dos casquitos esféricos conductores concéntricos de radios  $R_1, R_2, \rho_1, \rho_2$  respectivamente. Cada conductor en su polo sur tiene una pequeña perforación para conectar el casquete inferior (ver figura). Si apropiadamente se conecta cables a los casquitos exteriores y a los interiores, como se ilustra en la figura, encuentre usando la ecuación de Laplace la capacitancia del condensador entre los puntos  $A$  y  $C$ .

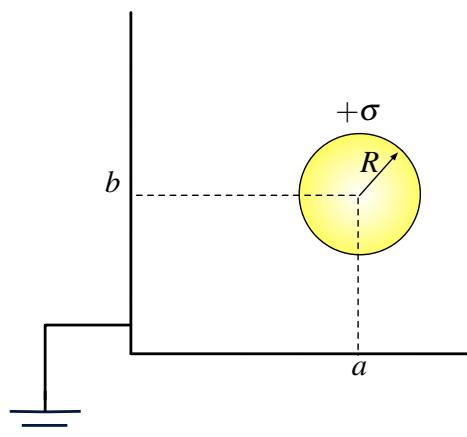
**Problema 5.7**   

Considere un plano conductor  $z = 0$ , conectado a tierra y frente al cual se ha colocado una carga  $q$  en el punto  $x = 0, y = 0, z = h$ .

- Calcule la densidad de carga sobre el plano. Exprese su resultado en función de la distancia del origen a un punto cualquier sobre el plano.
- Calcule la carga encerrada en un disco de radio  $d$  dibujado sobre el plano conductor con centro en el origen. ¿Para qué valor de  $d$  la carga encerrada pro el disco es  $-\frac{q}{2}$ ?
- Calcule el trabajo que es necesario realizar para llevar una carga  $q$  desde  $x = 0, y = 0, z = h$  hasta  $x = 0, y = 0, z = 2h$ , en presencia del plano conectado a tierra.

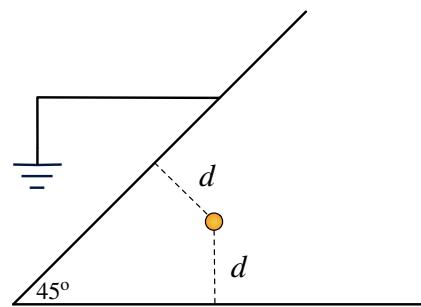
**Problema 5.8**   

Considere un casquito esférico cargado de radio  $R$  y con una densidad de carga superficial  $\sigma$ . Si el centro del casquito esférico se sitúa a una distancia horizontal  $a$  y vertical  $b$  con respecto a un plano conductor infinito doblado en  $90^\circ$ . Encuentre la densidad de carga  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  sobre los ejes y bosqueje su forma aproximada.

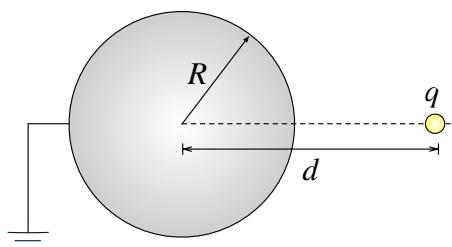


**Problema 5.9**

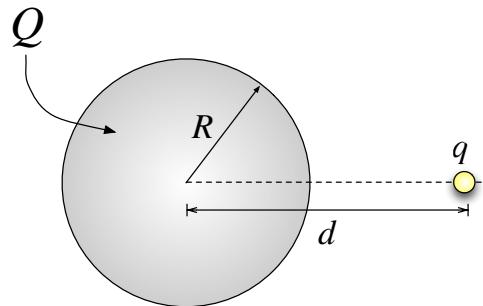
Considere una carga puntual  $q$ , la cual es colocada en la bisectriz de dos conductores ideales planos que forman un ángulo de  $45^\circ$  grados (ver figura). Si la carga tiene una distancia  $d$  a los conductores, encuentre la forma del potencial electrostático entre los conductores.

**Problema 5.10**

Una carga puntual  $q$  se ha puesto a una distancia  $d$  del centro de una esfera maciza metálica. Si la esfera se encuentra conectada a tierra, determine la densidad de carga sobre la esfera y la carga total inducida en ella.

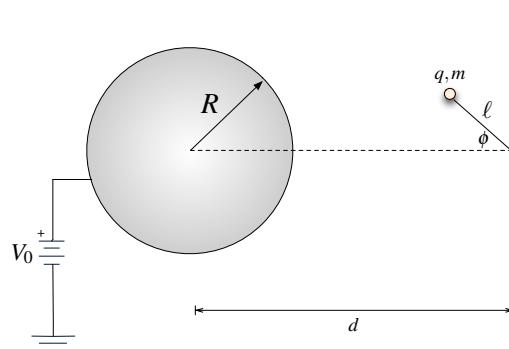
**Problema 5.11**

Una carga puntual  $q$  se ha puesto a una distancia  $d$  del centro de una esfera maciza metálica. Si la esfera posee una carga neta  $Q$ , determine la fuerza que siente la carga  $q$ .

**Problema 5.12**

Considere una esfera metálica de radio  $R$  que se encuentra conectada a una fuente a potencial  $V_0$ . Frente a ella se coloca un péndulo de largo  $\ell$  atado a una muralla a distancia  $d$  del centro de la esfera. El péndulo lleva en su extremo una carga puntual  $q$  de masa  $m$  que forma un ángulo  $\phi$  con respecto a la horizontal. Despreciando todos los efectos de la gravedad.

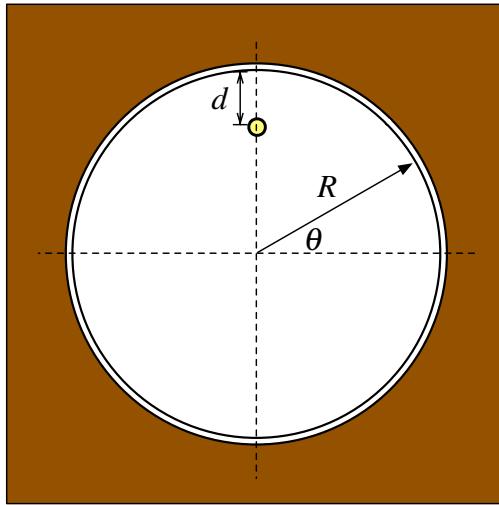
- Determine el módulo de la fuerza electrostática que siente la carga.
- Considera ahora que la fuente se apaga ( $V_0 = 0$ ). Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del péndulo si es perturbado débilmente con respecto a la horizontal.



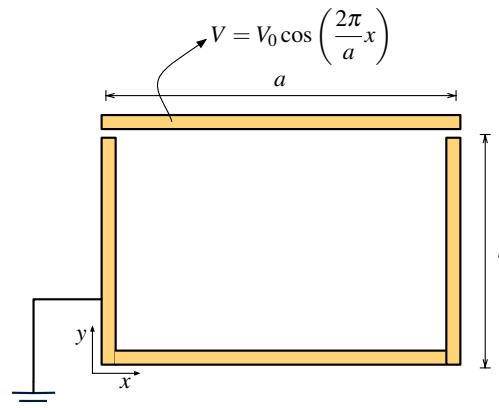
**Problema 5.13**   

En un túnel minero existe un cable que atraviesa toda su longitud, a una distancia  $d$  del techo del túnel. El túnel puede ser modelado como un cilindro infinito de radio  $R$ , de modo que el cable se mantiene siempre paralelo al eje imaginario del túnel. En cierto instante, el cable adquiere una densidad de carga lineal  $+\lambda$  en toda su extensión.

- Encontrar una expresión para el potencial  $V(r, \theta)$  dentro del túnel, en términos de  $r$  y  $\theta$  (coordenadas polares).
- Determinar la densidad de carga  $\sigma(\theta)$  en la pared del túnel.
- ¿Cuál es la carga total por unidad de longitud inducida en la pared del túnel?
- ¿Cuál es la fuerza por unidad de largo que siente el cable?

**Problema 5.14**   

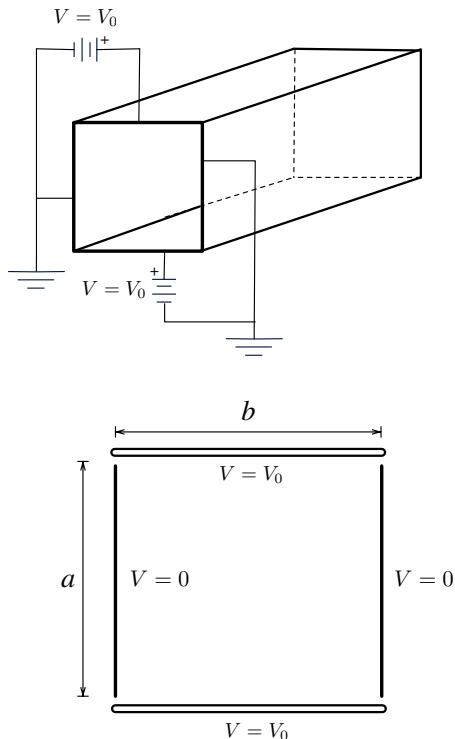
Considere una guía de onda, la cual es una tubería metálica de sección rectangular de ancho  $a$  y alto  $b$ . Las placas inferior y laterales están conectadas a tierra, es decir, a potencial cero. La placa metálica superior tiene una tensión periódica de período  $\frac{2\pi n}{a}$  (donde  $n$  es un número entero),  $V(x, y = b) = V_0 \cos\left(\frac{2\pi n}{a}x\right)$ ,  $V_0$  da cuenta de la intensidad de la tensión. Encuentre la tensión al interior,  $V(x, y)$ .



**Problema 5.15**   

Se tiene una guía rectangular infinita de lados  $a$  y  $b$ , compuesta por cuatro láminas planas conductoras. Dos de ellas se conectan a tierra, mientras que en las restantes existe un potencial constante de valor  $V_0$ , tal como se indica en las Figuras.

- ¿Cuáles son las condiciones de borde del problema?
- Calcule una expresión general para el potencial entre las placas usando el método de separación de variables. Muestre todos los casos posibles e indique el caso que cumplen las CB. Realice el cálculo considerando que cada lado actúa por si solo y finalmente superponga las soluciones encontradas.

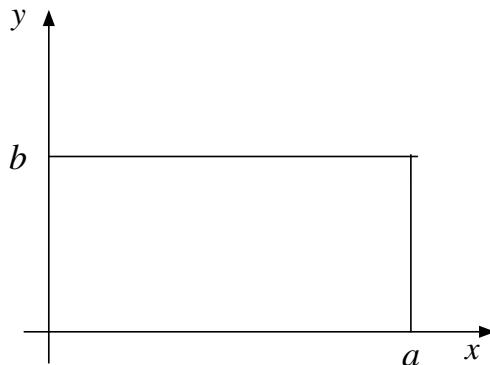


**Problema 5.16**   

Usando el método de separación de variables, calcular el potencial  $V(x, y)$  en el interior de un recinto plano como el indicado en la Figura, con las siguientes condiciones de borde:

$$V(0, y) = 0; \quad V(x, 0) = 0;$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=b} = -E_0$$



### III. Soluciones

#### Solución 5.1

- a) Se debe verificar que el potencial  $V(x, z) = V_0 e^{-kz} \cos kx$ , cumple la ecuación de Laplace.  
En efecto,

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, z)}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(-V_0 e^{-kz} k \sin kx) + \frac{\partial}{\partial z}(-V_0 k e^{-kz} \cos kx) \\ &= (-V_0 e^{-kz} k^2 \cos kx) + (V_0 k^2 e^{-kz} \cos kx) \\ &= 0\end{aligned}$$

- b) En primera instancia, el campo eléctrico para  $z > 0$  es

$$\vec{E} = -\nabla V = V_0 e^{-kz} k \sin kx \cdot \hat{x} + V_0 k e^{-kz} \cos kx \cdot \hat{z}$$

Luego las líneas de campo están dadas por la solución de la siguiente EDO

$$\frac{dz}{dx} = \frac{E_z}{E_x} = \frac{\cos kx}{\sin kx} \implies z(x) = \frac{\ln(|\sin kx|)}{k} + C$$

con  $C \in \mathbb{R}$ .

- c) Dado que el plano es no conductor, las líneas de campo deben ser simétricas con respecto a él tanto para  $z > 0$ , como para  $z < 0$ . De este modo, el campo eléctrico generado por la densidad superficial de carga sobre el plano debe ser simétrico con respecto al plano  $xy$ . Luego, usando la condición de borde sobre la componente normal del campo eléctrico, es decir

$$E_{n1} - E_{n2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

donde  $E_{1n} = -E_{2n} = V_0 k \cos kx$ , se tiene que

$$\sigma = 2\varepsilon_0 V_0 k \cos kx$$

#### Solución 5.4

Consideremos inicialmente el caso  $r > a$ , por Poisson debe cumplirse que

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$



## CAPÍTULO 5. ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON

adicionalmente como  $\rho(r) = -\varepsilon_0 k^2 V(r)$  y hay simetría esférica, entonces la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = k^2 V$$

Usando el cambio de variables a  $V(r) = r^{-1}W(r)$ , la ecuación se transforma en

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \left( -r^{-2}W(r) + r^{-1} \frac{\partial W(r)}{\partial r} \right) \right) = k^2 r^{-1}W \implies \frac{\partial}{\partial r} \left( -W(r) + r \frac{\partial W(r)}{\partial r} \right) = k^2 r W(r)$$

Volviendo a derivar nuevamente

$$-\frac{\partial W(r)}{\partial r} + \frac{\partial W(r)}{\partial r} + r \frac{\partial^2 W(r)}{\partial r^2} = k^2 r W(r) \implies \frac{\partial^2 W(r)}{\partial r^2} - k^2 W(r) = 0$$

La última ecuación diferencial tiene por solución  $W(r) = Ae^{kr} + Be^{-kr}$ , donde  $A$  y  $B$  son constantes por determinar. Devolviéndose con el cambio de variables

$$V(r) = \frac{1}{r} (Ae^{kr} + Be^{-kr})$$

Por condiciones de borde  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ , es decir, debe cumplirse que  $A = 0$  (el potencial no puede diverger en el infinito). Por otro lado  $V(a) = V_0$ , luego  $B = V_0 a e^{ka}$ , por lo que el potencial y la densidad de carga para  $r > a$  vale

$$V(r) = \frac{V_0 a}{r} e^{k(a-r)} \implies \rho(r) = -k^2 \varepsilon_0 \frac{V_0 a}{r} e^{k(a-r)}$$

Para  $r < a$  existe una densidad de carga uniforme (o constante) la cual se denotará como  $\rho_0$  (por determinar). El campo eléctrico dentro de una esfera de radio  $a$ , debe valer

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \implies E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3\varepsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \hat{r}$$

Dado que no existen densidades de carga superficiales en  $r = a$ , el campo eléctrico debe ser continuo en ese punto. De modo que se cumple que

$$\frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_0 a}{r} e^{k(a-r)} \right) \right|_{r=a} \implies \rho_0 = \frac{3\varepsilon_0 V_0 (ka+1)}{a^2}$$

Finalmente, el potencial para  $r < a$  estará dado por

$$\begin{aligned} V(r) - V_0 &= - \int_a^r \frac{V_0(ka+1)r}{a^2} dr = - \frac{V_0(ka+1)}{a^2} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \\ &\implies V(r) = V_0 - \frac{V_0(ka+1)(r^2 - a^2)}{2a^2} \end{aligned}$$



**Solución 5.5** **Solución 1:**

Para encontrar la solución debe usarse la ecuación de Laplace. Se supone a priori que los efectos de borde del condensador son nulos porque el ángulo  $\alpha$  es pequeño (entre más separadas estén las placas del condensador el campo eléctrico fuera del condensador deja de volverse despreciable).

Sea  $\varphi$  la función potencial entre las placas, en el espacio dentro del condensador se cumple la ecuación de Laplace  $\nabla^2\varphi = 0$ , donde  $\varphi(\theta = 0) = 0$  y  $\varphi(\theta = \alpha) = V$ . Por geometría del problema, el potencial dentro de las placas debe ir aumentando desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \alpha$  con una dependencia única del ángulo (en coordenadas cilíndricas). Luego

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{d\theta^2} = 0 \implies \varphi(\theta) = A\theta + B$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes por determinar. Usando las condiciones de borde, se obtiene que  $A = \frac{V}{\alpha}$  y  $B = 0$ , por lo que

$$\varphi(\theta) = \frac{V}{\alpha}\theta$$

Por consiguiente, el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{V}{\alpha r}\hat{\theta}$$

conocido el campo eléctrico dentro de las placas, puede despejarse el valor de la densidad de carga sobre la placa inferior como

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \Big|_{\text{borde}} \cdot \hat{n} = \varepsilon_0 \vec{E}(\theta = 0) \cdot \hat{y} = -\frac{\varepsilon_0 V}{\alpha x} \hat{y} \cdot \hat{y} = -\frac{\varepsilon_0 V}{\alpha x}$$

La carga total de una placa del condensador es

$$Q = \iint \sigma dS = \int_0^a \int_d^{d+a} -\frac{\varepsilon_0 V}{\alpha x} dx dy = -\frac{\varepsilon_0 a V}{\alpha} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Finalmente, la capacitancia es

$$C = \frac{|Q|}{V} = \frac{\varepsilon_0 a}{\alpha} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

**Solución 2:**

El condensador de placas no paralelas puede descomponerse en pequeños condensadores de placas paralelas en paralelo (Figura 5.1). Cada uno de estos pequeños condensadores tiene un ancho



## CAPÍTULO 5. ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON

infinitesimal  $dx$ , un espesor  $a$  y una separación de placas  $x \tan \alpha$ , de esta forma cada pequeño condensador tiene una capacidad

$$dC = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon_0 a \cdot dx}{x \tan \alpha}$$

La capacitancia final del condensador de placas no paralelas va a ser la suma infinita de las capacidades de todos los pequeños condensadores. Finalmente, dado que  $\alpha$  es pequeño  $\tan \alpha \approx \alpha$ , por lo que se concluye que

$$C = \int dC = \int_d^{a+d} \frac{\varepsilon_0 a \cdot dx}{x \alpha} = \frac{\varepsilon_0 a}{\alpha} \ln \left( \frac{d+a}{d} \right)$$

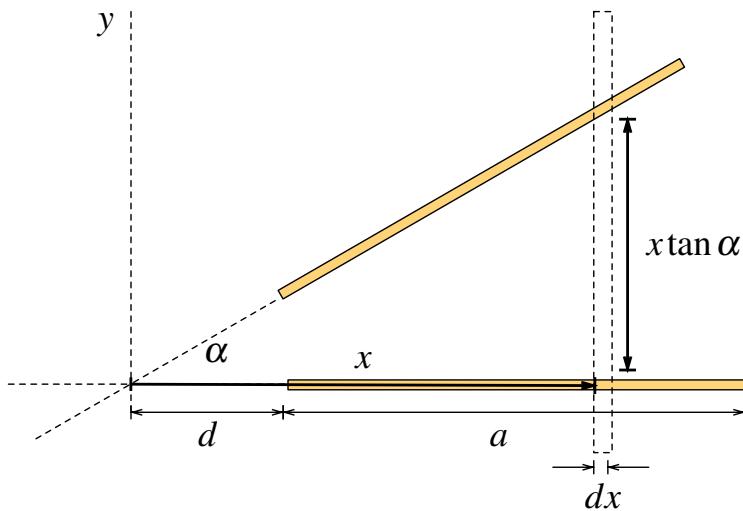


Figura 5.1: División Infinitesimal del Condensador.

### Solución 5.6 P ✓

En primera instancia se puede notar que ambos condensadores siguen la misma geometría esférica, por lo que bastaría calcular la capacitancia de uno y el resultado sería análogo para el otro. Además, dada las conexiones de los condensadores, el circuito puede ser modelado de forma que se indica en la Figura 5.2.

Los condensadores  $C_1$  (radios  $R_1$  y  $R_2$ ) y  $C_2$  (radios  $\rho_1$  y  $\rho_2$ ) están en paralelo, por lo que la capacitancia total entre  $A$  y  $C$  es  $C_T = C_1 + C_2$ .

La capacitancia de  $C_1$  (y también la de  $C_2$ ), al ser un condensador esférico, depende netamente de su geometría. Para determinar la capacitancia de un condensador de este tipo debe suponerse que una diferencia de potencial conocida entre las placas, sin pérdida de generalidad se asume que el potencial en el casquete interior es  $V_0$  y el exterior 0. Entre las placas se cumple la ecuación



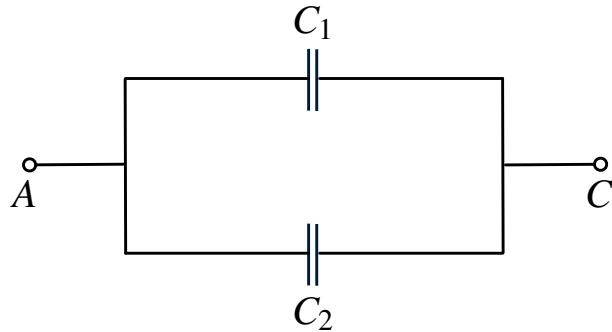


Figura 5.2: Modelo equivalente de los condesadores

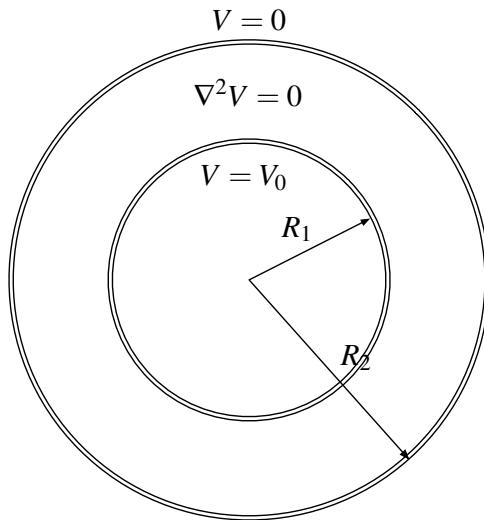


Figura 5.3: Capacitor Esférico \$C\_1\$

de Laplace (ya que no hay densidades volumétricas de carga), es decir

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \implies V(r) = -\frac{A}{r} + B$$

Aplicando las condiciones de borde se obtiene que

$$V(r) = \frac{V_0 R_1 R_2}{r(R_2 - R_1)} - \frac{V_0 R_1}{R_2 - R_1}$$

Luego, el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{V_0 R_1 R_2}{r^2(R_2 - R_1)} \hat{r}$$

Por lo que la densidad superficial de carga sobre el conductor interior es

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \Big|_{\text{borde}} \cdot \hat{n} = \frac{\epsilon_0 V_0 R_2}{R_1(R_2 - R_1)}$$

Luego la capacitancia de \$C\_1\$ es

$$C_1 = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{V_0} \iint_{\text{Casquete}} \sigma dS = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$



## CAPÍTULO 5. ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON

Finalmente la capacitancia total está dada por

$$C_T = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} + \frac{4\pi\epsilon_0 \rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1}$$

**Solución 5.7** 

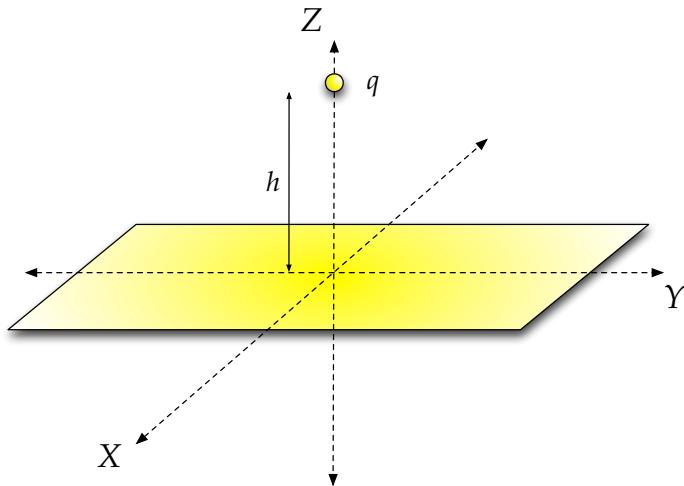


Figura 5.4: Configuración Original

- a) La carga imagen de este problema debe ir a una distancia  $h$  bajo el plano, tal como indica la Figura 5.5.

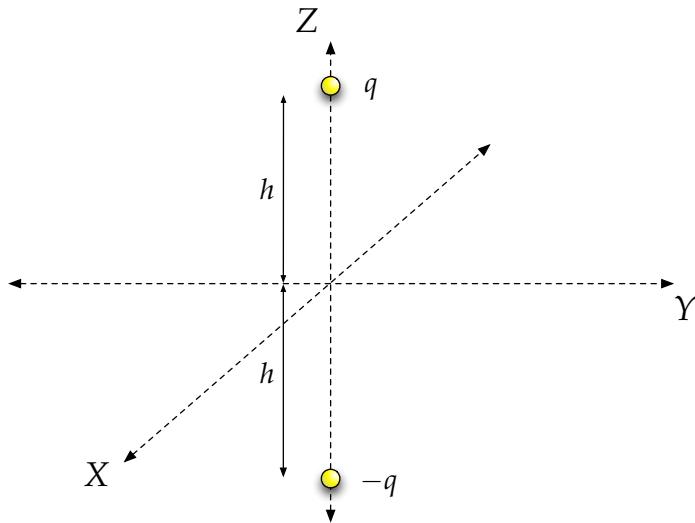


Figura 5.5: Configuración Equivalente con Carga Imagen

Conocida esa configuración, se puede calcular el campo que habría justo en la superficie del plano superponiendo el campo eléctrico producido por la carga más su carga imagen. Dado



## CAPÍTULO 5. ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON

que la carga  $q$  se encuentra en la posición  $(0, 0, h)$  y la carga imagen  $-q$  en  $(0, 0, -h)$  se concluye que el campo eléctrico en un punto sobre el plano  $xy$  estará dado por:

$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z-h)\hat{z}}{(x^2 + y^2 + (z-h)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z+h)\hat{z}}{(x^2 + y^2 + (z+h)^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Entonces, usando el hecho que en el borde del conductor se tiene que  $\vec{E}(z=0^+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}$  se puede despejar el valor de  $\sigma$ :

$$\sigma(x, y) = \frac{-qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- b) Conocido  $\sigma$  se integra en un círculo de radio  $d$ , para ello se usa el cambio de variables de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas con  $r^2 = x^2 + y^2$  y  $dxdy = rdrd\theta$

$$Q_{\text{disco}} = \int_0^{2\pi} \int_0^d \frac{-qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} rdrd\theta = \frac{qh}{\sqrt{d^2 + h^2}} - q$$

Luego si se desea  $Q_{\text{disco}} = -\frac{q}{2}$  se iguala con la expresión anterior, dando por resultado:

$$\frac{qh}{\sqrt{d^2 + h^2}} - q = -\frac{q}{2} \implies d = h\sqrt{3}$$

- c) Para esta parte del problema se debe considerar que cuando la carga es movida una distancia hacia arriba en la dirección  $+\hat{z}$  su carga imagen se mueve la misma distancia en la dirección  $-\hat{z}$ . Por consiguiente, si la carga se pusiese en la posición  $\vec{r} = z\hat{z}$  su carga imagen se encontrará en  $\vec{r}' = -z\hat{z}$ , por lo que el campo eléctrico que sentirá la carga en ese punto será:

$$\vec{E}(z) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z\hat{z}}{(2z)^3} = -\frac{q}{16\pi\epsilon_0 z^2} \hat{z}$$

Luego, la carga es movida por un agente externo desde  $z = h$  a  $z = 2h$  bajo la oposición del campo eléctrico variable ya calculado, lo que matemáticamente resulta como

$$\Delta V = V(2h) - V(h) = - \int_h^{2h} -\frac{q}{16\pi\epsilon_0 z^2} dz = \frac{q}{16\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{2h} \right)$$

Finalmente como el trabajo está dado como  $W = q\Delta V$

$$W = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{2h} \right) = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 h}$$



**Solución 5.8** 

El problema nos presenta la siguiente configuración:

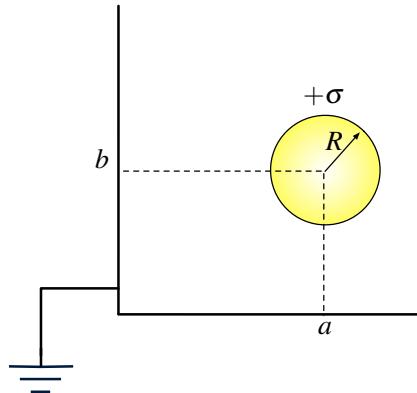


Figura 5.6: Plano rectangular frente a una esfera

En primera instancia, y haciendo un análisis sólo en el plano  $xy$ , se tiene que  $\nabla^2 V = 0$ ,  $V(x, 0) = V(0, y) = 0$  para  $x, y \geq 0$  y que  $V(\|(x, y)\| \rightarrow \infty) = 0$ . Ahora, el problema equivalente que sigue las mismas condiciones anteriores es mostrado en la Figura 5.7.

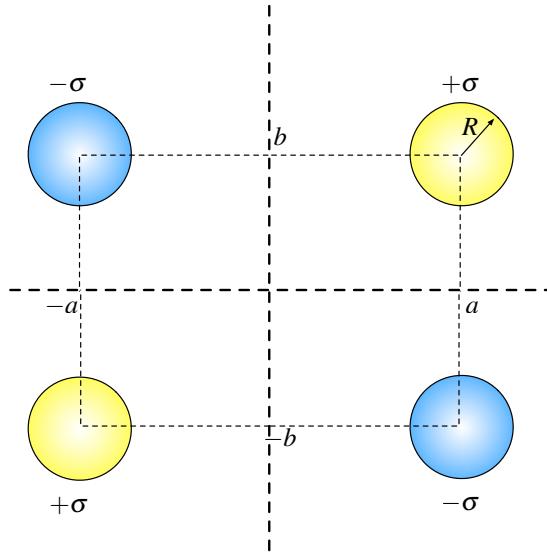


Figura 5.7: Configuración de las Imágenes

En ambos casos tanto el potencial eléctrico como el campo eléctrico, tendrán el mismo valor para los puntos que cumplan  $x, y \geq 0$ . La configuración de imágenes están dada por 3 esferas de radio  $R$  (una con carga  $+σ$  y dos con carga  $-σ$ ) ubicadas como se muestra en la Figura 5.7. Para un manto esférico de radio  $R$  y densidad  $σ$  se puede determinar el campo eléctrico generado por ley



de Gauss de la siguiente forma:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \implies E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Dado que todas las esferas están descentradas, la forma general para determinar el campo que generan será

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2 (\vec{r} - \vec{r}_i)}{\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

dónde  $\vec{r}$  es la posición donde se desea conocer el campo y  $\vec{r}_i$  es la posición donde se encuentra el centro de la esfera. Para el problema se tiene que  $\vec{r}_1 = (a, b)$ ,  $\vec{r}_2 = (-a, b)$ ,  $\vec{r}_3 = (-a, -b)$  y  $\vec{r}_4 = (a, -b)$ , y que  $\vec{r} = (x, y)$ . Usando el principio de superposición se tiene que el valor del campo es

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y) &= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^{i-1}(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} \\ \vec{E}(x, y) &= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \left( \frac{(x-a, y-b)}{((x-a)^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x+a, y-b)}{((x+a)^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x+a, y+b)}{((x+a)^2 + (y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x-a, y+b)}{((x-a)^2 + (y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

En particular en los ejes  $x$  e  $y$  se tiene que el campo eléctrico es, respectivamente:

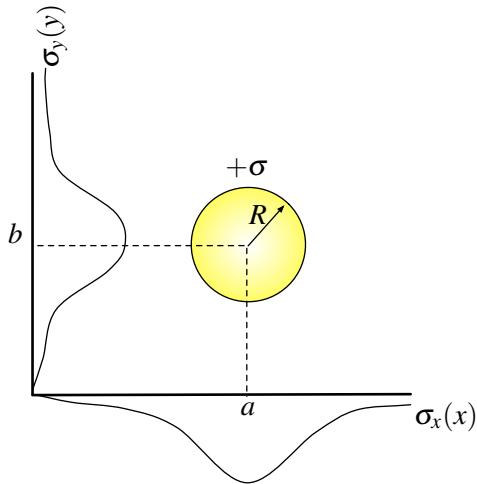
$$\begin{aligned} \vec{E}(x, 0) &= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \left( \frac{(0, -2b)}{((x-a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(0, 2b)}{((x+a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ \vec{E}(0, y) &= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \left( \frac{(-2a, 0)}{(a^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(2a, 0)}{(a^2 + (y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

Finalmente como en el borde de un conductor se cumple que  $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \Big|_{\text{borde}} \cdot \hat{n}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_x(x) &= \sigma R^2 \left( \frac{(0, -2b)}{((x-a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(0, 2b)}{((x+a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot (0, 1) \\ &= 2b\sigma R^2 \left( -\frac{1}{((x-a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{((x+a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ \sigma_y(y) &= \sigma R^2 \left( \frac{(-2a, 0)}{(a^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(2a, 0)}{(a^2 + (y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot (1, 0) \\ &= 2a\sigma R^2 \left( -\frac{1}{(a^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(a^2 + (y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

Las variaciones de densidad en los ejes se muestran a continuación (en ambos casos la funciones  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son siempre negativas y tiene sus mínimos en los valores de  $a$  y  $b$ , respectivamente).




 Figura 5.8: Variaciones de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  en los ejes

**Solución 5.10**

En este caso se debe usar el método de las imágenes para reemplazar la esfera conductora. Se propone una carga  $q'$  a una distancia  $d'$ , del centro de la esfera como imagen (ver Figura 5.9).

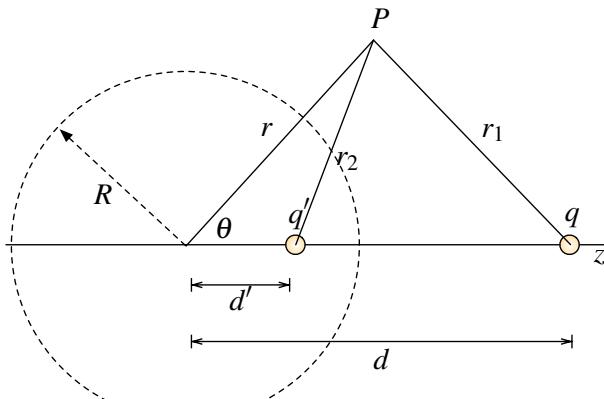


Figura 5.9: Configuración Carga Imagen Esfera conectada a tierra

Para encontrar en valor de la carga imagen y del potencial, se determina previamente cual es el valor del potencial que generan la superposición de estas dos cargas en el espacio:

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right)$$

Por teorema del coseno  $r_1 = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}$  y  $r_2 = \sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \theta}$ , por lo tanto

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \theta}} \right)$$



Ahora tiene que considerarse que  $V(r = R, \theta) = 0$ , ya que se supone que la esfera está conectada a tierra.

$$V(R, \theta) = 0 \implies \frac{\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta}}{\sqrt{R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos \theta}} = -\frac{q}{q'} = \text{cte.}$$

De aquí se deduce que, dado que el valor de las cargas es fijo, el lado izquierdo de la ecuación no debe depender de  $\theta$  ya que para cualquier ángulo el cuociente tiene un valor fijo. Se debe escoger un valor de  $d'$  de tal forma que la expresión de izquierda deje de depender de  $\theta$ .

Reescribiendo

$$\frac{\sqrt{d(\frac{R^2}{d} + d - 2R \cos \theta)}}{\sqrt{d'(\frac{R^2}{d'} + d' - 2R \cos \theta)}} = \text{cte.}$$

Para que la expresión anterior deje de depender de  $\theta$  (es decir, poder simplificar el factor dependiente de  $\cos \theta$ ), se puede elegir  $d' = d$  (no sirve ya que implica  $q = -q'$ ) o  $d' = \frac{R^2}{d}$ . Por lo que se deduce que  $q' = -\frac{R}{d}q$  que es la carga efectiva de la esfera. La densidad de carga  $\sigma(\theta)$ , puede ser determinada como

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \Big|_{\text{borde}} \cdot \hat{n} = -\varepsilon_0 \nabla V \Big|_{r=R} \cdot \hat{r} = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R}$$

Finalmente la densidad de carga es

$$\sigma(\theta) = \frac{\left( R - \frac{R^2}{d} \right) q}{4\pi (R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

Como último comentario, cabe mencionar que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma(\theta) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -\frac{R}{d} q$$

Es decir, la carga total inducida en la esfera es igual a la de la carga imagen.

Nota: Existe más de un método para determinar el valor de las cargas imágenes en este tipo de problema. Otra posibilidad, es haber igualado la expresión del potencial para dos ángulos distintos (por ejemplo  $V(R, \theta = 0) = V(R, \theta = \pi) = 0$ ) y despejar los valores  $q'$  y  $d'$ .

### Solución 5.11

El problema puede ser analizado de la siguiente forma, suponga que la esfera estuvo inicialmente descargada y conectada de tierra. Habrá sobre la esfera una carga  $q'$  (imagen) distribuida en forma no homogénea sobre la superficie (debido a la presencia de  $q$ ). Ahora, suponga que se desconecta la esfera y se pone una carga  $Q - q'$  sobre el conductor (de modo que su carga total sea  $Q$ ), la carga puesta se distribuye homogéneamente sobre la superficie del conductor debido a que las



## CAPÍTULO 5. ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON

fuerzas electrostáticas presentes ya han sido anuladas gracias a la carga  $q'$  (visto de otra forma, esa carga es puesta sobre una superficie equipotencial, por que se repartirá en forma equilibrada sobre ella). Por lo tanto, el potencial debido a  $Q - q'$  será el mismo que el debido a una carga puntual de ese valor puesta en el origen, por lo que la configuración de cargas imágenes es la que se propone en la Figura 5.10.

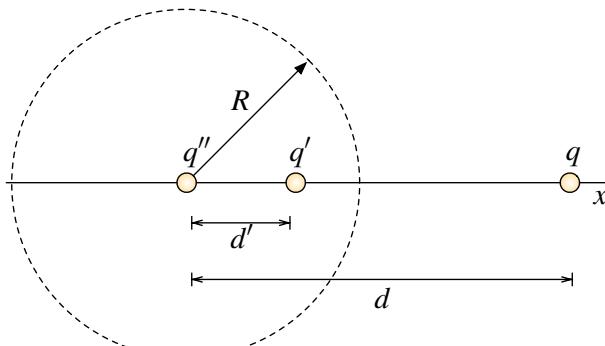


Figura 5.10: Configuración Esfera Conductora Cargada

En conclusión, la esfera de radio  $R$  y carga  $Q$  es reemplazada por dos cargas imágenes  $q'$  y  $q''$  puestas en  $x = d'$  y en  $x = 0$ , respectivamente. Los valores de cada uno de los términos anteriores son

$$q' = -\frac{qR}{d}, \quad q'' = Q + \frac{qR}{d}, \quad d' = \frac{R^2}{d}$$

Luego, por ley de Coulomb la fuerza sobre la carga  $q$  es

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q''}{d^2} + \frac{q'}{(d-d')^2} \right) \hat{x}$$

### Solución 5.12

- a) Para resolver el problema debe colocarse dos cargas imágenes: una carga que anule el potencial en el borde y otra que lo suba al borde de la esfera, de modo que se cumpla  $\nabla^2 V = 0$ ,  $V(r = R) = V_0$ ,  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ .

La primera carga imagen se coloca en la línea recta entre la carga y el centro de la esfera (el objetivo de esta carga es  $V(r = R) = 0$ ). La distancia entre el centro de la esfera y la carga es  $L = \sqrt{d^2 + \ell^2 - 2d\ell \cos\phi}$ . Sea  $q'$  el valor de la carga imagen y  $L'$  su distancia al centro. Se debe cumplir que:

$$V(A) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(L' + R)} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(L + R)} = 0$$

$$V(B) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(R - L')} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(L - R)} = 0$$



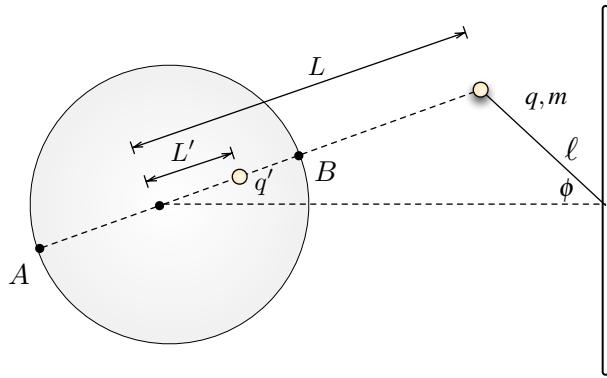


Figura 5.11: Configuración Carga Imagen Esfera Cargada

Resolviendo para  $q'$  y  $L'$  se obtiene:

$$q' = -\frac{R}{L}q \quad L' = \frac{R^2}{L}$$

La segunda carga imagen debe elevar el potencial en  $r = R$  a  $V_0$ , luego se debe cumplir:

$$V_{q''}(R) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} = V_0 \implies q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$$

Con estas dos cargas  $q'$  y  $q''$  se cumplen la condiciones de borde (solución única). Finalmente la fuerza es por Coulomb:

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{qq'}{(L-L')^2} + \frac{qq''}{L^2} \right)$$

b) Si  $V_0 = 0 \implies q'' = 0$ , luego  $|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(L-L')^2}$ . La fuerza se descompone en radial

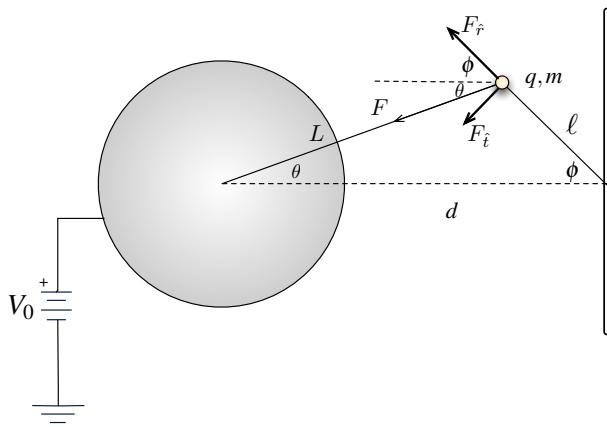


Figura 5.12: DCL al péndulo

y tangencial al péndulo. Dado que se pide pequeñas oscilaciones, se usar la componente tangencial (o normal) de la fuerza

$$|F_\perp| = |F| \sin(\phi + \theta)$$



## CAPÍTULO 5. ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON

Usando el teorema del Seno se tiene:

$$\frac{\sin \phi}{L} = \frac{\sin \theta}{\ell} = \frac{\sin(\pi - (\phi + \theta))}{d} = \frac{\sin(\phi + \theta)}{d} \implies \sin(\phi + \theta) = \frac{d}{L} \sin \phi$$

Luego se tendrá:

$$\begin{aligned} |F_{\perp}| &= |F| \frac{d}{L} \sin \phi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(L-L')^2} \frac{d}{L} \sin \phi \end{aligned}$$

Reemplazando  $q' = -\frac{R}{L}q$  y  $L' = \frac{R^2}{L}$

$$|F_{\perp}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2 R d}{\left(L - \frac{R^2}{L}\right)^2 L^2} \sin \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2 R d}{(L^2 - R^2)^2} \sin \phi$$

Ahora

$$m\ell \ddot{\phi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2 R d^2}{(L^2 - R^2)^2} \sin \phi \implies \ddot{\phi} + \frac{q^2 R d}{4\pi\epsilon_0 m \ell} \frac{\sin \phi}{(L^2 - R^2)^2} = 0$$

Si  $\phi \approx 0$ ,  $\sin \phi \approx \phi$  y  $\cos \phi \approx 1$ . Con la última aproximación se tiene para el valor de  $L$ :  $L^2 = d^2 + l^2 - 2d\ell \cos \phi \approx d^2 + \ell^2 - 2d\ell = (d - \ell)^2$ . Con lo que finalmente se concluye:

$$\ddot{\phi} + \underbrace{\frac{q^2 R d}{4\pi\epsilon_0 m \ell ((d - \ell)^2 - R^2)^2}}_{\omega^2} \phi = 0 \implies \omega = \frac{q}{(d - \ell)^2 - R^2} \sqrt{\frac{R d}{4\pi\epsilon_0 m \ell}}$$

### Solución 5.14

En este caso se puede usar la ecuación de Laplace dentro de la guía de ondas ya que no existen densidades volumétricas de carga. Matemáticamente el problema puede ser planteado de la siguiente forma

$$\nabla^2 V(x, y) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$V(x, 0) = V(0, y) = V(a, y) = 0$$

$$V(x, b) = A \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

para  $0 \leq x \leq a$  y  $0 \leq y \leq b$ .

En este tipo de problemas se usa el método de separación de variables, es decir, se supone que el potencial es de la forma  $V(x, y) = X(x)Y(y)$ , lo cual implica que

$$\nabla^2 V = Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \implies \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$



## CAPÍTULO 5. ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON

En este punto se puede notar que las variables están “separadas”(no hay dependencia entre ellas, el lado izquierdo de la igualdad depende sólo de  $x$  y el derecho sólo de  $y$ ). Por lo tanto, ambos lados de la igualdad deben ser iguales a una misma constante, es decir

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = k$$

Ahora se debe analizar por casos:

- $k = 0$  En este caso las soluciones son de la forma

$$X(x) = Ax + B$$

$$Y(y) = Cy + D$$

Usando las condiciones de borde

$$V(0, y) = B(Cy + D) = 0 \implies \underline{B = 0} \text{ o } \underline{C = D = 0}$$

En el primer caso  $C = D = 0$ , entonces  $Y(y) = 0$  por lo que  $V(x, y) = 0$ . Dado que no se buscan soluciones no triviales de  $V(x, y)$  ese caso no sirve. Luego  $V(x, y) = Ax(Cy + D)$ .

Usando la segunda condición de borde

$$V(x, 0) = ADx = 0 \implies \underline{A = 0} \text{ o } \underline{D = 0}$$

Nuevamente si  $A = 0$  se obtiene  $V(x, y) = 0$  por lo que  $V(x, y) = ACxy$ .

Aplicando la última condición de borde

$$V(a, y) = ACay = 0$$

De aquí es directo que  $A$  o  $C$  debe ser 0, por lo cual necesariamente se tendrá  $V(x, y) = 0$ . Finalmente se deduce que este caso no arroja soluciones.

- $k > 0$  Suponiendo que  $k = \alpha^2$  se tiene que en este caso las soluciones son de la forma

$$X(x) = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x$$

$$Y(y) = C \cos \alpha y + D \sin \alpha y$$

Usando las condiciones de borde y recordando que  $\cosh 0 = 1$  y  $\sinh 0 = 0$

$$V(0, y) = A(C \cos \alpha y + D \sin \alpha y) = 0 \implies \underline{A = 0} \text{ o } \underline{C = D = 0}$$

Nuevamente si  $C = D = 0$ , entonces  $Y(y) = 0$  por lo que  $V(x, y) = 0$ . Luego

$$V(x, y) = B \sinh \alpha x (C \cos \alpha y + D \sin \alpha y)$$



## CAPÍTULO 5. ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON

Usando la segunda condición de borde

$$V(x, 0) = BC \sinh \alpha x = 0 \implies \underline{B} = 0 \text{ o } \underline{C} = 0$$

Nuevamente si  $B = 0$  se obtiene  $V(x, y) = 0$  por lo que  $V(x, y) = BD \sinh \alpha x \sin \alpha y$ .

Aplicando la última condición de borde

$$V(a, y) = BD \sinh \alpha a \sin \alpha y = 0$$

Nuevamente se tiene que  $B$  o  $D$  deben ser 0, por lo cual necesariamente se tendrá  $V(x, y) = 0$ . Este caso tampoco arroja soluciones.

- $k < 0$  En el último caso, suponiendo que  $k = -\alpha^2$  se tiene que las soluciones son de la forma

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

$$Y(y) = C \cosh \alpha y + D \sinh \alpha y$$

Aplicando que

$$V(0, y) = A(C \cosh \alpha y + D \sinh \alpha y) = 0 \implies \underline{A} = 0 \text{ o } \underline{C} = \underline{D} = 0$$

Al igual que los casos anteriores, el valor válido es  $A = 0$ , de modo que

$$V(x, y) = B \sin \alpha x (C \cosh \alpha y + D \sinh \alpha y)$$

Ahora aplicando que

$$V(x, 0) = BC \sin \alpha x = 0 \implies \underline{B} = 0 \text{ o } \underline{C} = 0$$

Nuevamente el valor válido es  $C = 0$ , por lo que la forma general de la solución es

$$V(x, y) = BD \sin \alpha x \sinh \alpha y$$

Aplicando la condición de borde

$$V(a, y) = BD \sin \alpha a \sinh \alpha y = 0 \implies \alpha a = n\pi \implies \alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Finalmente se deduce este caso si provoca soluciones y son una combinación lineal de la forma

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \sinh \left( \frac{n\pi}{a} y \right)$$

Para encontrar los términos  $K_n$  es necesario usar la última condición de borde

$$V(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \sinh \left( \frac{n\pi b}{a} \right) = V_0 \cos \left( \frac{2\pi x}{a} \right)$$



Ahora se usará el hecho que

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{a}{2} & \text{si } n = m \end{cases}$$

La expresión anterior debe multiplicarse a ambos lados por  $\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$

$$V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$

e integrando en 0 y  $a$  (y suponiendo que la integral entra sin problemas a la sumatoria)

$$\int_0^a V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \left[ \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \right] \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$

La serie de la derecha tiene puros términos nulos excepto cuando  $n = m$ , por lo tanto

$$V_0 \int_0^a \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = K_m \cdot \frac{a}{2} \sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right)$$

Pero

$$\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = -\frac{am(\cos(\pi m) - 1)}{\pi(m^2 - 4)} \quad \forall n \neq 2$$

y para  $n = 2$  se tiene:

$$\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx = -\frac{a}{4\pi} \cos^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \Big|_0^a = -\frac{a}{4\pi} (\cos^2(2\pi) - \cos^2(0)) = 0$$

Luego

$$K_n = -\frac{2V_0}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \frac{n(\cos(\pi n) - 1)}{\pi(n^2 - 4)} \quad \forall n \neq 2$$

Finalmente

$$V(x, y) = -\frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1, n \neq 2}^{\infty} \frac{n(\cos(\pi n) - 1)}{(n^2 - 4)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 5.2

- Plantee la Ecuación de Laplace/Poisson con el fin de encontrar en primera instancia el campo eléctrico en todas las zonas.
- Debido a las mismas ecuaciones o a la simetría del problema es fácil concluir que para  $|x| > a$  el valor del campo eléctrico es nulo.
- El campo eléctrico es continuo la  $x = -a$ ,  $x = a$  y en  $x = 0$ . Una vez determinado el campo debe integrarlo para encontrar la diferencia de potencial pedida.

### Indicación 5.3

- Plantee la ecuación de Poisson para  $0 < x < a$  y la ecuación de Laplace para  $a < x < 2a$ .
- Una vez determinado la forma de estos potenciales imponga condiciones de borde, las cuales están en  $x = 0$  y  $x = 2a$ .
- Adicionalmente, recuerde que el potencial es continuo en  $x = a$  y que la derivada del potencial también es continua en  $x = a$  (ie. el campo eléctrico es continuo en la interfase).

### Indicación 5.9

- En este caso debe poner siete cargas imágenes (ocho en total), alternando en signo cada una. Estas ocho cargas forman un octógono de lado  $2d$ .
- Una vez identificadas las posiciones de las cargas y sus valores, usar la definición de potencial eléctrico para cargas puntuales.

### Indicación 5.13

- La carga imagen en este caso es un alambre paralelo al original. El alambre imagen está sobre el eje  $y$  fuera del túnel.
- Conocido el potencial, la densidad de carga puede ser encontrada en forma inmediata determinando la componente radial del campo eléctrico en  $r = R$ . En este caso se cumple  $\sigma(\theta) = \epsilon_0 \vec{E}(R, \theta) \cdot (-\hat{r})$ .



- La densidad carga por unidad de largo inducida en el túnel es la misma que la posee el alambre imagen.
- La fuerza por unidad de largo puede ser obtenida a partir de  $d\vec{F} = dq\vec{E} = \lambda\vec{E}dl$

**Indicación 5.15**  

- Se recomienda abordar este problema por superposición, es decir, como dos guías de ondas donde tres lados están a potencial nulo y uno a  $V_0$ .
- Para aplicar la superposición es cómodo darse dos sistemas de referencias y luego encontrar su transformación para dejar todo en función de uno solo.

**Indicación 5.16**  

- Este problema se resuelve de la misma forma el Problema 5.14, con la única precaución que es necesario derivar para imponer la tercera condición de borde.



## V. Respuestas

Problema	Respuestas
 5.1	<p>b) <math>z(x) = \frac{\ln( \sin kx )}{k} + C</math> con <math>C \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>c) <math>\sigma = 2\varepsilon_0 V_0 k \cos kx</math></p>
 5.2	<p>a) <math>\Delta V = \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}</math></p> <p>b) <math>\Delta V = 12</math> [V].</p>
 5.3	$V(x) = \begin{cases} \frac{\rho_0 x}{3} \left( \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{3} \right) & 0 < x < a \\ \frac{\rho_0 x}{6} (x - 2a) & a < x < 2a \end{cases}$
 5.4	$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3\varepsilon_0 V_0 (ka+1)}{a^2} & r \leq a \\ -k^2 \varepsilon_0 \frac{V_0 a}{r} e^{k(a-r)} & r > a \end{cases}$ $V(r) = \begin{cases} V_0 - \frac{V_0 (ka+1)(r^2-a^2)}{2a^2} & r \leq a \\ \frac{V_0 a}{r} e^{k(a-r)} & r > a \end{cases}$
 5.5	$C = \frac{\varepsilon_0 a}{d} \ln \left( \frac{d+a}{d} \right)$
 5.6	$C_T = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} + \frac{4\pi\varepsilon_0 \rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1}$
 5.7	<p>a) <math>\sigma(x, y) = \frac{-qh}{2\pi(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}</math></p> <p>b) <math>Q_{\text{disco}} = \frac{qh}{\sqrt{d^2+h^2}} - q</math>, <math>d = h\sqrt{3}</math></p> <p>c) <math>W = \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 h}</math></p>
 5.8	$\sigma_x(x) = 2b\sigma R^2 \left( -\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{((x+a)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$ $\sigma_y(y) = 2a\sigma R^2 \left( -\frac{1}{(a^2+(y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(a^2+(y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$



## Problema Respuestas

**5.9**  $V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^8 \frac{(-1)^{i-1}}{\|(x, y, z) - \vec{r}_i\|}$ , donde:  $\vec{r}_1 = (d \cot(\frac{\pi}{8}), d, 0)$ ,  $\vec{r}_2 = (d, d \cot(\frac{\pi}{8}), 0)$ ,  $\vec{r}_3 = (-d, d \cot(\frac{\pi}{8}), 0)$ ,  $\vec{r}_4 = (-d \cot(\frac{\pi}{8}), d, 0)$ ,  $\vec{r}_5 = (-d \cot(\frac{\pi}{8}), -d, 0)$ ,  $\vec{r}_6 = (-d, -d \cot(\frac{\pi}{8}), 0)$ ,  $\vec{r}_7 = (d, -d \cot(\frac{\pi}{8}), 0)$ ,  $\vec{r}_8 = (d \cot(\frac{\pi}{8}), -d, 0)$  y  $x \geq y > 0$ .

**5.10**  $\sigma(\theta) = \frac{(R - \frac{R^2}{d})q}{4\pi(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$ ,  $q_{\text{ind}} = -\frac{R}{d}q$

**5.11**  $\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q''}{d^2} + \frac{q'}{(d-d')^2} \right) \hat{x}$  donde  $q' = -\frac{qR}{d}$ ,  $q'' = Q + \frac{qR}{d}$ ,  $d' = \frac{R^2}{d}$

**5.12** a)  $|F| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{qq'}{(L-L')^2} + \frac{qq''}{L^2} \right)$ ,  $L = \sqrt{d^2 + \ell^2 - 2d\ell \cos \phi}$  y  $L' = \frac{R^2}{L}$   
 b)  $\omega = \frac{q}{(d-\ell)^2 - R^2} \sqrt{\frac{Rd}{4\pi\varepsilon_0 m \ell}}$

**5.13** a)  $V(r, \theta) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left( \frac{r^2 + h^2 - 2rh \sin \theta}{r^2 + (R-d)^2 - 2r(R-d) \sin \theta} \right)$  donde  $h = \frac{R^2}{R-d}$   
 b)  $\sigma(\theta) = -\frac{\lambda(d^2(2R-d))}{2\pi R(R^2+d^2-2dR \sin \theta)}$   
 c)  $\lambda_{\text{inducido}} = -\lambda$   
 d)  $\vec{F} = -\frac{\lambda^2(R-d)}{2\pi\varepsilon_0 d^2} \hat{y}$

**5.14**  $V(x, y) = -\frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1, n \neq 2}^{\infty} \frac{n(\cos(\pi n)-1)}{(n^2-4)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}$

**5.15**  $V(x, y) = \frac{V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(-1)^{n+1})}{n \operatorname{senh}(n\pi b/a)} \left( \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(a-x)}{a}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right) \right)$

**5.16**  $V(x, y) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8aE_0}{(2n+1)^2\pi^2 \cosh(\alpha b)} \sin(\alpha x) \sinh(\alpha y)$ ,  $\alpha = \frac{\pi(2n+1)}{2a}$



## CAPÍTULO 5. ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON



# Dipolo Eléctrico

## I. Resumen Teórico

---

### Momento Dipolar

El dipolo eléctrico es una distribución de carga que puede ser continua o discreta. El caso más básico de un dipolo eléctrico son dos cargas puntuales  $+q$  y  $-q$  separadas una distancia  $d$ , el cual se le asocia un vector  $\vec{p}$  llamado momento dipolar y se define como

$$\vec{p} = qd\hat{\vec{t}} \quad (6.1)$$

donde  $\hat{\vec{t}}$  es el vector unitario del eje que pasa por las dos cargas.  $\hat{\vec{t}}$  apunta de la carga negativa a la positiva.

Para distribuciones más complejas, el momento dipolar puede ser determinado en configuraciones discretas como

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \quad (6.2)$$

y en configuraciones continuas

$$\vec{p} = \int dq(\vec{r}') \vec{r}' \quad (6.3)$$


---

### Potencial y Campo Dipolar

El potencial debido a un momento dipolar está dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (6.4)$$

Mientras que el campo eléctrico está dado por la expresión

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right) \quad (6.5)$$

## Torque y Energía de un Dipolo

Un dipolo  $\vec{p}$  bajo la influencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$  experimenta un torque el cual tiende alinearlo con el campo. El torque está dado por

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (6.6)$$

Por otro lado, la energía que posee un dipolo para mantener su posición bajo el mismo campo eléctrico es

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (6.7)$$

---

## Recomendaciones

- La idea del dipolo eléctrico es poder determinar como se comporta (en una primera aproximación) el potencial y campo eléctrico que genera una distribución de carga para puntos muy lejanos a ella. Todas las distribuciones de carga tienen asociado un momento dipolar que en algunos casos podría ser nulo.

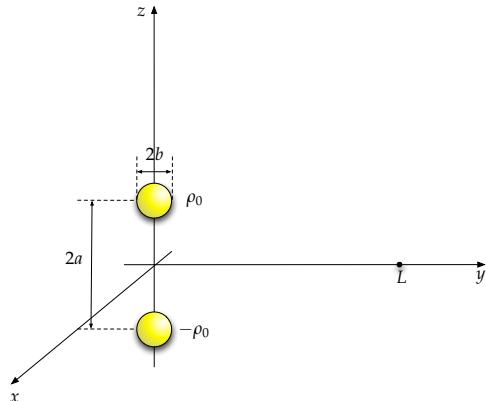


## II. Problemas Propuestos

### Problema 6.1

Considere dos esferas de radio  $b$  y densidades de carga  $\rho_0$  y  $-\rho_0$ , las cuales están dispuestas en el eje  $z$ , a una distancia  $2a$  entre ellas, según se muestra en la figura. Se pide:

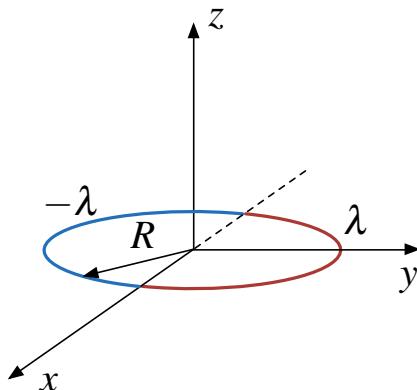
- Estimar el potencial en el punto  $(0, L, 0)$ , suponiendo  $L \gg a, b$
- Si se ubica una carga  $q$  en la posición  $(0, L, 0)$ , estime la fuerza sobre la carga.
- Calcule el trabajo necesario para llevar la carga desde la posición  $(0, L, 0)$  a  $(L, 0, 0)$ .



### Problema 6.2

Considere un aro de radio  $R$  sobre el plano  $xy$ , el cual tiene una de sus mitades con una densidad lineal de carga uniforme  $\lambda$  ( $y > 0$ ), y la otra con la densidad opuesta  $-\lambda$  ( $y < 0$ ), tal como se muestra en la Figura.

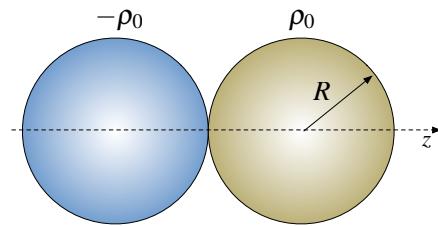
- Calcule el momento dipolar del aro y potencial electrostático en la aproximación del campo lejano. ¿Cuál es el valor del potencial en el plano  $xz$ ?
- Determine el valor del campo eléctrico en el plano  $xz$  usando la aproximación del campo lejano del punto anterior. ¿Es consistente este resultado con el valor obtenido para el potencial en dicho plano?.
- En general, o sea no necesariamente lejos del aro, ¿Cuál es el valor del potencial en el plano  $xz$ ?



**Problema 6.3**   

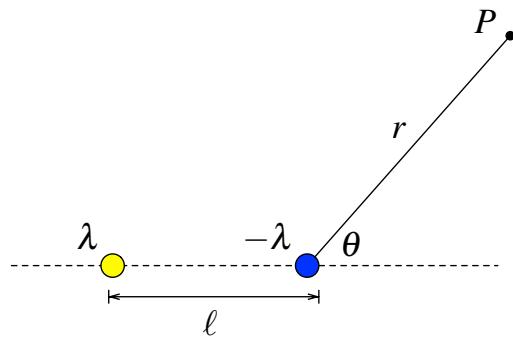
Un dipolo está compuesto por dos cargas opuestas. Para modelar un dipolo considere dos esferas macizas de radios  $R$ , de densidad de carga constante respectivamente  $\rho_0$  y  $-\rho_0$ , las cuales están conectadas en un punto (ver figura).

- Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio, use como origen el punto de contacto entre ambas esferas.
- Para distancias muy lejanas, ¿De que forma decrece el campo eléctrico?



**Problema 6.4**   

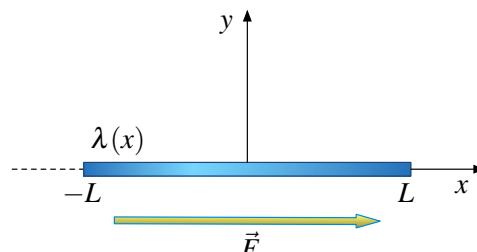
Considere dos cables infinitos paralelos con densidad de carga longitudinal  $\lambda$  y  $-\lambda$  separados una distancia  $\ell \ll r$ , tal como se ilustra en la Figura. Encuentre el campo eléctrico  $\vec{E}(r, \theta)$  y el potencial eléctrico  $V(r, \theta)$  a una distancia  $r \gg \ell$ , en el límite  $\ell \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  y  $\lambda\ell \rightarrow Q$ .



**Problema 6.5**   

Considere una barra de largo  $2L$ , la cual se encuentra sobre el eje  $x$  desde  $x = -L$  hasta  $x = L$ . La barra posee una densidad de carga  $\lambda(x) = \frac{5}{6}\alpha x^3$  donde  $\alpha$  es una constante y una masa  $M$  distribuida uniformemente en su largo. En el espacio donde se encuentre la barra existe un campo eléctrico constante  $\vec{E} = E_0\hat{x}$ .

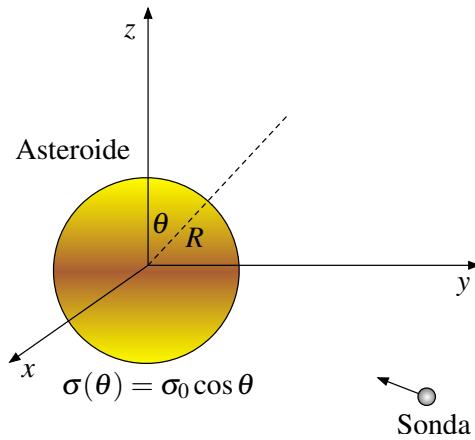
- Determine el momento dipolar de la barra.
- Si la barra puede rotar con respecto a su centro, determine la frecuencia con que oscilará la barra si es perturbada débilmente de su posición de equilibrio.



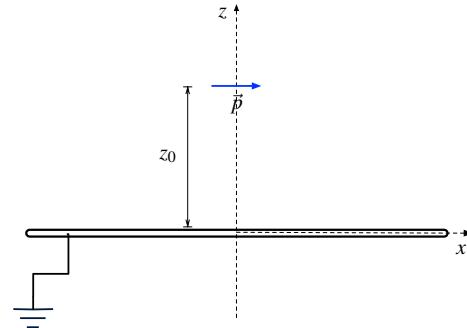
**Problema 6.6**   

Se ha encontrado un asteroide esférico de masa  $M$  y radio  $R$  cargado con una distribución superficial de carga  $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ . Con el objeto de estudiar el asteroide, se ha enviado una sonda espacial cuya trayectoria de acercamiento se encuentra en el plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , según muestra la Figura.

- Determine el momento dipolar del asteroide.
- Estime el campo eléctrico que afectará a la sonda, si ésta se encuentra muy alejada del asteroide.
- Si la sonda puede modelarse como una carga puntual  $Q$ , determine el trabajo que debe realizar para poder estar una distancia  $L \gg R$  del centro de asteroide. Considere que la sonda comienza su viaje en el infinito.

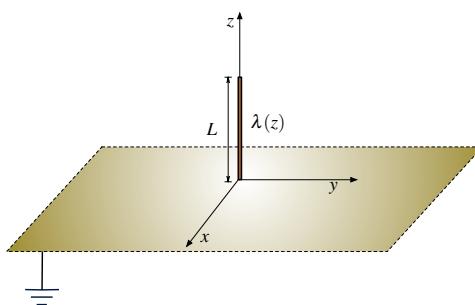
**Problema 6.7**   

Un dipolo de momento dipolar  $\vec{p} = p\hat{x}$  está colocado a una distancia  $z_0$  de un plano conductor infinito conectado a tierra tal como indica la Figura. Determinar el potencial eléctrico en cualquier punto  $(x, y, z)$  del espacio y la densidad superficial de carga inducida sobre un punto del plano conductor.

**Problema 6.8**   

Considere un plano conductor infinito conectado a tierra coincidente con el plano  $xy$ . Una barra de largo  $L$  yace a lo largo del eje  $z$ , de tal forma su extremo inferior se encuentra muy cercano al origen sin tocar el plano (ver figura). Si la densidad de carga lineal de la barra es  $\lambda(z) = \alpha z$ , donde  $\alpha$  es una constante, determine:

- La densidad de carga superficial  $\sigma$  sobre el plano conductor.
- El potencial electrostático para puntos muy lejanos del plano, mostrando claramente los términos monopolar y dipolar.

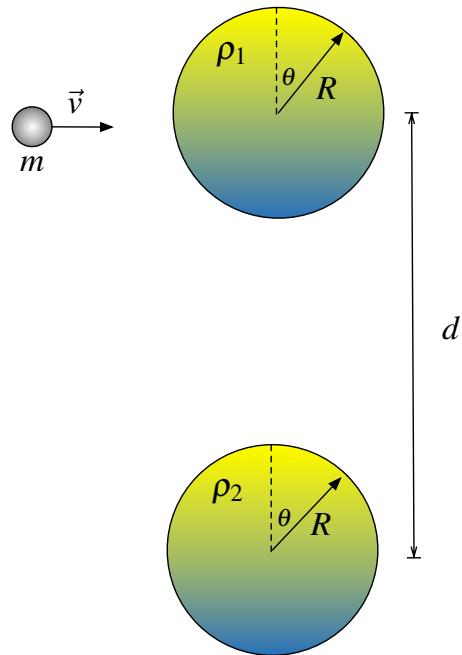


**Problema 6.9**   

En cierto lugar del espacio existen dos planetas de igual masa  $M$  y radio  $R$  alejados una distancia  $d \gg R$ . Debido a los minerales que componen los asteroides estos adquieren una densidad volumétrica de carga dada por

$$\rho_1(\theta) = \rho_2(\theta) = \begin{cases} \rho_0 & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\rho_0 & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

Considere que ambos planetas comparten su eje polar (ver Figura). Un asteroide de masa  $m \ll M$  choca con uno de los planetas provocando que este invierta sus polos. ¿A qué velocidad chocó el asteroide para lograr ese efecto?. Desprecie los efectos gravitacionales por ser mucho menores que los electrostáticos.



### III. Soluciones

#### Solución 6.2

El momento dipolar está dado por

$$\vec{p} = \int \vec{r}' dq$$

dónde  $\vec{r}' = R\hat{r}$  y  $dq = R\lambda(\varphi)d\varphi$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\vec{p} = \int_0^{2\pi} R\hat{r} \cdot R\lambda(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda(\varphi) (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) d\varphi$$

En  $\hat{x}$ :

$$\begin{aligned} |\vec{p}_x| &= \int_0^{2\pi} R^2 \lambda(\varphi) (\cos \varphi d\varphi) \\ &= R^2 \int_0^\pi \lambda_0 \cos \varphi d\varphi + R^2 \int_\pi^{2\pi} -\lambda_0 \cos \varphi d\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

En  $\hat{y}$ :

$$\begin{aligned} |\vec{p}_y| &= \int_0^{2\pi} R^2 \lambda(\varphi) \sin \varphi d\varphi \\ &= R^2 \int_0^\pi \lambda_0 \sin \varphi d\varphi + R^2 \int_\pi^{2\pi} -\lambda_0 \sin \varphi d\varphi \\ &= 4R^2 \lambda_0 \end{aligned}$$

Con lo anterior se concluye

$$\vec{p} = |\vec{p}_x| \hat{x} + |\vec{p}_y| \hat{y} = 4R^2 \lambda_0 \hat{y}$$

La aproximación del potencial en puntos lejanos es:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

dónde  $\vec{p} = 4R^2 \lambda_0 \hat{y}$ ,  $\hat{r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  y  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$V(r) = \frac{4R^2 \lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin \theta \sin \varphi}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2}$$



## CAPÍTULO 6. DIPOLO ELÉCTRICO

Pero

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \implies \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \implies \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Luego

$$V(x, y, z) = \frac{4\lambda_0 R^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda_0 R^2 y}{\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En el plano  $xz$  se tiene  $y = 0$

$$\implies V(x, z) = 0$$

Usando el potencial anterior se calcula el campo

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla V \\ \vec{E} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \\ &= \frac{\lambda_0 R^2}{\pi\epsilon_0} \left( \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \hat{x} - \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \hat{y} + \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \hat{z} \right) \end{aligned}$$

En el plano  $P$ ,  $y = 0$

$$\vec{E}(x, z) = -\frac{\lambda_0 R^2}{\pi\epsilon_0} \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \hat{y} = \frac{-\lambda_0 R^2}{\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y}$$

El campo es independiente de  $y$ , por ende el campo eléctrico es constante para un  $y$  fijo, lo cual implica que para cualquier plano paralelo a  $xz$  es una equipotencial. El potencial para puntos no necesariamente lejanos es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Donde  $dq = \lambda(\varphi)Rd\varphi$ ,  $\vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$  y  $\vec{r}' = R\hat{r}$

$$\begin{aligned} V(x, z) &= \frac{R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda(\varphi)d\varphi}{|(x - R\cos\varphi)\hat{x} + R\sin\varphi\hat{y} + z\hat{z}|} \\ &= \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0} \left( \underbrace{\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{(x - R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2}}}_{I_1} - \underbrace{\int_\pi^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(x - R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2}}}_{I_2} \right) \end{aligned}$$

Analizando las integrales por separado:

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{(x - R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2}}$$



al usar el cambio de variable  $\alpha = \varphi - \pi$ ,  $d\alpha = d\varphi$

$$I_1 = \int_{-\pi}^0 \frac{d\alpha}{\sqrt{(x + R \cos \alpha)^2 + R^2 \sin^2 \alpha + z^2}}$$

Por otro lado

$$I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(x - R \cos \varphi)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + z^2}}$$

al usar el cambio de variable  $\alpha = \pi - \varphi$ ,  $d\alpha = -d\varphi$

$$I_2 = - \int_0^{-\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{(x + R \cos \alpha)^2 + R^2 \sin^2 \alpha + z^2}} = \int_{-\pi}^0 \frac{d\alpha}{\sqrt{(x + R \cos \alpha)^2 + R^2 \sin^2 \alpha + z^2}} = I_1$$

Con lo que se concluye

$$V(x, z) = 0$$

### Solución 6.3

- a) Es importante notar que el problema carece de simetría esférica (ie. no puede suponerse que el campo es de la forma  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ ), por lo tanto es imposible determinar el campo eléctrico usando directamente ley de Gauss. Para abordar el problema es necesario primero analizar el campo eléctrico que genera una esfera por sí sola (independiente del problema actual), para ello se calculará el campo a una esfera de radio  $a$  y densidad de carga homogénea  $\rho$ .

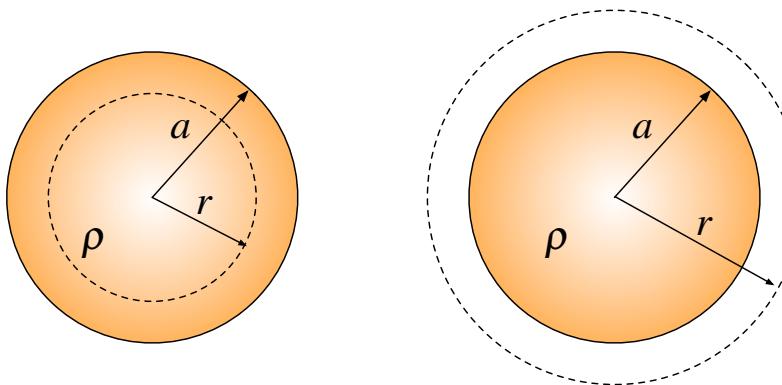


Figura 6.1: Casos de cálculo de campo eléctrico para  $r < a$  y  $r \geq a$

Por ley de Gauss  $r < a$  (puntos dentro de la esfera):

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV \implies E(r) 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \implies \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$$



## CAPÍTULO 6. DIPOLO ELÉCTRICO

y para  $r \geq a$  (puntos fuera de la esfera)

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho dV \implies E(r) 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \implies \vec{E}(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\rho a^3 \vec{r}}{3\varepsilon_0 |\vec{r}|^3}$$

En ambos resultados se ha dejado en función del vector posición  $\vec{r}$  medido desde el centro de la esfera, de modo que sea más fácil determinar el valor del campo eléctrico en un punto para un problema que se tenga más de un sistema de referencia. Volviendo al problema original, si se desea calcular el campo eléctrico en punto  $P$  arbitrario, existen 3 posibilidades en el espacio:

- Caso 1: Fuera de ambas esferas
- Caso 2: Dentro de la esfera positiva y fuera de la esfera negativa
- Caso 3: Dentro de la esfera negativa y fuera de la esfera positiva

Para cada uno de estos casos, cada esfera provoca un campo eléctrico en el punto  $P$ , por lo cual hay que usar el principio de superposición basándose en los resultados ya obtenidos para una esfera cualquiera.

- Caso 1  
Fuera de ambas esferas se tiene la siguiente configuración que se muestra en la Figura 6.1.

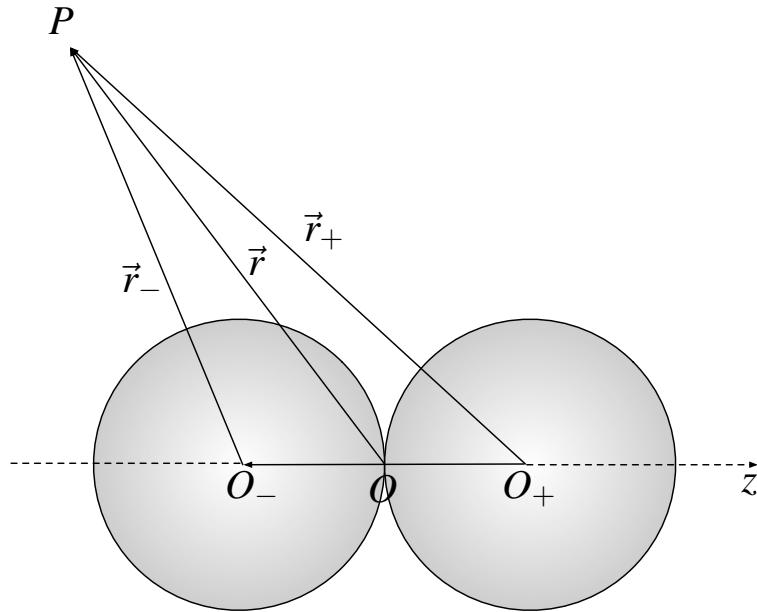


Figura 6.2: Campo Eléctrico para un punto fuera de ambas esferas

En este caso se tiene que el campo eléctrico en el punto  $P$  es:

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0 R^3 \vec{r}_+}{3\varepsilon_0 |\vec{r}_+|^3} - \frac{\rho_0 R^3 \vec{r}_-}{3\varepsilon_0 |\vec{r}_-|^3}$$



Notando además que  $\vec{r}_+ = \vec{r} - R\hat{z}$  y  $\vec{r}_- = \vec{r} + R\hat{z}$  por lo que

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \left( \frac{\vec{r} - R\hat{z}}{|\vec{r} - R\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} + R\hat{z}}{|\vec{r} + R\hat{z}|^3} \right)$$

- Caso 2

De forma parecida al caso anterior se toma un punto dentro de la esfera positiva y fuera de la negativa, lo que resulta como

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0 \vec{r}_+}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 R^3 \vec{r}_-}{3\varepsilon_0 |\vec{r}_-|^3}$$

Luego

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left( (\vec{r} - R\hat{z}) - \frac{R^3}{|\vec{r} + R\hat{z}|^3} (\vec{r} + R\hat{z}) \right)$$

- Caso 3

Finalmente el último caso está dado por un punto dentro de la esfera negativa y fuera de la positiva, es decir

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0 R^3 \vec{r}_+}{3\varepsilon_0 |\vec{r}_+|^3} - \frac{\rho_0 \vec{r}_-}{3\varepsilon_0}$$

de modo que

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left( \frac{R^3}{|\vec{r} - R\hat{z}|^3} (\vec{r} + R\hat{z}) - (\vec{r} + R\hat{z}) \right)$$

- b) En este caso hay que hacer un análisis para distancias mucho más grandes de  $R$ . Para ello se debe hacer previamente una aproximación según Taylor de los términos que componen la expresión. Es decir,

$$\begin{aligned} |\vec{r} \pm R\hat{z}|^{-3} &= (|\vec{r}|^2 + R^2 \pm 2R\vec{r} \cdot \hat{z})^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left( 1 + \frac{R^2}{|\vec{r}|^2} \pm \frac{2R\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r}|^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\approx \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left( 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{R^2}{|\vec{r}|^2} \pm \frac{2R\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r}|^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Dado que se está estudiando el caso  $|\vec{r}| \gg R$  se obtiene que el segundo término de la expresión puede ser ignorado ( $R^2/|\vec{r}|^2 \rightarrow 0$ ). Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \left[ (\vec{r} - R\hat{z}) \left( \frac{1}{|\vec{r}|^3} + \frac{3R\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r}|^5} \right) - (\vec{r} + R\hat{z}) \left( \frac{1}{|\vec{r}|^3} - \frac{3R\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r}|^5} \right) \right]$$

Manejando algebraicamente la expresión y volviendo a hacer la aproximación anterior, se llega a

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \left( -\frac{2R\hat{z}}{|\vec{r}|^3} + \frac{6R(\vec{r} \cdot \hat{z})}{|\vec{r}|^5} \vec{r} \right) = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \left( -\frac{2R\hat{z}}{|\vec{r}|^3} + \frac{6R(\hat{r} \cdot \hat{z})}{|\vec{r}|^3} \hat{r} \right)$$

Por lo que el campo eléctrico desciende como  $1/r^3$  para distancias muy grandes con respecto al radio de las esferas.



## CAPÍTULO 6. DIPOLO ELÉCTRICO

### Solución 6.4

En primera instancia, hay que determinar el campo eléctrico y el potencial que genera un cable infinito con densidad lineal  $\lambda$  en el espacio. Suponiendo que el cable tiene un largo  $L$ , se toma una superficie Gaussiana cilíndrica de radio  $r$  alrededor de él (Figura 6.3). Por ley de Gauss se

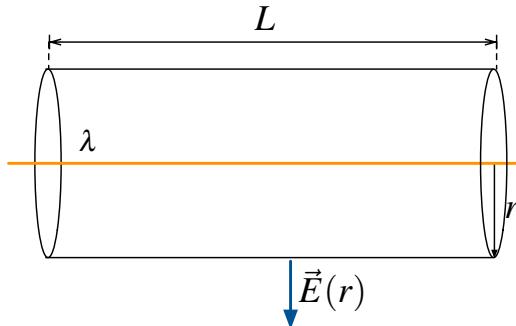


Figura 6.3: Superficie Gaussiana para determinación del campo eléctrico de un alambre.

tiene

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \implies E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

Ahora dado que

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} \implies V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Donde  $r_0$  es una constante arbitraria la cual se usa como referencia. Llevando este resultado al

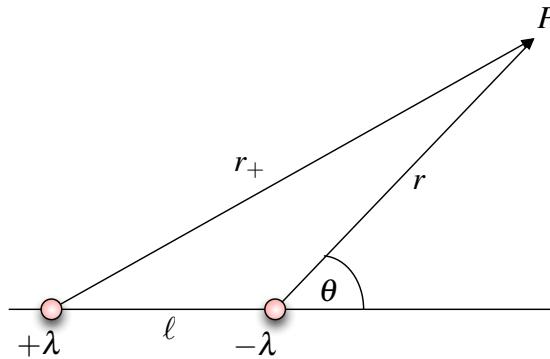


Figura 6.4: Posición del Punto  $P$  con respecto a los cables

problema, se obtiene por superposición que el potencial en un punto cualquiera del espacio es

$$V = \underbrace{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}_{\text{Potencial Cable Negativo}} - \underbrace{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_+}{r_0}\right)}_{\text{Potencial Cable Positivo}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_+}\right)$$

Por comodidad se ha fijado la misma referencia  $r_0$  para ambos cables. Por el teorema del coseno, se tiene además que

$$r_+^2 = r^2 + \ell^2 + 2r\ell \cos\theta$$



Por lo tanto

$$V(r, \theta) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_+^2}{r^2}\right) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(1 + \left(\frac{\ell}{r}\right)^2 + 2\frac{\ell}{r} \cos\theta\right)$$

Dado que se desea analizar para  $r \gg \ell$ , se puede usar un desarrollo de Taylor entorno a 0 de la función  $f(\varepsilon) = \ln(1 + \varepsilon)$  donde  $\varepsilon = \frac{\ell}{r}$ :

$$\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} + \dots$$

Despreciando todos los términos de orden superior, la expresión del potencial puede ser aproximada a

$$V(r, \theta) \approx -\frac{\lambda\ell \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Q \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Finalmente el campo vale

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} (\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$$

### Solución 6.6

- a) El momento dipolar del asteroide puede ser determinado como

$$\vec{p} = \iint \sigma(\theta) R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \cdot R \hat{r} = \sigma_0 R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi (\sin\theta \cos\varphi \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi \hat{y} + \cos\theta \hat{z})$$

Por asuntos de simetría las componentes en  $x$  e  $y$  se anulan. La única componente que aporta al momento dipolar es  $z$ , luego

$$\vec{p} = \sigma_0 R^3 \hat{z} \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \sigma_0 R^3 \hat{z} \cdot -\frac{1}{3}(\cos^3\pi - \cos^3 0) = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 R^3 \hat{z}$$

- b) El campo eléctrico que genera un dipolo está dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right)$$

Dado que la sonda se acerca sobre el plano definido por  $\theta = \frac{\pi}{2}$  este coincide con el plano  $xy$ , se define entonces  $\rho$  como la distancia del centro del asteroide a la sonda. Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \rho^3} \left( \frac{3(\frac{4\pi}{3} \sigma_0 R^3 \hat{z} \cdot \rho \hat{\rho}) \rho \hat{\rho}}{\rho^2} - \frac{4\pi}{3} \sigma_0 R^3 \hat{z} \right) = -\frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 \rho^3} \hat{z}$$



## CAPÍTULO 6. DIPOLO ELÉCTRICO

- c) Finalmente, para encontrar el trabajo basta recordar que si la carga se trae desde el infinito este está dado por

$$W = QV(L)$$

Entonces el potencial que genera un dipolo en  $L$  es

$$V(L) = \frac{\frac{4\pi}{3}\sigma_0 R^3 \hat{z} \cdot L \hat{\rho}}{4\pi\epsilon_0 L^3} = 0$$

Este resultado es bastante interesante, pero es natural pensarlo ya que la fuerza que siente la sonda apunta en la dirección de  $z$  y la sonda se mueve en una plano perpendicular a la fuerza, luego el trabajo debe ser nulo.

### Solución 6.7

Usando el método de las imágenes, se obtiene la configuración equivalente mostrada en la siguiente Figura 6.5

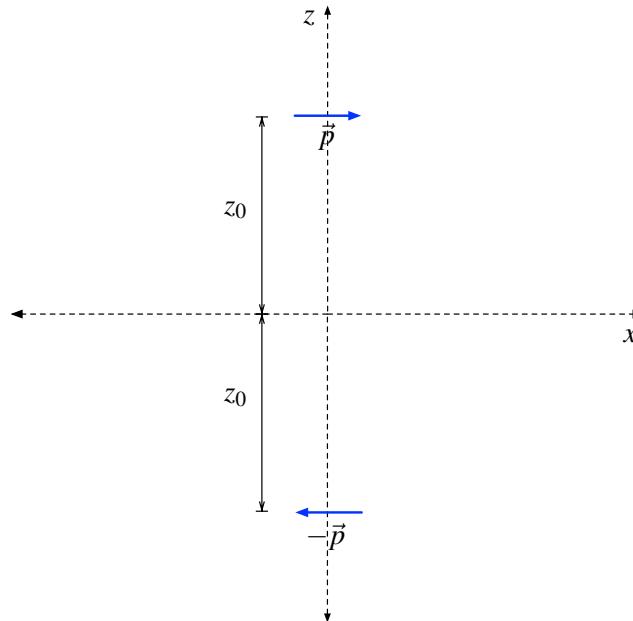


Figura 6.5: Configuración Equivalente con dipolo-imagen

El dipolo se refleja de modo que su imagen tiene un momento dipolar  $-\vec{p}$  y se encuentra en  $z = -z_0$ . Luego el potencial en un punto  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  está dado por la superposición del potencial dipolo y su imagen, es decir

$$V(x, y, z) = \underbrace{\frac{p\hat{x} \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + (z - z_0)\hat{z})}{4\pi\epsilon_0|x\hat{x} + y\hat{y} + (z - z_0)\hat{z}|^3}}_{V_{\text{dipolo}}} + \underbrace{\frac{-p\hat{x} \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + (z + z_0)\hat{z})}{4\pi\epsilon_0|x\hat{x} + y\hat{y} + (z + z_0)\hat{z}|^3}}_{V_{\text{imagen}}}$$



## CAPÍTULO 6. DIPOLO ELÉCTRICO

$$V(x, y, z) = \frac{px}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Ahora, el campo eléctrico sobre el plano  $xy$  debe ser de la forma  $\vec{E} = E(x, y)\hat{z}$  ya que éste debe ser siempre perpendicular a la superficie de un conductor, luego basta saber solamente la derivada según  $z$  de  $V(x, y, z)$  para conocer el campo eléctrico que existe sobre un punto en el plano infinito.

$$\vec{E}_z = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = \frac{3px}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{z - z_0}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{z + z_0}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \hat{z}$$

Finalmente, dado que el plano es conductor, se tiene que

$$\sigma(x, y) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{z} \Big|_{z=0} = -\frac{3pz_0x}{2\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{5}{2}}}$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 6.1

- Determine el momento dipolar de la configuración de cargas.
- Usando lo anterior, determine cuanto el potencial genera ese dipolo sobre los puntos que se le solicitan en el problema.
- Recuerde que el trabajo puede ser determinado como  $W = q(V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}})$

### Indicación 6.5

- Determine el momento dipolar de la barra según la distribución de carga que posee.
- Dado que la barra tiene masa  $M$  distribuida en forma homogénea, determine el momento de inercia de la barra.
- A partir de lo anterior, determine torque que siente el dipolo debido al campo eléctrico constante en el cual esta sumergido. Luego, relacione la expresión recién calculada con  $\vec{\tau} = I\dot{\vec{\omega}}$ .
- Encuentre la ecuación de movimiento de la barra con respecto a  $\theta$  y concluya el problema.

### Indicación 6.8

- Para enfrentar este problema debe usar el método de las imágenes. La carga imagen en este caso es otra barra simétrica a la original desde  $z = 0$  hasta  $z = -L$ . Tenga precaución con la densidad de carga de la barra imagen.
- Una vez encontrada la configuración equivalente, determine el momento dipolar de la distribución y determine el potencial que genera ese dipolo para puntos muy alejados.

### Indicación 6.9

- Determine el momento dipolar que tienen los planetas.
- Utilizando lo anterior, determine el campo eléctrico al cual está afecto el primer planeta debido al segundo.



## CAPÍTULO 6. DIPOLO ELÉCTRICO

- Conocido el campo eléctrico que afecta al primer planeta, determine el trabajo que realizó el choque para hacer que éste girará. Recuerde que  $W = \Delta U$ .
- El trabajo que adicionó energía al sistema fue debido a la energía cinética que traía el asteroide. Relacione esto con la velocidad al momento del choque.



## V. Respuestas

Problema	Respuestas
<b>6.1</b>	<p>a) <math>V_{dip}(0, L, 0) = 0</math></p> <p><b>(P)</b> b) <math>\vec{F} = \frac{2qa\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 L^3} \hat{z}</math></p> <p>c) <math>W = 0</math></p>
<b>6.2</b>	<p>a) <math>\vec{p} = 4\lambda R^2 \hat{y}, V_{dip}(x, 0, z) = 0</math></p> <p><b>(P)</b> b) <math>\vec{E}_{dip}(x, 0, z) = \frac{\lambda R^2}{\pi\varepsilon_0 (x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y}</math></p> <p>c) <math>V(x, 0, z) = 0</math></p>
<b>6.3</b>	<p>a) <math>\vec{r} = (x, y, z)</math></p> <p>Fuera de las dos esferas: <math>\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \left( \frac{\vec{r} - R\hat{z}}{  \vec{r} - R\hat{z}  ^3} - \frac{\vec{r} + R\hat{z}}{  \vec{r} + R\hat{z}  ^3} \right)</math></p> <p>Dentro de la esfera positiva: <math>\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left( (\vec{r} - R\hat{z}) - \frac{R^3}{  \vec{r} + R\hat{z}  ^3} (\vec{r} + R\hat{z}) \right)</math></p> <p>Dentro de la esfera negativa: <math>\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left( \frac{R^3}{  \vec{r} - R\hat{z}  ^3} (\vec{r} + R\hat{z}) - (\vec{r} + R\hat{z}) \right).</math></p> <p>b) El campo eléctrico decae como <math>1/r^3</math>.</p>
<b>6.4</b>	<p><b>(P)</b> <math>V(r, \theta) = -\frac{Q \cos \theta}{2\pi\varepsilon_0 r}</math></p> <p><math>\vec{E} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} (\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})</math></p>
<b>6.5</b>	<p>a) <math>\vec{p} = \frac{1}{3}\alpha L^5 \hat{x}</math></p> <p>b) <math>\omega = 2L \sqrt{\frac{\alpha LE_0}{M}}</math></p>
<b>6.6</b>	<p>a) <math>\vec{p} = \frac{4\pi}{3}\sigma_0 R^3 \hat{z}</math></p> <p><b>(P)</b> b) <math>\vec{E} = -\frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 \rho^3} \hat{z}</math></p> <p>c) <math>V(L) = 0</math></p>



---

Problema    Respuestas

---

**6.7**

$$V(x, y, z) = \frac{px}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(x^2+y^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+(z+z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

$$\sigma(x, y) = -\frac{3pz_0x}{2\pi\epsilon_0(x^2+y^2+z_0^2)^{\frac{5}{2}}}$$


---

**6.8**

a)  $\sigma(x, y) = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{x^2+y^2+L^2}+L}{\sqrt{x^2+r^2}} \right) - \frac{L}{\sqrt{x^2+y^2+L^2}} \right]$

b)  $V(r) = \frac{\alpha L^3 \cos \theta}{6\pi\epsilon_0 r^2}$

---

**6.9**

$$v = \frac{R^4 \rho_0}{d} \sqrt{\frac{\pi}{2\epsilon_0 m d}}$$


---



## CAPÍTULO 6. DIPOLO ELÉCTRICO



# Dieléctricos

## I. Resumen Teórico

---

### Vector de Polarización

Dada la composición de dipolos eléctricos que poseen los materiales, es posible definir el vector de polarización  $\vec{P}$  como

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} \quad (7.1)$$

El cual se define como la densidad de momento dipolar por unidad de volumen dentro de un medio material.

---

### Densidades de Carga de Polarización

La densidad de carga de polarización superficial está dada por

$$\sigma_p = \vec{P} \Big|_{\text{borde}} \cdot \hat{n} \quad (7.2)$$

donde  $\hat{n}$  es la normal de la superficie dieléctrica. Por otro lado, la densidad de carga volumétrica de polarización está dada por

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (7.3)$$


---

### Propiedades Eléctricas de los Materiales

Los materiales dieléctricos pueden ser clasificados de acuerdo a sus distintas propiedades eléctricas.

- Un material lineal es aquel que cumple que en todos sus puntos  $|\vec{P}| = \alpha |\vec{E}|$ .
- Un material isótropo es aquel que  $\vec{P} = \alpha \vec{E}$ .
- Un material homogéneo cumple que  $\alpha$  tiene el mismo valor en todos los puntos del material.

### Ley de Gauss Generalizada

Para incluir el aporte de los materiales en electrostática se define el vector desplazamiento como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (7.4)$$

En general, si se trabaja con materiales lineales, isótropos y no homogéneos, es posible afirmar que

$$\vec{D} = \epsilon(\vec{r}') \vec{E} \quad (7.5)$$

donde  $\epsilon(\vec{r}')$  es conocida como la constante dieléctrica del material. A partir de este nuevo vector, se generaliza la Ley de Gauss de la siguiente forma

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \quad (7.6)$$

O equivalentemente en su forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \quad (7.7)$$

---

### Energía con Dieléctricos

Como generalización para el cálculo de energía, esta puede ser determinada como

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\substack{\text{Todo el} \\ \text{Espacio}}} \vec{E} \cdot \vec{D} dV \quad (7.8)$$

### Condiciones de Borte

Las condiciones de borde en electrostática están dadas por

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (7.9)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{\text{libre}} \quad (7.10)$$

---

### Recomendaciones

- Es muy importante diferenciar la carga libre con la carga de polarización. Por ejemplo, los conductores sólo pueden tener carga libre en su superficie.
- A veces puede ser algo confuso como determinar la normal  $\hat{n}$  de las densidades superficiales de polarización. Recuerde que es siempre la normal exterior, que siempre apunta desde el dieléctrico hacia fuera.



## II. Problemas Propuestos

### Problema 7.1



Considere una esfera conductora de radio  $R_1$ , cargada con  $Q$ . La cual está rodeada de un manto dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  y radio  $R_2$  (con respecto al centro de la esfera), el resto del espacio está vacío. Determine:

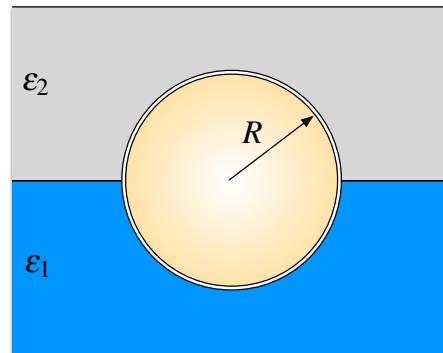
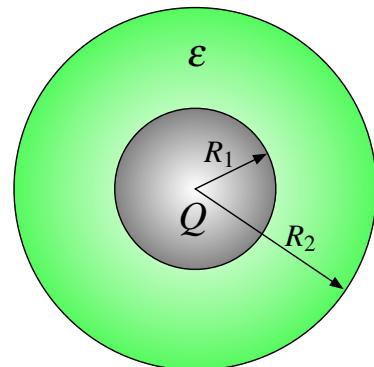
- El campo eléctrico en todo el espacio.
- Las densidades de carga libre e inducidas por la polarización en las interfaces (cambios de medio).
- La diferencia de potencial entre la esfera conductora e infinito. ¿Aumenta o disminuye esta tensión debido producto a la presencia del dieléctrico?

### Problema 7.2



Una esfera conductora de radio  $R$  flota hasta la mitad en un medio dieléctrico de permitividad eléctrica  $\epsilon_1$ . La región sobre la esfera es un gas de permitividad eléctrica  $\epsilon_2$ . La esfera está cargada con una carga igual a  $Q$ .

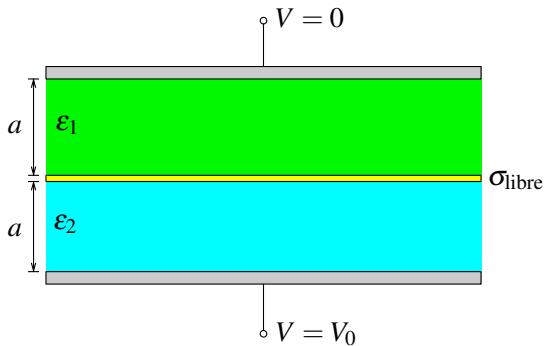
- Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.
- Calcule la densidad de carga libre superficial en la esfera conductora, y la densidad superficial de carga de polarización de ambos medios dieléctricos en la interfaz con la esfera.
- Si el medio en el cual flota la esfera es agua ( $\epsilon_1 \approx 79\epsilon_0$ ) y el gas que hay sobre ella es aire ( $\epsilon_2 \approx \epsilon_0$ ). Obtenga la relación (en módulo) entre la carga total de polarización en la interfaz con la esfera y la carga libre de la esfera, ¿qué signo tiene la carga neta sobre la esfera? .



## CAPÍTULO 7. DIELÉCTRICOS

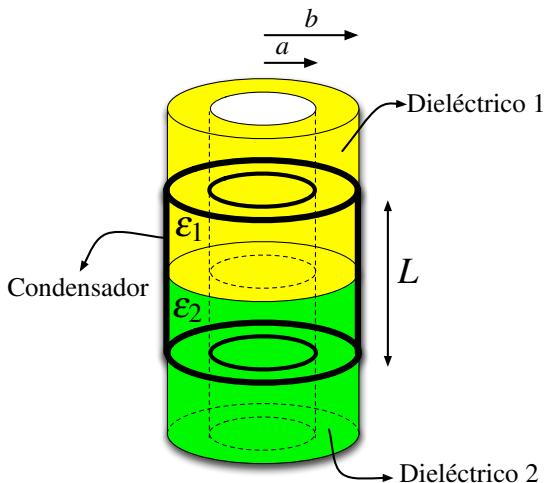
### Problema 7.3

Entre dos placas infinitas paralelas (horizontales) separadas por una distancia  $2a$  hay un campo eléctrico perpendicular a las placas, lo que implica una diferencia de potencial  $V_0$ . El espacio entre ellas está lleno con un dieléctrico aislante con constante dieléctrica  $\epsilon_1$  hasta la mitad de la altura y de ahí hacia arriba hay un material aislante con constante dieléctrica  $\epsilon_2$ . Determine el valor que debe tener la densidad de carga libre que hay en la interfaz si se mide que la densidad de carga total en ese plano interfacial es nula.



### Problema 7.4

En un condensador cilíndrico de radios  $a$  y  $b$  y de largo  $L$  ( $\gg a, b$ ) se han puesto dos dieléctricos tal como se muestra la Figura. Si el condensador posee carga  $+Q$  y  $-Q$  en sus superficies y los dieléctricos poseen permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  ( $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ), calcule la fuerza necesaria que hay que aplicar al sistema para que el dieléctrico de permitividad  $\epsilon_1$  permanezca una distancia  $\frac{1}{2}L$  dentro del condensador. Considere que ambos dieléctricos son muy largos y se extienden más allá del largo del condensador.



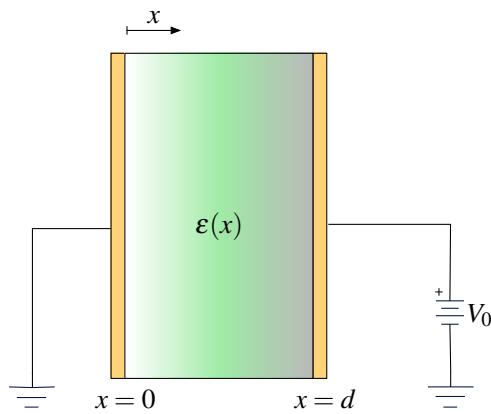
### Problema 7.5

Se tiene dos placas conductoras paralelas muy grandes, separadas una distancia  $d$ . El espacio entre las placas está lleno con un material dieléctrico de permitividad  $\epsilon(x)$ , tal que  $\epsilon(x = 0) = \epsilon_1$ . Se encuentra que el potencial electrostático entre las placas satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2V}{dx^2} + k \frac{dV}{dx} = 0$$

donde  $k$  es una constante positiva.

- El potencial electrostático  $V(x)$  dentro de las placas.
- La permitividad  $\epsilon(x)$ .
- La densidad de carga libre que reside en la superficie conductora a potencial  $V_0$ .



**Problema 7.6**   

El espacio entre dos discos paralelos conductores de radio  $R$  y separados una distancia  $d \ll R$  es puesto un dieléctrico no uniforme, de modo que su permitividad varía linealmente en función de la distancia del centro de los discos

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{r}{R}$$

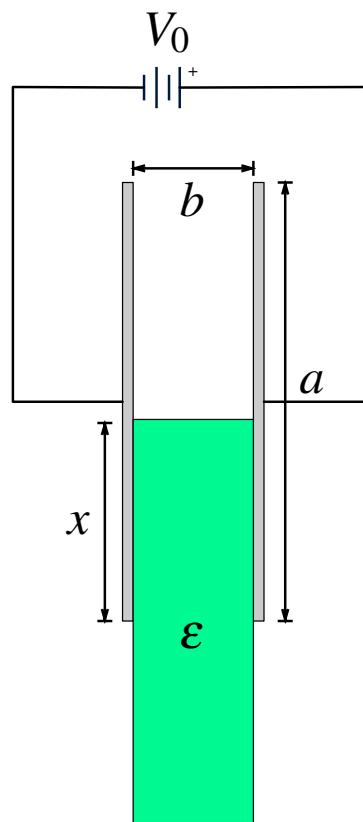
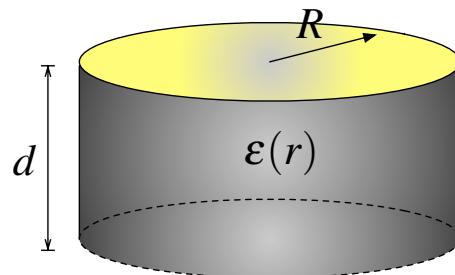
a) Si los discos se encuentran a una diferencia de potencial  $V_0$ :

- Determine el campo eléctrico, el vector desplazamiento y las densidades superficiales/volumétricas de polarización.
- ¿Cuánto vale la capacidad del sistema?

**Problema 7.7**   

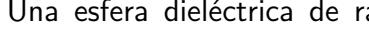
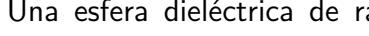
Un dispositivo de uso frecuente en muchos artefactos eléctricos de uso diario son los condensadores variables. Este tipo de condensador posee una geometría que es fácil de modificar mecánicamente, con lo cual se puede ajustar su capacidad a gusto. Existen muchos diseños de este tipo de dispositivos, un ejemplo simple e idealizado es el que se muestra en la Figura. El cual consiste en dos placas paralelas y cuadradas de largo  $a$  y separadas una distancia  $b$ . Entremedio de las cuales se introduce parcialmente un dieléctrico de permitividad  $\varepsilon$ , el cual penetra una distancia  $x$  de uno de los bordes del condensador. Suponga que dispone de una batería que da un voltaje  $V_0$ , y desea almacenar una carga  $Q^*$  en el condensador. Para ajustarlo, calcule

- La capacidad del condensador para un  $x$  dado, despreciando los efectos de borde (i.e.  $b \ll a, x$ )
- La penetración  $x$  del dieléctrico para el condensador tenga una carga  $Q^*$  (dado el voltaje de la batería  $V_0$ ).
- ¿Cuál es la fuerza que siente el condensador en esa posición?
- ¿Cuál es el rango de carga  $Q^*$  que puede ser almacenado en el condensador?



## CAPÍTULO 7. DIELÉCTRICOS

### Problema 7.8



Una esfera dieléctrica de radio  $b$  y permitividad de carga  $\epsilon$  contiene en su interior una densidad de carga libre

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 r & 0 < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

- Calcule las densidades de carga de polarización en volumen  $\rho_p$  y superficial  $\sigma_p$  en las zonas donde existan.
- Calcule la energía electrostática del sistema de cargas.

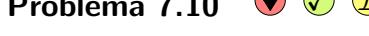
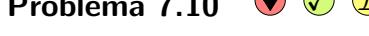
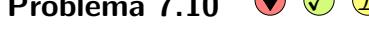
### Problema 7.9



Tres láminas dieléctricas de permitividades  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  están apiladas sobre otra como se indica en la Figura. El campo eléctrico  $\vec{E}_1$  forma un ángulo  $\theta_1$  con la normal en la interfase entre los medios 1 y 2. Suponga que los campos eléctricos permanecen constantes en magnitud y dirección al interior de cada medio.

- Encuentre el ángulo  $\theta_3$  que forma el campo  $\vec{E}_3$  con la normal cuando emerge en el medio 3. Suponga que no hay densidades de carga superficial libre en la interfase entre los medios dieléctricos.
- Encuentre la densidad de carga superficial libre que habría que poner en la interfase entre los medios 2 y 3 para que el campo  $\vec{E}_3$  fuera paralelo a  $\vec{E}_1$ .

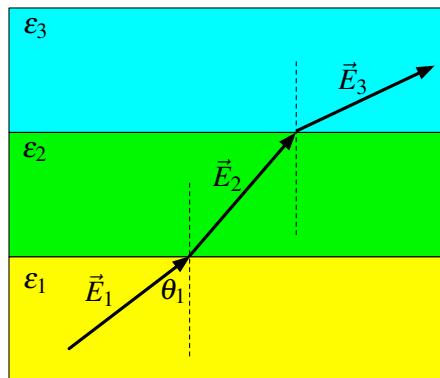
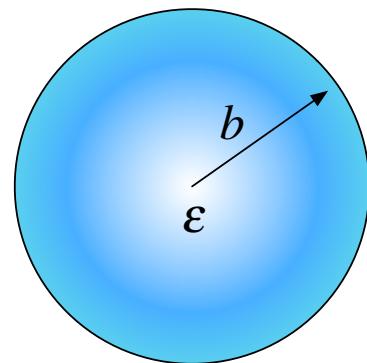
### Problema 7.10



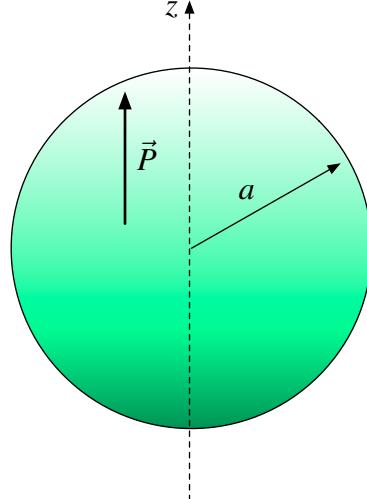
Una esfera dieléctrica de radio  $a$  está uniformemente polarizada, con un vector de polarización  $\vec{P} = P_0 \hat{z}$  uniforme.

- Calcule las densidades de carga de polarización (volumétrica y superficial) en la esfera.
- Calcule la dirección y magnitud del campo eléctrico en el centro de la esfera.
- Determine el potencial eléctrico  $V(r, \theta)$  para puntos  $r \gg a$ .

$$\rho(r)$$

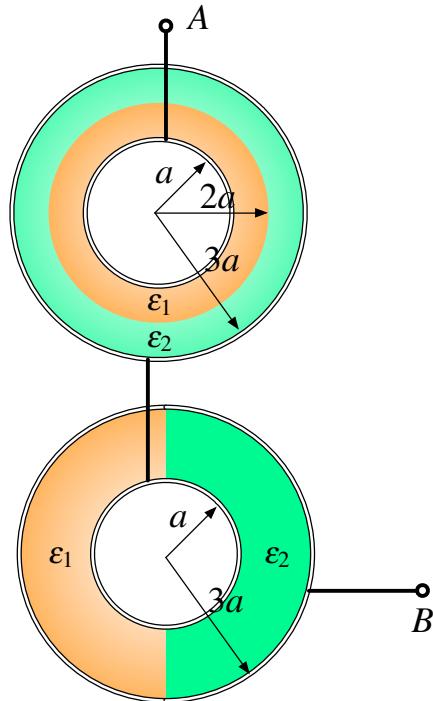


$$z$$



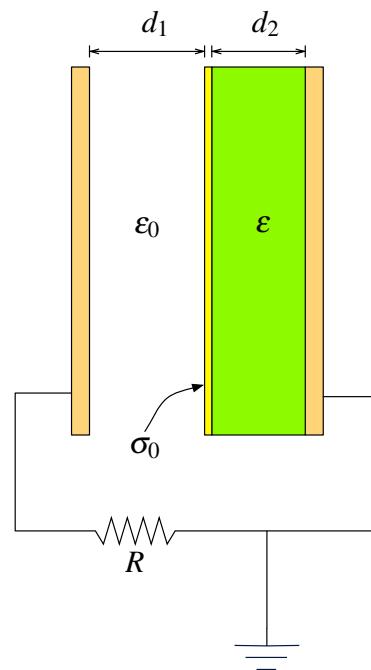
**Problema 7.11**

Dos condensadores cilíndricos de radio interior  $a$  y exterior  $3a$ , y largo  $L$ , han sido llenados con dos materiales dieléctricos  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  de distinta forma (ver figura). Si los condensadores son conectados de la forma que se indica en la figura, determine la capacidad equivalente entre los puntos  $A$  y  $B$ .

**Problema 7.12**

Un condensador de placas paralelas y área  $A$  tiene una lámina dieléctrica de espesor  $d_2$  y permitividad eléctrica  $\epsilon$  adosada a una de sus placas. Un espacio vacío de ancho  $d_1$  separa al dieléctrico de la otra placa conductora. La superficie del dieléctrico en contacto con el vacío está cargada con una densidad superficial de carga libre uniforme  $\sigma_0$ . Esta carga no puede moverse. Las placas están conectadas a través de una resistencia  $R$ , tal como se indica en la figura. Desprecie efectos de borde.

- Cuando ambas placas de condensador están en reposo, calcule la densidad de carga sobre cada placa conductora.
- Considere que la placa de izquierda se acerca al dieléctrico con una velocidad constante  $v_0$ . Calcule la diferencia de potencial que genera entre los extremos de la resistencia en función de la distancia  $d_1$  y el resto de los datos del problema.



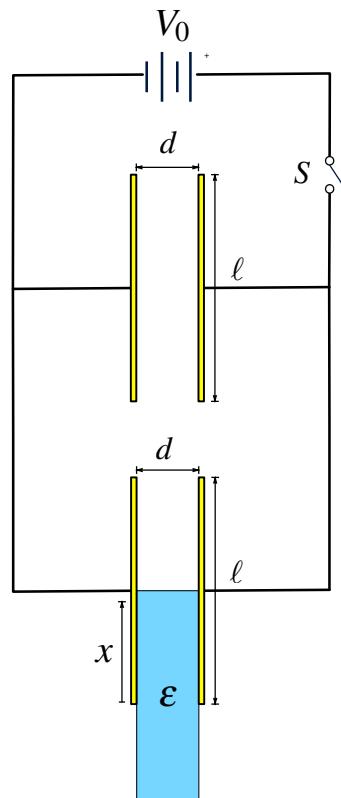
## CAPÍTULO 7. DIELECTRICOS

### Problema 7.13



Dos condensadores iguales, planos de placas paralelas (ancho  $w$ , largo  $\ell$  y separación  $d$ ), están conectados en paralelo a una fuente fem  $V_0$ . En un cierto tiempo  $t_0$ , la fuente fem se desconecta de los condensadores accionando un interruptor  $S$ . Posteriormente se introduce un trozo de material dieléctrico en uno de los condensadores hasta llenarlo completamente.

- Calcule la carga que es transferida de un condensador a otro al pasar de la situación inicial a la situación final.
- Calcule la diferencia de potencial que existe entre las placas de los condensadores en la situación final.
- Calcule la corriente que circula en el circuito en el instante en el que el dieléctrico llena la mitad del condensador y se mueve con velocidad  $v_0$ .

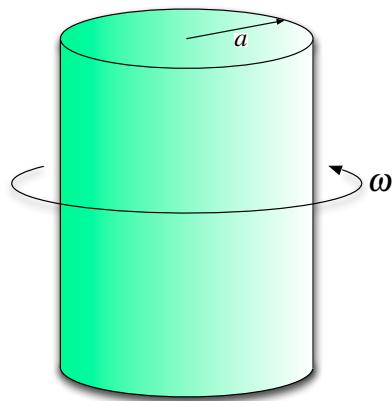


### Problema 7.14



Un largo y sólido dieléctrico de forma cilíndrica de radio  $a$  es está permanentemente polarizado tal que su vector de polarización está dado por la expresión  $\vec{P} = \frac{1}{2}P_0 r \hat{r}$ .

- Encuentre las densidades de cargas de polarización.
- El campo eléctrico en todo el espacio.
- Si el cilindro empieza a rotar con velocidad angular  $\omega$  (con respecto a su eje) , determine el campo magnético en todos los puntos dentro y fuera del cilindro. <sup>a</sup>.



<sup>a</sup>Solamente para la última parte de la pregunta es necesario saber campo magnético



### III. Soluciones

#### Solución 7.1

a) Dada la simetría esférica del problema, es posible usar ley de Gauss de la siguiente forma

- $r \leq R$

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} = 0 \implies \vec{D} = 0$$

Por lo tanto  $\vec{E} = 0$  (es un conductor)

- $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \implies D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q \implies \vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r}$$

- $r \geq R_2$

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \implies D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q \implies \vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- b) Las densidades de polarización están ubicadas en

$$\sigma_{\text{pol}}(R_1) = \vec{P}(R_1) \cdot (-\hat{r}) = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_1^2} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_{\text{pol}}(R_2) = \vec{P}(R_2) \cdot \hat{r} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_2^2} \hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

Mientras que la densidad de carga libre es

$$\sigma_{\text{libre}}(R_1) = \vec{D}(R_1) \cdot \hat{r} = \frac{Q}{4\pi R_1^2} \hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

- c) La diferencia de potencial entre el infinito y la esfera es

$$V_1(R_1) = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_2}$$



## CAPÍTULO 7. DIELÉCTRICOS

En ausencia de dieléctrico se tendría que la tensión  $V_2$  es

$$V_2(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Nótese que el último término para ambos potenciales es igual, por lo que el término que indica cual es mayor es el primer término de la suma, ahora dado que  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , se tiene que

$$\frac{1}{\varepsilon_0} > \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) > \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \implies V_2(R_1) > V_1(R_1)$$

El potencial en la esfera es mayor en ausencia del dieléctrico.

### Solución 7.2

- a) Para  $r < R$  se tiene  $\vec{E} = 0$  ya que es un conductor. Para  $r > R$  es necesario usar ley de Gauss de la siguiente forma

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \implies D_1(r) \cdot 2\pi r^2 + D_2(r) \cdot 2\pi r^2 = Q$$

Adicionalmente, dado que por simetría el campo eléctrico es completamente tangencial a la interfase de los medios, se tiene que  $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$ . Luego  $D_1(r) = \varepsilon_1 E(r)$  y  $D_2(r) = \varepsilon_2 E(r)$ , por lo que se puede despejar la expresión del campo eléctrico para  $r > R$  como

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r}$$

- b) La densidad de carga libre dependerá del hemisferio de la esfera, de modo que para el hemisferio inferior

$$\sigma_{l1} = \vec{D}_1(r) \cdot \hat{n} \Big|_{r=R} = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r} \cdot \hat{r}$$

y de la misma forma para el hemisferio superior

$$\sigma_{l2} = \vec{D}_2(r) \cdot \hat{n} \Big|_{r=R} = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r} \cdot \hat{r}$$

En cuanto a las cargas de polarización, hay que calcular previamente el vector polarización en cada medio

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} \implies \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$$

De modo que

$$\vec{P}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{E} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r}$$

Entonces,

$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1(r) \cdot \hat{n} \Big|_{r=R} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$



De forma análoga

$$\sigma_{P2} = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

Notar el hecho que la normal en el caso de la densidad de carga libre apunta desde el conductor al dieléctrico y en el caso de la densidad de carga de polarización apunta en el sentido inverso.

- c) La carga de polarización total está dada por

$$Q_P = 2\pi R^2 \sigma_{P1} + 2\pi R^2 \sigma_{P2} = -\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_0)Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \implies \left| \frac{Q_P}{Q} \right| = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \approx \frac{39}{40}$$

Luego la carga neta vale

$$Q_{neta} = Q + Q_P = \frac{Q}{40} > 0$$

### Solución 7.3

Para iniciar el problema hay que analizar lo que se pide, ¿qué significa que la carga total en la interfase sea nula? en la interfase existen tres densidades de carga que viven juntas: la densidad de carga libre, la densidad de carga de polarización del dieléctrico  $\varepsilon_1$  y la del dieléctrico  $\varepsilon_2$ . La suma de esas tres densidades superficiales de carga debe ser nula y para ello hay que determinar el campo eléctrico que existe dentro de las placas conductoras. Dado que las geometrías que componen este problema son planas, los vectores desplazamiento y campo eléctrico son constantes en cada medio, es decir  $\vec{D}_1 = D_1 \hat{z} = \varepsilon_1 E_1 \hat{z}$  y  $\vec{D}_2 = D_2 \hat{z} = \varepsilon_2 E_2 \hat{z}$ .

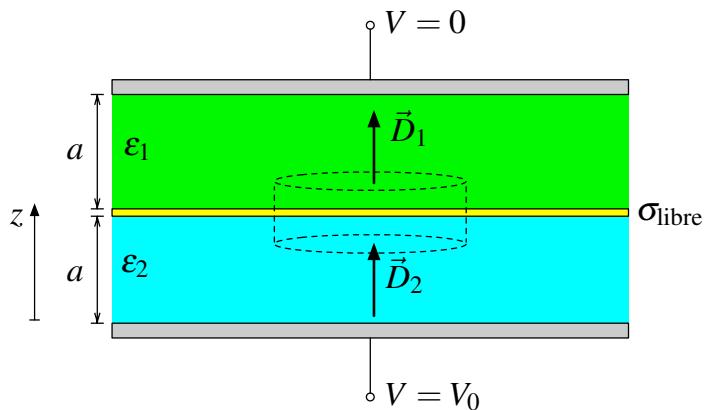


Figura 7.1: Condensador con dos medios.



## CAPÍTULO 7. DIELÉCTRICOS

Entonces, aplicando la Ley de Gauss Generalizada al cilindro de la Figura 7.1, se tiene que

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \implies D_1 \cdot A - D_2 \cdot A = \sigma_{\text{libre}} \cdot A \implies \varepsilon_1 E_1 - \varepsilon_2 E_2 = \sigma_{\text{libre}}$$

Adicionalmente,

$$V_0 = V(0) - V(2a) = - \int_{2a}^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 a + E_2 a \implies E_1 + E_2 = \frac{V_0}{a}$$

De las dos últimas ecuaciones es posible determinar el campo eléctrico presente en el espacio como

$$E_1 = \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left( \frac{\varepsilon_2 V_0}{a} + \sigma_{\text{libre}} \right) \quad E_2 = \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left( \frac{\varepsilon_2 V_0}{a} - \sigma_{\text{libre}} \right)$$

Ahora, también es posible aplicar la Ley de Gauss tradicional al mismo cilindro de la Figura 7.1, donde se obtiene que

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{total}}}{\varepsilon_0} \implies E_1 \cdot A - E_2 \cdot A = \frac{\sigma_{\text{total}} \cdot A}{\varepsilon_0}$$

Nótese el hecho que  $\sigma_{\text{total}}$  incluye las tres densidades de carga que existen en  $z = a$ , por lo que finalmente se obtiene

$$\sigma_{\text{total}} = 0 \implies E_1 = E_2 \implies \sigma_{\text{libre}} = \frac{V_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2a}$$

### Solución 7.4

Para iniciar el problema se necesita saber la capacitancia de un condensador cilíndrico que posee un medio con constante  $\varepsilon_i$  en un interior, de radios  $a$  y  $b$  y de largo  $H$ . Para ello se usa la ley de Gauss para el espacio entre los cilindros ( $a < r < b$ ).

$$\iint_{\Omega} \vec{D}(r) \cdot d\vec{S} = Q \implies D(r) 2\pi r H = Q \implies \vec{E} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_i r H} \hat{r}$$

Luego

$$\Delta V = V(a) - V(b) = \int_a^b \frac{Q}{2\pi \varepsilon_i r H} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_i H} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

Por lo que

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi \varepsilon_i H}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)}$$



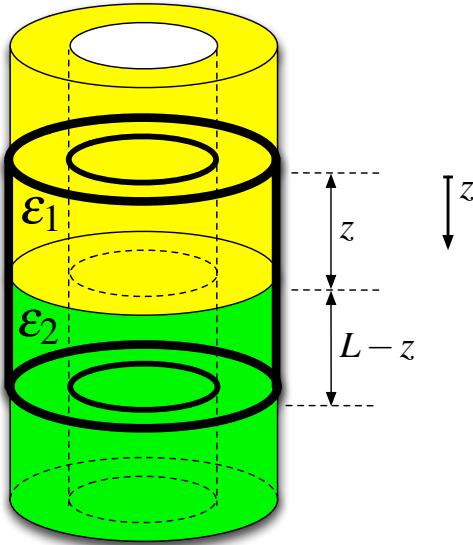


Figura 7.2: Dieléctricos dentro del Condensador Cilíndrico

Para lo que sigue del análisis se debe considerar la Figura 7.2. Se ha puesto el dieléctrico 1 una distancia  $z$  dentro del condensador. La capacitancia de este sistema es equivalente a la de dos condensadores en paralelo, luego la capacitancia total del sistema es igual a su suma, es decir:

$$C_T = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_1 z}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2\pi\varepsilon_2(L-z)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)z + \varepsilon_2 L)$$

Por lo tanto la energía de ese condensador está dada por

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_T(z)}$$

Luego, considerando que la carga es constante, la fuerza que ejerce el sistema es

$$\vec{F}_{sist} = -\nabla U = -\frac{1}{2}Q^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{C_T(z)} \right) \hat{z} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_T(z)^2} \frac{\partial C_T(z)}{\partial z} \hat{z}$$

Reduciendo la expresión a

$$\vec{F}_{sist} = \frac{1}{4\pi} Q^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)z + \varepsilon_2 L)^2} \hat{z}$$

Nótese lo siguiente, como  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  la fuerza que efectúa el sistema apunta en el sentido de negativo de  $z$ , por lo que el dieléctrico 2 intenta expulsar al dieléctrico 1 del condensador. En efecto, este resultado es consecuencia de que el sistema busque su mínima energía, la se obtiene con el condensador completamente lleno del dieléctrico con constante  $\varepsilon_2$ . Por lo tanto, para poder introducir el dieléctrico 1 una distancia  $z = \frac{1}{2}L$  dentro del condensador se debe aplicar una fuerza del mismo valor en el sentido contrario a la que se siente en ese punto, es decir, la fuerza buscada vale

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{sist}|_{z=\frac{1}{2}L} = \frac{Q^2}{\pi L^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \hat{z}$$



## CAPÍTULO 7. DIELÉCTRICOS

### Solución 7.5

a) Se debe encontrar el valor de  $V(x)$ , sabiendo que el potencial cumple la siguiente condición

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} + k \frac{dV(x)}{dx} = 0$$

Con  $k > 0$  y  $0 \leq x \leq d$ . Para ello se asume que la solución de la EDO es  $V(x) = Ae^{\alpha x} + B$  con  $A$ ,  $B$  y  $\alpha$  constantes no nulas por determinar. En efecto, reemplazando la solución en la ecuación anterior

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} + k \frac{dV(x)}{dx} = A\alpha^2 e^{\alpha x} + kA\alpha e^{\alpha x} = A\alpha e^{\alpha x}(\alpha + k) = 0$$

De la ecuación anterior se obtiene

$$\alpha = -k$$

Luego, la solución se transforma en  $V(x) = Ae^{-kx} + B$  y las otras constantes pueden ser despejadas con las condiciones de borde

$$V(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B$$

$$V(d) = V_0 \implies Ae^{-kd} + B = V_0$$

Despejando  $A$  y  $B$  de las ecuaciones anteriores

$$A = \frac{V_0}{e^{-kd} - 1}$$

$$B = -\frac{V_0}{e^{-kd} - 1}$$

Finalmente la solución es

$$V(x) = \frac{V_0(e^{-kx} - 1)}{e^{-kd} - 1}$$

b) Dado que se conoce el potencial, es posible conocer el campo eléctrico dentro de las placas

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{d}{dx} \left( \frac{V_0(e^{-kx} - 1)}{e^{-kd} - 1} \right) \hat{x} = \frac{V_0 k e^{-kx}}{e^{-kd} - 1} \hat{x}$$

Asumiendo que el material es lineal, isótropo y no homogéneo se tiene que

$$\vec{D} = \varepsilon(x) \vec{E} = \varepsilon(x) \cdot \frac{V_0 k e^{-kx}}{e^{-kd} - 1} \hat{x}$$

Dada la ausencia de carga libre dentro de las placas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \implies \frac{d}{dx} (\varepsilon(x) e^{-kx}) = 0 \implies \varepsilon(x) e^{-kx} = C$$

Usando la condición de borde  $\varepsilon(x=0) = \varepsilon_1 \implies C = \varepsilon_1$  por lo tanto

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 e^{kx}$$

c) La densidad de carga libre en la placa a potencial  $V_0$  dada por  $\sigma_l = \vec{D} \cdot \hat{n}|_{x=d}$ , de modo que

$$\sigma_l = e^{kd} \cdot \frac{V_0 k e^{-kx}}{e^{-kd} - 1} \hat{x} \cdot (-\hat{x}) = -\frac{k V_0}{e^{-kd} - 1}$$



**Solución 7.7**  

- a) La capacitancia de un condensador de placas paralelas es

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

donde  $\varepsilon$  es la permitividad del medio que lleva dentro el condensador,  $A$  es el área de las placas y  $d$  es la separación entre ellas. Si un dieléctrico se pone parcialmente una distancia  $x$  en el condensador, se forman dos condensadores en paralelo, de capacitancia

$$C_1 = \frac{\varepsilon ax}{b}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 a(a-x)}{b}$$

Por lo que la capacitancia total (condensadores en paralelo) es

$$C_T = C_1 + C_2 = \frac{a}{d}(\varepsilon x + (a-x)\varepsilon_0)$$

- b) Por otro lado, se tiene que la definición capacitancia es

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Por lo que si el condensador está conectado a una batería de voltaje  $V_0$  y tiene una carga  $Q^*$  se cumple que

$$C_T = \frac{a}{b}(\varepsilon x + (a-x)\varepsilon_0) = \frac{Q^*}{V_0} \implies x = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \left( \frac{Q^* b}{V_0 a} - \varepsilon a \right)$$

- d) Dada la dependencia  $Q = Q(x)$  se tiene que la carga varía en el rango  $x \in [0, a]$ , si se usa la parte anterior, se obtiene que

$$Q(x) = \frac{a}{d}((\varepsilon - \varepsilon_0)x - \varepsilon_0 a)$$

lo cual es una función lineal, y como  $\varepsilon \geq \varepsilon_0$  se tiene la función  $Q(x)$  alcanza su mínimo en  $x = 0$  y su máximo en  $x = a$ . Por lo que

$$Q(x=0) = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} \leq Q(x) \leq \frac{\varepsilon a^2}{d} = Q(x=a)$$

Nótese que físicamente esto significa que el condensador alcanza su mínima carga vacío y su máxima carga lleno de dieléctrico.

**Solución 7.8**  

- a) Calcular las densidades de carga de polarización en el espacio. Para resolver este problema es necesario dividir en dos áreas, un radio menor y mayor al radio de esfera  $b$ .



## CAPÍTULO 7. DIELÉCTRICOS

- $r > b$  se tiene que hay vacío por lo tanto no existe el vector polarización.
- $r \leq b$ , de acuerdo a la ley de Gauss

$$\iint_{\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint \rho_0 r dV$$

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho_0 \frac{r^4}{4}$$

$$\vec{D} = \frac{\rho_0 r^2}{4} \hat{r}$$

Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon} \hat{r}$$

Utilizando  $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$  se obtiene

$$\vec{P} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\rho_0 r^2}{4\varepsilon} \hat{r}$$

Luego, la densidad de carga de superficial polarización es

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}|_{r=b}$$

$$= \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\rho_0 b^2}{4\varepsilon}$$

y la densidad volumétrica polarización es

$$\begin{aligned} \rho_p &= -\nabla \cdot \vec{P} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (P_r \cdot r^2) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\rho_0 r^4}{4\varepsilon} \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\rho_0 r^3}{\varepsilon} \\ &= \frac{-(\varepsilon - \varepsilon_0)\rho_0 r}{\varepsilon} \end{aligned}$$

- b) Para calcular la energía electrostática del sistema de cargas es necesario encontrar  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  para un  $r > b$ .

$$\iint_{\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint \rho_0 r dV$$

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho_0 \frac{b^4}{4}$$

$$\vec{D} = \frac{\rho_0 b^4}{4r^2} \hat{r}$$



Entonces,

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 b^4}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Ya con esto es posible encontrar la energía del sistema en todo el espacio

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{Todo el Espacio}} \vec{D} \cdot \vec{E} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D(r) \cdot E(r) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D(r) \cdot E(r) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr + \frac{1}{2} \int_b^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D(r) \cdot E(r) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho_0 r^2}{4} \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr + \frac{1}{2} \int_b^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho_0 b^4}{4r^2} \frac{\rho_0 b^4}{4\epsilon_0 r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^b \epsilon \left( \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon} \right)^2 r^2 dr + 2\pi \int_b^\infty \epsilon_0 \left( \frac{\rho_0 b^4}{4\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr \\ &= 2\pi \left[ \frac{\epsilon \rho_0^2}{16\epsilon^2} \int_0^b r^6 dr + \frac{\epsilon_0 \rho_0^2 b^8}{16\epsilon_0^2} \int_b^\infty \frac{r^2}{r^4} dr \right] \\ &= \frac{\pi \rho_0^2 b^7}{8} \left( \frac{1}{7\epsilon} + \frac{1}{\epsilon_0} \right) \end{aligned}$$

### Solución 7.13

- a) Para encontrar la carga que se transfiere de un condensador a otro, comenzamos buscando la carga del sistema completo.

Se considera que la capacitancia de un condensador de placas paralelas está dada por

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

Luego si inicialmente el sistema se encontraba sometido a un voltaje  $V_0$ , la carga total será la suma de la carga de ambos condensadores, pero como estos eran iguales

$$Q_{\text{tot}} = 2CV_0 = 2 \left( \frac{\epsilon_0 \ell w}{d} \right) V_0$$

Por otro lado, se calcula las cargas en cada condensador en el tiempo final,  $t_f$ . Para esto es necesario notar que en  $t_f$  una de las capacitancias se habrá modificado de modo que

$$C_1 = \frac{\epsilon \ell w}{d} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \ell w}{d}$$



## CAPÍTULO 7. DIELÉCTRICOS

Al estar en paralelo, éstos se encuentran a la misma diferencia de potencial

$$V_{f1} = V_{f2} \implies \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \implies Q_1 = \frac{Q_2}{C_2} C_1$$

Pero como la carga total debe conservarse

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 = Q_2 \left( \frac{C_1}{C_2} + 1 \right) = Q_2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 1 \right)$$

Por ende,

$$Q_2 = \frac{Q_{\text{tot}} \varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0} = \frac{2V_0 \varepsilon \varepsilon_0 \ell w}{d(\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

Con lo anterior es posible concluir que la carga traspasada es

$$\Delta Q = Q_2 - \frac{Q_{\text{tot}}}{2} = \frac{2V_0 \varepsilon \varepsilon_0 \ell w}{d} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \right)$$

b) La diferencia de potencial estará dada por

$$V_f = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{2V_0 \varepsilon \varepsilon_0 \ell w}{d(\varepsilon + \varepsilon_0)} \frac{d}{\varepsilon_0 \ell w} = \frac{2V_0 \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}$$

c) Finalmente, para encontrar la corriente cuando dieléctrico se encuentra en la mitad, se debe calcular la capacidad de sistema para una distancia  $x$  cualquiera de penetración del dieléctrico, en este caso

$$C_1 = \frac{\varepsilon x w}{d} + \frac{\varepsilon_0 (\ell - x) w}{d}$$

Luego

$$Q_2 = Q_{\text{tot}} \left( \frac{C_1}{C_2} + 1 \right)^{-1}$$

y como el cuociente

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{C_2} &= \frac{w(\varepsilon x + \varepsilon_0(\ell - x))}{d} \frac{d}{\varepsilon_0 \ell w} = \frac{\varepsilon x + \varepsilon_0(\ell - x)}{\varepsilon_0 \ell} \\ \implies Q_2 &= \frac{2V_0 \varepsilon_0 \ell w}{d} \left( \frac{\varepsilon x + \varepsilon_0(\ell - x)}{\varepsilon_0 \ell} + 1 \right)^{-1} = \frac{2V_0 \varepsilon_0^2 \ell^2 w}{d(2\varepsilon_0 \ell + x(\varepsilon - \varepsilon_0))} \end{aligned}$$

Finalmente la corriente esta dada por

$$I \left( x = \frac{\ell}{2} \right) = \frac{dQ_2}{dt} \Big|_{x=\frac{\ell}{2}} = \frac{dQ_2}{dx} \Big|_{x=\frac{\ell}{2}} \frac{dx}{dt} \Big|_{x=\frac{\ell}{2}} = \left( \frac{-2V_0 \varepsilon_0^2 \ell^2 w (\varepsilon - \varepsilon_0)}{d(2\varepsilon_0 \ell + \frac{\ell}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0))^2} \right) v_0$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 7.6

- Debido a las condiciones de borde entre medios materiales, el campo eléctrico debe ser independiente del radio.
- Consecuencia de lo anterior, el campo eléctrico dentro del condensador es el mismo que hubiese sin el dieléctrico. Con esto se puede determinar fácilmente el vector desplazamiento y la polarización dentro del material. Conocida la polarización es posible conocer las densidades superficiales y volumétricas de carga.
- Determine la diferencia de potencial entre los discos conductores. Con ello ya puede determinar la capacidad.

### Indicación 7.9

- La componente horizontal de  $E_1$  debería ser la misma en todos los medios, ya que  $E_{1t} = E_{2t}$ . La componente que cambia de medio en medio es la vertical.
- Para la segunda parte del problema, note que necesariamente en el medio 3 se tendrá la misma componente horizontal del campo eléctrico que en el medio 1, por ende, si se busca que sean paralelos necesariamente tienen que ser iguales ( $\vec{E}_1 = \vec{E}_3$ ).

### Indicación 7.10

- Determine la densidad de carga superficial y volumétrica de la esfera debido a la polarización.
- Utilizando las densidades encontradas, use la definición de campo eléctrico para determinar el campo eléctrico en el centro de la esfera.
- Note el momento dipolar de la esfera es  $|\vec{p}| = PV = P \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$  (demuéstrelo), con ello ya es posible determinar el potencial eléctrico para puntos lejanos a la esfera.

### Indicación 7.11

- Determine el la capacidad de cada uno de los condensadores por separado.
- Note que debido a la tipo de conexión de los condensadores, éstos se encuentran en serie.



## CAPÍTULO 7. DIELÉCTRICOS

### Indicación 7.12

- Encuentre el vector desplazamiento en cada medio para luego determinar la densidad de carga libre sobre las placas conductoras. Recuerde sobre un conductor  $\sigma_{\text{libre}} = \vec{D}|_{\text{borde}} \cdot \hat{n}$  donde  $\hat{n}$  es la normal del conductor.
- Para encontrar el vector desplazamiento puede plantear la ecuación de Laplace en cada medio o inspirarse en el Problema 7.3.
- Para determinar la diferencia de potencial de las placas, determine como cambia la carga en las placas debido a que la distancia  $d_1$  comienza a disminuir. Podría ser útil notar que  $\dot{d}_1 = -v_0$  y  $V = RI = R \frac{dQ}{dt}$

### Indicación 7.14

- Las densidades de carga pueden ser directamente obtenidas a partir del vector polarización.
- Use la Ley de Gauss Generalizada para determinar el campo eléctrico dentro y fuera del cilindro. Note que al ser un dieléctrico no existe carga libre ni dentro ni fuera del cilindro.
- Usando las densidades de carga encontradas en la primera parte del problema, determine las densidades de corriente que existen en el cilindro. Una vez determinadas, determine el campo magnético mediante Ley de Ampère.



## V. Respuestas

Problema	Respuestas
(P) 7.1	<p>a) <math>\vec{E} = \begin{cases} 0 &amp; r &lt; R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \hat{r} &amp; R_1 &lt; r &lt; R_2 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} &amp; r &gt; R_2 \end{cases}</math></p> <p>b) <math>\sigma_{pol}(R_1) = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon} \frac{Q}{4\pi R_1^2}, \sigma_{pol}(R_2) = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon} \frac{Q}{4\pi R_2^2}, \sigma_{libre}(R_1) = \frac{Q}{4\pi R_1^2}</math></p> <p>c) <math>V_1(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}</math>, el potencial en la esfera es mayor en ausencia del dieléctrico.</p>
(P) 7.2	<p>a) <math>\vec{E} = \begin{cases} 0 &amp; r &lt; R \\ \frac{Q}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r} &amp; r &gt; R \end{cases}</math></p> <p>b) <math>\sigma_{l1} = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R^2}, \sigma_{l2} = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R^2}, \sigma_{P1} = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \sigma_{P2} = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}</math></p> <p>c) <math>\left  \frac{Q_P}{Q} \right  = \frac{39}{40}, Q_{neta} = \frac{Q}{40}</math></p>
(P) 7.3	$\sigma_{libre} = \frac{V_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2a}$
(P) 7.4	$\vec{F}_{ext} = \frac{Q^2}{\pi L^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \hat{z}$
(P) 7.5	<p>a) <math>V(x) = \frac{V_0(e^{-kx} - 1)}{e^{-kd} - 1}</math></p> <p>b) <math>\varepsilon(x) = \varepsilon_1 e^{kx}</math></p> <p>c) <math>\sigma_l = -\frac{kV_0}{e^{-kd} - 1}</math></p>
(P) 7.6	<p>a) <math>\frac{E}{d} = \frac{V_0}{d} \hat{z}, \frac{D}{d} \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{rV_0}{Rd} \hat{z}</math></p> <p>b) <math>\sigma_{P1}(r) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{rV_0}{Rd}, \sigma_{P2}(r) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{rV_0}{Rd}, \rho_p = 0.</math></p> <p>c) <math>C = \frac{\pi R^2}{3d} (\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1)</math></p>



## CAPÍTULO 7. DIELECTRICOS

Problema	Respuestas
<b>7.7</b> 	<p>a) <math>C_T = \frac{a}{d}(\varepsilon x + (a - x)\varepsilon_0)</math></p> <p>b) <math>x = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \left( \frac{Q^* b}{V_0 a} - \varepsilon a \right)</math></p> <p>c) <math>\vec{F} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)aV_0^2}{2d}\hat{x}</math>, donde <math>x</math> crece de derecha a izquierda.</p> <p>d) <math>\frac{\varepsilon_0 a^2}{d} \leq Q(x) \leq \frac{\varepsilon a^2}{d}</math></p>
<b>7.8</b> 	<p>a) <math>\sigma_p(r = b) = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\rho_0 b^2}{4\varepsilon}</math>, <math>\rho_p(r &lt; b) = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\rho_0 r}{\varepsilon}</math></p> <p>b) <math>U = \frac{\pi\rho_0^2 b^7}{8} \left( \frac{1}{7\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_0} \right)</math></p>
<b>7.9</b> 	<p>a) <math>\tan \theta_3 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \tan \theta_1</math></p> <p>b) <math>\sigma_l = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) E_1  \cos \theta_1</math></p>
<b>7.10</b> 	<p>a) <math>\sigma_p = P_0 \cos \theta</math>, <math>\rho_l = 0</math></p> <p>b) <math>\vec{E}(0) = -\frac{P_0}{3\varepsilon_0} \hat{z}</math></p> <p>c) <math>V(r, \theta) = \frac{P_0 a^3 \cos \theta}{3\varepsilon_0 r^2}</math></p>
<b>7.11</b> 	$C = \frac{\pi L}{\frac{\ln(2)}{2\varepsilon_1} + \frac{\ln(3) - \ln(2)}{2\varepsilon_2} + \frac{\ln(3)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$
<b>7.12</b> 	<p>a) <math>\sigma_1 = -\frac{\sigma_0 d_2 \varepsilon_0}{d_2 \varepsilon_0 + d_1 \varepsilon}</math>, <math>\sigma_2 = -\frac{\sigma_0 d_1 \varepsilon}{d_1 \varepsilon + d_2 \varepsilon_0}</math></p> <p>b) <math>\Delta V = \frac{A \varepsilon \varepsilon_0 \sigma_0 R v_0 t}{(d_2 \varepsilon_0 + (d_1 - v_0 t) \varepsilon)^2}</math></p>
<b>7.13</b> 	<p>a) <math>\Delta Q = \frac{2V_0 \varepsilon_0 \ell w}{d} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \right)</math></p> <p>b) <math>V_f = \frac{2V_0 \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}</math></p> <p>c) <math>I = \left( \frac{-2V_0 \varepsilon_0^2 \ell^2 w (\varepsilon - \varepsilon_0)}{d(2\varepsilon_0 \ell + \frac{\ell}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0))^2} \right) v_0</math></p>
<b>7.14</b> 	<p>a) <math>\rho_p = P_0</math>, <math>\sigma_p = -\frac{P_0 a}{2}</math></p> <p>b) <math>\vec{E} = \begin{cases} \frac{P_0 r}{2\varepsilon_0} \hat{r} &amp; r &lt; a \\ 0 &amp; r &gt; a \end{cases}</math></p> <p>c) <math>\vec{B}(z) = 0</math></p>



## **Parte II**

### **Corriente Eléctrica**



# Medios Conductores

## I. Resumen Teórico

### Corriente y Vector Densidad de Corriente

La corriente o intensidad eléctrica  $I$  es simplemente un movimiento de carga. Matemáticamente se define como la cantidad de carga  $dQ$  por unidad de área que atraviesa una sección transversal de un conductor en un tiempo  $dt$

$$I = \pm \frac{dQ}{dt} \quad (8.1)$$

Se define el vector densidad de corriente  $\vec{J}$  como flujo por unidad de área

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (8.2)$$

También existen densidades superficiales de corriente (ie. corrientes que circulan por superficies), denotadas como  $\vec{K}$  en la cual se relaciona con la intensidad de corriente como

$$I = \int (\vec{K} \times \hat{n}) \cdot d\vec{l} \quad (8.3)$$

donde  $\hat{n}$  es la normal de la superficie por donde circula la corriente.

### Ecuación de Continuidad

La ecuación de continuidad establece un equilibrio entre la carga que se encuentra circulando y acumulando en un mismo sistema. Formalmente,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (8.4)$$

En particular, en estado estacionario se cumple que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (8.5)$$

## Ley de Ohm

Algunos medios conocidos como “Óhmnicos” poseen una conductividad  $\sigma$  asociada que relaciona la densidad de corriente  $\vec{J}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$  que circula por el medio.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (8.6)$$

---

## Condiciones de Borde para $\vec{J}$

En estado estacionario, se tiene que la componente normal de vector  $\vec{J}$  es continua en la interfase entre dos medios de distinta conductividad  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

$$\vec{J}_{1n} = \vec{J}_{2n} \quad (8.7)$$

Y que la componente tangencial del campo eléctrico es continua entre dos medios

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \quad (8.8)$$

---

## Pérdidas por efecto Joule

Las pérdidas por efecto Joule están relacionadas con los modelos óhmicos.

$$P = \iiint \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (8.9)$$

---

## Resistencia Eléctrica

La resistencia eléctrica es la cualidad de los materiales para impedir el paso de la corriente. La resistencia  $R$  puede ser determinada por la geometría del material, la cual está dada por

$$R = \frac{\rho A}{L} \quad (8.10)$$

Donde  $\rho$  es la resistividad,  $A$  es la sección transversal y  $L$  el largo del material.



## II. Problemas Propuestos

### Problema 8.1



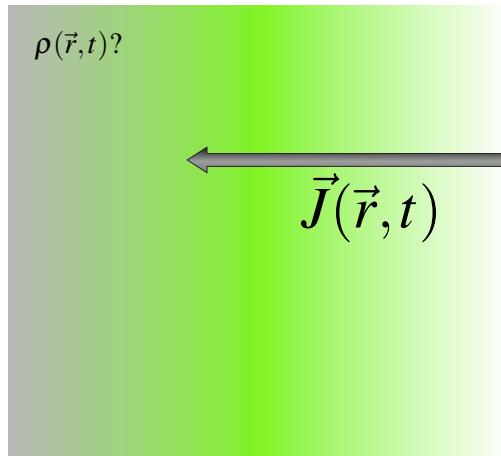
Una densidad de corriente, como función de la posición  $\vec{r}$  y tiempo  $t$  tiene la forma:

$$\vec{J} = C\vec{r}e^{-\alpha t|\vec{r}|^2}$$

Donde  $C$  y  $\alpha$  son constantes. Mostrar que la ecuación de conservación de la carga se satisface con una densidad de carga  $\rho$  de la forma:

$$\rho = (f + tg)e^{-\alpha t|\vec{r}|^2}$$

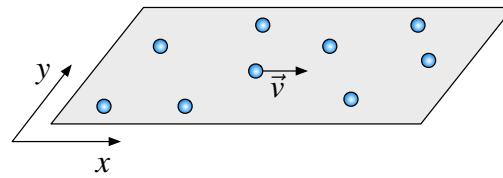
Donde  $f$  y  $g$  son funciones por determinar que dependen de la posición.



### Problema 8.2



Considere un plano conductor suficientemente grande, sobre el cual los portadores se mueven con velocidad constante  $\vec{v} = v_0\hat{x}$ . Si inicialmente la densidad de carga es Gaussiana  $\rho(x, y, t = 0) = \rho_0 e^{-\alpha(x^2+y^2)}$  donde  $\rho_0$  y  $\alpha$  son constantes, encuentre como evoluciona la densidad de carga en función del tiempo  $\rho(x, y, t)$  y comente como esta densidad de carga cambia con el tiempo.

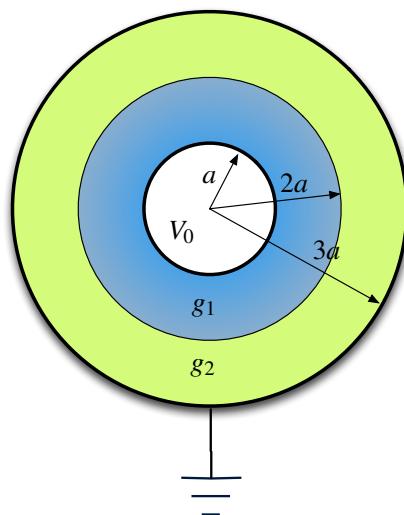


### Problema 8.3



Considere dos esferas conductoras concéntricas de radios  $a$  y  $3a$ . La región entre  $a < r < 2a$  es llenada con un material de conductividad  $g_1$  y la región entre  $2a < r < 3a$  tiene material de conductividad  $g_2$ . Asuma que ambos materiales tienen una permitividad igual a  $\epsilon_0$ . La esfera interior se encuentra a un potencial  $V = V_0$  y la exterior  $V = 0$ . Determine

- La resistencia del sistema.
- La densidad superficial de carga en  $r = 2a$ .



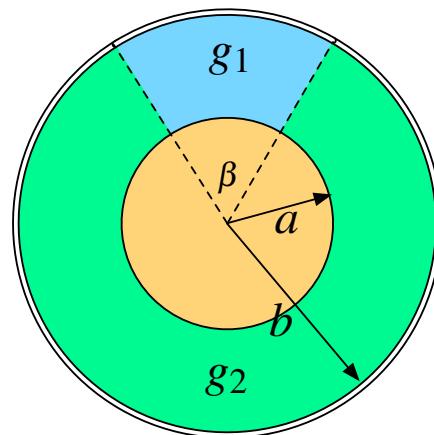
**Problema 8.4**   

Considere un condensador cilíndrico de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$  y largo  $L$ . La superficie cilíndrica interna del condensador se encuentra a potencial  $V_0$  mientras que la exterior se encuentra a un potencial nulo. El condensador tiene dentro de él dos materiales conductores de conductividad  $g_1$  y  $g_2$ . El material con conductividad  $g_1$  subtende un ángulo  $\beta$  en el condensador, mientras que el otro ocupa todo el volumen restante. Si el sistema ha alcanzado el régimen estacionario, determine

- La corriente eléctrica que circula por ambos medios.
- Determine la resistencia que opone cada medio al paso de la corriente. Demuestre que el valor de la resistencia total está dado por

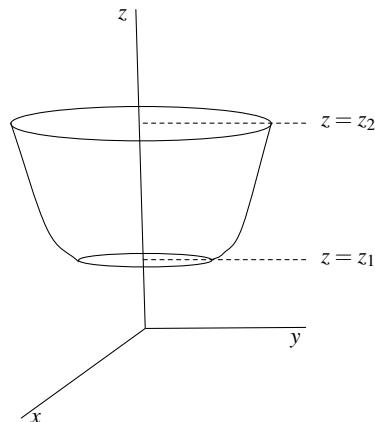
$$R_T = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  es la resistencia del medio 1 y 2, respectivamente.



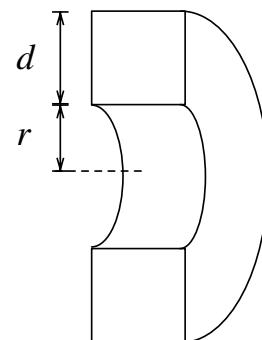
**Problema 8.5**   

Considere un material de resistividad  $\eta$  el cual tiene forma de paraboloides de ecuación  $x^2 + y^2 = 4z$  con  $z \in [z_1, z_2]$ . Si se aplica una diferencia de potencia  $V_0$  entre sus caras planas, determine el valor de la corriente que circulará por el material.



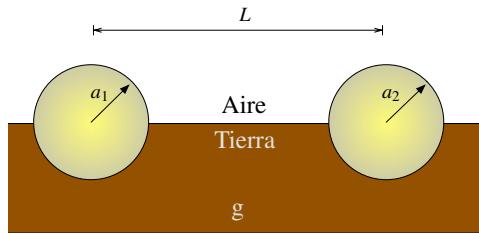
**Problema 8.6**   

Un semianillo de sección transversal cuadrada está hecho de un material conductor uniforme de conductividad  $g$ . Encuentre la resistencia eléctrica del semianillo entre sus caras cuadradas. Utilice las dimensiones que se indican en la figura.



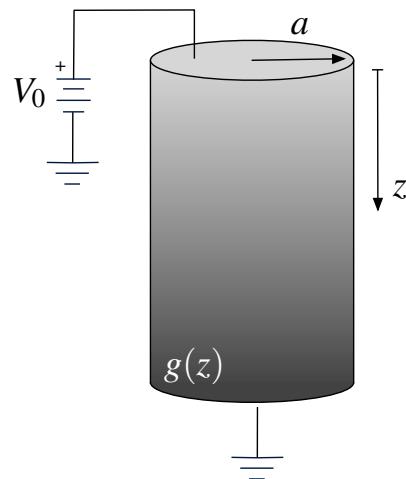
**Problema 8.7**   

Considere un circuito puesto a tierra consistente en dos esferas perfectamente conductoras, como es mostrado en la Figura. Los radios de las esferas son  $a_1$  y  $a_2$  y la distancia entre ellas es  $L$ , donde  $L \gg a_1, a_2$ . Una mitad de cada esfera está inmersa en tierra, la cual posee una conductividad  $g$ . Determine la resistencia total entre las esferas.

**Problema 8.8**   

Entre dos placas conductoras de radio  $a$  existe una barra conductora cilíndrica de radio  $a$  y longitud  $L$ , permitividad  $\epsilon_0$  y conductividad  $g = g_0 \left(1 + \frac{z}{L}\right)$ . Se aplica un potencial  $V_0$  entre las placas.

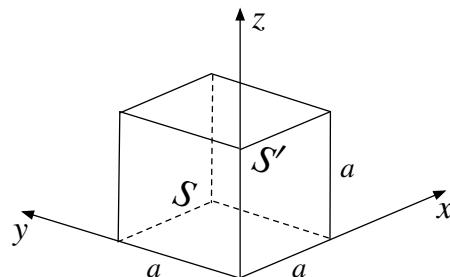
- Calcular la densidad de corriente  $\vec{J}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$  dentro del cilindro.
- Calcular la potencia disipada en un disco de espesor  $e$  cuyo centro está situado justo en la mitad del conductor.

**Problema 8.9**   

Un bloque de material conductor en forma cubo de lado  $a$  tiene una conductividad no uniforme dada por  $g(x) = \frac{g_0}{a}(x + a)$  y una permitividad  $\epsilon_0$ , donde  $g_0$  es una constante. Asuma que la corriente fluye a lo largo del eje  $x$  desde la cara  $S$  hasta la cara opuesta  $S'$ .

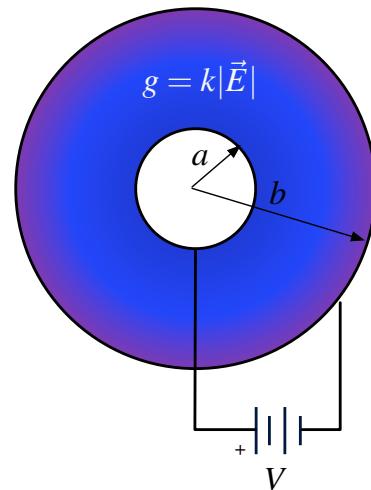
Suponga que potencial eléctrico  $V$  dependiente sólo de  $x$ , y que el valor del campo eléctrico en el borde es conocido  $\vec{E}(x = 0, y, z) = E_0 \hat{x}$ .

- Considerando que se ha alcanzado el régimen estacionario, encuentre una ecuación diferencial de segundo orden que describa el comportamiento del potencial dentro del cubo. Use lo anterior para determinar la diferencial de potencial entre las caras  $S$  y  $S'$ .
- Determine la resistencia y la corriente total que circula entre  $S$  y  $S'$ . Encuentre en valor de la carga  $Q$  que se acumula en el cubo.



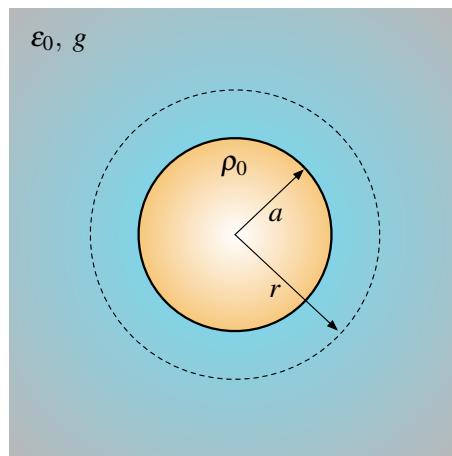
**Problema 8.10**   

Una esfera metálica de radio  $a$  está rodeada por un cascarón conductor esférico de radio interior  $b$ , donde  $b > a$ . El espacio entre la esfera y el cascarón está lleno de un material cuya conductividad eléctrica  $g$  varía la magnitud del campo eléctrico  $\vec{E}$ , con la ecuación  $g = k|\vec{E}|$ , donde  $k$  es una constante. Una diferencia de potencial constante  $V$  se mantiene entre la esfera y el cascarón conductor de radio  $b$ . Calcule la corriente eléctrica y la densidad volumétrica de carga entre la esfera y el cascarón. Exprese el resultado en función de los datos del problema.


**Problema 8.11**   

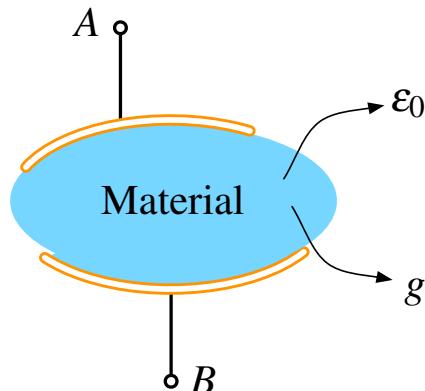
Una esfera de radio  $a$  se encuentra inmersa en un medio de permitividad  $\epsilon_0$  y conductividad  $g$ . Al tiempo  $t = 0$  una carga eléctrica  $Q_0$  se coloca uniformemente distribuida sobre la esfera.

- Determine la corriente total en el medio en función del tiempo.
- Calcule la cantidad de energía disipada como calor durante el proceso de descarga.


**Problema 8.12**   

Considere un condensador de forma arbitraria, el cual tiene dentro de él un medio de conductividad  $g$  y permitividad  $\epsilon_0$ . Sea  $R$  y  $C$  la resistencia y la capacitancia entre los terminales  $A$  y  $B$ , respectivamente. Demuestre que

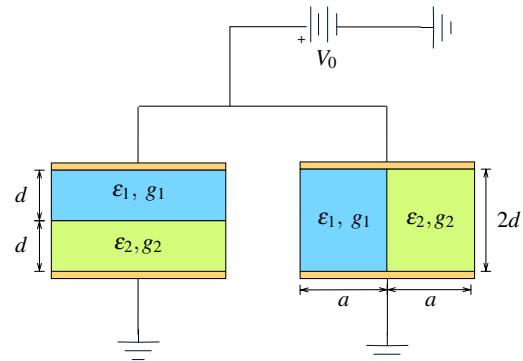
$$RC = \frac{\epsilon_0}{g}$$



**Problema 8.13**   

Considere dos condensadores de placas cuadradas de lado  $2a$  separadas una distancia  $2d$ . Dentro de cada condensador existen dos medios con constantes dieléctricas y conductividades,  $\epsilon_1, g_1$  y  $\epsilon_2, g_2$ . Los medios llenan la mitad del volumen de cada condensador, pero de una disposición distinta en cada uno (ver figura). Despreciando todos los efectos de borde:

- Para cada condensador determine el vector densidad de corriente  $\vec{J}$ , vector campo eléctrico  $\vec{E}$  y vector desplazamiento  $\vec{D}$  dentro de él.
- Para el condensador de la derecha, determine las densidades de polarización y carga libre donde correspondan.
- Determine la capacitancia equivalente que forman ambos condensadores.
- Determine la corriente que sale por la fuente y la resistencia equivalente del sistema.



## CAPÍTULO 8. MEDIOS CONDUCTORES

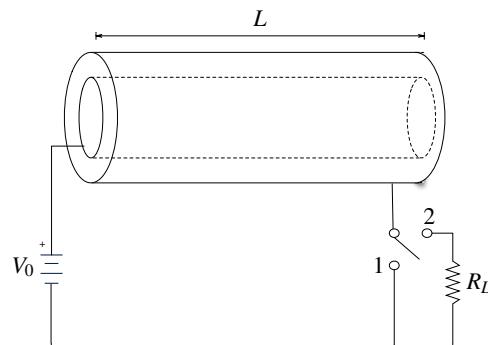
### Problema 8.14

Considere el circuito mostrado en la figura. El circuito consta de una fuente de voltaje  $V_0$ , un condensador cilíndrico, un switch que puede cambiar entre las posiciones 1 y 2 y una resistencia  $R_L$  desconocida. El condensador cilíndrico tiene largo  $L$  y posee un radio interior  $a$  y un radio exterior  $c$  ( $L \gg a, c$ ). En el interior del condensador hay dos medios materiales óhmicos de conductividad constante  $g_1$  y  $g_2$  y permitividad aproximadamente igual a  $\epsilon_0$ . Las posiciones respectivas de cada material al interior del condensador se muestran en la figura parte (b). Si el switch inicialmente se encuentra en la posición 1 y el sistema ya ha alcanzado el régimen estacionario, determine

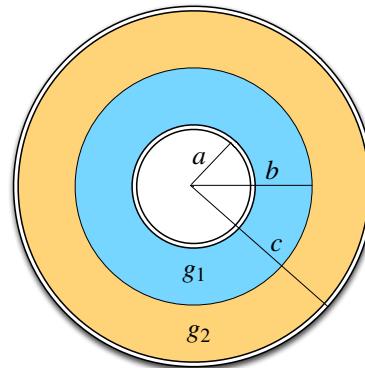
- El vector densidad de corriente  $\vec{J}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$  dentro del condensador.
- La carga total de cada placa cilíndrica del condensador.
- La corriente que circula por el sistema.
- La resistencia del sistema.

Si el switch se cambia a la posición 2 y el sistema nuevamente ha alcanzado el régimen estacionario.

- Determine el valor de  $R_L$  tal que maximice la potencia disipada en dicha resistencia. ¿Cuál es el valor de esa potencia?. (Indicación: Recuerde la potencia disipada en una resistencia puede ser calculada como  $P = V \cdot I$ )



(a) Vista Exterior



(b) Vista Interior



### III. Soluciones

#### Solución 8.2

En primera instancia, debe notarse que

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho(x, y, t) v_0 \hat{x}$$

Luego usando la ecuación de continuidad se tiene que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_0) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

Para resolver la EDP anteriormente encontrada, es necesario usar los cambios de variable  $w = x + v_0 t$  y  $u = x - v_0 t$ . Por regla de la cadena, estos cambios de variable provocan que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} = v_0 \left( \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

Aplicando estas derivadas a la EDP original, se obtiene que

$$2v_0 \frac{\partial \rho}{\partial w} = 0 \implies \rho = F(u) = F(x - v_0 t)$$

La última ecuación muestra que  $\rho$  depende netamente de  $x - v_0 t$ . Finalmente, usando la condición inicial en  $t = 0$

$$\rho(x, y, t = 0) = F(x) = \rho_0 e^{-\alpha(x^2+y^2)} \implies \rho(x, y, t) = \rho_0 e^{-\alpha((x-v_0 t)^2+y^2)}$$

La densidad de carga se mueve hacia la derecha en la dirección de aumento  $x$  manteniendo su forma de Gaussiana.

#### Solución 8.4

- a) Cuando los problemas involucren más de un medio es necesario decir que cada medio tiene un campo eléctrico y vector densidad de corriente respectivo. En este caso, el medio  $g_1$  tiene un campo eléctrico  $\vec{E}_1(r)$  y vector densidad de corriente  $\vec{J}_1(r)$ , análogamente el medio  $g_2$  tiene un  $\vec{E}_2(r)$  y  $\vec{J}_2(r)$ . Por condición de borde, se tiene que el campo eléctrico es tangente (o paralelo) a la interfase entre los medios, por lo cual se cumple que  $\vec{E}_1(r) = \vec{E}_2(r) = \vec{E}(r)$ . Luego, la corriente eléctrica total que circula desde el cilindro interior al exterior está dada por

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^\beta \int_0^L J_1(r) r d\theta dz + \int_\beta^{2\pi} \int_0^L J_2(r) r d\theta dz$$



## CAPÍTULO 8. MEDIOS CONDUCTORES

Por Ley de Ohm  $J_1 = g_1 E(r)$  y  $J_2 = g_2 E(r)$ , luego

$$I = g_1 E(r) r \beta L + g_2 E(r) r (2\pi - \beta) \implies E(r) = \frac{I}{r L (g_1 \beta + g_2 (2\pi - \beta))}$$

Falta relacionar este valor de campo eléctrico con la diferencia de potencial entre los casquitos, por lo que debe cumplirse que

$$V_0 = \int_a^b E(r) dr = \frac{I}{L(g_1 \beta + g_2 (2\pi - \beta))} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \implies I = \frac{V_0 L (g_1 \beta + g_2 (2\pi - \beta))}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

b) A partir de lo anteriormente calculado, se tiene en forma directa que

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{L(g_1 \beta + g_2 (2\pi - \beta))}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\beta \int_0^L J_1(r) r d\theta dz = \frac{\beta g_1 I}{(g_1 \beta + g_2 (2\pi - \beta))} = \frac{\beta g_1 V_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \implies R_1 = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\beta g_1 L} \\ I_2 &= \int_\beta^{2\pi} \int_0^L J_2(r) r d\theta dz = \frac{(2\pi - \beta) g_2 I}{(g_1 \beta + g_2 (2\pi - \beta))} \implies R_2 = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{(2\pi - \beta) g_2 L} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{L(g_1 \beta + g_2 (2\pi - \beta))}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{1}{R}$$

### Solución 8.5

Como la diferencia de potencial entre las caras es conocida, basta encontrar la resistencia que provoca el material para encontrar la corriente que lo atravesará. Para encontrar en este caso la resistencia, se divide en trozos infinitesimales el paraboloide, de modo de luego integrar en cada uno y encontrar la resistencia total. La sección transversal de un paraboloide es una circunferencia, luego el trozo infinitesimal es un disco de altura  $dz$  y radio  $r$ , luego usando la definición de resistencia dada su geometría

$$dR = \frac{\eta L}{A} = \frac{\eta dz}{\pi r^2}$$

En coordenadas cilíndricas,  $r^2 = x^2 + y^2 = 4z$  por lo tanto

$$R = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\eta dz}{4\pi z} = \frac{\eta}{4\pi} \ln\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$



**Solución 8.9** 

- a) De la ecuación de continuidad y considerando que se ha alcanzado el régimen estacionario, se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Considerando la ley de Ohm y desarrollando la expresión:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (g(x) \cdot \vec{E}(x)) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( g(x) \cdot -\frac{\partial V}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + g(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{g_0}{a} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g_0(x+a)}{a} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{x+a} \frac{\partial V}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Nótese que se ha encontrado la ecuación diferencial pedida. Para resolverla se toma el cambio de variable  $\mu = \frac{\partial V}{\partial x}$ :

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{x+a} \mu &= 0 \\ \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{x+a} &\implies \ln \mu = -\ln(x+a) + C \\ \implies \mu &= \frac{C_1}{x+a} \\ \implies \frac{dV}{dx} &= \frac{C_1}{x+a} \\ \implies V(x) &= C_1 \ln(x+a) + C_2\end{aligned}$$

Para determinar la diferencia de potencial entre  $S$  y  $S'$ , se encuentra el valor de  $C_1$  usando la condición de borde dada

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} = -\frac{C_1}{x+a} \hat{x} \\ \vec{E}(x=0) &= -\frac{C_1}{a} \hat{x} = E_0 \hat{x} \\ \implies C_1 &= -E_0 a \\ \implies \vec{E} &= \frac{E_0 a}{x+a} \hat{x}\end{aligned}$$

Finalmente, al reemplazar  $C_1$ ,  $V(x) = -E_0 a \ln(x+a) + C_2$

$$V(S) - V(S') = -E_0 a \ln(a) + E_0 a \ln(2a) = E_0 a \ln(2)$$



## CAPÍTULO 8. MEDIOS CONDUCTORES

b) Considerando que  $\vec{E} = \frac{E_0 a}{x+a} \hat{x}$  y  $g(x) = \frac{g_0(x+a)}{a}$ , se tiene que

$$\vec{J} = \frac{g_0(x+a)}{a} \cdot \frac{E_0 a}{(x+a)} \hat{x} = g_0 E_0 \hat{x}$$

Con esto es posible calcular corriente considerando que el flujo atraviesa un área cuadrada de lado  $a$ :

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \int_0^a g_0 E_0 dy dz = g_0 E_0 a^2$$

Además como  $R = \frac{\Delta V}{I}$ , usando el resultado recién obtenido para  $I$  y el de  $\Delta V$  de la parte (a), se concluye:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{E_0 a \ln(2)}{g_0 E_0 a^2} = \frac{\ln(2)}{g_0 a}$$

Finalmente, la carga encerrada se calcula usando Ley de Gauss:

$$\begin{aligned} \iint_{\text{cubo}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \implies \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \\ -E_0 a^2 + \frac{E_0}{2} a^2 &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \\ \implies Q_{\text{enc}} &= -\frac{\varepsilon_0 E_0 a^2}{2} \end{aligned}$$

### Solución 8.10

Asumiendo que el sistema está en estado estacionario y dada la simetría radial del problema, se debe cumplir que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 J_r)}{\partial r} = 0 \implies \vec{J} = \frac{C}{r^2} \hat{r}$$

Donde  $C$  es una constante por determinar. Usando lo anterior, se procede a relacionar  $\vec{J}$  con  $\vec{E}$ , de modo que

$$\vec{J} = g \vec{E} = (kE) \vec{E} = kE^2 \hat{r}$$

Por lo tanto

$$kE^2 = \frac{C}{r^2} \implies E = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{C}{k}}$$

Ahora, para encontrar  $C$  se utilice el hecho que la diferencia de potencial entre los casquetes esféricos es conocida, luego

$$V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \implies V = \sqrt{\frac{C}{k}} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \implies C = \frac{kV^2}{\ln^2(\frac{b}{a})}$$



Donde se deduce que

$$\vec{E} = \frac{V}{r \ln(\frac{b}{a})} \hat{r}$$

Ya teniendo el campo, es directo que la corriente encontrada se calcula como

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi kE^2 r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi == \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{kV^2}{r^2 \ln^2(\frac{b}{a})} r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = \frac{4\pi kV^2}{\ln^2(\frac{b}{a})}$$

Finalmente, la densidad de carga está dada por

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \frac{V}{r^2 \ln(\frac{b}{a})}$$

### Solución 8.13

- a) Como sistema de referencia se tomará  $z$  creciente hacia abajo. Para el condensador de la izquierda:

$$J_{1n} = J_{2n} \implies \vec{J}_1 = \vec{J}_2 = \vec{J}$$

(vector densidad de corriente constante en ambos medios). Suponiendo estado estacionario dentro del condensador

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \implies \frac{dJ}{dz} = 0 \implies \vec{J} = A\hat{z}$$

donde  $A$  es una constante por determinar. Por lo tanto el campo eléctrico en cada medio está dado por

$$\vec{E}_1 = \frac{A}{g_1} \hat{z}, \quad \vec{E}_2 = \frac{A}{g_2} \hat{z}$$

La constante  $A$  puede ser determinada como

$$V(z=2d) - V(z=0) = -V_0 = - \int_0^d \frac{A}{g_1} dz - \int_d^{2d} \frac{A}{g_2} dz = -\frac{Ad}{g_1} - \frac{Ad}{g_2} \implies A = \frac{V_0 g_1 g_2}{d(g_1 + g_2)}$$

Por lo tanto

$$\vec{J} = \frac{V_0 g_1 g_2}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{V_0 g_2}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}, \quad \vec{E}_2 = \frac{V_0 g_1}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}$$

$$\vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 V_0 g_2}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}, \quad \vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 V_0 g_1}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}$$

Para el condensador de la derecha:

$$E_{1t} = E_{2t} \implies \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$$



## CAPÍTULO 8. MEDIOS CONDUCTORES

(campo eléctrico constante en ambos medios). Luego, dado que no hay densidades volumétricas de carga del condensador

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \implies \frac{dE}{dz} = 0 \implies \vec{E} = C\hat{z}$$

donde  $C$  es una constante por determinar. La constante  $C$  puede ser determinada como

$$V(z = 2d) - V(z = 0) = -V_0 = - \int_0^{2d} C dz \implies C = \frac{V_0}{2d}$$

Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{V_0}{2d}\hat{z}$$

$$\vec{J}_1 = \frac{g_1 V_0}{2d}\hat{z}, \quad \vec{J}_2 = \frac{g_2 V_0}{2d}\hat{z}$$

$$\vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 V_0}{2d}\hat{z}, \quad \vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 V_0}{2d}\hat{z}$$

b) Para el condensador de la derecha, se tienen las siguientes densidades polarización

$$\sigma_{P1}(z = 0) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}\hat{z} \cdot -\hat{z} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{P1}(z = 2d) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}\hat{z} \cdot \hat{z} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{P2}(z = 0) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}\hat{z} \cdot -\hat{z} = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{P2}(z = 2d) = \varepsilon_2\frac{V_0}{2d}\hat{z} \cdot \hat{z} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}$$

Mientras que las de carga libre son

$$\sigma_{L1}(z = 0) = \varepsilon_1\frac{V_0}{2d}\hat{z} \cdot \hat{z} = \varepsilon_1\frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{L1}(z = 2d) = \varepsilon_1\frac{V_0}{2d}\hat{z} \cdot -\hat{z} = \varepsilon_1\frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{L2}(z = 0) = \varepsilon_2\frac{V_0}{2d}\hat{z} \cdot \hat{z} = \varepsilon_2\frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{L2}(z = 2d) = \varepsilon_2\frac{V_0}{2d}\hat{z} \cdot -\hat{z} = -\varepsilon_2\frac{V_0}{2d}$$

No hay densidades volumétricas de ningún tipo dentro del condensador.



- c) En este caso hay que notar que el capacitor de la izquierda puede ser dividido en dos capactores en serie, mientras que el capacitor de la derecha puede ser dividido en dos en paralelo. Usando el resultado conocido de la capacitancia de un condensador de placas paralelas  $C = \frac{\epsilon A}{L}$ , se tiene que:

$$C_T = \underbrace{\frac{1}{\frac{d}{\epsilon_1 4a^2} + \frac{d}{\epsilon_2 4a^2}}}_{\text{Capacitancia de la izquierda}} + \underbrace{\frac{\epsilon_1 2a^2}{2d} + \frac{\epsilon_2 2a^2}{2d}}_{\text{Capacitancia de la derecha}} = \frac{4a^2 \epsilon_1 \epsilon_2}{d(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + \frac{\epsilon_1 a^2}{d} + \frac{\epsilon_2 a^2}{d}$$

- d) La corriente total que sale de la fuente puede ser determinada integrando los vector densidad de corriente que pasa por el condensador de la izquierda ( $\vec{J}$ ) y los dos vectores densidad de corriente que pasan por el condensador de la derecha ( $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$ ). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2a} \int_0^{2a} \frac{V_0 g_1 g_2}{d(g_1 + g_2)} dx dy + \int_0^{2a} \int_0^a \frac{g_1 V_0}{2d} dx dy + \int_0^{2a} \int_a^{2a} \frac{g_2 V_0}{2d} dx dy \\ I &= \frac{V_0 a^2 g_1 g_2}{d} \left( \frac{4}{g_1 + g_2} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_1} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto la resistencia equivalente es

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{d}{a^2 g_1 g_2 \left( \frac{4}{g_1 + g_2} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_1} \right)}$$

### Solución 8.14

- a) Aplicando la condición de solución estacionaria en la ecuación de conservación de carga, se tiene que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J(r)) = 0 \implies r J(r) = A \implies \vec{J}(r) = \frac{A}{r} \hat{r}$$

De esta manera, debido a lo anterior, la geometría cilíndrica y la continuidad de  $\vec{J}$  (por condición de borde), se puede asumir una corriente  $I = \text{cte}$  circulando por el sistema, con

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{A}{r} r d\theta dz = 2\pi L A \implies I = 2\pi L A = \text{cte.}$$

Por lo tanto, asumiendo una corriente  $I$  en el sistema, se tendrá

$$\vec{J} = \frac{I}{\text{área}} \hat{r} = \frac{I}{2\pi r L} \hat{r} \implies \vec{E}_1 = \frac{I}{2\pi r L g_1} \hat{r}; \quad \vec{E}_2 = \frac{I}{2\pi r L g_2} \hat{r}$$

Donde  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  son los campos eléctricos en las zonas con conductividades  $g_1$  y  $g_2$  respectivamente. A partir de estos campos es posible calcular la diferencia de potencial  $V_0$  entre



## CAPÍTULO 8. MEDIOS CONDUCTORES

los radios  $a$  y  $c$

$$V_0 = - \int_c^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_c^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} - \int_b^a \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = \frac{I}{2\pi L} \left( \frac{\ln(\frac{c}{b})}{g_2} + \frac{\ln(\frac{b}{a})}{g_1} \right)$$

Y de lo anterior se despeja  $I$

$$I = \frac{2\pi LV_0}{\left( \frac{\ln(\frac{c}{b})}{g_2} + \frac{\ln(\frac{b}{a})}{g_1} \right)} = \frac{2\pi LV_0 g_1 g_2}{g_1 \ln(\frac{c}{b}) + g_2 \ln(\frac{b}{a})}$$

Finalmente, reemplazando el ahora conocido valor de  $I$  en las expresiones anteriores para  $\vec{J}$ ,  $\vec{E}_1$ , y  $\vec{E}_2$

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{V_0 g_2}{r(g_1 \ln(\frac{c}{b}) + g_2 \ln(\frac{b}{a}))} \hat{r} \\ \vec{E}_2 &= \frac{V_0 g_1}{r(g_1 \ln(\frac{c}{b}) + g_2 \ln(\frac{b}{a}))} \hat{r} \\ \vec{J} &= \frac{V_0 g_1 g_2}{r(g_1 \ln(\frac{c}{b}) + g_2 \ln(\frac{b}{a}))} \hat{r}\end{aligned}$$

b) Usando el hecho que  $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n}$ , se tiene que en la placa interior, dónde el radio es  $r = a$

$$\sigma_a = \varepsilon_0 E_1(a) \implies Q_a = 2\pi a L \sigma_a = \frac{2\pi L V_0 \varepsilon_0 g_2}{(g_1 \ln(\frac{c}{b}) + g_2 \ln(\frac{b}{a}))}$$

De manera análoga en  $r = c$

$$\sigma_c = -\varepsilon_0 E_2(c) \implies Q_c = 2\pi c L \sigma_c = -\frac{2\pi L V_0 g_1 \varepsilon_0}{(g_1 \ln(\frac{c}{b}) + g_2 \ln(\frac{b}{a}))}$$

c) De los resultados anteriores

$$I = \frac{2\pi L V_0}{\left( \frac{\ln(\frac{c}{b})}{g_2} + \frac{\ln(\frac{b}{a})}{g_1} \right)} = \frac{2\pi L V_0 g_1 g_2}{g_1 \ln(\frac{c}{b}) + g_2 \ln(\frac{b}{a})}$$

d) La resistencia, se obtiene del cuociente

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{\ln(\frac{c}{b})}{g_2} + \frac{\ln(\frac{b}{a})}{g_1} \right)$$

e) Aquí primero se debe observar que las resistencias  $R_L$  y  $R$  están en serie. Luego, sea  $V_1$  el voltaje en la resistencia  $R_L$ , por LVK y LCK se tiene

$$V_0 = I(R + R_L); \quad V_1 = IR_L$$



Eliminando  $I$  de estas dos ecuaciones resulta

$$V_1 = \frac{R_L}{R + R_L} V_0$$

A este resultado genérico, de la caída de potencial en dos resistencias en serie con una fuente se le conoce como “Divisor de voltaje”. Ahora se puede calcular la potencia disipada en la resistencia  $R_L$

$$P = V_1 I = \frac{V_1^2}{R_L} = \frac{R_L V_0^2}{(R_L + R)^2}$$

Ahora, para maximizar la potencia en función de  $R_L$

$$\frac{dP}{dR_L} = V_0^2 \left( \frac{1}{(R + R_L)^2} - \frac{2R_L}{(R + R_L)^3} \right) = 0 \implies R_L = R = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{\ln(\frac{c}{b})}{g_2} + \frac{\ln(\frac{b}{a})}{g_1} \right)$$

Es la resistencia  $R_L$  que maximiza la potencia disipada en ella. Y dicha potencia máxima vale

$$P = \frac{V_0^2}{4R} = \frac{V_0^2 \pi L g_1 g_2}{2(g_1 \ln(\frac{c}{b}) + g_2 \ln(\frac{b}{a}))}$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 8.1

- Recuerde que  $\vec{r} = r\hat{r}$  en coordenadas esféricas y use la ecuación de continuidad para despejar el valor de  $\rho$ . Con ello podrá encontrar los valores buscados de  $f$  y  $g$ .

### Indicación 8.3

- Recuerde que por la simetría del problema  $\vec{J} = J(r)\hat{r}$  y  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ . Por condiciones de borde, existe un único vector  $\vec{J}(r)$  entre los cascarones.
- Una vez determinado  $\vec{J}$  es posible determinar la intensidad de corriente. Dado que la diferencia de potencial es conocida, el valor de la resistencia es directo por ley de Ohm.
- En este caso es necesario usar  $\sigma = \varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon_0 E_{1n}$ . Nótese que cada medio tiene su propia función campo eléctrico y que la interfase se ubica en  $r = 2a$ .

### Indicación 8.6

- Divida en trozos infinitesimales el anillo, para ello use anillos muy delgados de ancho  $dr$  y altura  $d$
- Note que todos los anillos infinitesimales quedan como un conjunto de resistencias en paralelo.

### Indicación 8.7

- Asuma una carga  $Q$  y  $-Q$  en cada esfera (ambas cargas distribuyen uniformemente debido a que están muy alejadas).
- Por simetría y condición de borde, el campo eléctrico es tangencial a la interfase. Luego, el campo eléctrico es independiente del medio  $g$ . Dado esto, determine la diferencia de potencial entre las esferas.
- Conocido  $\vec{E}$ , es posible determinar  $\vec{J}$  y con ello la corriente que va de una esfera a otra. Concluya el problema.



**Indicación 8.8**  

- Asumiendo estado estacionario, se tiene que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \implies \vec{J} = J_0 \hat{z}$ , donde  $J_0$  es una constante desconocida. Luego dado que  $\vec{J} = g(z)\vec{E}$  es posible conocer fácilmente el campo eléctrico.
- Para conocer la potencia disipada es aplicación directa de la fórmula de pérdidas por efecto Joule.

**Indicación 8.11**  

- La esfera se está descargando en el tiempo, por lo cual la carga sobre ella es  $Q(t)$  con la condición inicial  $Q(t=0) = Q_0$ .
- Integre en un volumen a ambos lados de la ecuación de continuidad. Use el teorema de la divergencia para simplificar un lado. Haciendo esto, debería llegar a una ecuación diferencial de  $Q(t)$ .
- La energía que se disipa es la misma que se necesita para poner la carga  $Q_0$  sobre la esfera en  $t = 0$ .

**Indicación 8.12**  

- Usando la Ley de Gauss encuentre el flujo de campo eléctrico que saldrá de uno de los conductores.
- Ahora, usando la Ley de Ohm relacione el campo eléctrico con la densidad de corriente y determine la corriente que sale de uno de los conductores.



**V. Respuestas**

Problema	Respuestas
 <b>8.1</b>	$f(r) = -\frac{C}{\alpha r^2}, g(r) = 2C.$
 <b>8.2</b>	$\rho(x, y, t) = \rho_0 e^{-\alpha((x-v_0 t)^2 + y^2)}$
 <b>8.3</b>	<p>a) <math>R = \frac{g_1 + 3g_2}{24\pi a g_1 g_2}</math></p> <p>b) <math>\sigma = \frac{3V_0 \varepsilon_0}{2a} \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + 3g_2)}</math></p>
 <b>8.4</b>	<p>a) <math>I = \frac{LV_0}{\ln(a/b)} (\beta g_1 + (2\pi - \beta)g_2)</math></p> <p>b) <math>R_1 = \frac{\ln(a/b)}{L\beta g_1}</math>  <math>R_2 = \frac{\ln(a/b)}{L(2\pi - \beta)g_2}</math>  <math>R_T = \frac{\ln(a/b)}{L(\beta g_1 + (2\pi - \beta)g_2)}</math></p>
 <b>8.5</b>	$R = \frac{\eta}{4\pi} \ln \left( \frac{z_2}{z_1} \right)$
 <b>8.6</b>	$R = \frac{\pi}{gd \ln(1 + \frac{d}{r})}$
 <b>8.7</b>	$R = \frac{1}{2\pi g} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{2}{L} \right)$
 <b>8.8</b>	<p>a) <math>\vec{J} = \frac{V_0 g_0}{L \ln 2} \hat{y}, \vec{E} = \frac{V_0}{L(1 + \frac{y}{L}) \ln 2} \hat{y}</math></p> <p>b) <math>P = \pi a^2 \frac{V_0^2 g_0}{L \ln^2 2} \ln \left( 1 + \frac{2e}{3L} \right)</math></p>
 <b>8.9</b>	<p>a) <math>\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{x+a} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, V(S) - V(S') = E_0 a \ln(2)</math></p> <p>b) <math>R = \frac{\ln(2)}{g_0 a}, Q = -\frac{\varepsilon_0 E_0 a^2}{2}</math></p>



---

Problema    Respuestas

---

**(P) 8.10**  $I = \frac{4\pi k V^2}{\ln(\frac{b}{a})^2}, \rho = \frac{V}{r^2 \ln(\frac{b}{a})}$

---

**(P) 8.11** **a)**  $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{g}{\varepsilon_0} t}$   
**b)**  $U = \frac{Q_0}{8\pi\varepsilon_0 a}$

---

**a)** Condensador izquierdo:

$$\vec{J} = \frac{V_0 g_1 g_2}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}, \vec{E}_1 = \frac{V_0 g_2}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}, \vec{E}_2 = \frac{V_0 g_1}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}, \vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 V_0 g_2}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}, \vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 V_0 g_1}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}$$

Condensador derecha:

$$\vec{E} = \frac{V_0}{2d} \hat{z}, \vec{J}_1 = \frac{g_1 V_0}{2d} \hat{z}, \vec{J}_2 = \frac{g_2 V_0}{2d} \hat{z}, \vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 V_0}{2d} \hat{z}, \vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 V_0}{2d} \hat{z}$$

**b)** Densidades superficiales de polarización:

**(P) 8.13**  $\sigma_{P1}(z = 0) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{V_0}{2d}, \sigma_{P1}(z = 2d) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{V_0}{2d}, \sigma_{P2}(z = 0) = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{V_0}{2d}, \sigma_{P2}(z = 2d) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{V_0}{2d}$

Densidades superficiales de carga libre:

$$\sigma_{L1}(z = 0) = \varepsilon_1 \frac{V_0}{2d}, \sigma_{L1}(z = 2d) = \varepsilon_1 \frac{V_0}{2d}, \sigma_{L2}(z = 0) = \varepsilon_2 \frac{V_0}{2d}, \sigma_{L2}(z = 2d) = -\varepsilon_2 \frac{V_0}{2d}$$

No existen densidades volumétricas de carga de ningún tipo.

**c)**  $C_T = \frac{4a^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_1 a^2}{d} + \frac{\varepsilon_2 a^2}{d}$

**d)**  $R = \frac{d}{a^2 g_1 g_2 \left( \frac{4}{g_1 + g_2} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_1} \right)}$

---

**a)**  $\vec{J} = \frac{V_0 g_1 g_2}{r(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))} \hat{r},$   
 $\vec{E} = \begin{cases} \frac{V_0 g_2}{r(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))} \hat{r} & a < r < b \\ \frac{V_0 g_1}{r(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))} \hat{r} & b < r < c \end{cases}$

**(P) 8.14** **b)**  $\sigma(r = a) = \frac{2\pi L V_0 g_2 \varepsilon_0}{(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))}, \sigma(r = c) = -\frac{2\pi L V_0 g_1 \varepsilon_0}{(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))}$

**c)**  $I = \frac{2\pi L V_0 g_1 g_2}{g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a)}$

**d)**  $R = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{\ln(c/b)}{g_2} + \frac{\ln(b/a)}{g_1} \right)$

**e)**  $R_L = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{\ln(c/b)}{g_2} + \frac{\ln(b/a)}{g_1} \right), P = \frac{V_0^2 \pi L g_1 g_2}{2(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))}$

---



## CAPÍTULO 8. MEDIOS CONDUCTORES



# Circuitos Eléctricos

## I. Resumen Teórico

---

### Ley de Ohm, Potencia y Asociación de Resistencias

La ley de Ohm aplicada a un circuito eléctrico es

$$V = RI \quad (9.1)$$

Debido a las perdidas de potencia en forma de calor que provocan las resistencias esta puede ser determinada como

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad (9.2)$$

Finalmente, las resistencias pueden ser asociadas en serie o paralelo dependiendo de como se conecten. En el caso de la conexión de  $n$  resistencias en serie se tiene que

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (9.3)$$

Mientras que para el caso de asociación en paralelo se tiene que

$$R_{eq} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \right)^{-1} \quad (9.4)$$


---

### Leyes de Kirchhoff

La primera ley de Kirchhoff señala que: la suma de las corrientes que entran en un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen de él.

$$\sum_{i=1}^n I_i = I_1 + I_2 + I_3 \cdots + I_n = 0 \quad (9.5)$$

## CAPÍTULO 9. CIRCUITOS ELÉCTRICOS

La segundo ley de Kirchhoff señala que: la suma de las diferencias de potencial eléctrico en una malla cerrada siempre debe ser nula.

$$\sum_{i=1}^n V_i = V_1 + V_2 + V_3 \cdots + V_n = 0 \quad (9.6)$$

---

### Recomendaciones

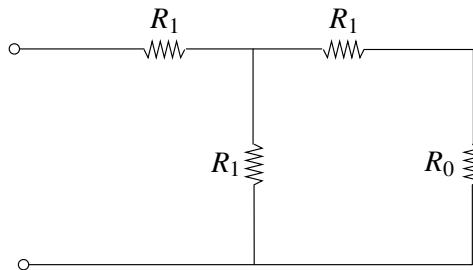
- En muchos casos no podrá encontrar la resistencia equivalente reduciendo resistencias en serie y paralelo. En ese caso debe determinar cuanta es la corriente que entra el circuito si este se conecta a una diferencia de potencial conocida. Finalmente, debe aplicar la ley de Ohm para despejar el valor de la resistencia.



## II. Problemas Propuestos

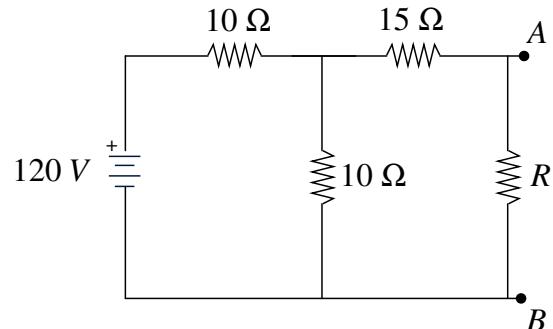
**Problema 9.1**   

En el circuito de la figura, encuentre el valor de  $R_1$  de manera que la resistencia equivalente entre las terminales (donde está abierto el circuito) sea igual a  $R_0$ .


**Problema 9.2**   

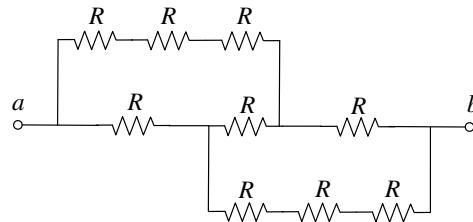
Una resistencia  $R$  se conecta entre los terminales  $A$  y  $B$  del circuito de la figura. Calcule el valor de la resistencia  $R$  de manera que:

- La potencia disipada en el circuito sea máxima. Determine el valor de esa potencia.
- La potencia disipada en la resistencia  $R$  sea máxima. Determine el valor de esa potencia.

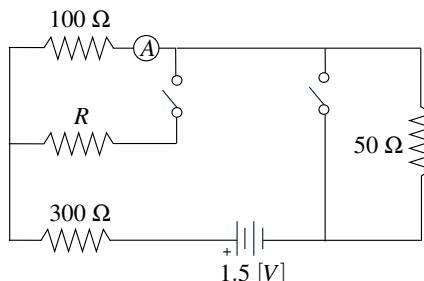

**Problema 9.3**   

Nueve resistencias  $R$  de  $10 \Omega$  están conectadas como se muestra en la figura y una diferencia de potencial  $20 \text{ V}$ . se aplica entre los puntos  $a$  y  $b$ .

- Calcule la resistencia equivalente de este circuito entre los puntos  $a$  y  $b$ .
- Calcule la corriente de cada una de las 9 resistencias.

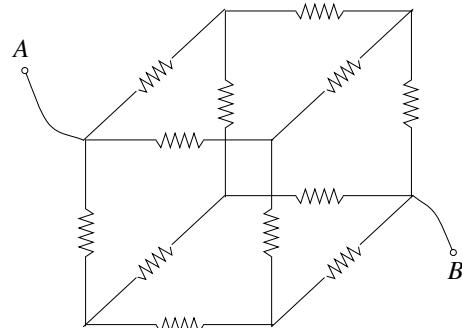

**Problema 9.4**   

En el circuito de la figura, el amperímetro  $A$  registra una corriente  $I$  cuando los dos interruptores están abiertos o ambos cerrados. Hallar el valor de la resistencia  $R$ .



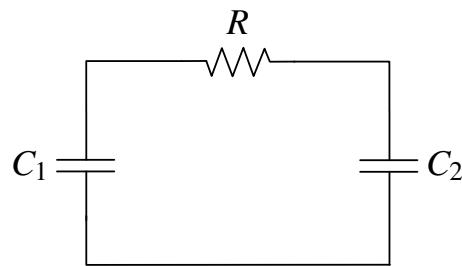
**Problema 9.5**   

Considere un cubo el cual posee en cada arista una resistencia  $R$ . Determine la resistencia equivalente entre dos vértices opuestos  $A$  y  $B$ .



**Problema 9.6**   

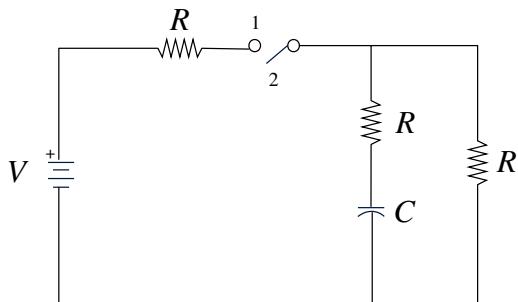
Encuentre la pérdida de energía en forma de calor en el circuito de la figura. Demuestre que éste número no depende de la resistencia  $R$ , teniendo en cuenta que inicialmente el condensador de capacidad  $C_1$  tiene carga  $Q_0$  y que el segundo condensador se encuentra descargado.



**Problema 9.7**   

Considere el circuito de la figura. Antes de  $t = 0$ , el switch está en la posición 1 por un tiempo muy prolongado. En  $t = 0$ , el switch  $S$  es movido a la posición 2. Calcule:

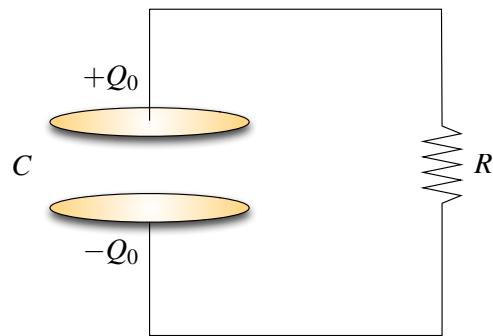
- La carga en el condensador en  $t = 0$ ,  $Q(0)$ .
- La corriente en  $t = 0$  después de que el switch es movido a la posición 2,  $I(0)$ .
- La corriente para  $t > 0$ , después de que el switch fue movido a la posición 2.
- La energía  $U$  almacenada en el condensador en  $t = 0$ .



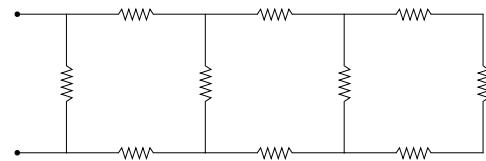
**Problema 9.8**

Un condensador, de capacidad  $C$ , formado por placas circulares de radio  $b$  está cargado y con voltaje  $V_0$ . La separación entre las dos placas paralelas es pequeña comparada con  $b$ . En  $t = 0$  se cierra el switch y el condensador comienza a descargarse. Calcule, en función de  $V_0$ ,  $C$ ,  $b$ ,  $R$ ,  $t$ :

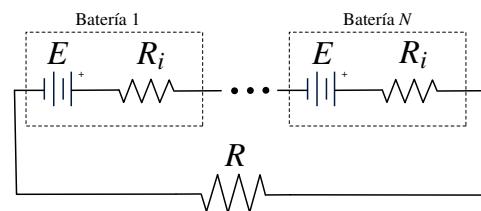
- La carga  $Q(t)$  en función del tiempo para la placa cargada positivamente del condensador.
- El campo eléctrico  $\vec{E}$  en el espacio entre las dos placas del condensador.

**Problema 9.9**

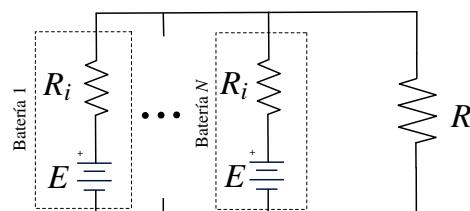
En una red eléctrica hay  $n$  resistencias que cruzan desde la línea superior a la línea inferior, y hay  $n - 1$  resistencias a lo largo de la línea superior e inferior. El número total de resistencias es  $3n - 2$ . Todas las resistencias son iguales y de valor  $R$ . Determine el valor de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_\infty$  ( $R_i$  es la resistencia equivalente vista desde los terminales para el caso  $n = i$ ). En la Figura se muestra el caso  $n = 4$ .

**Problema 9.10**

Se tiene  $N$  baterías, cada una con la misma fuerza electromotriz  $E$  y la misma resistencia interna  $R_i$ . Ellas pueden ser conectadas todas en serie o bien todas en paralelo y, en ambos casos, el circuito es cerrando con una resistencia adicional  $R$ . Determine las potencias  $P_{\text{ser}}$  y  $P_{\text{par}}$  que se disipan en  $R$  en cada uno de los dos casos. Encuentre el valor  $R_{\text{ser}}$  de  $R$  que permite obtener el mayor valor para  $R_{\text{ser}}$  y encuentre el valor  $R_{\text{par}}$  de  $R$  que permite obtener el mayor valor para  $P_{\text{par}}$ . Determine en cuál de los dos casos la potencia disipada en  $R$  es mayor.



Circuito Serie



Circuito Paralelo



### III. Soluciones

#### Solución 9.2

- a) Primero se debe calcular el valor de la resistencia  $R$ , tal que el valor de la potencia total disipada en el circuito se maximice. En este caso, se calcula la resistencia equivalente del circuito considerando un valor desconocido  $R$ . Luego

$$R_{\text{eq}} = 10 + \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{15+R} \right)^{-1} = \frac{400+20R}{25+R} \quad (\text{en } \Omega)$$

Entonces la potencia está dada por

$$P(R) = \frac{V^2}{R_{\text{eq}}} = 120^2 \cdot \frac{25+R}{400+20R} \quad (\text{en } [W])$$

Para maximizar, se deriva la expresión anterior con respecto a  $R$

$$\frac{dP}{dR} = 120^2 \cdot \frac{400+20R - 20(25+R)}{(400+20R)^2} = -\frac{120^2 \cdot 100}{(400+20R)^2} < 0$$

Dado que la función potencia tiene derivada negativa, es siempre decreciente para  $R \geq 0$ , por lo que su máximo lo alcanza en su mínimo valor, o sea  $R = 0 \Omega$ . Por lo tanto la potencia disipada vale

$$P = 900 \text{ [W]}$$

- b) Ahora hallar el valor de la resistencia  $R$  de modo que se maximice la potencia disipada en sí misma. En este caso es necesario plantear las leyes de Kirchhoff:

$$0 = (15+R)I_R - 10(I - I_R)$$

$$120 = 10I + 10(I - I_R)$$

Donde  $I$  es la corriente que sale de la fuente, e  $I_R$  es la corriente sobre la resistencia desconocida. Reordenando las ecuaciones:

$$10I = (25+R)I_R$$

$$120 = 20I - 10I_R$$

De estas dos ecuaciones se obtiene que:

$$I_R = \frac{60}{20+R} \implies P_R = RI_R^2 = R \left( \frac{60}{20+R} \right)^2$$

Luego:



$$\frac{dP}{dR} = 60^2 \left( \frac{(20+R)^2 - 2R(20+R)}{(20+R)^4} \right) = 0 \implies R = 20$$

Por lo tanto, el valor de la resistencia que maximiza la potencia disipada en ella es  $R = 20 \Omega$  y dicha potencia vale:

$$P = 20 \left( \frac{60}{40} \right)^2 = 45 [W]$$

**Solución 9.9** 

En un principio hay que encontrar la recurrencia de la red de resistencias. Para el caso  $n = 1$ , siguiendo todos los datos del enunciado se tiene

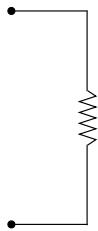


Figura 9.1: Red de Resistencias para  $n = 1$

Donde evidentemente  $R_1 = R$ . Nuevamente cumpliendo los requisitos del enunciado  $R_2$  es

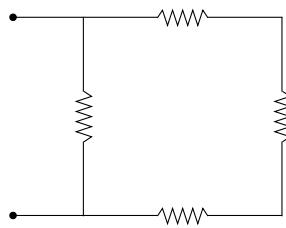


Figura 9.2: Red de Resistencias para  $n = 2$

En este caso  $R_2 = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R+R+R} \right)^{-1} = \frac{3}{4}R$ . Finalmente el caso  $R_3$  estará dado por

Donde  $R_3 = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_2+R} \right)^{-1} = \frac{11}{15}R$ . En este punto, es posible verificar que la recurrencia de resistencias está dada por

$$R_n = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2R+R_{n-1}} \right)^{-1}$$



## CAPÍTULO 9. CIRCUITOS ELÉCTRICOS

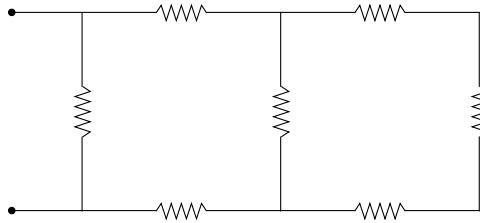


Figura 9.3: Red de Resistencias para  $n = 3$

(Nota: Si se desea ser riguroso este resultado debería ser demostrado por inducción, sin embargo para no escapar de los contenidos del curso no se realizará la demostración) Ahora, se debe suponer la sucesión de redes de resistencias converge a un valor  $R_\infty$ , de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n-1} = R_\infty$$

Luego, para  $n$  suficientemente grande se cumple que

$$R_\infty = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2R + R_\infty} \right)^{-1} \implies R_\infty^2 + 2RR_\infty - 2R^2 = 0 \implies R_\infty = (\sqrt{3} - 1)R$$

### Solución 9.10

En cada caso se puede calcular la potencia disipada por  $R$  como

$$P = RI^2$$

donde  $I$  corresponden a la corriente que pasa por la resistencia  $R$ . En el caso serie, la corriente es la misma que circula en todo el circuito, luego por Kirchhoff se tendrá que

$$NE - NR_i I - RI = 0 \implies I = \frac{NE}{NR_i + R} \implies P_{\text{ser}} = R \left( \frac{NE}{NR_i + R} \right)^2$$

Otro lado, en la conexión en paralelo por las  $N$  fuentes debe salir la misma corriente. Entonces, si por cada batería sale una corriente  $I/N$  por la resistencia pasará una corriente  $I$ . Por Kirchhoff nuevamente

$$E - R_i \frac{I}{N} - RI = 0 \implies I = \frac{NE}{R_i + NR} \implies P_{\text{par}} = R \left( \frac{NE}{R_i + NR} \right)^2$$

Para hallar los  $R_{\text{ser}}$  y  $R_{\text{par}}$  que maximizan la potencia hay que derivar e igualar a cero.

$$\frac{dP_{\text{ser}}}{dR} = \frac{(NE)^2(NR_i + R)(NR_i - R)}{(NR_i + R)^4} = 0 \implies R_{\text{ser}} = NR_i$$

$$\frac{dP_{\text{par}}}{dR} = \frac{(NE)^2(R_i + NR)(R_i - NR)}{(R_i + NR)^4} = 0 \implies R_{\text{par}} = \frac{R_i}{N}$$

Al evaluar las potencias en sus respectivas resistencias, se obtiene que

$$P_{\text{ser}}(R_{\text{ser}}) = P_{\text{par}}(R_{\text{par}}) = \frac{NE^2}{4R_i}$$

Por lo que en ambos casos la potencia disipada es la misma.



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 9.1

- Realice asociaciones de serie y paralelo para encontrar la resistencia equivalente del circuito. Una vez encontrada, imponga que ésta debe ser igual a  $R_0$ .

### Indicación 9.3

- Para encontrar la resistencia equivalente determine la corriente que entra al circuito. Dado que el voltaje es conocido, la resistencia equivalente puede ser determinada por la ley de Ohm.
- Use la simetría del circuito para aplicar las leyes de Kirchhoff. Note que las corrientes tienen que ser simétricas, por lo cual sólo hay tres corrientes distintas circulando.

### Indicación 9.4

- Determine la corriente que circula por el amperímetro en los dos casos, una de ella debería quedar en función  $R$ . Iguale los valores de esas corrientes y determine el valor de  $R$ .

### Indicación 9.5

- En este caso no puede usar asociaciones en serie/paralelo para determinar la resistencia equivalente. Suponga que se conectan los terminales  $A$  y  $B$  a una batería  $V_0$  y determine la corriente que sale de ella.
- Use la simetría del circuito para ir viendo de que forma se dividen las corrientes, por ejemplo, cuando la corriente que sale de la batería llega al primer vértice del cubo necesariamente se divide en tres corrientes iguales por simetría.
- Aplicando las leyes de Kirchhoff determine la corriente, y determine la resistencia equivalente por ley de Ohm.



## CAPÍTULO 9. CIRCUITOS ELÉCTRICOS

### Indicación 9.6

- Usando las leyes de Kirchhoff, encuentre la ecuación diferencial que rige el circuito sobre la carga  $Q$ . Recuerde que la caída/subida de tensión en un condensador está dado por  $V = Q/C$ .
- Dado que  $C_1$  se está descargando, es una subida de tensión (ie. actúa de forma parecida a una fuente de voltaje), mientras que  $R$  y  $C_2$  son caídas de tensión.

### Indicación 9.7

- Recuerde que la carga no puede variar en forma abrupta en condensador y que pasado un tiempo muy largo el condensador actúa como un circuito abierto.

### Indicación 9.8

- Determine la carga inicial del condensador si este se ha cargado a voltaje  $V_0$ .
- Usando la ley de voltajes de Kirchhoff la ecuación diferencial que rige a la carga en el circuito.
- Conocida la carga en el tiempo que posee las placas, estime el valor del campo eléctrico entre ellas.



## V. Resultados

Problema	Respuestas
(P) 9.1	$R_1 = \frac{R_0}{\sqrt{3}}$
(P) 9.2	a) $R = 0 \Omega$ , $P = 900 [W]$ b) $R = 20 \Omega$ , $P = 45 [W]$
(P) 9.3	a) $R_{eq} = \frac{5}{3}R$ b) Las corrientes son $i_1 = \frac{2V_0}{5R}$ , $i_2 = \frac{V_0}{5R}$ , $i_3 = \frac{V_0}{5R}$ (Nota: Las corrientes son simétricas, $i_1$ es la corriente por la resistencia a la izquierda de $R$ , $i_2$ es la corriente que pasa por las tres resistencias en serie e $i_3$ es la corriente que pasa por la resistencia central de la figura).
(P) 9.4	$R = 600\Omega$
(P) 9.5	$R_T = \frac{5}{6}R$
(P) 9.6	$ \Delta U  = \frac{Q_0C_2}{2C_1(C_1+C_2)}$
(P) 9.7	a) $Q(0) = \frac{CV}{2}$ b) $I(0) = \frac{V}{4R}$ c) $I(t) = \frac{V}{4R}e^{-t/2RC}$ d) $U(0) = \frac{CV^2}{8}$
(P) 9.8	a) $Q(t) = V_0Ce^{\frac{-t}{RC}}$ b) $\vec{E} = \frac{-V_0Ce^{\frac{-t}{RC}}}{\pi b^2 \varepsilon_0} \hat{z}$ donde $\hat{z}$ apunta desde la placa cargada positiva a la negativa.



## CAPÍTULO 9. CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

Problema	Respuestas
----------	------------

---

**9.9**

$$R_1 = R, R_2 = \frac{3}{4}R, R_3 = \frac{11}{15}R, R_\infty = (\sqrt{3} - 1)R.$$

---

**9.10**

$$P_{\text{ser}} = R \left( \frac{NE}{NR_i + R} \right)^2, P_{\text{par}} = R \left( \frac{NE}{R_i + NR} \right)^2, R_{\text{ser}} = NR_i, R_{\text{par}} = \frac{R_i}{N} \text{ y } P_{\text{ser}}(R_{\text{ser}}) = P_{\text{par}}(R_{\text{par}}) = \frac{NE^2}{4R_i}$$

---



# **Parte III**

## **Magnetostática**



# Ley de Biot-Savart

## I. Resumen Teórico

---

### Ley de Biot-Savart

El campo magnético que genera una corriente  $I$  en un circuito puede ser determinado como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (10.1)$$

donde  $\vec{r}$  es el lugar donde se desea conocer el campo,  $\vec{r}'$  es el lugar donde se encuentra la corriente y  $d\vec{l}$  es el elemento vectorial que parametriza la dirección de la corriente.

Para el caso de distribuciones más complejas compuestas por cargas en movimiento con velocidad  $\vec{v}$ , la expresión anterior cambia a

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS \quad (10.2)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (10.3)$$

donde  $\vec{K}(\vec{r}') = \sigma \vec{v}$  y  $\vec{J}(\vec{r}') = \rho \vec{v}$ . También puede ser útil recordar que  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ , donde  $\omega$  es la velocidad con que rota la superficie o el volumen.

Recordar que el campo magnético  $\vec{B}$  también cumple el principio de superposición.

---

### Recomendaciones

- En general, se usa la ley de Biot-Savart para determinar el campo magnético en algunos puntos específicos en el espacio (punto en particular, puntos sobre un eje, etc).

## CAPÍTULO 10. LEY DE BIOT-SAVART

- A veces puede ser complicado diferenciar los vectores  $\vec{r}'$  y  $\vec{dl}$ , el primero hace referencia al lugar donde se encuentra la la línea, superficie o volumen en el cual se desea integrar, por otro lado el segundo indica la dirección (no necesariamente el sentido) que sigue la corriente.
- En muchos problemas deberá usar el principio de superposición, es decir, deberá dividir el camino que sigue la corriente por trozos y determinar el aporte de cada uno en el punto donde se desea conocer el campo magnético.
- Se recomienda siempre elegir el  $\vec{dl}$  positivo, a pesar que la corriente pueda ir en el sentido contrario a la de ese vector diferencial. El sentido de la corriente se controla más fácilmente con los límites de la integral.
- Siempre corrobore sus resultados usando la regla de la mano derecha para ver si el campo magnético resultante tiene sentido. **Los campos magnéticos siempre rotan entorno a las corriente según la regla de la mano derecha.**

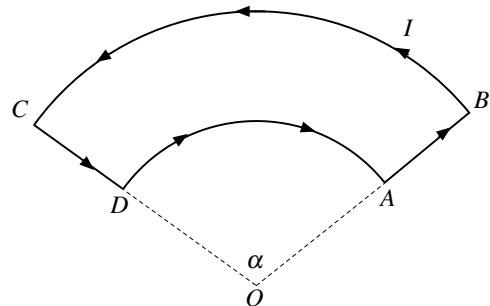


## II. Problemas Propuestos

### Problema 10.1



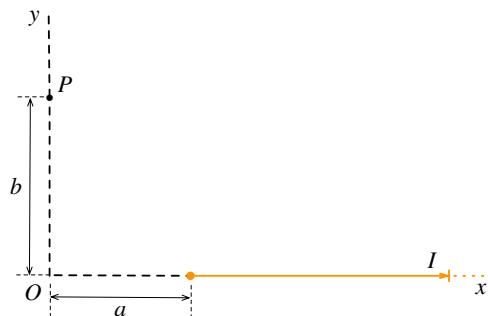
Considere el alambre  $ABCDA$  que se muestra en la figura. Por él circula una corriente  $I$  en la dirección indicada. Si  $BC$  y  $DA$  son arcos de circunferencia subtendidos por un ángulo  $\alpha$  de modo que  $OA = OD = R$  y  $OB = OC = 2R$ . Calcule el campo magnético  $\vec{B}$  que produce en el centro  $O$ .



### Problema 10.2



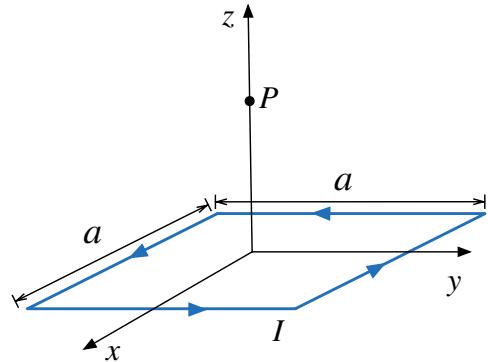
Por un conductor rectilíneo semi-infinito circula una corriente eléctrica de intensidad  $I$  en el sentido que se muestra en la figura. Calcule el campo magnético  $\vec{B}$  en el punto  $P$ .



### Problema 10.3



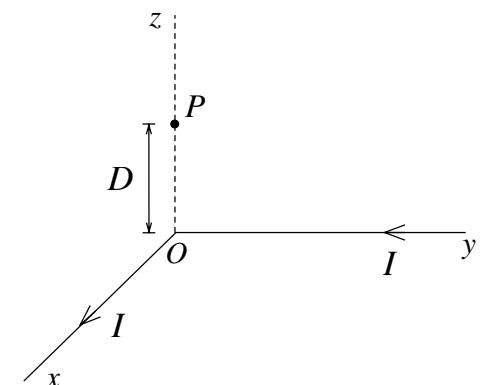
Considere una espira cuadrada de lado  $a$  que yace sobre el plano  $xy$ , por la cual circula una corriente  $I$  mostrada en la Figura. Calcule el campo magnético  $\vec{B}$  en un punto  $P$ , que está a una distancia  $z$  sobre el centro del cuadrado.



### Problema 10.4



Un alambre en forma de  $L$  lleva corriente  $I$ . El alambre coincide con el eje  $x$  positivo y con el eje semi-positivo  $y$ . Calcule el vector campo magnético en un punto  $P$  del eje  $z$ , ubicado en  $z = D$ .



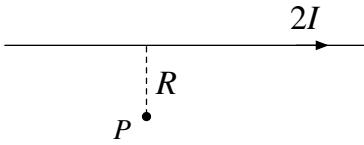
## CAPÍTULO 10. LEY DE BIOT-SAVART

### Problema 10.5

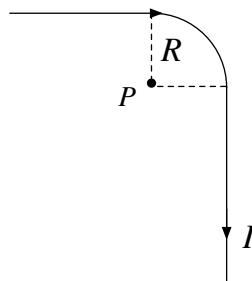


Susana, Rodrigo y Marcel, equipo docente de curso de electromagnetismo de una cierta universidad, tienen una discusión sobre el campo magnético generado por un alambre en un mismo punto  $P$ . Susana tiene un alambre infinito por el cual fluye una corriente  $2I$ , Rodrigo, al ver el alambre lo toma y lo dobla, formando un cuarto de circunferencia de radio  $R$  más otros dos tramos semi-infinitos (ver Figura). Rodrigo le asegura a Susana que si la corriente disminuye a la mitad, el campo magnético producido por esta nueva geometría tendrá una mayor magnitud en el punto  $P$  (por lo cual Susana se muestra muy en desacuerdo). Marcel, asombrado por la discusión de su cuerpo docente, les dice a ambos están equivocados ya que falta información suficiente para aseverar en cual de los dos casos el campo magnético es mayor. Ayude al cuerpo docente de este curso a determinar quién tiene la razón.

Susana:



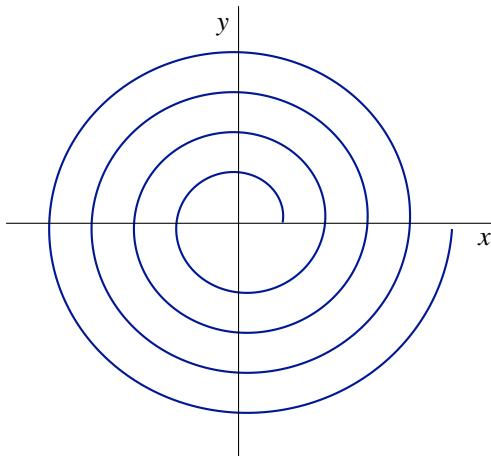
Rodrigo:



### Problema 10.6



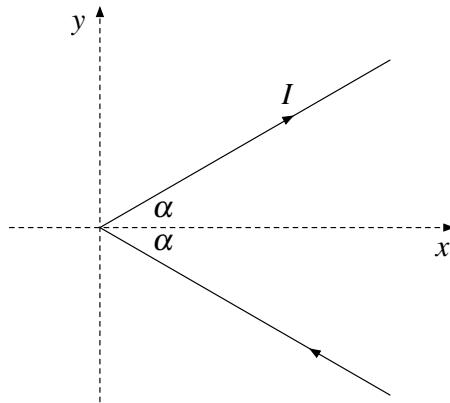
Considere un alambre que ha sido doblado de la forma que se indica la figura, siguiendo la curva  $r(\theta) = \frac{\theta}{2\pi} + 1$  en coordenadas cilíndricas dando  $n$  vueltas alrededor del origen. Si por el alambre se hace circular una corriente  $I$  en sentido antihorario, determine el valor del campo magnético en el origen y analice que sucede cuando la cantidad de vueltas es muy grande.



### Problema 10.7

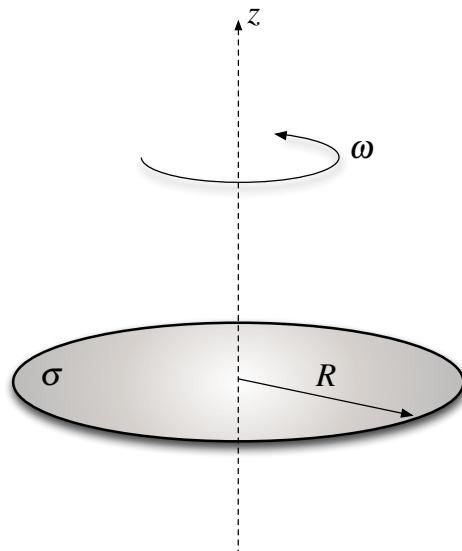


Considere un alambre infinito en el cual circula una corriente  $I$ . El cable ha sido doblado de la forma que se muestra en la Figura, con un ángulo de  $2\alpha$ . Determine el campo magnético en cualquier punto del eje  $x$ .



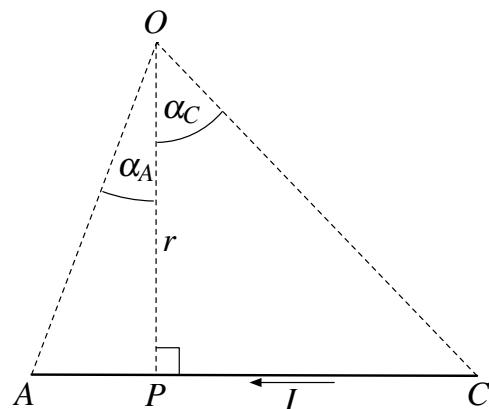
**Problema 10.8**   

Considere un disco de radio  $R$  que posee una densidad de carga superficial  $\sigma$ , uniformemente distribuida. Partiendo del reposo, el disco comienza a girar, hasta alcanzar una velocidad angular constante  $\omega$  en torno a su eje de simetría. Encuentre una expresión para el campo magnético en  $z = R$ . (Propuesto: ¿Cuánto vale el campo magnético para cualquier punto en el eje?).

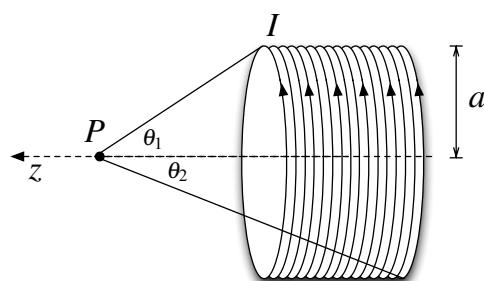
**Problema 10.9**   

Considere un segmento  $\overline{AC}$  recorrido por una corriente de intensidad  $I$  como se muestra en la Figura.

- Determine el valor del campo magnético en el punto  $O$  en función  $\alpha_A$ ,  $\alpha_C$  y  $r$
- Use el resultado calculado en a) para determinar el campo magnético producido por un polígono regular de  $n$  lados en su centro. Considere que el polígono es de lado  $a$  y es recorrido por una corriente  $I$ .
- Demuestre que si  $n \rightarrow \infty$ , el módulo del campo magnético en el centro del polígono coincide con el de una espira circular de radio  $r$ .

**Problema 10.10**   

Encuentre el campo magnético en el punto  $P$  sobre el eje de una bobina cilíndrica de radio  $a$  con una densidad de  $n$  vueltas por unidad de largo que lleva una corriente  $I$ . Exprese su respuesta en términos de  $\theta_1$  y  $\theta_2$  (ver Figura).



### III. Soluciones

#### Solución 10.4

Para el calculo del campo magnético se usará la definición

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Primero se calculará la contribución de campo magnético que genera el cable que está sobre el semi-eje positivo  $x$ . Nótese que en este caso  $\vec{r} = z\hat{z}$  y  $\vec{r}' = x\hat{x}$  y  $d\vec{l} = dx\hat{x}$ . Luego

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty \frac{Idx\hat{x} \times (z\hat{z} - x\hat{x})}{|z\hat{z} - x\hat{x}|^3} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{zdx}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y}\end{aligned}$$

Usando el cambio de variables  $x = z \tan \theta \implies dx = z \sec^2 \theta d\theta$ , por lo que si  $x \rightarrow \infty$  se tiene que  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z^2 \sec^2 \theta d\theta}{(z^2 + z^2 \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \hat{y} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi z} \hat{y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi z} \hat{y}\end{aligned}$$

El otro aporte de campo magnético en ese punto está dado por la generación de campo magnético en el semi-eje  $y$ . El campo estará dado por

$$\begin{aligned}\vec{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\infty^0 \frac{Idy\hat{y} \times (z\hat{z} - y\hat{y})}{|z\hat{z} - y\hat{y}|^3} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{zdy}{(z^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{x}\end{aligned}$$



La última integral es idéntica a la que ya se calculó en la parte anterior (sólo cambia la dirección). Finalmente el campo total es

$$\vec{B}(z = D) = \vec{B}_1(z = D) + \vec{B}_2(z = D) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi D}(\hat{x} + \hat{y})$$

**Solución 10.5** 

En este caso se elige el mismo sistema de referencia para ambos problemas, en este caso tomamos el origen en el punto  $P$  y con eje  $x$  creciente a la derecha e  $y$  creciente hacia arriba. Para encontrar los campos magnéticos se usará definición

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Caso Susana:  $\vec{r} = 0$ ,  $\vec{r}' = R\hat{y} + x\hat{x}$ ,  $I d\vec{l} = 2Idx\hat{x}$  con  $x \in (-\infty, \infty)$

$$\vec{B}_S(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Idx\hat{x} \times (-R\hat{y} - x\hat{x})}{|-R\hat{y} - x\hat{x}|^3} = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{2\pi} \cdot \frac{2}{R^2} = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{\pi R}$$

(la última integral puede resolverse con el cambio de variables  $x = R\tan\theta$ )

Caso Rodrigo: En este caso hay que separar en tres caminos:

Recta semi-infinita sobre el eje  $x$ :  $\vec{r} = 0$ ,  $\vec{r}' = R\hat{y} + x\hat{x}$ ,  $I d\vec{l} = Idx\hat{x}$  con  $x \in (-\infty, 0)$

$$\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{Idx\hat{x} \times (-R\hat{y} - x\hat{x})}{|-R\hat{y} - x\hat{x}|^3} = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi R}$$

Trozo de cuarto de circunferencia:  $\vec{r} = 0$ ,  $\vec{r}' = R\hat{r}$ ,  $I d\vec{l} = IRd\theta\hat{\theta}$  con  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, 0)$

$$\vec{B}_2(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{IRd\theta\hat{\theta} \times (0 - R\hat{r})}{|-R\hat{r}|^3} = \frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi R} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 d\theta = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{8R}$$

Recta semi-infinita sobre el eje  $y$ :  $\vec{r} = 0$ ,  $\vec{r}' = R\hat{x} + y\hat{y}$ ,  $I d\vec{l} = Idy\hat{y}$  con  $y \in (0, \infty)$

$$\vec{B}_3(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{Idy\hat{y} \times (-R\hat{x} - y\hat{y})}{|-R\hat{x} - y\hat{y}|^3} = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{y}{(y^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dy = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi R}$$



## CAPÍTULO 10. LEY DE BIOT-SAVART

(Idéntico al primer cálculo)

Por lo tanto el campo total es:

$$\vec{B}_R(P) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \right) \hat{z}$$

Finalmente, debe notarse que

$$\frac{|\vec{B}_S|}{|\vec{B}_R|} = \frac{\frac{\mu_0 I}{\pi R}}{\frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \right)} = \frac{8}{4 + \pi} > 1 \implies |\vec{B}_S| > |\vec{B}_R|$$

Dado que todos los datos de la expresión son conocidos, Susana tiene la razón.

### Solución 10.6

En este caso se debe aplicar nuevamente Biot-Savart, con  $\vec{r} = 0$ ,  $\vec{r}' = r\hat{r}$ ,  $d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}$ , nótese que independientemente que la geometría de este problema sea más compleja, las parametrizaciones en coordenadas cilíndricas (o polares en este caso) son siempre de la misma forma. Entonces

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{I(dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}) \times -r\hat{r}}{|-r\hat{r}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{(dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}) \times -r\hat{r}}{|-r\hat{r}|^3}$$

Finalmente,

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{d\theta}{r} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{d\theta}{\frac{\theta}{2\pi} + 1} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \cdot 2\pi \ln \left( \frac{\theta}{2\pi} + 1 \right) \Big|_0^{2\pi n} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{2} \ln(n+1)$$

### Solución 10.8

Calculando el campo magnético por definición, se tiene que

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

aquí

$$I d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = \sigma dS \cdot \vec{v} = \sigma r dr d\theta \cdot \vec{v}$$



Luego, dado que  $\vec{r} = R\hat{z}$ ,  $\vec{r}' = r\hat{r}$  y  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \omega r\hat{\theta}$  se tiene que

$$\vec{B}(R\hat{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma r dr d\theta \cdot \omega r \hat{\theta} \times (R\hat{z} - r\hat{r})}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma R \omega r^2 dr d\theta}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{r} + \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma \omega r^3 dr d\theta}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \right]$$

Por asuntos de simetría la primera integral es nula, por lo que el campo magnético es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{r^3 dr}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

Usando el cambio de variables  $\rho = R^2 + r^2 \implies d\rho = 2rdr$ , por lo tanto

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \int_{R^2}^{2R^2} \frac{(\rho - R^2) d\rho}{\rho^{\frac{3}{2}}} \hat{z} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \hat{z} \left[ \int_{R^2}^{2R^2} \frac{(\rho - R^2) d\rho}{\rho^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \hat{z} \left[ \int_{R^2}^{2R^2} \rho^{-\frac{1}{2}} d\rho - R^2 \int_{R^2}^{2R^2} \rho^{-\frac{3}{2}} d\rho \right]$$

Resolviendo las dos integrales anteriores, resulta que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} (3\sqrt{2} - 4) R \hat{z}$$

### Solución 10.9

- a) Se fija un sistema de referencia de centro  $P$  para luego usar la definición de campo magnético.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{r \tan \alpha_C}^{-r \tan \alpha_A} \frac{dx \hat{x} \times (r\hat{y} - x\hat{x})}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I r \hat{z}}{4\pi} \int_{r \tan \alpha_C}^{-r \tan \alpha_A} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

De este modo, usando el cambio de variables  $x = r \tan \theta \implies dx = r \sec^2 \theta d\theta$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi r} \int_{\alpha_C}^{-\alpha_A} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin(-\alpha_A) - \sin \alpha_C) \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_A + \sin \alpha_C) \hat{z}$$

- b) En el caso del polígono regular se pueden formar  $n$  triángulos isósceles, de forma que  $\alpha_A = \alpha_C = \frac{\pi}{n}$  y además  $r = \frac{a}{2 \tan \frac{\pi}{n}}$ . El aporte de campo magnético en el centro del polígono es realizado por  $n$  segmentos como el calculado en la parte a), por lo que el resultado final es

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 n I}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \hat{z}$$



## CAPÍTULO 10. LEY DE BIOT-SAVART

c) Primero, dado que se necesita parametrizar una espira de radio  $r$  para conocer su campo en el centro, se tiene que  $\vec{r} = 0$ ,  $\vec{r}' = r\hat{r}$  y  $d\vec{l} = rd\theta\hat{\theta}$ . Por lo tanto

$$\vec{B}_{\text{espira}}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Ird\theta\hat{\theta} \times -r\hat{r}}{|-r\hat{r}|^3} = \frac{\mu_0 I}{2r} \hat{z}$$

En función del radio  $r$  el campo magnético en el centro del polígono vale

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} n \sin \frac{\pi}{n} \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{2r} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \hat{z}$$

Como  $\frac{\pi}{n} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y aplicando límite conocido de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  se tiene que

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2r} \hat{z}$$

Finalmente se comprueba el hecho de que el campo magnético es el mismo.



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 10.1

- Divida el alambre en cuatro caminos distintos e use Biot-Savart para calcular el campo magnético que aporta cada uno de los caminos.
- Note que hay dos caminos que tienen un aporte nulo de campo magnético en el punto  $O$ .

### Indicación 10.2

- Identifique la parametrización del alambre infinito que va desde  $x = a$  hasta el infinito.

### Indicación 10.3

- En ese problema puede separar el camino en 4 y determinar el campo que genera cada lado del cuadrado.
- Una solución más rápida es aprovechar la geometría del problema, ya que el resultado final debe quedar en la dirección de  $\hat{z}$  por simetría. Luego, si se determina el campo magnético de un solo lado se puede afirmar que el resultado final es cuatro veces la componente en  $\hat{z}$  de ese resultado.

### Indicación 10.7

- Este problema puede algo complicado plateando las integrales de Biot-Savart. En caso que intente por este método, es útil recordar que para el alambre del primer cuadrante se cumple que  $d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y}$  donde  $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ .
- Otro método más simple e ingenioso, es usar el resultado obtenido del Problema 10.9 de forma conveniente.

### Indicación 10.10

- Determine el campo magnético que genera una sola espira a distancia  $z$  del punto  $P$ .



## CAPÍTULO 10. LEY DE BIOT-SAVART

- Usando el resultado anterior, integre el campo encontrado en la parte anterior ( $d\vec{B}$ ) por cada espira que tiene la bobina cilíndrica (cada espira tiene corriente  $dI$ ) para encontrar finalmente el campo magnético total  $\vec{B}$ . Es sumamente útil notar que  $dI = nIdz$ .



## V. Resultados

Problema	Respuestas
(P) 10.1	$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I \alpha}{8\pi R} \hat{k}$ donde $\hat{k}$ está saliendo de la hoja de papel.
(P) 10.2	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \left[ 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right] \hat{z}$
(P) 10.3	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi \left( \frac{a^2}{4} + z^2 \right) \sqrt{\frac{a^2}{2} + z^2}} \hat{z}$
(P) 10.4	$\vec{B}(z = D) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi D} (\hat{x} + \hat{y})$
(P) 10.5	Susana tiene la razón.
(P) 10.6	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{2} \ln(n+1)$
(P) 10.7	Si $x > 0$ : $\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi x} \hat{z} \tan \frac{\alpha}{2}$ , si $x < 0$ $\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi x} \hat{z} \cot \frac{\alpha}{2}$
(P) 10.8	$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} (3\sqrt{2} - 4) R \hat{z}$ Propuesto: $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[ \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2 z  \right] \hat{z}$
(P) 10.9	a) $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_A + \sin \alpha_C) \hat{z}$ ( $\hat{z}$ entrando a la hoja de papel). b) $\vec{B} = -\frac{\mu_0 n I}{\pi a} \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) \sin \left( \frac{\pi}{n} \right) \hat{z}$
(P) 10.10	$\vec{B}(P) = \frac{n I \hat{z}}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$



## CAPÍTULO 10. LEY DE BIOT-SAVART



# Fuerza de Lorentz

## I. Resumen Teórico

---

### Fuerza de Lorentz

La fuerza de Lorentz indica que una carga  $q$  con una velocidad  $\vec{v}$  bajo la influencia de un campo magnético  $\vec{B}$  siente una fuerza dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (11.1)$$

Adicionalmente, en presencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$  la fuerza cambia a

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (11.2)$$

Más general, un diferencial de carga  $dq$  siente una fuerza  $d\vec{F}$  dado por

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B} \quad (11.3)$$

En el caso particular de un circuito eléctrico con corriente  $I$ , el diferencial de fuerza que siente el circuito es

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (11.4)$$

donde  $d\vec{l}$  es la dirección que sigue la corriente del circuito eléctrico. Recordar que  $\vec{B}$  es el campo **externo** que afecta al circuito.

---

### Carga Puntual en Campo Magnético Constante

Una carga  $q$  de masa  $m$  y con una velocidad  $\vec{v}$  **perpendicular** a un campo magnético  $\vec{B}$  tiene una trayectoria **circunferencial** de radio

$$R = \frac{m|\vec{v}|}{q|\vec{B}|} \quad (11.5)$$

## CAPÍTULO 11. FUERZA DE LORENTZ

En caso que de un campo  $\vec{v}$  no perpendicular al campo  $\vec{B}$  la trayectoria es una espiral, de radio

$$R = \frac{mv_{\perp}}{q|\vec{B}|} \quad (11.6)$$

y paso

$$p = \frac{2\pi v_{\parallel} m}{qB} \quad (11.7)$$

Donde  $v_{\parallel}$  y  $v_{\perp}$  son los módulos de las componentes paralela y perpendicular a la velocidad con respecto al campo magnético, respectivamente.

---

### Recomendaciones

- Nótese que  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  son dos vectores que forman un plano. Perpendicular a éste, aparece la fuerza de Lorentz.
- Debido a la naturaleza de la fuerza de Lorentz, la energía cinética de la carga es siempre constante (ie. la fuerza de Lorentz no realiza trabajo sobre la carga). Debido a lo anterior, el módulo de la velocidad es siempre constante.
- Cuando se enfrente a problemas de carga puntuales en zonas de campo magnético constante, siempre tenga en cuenta que esta se moverá en una circunferencia o en una espiral.
- En caso de problemas entre fuerza entre circuitos, tenga en cuenta que debe determinar el campo magnético que provoca un circuito en específico y luego aplicar la Ecuación 11.4 sobre la corriente que circula en el otro circuito.

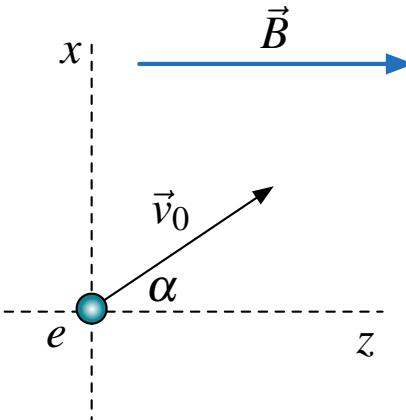


## II. Problemas Propuestos

### Problema 11.1

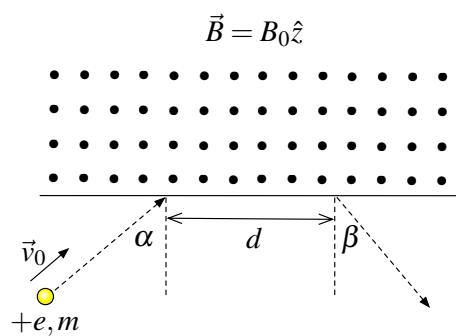
Un positrón de carga  $+e$  y masa  $m$  es disparado desde el origen de un sistema de coordenadas con una velocidad  $\vec{v}_0$  formando un ángulo  $\alpha$  entre la velocidad y el eje  $z$ . Si el espacio existe un campo magnético constante  $\vec{B} = B\hat{z}$

- La velocidad y la posición de la partícula en el tiempo.
- Demuestre que el positrón describe una trayectoria helicoidal. Encuentre su radio y su paso.



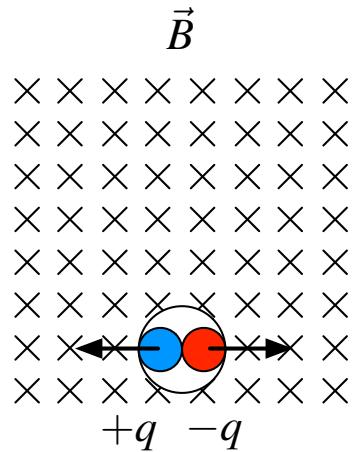
### Problema 11.2

Un protón se dispara a una zona de campo magnético constante tal como se muestra en la figura. Si el protón de carga  $+e$  y masa  $m$  incide con un ángulo  $\alpha$  a la zona de campo, determine el valor de la distancia  $d$  que recorre y el ángulo  $\beta$  con el cual sale de la zona de campo (ver Figura).



### Problema 11.3

Una partícula neutra se encuentra sometida a campo magnético constante  $\vec{B} = B_0\hat{z}$ . En  $t = 0$  la partícula se rompe ("decae") en dos cargas  $+q$  y  $-q$  con igual masa  $m$ , las cuales salen disparadas con velocidades en direcciones contrarias. Determine el tiempo en ambas partículas vuelven a chocar (exprese su resultado en función de  $q$ ,  $m$  y  $B$  e ignore la interacción coulombiana entre ellas).

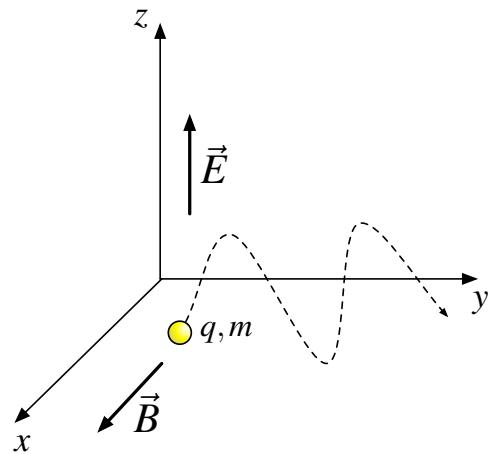


## CAPÍTULO 11. FUERZA DE LORENTZ

### Problema 11.4

Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  que está sometida a la influencia simultánea de un campo eléctrico oscilatorio en la dirección vertical  $\vec{E} = E_0 \cos(\Omega t) \hat{z}$  y un campo magnético constante en la dirección horizontal  $\vec{B} = B_0 \hat{x}$  como se ilustra en la figura. Si la partícula parte en el reposo,

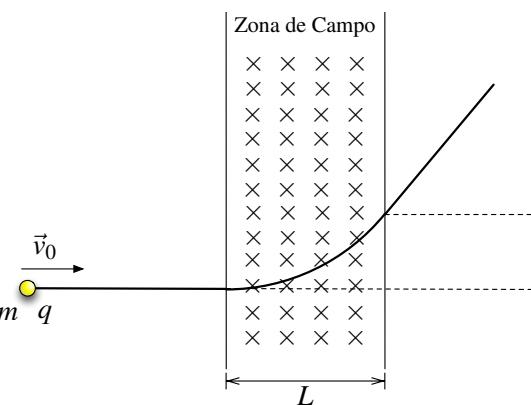
- Encuentre las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la aceleración de la partícula.
- Encuentre la velocidad en función del tiempo.
- Encuentre la trayectoria y discuta que ocurre cuando la frecuencia es  $\Omega = \frac{qB}{m}$



### Problema 11.5

Una partícula de masa  $m$ , con carga  $q > 0$ , ingresa horizontalmente a una región de ancho  $L$ , donde existe un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B \hat{z}$  como se indica en la figura.

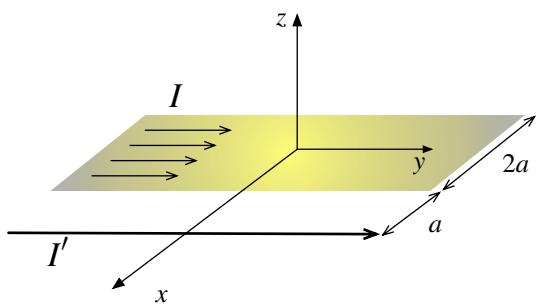
- Calcule el valor crítico de la rapidez inicial  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$  de la partícula que le permite decidir si ella atraviesa la región, o se devuelve.
- Determine la trayectoria que realiza la partícula para los casos en que la rapidez inicial sea mayor o menor que el valor crítico encontrado anteriormente.
- Suponga ahora que  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x} + v_B \hat{z}$ , determine la altura con que sale la carga de la zona de campo (considere distintos casos a partir del valor encontrado en la parte anterior).



### Problema 11.6

Considere una cinta de ancho  $2a$  por la cual circula una corriente  $I$  homogéneamente distribuida. A una distancia  $a$  de ella, circula un cable con corriente  $I'$  (ver figura).

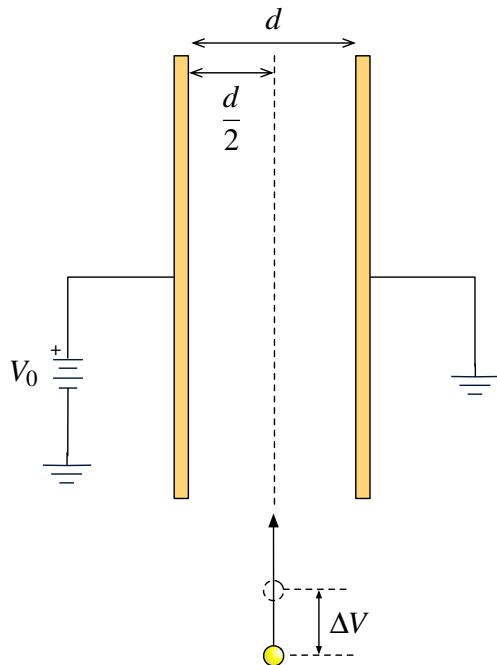
- Encuentre el campo magnético en todo el plano  $x > a$ .
- Determine la fuerza por unidad de largo que siente la cinta debido al cable.



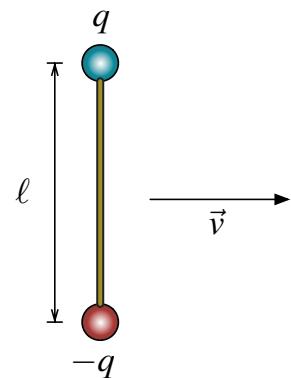
**Problema 11.7**   

Un electrón de carga  $-e$  y masa  $m$  se acelera a través de una diferencia de potencial de  $\Delta V = 10^4$  [V] antes de entrar a una región limitada por dos placas paralelas que tienen una diferencia de potencial igual a  $V_0 = 100$  [V], separadas por una distancia  $d = 1$  [mm] y de largo  $L = 1$  [m]. El electrón entra a esta región en un plano equidistante de las placas. Ignorando efectos de bordes:

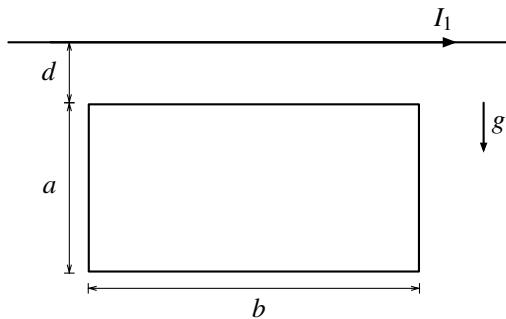
- ¿Cuál es la velocidad del electrón al llegar a la región limitada por las dos placas?
- ¿Qué campo magnético  $\vec{B}$  se debe aplicar en la región limitada por las dos placas para que el electrón continúe con trayectoria rectilínea? Indique la dirección de dicho campo en la figura.
- Suponga que, una vez aplicado el campo calculado anteriormente, suponga que cuando el electrón ha recorrido una distancia  $L/2$  se quita la fuente de  $V_0 = 100$  [V]. ¿Alcanza a salir el electrón de las placas paralelas?.

**Problema 11.8**   

Una barra de largo  $\ell$  tiene dos cargas puntuales  $+q$  y  $-q$  sujetadas fuertemente en sus extremos. ¿Cuál debe ser el valor de la velocidad  $\vec{v}$  (perpendicular a la barra) que debe avanzar la barra de modo que las dos cargas no sientan fuerza entre ellas?.

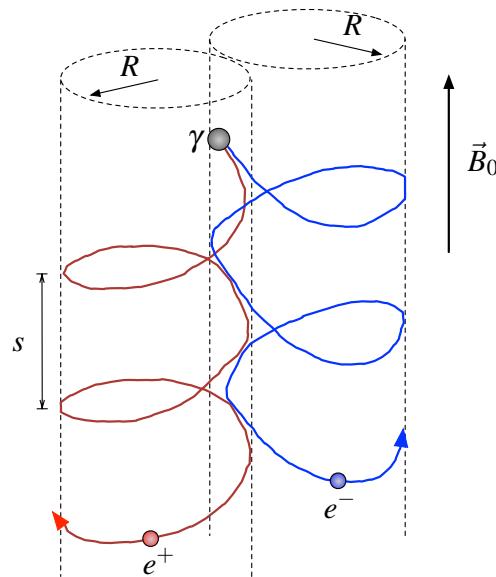
**Problema 11.9**   

Suponga que el sistema que se ve en la figura se encuentra en un plano vertical, donde  $g$  es la aceleración de gravedad. A través del alambre rectilíneo infinito circula una corriente  $I_1$  en la dirección indicada. La espira rectangular, de dimensiones  $a$  y  $b$ , está ubicada paralela al alambre, a una distancia  $d$  de él y posee una masa  $m$ . Encuentre la corriente  $I_2$  que debe circular por la espira (indique el sentido de ella), para que permanezca en reposo en la posición señalada.



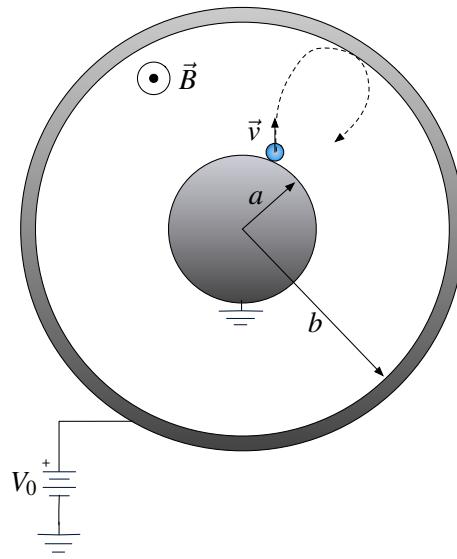
**Problema 11.10** ★ ✓ ⓘ

En un espacio de campo magnético constante  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ , un fotón  $\gamma$  experimenta un decaimiento  $\gamma \rightarrow e^- + e^+$  donde  $e^-$  representa al electrón y  $e^+$  a un positrón. La carga del electrón es  $-e < 0$  y la del positrón es  $+e$ ; ambos tienen igual masa  $m$ . Como resultado del decaimiento, ambas partículas adquieren trayectorias espirales como se muestra en la figura. El radio de los mantes cilíndricos por los cuales transita cada partícula es  $R$ , y el paso axial en una vuelta es  $s$ . Determine la rapidez con la que se mueve cada partícula.

**Problema 11.11** ★ ✓ ⓘ

Considere dos cables coaxiales de radios  $a$  y  $b$  como muestra la figura, cuyo espacio interior se encuentra vacío. Los cables se encuentran separados a una diferencia de potencial  $V_0$  y entre ellos existe un campo magnético homogéneo  $\vec{B} = B \hat{z}$ . Desde el cilindro interior se libera un electrón de carga  $-e$  y masa  $m$ . El objetivo del problema es encontrar el valor máximo de  $B$  de modo que el electrón liberado no choque con el cilindro exterior (alcance a dar la vuelta perfectamente). Asuma que la velocidad del electrón tiene solamente componentes en el plano de la figura.

- Encuentre el momentum angular del electrón en función de carga  $e$ , el campo magnético  $B$ , y la distancia al eje del cilindro interior  $r$  y momentum angular inicial  $L_0$ .
- Asumiendo que los electrones salen con una velocidad inicial  $v_0 \approx 0$ , encuentre la velocidad que tendrá en  $r_{\max}$ , es decir en  $r = b$ .
- Mediante conservación de energía, halle otra expresión para la velocidad recién calculada. A partir de este encuentre el valor que debería tener  $B$ , de modo que a los más el electrón volviese en  $r = b$ .



### III. Soluciones

#### Solución 11.1

Lo primero que es necesario para abordar este problema es plantear la fuerza que sentirá la carga por Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

La velocidad inicial sólo tienen componentes en  $x$  y  $z$ , de hecho según la figura

$$v_{0x} = v_0 \sin \alpha \quad v_{0z} = v_0 \cos \alpha$$

Por otro lado, la fuerza inicialmente apunta en

$$\vec{F}(t=0) = e\vec{v}(0) \times \vec{B} = e(v_{0x}\hat{x} + v_{0z}\hat{z}) \times B\hat{z} = -eBv_{0x}\hat{y}$$

Este cálculo afirma que en  $t = 0$  la carga siente una fuerza en la dirección  $y$ , luego esto implicará que para  $t > 0$  la velocidad tendrá tres componentes. Se plantea entonces las ecuaciones de movimiento con

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B} = e(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}) \times B\hat{z} = eB(-v_x\hat{y} + v_y\hat{x})$$

Luego, aplicando Newton  $\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}}$  se obtiene que

$$m(\dot{v}_x\hat{x} + \dot{v}_y\hat{y} + \dot{v}_z\hat{z}) = eB(-v_x\hat{y} + v_y\hat{x})$$

analizando por componentes se tiene

$$\dot{v}_z = 0 \quad \dot{v}_y = -\frac{eB}{m}v_x \quad \dot{v}_x = \frac{eB}{m}v_y$$

De la primera ecuación se deduce  $v_z(t) = v_{0z}$  (constante), por otro lado, derivando nuevamente la segunda ecuación y reemplazando la tercera se puede llegar a una ecuación diferencial para  $v_y$

$$\ddot{v}_y = -\omega^2 v_y \implies \ddot{v}_y + \omega^2 v_y = 0$$

donde se ha definido  $\omega = \frac{eB}{m}$ . La ecuación anterior es un oscilador armónico, por lo que su solución es de la forma

$$v_y(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son constantes por determinar. Aplicando condiciones iniciales

$$v_y(0) = A_1 = 0$$

por otro lado la constante  $A_2$  puede ser despejada de

$$\dot{v}_y(0) = -\frac{eB}{m}v_x(0) = -\omega v_{0x} \implies \dot{v}_y(0) = A_2\omega \implies A_2 = -v_{0x}$$



## CAPÍTULO 11. FUERZA DE LORENTZ

A partir de esto se tiene que las velocidades en el tiempo son

$$v_z(t) = v_0 \cos \alpha \quad v_y(t) = -v_0 \sin \alpha \sin \omega t \quad v_x(t) = v_0 \sin \alpha \cos \omega t$$

Integrando nuevamente para encontrar la posición en el tiempo, se obtiene que

$$z(t) = v_0 t \cos \alpha \quad y(t) = -\frac{v_0}{\omega} \sin \alpha (1 - \cos \omega t) \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \alpha \sin \omega t$$

La ecuación anterior es la forma paramétrica de una trayectoria helicoidal. Manipulando algebraicamente el resultado anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left( y + \frac{v_0}{\omega} \sin \alpha \right)^2 &= \left( \frac{v_0}{\omega} \sin \alpha \right)^2 \cos^2 \omega t \\ x^2 &= \left( \frac{v_0}{\omega} \sin \alpha \right)^2 \sin^2 \omega t \end{aligned}$$

Sumando las expresiones anteriores

$$x^2 + \left( y + \frac{v_0}{\omega} \sin \alpha \right)^2 = \left( \frac{v_0}{\omega} \sin \alpha \right)^2$$

El resultado obtenido es el de una helicoide de radio  $R = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} = \frac{v_0 m \sin \alpha}{eB}$  (nótese el hecho que también coincide con el radio de una circunferencia, pero en este caso  $z$  aumenta linealmente en el tiempo). Cabe destacar que la helicoide no está centrada, ésta se encuentra desplazada en  $y = -\frac{v_0 m}{eB}$ .

Finalmente, para encontrar el paso de la hélice se tiene que

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{2\pi}{p} v_0 \cos \alpha = \frac{eB}{m} \implies p = \frac{2\pi v_0 \cos \alpha m}{eB}$$

### Solución 11.7

a) Para determinar la velocidad es necesario hacer un balance energético de la siguiente forma

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - eV_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - eV_f$$

Dado que  $v_i = 0$  y que  $\Delta V = V_f - V_i$ , se obtiene que

$$e\Delta V = \frac{1}{2}mv_f^2 \implies v_f = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}}$$

b) Para que el electrón continúe una trayectoria rectilínea es necesario que la fuerza aplicada sobre el electrón sea nula. Para ello, es necesario aplicar la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$



Como sistema de referencia se tomara  $\hat{x}$  apuntando de izquierda a derecha,  $\hat{y}$  de abajo hacia arriba y  $\hat{z}$  saliendo de la hoja de papel. El campo eléctrico puede ser determinado fácilmente debido a que dentro de un condensador

$$V_0 = \int_0^d E dx \implies \vec{E} = \frac{V_0}{d} \hat{x}$$

Luego

$$\vec{F} = -e \left( \frac{V_0}{d} \hat{x} + v_f \hat{y} \times B \hat{z} \right) = 0 \implies B = -\frac{V_0}{v_f d} = -\frac{V_0}{d} \sqrt{\frac{m}{2e\Delta V}}$$

Dado que  $B < 0$  esto significa que apunta en el sentido inverso a  $\hat{z}$ , es decir, entra a la hoja de papel.

- c) Una vez apagada la fuente de voltaje, el electrón seguirá una circunferencia de radio

$$R = \frac{eB}{mv_f} = 0,2m$$

dado que el radio es menor que la distancia que le queda por salir, el electrón chocará con una de las paredes.

### Solución 11.9

Para que el sistema esté estático, se debe cumplir que

$$\sum \vec{F}_{espira} = 0$$

Se comenzará calculando la fuerza magnética que ejerce el hilo sobre la espira. Para ello se usa la expresión

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Se asumirá conocido el campo eléctrico que provoca un cable infinito, el cual es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\theta}$$

Para usar la expresión anterior, se debe previamente asumir un sentido a la intensidad de corriente en la espira ( $I_2$ ). Se hace el puesto que  $I_2$  tiene sentido horario, en el caso que no sea así el resultado debería entregar un  $I_2$  negativo. Como sistema de referencia se tomará que la espira yace sobre el plano  $xy$ , en el cual  $\vec{B}$  apunta según  $\hat{z}$  (ver Figura 11.1). Considerando lo anterior y la ecuación

$$d\vec{F} = I_2 d\vec{l} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \hat{z} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi y} (\vec{dl} \times \vec{z})$$

A continuación se hace el cálculo por segmento de la espira



## CAPÍTULO 11. FUERZA DE LORENTZ

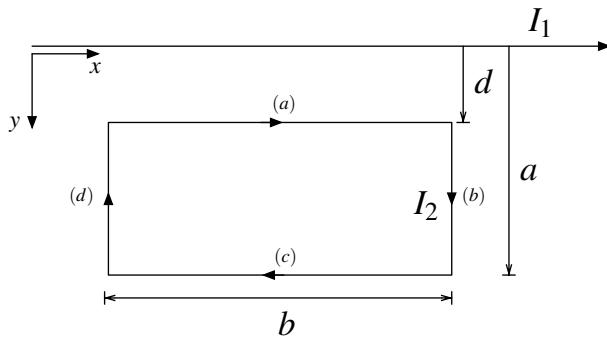


Figura 11.1: Corrientes en la espira y en el cable.

$$(a) \quad y = d, d\vec{l} = dx\hat{x}$$

$$d\vec{F}_a = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} (dx\hat{x} \times \hat{z}) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dx\hat{y}$$

$$(b) \quad y \in [d, d+a], d\vec{l} = dy\hat{y}$$

$$d\vec{F}_b = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi y} (dy\hat{y} \times \hat{z}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi y} dy\hat{x}$$

$$(c) \quad y = d+a, d\vec{l} = dx\hat{x}$$

$$d\vec{F}_c = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} (dx\hat{x} \times \hat{z}) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} dx\hat{y}$$

$$(d) \quad y \in [d, d+a], d\vec{l} = dy\hat{y}$$

$$d\vec{F}_d = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi y} (-dy\hat{y} \times \hat{z}) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi y} dy\hat{x}$$

A continuación cada uno de los valores para los diferenciales de  $\vec{F}$  se integran de modo de conocer la fuerza en cada región:

$$(a)$$

$$\vec{F}_a = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{y} \int_0^b dx = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} b\hat{y}$$

$$(b)$$

$$\vec{F}_b = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \hat{x} \int_d^{d+a} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \hat{x}$$



(c)

$$\vec{F}_c = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} \hat{y} \int_b^0 dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} b \hat{y}$$

(d)

$$\vec{F}_b = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \hat{x} \int_{d+a}^d \frac{dy}{y} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \hat{x}$$

Con lo anterior se calcula la fuerza total

$$\begin{aligned} \vec{F}_T &= \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c + \vec{F}_d = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} b \hat{y} + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \hat{x} + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} b \hat{y} - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \hat{x} \\ \vec{F}_T &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left( -\frac{1}{d} + \frac{1}{d+a} \right) \hat{x} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi d(a+d)} \hat{x} \end{aligned}$$

Dónde

$$\vec{F}_b + \vec{F}_d = 0$$

lo que anula todas las fuerzas en el eje  $\hat{x}$ . Finalmente, además de la fuerza calculada la espira esta sometida a su peso

$$\sum \vec{F}_{\text{espira}} = 0 \iff Mg - \frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi d(a+d)} = 0$$

De dónde es posible despejar el valor de  $I_2$  como

$$I_2 = \frac{2\pi Mgd(a+d)}{\mu_0 I_1 ab}$$

### Solución 11.10

Las cargas moviéndose dentro de campos magnéticos se mueven siguiendo una circunferencia (velocidad dentro de un plano) o en una espiral (velocidad en tres dimensiones). Para hallar la rapidez del electrón, primero se impone la velocidad en coordenadas cilíndricas

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$$

debido a que  $r = R \implies \dot{r} = 0$ , Por otro lado, se tiene que

$$\vec{F} = m\vec{a} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

entonces como  $B = B_0\hat{z}$ , se tiene que

$$m(-R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}) = -eB_0R\dot{\theta}\hat{r}$$



## CAPÍTULO 11. FUERZA DE LORENTZ

de lo último se deduce que  $R\ddot{\theta} = \ddot{z} = 0$  y además

$$\dot{\theta} = \frac{eB_0}{m}$$

Para terminar el problema está faltando el valor de  $\dot{z}$ , que puede ser determinado mediante el paso  $s$  que tiene la espiral (cada  $2\pi$  radianes el electrón baja  $s$  metros) de la siguiente forma

$$\dot{z} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{s}{2\pi} \frac{eB_0}{m}$$

Finalmente la rapidez vale

$$|\vec{v}| = \sqrt{(R\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} = \frac{eB_0}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{s}{2\pi}\right)^2}$$

El resultado es el mismo para el positrón, con la única diferencia que como su carga es  $+e$  el giro será en el sentido inverso al del electrón.

### Solución 11.11

- a) Previamente se debe notar que la fuerza que afecta al electrón en cualquier punto es  $\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$ , donde  $\vec{B} = B\hat{z}$ ,  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$  y  $\vec{v} = r\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ , luego  $\vec{F} = -e(-r\dot{B}\hat{\theta} + r\dot{\theta}B\hat{r} + E(r)\hat{r})$ . Para encontrar el momentum angular, se usa el hecho que

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \implies \frac{d\vec{L}}{dt} = r\hat{r} \times (e\dot{r}B\hat{\theta} - e(r\dot{\theta}B + E(r))\hat{r}) = eBr \frac{dr}{dt} \hat{z}$$

Integrando a ambos con respecto al tiempo se obtiene que

$$\int_{L_0}^{L(r)} dL = eB \int_a^r r dr \implies L(r) = L_0 + eB \cdot \frac{r^2 - a^2}{2}$$

- b) Por otro lado

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \implies |\vec{L}| = mr|\vec{v}| \implies L(r) = mr v$$

sumando al hecho que  $v_0 \approx 0 \implies L_0 \approx 0$  se deduce que

$$mr v = eB \cdot \frac{r^2 - a^2}{2} \implies v(b) = eB \frac{(b^2 - a^2)}{2mb}$$

- c) Por análisis energético

$$U_i + K_i = U_f + K_f \implies -eV(a) + \frac{1}{2}mv_0^2 = -eV(b) + \frac{1}{2}mv^2(b)$$



## CAPÍTULO 11. FUERZA DE LORENTZ

Dado que  $V(b) - V(a) = V_0$  y  $v_0 \approx 0$  se tiene

$$eV_0 = \frac{1}{2}mv^2(b) \implies v(b) = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$$

Finalmente se deduce que el valor de campo magnético crítico es  $B_c$

$$eB_c \frac{(b^2 - a^2)}{2mb} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} \implies B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 11.2

- Intente determinar la ecuación de la trayectoria que sigue la carga.
- Recuerde que la trayectoria a la cual debería llegar es una circunferencia.

### Indicación 11.3

- Suponiendo conocida la trayectoria circunferencial, es posible determinar la velocidad angular de ambas cargas.
- Note que ambas cargas vuelven a juntarse cuando han recorrido  $\pi$  radianes.

### Indicación 11.4

- Plantee la fuerza de Lorentz según  $\vec{F} = m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
- Separe la ecuación anterior según cada coordenada y llegue a tres ecuaciones de movimiento por cada eje. Luego integre cada ecuación para ir obteniendo desde la aceleración la velocidad y la trayectoria.
- Este problema puede ser algebraicamente trabajoso.

### Indicación 11.5

- Recuerde la trayectoria que realizará la partícula al entrar a la zona de campo (circunferencia).
- Relacione el radio  $R$  de la trayectoria con el ancho de la zona de campo.
- Determinar el tiempo que se encuentra la partícula en la zona de campo puede ser muy útil para determinar cuánto se eleva la carga.

### Indicación 11.6

- Es necesario usar Biot-Savart para determinar el campo que genera la cinta y el cable.



- Dependiendo de como aborde el problema, puede ser útil el hecho que en la cinta se tiene que el vector superficial de corriente es  $\vec{K} = \frac{I}{2a}\hat{y}$ .
- Recuerde que  $d\vec{F} = I'd\vec{l} \times \vec{B}$  donde  $I'$  es la corriente que pasa por el cable y  $\vec{B}$  el campo que provoca la cinta sobre el alambre.

**Indicación 11.8**  

- Tome una carga (positiva o negativa) y analice las fuerzas actuando sobre ellas.
- Note que están actuando dos fuerzas sobre la carga: la electrostática y la magnética.



## V. Respuestas

Problema	Respuestas
<b>11.1</b>	<p>a) <math>v_z(t) = v_0 \cos \alpha</math>    <math>v_y(t) = -v_0 \sin \alpha \sin \omega t</math>    <math>v_x(t) = v_0 \sin \alpha \cos \omega t</math></p> <p>(P)      <math>z(t) = v_0 t \cos \alpha</math>    <math>y(t) = -\frac{v_0}{\omega} \sin \alpha (1 - \cos \omega t)</math>    <math>x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \alpha \sin \omega t</math></p> <p>b) <math>R = \frac{v_0 m \sin \alpha}{eB}</math> y <math>p = \frac{2\pi v_0 m \cos \alpha}{eB}</math>.</p>
<b>11.2</b>	$\beta = \alpha$ , $d = 2 \frac{m v_0}{eB} \cos \theta$
<b>11.3</b>	$t = \frac{\pi m}{qB}$
<b>11.4</b>	<p>a) <math>\ddot{x}(t) = 0</math>,</p> $\dot{y}(t) = \frac{qB_0 \dot{z}}{m},$ $\ddot{z}(t) = \frac{q}{m} (E_0 \cos(\Omega t) - B_0 \dot{y})$ <p>b) <math>\dot{x}(t) = 0</math>,</p> $\dot{y}(t) = \frac{q^2 B_0 E_0}{m^2 (\frac{qB_0}{m} - \Omega^2)} (\cos(\Omega t) - \cos \frac{qB_0}{m} t),$ $\dot{z}(t) = \frac{qE_0}{m (\frac{qB_0}{m} - \Omega^2)} (\frac{qB_0}{m} \sin(\frac{qB_0}{m} t) - \Omega \sin(\Omega t))$ <p>c) <math>x(t) = 0</math>,</p> $y(t) = \frac{q^2 E_0 B_0}{m^2 (\frac{qB_0}{m} - \Omega^2)} (\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} - \frac{m}{qB_0} \sin \frac{qB_0}{m} t),$ $z(t) = \frac{q^2 E_0}{m (\frac{qB_0}{m} - \Omega^2)} (\cos(\Omega t) - \cos \frac{qB_0}{m} t)$ <p>Si <math>\Omega = qB_0/m</math> la partícula entra en resonancia y la amplitud de su movimiento se vuelve infinita.</p>
<b>11.5</b>	<p>a) <math> v_{critico}  = \frac{qLB}{m}</math></p> <p>b) Si la velocidad es mayor que ese <math>v_{critico}</math>, la carga escapa de la zona de campo, sino la carga se devuelve siguiendo una trayectoria de semicircunferencia.</p> <p>c) <math>h = \begin{cases} \frac{\pi m}{qB} v_B &amp; v_0 &lt; v_{critico} \\ \frac{m}{qB} v_B \arcsin \frac{qLB}{v_0 m} &amp; v_0 &gt; v_{critico} \end{cases}</math></p>



**Problema    Respuestas****11.6**

a)  $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right) \hat{z}$

b)  $\frac{d\vec{F}}{dy} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi a} \ln(3) \hat{x}$

**11.7**

a)  $v = 6 \cdot 10^7$  [m/s].

b)  $|B| = \frac{1}{600}$  [T]. El campo magnético debe apuntar hacia dentro de la hoja.

c) El electrón choca con una de las placas.

**11.8**

La velocidad debe ser igual a  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$  (velocidad de la luz).

**11.9**

$I_2 = \frac{2mgd(a+d)}{\mu_0 I_1 ab}$ , la corriente  $I_2$  debe tener sentido horario.

**11.10**

$$|\vec{v}| = \frac{eB_0}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{s}{2\pi}\right)^2}$$

a)  $L(r) = L_0 + eB \cdot \frac{r^2 - a^2}{2}$

**11.11**

b)  $v(b) = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$

c)  $B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$



## CAPÍTULO 11. FUERZA DE LORENTZ



# Ley de Ampère

## I. Resumen Teórico

---

### Ley de Ampère (Forma Integral)

La ley circuital de Ampère propone que para cualquier camino cerrado  $\Gamma$  se cumple que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlazada}} \quad (12.1)$$

Equivalentemente

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Omega} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (12.2)$$

Donde  $\Omega$  es la superficie definida por  $\Gamma$ .

---

### Ley de Ampère (Forma Diferencial)

En su forma diferencial, la ley dice que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (12.3)$$

---

### Ley de Gauss Magnética

El cualquier campo magnético  $\vec{B}$  satisface que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (12.4)$$

Lo anterior implica que no existen los monopolos magnéticos.

## Recomendaciones

- La ley de Ampère es el análogo a la ley de Gauss en electrostática. La ley de Ampère es sumamente poderosa, y una de sus aplicaciones (gracias a la simetría de algunos problemas) es poder determinar campos magnéticos.
- ¿Cuándo usar Ley de Ampère para determinar campos magnéticos?, al igual que la ley de Gauss los casos son limitados, no siempre puede usarse. Una lista de posibles casos es
  - Cables infinitos con corriente  $I$
  - Cilindros macizos infinitos con una densidad de corriente axial constante o de la forma  $\vec{J} = J(r)\hat{z}$ .
  - Cilindros macizos infinitos con una densidad de corriente azimutal constante o de la forma  $\vec{J} = J(r)\hat{\theta}$ .
  - Superficies cilíndricas infinitas con una densidad superficial de corriente axial o azimutal constante.
  - Planos infinitos con densidad superficial constante.
  - Bloque infinito (superposición de planos) con una densidad de corriente dependiente de la altura del bloque.
  - Bobinas/Solenoides infinitos.
  - Toroides.
- La forma diferencial de la Ley de Ampère suele utilizarse cuando la incógnita es la densidad de corriente  $\vec{J}$  que genera un campo magnético conocido.



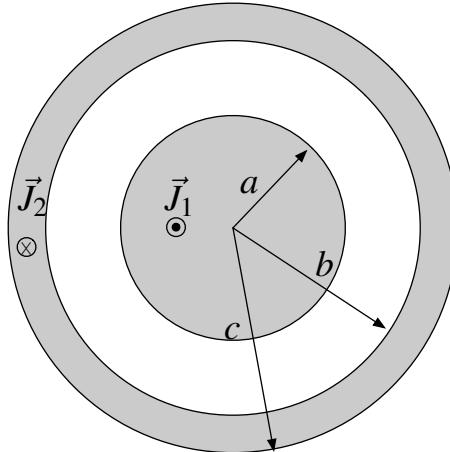
## II. Problemas Propuestos

### Problema 12.1



Un cable coaxial muy largo consiste en un cilindro sólido con un radio interior de radio  $a$ , rodeado por un cascarón cilíndrico conductor concéntrico de radio interno  $b$  y exterior  $c$ . El conductor interior tiene una densidad de corriente no uniforme  $\vec{J}_1 = \alpha r \hat{z}$  donde  $\alpha$  es una constante. El cilindro exterior tiene una densidad de corriente  $\vec{J}_2 = -\beta \hat{z}$  donde  $\beta$  es una constante positiva. Los conductores llevan una igual y opuesta corriente de magnitud  $I_0$ . Entre ambos conductores existe vacío.

- Encuentre los valores  $\alpha$  y  $\beta$  en términos de  $a, b, c$  y  $I_0$
- Determine el campo magnético en todo el espacio. Exprese sus resultados en términos de  $a, b, c$  y  $I_0$ . Realice un gráfico  $|\vec{B}|$  con respecto a la distancia desde el eje de simetría  $r$ .



### Problema 12.2

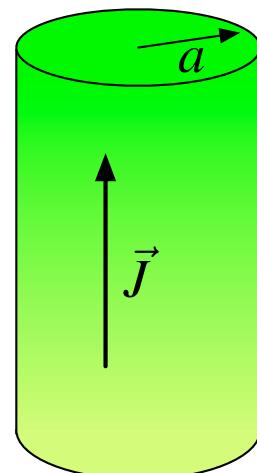


Dentro de una tubería metálica cilíndrica de radio  $a$  circula un fluido viscoso con una cierta densidad de carga. En los puntos al interior de la tubería se ha determinado que el campo magnético vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right) \hat{\theta}$$

donde  $J_0$  es una constante y  $r$  es la distancia del eje del cilindro. Determine

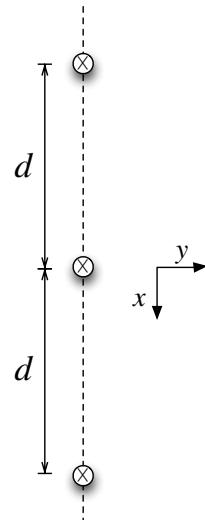
- El vector densidad de corriente y la intensidad de corriente eléctrica dentro de la tubería.
- El campo magnético fuera de la tubería.
- El valor de la densidad superficial de corriente  $\vec{K}$  que debe circular por el borde de la tubería para que el campo magnético en el exterior sea nulo (suponga que  $\vec{K}$  se distribuye uniformemente por la superficie).



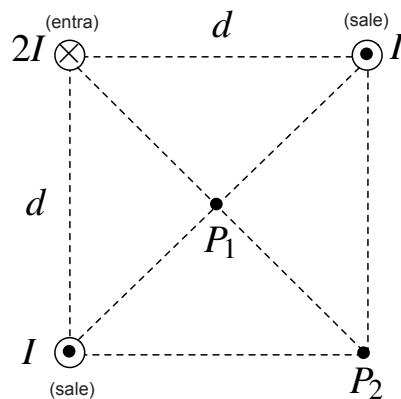
**Problema 12.3**   

Considere 3 alambres rectos de sección transversal despreciable, infinitamente largos y separados entre sí una distancia  $d$ . Cada alambre lleva una corriente  $I$ , en la misma dirección (perpendicular al plano de la hoja y hacia adentro).

- Encuentre la ubicación de los dos puntos donde el campo magnético total se anula.
- Suponga que el alambre central se desplaza rígidamente una pequeña distancia  $y$  ( $y \ll d$ ) en dirección perpendicular a la línea sobre la que están dispuestos inicialmente los alambres, mientras los otros dos alambres permanecen fijos. Calcule aproximadamente la fuerza neta por unidad de largo que actúa sobre el alambre desplazado, al primer orden de  $y$ .

**Problema 12.4**   

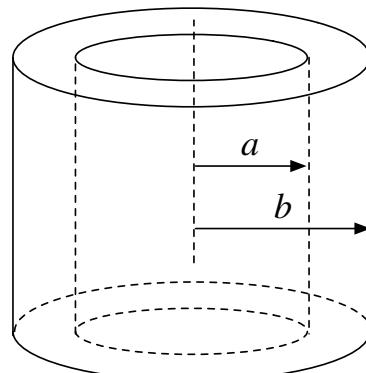
Tres alambres infinitos están ubicados mutuamente paralelos orientados perpendicularmente al plano de la hoja y ubicados en los vértices de un cuadrado de lado  $d$ . Uno de ellos lleva corriente  $2I$  que entra al plano, mientras que los otros llevan corriente  $I$  que emerge del plano de la hoja. Calcule el vector campo magnético en los puntos  $P_1$  y  $P_2$ .

**Problema 12.5**   

Se tiene un conductor en la forma de una capa cilíndrica recta, infinita, de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ . Este conductor tiene una densidad de corriente que, expresada en coordenadas cilíndricas, es:

$$\vec{J}(a \leq r \leq b) = \frac{\alpha}{r} \hat{\theta} + \beta \hat{z}$$

Con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes conocidas. Obtenga el campo magnético en todas partes.



**Problema 12.6**   

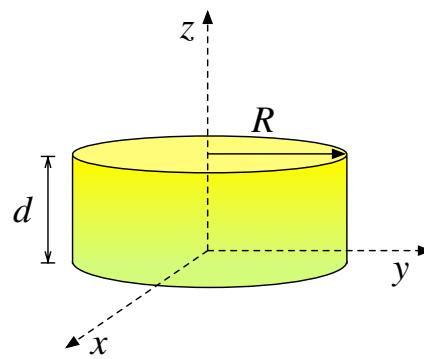
Sobre el plano  $xy$  se encuentra una moneda magnetizada muy pequeña de radio  $R$  y espesor  $d$ . Experimentalmente sólo se conoce la componente axial del campo magnético dentro de la moneda, dado por

$$B_z = B_0(1 + \kappa z^2)$$

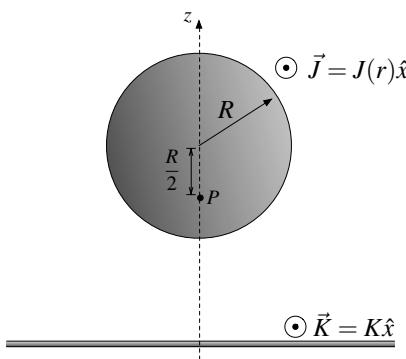
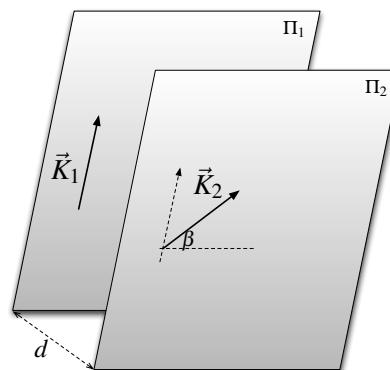
donde  $\kappa$  es una constante. Suponiendo que el campo magnético posee simetría axial y no posee componente en  $\hat{\theta}$ , determine la intensidad corriente que circula dentro de la moneda.

**Problema 12.7**   

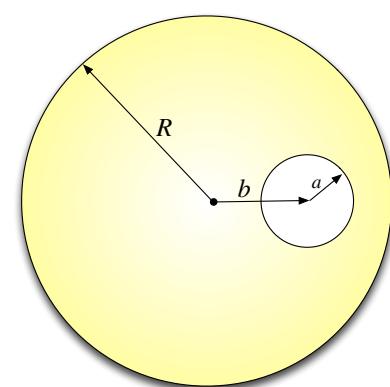
Considere dos planas metálicas infinitas paralelas  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , separadas una distancia  $d$ . En sus respectivas placas fluyen corrientes en direcciones arbitrarias, las cuales tienen una ángulo  $\beta$  entre ellas como se ilustra en la Figura. Encuentre la densidad de fuerza por unidad de área e indique si la fuerza es repulsiva o atractiva a partir de los distintos valores de  $\beta$ .

**Problema 12.8**   

Se tiene dos corrientes, ambas con igual sentido. Una de ellas es una corriente plana e infinita de densidad lineal  $K$  y otra es una corriente cilíndrica infinitamente larga cuya densidad es  $J(r) = J_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ . Encuentre el valor de  $J_0$  en función de  $K$  que hace que el campo magnético resultante en el punto  $P$  ubicado a una distancia  $\frac{R}{2}$  del centro del cilindro sea nulo.

**Problema 12.9**   

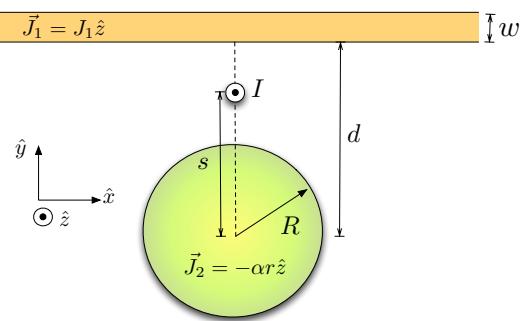
Un cable de cilíndrico de radio  $R$  lleva una densidad de corriente  $\vec{J} = J_0 \hat{k}$ . El cable tiene un hoyo cilíndrico de radio  $a$  paralelo al eje del cilindro a una distancia  $b$  de él. Muestre que el campo magnético dentro de la cavidad es uniforme, y encuentre su valor.



## CAPÍTULO 12. LEY DE AMPÈRE

### Problema 12.10

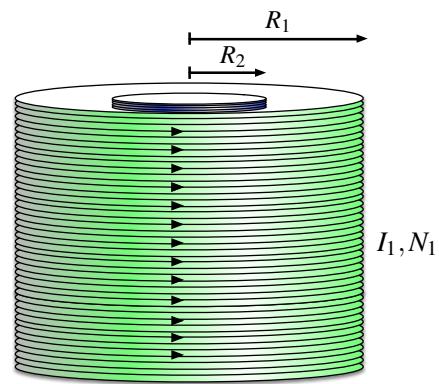
Considere 3 distribuciones como se muestran en la figura. Un bloque de ancho  $w$  lleva un densidad volumétrica uniforme de corriente  $\vec{J}_1 = J_1 \hat{z}$ . Un cable infinito de radio  $R$  lleva una densidad de corriente no uniforme  $\vec{J}_2 = -\alpha r \hat{z}$ , donde  $r$  es la distancia desde el eje del cilindro y  $\alpha$  una constante. El bloque se encuentra a una distancia  $d$  del cilindro. Si se coloca un alambre con corriente  $I$  a una distancia  $s$  del centro del cable ( $s < d$ ), determine la fuerza por unidad de largo que siente el cable con corriente  $I$ .



### Problema 12.11

Considere dos bobinas muy largas de radios  $R_1$  y  $R_2$ , con  $N_1$  y  $N_2$  vueltas por unidad de largo, respectivamente. La bobina de radio  $R_2$  se encuentra inserta dentro de la bobina de radio  $R_1$  compartiendo su mismo eje. Si por la bobina exterior circula una corriente  $I_1$ , determine:

- La corriente  $I_2$  que circula por la bobina interior, sabiendo que el campo magnético para  $r < R_2$  es nulo.
- Para la corriente encontrada en la parte anterior, encuentre la fuerza por unidad de área que siente la bobina interior.



### III. Soluciones

#### Solución 12.1

- a) Usando la definición de corriente eléctrica a partir de la densidad de corriente, se obtiene que

$$I_0 = \iint \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \alpha r \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = \frac{2\pi\alpha a^3}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3I_0}{2\pi a^3}$$

$$-I_0 = \iint \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_b^c -\beta \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = -\beta \pi (c^2 - b^2) \Rightarrow \beta = \frac{I_0}{\pi(c^2 - b^2)}$$

- b) Por otro lado, el campo magnético es por ley de Ampere

- $r < a$ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \Rightarrow B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^r \alpha r \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = \mu_0 \frac{2\pi}{3} \alpha r^3 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 r^2}{2\pi a^3} \hat{\theta}$$

- $a < r < b$ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \Rightarrow B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a \alpha r \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = I_0 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{\theta}$$

- $b < r < c$ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \Rightarrow B(r) \cdot 2\pi r = I_0 - \int_0^{2\pi} \int_b^r \beta \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \hat{\theta}$$

- $r > c$ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \Rightarrow B(r) \cdot 2\pi r = I_0 - I_0 = 0 \Rightarrow \vec{B} = 0$$

- c) Un gráfico aproximado es el que se muestra en la Figura 12.1

#### Solución 12.3

- a) Para iniciar el problema se debe calcular el campo magnético que produce un cable que lleva corriente. Usando Ley de Ampère sobre un camino  $\Gamma$  (circunferencia de radio  $r$  recorrida en sentido anti-horario).

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow -B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (-\hat{\theta})$$



## CAPÍTULO 12. LEY DE AMPÈRE

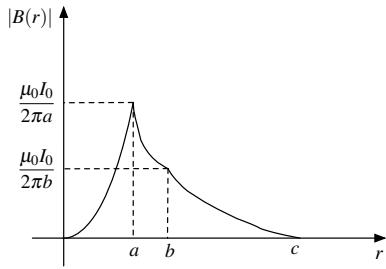


Figura 12.1: Gráfico

Se supondrá que el punto donde el campo magnético se anula es sobre el eje  $X$ . Sea “ $x$ ” el valor medido desde el centro del sistema de referencia. Debido a la superposición de los campos magnéticos, el campo en ese punto vale:

$$\vec{B}(x, 0) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)}(-\hat{z}) + \frac{\mu_0 I}{2\pi x}(-\hat{z}) + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}\hat{z}$$

Es posible verificar que el valor del campo magnético sobre el eje  $x$  siempre va en el sentido  $\hat{z}$  ( $o -\hat{z}$ ) y depende sólo de la distancia que separa el cable al punto donde se calcula el campo. Dado que se busca  $\vec{B}(x, 0) = 0$ , se obtiene que

$$\frac{1}{x+d} + \frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} = 0$$

donde resultan dos puntos simétricos ubicados en  $x = \pm \frac{d}{\sqrt{3}}$

- b) Primero se calcula el campo magnético que genera el cable de la izquierda sobre el punto  $(0, y)$ . Recordando que es  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(-\hat{\theta})$  (precaución: la fórmula anterior está con respecto al origen, aquí la usaremos centrada en el punto  $(-d, 0)$ ) se obtiene que:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+d^2}}(-(-\sin\alpha\hat{x} + \cos\alpha\hat{y}))$$

De igual forma, para el cable de la derecha se tiene que:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+d^2}}(-(-\sin(\pi-\alpha)\hat{x} + \cos(\pi-\alpha)\hat{y})) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+d^2}}(-(-\sin\alpha\hat{x} - \cos\alpha\hat{y}))$$

Sumando las expresiones anteriores, y notando que  $\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2+d^2}}$

$$\vec{B}(0, y) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{\pi\sqrt{y^2+d^2}}\hat{x} = \frac{\mu_0 I y}{\pi(y^2+d^2)}\hat{x}$$

Por lo que la fuerza estará dada por:

$$d\vec{F} = Idl \times \vec{B}(0, y) = -Idz\hat{z} \times \frac{\mu_0 I y}{\pi(y^2+d^2)}\hat{x} = -\frac{\mu_0 I^2 dz}{\pi} \frac{y}{y^2+d^2}\hat{y}$$



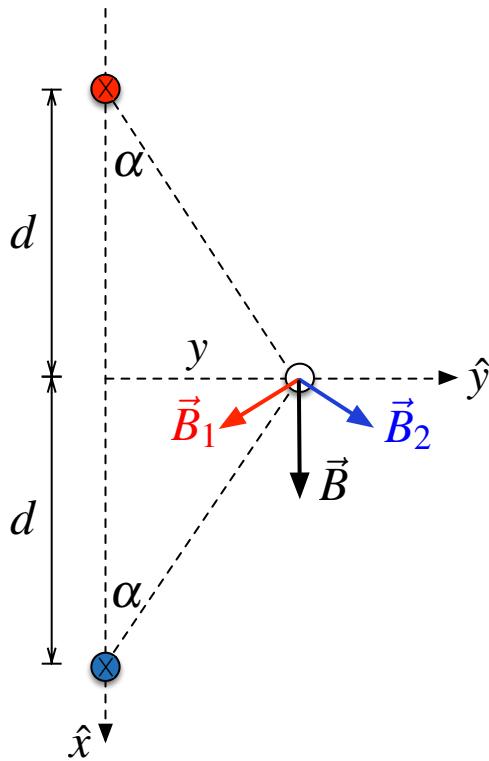


Figura 12.2: Campos Magnéticos aplicados al cable.

Se pide la fuerza anterior linealizada (primer orden), por lo tanto reescribiendo la expresión como

$$d\vec{F} = -\frac{\mu_0 I^2 dz}{\pi} \frac{1}{d} \frac{\frac{y}{d}}{(\frac{y}{d})^2 + 1} \hat{y}$$

Como sabemos que  $y \ll d$  tenemos que hacer una aproximación según Taylor de la función

$$f(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$$

en un punto cercano a  $\lambda = 0$ , por lo tanto

$$f(\lambda) \approx f(0) + \left. \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} (\lambda - 0) = \lambda$$

Finalmente la aproximación es

$$d\vec{F} = -\frac{\mu_0 I^2 dz}{\pi} \frac{1}{d} \frac{\frac{y}{d}}{(\frac{y}{d})^2 + 1} \hat{y} \approx -\frac{\mu_0 I^2 dz}{\pi} \frac{y}{d^2} \hat{y}$$

#### Solución 12.4

Para calcular el campo en los lugares pedidos, primero se debe conocer el resultado genérico para el campo magnético producido por un alambre infinito con corriente  $I$  circulando en el sentido



## CAPÍTULO 12. LEY DE AMPÈRE

positivo de  $\hat{z}$ . Usando la Ley de Ampère en una superficie circular de radio  $r$  en el plano  $xy$ , y asumiendo por simetría  $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$ , entonces:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I = 2\pi r B \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Ahora volviendo al problema original, primero se calcula el campo en el punto  $P_1$ , colocando al origen de los ejes cartesianos sobre  $P_1$ , con  $\hat{x}$  horizontal hacia la derecha, e  $\hat{y}$  vertical hacia arriba:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{d}{\sqrt{2}}} \left( \frac{-\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{d}{\sqrt{2}}} \left( \frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\mu_0 I}{\pi \frac{d}{\sqrt{2}}} \left( \frac{-\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \right)$$

Por lo tanto:

$$\vec{B}(P_1) = -\frac{\mu_0 I}{\pi d} (\hat{x} + \hat{y})$$

Para el cálculo en el punto  $P_2$ , se reubica el origen de los ejes en él, nuevamente con  $\hat{x}$  horizontal hacia la derecha, e  $\hat{y}$  vertical hacia arriba:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{y} + \frac{\mu_0 I}{\pi d \sqrt{2}} \left( \frac{-\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \right) = 0 \implies \vec{B}(P_2) = 0$$

### Solución 12.5

En este caso se está en presencia de una superposición de corrientes, una la dirección de  $\hat{\theta}$  y otra en  $\hat{z}$ . Para enfrentar este problema es necesario determinar el campo magnético que genera cada una de las densidades de corrientes, para luego sumarlos y obtener el campo total por intervalo. Se define entonces

$$J_\theta(r) = \frac{\alpha}{r} \quad J_z(r) = \beta$$

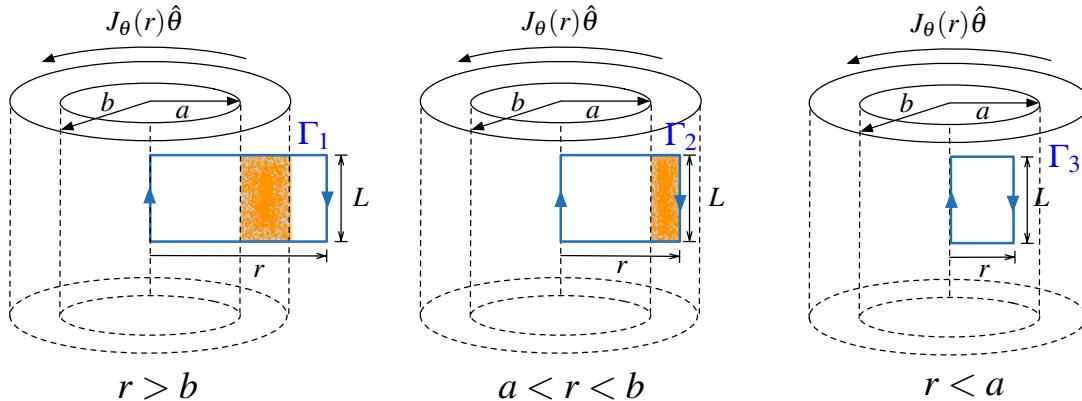


Figura 12.3: Los caminos  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_3$  son los que se usan para determinar el campo magnético para la densidad de corriente en  $\theta$  (en naranjo la corriente enlazada por los caminos).

Para la primera corriente  $J_\theta$  es necesario hacer el supuesto que el campo magnético es de la forma  $\vec{B}_1 = B_1(r)\hat{z}$  debido a la regla de la mano derecha. Para enfrentar es tipo de dirección de corriente



mediante Ampère es necesario usar un camino rectangular de la forma en que se muestra en la Figura 12.3. Luego, para  $r > b$  se tiene por Ampère

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint J_\theta \hat{\theta} \cdot dr dz \hat{\theta} \Rightarrow (B_1(0) - B_1(r))L = \mu_0 L \alpha \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

Nótese que dos lados de  $\Gamma_1$  tienen aporte nulo a la integral de linea. Por otro lado, es algo errado considerar  $B_1(0)$  es nulo, de hecho lo correcto es determinar ese valor mediante Biot-Savart

$$\vec{B}_1(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\frac{\alpha}{r} \hat{\theta} r dr d\theta dz \times -(r\hat{r} + z\hat{z})}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \mu_0 \alpha \ln \left( \frac{b}{a} \right) \hat{z}$$

Lo anterior implica que

$$\vec{B}_1(r > b) = 0$$

Luego para  $a < r < b$  se tiene que

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint J_\theta \hat{\theta} \cdot dr dz \hat{\theta} \Rightarrow (B_1(0) - B_1(r))L = \mu_0 L \alpha \ln \left( \frac{r}{a} \right)$$

Dado que el valor de  $B_1(0)$  ya es conocido, se obtiene que

$$\vec{B}_1(a < r < b) = \mu_0 \alpha \ln \left( \frac{b}{r} \right) \hat{z}$$

Finalmente para  $r < a$  se tiene que no hay corriente enlazada por lo cual el campo magnético vale

$$\vec{B}_1(r < a) = \mu_0 \alpha \ln \left( \frac{b}{a} \right) \hat{z}$$

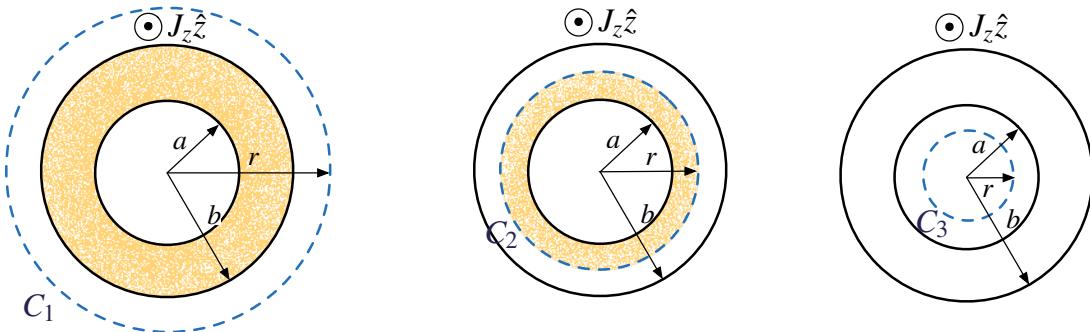


Figura 12.4: Los caminos  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son los que se usan para determinar el campo magnético para la densidad de corriente en  $z$  (en naranjo la corriente enlazada por los caminos).

En el caso de la corriente en  $z$ , es necesario tomar caminos circulares como se muestra en la Figura 12.4. Para el primer caso  $r > b$  se tiene que

$$\oint_{C_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint J_z \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} \Rightarrow B_2(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \beta \pi \cdot (b^2 - a^2) \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 \beta \pi (b^2 - a^2)}{2r} \hat{z}$$



## CAPÍTULO 12. LEY DE AMPÈRE

Análogamente para el caso  $a < r < b$  se tiene

$$\oint_{C_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint J_z \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} \implies B_2(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \beta \pi \cdot (r^2 - a^2) \implies \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 \beta \pi (r^2 - a^2)}{2r} \hat{z}$$

En el último caso  $r < a$  no existe corriente en enlazada, por lo cual

$$\oint_{C_3} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint J_z \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = 0 \implies \vec{B}_2(r < a) = 0$$

Finalmente el campo total  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  es

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \alpha \ln(\frac{b}{a}) \hat{z} & r < a \\ \frac{\mu_0 \beta (r^2 - a^2)}{2r} \hat{\theta} + \mu_0 \alpha \ln(\frac{b}{r}) \hat{z} & a < r < b \\ \frac{\mu_0 \beta (b^2 - a^2)}{2r} \hat{\theta} & r > b \end{cases}$$

### Solución 12.6

Como el problema no depende de la componente según  $\hat{\theta}$ , se puede deducir que el campo magnético es de la forma

$$\vec{B}(r, z) = B_r(r, z) \hat{r} + B_z(r, z) \hat{z}$$

Esto es básicamente debido adicionalmente debe cumplirse que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , esto implica que el flujo en cualquier superficie cerrada siempre es nulo. Usando lo anterior, por enunciado se sabe que  $B_z(r, z) = B_0(1 + \kappa z^2)$ , por lo que tomando un cilindro pequeño de radio  $r$  y altura  $z$  dentro de la moneda se tiene que

$$\Phi_{\text{Cilindro}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

Donde  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son los flujos sobre las tapas superior e inferior respectivamente, y  $\Phi_3$  el flujo sobre el manto. Ahora de acuerdo a la Ley de Gauss magnética se debe tener que

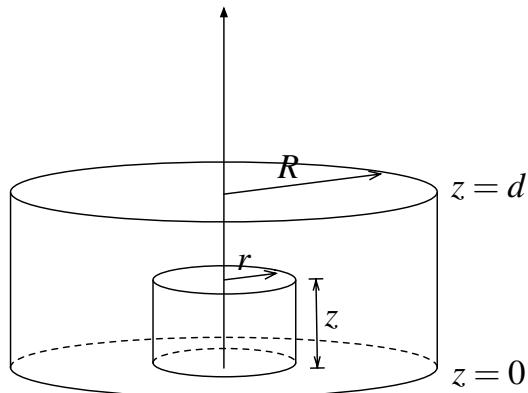
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \implies \Phi_{\text{Cilindro}} = \iint_{\text{Cilindro}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Determinando los flujos por separado se tiene

$$\Phi_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^r \vec{B}(r, 0) \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^r B_0 \hat{z} \cdot dr d\theta (-\hat{z}) = -B_0 \pi r^2$$

$$\Phi_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^r \vec{B}(r, z) \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^r B_0(1 + \kappa z^2) \hat{z} \cdot dr d\theta \hat{z} = B_0(1 + \kappa z^2) \pi r^2$$



Figura 12.5: Moneda sobre el plano  $xy$ 

Por lo que  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \implies \Phi_3 = -(\Phi_1 + \Phi_2) = -B_0\pi r^2\kappa z^2$ , pero por otro lado

$$\Phi_3 = \int_0^z \int_0^{2\pi} \vec{B}(r, z) \cdot r d\theta dz \hat{r} = 2\pi r \int_0^z B_r(r, z) dz = -B_0\pi r^2\kappa z^2 \implies B_r(r, z) = -B_0 r \kappa z$$

entonces el campo magnético vale

$$\vec{B} = -B_0 r \kappa z \hat{r} + B_0(1 + \kappa z^2) \hat{z}$$

Finalmente para determinar la corriente

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \implies \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{B_0 \kappa r}{\mu_0} \hat{\theta} \implies I = \int_0^d \int_0^R -\frac{B_0 \kappa r}{\mu_0} \hat{\theta} \cdot dr dz \hat{\theta} = -\frac{B_0 \kappa d R^2}{2\mu_0}$$

### Solución 12.7

Se nos pide determinar la fuerza entre las placas que puede ser algo complejo de ver a primera vista. ¿Por qué siente fuerza una placa?, a priori se podría suponer que la fuerza que siente cada placa es la misma módulo, ya que es un par acción - reacción. Ahora, si se toma como referencia la placa  $\Pi_1$ , la placa  $\Pi_2$  sentirá una fuerza por dos motivos: la corriente que circula por  $\vec{K}_1$  provoca un campo magnético en todo el espacio y en  $\Pi_2$  existe una corriente circulando. **Estos dos elementos, “campos magnéticos” (por lo general externos) y “corrientes” (o cargas en movimiento) siempre provocan fuerza sobre las cargas.** Ahora para determinar la fuerza se debe usar la forma diferencial de la fuerza de Lorentz:

$$d\vec{F}_2 = dq \vec{v}_2 \times \vec{B}_1$$

Donde  $\vec{F}_2$  es la fuerza que siente la placa  $\Pi_2$ . En este caso el diferencial de carga  $dq = \sigma_2 dS$ , pero por otro lado  $\vec{K}_2 = \sigma_2 \vec{v}_2$ . Juntando las igualdades anteriores se puede reescribir la fuerza como

$$d\vec{F}_2 = \vec{K}_2 dS \times \vec{B}_1 \implies \frac{d\vec{F}_2}{dS} = \vec{K}_2 \times \vec{B}_1$$



## CAPÍTULO 12. LEY DE AMPÈRE

El campo magnético  $\vec{B}_1$  de una placa puede ser determinado por Ley de Ampère (Figura 12.6).

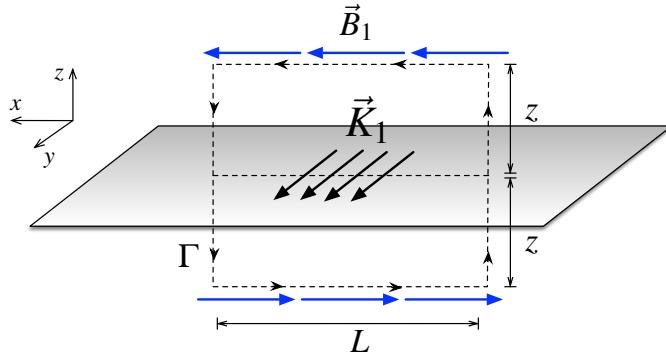


Figura 12.6: Corriente en el plano  $\Pi_1$  y camino de Ampère.

La curva  $\Gamma$  es un rectángulo de ancho  $L$  y alto  $2z$  como puede verse en la Figura 12.6. Además debe notarse que por simetría del problema necesariamente se tiene que  $|\vec{B}_1(z)| = |\vec{B}_1(-z)|$ . Dado que el plano que lleva corriente es infinito, el campo magnético siempre apunta en la dirección  $\hat{x}$  (esto es debido a que las componentes verticales son siempre anuladas consecuencia de la simetría del plano). Usando la Ley de Ampère se obtiene que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Por otro lado la integral de camino se puede descomponer de la siguiente forma

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^L B_1(z) \hat{x} \cdot dx \hat{x} + \int_{-z}^z B_1(z) \hat{x} \cdot dz \hat{z} + \int_L^0 -B_1(z) \hat{x} \cdot dx \hat{x} + \int_z^{-z} B_1(z) \hat{x} \cdot dz \hat{z}$$

De la expresión anterior se anulan las dos integrales verticales (el campo es ortogonal al camino). Por lo tanto

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1(z) \cdot 2L$$

Por otra parte, si se tienen densidades de corriente superficiales, la corriente enlazada se puede determinar como ( $\hat{n}$  normal de la superficie donde fluye corriente)

$$I = \int (\vec{K}_1 \times \hat{n}) \cdot d\vec{l} = \int_0^L (K_1 \hat{y} \times \hat{z}) \cdot dx \hat{x} = K_1 L$$

Luego la ley de Ampere se transforma en

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \implies B_1(z) \cdot 2L = \mu_0 K_1 L \implies B_1(z) = \frac{\mu_0 K_1}{2}$$



Notar el hecho que el plano  $\Pi_2$  está ubicado en  $z = d$ , por lo que el campo magnético que afecta al plano es

$$\vec{B}_1(z) = \frac{\mu_0 K_1}{2} \hat{x}$$

Ahora, descomponiendo  $\vec{K}_2 = K_2 \cos \beta \hat{x} + K_2 \sin \beta \hat{y}$ , se procede a calcular la fuerza por unidad de área que siente el plano  $\Pi_2$  como

$$\frac{d\vec{F}_2}{dS} = K_2(\cos \beta \hat{x} + \sin \beta \hat{y}) \times \frac{\mu_0 K_1}{2} \hat{x} = -\frac{\mu_0 K_1 K_2 \sin \beta}{2} \hat{z}$$

Finalmente, si  $\beta \in (0, \pi)$ , la fuerza es atractiva (corrientes paralelas), si  $\beta \in (\pi, 2\pi)$  la fuerza es repulsiva (corrientes antiparalelas), y para los ángulos  $\beta = 0, \pi$  no existe fuerza al ser las corrientes ortogonales.



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 12.2

- Como  $\vec{B}$  para  $r < a$  es dato, use la ley de Ampère en su forma diferencial para encontrar la densidad de corriente e integre en la sección transversal de la tubería para encontrar la intensidad de corriente.
- Conocida la intensidad de corriente, es posible determinar el campo magnético fuera de la tubería usando la ley de Ampère en su forma integral.
- Usado la ley Ampère en su forma integral, determine cuál debe ser el valor de la intensidad de corriente (y que sentido debe tener) sobre la superficie de la tubería para que el campo sea nulo en puntos  $r > a$ . Conocida la corriente divídala por el perímetro de la tubería para encontrar la densidad superficial  $\vec{K}$ .

### Indicación 12.8

- Usando ley de Ampère, determine el campo magnético que provoca  $\vec{J}$  dentro del cilindro (camino circular), en particular determine cuanto vale en  $P$ .
- Nuevamente por Ampère, determine el campo magnético que general la densidad superficial de corriente para puntos sobre ella (camino rectangular). Recuerde que este valor es constante.
- Use el principio de superposición para concluir este problema y encontrar la relación entre  $J_0$  y  $K$  cuando el campo magnético es nulo en  $P$ .

### Indicación 12.9

- Utilice dos sistemas de referencias en coordenadas cilíndricas  $\vec{r}_1 = r_1\hat{r}_1$  y  $\hat{\theta}_1$  para el cilindro de radio  $R$  y  $\vec{r}_2 = r_2\hat{r}_2$  y  $\hat{\theta}_2$  para el hueco cilíndrico de radio  $a$ .
- Use el principio de superposición para determinar el campo magnético en un punto dentro de la cavidad, exprese ese resultado en función de  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$  y constantes.
- Note que  $\hat{z}$  es el mismo vector unitario para ambos sistemas de referencias, luego  $\hat{z} = \hat{r}_1 \times \hat{\theta}_1 = \hat{r}_2 \times \hat{\theta}_2$  use esta relación en forma conveniente para dejar el valor del campo magnético en función de  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$ ,  $\hat{z}$  y constantes.
- Concluya el problema utilizando la relación vectorial entre  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ .



**Indicación 12.10**  

- Determine los campos magnéticos que actúan sobre el cable, para ello use el principio de superposición para el campo que genera en cilindro infinito (camino circular) y el bloque infinito con corriente (camino rectangular).
- Una vez determinado el campo que actúa sobre el cable, use la relación  $d\vec{F} = I\vec{dl} \times \vec{B}$  para concluir el problema.

**Indicación 12.11**  

- Use la ley de Ampère para determinar el campo magnético que genera una sola bobina (camino rectangular).
- Utilizando el resultado anterior y el principio de superposición, determine el valor del campo magnético que habría dentro de las dos bobinas. Encuentre el valor de  $I_2$  imponiendo que el valor anterior es nulo.
- Para encontrar la fuerza por unidad de área, recuerde que  $d\int_{\text{--}}^F \vec{K} \times \vec{B}$ . Intente determinar el valor de  $\vec{K}$  que circula por la bobina interior.



## V. Resultados

Problema	Respuestas
	<p>a) <math>\alpha = \frac{3I_0}{2\pi a^3}</math>, <math>\beta = \frac{I_0}{\pi(c^2 - b^2)}</math></p>
12.1	<p>b) <math>\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0 r^2}{2\pi a^3} \hat{\theta} &amp; r &lt; a \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{\theta} &amp; a &lt; r &lt; b \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \hat{\theta} &amp; b &lt; r &lt; c \\ 0 &amp; r &gt; c \end{cases}</math></p>
	<p>a) <math>\vec{J} = J_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \hat{z}</math>, <math>I = \frac{J_0 \pi a^2}{2}</math></p>
12.2	<p>b) <math>\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{4r} \hat{\theta}</math></p> <p>c) <math>\vec{K} = -\frac{J_0 a}{4} \hat{z}</math></p>
12.3	<p>a) <math>x \pm \frac{d}{\sqrt{3}}</math></p> <p>b) <math>\frac{d\vec{F}}{dz} \approx -\frac{\mu_0 I^2}{\pi} \frac{y}{d^2} \hat{y}</math></p>
12.4	$\vec{B}(P_1) = -\frac{\mu_0 I}{\pi d} (\hat{x} + \hat{y})$ , $\vec{B}(P_2) = 0$ . ( $\hat{x}$ creciendo hacia la derecha e $\hat{y}$ hacia arriba)
12.5	$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \alpha \ln(\frac{b}{a})}{2r} \hat{z} & r < a \\ \frac{\mu_0 \beta (r^2 - a^2)}{2r} \hat{\theta} + \mu_0 \alpha \ln(\frac{b}{r}) \hat{z} & a < r < b \\ \frac{\mu_0 \beta (b^2 - a^2)}{2r} \hat{\theta} & r > b \end{cases}$
12.6	$I = -\frac{B_0 \kappa d R^2}{2\mu_0}$
12.7	$\frac{d\vec{F}_2}{dS} = \frac{\mu_0 K_1 K_2 \sin \beta}{2} \hat{z}$ donde $\hat{z}$ apunta desde plano $\Pi_1$ al $\Pi_2$ . Si $\beta \in (0, \pi)$ , la fuerza es atractiva, si $\beta \in (\pi, 2\pi)$ la fuerza es repulsiva, y para $\beta = 0$ o $\beta = \pi$ no existe fuerza.
12.8	$J = \frac{3K}{R}$



---

Problema    Respuestas

---

 **12.9**  $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 J_0}{2} \hat{k} \times \vec{b}$ , el vector  $\vec{b}$  es que parte del centro del cilindro hasta el centro de la circunferencia de radio  $a$ .

---

 **12.10**  $\frac{d\vec{F}}{dt} = \mu_0 I \left( \frac{\alpha R^3}{3s} + \frac{J_1 w}{2} \right) \hat{y}$

---

 **12.11** a)  $I_2 = -\frac{N_1}{N_2} I_1$   
b)  $\frac{d\vec{F}}{ds} = -\mu_0 (N_1 I_1)^2 \hat{r}$

---



## CAPÍTULO 12. LEY DE AMPÈRE



# Potencial y Momento Magnético

## I. Resumen Teórico

### Potencial Vectorial Magnético

Para todo campo magnético  $\vec{B}$  existe un vector potencial magnético  $\vec{A}$  tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (13.1)$$

Consecuencia de lo anterior, el potencial magnético puede ser determinado por alguna de las siguientes expresiones

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \vec{dl}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (13.2)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{K} dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (13.3)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J} dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (13.4)$$

Si se integra en volumen la Ecuación 13.1 se puede encontrar otra relación entre  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (13.5)$$

El vector potencial no es único, ya que cualquier solución de la forma

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 + \nabla f \quad (13.6)$$

es también solución de la Ecuación 13.1, ya que para cualquier función escalar  $f$  el rotor de su gradiente es nulo. Si se elige  $f$  de modo que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , entonces se cumple que

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (13.7)$$

## Torque Magnético

El torque magnético sobre un circuito cerrado  $\Gamma$  está dado por

$$\tau = \oint_{\Gamma} \vec{r}' \times d\vec{F} = \oint_{\Gamma} \vec{r}' \times (I \vec{dl} \times \vec{B}) \quad (13.8)$$

---

## Momento Magnético

El momento o dipolo magnético  $\vec{m}$  de un circuito con corriente  $I$  está dado por la expresión

$$\vec{m} = \oint \vec{r}' \times I \vec{dl} = IA\hat{n} \quad (13.9)$$

donde  $A$  es el área del circuito magnético y  $\hat{n}$  su normal. Para distribuciones de corriente más complejas, el momento magnético puede ser determinado como

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iint \vec{r}' \times \vec{K} dS \quad (13.10)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r}' \times \vec{J} dV \quad (13.11)$$

El potencial magnético que genera un momento magnético para puntos muy lejanos a él, está dado por

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (13.12)$$

donde  $\vec{r}$  es el lugar donde se quiere determinar el potencial magnético y  $\vec{r}'$  el lugar donde se encuentra el momento magnético. Nótese que es posible determinar el campo magnético del momento mediante

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left[ 3 \frac{(\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}'))(\vec{r} - \vec{r}')} {|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \vec{m} \right] \quad (13.13)$$

El torque de un momento magnético en presencia de un campo magnético  $\vec{B}$  está dado por

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (13.14)$$

Por otro lado, la energía que tiene un momento es

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (13.15)$$



---

## Recomendaciones

- Recuerde que, a diferencia de electrostática, el potencial magnético es un vector y no un escalar. El potencial magnético vectorial no tiene un significado físico directo.
- Note que siempre  $\vec{J} \parallel \vec{A}$ .
- En general las Ecuaciones 13.2, 13.3 y 13.4 se usan cuando uno quiere conocer el potencial vectorial en algún punto en específico. Si se conoce  $\vec{B}$  en todo el espacio y se desea conocer  $\vec{A}$ , puede ser útil la Ecuación 13.5. Note el parecido de esta última con la ley circuital de Ampère

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Omega_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} \longleftrightarrow \oint_{\Gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Para calcular el potencial magnético se sigue la analogía de la ley de Ampère.

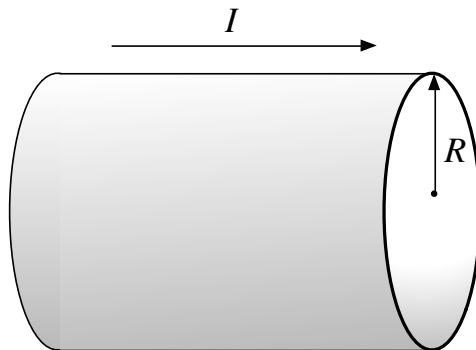
- Los momentos magnéticos están asociados a estudiar el comportamiento de los campos magnéticos para puntos muy lejanos de donde está la corriente que lo genera.



## II. Problemas Propuestos

### Problema 13.1

Considere un cilindro hueco infinito de radio  $R$  sobre el cual circula sobre su superficie una corriente homogéneamente distribuida  $I$ . Encuentre en todo el espacio el vector potencial magnético  $\vec{A}$ . Puede usar el hecho que  $A(r = 0) = 0$ .



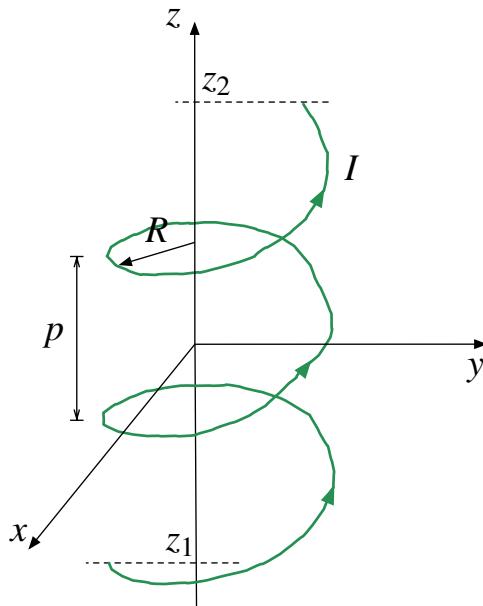
### Problema 13.2

Considere un circuito en forma de hélice circular con su eje en  $z$ . Por la hélice circula una corriente  $I$ , y está compuesta por  $2N$  vueltas completas y tiene un paso  $p$ . La ecuación paramétrica de la hélice es:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = \frac{p}{2\pi}\theta \end{cases}$$

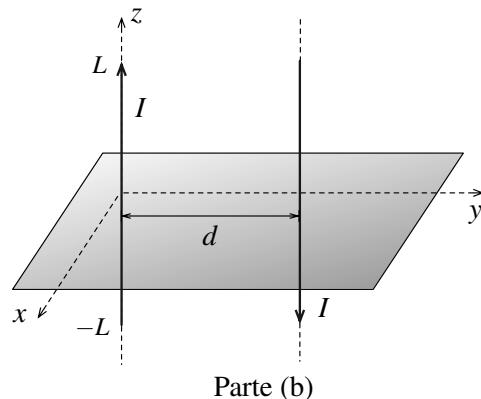
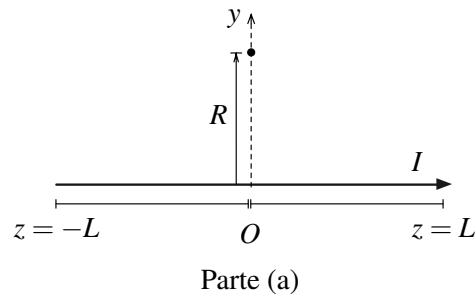
Las vueltas de la hélice están repartidas desde la cota  $z_1 = -pN$  hasta la cota  $z_2 = +pN$ .

- Determine la componente axiales del campo magnético y del potencial magnético en el origen,  $B_z(0)$  y  $A_z(0)$ .
- Si la longitud del circuito helicoidal es  $L = 2pN$ , muestre que  $B_z(0)$  puede ser escrita de la forma  $B_z(0) = B_0 f(R, N, p)$  donde  $B_0$  es el campo magnético creado con solenoide de longitud infinita.
- Encuentre el valor de  $f(R, N, p)$  cuando  $R \ll L$ . ¿Qué relación debe haber entre  $R$  y  $L$  para que el  $B_z(0)$  sea un 99 % del valor de  $B_0$ ?



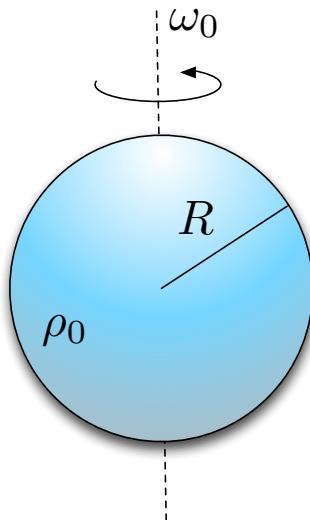
**Problema 13.3**   

- a) Considere un alambre de largo  $2L$  sobre el eje  $z$ , donde fluye una corriente  $I$  desde  $z = -L$  hasta  $z = L$  como se muestra en la figura. Determine el potencial magnético vectorial sobre un punto en el eje  $y$  a distancia  $R$  del origen. Deduzca el valor del potencial magnético en el límite  $L \gg R$ .
- b) Se coloca un nuevo alambre de largo  $2L$ , paralelo al alambre de la parte anterior, por el cual circula un corriente  $I$  en el sentido inverso. El nuevo alambre se ubica a una distancia  $d$  del primero, perpendicular al plano  $xy$  (ver figura). Determine el potencial magnético vectorial para puntos sobre el plano  $xy$ , a una distancias mucho mayores que  $L$ .

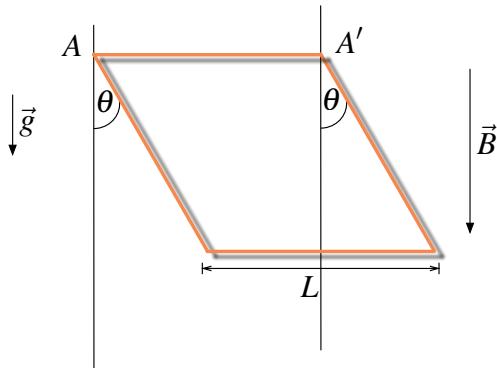

**Problema 13.4**   

Considere una esfera de radio  $R$ , la cual está cargada uniformemente con una densidad de carga volumétrica  $\rho_0$  constante. La esfera gira entorno a una de sus diámetros con una velocidad angular constante  $\omega_0$ , como se ilustra en la figura. Encuentre

- a) El campo magnético  $\vec{B}$  y el potencial magnético vectorial  $\vec{A}$  en el centro de la esfera.
- b) El momento magnético de la esfera.


**Problema 13.5**   

Un circuito cuadrado rígido de lado  $L$  y masa  $M$  está pivoteado en torno a uno de sus ejes ( $AA'$ ) en presencia de un campo magnético  $\vec{B}$  uniforme, y el campo gravitatorio. El circuito lleva una corriente  $I$  que es capaz de mantenerlo en equilibrio en el ángulo  $\theta$ . Encuentre el módulo y el sentido de dicha corriente.



## CAPÍTULO 13. POTENCIAL Y MOMENTO MAGNÉTICO

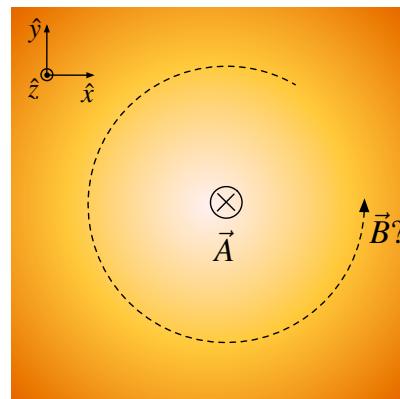
### Problema 13.6



Una densidad de corriente determinada por  $\vec{J} = J_0 \hat{z}$ , origina un potencial magnético vectorial

$$\vec{A} = -\hat{z} \frac{\mu_0 J_0}{4} (x^2 + y^2)$$

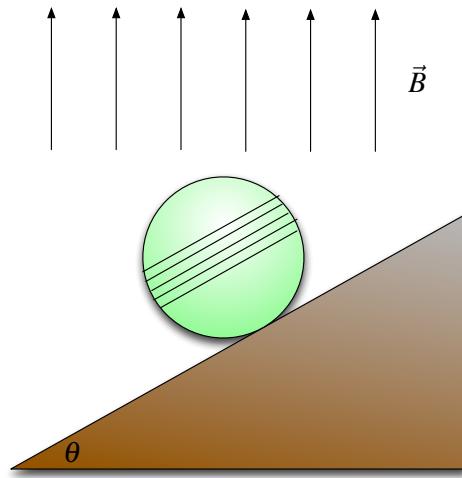
- Aplique la ecuación vectorial de Poisson para confirmar el enunciado anterior.
- Utilice la expresión de  $\vec{A}$  para determinar  $\vec{B}$ .
- Utilice la expresión para  $\vec{J}$  junto a la ley de Ampére y determine  $\vec{B}$ . Compare su respuesta con la obtenida en la parte anterior.



### Problema 13.7



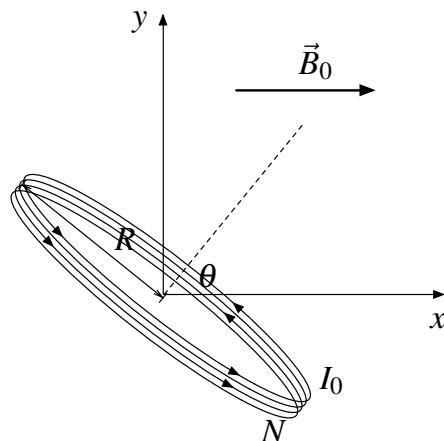
Una esfera no conductora tiene masa  $m$  y radio  $R$ . Como se puede apreciar en la figura, una bobina muy compacta, de cinco vueltas se encuentra enrollada en la esfera; ésta se encuentra en un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal, de manera tal que la bobina es paralela a éste. Si un campo magnético  $\vec{B}$  apunta verticalmente en la región, ¿cuál es la corriente necesaria en la bobina, que permitirá a la esfera permanecer en equilibrio en el plano inclinado?. Muestre que el resultado es independiente de  $\theta$ .



### Problema 13.8

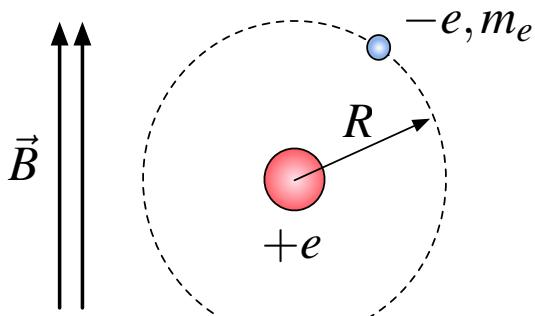


Considere una espira de radio  $R$ ,  $N$  vueltas y masa  $M$  distribuida homogéneamente por la cual circula una corriente  $I_0$ . Esta espira se coloca en un campo magnético constante de  $\vec{B} = B_0 \hat{x}$  inicialmente dispuesta con sobre el plano  $yz$  con su eje coincidente con el eje  $x$ . Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones al perturbar débilmente la espira con respecto al plano  $yz$ .



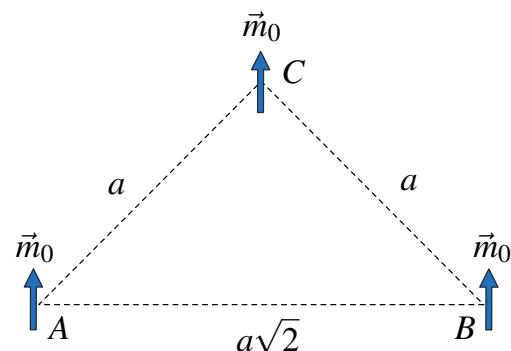
**Problema 13.9**

Considere un electrón orbitando a un protón, que mantiene una trayectoria circunferencial de radio  $R$  debido a la interacción Coulombiana. Tomando la órbita de carga como un circuito de corriente eléctrica, calcule el torque resultante cuando el sistema está inmerso en un campo magnético  $\vec{B}$ , orientado perpendicularmente respecto al plano donde vive el protón y el electrón. La carga del electrón y del protón son conocidas,  $-e$  y  $e$  respectivamente, al igual que la masa del electrón  $m_e$ .

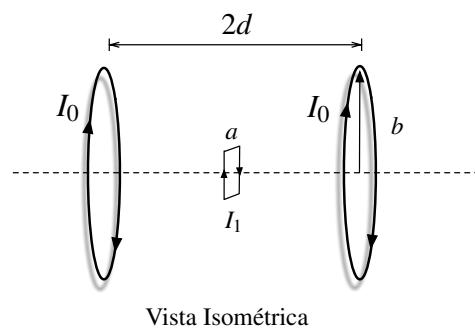
**Problema 13.10**

Considere tres momentos magnéticos iguales  $\vec{m}_0$ , ubicados en los vértices de un triángulo rectángulo  $ABC$  de lados  $a$ ,  $a$  y  $a\sqrt{2}$ .

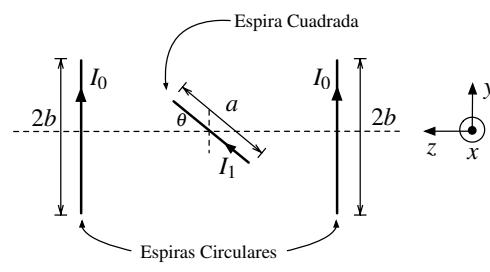
- Determine el trabajo necesario para invertir la posición del momento magnético ubicado en el vértice  $C$ .
- ¿Cuál es el torque que sienten los momentos magnéticos ubicados en  $A$  y  $C$ ?

**Problema 13.11**

Considere una espira cuadrada conductora de lado  $a$  situada entre dos espiras circulares de radio  $b$  ( $b \gg a$ ) también conductoras, ambas espiras circulares están separadas una distancia  $2d$  ( $d \ll b$ ) y colocadas en forma paralela. La espira cuadrada de encuentra en el punto medio y su eje de simetría y su eje de simetría, que es perpendicular al eje de las espiras circulares, está conectado a un motor que ejerce un torque restaurador  $\vec{\tau} = k\theta\hat{x}$ , con  $k$  una constante. Si las corrientes son las indicadas en la Figura, determinar la ecuación que define el ángulo de equilibrio de la espira cuadrada con la horizontal.



Vista Isométrica



Vista Frontal



### III. Soluciones

#### Solución 13.1

En este caso se debe usar ley de Ampère para determinar el campo magnético que genera el cilindro. Para el caso  $r < R$  se tiene que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = 0 \implies \vec{B} = 0$$

Para el caso  $r \geq R$  se obtiene que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$

Ahora dado que  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ , integrando a ambos lados y aplicando Teorema de Stokes se obtiene que:

$$\iint_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

donde  $\Gamma$  es el contorno cerrado de la superficie  $\Omega$ . Suponiendo que  $\vec{A} = A(r)\hat{z}$  (siempre  $\vec{A} \parallel \vec{J}$ ) y que  $A(r=0) = 0$  se obtiene que en el caso  $r < R$ :

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies (A(0) - A(r))L = 0 \implies \vec{A}(r) = 0$$

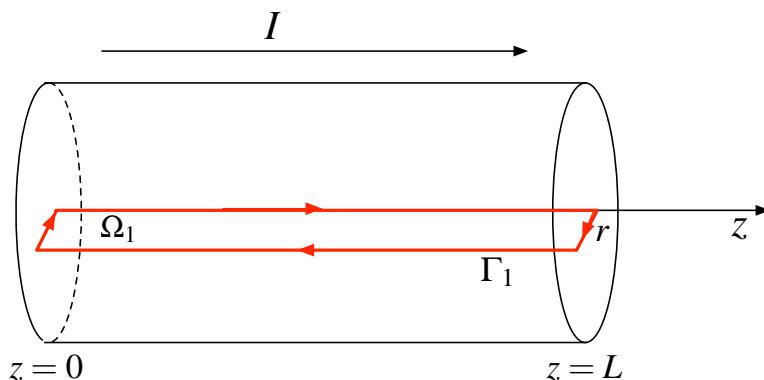


Figura 13.1: Superficie y camino de integración para  $r < R$

En la Figura 13.1 se indica  $\Gamma_1$  y  $\Omega_1$  donde se determinaron la integral de línea y superficie.

Análogamente para el caso  $r \geq R$ , se obtiene que

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies (A(0) - A(r))L = \int_0^L \int_0^r \vec{B} \cdot dr dz \hat{\theta} = \int_0^L \int_R^r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} \cdot dr dz \hat{\theta} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$



De esto, se determina que

$$\vec{A}(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \hat{z}$$

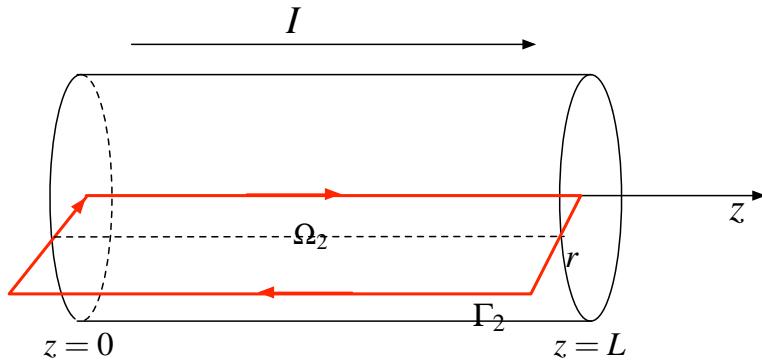


Figura 13.2: Superficie y camino de integración para  $r \geq R$

### Solución 13.2 P ✓

- a) La parametrización de la hélice en coordenadas cilíndricas es  $\vec{r}' = R\hat{r} + \frac{p\theta}{2\pi}\hat{z}$  con  $\theta \in [-2\pi N, 2\pi N]$ . Mientras que el  $d\vec{l} = Rd\theta\hat{\theta} + dz\hat{z}$ , dado que se pide el campo magnético en  $\vec{r} = 0$ , se llega a

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(Rd\theta\hat{\theta} + dz\hat{z}) \times (-R\hat{r} - \frac{p\theta}{2\pi}\hat{z})}{(R^2 + (\frac{p\theta}{2\pi})^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(R^2 d\theta\hat{z} - \frac{Rp\theta}{2\pi} d\theta\hat{r} - R dz\hat{\theta})}{(R^2 + (\frac{p\theta}{2\pi})^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Dado que sólo interesa la componente axial

$$B_z(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-2\pi N}^{2\pi N} \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + (\frac{p\theta}{2\pi})^2)^{\frac{3}{2}}}$$



## CAPÍTULO 13. POTENCIAL Y MOMENTO MAGNÉTICO

Usando el cambio de variables  $u = \frac{p\theta}{2\pi R} \implies du = \frac{p}{2\pi R} d\theta$  se llega a

$$\begin{aligned} B_z(0) &= \frac{\mu_0 I}{2p} \int_{-\frac{pN}{R}}^{\frac{pN}{R}} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2p} \left. \frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \right|_{-\frac{pN}{R}}^{\frac{pN}{R}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2p} \left( \frac{pN}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{pN}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I N}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Por otro lado, como  $\vec{A}$  está dado por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

para calcular  $A_z$ , habrá que considerar la componente en  $z$  de  $\vec{r}$ , luego:

$$A_z(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-2\pi N}^{2\pi N} \frac{I(\frac{p}{2\pi}) d\theta}{(R^2 + (\frac{p}{2\pi}\theta)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Usando el cambio de variables  $u = \frac{p\theta}{2\pi R} \implies du = \frac{p}{2\pi R} d\theta$  se llega a

$$\begin{aligned} A_z(0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{pN}{R}}^{\frac{pN}{R}} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln |(1+u^2)^{\frac{1}{2}} + u| \Big|_{-\frac{pN}{R}}^{\frac{pN}{R}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left( \frac{(R^2 + (pN)^2)^{\frac{1}{2}} + pN}{(R^2 + (pN)^2)^{\frac{1}{2}} - pN} \right) \end{aligned}$$

- b) Primero que todo hay que notar que en el exterior de un solenoide el campo magnético es nulo ya que al darse un camino cualquiera la corriente encerrada siempre será nula, por lo que  $B_{\text{ext}} = 0$ . Por otro lado, si se tiene un solenoide infinito, se puede calcular el campo magnético mediante ley de Ampère considerando un camino cuadrado de largo  $L$  que encierre  $n$  espiras por unidad de largo por las cuales circula una corriente  $I_0$ , por lo que:

$$\oint B \cdot d\vec{l} = \mu_0 n I_{\text{enlaz}} \implies B(z) \cdot L = \mu_0 n I \implies \vec{B} = n \mu_0 I \hat{z}$$



## CAPÍTULO 13. POTENCIAL Y MOMENTO MAGNÉTICO

Este caso

$$n = \frac{\text{Número de Vueltas}}{\text{Largo}} = \frac{2N}{2Np} = \frac{1}{p}$$

Por lo tanto el  $B_0$  es

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{p}$$

Si se considera el resultado calculado en (a) y se reordena de manera que pueda colocarse en función de  $B_0$  se tiene:

$$\begin{aligned} B_z(0) &= \frac{\mu_0 I N}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{p} \frac{Np}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= B_0 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{Np}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

De la expresión anterior es fácil concluir que  $B_z(0)$  puede escribirse como  $B_z = B_0 f(R, N, p)$ , donde  $f(R, N, p)$  está dada por:

$$f(R, N, p) = \left(1 + \left(\frac{R}{Np}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

- c) Finalmente, cuando  $R \ll L \implies \left(\frac{2R}{L}\right)^2 \ll 1$ , y haciendo una aproximación de Taylor para  $f$ :

$$\begin{aligned} f(R, N, p) &= \left(1 + \left(\frac{R}{Np}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{L}\right)^2 + \mathcal{O} \implies f(R, N, p) \approx 1 - 2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \end{aligned}$$

Luego es posible concluir que para  $R \ll L$  el cuociente entre  $B_z(0)$  y  $B_0$  esta dado por

$$\frac{B_z(0)}{B_0} = 1 - 2 \left(\frac{R}{L}\right)^2$$

Por ende para que el valor de  $B_z(0)$  sea dicho cuociente sea un 99 % del valor de  $B_0$ , el cuociente debe tomar el valor de 0,99 con lo que se concluye la relación entre  $R$  y  $L$  para que esto se cumpla:

$$\begin{aligned} \frac{B_z(0)}{B_0} &= 0,99 = 1 - 2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \\ 2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 &= \frac{1}{100} \\ \implies \frac{R}{L} &= \frac{1}{10\sqrt{2}} \end{aligned}$$



## CAPÍTULO 13. POTENCIAL Y MOMENTO MAGNÉTICO

### Solución 13.4

- a) Primero se determina el campo magnético que genera la esfera, para ello se usa la ley de Biot-Savart

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{Esfera}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

En este caso,  $\vec{r} = 0$ ,  $\vec{r}' = r\hat{r}$  y  $\vec{J} = \rho_0 \vec{v} = \rho_0 \omega r \sin \theta \hat{\phi}$ . Manejando algebraicamente la expresión anterior

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho_0 \omega r \sin \theta \hat{\phi} \times r\hat{r}}{r^3} \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r \sin^2 \theta \cdot \hat{\theta} dr d\theta d\varphi$$

Pero  $\hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi - \hat{z} \sin \theta$ , por lo que las integrales en  $x$  e  $y$  se anulan debido a la integral en  $\varphi$ . Luego el campo sólo tiene componente en  $z$  y su valor es

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega \hat{z}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r dr$$

La única integral compleja es

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^\pi + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \Big|_0^\pi = \frac{4}{3}$$

Luego el campo vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega \hat{z}}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega R^2}{3} \hat{z}$$

Para el caso de potencial magnético se tiene que

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{Esfera}} \frac{\vec{J} dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Los vectores  $\vec{J}$ ,  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  son los mismos que la parte anterior. Entonces

$$\vec{A}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho_0 \omega r \sin \theta \hat{\phi}}{r} \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Pero dado que  $\hat{\phi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$ , la integral en  $\varphi$  vuelve anular las dos coordenadas de modo que

$$\vec{A}(0) = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} (-\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi) d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = 0$$



## CAPÍTULO 13. POTENCIAL Y MOMENTO MAGNÉTICO

b) Para el caso del momento magnético, este esta dado por

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r}' \times \vec{J} dV$$

donde  $\vec{r}'$  y  $\vec{J}$ , ya fueron calculados previamente. Reemplazando

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J} dV = -\frac{\rho_0 \omega}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^4 \sin^2 \theta \hat{\theta} dr d\theta d\varphi$$

Nuevamente al descomponer el vector  $\hat{\theta}$  se anulan las componentes en  $x$  e  $y$ . Entonces

$$\vec{m} = \frac{\rho_0 \omega \hat{z}}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi \rho_0 \omega R^5}{15} \hat{z}$$

### Solución 13.8

Para comenzar este problema es necesario determinar el momento magnético de la espira  $R$ , se supone que la espira ya se ha perturbado un ángulo  $\theta$  con respecto al eje  $x$ , de modo que

$$\vec{m} = NI_0 \pi R^2 \hat{n} = NI_0 \pi R^2 (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})$$

Por otro lado el torque que siente la espira debido al campo magnético presente en el espacio es

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = NI_0 \pi R^2 (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \times B_0 \hat{x} = -NI_0 B_0 \pi R^2 \sin \theta \hat{z}$$

Por otro lado debe recordarse que en un sólido rígido

$$\vec{\tau} = I_z \dot{\vec{\omega}}$$

La inercia  $I_z$  de la ecuación puede ser determinada a partir del teorema eje perpendicular como  $I_x = I_y + I_z = 2I_z$  (debido a la geometría plana de la espira  $I_y = I_z$ ) por lo cual

$$I_x = \int |\vec{r}'|^2 dm = MR^2 \implies I_z = \frac{MR^2}{2}$$

Luego, la ecuación escalar que describe el movimiento de la espira es

$$\frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} = -NI_0 B_0 \pi R^2 \sin \theta \implies \ddot{\theta} + \frac{2NI_0 B_0 \pi}{M} \sin \theta = 0$$

Considerando pequeñas oscilaciones  $\sin \theta \approx \theta$ , por lo cual finalmente se desprende que

$$\ddot{\theta} + \frac{2NI_0 B_0 \pi}{M} \theta = 0 \implies \omega = \sqrt{\frac{2NI_0 B_0 \pi}{M}}$$



## CAPÍTULO 13. POTENCIAL Y MOMENTO MAGNÉTICO

### Solución 13.9

Se debe comenzar calculando el momento dipolar  $\vec{m} = IA\hat{n}$ , donde  $I$  es la corriente y  $A$  es el área. Para este caso la corriente está dada por:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{T}$$

donde  $e$  es la carga del electrón,  $m_e$  la masa del electrón y  $T$  su periodo. Para encontrar el periodo se puede relacionar con su frecuencia mediante  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , con  $\omega = \frac{v}{R}$ . Luego falta encontrar  $v$ , para ello usamos la interacción coulombiana en el interior de los átomos y la expresión para fuerza centrípeta:

$$\begin{aligned} F_e = F_c &\implies \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{m_e v^2}{R} \\ &\implies v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R}} \end{aligned}$$

Con la última expresión es posible concluir que el periodo está dado por:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R \sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e R}}{e}$$

Conocido  $T$ , se puede concluir  $I$ :

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e^2}{2\pi R \sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e R}}$$

Para terminar el cálculo, se considera que el área viene dada por una circunferencia, por lo que  $A = \pi R^2$ . Con esto se tiene que

$$\vec{m} = \frac{e^2 R}{2\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e R}} \hat{z}$$

Finalmente, el torque está dado por

$$|\vec{\tau}| = |\vec{m} \times \vec{B}| \sin 90^\circ = \frac{e^2 B}{2} \sqrt{\frac{R}{4\pi\varepsilon_0 m}}$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 13.3

- Use la definición de potencial magnético  $\vec{A}$  para determinarlo en el punto pedido. Recuerde que  $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$  cuando  $\varepsilon \ll 1$ .
- Use el principio de superposición para la segunda parte del problema, utilizando el resultado anterior.

### Indicación 13.5

- Determine el momento magnético del circuito cuadrado en función  $\theta$  y el torque que este siente debido al campo magnético presente.
- Determine el torque que provoca el peso sobre la espira. Concluya el problema recordando que la suma de torques debe ser nula para que la espira se encuentre en equilibrio.

### Indicación 13.6

- Aplique la ecuación vectorial de Poisson en forma vectorial, recuerde que  $\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$  significa que  $\nabla^2 A_x = \mu_0 J_x$ ,  $\nabla^2 A_y = \mu_0 J_y$  y  $\nabla^2 A_z = \mu_0 J_z$  en coordenadas cartesianas.
- Use la ley de Ampère para encontrar el campo magnético, para ello tome un camino circular de radio  $r$  centrado en el origen sobre el plano  $xy$ . Puede ser útil recordar que  $x^2 + y^2 = r^2$ .

### Indicación 13.7

- Determine el momento magnético del enrollado de la esfera.
- Note que necesariamente debe haber fuerza de roce en el problema para que la esfera se encuentre en equilibrio. Para determinar el valor de esa fuerza plantee que la sumatoria de fuerzas sobre la esfera debe ser nulo.
- Para concluir el problema imponga que el torque sobre el centro esfera también debe ser nulo, note los torques involucrados son debidos al momento magnético y al roce.



## CAPÍTULO 13. POTENCIAL Y MOMENTO MAGNÉTICO

### Indicación 13.10

- Determine el campo magnético sobre el punto  $C$  provocado por los momentos magnéticos en  $A$  y  $B$ . Usando ese valor, determine la energía inicial y final del momento magnético, recuerde que  $W = \Delta U$ .
- Nuevamente determine el campo magnético  $A$  y  $C$  y aplique la fórmula para determinar el torque que siente un momento magnético en presencia de un campo magnético.

### Indicación 13.11

- Dado que las espiras circulares son mucho más grandes que la espira cuadrada, el campo magnético que afecta a esta última es aproximadamente igual a la superposición del campo que provocan ambas espiras circulares en el centro de la espira cuadrada.
- Use Biot-Savart para determinar el campo magnético que afecta a la espira cuadrada.
- Determine el momento magnético de la espira cuadrada y con ello el torque total ella que siente. Finalmente, deduzca la ecuación que debe cumplirse para que haya equilibrio.



## V. Resultados

Problema	Respuestas
<b>P</b> 13.1	$\vec{A}(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \hat{z} & r \geq R \end{cases}$
	a) $B_z(0) = \frac{\mu_0 I N}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}}, A_z(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left(\frac{(R^2 + (pN)^2)^{\frac{1}{2}} + pN}{(R^2 + (pN)^2)^{\frac{1}{2}} - pN}\right)$
<b>P</b> 13.2	b) $f(R, N, p) = \left(1 + \left(\frac{R}{Np}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ c) $\frac{R}{L} = \frac{1}{10\sqrt{2}}$
<b>P</b> 13.3	a) $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left[\frac{L}{R} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}}\right)\right] \hat{z}$ si $L \gg R$ entonces $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left(\frac{2L}{R}\right) \hat{z}$ b) $\vec{A} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left[\frac{x^2 + (d-y)^2}{x^2 + y^2}\right] \hat{z}$
<b>P</b> 13.4	a) $\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega R^2}{3} \hat{z} \quad \vec{A}(0) = 0$ b) $\vec{m} = \frac{4\pi \rho_0 \omega R^5}{15} \hat{z}$
<b>P</b> 13.5	$I = \frac{Mg \tan \theta}{2LB}$ y la dirección es horaria según la figura.
<b>P</b> 13.6	$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \hat{\theta}$
<b>P</b> 13.7	$I = \frac{Mg}{5\pi BR}$
<b>P</b> 13.8	$\omega = \sqrt{\frac{2NI_0B_0\pi}{M}}$



## CAPÍTULO 13. POTENCIAL Y MOMENTO MAGNÉTICO

Problema	Respuestas
 <b>13.9</b>	$ \vec{\tau}  = \frac{e^2 B}{2} \sqrt{\frac{R}{4\pi\epsilon_0 m}}$
 <b>13.10</b>	a) $W = \frac{\mu_0 m_0^2}{2\pi a^3},$ b) En A: $\vec{\tau} = \frac{3\mu_0 m_0^2}{8\pi a^3} \hat{k}$ , En C: $\vec{\tau} = 0$ . $\hat{k}$ sale de la hoja de papel.
 <b>13.11</b>	$\frac{\mu_0 I_1 I_2 a^2 b^2 \cos \theta_{eq}}{(d^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = k \theta_{eq}$



# Medios Magnéticos

## I. Resumen Teórico

---

### Vector de Magnetización

Dada la composición de momentos magnéticos con lo cual se modelan los materiales, se define el vector magnetización como

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V} \quad (14.1)$$

El cual se define como la densidad de momento magnético por unidad de volumen dentro de un medio material.

---

### Corrientes de Magnetización

La densidad de corriente de magnetización superficial sobre un medio magnetizado es

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} \quad (14.2)$$

donde  $\hat{n}$  es la normal de la superficie magnetizada. Por otro lado, la densidad de corriente volumétrica dentro de un material está dada por

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (14.3)$$


---

### Ley de Ampère Generalizada

Para incluir el efecto del campo magnético que generan las corrientes de magnetización se define el vector  $\vec{H}$  como

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (14.4)$$

## CAPÍTULO 14. MEDIOS MAGNÉTICOS

Luego es posible afirmar que

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre}} \quad (14.5)$$

donde  $I_{\text{libre}}$  hace referencia a las corrientes reales que circulan por un material magnético y no a las debidas a la magnetización. En su forma diferencial, puede ser enunciada como

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}} \quad (14.6)$$

### Propiedades Magnéticas de los Materiales

Para gran cantidad de materiales se cumple una relación lineal entre  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$ , de modo que

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (14.7)$$

El valor de  $\chi_m$  es conocido como la susceptibilidad magnética y los materiales pueden ser clasificados a partir de ese valor.

- Un material paramagnético es aquel que  $\chi_m > 0$ .
- Un material diamagnético es que  $\chi_m < 0$ .
- Un material ferromagnético es aquel que  $\chi_m \gg 1$ .

Por otro lado, se define el valor de la permeabilidad magnética  $\mu$  para encontrar la relación lineal entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  dada por

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H} \quad (14.8)$$

donde  $\mu = 1 + \chi_m$ . Para los materiales no ferromagnéticos se approxima que  $\mu \approx \mu_0$ , sin embargo los medios ferromagnéticos tienen permeabilidades muy altas y suelen tener un comportamiento no lineal (curvas de histéresis).

### Condiciones de Borde

Las condiciones de borde en magnetostática son las siguientes

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (14.9)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_{\text{libre}} \quad (14.10)$$

donde  $\hat{n}$  es la normal a la interfase de los medios.



## Recomendaciones

- Los medios magnéticos son completamente análogos al caso de los dieléctricos, particularmente con el hecho que en vez de inducirse carga se induce corriente.
- En general, las simetrías en las que es posible usar Ley de Ampère no cambian con la presencia de medios materiales. Tenga precaución en usar de forma correcta las condiciones de borde para poder determinar el campo magnético en cada medio.
- Tenga precaución con identificar bien  $I_{\text{libre}}$ , el cual es una corriente real que circula por el material. Esta distinción se hace para separar este tipo de corriente con las de magnetización.

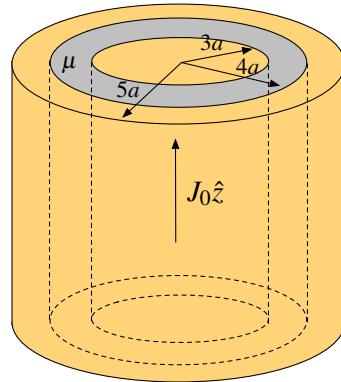


## II. Problemas Propuestos

### Problema 14.1



Se tiene un dispositivo de simetría cilíndrica que consta de un conductor cilíndrico macizo de radio  $3a$  rodeado por un conductor cilíndrico hueco de radio interior  $4a$  y radio exterior  $5a$  por el cilindro central pasa una densidad de corriente uniforme  $\vec{J} = J_0 \hat{z}$  y por el cilindro hueco exterior circula una intensidad de corriente de igual magnitud pero de signo opuesto. El medio entre ambos conductores tiene permeabilidad  $\mu > \mu_0$ . Calcule el campo magnético en todas partes.

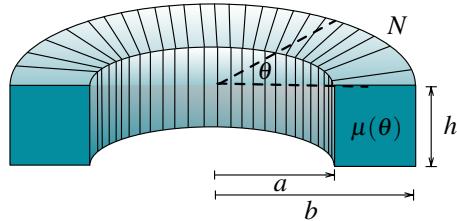


### Problema 14.2



Considere una bobina toroidal de sección rectangular de  $N$  espiras, por cada una de las cuales circula una corriente  $I$ . El radio interior de la bobina es  $a$  y el exterior es  $b$  y la altura es  $h$ . El núcleo de esta bobina es de un material inhomogéneo en tal forma que su permeabilidad magnética  $\mu$  depende tan solo del ángulo polar  $\theta$  y satisface

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 + k \cos^2 \theta$$

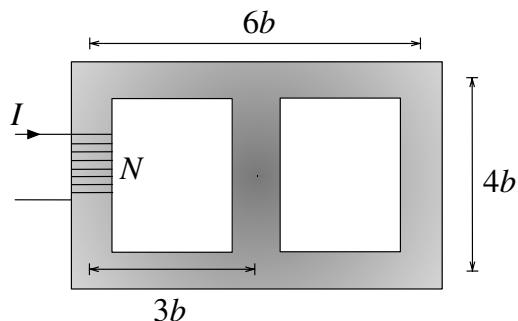


Determine la intensidad magnética  $\vec{H}$  en el interior de la bobina.

### Problema 14.3



Un material ferromagnético tiene la forma que se indica en la figura, donde la sección transversal es un cuadrado de lado de  $a = 2$  cm. El resto de las dimensiones se muestran en la figura con  $b = 2,5$  cm. El enrollado tiene  $N = 500$  vueltas, la corriente que circula es  $I = 0,3$  A y  $\mu = 2500\mu_0$ . Calcule el flujo neto en la rama central y en la rama del lado derecho. Desprecie cualquier pérdida de flujo fuera del material ferromagnético.

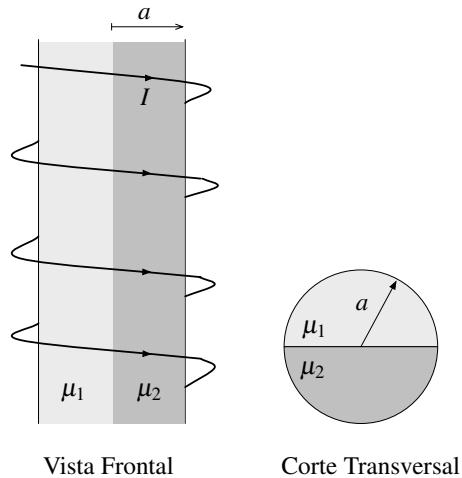


**Problema 14.4**

Un solenoide infinito de radio  $a$  que tiene  $m$  espiras por unidad de largo, lleva corriente  $I$ . La permeabilidad magnética del material al interior del solenoide es

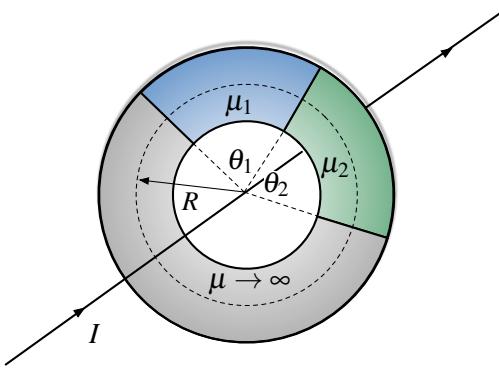
$$\mu = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } 0 < \theta \leq \pi \\ \mu_2 & \text{si } \pi < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Encuentre el campo magnético, la intensidad magnética en todo el espacio, la magnetización de los materiales y las densidades de corriente.

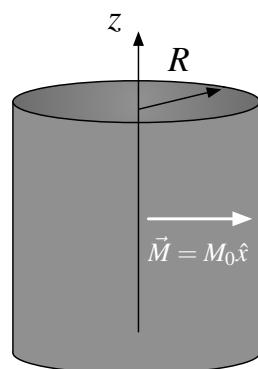
**Problema 14.5**

Considere un toroide de sección transversal circular  $A$  y de radio medio  $R$  como se muestra en la Figura. El toroide está compuesto por tres medios de permeabilidades  $\mu$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_2$  (ver Figura). Un cable con corriente  $I$  atraviesa el toroide por su centro por eje perpendicular al toroide. Para efectos de cálculo, puede considerar que  $\mu \rightarrow \infty$ .

- Calcule  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$ , para cada material si las permeabilidades de los materiales son lineales, uniformes e isotrópicas.
- Si las permeabilidades de los materiales son lineales uniformes e isotrópicas ¿existirían densidades de corriente de magnetización?. Si existieran, calcúlelas.
- ¿Cómo cambia (explique)  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  y las corrientes de magnetización si  $\mu_1 = \alpha r$  o  $\mu_1 = \alpha\theta$ ?

**Problema 14.6**

Se tiene un cilindro infinitamente largo, de radio  $R$  con su eje coincidente con el eje  $z$  y con una magnetización constante  $\vec{M} = M_0\hat{x}$  perpendicular a su eje. Determine las corrientes de magnetización (volumétricas y superficiales) y el campo magnético en el eje del cilindro.



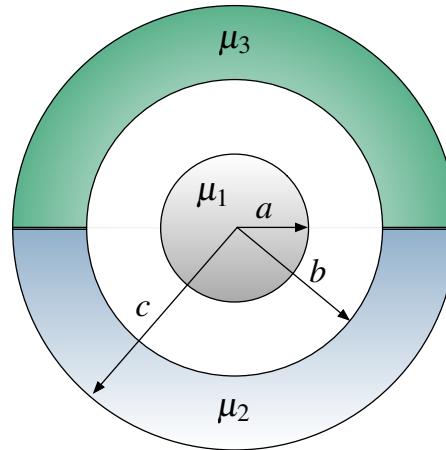
## CAPÍTULO 14. MEDIOS MAGNÉTICOS

### Problema 14.7



Por el interior de un cilindro infinito de radio  $a$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$ , circula una corriente  $I_0$  en la dirección  $\hat{z}$ . A este cilindro lo rodea un casquete cilíndrico de radio interno  $b$  y radio externo  $c$ . El casquete consiste en dos mitades, de permeabilidad  $\mu_2$  y  $\mu_3$  respectivamente (ver figura). Por el casquete circula la misma cantidad de corriente  $I_0$  pero en sentido opuesto al del cilindro interno (es decir, en la dirección  $-\hat{z}$ ). Asuma que las densidades de corriente al interior de estos materiales es homogénea.

- Encuentre una expresión para la corriente total  $I(r)$  que atraviesa una superficie circular de radio  $r$  arbitrario, concéntrica a los cilindros.
- Encuentre la intensidad magnética  $\vec{H}$  y el campo magnético  $\vec{B}$  en todo el espacio.
- Determine el valor de las corrientes superficiales  $\vec{K}_M$  inducidas por la magnetización  $\vec{M}$  de los medios, en cada una de las superficies.



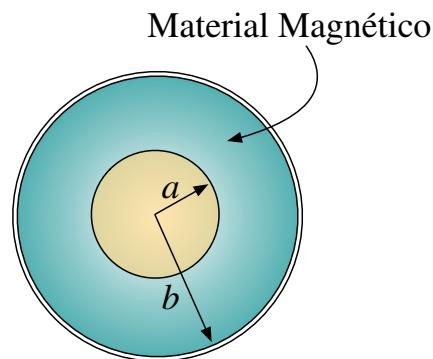
### Problema 14.8



Considere una línea de transmisión coaxial llena de un material con permeabilidad magnética no lineal, con un conductor interno sólido de radio  $a$  y un conductor externo muy delgado, de radio interior  $b$  según se muestra en la figura. Se sabe que en el conductor interno circula una corriente  $I_0$  hacia afuera de la hoja, y vuelve en dirección opuesta por el conductor externo. En ambos conductores la corriente se reparte en forma homogénea, y ambos se pueden suponer muy largos. Si la curva de magnetización del material se puede aproximar como

$$B = \frac{1,6H}{1000 + H}$$

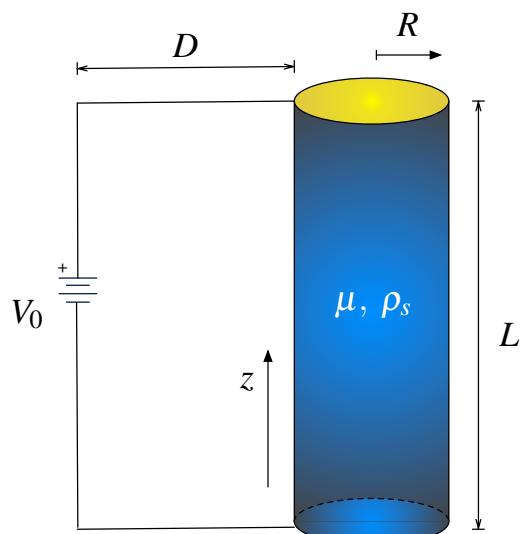
- Campo magnético en todo el espacio.
- Vector de magnetización en el medio material.



**Problema 14.9**

El sistema de la Figura representa un conductor cilíndrico de resistividad  $\eta$  el cual está sometido a una diferencia de potencial  $V_0$ . Este conductor posee además características magnéticas, con una permeabilidad relativa  $\mu(r) = \mu_0 \left(1 + \frac{r}{R}\right)$ , tal como se muestra en la Figura. Suponiendo que la corriente se distribuye en forma homogénea al interior del conductor y que  $D \gg L \gg R$ , se pide

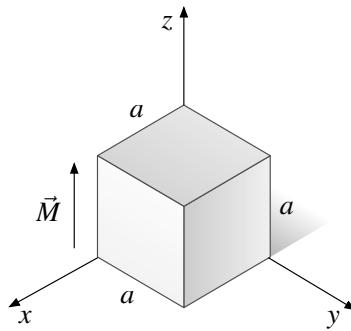
- Estimar campos  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  en el interior y exterior (pero en las cercanías) del conductor.
- Estimar la magnetización  $\vec{M}$ .
- Determinar las densidades de corrientes de magnetización y libre en el conductor.

**Problema 14.10**

Un cubo de lado  $a$  está hecho de un material ferromagnético el cual está permanentemente magnetizado, con una magnetización igual

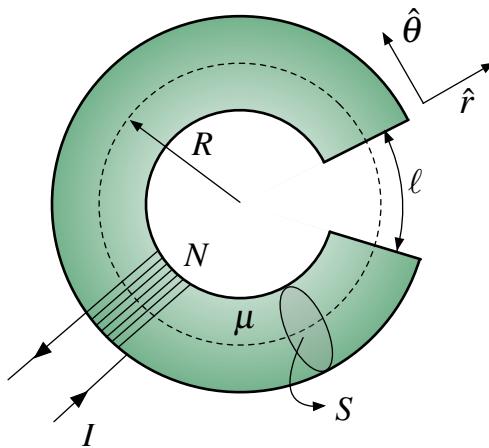
$$\vec{M} = \frac{M_0 x}{a} \hat{z}$$

Encuentre las densidades de corriente de magnetización presentes en el cubo.

**Problema 14.11**

Considere  $N$  vueltas de un alambre conductor se han enrollado sobre un toroide de hierro dulce de sección transversal  $S$  y permeabilidad  $\mu$ . El radio medio del toroide es  $R$  y posee un entrehierro de longitud  $\ell$  como se muestra en la Figura. La corriente  $I$  que circula por el alambre es suficientemente grande de manera que la magnetización  $\vec{M}$  adopta su valor de saturación  $\vec{M}_s = M_s \hat{\theta}$  en el hierro dulce.

- Encuentre los valores de  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  en todo el toroide.
- Cuando la corriente  $I$  se interrumpe, la magnitud de la magnetización decrece a su valor remanente  $\vec{M}_r = M_r \hat{\theta}$  en el hierro dulce. Encuentre los valores de  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  en esta situación.



### III. Soluciones

#### Solución 14.2

Dada la simetría del problema, el campo magnético debe ser de la forma  $\vec{B} = B(r, \theta)\hat{\theta}$  y  $\vec{H} = H(r, \theta)\hat{\theta}$ . Por otro lado, dado que el medio tiene una permeabilidad dependiente de  $\theta$ , existe un cambio progresivo en el material. Lo anterior puede ser aproximado como un cambio de medio, donde el campo magnético es normal a la interfase de cambio (cada radio vendría siendo una interfase). Luego, como  $B_{1n} = B_{2n}$  se deduce que dentro del toroide  $\vec{B}$  no tiene dependencia de  $\theta$ . Luego, por Ampère

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre}} \implies \int_0^{2\pi} H(r, \theta)\hat{\theta} \cdot r d\theta \hat{\theta} = NI$$

Como en este caso

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \implies H(r, \theta) = \frac{B(r)}{\mu} = \frac{1 + k \cos^2 \theta}{\mu_0} B(r)$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + k \cos^2 \theta}{\mu_0} B(r) r d\theta = NI \implies \frac{r B(r)}{\mu_0} \int_0^{2\pi} (1 + k \cos^2 \theta) d\theta = NI$$

Resolviendo la integral y despejando  $B(r)$  se tiene que

$$\frac{r B(r)}{\mu_0} (2\pi + k\pi) = NI \implies B(r) = \frac{\mu_0 NI}{\pi(2+k)r}$$

por lo que finalmente

$$\vec{H} = \frac{\mu_0 NI}{\pi(2+k)r} = \frac{1 + k \cos^2 \theta}{2+k} \frac{NI}{\pi r} \hat{\theta}$$

#### Solución 14.3

Para resolver este problema se usará la técnica de reluctancias. En primera instancia, es necesario definir reluctancia como

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}$$

donde  $l$  es el largo,  $\mu$  la permeabilidad y  $A$  la sección transversal del medio por donde pasa un respectivo flujo. La idea de este método es emular un circuito simple con resistencias, en el cual



la fuente de tensión es el equivalente al enrollado con corriente ( $V \rightarrow NI$ ), las corrientes es equivalente al los flujos magnéticos ( $I \rightarrow \Phi$ ) y las resistencias a las reluctancias ( $R \rightarrow \mathcal{R}$ ).

Para aplicar este método, es necesario identificar las reluctancias en el circuito magnético, para ello se verifica en que ramales del circuito pasa el mismo flujo.

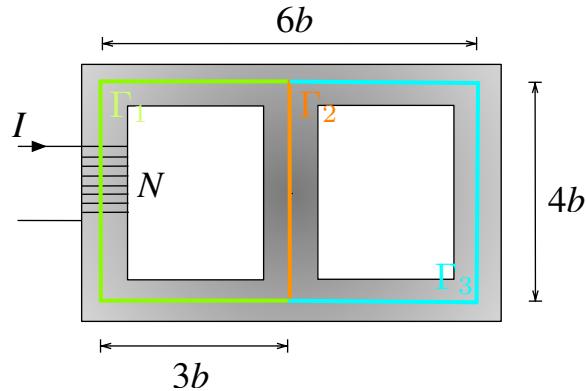


Figura 14.1: Determinación de Reluctancias.

En la Figura 14.1, es posible identificar los caminos por los cuales circula el mismo flujo. Cada uno de esos caminos  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_3$  tienen asociadas los siguientes valores de reluctancias:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{10b}{\mu A} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{4b}{\mu A} \quad \mathcal{R}_3 = \frac{10b}{\mu A}$$

Una vez determinado los valores de las reluctancias, se procede a plantear el circuito análogo.

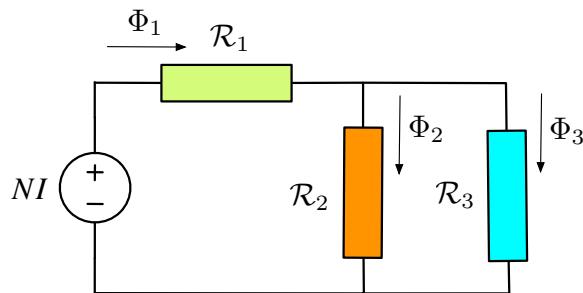


Figura 14.2: Circuito Equivalente.

Las incógnitas en este circuito son los flujos  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  y  $\Phi_3$  como es mostrado en la Figura 14.2. Planteando la ley de Kirchoff de Nodos se obtiene que

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

Mientras si se plantea la ley de Kirchoff de Voltajes

$$NI = \mathcal{R}_1\Phi_1 + \mathcal{R}_2\Phi_2$$

$$\mathcal{R}\Phi_2 = \mathcal{R}_3\Phi_3$$



## CAPÍTULO 14. MEDIOS MAGNÉTICOS

Usando las tres ecuaciones anteriores es posible despejar los valores pedidos, de modo que

$$\Phi_2 = \frac{NI_0\mu A}{18b}$$

$$\Phi_3 = \frac{NI_0\mu A}{45b}$$

### Solución 14.4

Dada la geometría del problema, el campo magnético provocado por el solenoide debe ser paralelo al eje del cilindro. Recuérdese en el solenoide ideal e infinitamente largo se hace el supuesto que el campo magnético es nulo fuera del mismo.

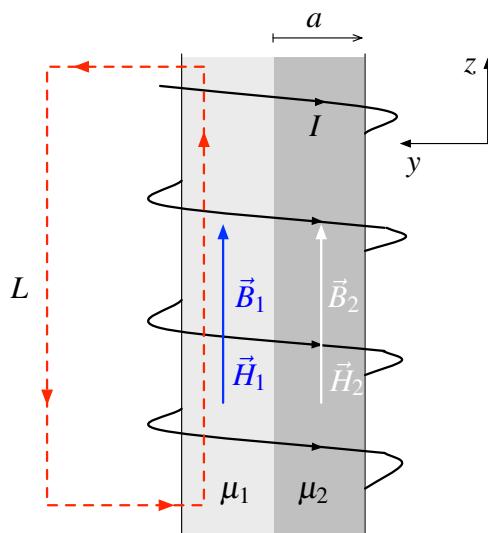


Figura 14.3: Cálculo de Campo Magnético Usando Ley de Àmpere.

En la Figura 14.3 se muestra el rectángulo con el cual puede ser usada la Ley de Ampère de la siguiente forma

$$\oint \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre}} \implies H_1 \cdot L = mLI \implies \vec{H}_1 = mI\hat{z}$$

Análogamente, es posible hacer el mismo análisis para  $\vec{H}_2$ , por lo que también se puede concluir

$$\vec{H}_2 = mI\hat{z}$$

El resultado anterior es coherente con la condición de borde  $\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_{\text{libre}}$  ya que en la interfase de los medios no hay corrientes libres circulando por ende  $\vec{H}_1 = \vec{H}_2$ . Por otro lado, los campos magnéticos están dados por

$$\vec{B}_1 = \mu_1 mI\hat{z} \quad \vec{B}_2 = \mu_2 mI\hat{z}$$



A partir de lo anterior, se procede a determinar las magnetizaciones de cada medio, las cuales cumplen  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , por lo tanto

$$\vec{M}_1 = \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z} \quad \vec{M}_2 = \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z}$$

Ahora, para encontrar las densidades de corrientes presentes se usan las definiciones  $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$  y  $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ . Hay que tener precaución debido a que los medios tienen más de una normal.

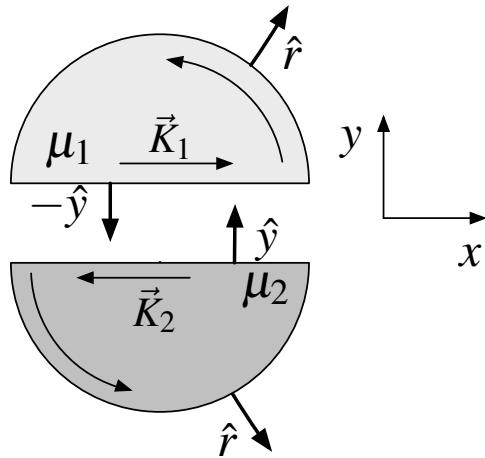


Figura 14.4: Cálculo de Corrientes de Magnetización.

Siguiendo la Figura 14.4, se pueden determinar las corrientes superficiales en la división son

$$\begin{aligned}\vec{K}_1 &= \left[ \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z} \right] \times (-\hat{y}) = \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{x} \\ \vec{K}_2 &= \left[ \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z} \right] \times \hat{y} = -\left( \frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{x}\end{aligned}$$

Mientras que en los mantos se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{K}_1 &= \left[ \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z} \right] \times \hat{r} = \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{\theta} \\ \vec{K}_2 &= \left[ \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z} \right] \times \hat{r} = \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{\theta}\end{aligned}$$

Finalmente, dado que  $\vec{M}$  es constante  $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$ .

### Solución 14.11 P ✓

- a) En primera instancia, debido al solenoide enrolado en el toroide, existe un campo magnético confinado dentro del material magnético y también en el entrehierro. A priori, se supone



## CAPÍTULO 14. MEDIOS MAGNÉTICOS

que existen los campos  $\vec{H}_1$  y  $\vec{B}_1$  en el hierro dulce y los campos  $\vec{H}_0$  y  $\vec{B}_0$  en el entrehierro. Adicionalmente, en este tipo de problema se suele suponer que el campo magnético es más bien homogéneo dentro del toroide, por lo cual es una buena aproximación es tomar el camino medio del mismo para calcular  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  en todos los puntos.

Entonces, usando Ley de Ampère al camino medio de radio  $R$  y usando el supuesto que  $\vec{H}_1 = H_1 \hat{\theta}$  y  $\vec{H}_0 = H_0 \hat{\theta}$  se obtiene que

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \implies H_1 \cdot (2\pi R - \ell) + H_0 \cdot \ell = NI$$

Dado que el hierro dulce alcanzó su máxima magnetización, se puede afirmar que

$$\vec{B}_1 = \mu_0(\vec{H}_1 + \vec{M}_s)$$

El paso clave del problema, es usar la siguiente condición de borde

$$(\vec{B}_0 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0 \implies B_{0n} - B_{1n} = 0 \implies B_{0n} = B_{1n}$$

Nótese que es posible aplicar esta condición ya que el campo magnético es perpendicular a las interfasas del problema (hierro-entrehierro y entrehierro-hierro), por ende  $\vec{B}$  debe ser continuo en esos puntos. Adicionalmente, como  $\vec{H}_0 = \mu_0 \vec{B}_0$  se obtiene que

$$H_1(2\pi R - \ell) + H_1 \ell + M_s \ell = NI \implies \vec{H}_1 = \frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta}$$

En consecuencia,

$$\vec{H}_0 = \frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta} + \vec{M}_s \quad \vec{B}_1 = \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta} + \vec{M}_s \right)$$

- b) Usando el resultado obtenido en la parte anterior, se tiene ahora que  $I = 0$  y  $\vec{M}_s \rightarrow \vec{M}_r$ . Por lo que los valores de los campos son

$$\vec{H}_1 = -\frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta}$$

$$\vec{H}_0 = \vec{M}_r - \frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta}$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{M}_r - \frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta} \right)$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 14.1

- Utilice la Ley de Ampère para determinar el campo magnético en todo el espacio. Debe separar el problema en cuatro casos.
- Recuerde que se considera que los conductores tiene una permeabilidad igual a  $\mu_0$ .

### Indicación 14.5

- Aplique la Ley de Ampère en un camino circular alrededor del alambre con corriente  $I$ . Por condiciones de borde  $B_{1n} = B_{2n}$ , el campo magnético  $\vec{B}$  es continuo para un mismo radio  $r$  (ie. el campo magnético no depende del medio en el cual se encuentre).
- Note que existen tres vectores  $\vec{H}$  en cada medio:  $\vec{H}_1$ ,  $\vec{H}_2$  y  $\vec{H}_3$ , de modo que la integral de camino de Ampère debe dividirse en tres.
- El hecho de que  $\mu \rightarrow \infty$  provoca que el vector  $\vec{H} \rightarrow 0$  en ese medio.
- Una vez determinado los vectores  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  en cada medio, determine el vector magnetización  $\vec{M}$  y con ello las densidades de corrientes de magnetización.

### Indicación 14.6

- Para determinar las corrientes de magnetización (volumétricas y superficiales) en el cilindro es útil recordar que  $\hat{x} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$  en coordenadas cilíndricas.
- Una vez determinadas las corrientes de magnetización, use Biot-Savart para determinar el campo en el eje  $z$ . Note que debido a que el cilindro es infinito el campo magnético debe ser igual en todo el eje del cilindro, por lo que se recomienda determinarlo en el centro del cilindro.

### Indicación 14.7

- Para determinar la corriente  $I(r)$  recuerde que esta se distribuye en forma homogénea, por lo cual  $\vec{J}_{\text{interior}} = \frac{I_0}{\pi a^2} \hat{z}$  y  $\vec{J}_{\text{exterior}} = -\frac{I_0}{\pi(c^2 - b^2)} \hat{z}$



## CAPÍTULO 14. MEDIOS MAGNÉTICOS

- Use la Ley de Ampère para determinar el campo magnético en todas las zonas. Note que en el caso  $b < r < c$  se tiene que aplicar la condición de borde  $B_{1n} = B_{2n}$ .
- Conocido  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  determine  $\vec{M}$  y con ello las cinco densidades de corriente superficiales que existen en el problema.

### Indicación 14.8

- Use la Ley de Ampère dentro del material magnético para determinar el valor de  $\vec{H}$ .
- Determinado  $\vec{H}$  y junto a la relación que da el enunciado del problema es posible determinar el valor de  $\vec{B}$ . Finalmente, es directo determinar  $\vec{M}$  a partir de lo anterior.

### Indicación 14.9

- Como  $L \gg R$  es posible aplicar la Ley de Ampère para determinar  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ .
- Con lo anterior, determine  $\vec{M}$  y las corrientes de magnetización.

### Indicación 14.10

- Identifique las seis normales del cubo y haga los productos cruces correspondientes para determinar las densidades superficiales. La densidad volumétrica es directa de aplicar el rotor al vector magnetización.



## V. Resultados

Problema	Respuestas
<span style="color: #0070C0;">P</span> <b>14.1</b>	$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 r J_0}{2} \hat{\theta} & r < 3a \\ \frac{9\mu a^2 J_0}{2r} \hat{\theta} & 3a < r < 4a \\ \frac{\mu_0 J_0}{2r} (25a^2 - r^2) \hat{\theta} & 4a < r < 5a \\ 0 & r > 5a \end{cases}$
<span style="color: #0070C0;">P</span> <b>14.2</b>	$\vec{H} = \frac{1+k^2 \cos^2 \theta}{2+k} \frac{NI}{\pi r} \hat{\theta}$
<span style="color: #0070C0;">P</span> <b>14.3</b>	$\Phi_{\text{central}} = \frac{NI_0 \mu A}{18b} \text{ y } \Phi_{\text{derecho}} = \frac{NI_0 \mu A}{45b}$
<span style="color: #0070C0;">P</span> <b>14.4</b>	$\vec{H} = mI \hat{z}, \vec{B} = \begin{cases} \mu_1 mI \hat{z} & \text{si } 0 < \theta \leq \pi \\ \mu_2 mI \hat{z} & \text{si } \pi < \theta \leq 2\pi \end{cases}$ $\vec{M} = \begin{cases} \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right) mI \hat{z} & \text{si } 0 < \theta \leq \pi \\ \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right) mI \hat{z} & \text{si } \pi < \theta \leq 2\pi \end{cases}$
<span style="color: #0070C0;">P</span> <b>14.5</b>	<p>a) <math>\vec{B} = \frac{\mu_1 \mu_2 I}{R(\theta_1 \mu_2 + \theta_2 \mu_1)} \hat{\theta} \vec{H}_1 = \frac{\mu_2 I}{R(\theta_1 \mu_2 + \theta_2 \mu_1)} \hat{\theta} \vec{H}_2 = \frac{\mu_1 I}{R(\theta_1 \mu_2 + \theta_2 \mu_1)} \hat{\theta} \vec{H}_3 = 0</math></p> <p>b) <math> \vec{K}_1  = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0} \frac{\mu_2 I}{R(\theta_1 \mu_2 + \theta_2 \mu_1)} \quad  \vec{K}_2  = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_0} \frac{\mu_1 I}{R(\theta_1 \mu_2 + \theta_2 \mu_1)} \quad \vec{J} = 0</math></p>
<span style="color: #0070C0;">P</span> <b>14.6</b>	$\vec{J} = 0, \vec{K} = M_0 \hat{z} \sin \theta, \vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{2R} \hat{x}$



## CAPÍTULO 14. MEDIOS MAGNÉTICOS

---

Problema	Respuestas
----------	------------

---

**a)**  $I(r) = \begin{cases} \frac{I_0 r^2}{a^2} & r < a \\ I_0 & a < r < b \\ I_0 \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) & b < r < c \\ 0 & r > c \end{cases}$

**b)**  $\vec{H}(r) = \begin{cases} \frac{I_0 r}{2\pi a^2} \hat{\theta} & r < a \\ \frac{I_0}{2\pi r} \hat{\theta} & a < r < b \\ \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3} \frac{I_0}{\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \hat{\theta} & b < r < c \quad 0 < \theta < \pi \\ \frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} \frac{I_0}{\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \hat{\theta} & b < r < c \quad pi < \theta < 2\pi \\ 0 & r > c \end{cases}$

**c)**  $\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{I_0 r}{2\pi a^2} \hat{\theta} & r < a \\ \frac{I_0}{2\pi r} \hat{\theta} & a < r < b \\ \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_2 + \mu_3} \frac{I_0}{\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \hat{\theta} & b < r < c \\ 0 & r > c \end{cases}$

---

**14.8** **a)**  $\vec{B} = \frac{1.6 I_0}{2000\pi r + I_0} \hat{\theta}, \vec{H} = \frac{I_0}{2\pi r} \hat{\theta}$

**b)**  $\vec{M} = \left( \frac{1.6 I_0}{\mu_0 (2000\pi r + I_0)} - \frac{I_0}{2\pi r} \right) \hat{\theta}$

---

**14.10**  $\vec{K}_1 = \frac{M_0 x}{a} \hat{x}, \vec{K}_2 = -\frac{M_0 x}{a} \hat{x}, \vec{K}_3 = M_0 \hat{x}. \text{ En las otras caras no hay densidades superficiales. } \vec{J} = -\frac{M_0}{a} \hat{y}$

---

**14.11** **a)**  $\vec{H}_1 = \frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta}, \vec{H}_0 = \frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta} + \vec{M}_s, \vec{B}_1 = \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta} + \vec{M}_s \right).$

**b)**  $\vec{H}_1 = -\frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta}, \vec{H}_0 = \vec{M}_r - \frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta}, \vec{B}_1 = \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{M}_r - \frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta} \right).$

---



## **Parte IV**

# **Campos Electromagnéticos Variantes en el Tiempo**



# Ley de Faraday-Lenz

## I. Resumen Teórico

---

### Ley de Faraday

La ley de Faraday indica que la fem (fuerza electromotriz inducida) en un circuito cerrado está dado por

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (15.1)$$

donde  $\Phi$  es el flujo de campo magnético por el área respectiva.

---

### Ley de Lenz

La corriente inducida en un circuito debido a la variación temporal del flujo del campo magnético siempre es opuesta al crecimiento/decrecimiento del mismo.

---

### Ley de Faraday (Forma Diferencial)

En presencia de campo magnéticos que dependen del tiempo, se cumple que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (15.2)$$

Nótese el hecho que el campo eléctrico deja de ser conservativo cuando existen campos dependientes del tiempo.

## Ley de Faraday (Forma Diferencial)

Integrando en una superficie la Ecuación 15.2, se obtiene que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (15.3)$$

donde  $\Omega$  es la superficie delimitada por  $\Gamma$ .

## Inducción por Fuerza de Lorentz

Las conductores también pueden sufrir diferencias de potencial en algunos de sus puntos si estos se encuentran moviéndose con velocidad  $\vec{v}$  en campos magnéticos constantes  $\vec{B}$ . El campo eléctrico inducido está dada por

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \quad (15.4)$$

Por lo cual el módulo de la fem estará dada por

$$|\varepsilon| = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (15.5)$$

## Recomendaciones

- La ley de Faraday viene a cambiar lo visto en los capítulos anteriores, donde el único generador de campo eléctrico eran las cargas. Como fue mostrado, la variación del flujo magnético en el tiempo también inducen campos eléctricos en el tiempo.
- A la naturaleza no le gustan los cambios, siempre intentará oponerse al cambio de flujo magnético con la generación de la corriente inducida. Si el flujo aumenta, aparecerá una corriente inducida que intentará hacer que ese flujo disminuya. Por otro lado, si el flujo magnético está disminuyendo aparecerá una corriente oponiéndose a eso.
- Para determinar el sentido de la corriente inducida basta hacer el análisis anterior del punto anterior, sin la necesidad de otros cálculos.

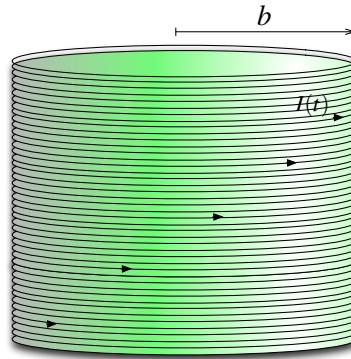


## II. Problemas Propuestos

### Problema 15.1

Una bobina muy larga de radio  $b$  tiene  $m$  vueltas por unidad de largo y lleva una corriente  $I(t) = I_0 \sin \omega t$ .

- Encuentre el campo magnético dentro de la bobina.
- Encuentre el campo eléctrico dentro de la bobina.
- Encuentre el campo eléctrico fuera de la bobina.

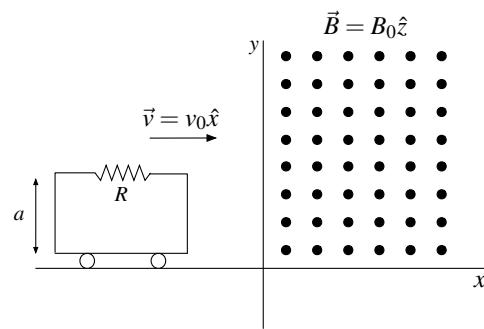


### Problema 15.2

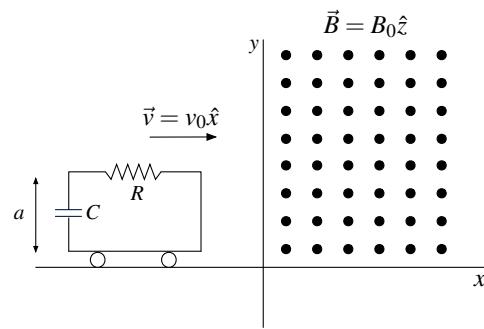
Un carrito de masa  $m$  que se desplaza con velocidad  $v_0 \hat{x}$ , hasta llegar a una región en que existe un campo magnético uniforme en  $x = 0$ .

- Si el carrito posee solamente una resistencia  $R$  (Figura a), encuentre la velocidad del carrito como función del tiempo.
- Si el carrito posee una resistencia  $R$  y un condensador  $C$  inicialmente descargado (Figura b), encuentre la velocidad del carrito como función del tiempo y la carga del condensador en el tiempo.

En ninguno de los dos casos, considere el campo magnético producido por la corriente en el circuito por ser mucho menor al campo externo constante y suponga que el carrito es muy largo por lo que no debe preocuparse de lo que ocurre una vez que entra enteramente al campo.



(a) Circuito Simple



(b) Circuito RC

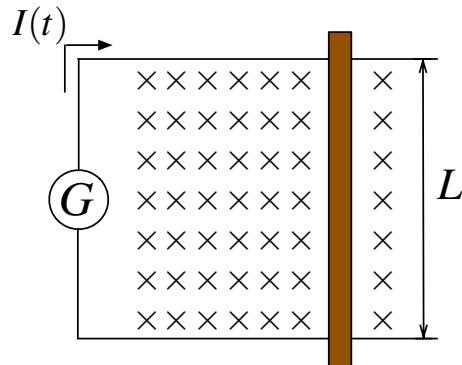


**Problema 15.3**   

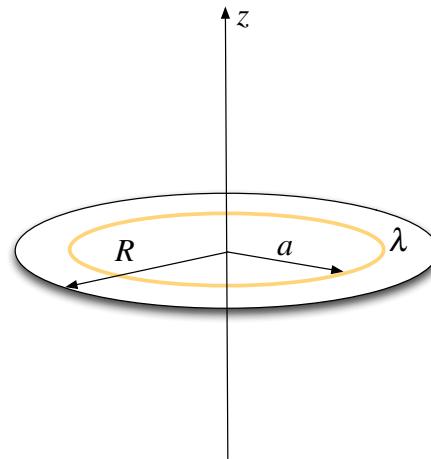
Un generador de corriente  $G$  produce una corriente  $I(t)$  en un circuito formado por un riel conductor sin roce, en forma de U y una barra conductora de masa  $m$  que atraviesa los rieles en dirección perpendicularmente. Un campo magnético constante y uniforme  $\vec{B}$  que apunta perpendicular al plano del circuito existe en todo el espacio. La corriente  $I(t)$  que circula en el circuito varía en el tiempo de acuerdo con

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ bt & 0 < t < T \\ 0 & T < t \end{cases}$$

Para  $t \leq T$ , determine la fuerza electromotriz inducida en el circuito y la velocidad de la barra en función del tiempo.

**Problema 15.4**   

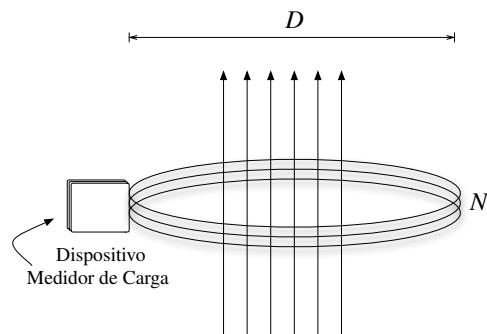
Un disco de material aislante de radio  $R$  tiene en su borde una carga uniformemente distribuida  $\lambda$  [C/m] y está suspendido horizontalmente de un hilo que coincide con su eje. Dentro de un círculo más pequeño de radio  $a < R$  existe un campo magnético  $\vec{B}$  uniforme paralelo al eje. El disco está inicialmente en reposo. En  $t = 0$  se desconecta la fuente del campo magnético, el que cae a cero después de un corto intervalo de tiempo. Si  $I$  es el momento de inercia del disco, encuentre:



- La velocidad angular final del disco
- ¿Depende ésta de la forma en que cae a cero el campo  $B$ ?

**Problema 15.5**   

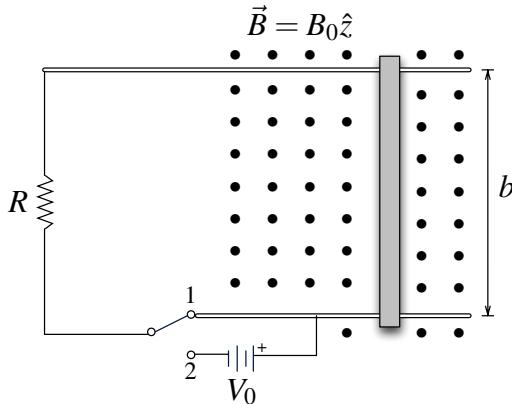
Una bobina circular plana de  $N$  vueltas tiene diámetro  $D$  y resistencia  $R$ . La bobina se orienta con su eje paralelo a un campo magnético  $B$  uniforme y los extremos de la bobina se conectan a un dispositivo capaz de medir la carga que pasa a través de él. Si la bobina se gira en  $180^\circ$  sobre un eje perpendicular al campo magnético el dispositivo mide una carga  $Q$ . Encuentre el valor de  $B$  en términos de  $N$ ,  $D$ ,  $R$  y  $Q$ .



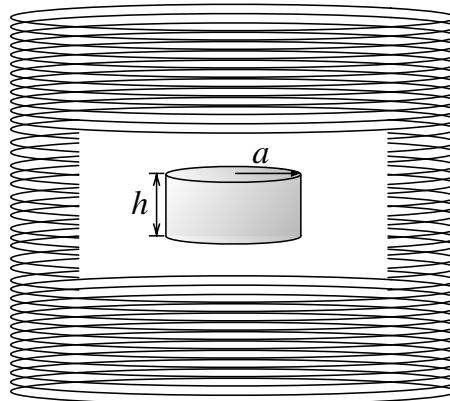
**Problema 15.6**   

Una barra conductora de masa  $m$  desliza sin roce sobre dos rieles conductores paralelos separados una distancia  $b$ . El circuito posee un switch que puede cambiar entre dos posiciones. Si el switch se encuentra en la posición 1, los rieles quedan conectados únicamente mediante una resistencia  $R$ , mientras que si se mueve a la posición 2, los rieles quedan conectados por la misma resistencia  $R$  y una batería que provee un diferencial de potencial  $V_0$  (ver Figura). Hay un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$  uniforme perpendicular al plano de la Figura.

- Considera que inicialmente el switch se encuentra en la posición 1 y se le imparte una velocidad  $v_0$  a la barra en  $t = 0$ . Determine la velocidad en función del tiempo de la barra y el desplazamiento máximo que alcanza la misma.
- Suponiendo que la barra alcanzó su máximo desplazamiento, el switch se cambia la posición 2 y se reinicia el tiempo. Determine nuevamente la velocidad de la barra en el tiempo.

**Problema 15.7**   

Los hornos de inducción se usan para fundir metales. Ellos consisten en grandes contenedores donde caben hasta 30 toneladas, aislados térmicamente y rodeados de una gran bobina donde circula corriente. A modo de ejemplo, considere el siguiente modelo simplificado. Una barra conductora de radio  $a$ , largo  $h$  y conductividad  $g$  se coloca en la interior de una bobina que tiene  $n$  vueltas por unidad de longitud y que lleva una corriente alterna  $I = I_0 \sin \omega t$  con  $\omega$  la frecuencia angular. Calcule la potencia disipada en el cilindro. Desprecie efectos de borde. (Propuesto: ¿Cuál es el valor de la corriente que circula dentro del cilindro?).

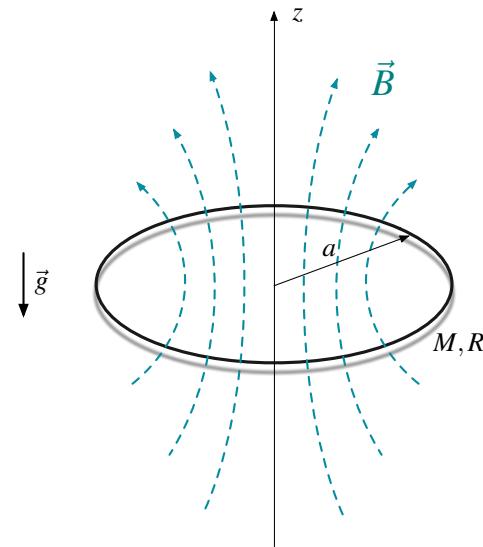


## CAPÍTULO 15. LEY DE FARADAY-LENZ

### Problema 15.8

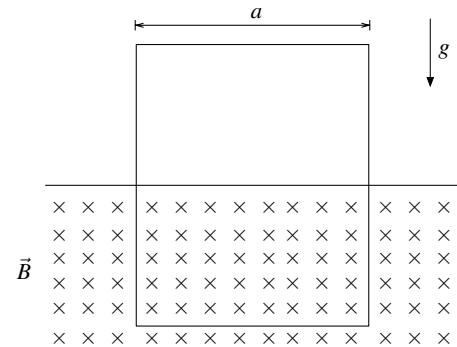
Una espira circular de radio  $a$ , masa  $M$  y resistencia  $R$  se deja caer desde  $z = 0$  con su eje de simetría vertical en una zona donde el campo magnético es axialmente simétrico alrededor del eje  $z$  y cuya componente vertical es  $B_z = Cz$ . El eje de la espira coincide con el eje de simetría del campo.

- ¿En qué dirección fluye la corriente en la espira mientras cae bajo la acción de la fuerza de gravedad?.
- Encuentre la corriente en la espira en función de la velocidad. Desprecie las contribuciones al flujo provenientes de la corriente inducida.
- Determine las fuerzas que actúan sobre la espira provenientes axial y radial del campo magnético.
- Encuentre la velocidad de la espira después que ha caído un largo tiempo.



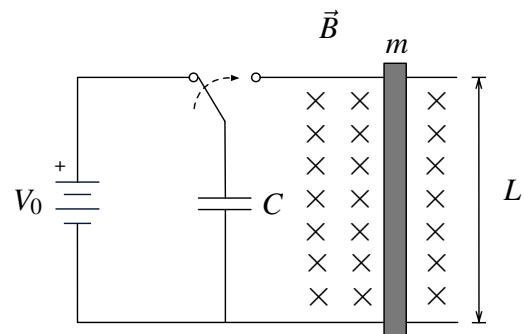
### Problema 15.9

Una espira rectangular de resistencia  $R$ , ancho  $a$ , largo  $L$  (muy grande) y de masa  $m$  cae bajo efecto de la gravedad bajo un campo magnético  $\vec{B}$  perpendicular al plano de la espira y no nulo solo en la parte superior del plano. Asuma que una parte de la espira siempre está afuera de la región de campo magnético, determine la velocidad terminal y el sentido de la corriente inducida en la espira.



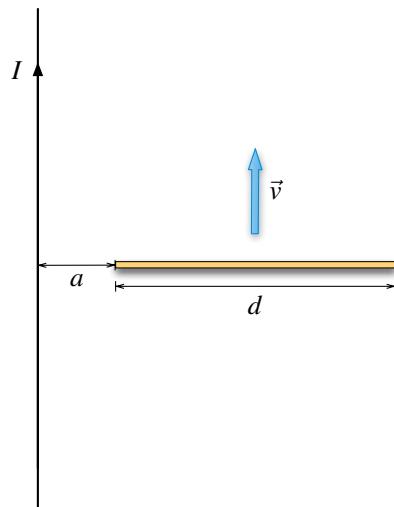
### Problema 15.10

La parte final de un riel de resistencia nula está conectada a un condensador de capacidad  $C$ , el cual está inicialmente cargado a un voltaje  $V_0$  (ver figura). El sistema se encuentra además en presencia de un campo magnético  $\vec{B}$  homogéneo y perpendicular al plano de la figura. Una barra de masa  $m$  y resistencia  $R$  es dispuesta perpendicularmente a los dos rieles separados una distancia  $L$ , de modo que puede deslizarse sobre ellos sin roce. En  $t = 0$ , se cambia la configuración del interruptor de modo que la barra comienza a moverse desde el reposo hacia la derecha. Encuentre la velocidad de la barra cuando  $t \rightarrow \infty$ .

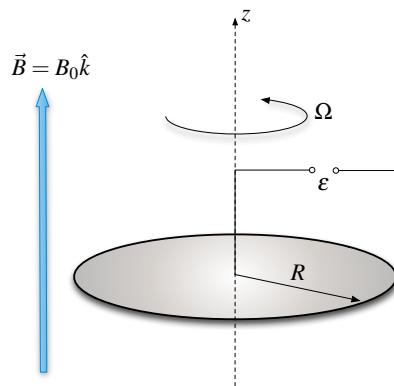


**Problema 15.11**

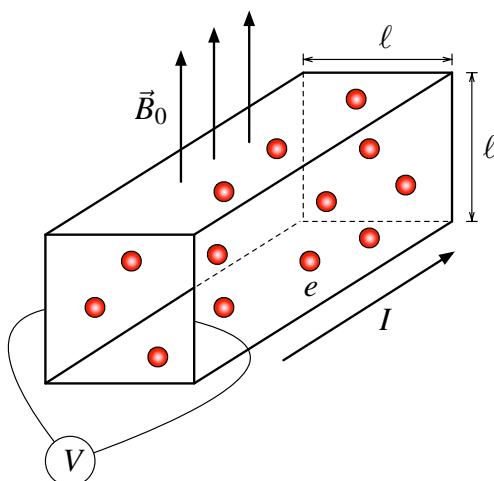
Una barra metálica de largo  $d$  y espesor despreciable se mueve con rapidez  $v$  constante, de forma paralela a una corriente eléctrica de intensidad  $I$ . Si el extremo izquierdo de la barra está a una distancia  $a$  del cable con corriente, determine la diferencia de potencial entre los extremos de la barra. ¿Cuál es el valor de esa diferencia cuando  $a \gg d$ ?

**Problema 15.12**

El disco de Faraday consiste en un disco conductor de radio  $R$  que gira con velocidad angular  $\Omega \hat{k}$  bajo la acción de un campo magnético constante  $\vec{B} = B_0 \hat{k}$  (ver Figura). Calcule el módulo de la fuerza electromotriz (fem) inducida entre el centro y el borde del disco.

**Problema 15.13**

Considere un cable infinito de sección transversal cuadrada de largo  $\ell$ , sobre el cual cruza una corriente  $I$  con una densidad de portadores  $n$  homogénea (ie. cantidad de portadores por unidad de volumen) y carga  $e$ . Si todo el sistema esta bajo la influencia de un campo magnético uniforme  $\vec{B}_0$  perpendicular a la dirección de la corriente. Encuentre el voltaje (voltaje de Hall) que se genera entre las placas transversales.



### III. Soluciones

#### Solución 15.1

- a) En primera instancia se debe usar el hecho que dentro de una bobina se tiene  $\vec{B} = B(z)\hat{z}$  y se está trabajando en un régimen cuasiestacionario (se desprecia la corriente desplazamiento). Luego, usando Ley de Ampère para el camino  $\Gamma$  recorrido en sentido antihorario y suponiendo que la bobina tiene una largo  $L$ , se obtiene que

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlaz}} \implies B(z, t) \cdot L = \mu_0 m L I(t)$$

Lo que finalmente implica que

$$\vec{B} = \mu_0 m I_0 \sin(\omega t) \hat{z}$$

- b) Usando un camino circular de radio  $r < b$ , se tiene que por ley de Faraday-Lenz

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies E(r, t) \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial}{\partial t} B(t) \implies \vec{E}(r, t) = -\frac{r \mu_0 m I_0 \omega \cos(\omega t)}{2} \hat{\theta}$$

- c) Usando el mismo procedimiento anterior para un  $r \geq b$

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies E(r, t) \cdot 2\pi r = -\pi b^2 \frac{\partial}{\partial t} B(t) \implies \vec{E}(r, t) = -\frac{b^2 \mu_0 m I_0 \omega \cos(\omega t)}{2r} \hat{\theta}$$

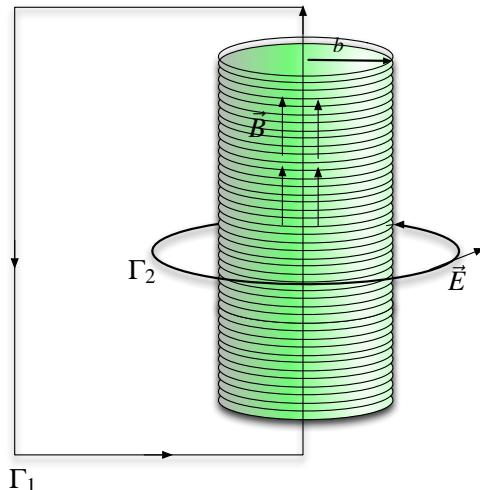


Figura 15.1: Senoloide



**Solución 15.3** 

La fuerza electromotriz inducida es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^{x(t)} -B\hat{z} \cdot dxdy\hat{z}$$

de este modo se obtiene que

$$\varepsilon = BL\dot{x}$$

Por otro lado, considerando que la fuente de corriente es capaz de mantener la corriente constante (en el sentido de la figura) y sin alteraciones durante cada período de tiempo (ie. se ignora la corriente adicional inducida en el circuito), se tiene que la velocidad de la barra está dada por

$$d\vec{F} = -I(t)dy\hat{y} \times -B\hat{z} = -BI(t)dy\hat{x} \implies \vec{F} = BI(t)L\hat{x}$$

Entonces

$$m\frac{dv}{dt} = BLI(t) \implies \int_0^{v(t)} dv = \frac{BL}{m} \int_0^t I(t)dt$$

Si  $t < 0$

$$v(t) = 0$$

Si  $0 < t \leq T$

$$v(t) = \frac{BL}{m} \int_0^t btdt = \frac{BLbt^2}{2m}$$

Por lo tanto se tiene que la fem inducida en el circuito es

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{B^2 L^2 bt^2}{2m} & 0 < t \leq T \end{cases}$$

**Solución 15.6** 

- a) La fuerza que mueve a la barra está determinada por el campo magnético  $\vec{B} = B_0\hat{z}$  (saliendo de la hoja) y la corriente que circula por el circuito. La corriente dependerá de la fem inducida de la siguiente forma:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 b \dot{x}}{R}$$



## CAPÍTULO 15. LEY DE FARADAY LENZ

Luego la fuerza que siente la barra es

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B} = - \int_0^b \frac{B_0 b \dot{x}}{R} dy \hat{y} \times B_0 \hat{z} = - \frac{(B_0 b)^2 \dot{x}}{R} \hat{x}$$

Planteando la ecuación de movimiento de la barra se tiene que

$$m \ddot{x} = - \frac{(B_0 b)^2 \dot{x}}{R} \implies m \frac{dv}{dt} = - \frac{(B_0 b)^2 v}{R}$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$-\frac{mR}{(B_0 b)^2} \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = \int_0^t dt \implies v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{(B_0 b)^2}{mR} t\right)$$

La posición que se detiene la barra está determinada por (asumiendo que comienza en el origen)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{(B_0 b)^2}{mR} t\right) \implies \int_0^{x(t)} dx = v_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{(B_0 b)^2}{mR} t\right) dt$$

de modo que

$$x(t) = \frac{v_0 m R}{(B_0 b)^2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{(B_0 b)^2}{mR} t\right) \right)$$

Por lo que finalmente la barra en  $t \rightarrow \infty$  se quedará en

$$x_{final} = \frac{v_0 m R}{(B_0 b)^2}$$

- b) En primera instancia, dado que hay una fuente de voltaje fija de valor  $V_0$ , existe una corriente permanente

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

Donde se ha considerado positivo el sentido de la corriente antihoraria. La corriente  $I_0$  circula en la dirección positiva debido a la forma de como está conectada la fuente de voltaje. La fuerza que mueve a la barra está determinada por el campo magnético  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$  (saliendo de la hoja) y las corrientes que circulan por el circuito (corriente inducida y fija). La corriente inducida dependerá de la fem inducida de la siguiente forma:

$$I_{ind} = \frac{\varepsilon}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{B_0 b \dot{x}}{R}$$

Luego la fuerza que siente la barra es

$$\vec{F} = \int (I_{ind} + I_0) d\vec{l} \times \vec{B} = \int_0^b \left( -\frac{B_0 b \dot{x}}{R} + \frac{\varepsilon_0}{R} \right) dy \hat{y} \times B_0 \hat{z} = \left( -\frac{(Bb)^2 \dot{x}}{R} + \frac{V_0 B b}{r} \right) \hat{x}$$



Planteando la ecuación de movimiento de la barra se tiene que

$$m\ddot{x} = -\frac{(B_0b)^2\dot{x}}{R} + \frac{V_0B_0b}{R} \implies \frac{dv}{dt} + \frac{(B_0b)^2v}{mR} = \frac{V_0B_0b}{mR}$$

Resolviendo la ecuación diferencial con factor integrante

$$\frac{dv}{dt}e^{\frac{(B_0b)^2t}{mR}} + \frac{(B_0b)^2v}{mR}e^{\frac{(B_0b)^2t}{mR}} = \frac{V_0B_0b}{mR}e^{\frac{(B_0b)^2t}{mR}} \implies \frac{d}{dt}\left(v(t)e^{\frac{(B_0b)^2t}{mR}}\right) = \frac{V_0B_0b}{mR}e^{\frac{(B_0b)^2t}{mR}}$$

Finalmente integrando a ambos lados (e imponiendo que la barra parte del reposo)

$$v(t)e^{\frac{(B_0b)^2t}{mR}} = \int_0^t \frac{V_0B_0b}{mR}e^{\frac{(B_0b)^2t}{mR}} dt \implies v(t) = \frac{V_0}{B_0b} \left(1 - e^{-\frac{(B_0b)^2}{mR}t}\right)$$

### Solución 15.7

Al igual que el Problema 15.1, se tiene que el campo magnético dentro la bobina es

$$\vec{B}(t) = \mu_0 n I_0 \sin \omega t \hat{z}$$

En este caso se aplica la ley de Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \iint_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{S} = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$ ,

usando el teorema de Stokes con la última expresión

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Asumiendo que  $\vec{E} = E(r, t)\hat{\theta}$  (el campo eléctrico rota en torno a los campos magnéticos variables en el tiempo) y que  $\Omega$  es un círculo de radio  $r$  con normal  $\hat{z}$ , se tiene que

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies E(r, t) \cdot 2\pi r = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 n I_0 \sin \omega t \cdot \pi r^2) \implies \vec{E} = -\frac{r}{2} \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t \hat{\theta}$$

Considerando que se trata de un material ohmico,  $\vec{J} = g\vec{E}$ , luego

$$\vec{J} = -\frac{gr}{2} \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t \hat{\theta}$$

Finalmente, la potencia que disipa el cilindro es

$$P = \iiint_{\text{Cilindro}} \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a g \left(\frac{r}{2} \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t\right)^2 r dr d\theta dz = \frac{g\pi h (a^2 \mu_0 I_0 \omega \cos \omega t)^2}{8}$$



## CAPÍTULO 15. LEY DE FARADAY-LENZ

### Solución 15.10

Para iniciar el problema hay que determinar el valor de la corriente inducida, la cual debe ir sentido antihorario ya que se opone al aumento del flujo magnético. Esta corriente provoca una fuerza magnética sobre la barra, la cual puede ser determinada como

$$\vec{F}_m = \int_0^L I d\vec{l} \times \vec{B} = -IBL\hat{x}$$

Luego, la derivada temporal del flujo que atraviesa por el circuito cerrado es

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^x B(-\hat{z}) \cdot dx dy \hat{z} = -BLv$$

Usando la Ley de Voltajes de Kirchhoff, se tiene un circuito  $RC$  alimentado por un fem debida a la inducción. De la parte anterior se sabe que

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = BLv$$

Luego debe cumplirse que

$$\varepsilon = IR + \frac{Q}{C} = BLv$$

Derivando la ecuación anterior, se obtiene

$$BL \frac{dv}{dt} = R \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt}$$

Usando el hecho que

$$\vec{F}_m = m\dot{v}\hat{x} = -IBL\hat{x} \implies \frac{dv}{dt} = -\frac{IBL}{m} = -\frac{BL}{m} \frac{dQ}{dt}$$

Reemplazando y reordenando se obtiene que

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \underbrace{\left( \frac{1}{RC} + \frac{(BL)^2}{mR} \right)}_{\alpha} \frac{dQ}{dt} = 0$$

La solución de esa EDO es

$$Q(t) = \frac{C_1}{\alpha} e^{-\alpha t} + C_2 \implies I(t) = -C_1 e^{-\alpha t}$$

Aplicando las condiciones iniciales  $Q(0) = CV_0$  e  $I(0) = \frac{V_0}{R}$  se obtiene que  $C_1 = -\frac{V_0}{R}$  y  $C_2 = V_0(C + \frac{1}{\alpha R})$ . Finalmente, a partir de la ecuación obtenida en la parte anterior

$$BLv(\infty) = I(\infty)R + \frac{Q(\infty)}{C} \implies v(\infty) = \frac{Q(\infty)}{BLC} = \frac{V_0}{BLC} \left( C + \frac{1}{\alpha R} \right)$$



**Solución 15.12**  

Dado que el disco esta girando con velocidad angular constante, todas sus cargas en su superficie sienten una fuerza magnética (carga libre con velocidad bajo un campo magnético). El material crea un campo eléctrico al interior de él, debido a que desea que todas sus cargas se queden en el mismo lugar y anule la fuerza magnética que se está produciendo. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\vec{F}_m}{q} \\ &= -\vec{v} \times \vec{B} \\ &= -(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} \\ &= -(\Omega \hat{k} \times r \hat{r}) \times B_0 \hat{k} \\ &= -B_0 \Omega r \hat{r}\end{aligned}$$

Finalmente

$$|\varepsilon| = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^R B_0 \Omega r dr = \frac{B_0 \Omega R^2}{2}$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 15.2

- Asuma que el carrito ha entrado una distancia  $x$  a la zona de campo. Determine la fuerza que siente el carrito en función de la corriente inducida y luego plante su ecuación de movimiento. Con lo anterior, llegará a una EDO con respecto a la velocidad y con ello al resultado final.
- Con la presencia del condensador ahora  $\varepsilon \neq IR$  ya que hay que agregar el efecto del condensador. Haciendo un Kirchhoff de voltaje, se cumple que  $\varepsilon = IR + \frac{Q}{C}$ .
- Usando la fuerza de Lorentz, determine la ecuación diferencial que cumple la velocidad y con ello el valor pedido.
- El Problema 15.10 puede ser muy útil para referencia de como enfrentar este problema.

### Indicación 15.4

- Determine el campo eléctrico inducido en la zona donde se encuentra el anillo.
- Utilizando ese valor, determine el torque  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  que siente el anillo completo.
- Utilizando el hecho que  $\vec{\tau} = I\vec{\omega}$ , donde  $I$  es la inercia del disco, encuentre una ecuación diferencial que describa la velocidad angular del disco. Puede ser útil recordar que  $\frac{dB}{dt} \approx \frac{\Delta B}{\Delta t}$  y que  $\frac{d\omega}{dt} \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ .

### Indicación 15.5

- Asumiendo un campo magnético  $\vec{B}$  uniforme, determine el cambio de su flujo entre el instante inicial y final (ie. antes y después del giro).
- Recordando que  $I = \frac{dQ}{dt} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t}$  y que por otro lado la corriente inducida vale  $I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  es fácil concluir el problema.

### Indicación 15.8

- Note que para resolver este problema es necesario determinar las otras componentes del campo magnético. Para ello recuerde que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , puede ser muy útil revisar el Problema



## 12.5.

- Determine el flujo de campo magnético sobre la bobina y con ellos la corriente inducida. A partir de ello, use la Fuerza de Lorentz para determinar el valor de la fuerza total que actúa sobre la espira.
- La velocidad terminal puede ser obtenida a partir de encontrar la ecuación de movimiento de la espira o de un análisis energético. En el último caso, la energía total de la espira en un instante  $t$  es la suma de su energía cinética más potencial gravitatoria. La derivada de la energía en el tiempo es igual a  $P = -I^2R$  que es la potencia que disipa la resistencia. Concluya el problema imponiendo que en el infinito la aceleración es nula.

**Indicación 15.9**  

- Tome un sistema de referencia adecuado para el problema, por ejemplo  $x$  creciendo hacia abajo.
- Determine la corriente inducida en el circuito, para ello determine el flujo sobre la parte de la espira que ha caído en la zona de campo magnético y con ello la fem inducida.
- Una vez determinada la corriente inducida, calcule la fuerza de Lorentz sobre el lado inferior de la espira. Los lados verticales anulan su fuerza entre ellos.
- Usando la ecuación de movimiento y la segunda ley de Newton, determine la ecuación diferencial que cumple la espira. Puede ser útil recordar que en la velocidad terminal la aceleración es nula ya es nula.

**Indicación 15.11**  

- Usando Ley de Ampère, determine el campo magnético que sentirá la barra.
- Conocido el campo magnético y la velocidad de barra (dato), determine el campo eléctrico en los puntos sobre la barra. Integre el resultado anterior y concluya.
- Puede ser útil la aproximación  $\ln(1 + x) \approx x$  cuando  $x \ll 1$ .

**Indicación 15.13**  

- Determine la velocidad de los portadores, para ello recuerde que  $I$  es dato y que  $\vec{J} = \rho_0 \vec{v}$ .
- Conocida la velocidad de los portadores, determine el campo eléctrico que aparece dentro del cable e intégralo entre las caras transversales para hallar la diferencia de potencial.



## V. Resultados

Problema	Respuestas
<b>15.1</b>	<p>a) <math>\vec{B} = \mu_0 m I_0 \sin(\omega t) \hat{z}</math></p> <p>(P) b) <math>\vec{E}(r, t) = -\frac{r \mu_0 m I_0 \omega \cos(\omega t)}{2} \hat{\theta}</math></p> <p>c) <math>\vec{E}(r, t) = -\frac{b^2 \mu_0 m I_0 \omega \cos(\omega t)}{2r} \hat{\theta}</math></p>
<b>15.2</b>	<p>a) <math>v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{(aB)^2}{mR} t\right)</math></p> <p>(P) b) <math>v(t) = v_0 \left[1 - \frac{B^2 a^2 \tau}{mR} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))\right], Q(t) = \frac{B a v_0 \tau}{R} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau})),</math> donde <math>\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} + \frac{B^2 a^2}{mR}</math></p>
<b>15.3</b>	$v(t) = \frac{BLbt^2}{2m} \quad \varepsilon(t) = \frac{B^2 L^2 bt^2}{2m}$
<b>15.4</b>	<p>a) <math>\omega_f = \frac{\lambda R \pi a^2 B}{I}</math></p> <p>b) Es independiente de <math>B(t)</math>, solamente importa el valor inicial y final.</p>
<b>15.5</b>	$B = \frac{2QR}{\pi ND^2}$
<b>15.6</b>	<p>a) <math>v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{(B_0 b)^2}{mR} t\right) \quad x_{\max} = \frac{v_0 m R}{(B_0 b)^2}</math></p> <p>b) <math>v(t) = \frac{V_0}{B_0 b} \left(1 - e^{-\frac{(B_0 b)^2}{mR} t}\right)</math></p>
<b>15.7</b>	$P = \frac{g\pi h(a^2 \mu_0 I_0 \omega \cos \omega t)^2}{8}, \text{ Prop. } I = -\frac{gha^2}{4} \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t$
<b>15.8</b>	<p>a) Antihorario (considerando normal positiva <math>+\hat{z}</math>)</p> <p>b) <math>I = -\frac{C\pi a^2}{R} \dot{z}</math></p> <p>c) <math>\vec{F}_r = 0, \vec{F}_z = \pi a^2 C I \hat{z}</math></p> <p>d) <math>v_T = \frac{mgR}{(C\pi a^2)^2}</math></p>



Problema	Respuestas
(P) <b>15.9</b>	$v_T = \frac{mRg}{B^2a^2}$ , el sentido de la corriente en la figura es antihorario.
(P) <b>15.10</b>	$v(\infty) = \frac{V_0}{BLC} \left( C + \frac{1}{\alpha R} \right)$ con $\alpha = \frac{1}{RC} + \frac{(BL)^2}{mR}$
(P) <b>15.11</b>	$ \Delta V  = \frac{\mu_0 v I}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{d}{a} \right)$ , si $a \gg d$ entonces $ \Delta V  \approx \frac{\mu_0 v I d}{2\pi a}$
(P) <b>15.12</b>	$ \varepsilon  = \frac{B_0 \Omega R^2}{2}$
(P) <b>15.13</b>	$\Delta V = \frac{IB}{nel}$



## CAPÍTULO 15. LEY DE FARADAY-LENZ



# Inductancia y Energía Magnética

## I. Resumen Teórico

---

### Inductancia Mutua

Sean dos circuitos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , los cuales circula una corriente  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente. Sea  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  el flujo magnético que genera el circuito  $\Gamma_1$  sobre  $\Gamma_2$  y  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  el flujo que genera el circuito  $\Gamma_2$  sobre  $\Gamma_1$ . Luego, se define la inducción mutua  $M$  como

$$M = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \frac{\Phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2} \quad (16.1)$$

Nótese el hecho que la inducción mutua es simétrica. A partir de lo anterior, si  $I_1 = I_1(t)$  existirá una fem inducida en el circuito  $\Gamma_2$  dada por

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (16.2)$$


---

### Inductancia Propia

Sea un circuito  $\Gamma_1$  por el cual circula una corriente  $I_1$  y sea  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  el flujo de campo magnético que genera el circuito sobre si mismo. Se define la inductancia propia de ese circuito o autoinductancia  $L$  como

$$L = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 1}}{I_1} \quad (16.3)$$

La fem autoinducida en un circuito debido a su corriente está dada por

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{1 \rightarrow 1}}{dt} = -L \frac{dI_1}{dt} \quad (16.4)$$

En presencia de otro otro circuito  $\Gamma_2$  con una corriente  $I_2$ , la fem total inducida en el circuito es

$$\varepsilon_1 = -M \frac{dI_2}{dt} - L \frac{dI_1}{dt} \quad (16.5)$$

## Energía Magnética

La energía magnética de un circuito está dada por

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Todo el Espacio}} \vec{B} \cdot \vec{H} dV \quad (16.6)$$

Por otro lado, también puede ser determinada en forma equivalente en función de la inductancia  $L$ , el flujo  $\Phi$  y la corriente  $I$  como

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (16.7)$$

---

## Recomendaciones

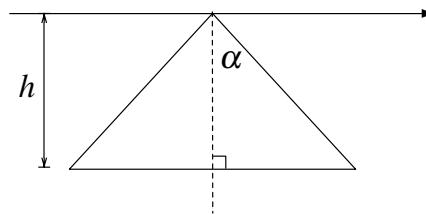
- Tanto la inductancia propia como mutua dependen netamente de la geometría del problema.
- Es interesante notar que la inductancia es análoga a la capacitancia. Mientras que en una capacitancia la carga no puede variar abruptamente, la corriente no puede hacerlo en una inductancia.



## II. Problemas Propuestos

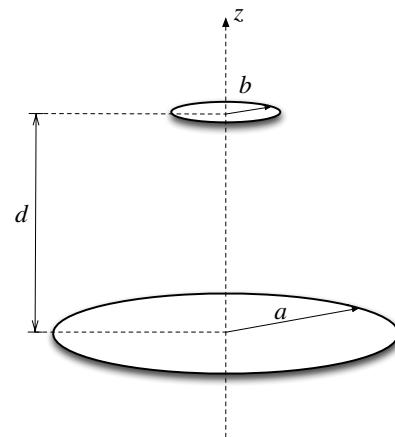
### Problema 16.1

Encuentre el coeficiente de inductancia mutua entre un alambre infinitamente largo y un triángulo isósceles de altura  $h$  dispuestos como se muestra en la Figura.



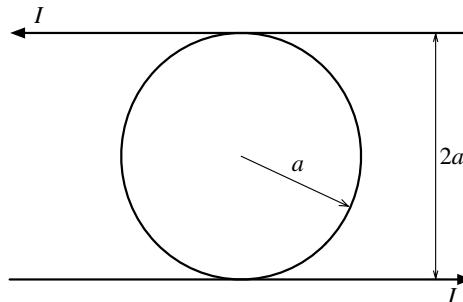
### Problema 16.2

Considere dos espiras de radios  $a$  y  $b$  ( $a \gg b$ ) dispuesta de forma que sus centros se ubican en el eje  $z$  separadas por una distancia  $d$ , como se muestra en la Figura. Encuentre el coeficiente de inducción mutua del sistema.



### Problema 16.3

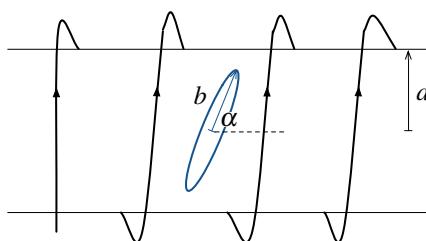
Dos cables infinitos llevan una corriente  $I$  y están separados una distancia  $2a$  como se muestra en la Figura. Un anillo circular conductor de radio  $a$  yace en el mismo plano entre los dos cables totalmente aislados de ellos. Encontrar el coeficiente de inductancia mutua entre los cables y el anillo circular. Puede ser útil  $\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .



### Problema 16.4

Considere una bobina muy larga de radio  $a$  y  $n$  vueltas por unidad de largo. Al interior de la bobina, existe un espira de radio  $b$  que forma un ángulo  $\alpha$  con respecto al eje de la bobina.

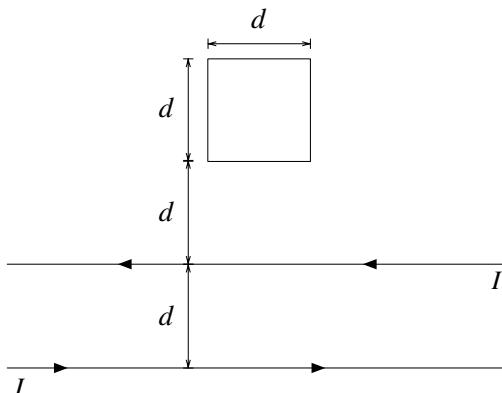
- Determine la inductancia mutua entre la bobina y la espira.
- Si por la espira empieza a circular un corriente  $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ , ¿cuál es la máxima diferencia de potencial en los terminales de la bobina?



**Problema 16.5**   

Dos alambres infinitos están separados una distancia  $d$  y llevan una corriente eléctrica  $I$  en direcciones opuestas (ver Figura). La corriente  $I$  incrementa a una tasa  $dI/dt$  suficientemente baja de tal manera que la ley de Ampere se cumple. Una espira cuadrada de lado  $d$  se encuentra dispuesta en el mismo plano de los alambres, tal como se muestra en la Figura.

- Calcule la inductancia mutua entre la espira y los alambres.
- Indique la dirección de la corriente inducida en la espira cuando  $dI/dt$  es positivo. Justifique su respuesta.
- Sabiendo que la resistencia de la espira es  $r$ , calcule la fuerza que actúa sobre la espira (magnitud y dirección).

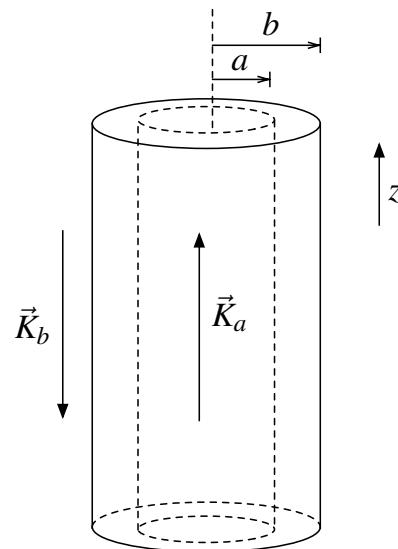
**Problema 16.6**   

Un cable coaxial está formado por dos superficies cilíndricas infinitamente largas, por las cuales circula una misma corriente en sentidos contrarios. Si las densidades superficiales de corriente que circulan por las superficies cilíndricas de radios  $a$  y  $b$  son, respectivamente:

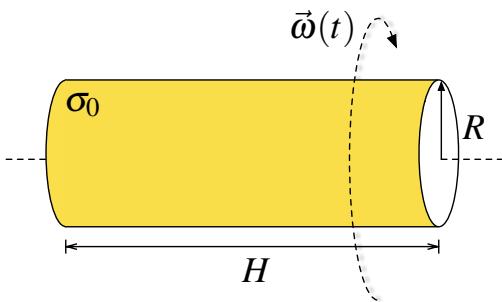
$$\vec{K}_a = \frac{I_0}{2\pi a} \hat{z} \quad \vec{K}_b = -\frac{I_0}{2\pi b} \hat{z}$$

. Determine:

- La energía por unidad de largo.
- La autoinductancia por unidad de largo del cable coaxial.

**Problema 16.7**   

Un cilindro de radio  $R$  y largo  $H \gg R$ , posee una densidad de carga  $\sigma_0$  con su eje coincidente al eje  $z$ . En  $t = 0$  el cilindro comienza a rotar lentamente con velocidad angular  $\vec{\omega}(t) = \alpha t \hat{z}$ , donde  $\alpha$  es una constante. Determine la energía eléctrica y magnética dentro del cilindro

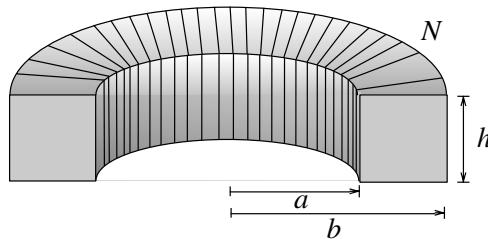


**Problema 16.8**

Considere toroide de sección transversal rectangular de  $N$  vueltas, de radio interior  $a$  y exterior  $b$ , y altura  $h$ .

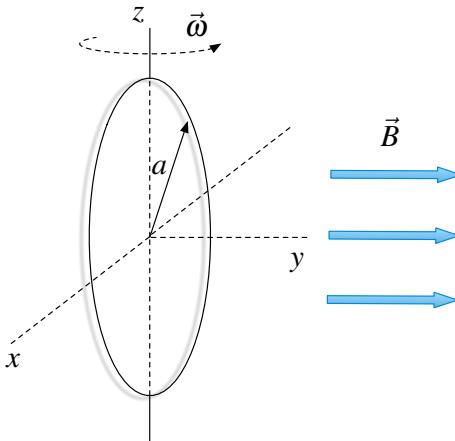
- Determine la autoinductancia de este toroide.
- Demuestre que si  $b - a \ll a$  entonces la autoinductancia del toroide puede ser aproximada como

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h(b-a)}{2\pi a}$$

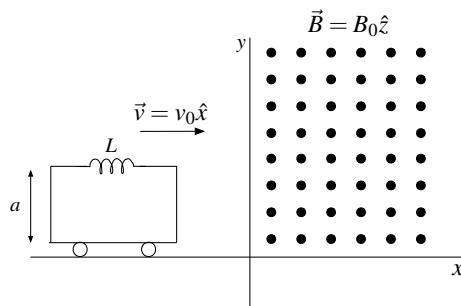
**Problema 16.9**

Considere inicialmente una espira circular de radio  $a$  que yace sobre el plano  $xz$ . En  $t = 0$  la espira comienza a girar con una velocidad angular  $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$ . Si en el espacio existe un campo homogéneo y constante de valor  $\vec{B} = B_0 \hat{y}$  determine:

- La fem inducida en el circuito.
- La corriente en función del tiempo que circula por la espira, si la espira posee una resistencia  $R$  y una autoinducción  $L$ .
- El torque que siente la espira, suponiendo que ésta ha estado rotando un tiempo muy largo.

**Problema 16.10**

Un carrito de masa  $m$  que se desplaza con velocidad  $v_0 \hat{x}$ , hasta llegar a una región en que existe un campo magnético uniforme en  $x = 0$ . El carrito es perfectamente conductor (ie. resistencia nula) y posee una autoinductancia  $L$ . Determine la velocidad del carrito en el tiempo y la corriente que circula por éste. ¿Cuál debe ser la condición sobre el largo del carrito para que éste logre entrar completamente a la zona de campo?



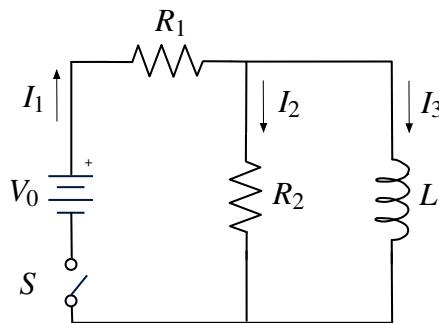
## CAPÍTULO 16. INDUCTANCIA Y ENERGÍA MAGNÉTICA

### Problema 16.11



Considere que interruptor  $S$  del circuito mostrado en la Figura, ha estado abierto un tiempo muy largo. Determine las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  que se muestran en la figura, cuando:

- Instantáneamente una vez que el interruptor es cerrado.
- Un largo tiempo después que el interruptor es cerrado.

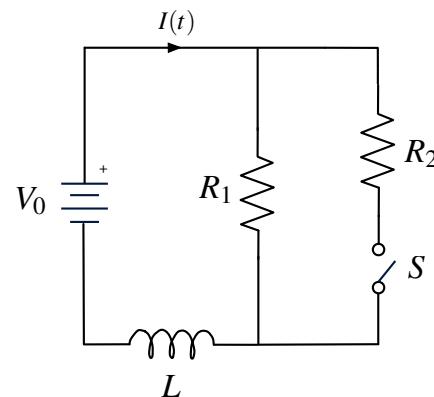


### Problema 16.12



En el circuito de la Figura se ha tenido conectada la batería por mucho tiempo (desde  $t = -\infty$ ) con el interruptor  $S$  abierto. Luego en  $t = 0$  el interruptor se cierra. Considere que  $V_0 = 120 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 30\Omega$  y  $L = 50 \text{ mH}$ .

- Determine por inspección la corriente  $I$  en  $t = 0$  ("justo" antes de cerrar  $S$ ) y en  $t = \infty$  ("mucho" después de haber cerrado  $S$ ).
- Obtenga una expresión analítica para  $I(t)$ , entre  $0 \leq t < \infty$ . Grafique su resultado.

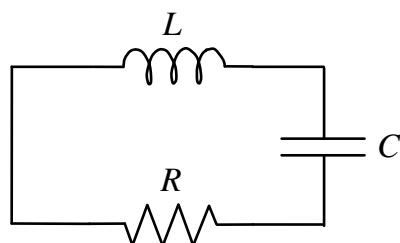


### Problema 16.13



Se debe determinar los valores de  $L$  y  $C$  en un circuito RLC en serie cuando se conoce  $R$ . Para ello se carga el condensador con una carga  $Q_0$  y se cierra el circuito observándose que la corriente partiendo de cero, oscila con una frecuencia angular  $\omega_0$  y amplitud decreciente. Si al circuito se le reemplaza la resistencia  $R$  por otra de magnitud  $2R$ , éste queda justo en el límite cuando ya no oscila.

- Determine los valores de  $L$  y  $C$ .
- Escriba la función  $Q(t)$  en función de  $t$ .

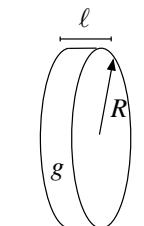
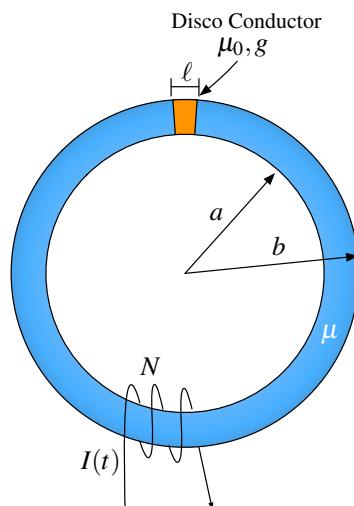


En ambos casos sus resultados deben quedar expresados a lo más en función de los datos  $R$ ,  $Q_0$  y  $\omega_0$ .



**Problema 16.14**   

Un toroide de material magnéticamente lineal de permeabilidad  $\mu$ , de sección circular de radio  $R$ , tiene un radio interior  $a$  y exterior  $b$ . El toroide tiene un entrehierro de longitud  $\ell$ , que está ocupado por un disco conductor de radio  $R$  y conductividad  $g$ . Si al enrollado de  $N$  vueltas se le da una corriente  $I(t)$ . ¿Cuánta potencia disipará el disco?

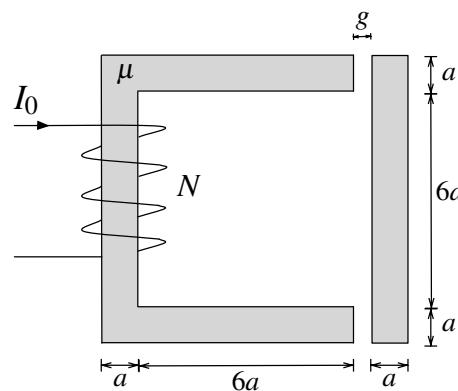


Disco Conductor

**Problema 16.15**   

Considere un toroide de permeabilidad  $\mu$  de sección cuadrada  $a^2$  y de largo  $8a$ . El toroide cuenta con dos entrehierros de una longitud muy pequeña  $g$  tal como y se muestra en la Figura. En uno de sus extremos el toroide posee un enrollado de  $N$  vueltas, el cual está conectado una fuente de corriente  $I_0$ . Determine

- El flujo magnético y la autoinductancia del sistema.
- Si el lado izquierdo con forma es  $U$  es fijo, la fuerza que siente el material de la derecha.



### III. Soluciones

#### Solución 16.2

Dado que una espira es mucho más pequeña otra, se supondrá que el campo magnético que pasa a través de la espira de radio  $b$  es aproximadamente igual a  $\vec{B}(z = d)$ , donde  $\vec{B}$  es el campo magnético que genera la espira de radio  $a$ . Usando la definición de campo magnético

$$\begin{aligned}\vec{B}(z = d) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I_1 \cdot ad\theta \hat{\theta} \times (d\hat{z} - a\hat{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta \hat{\theta} \times (d\hat{z} - a\hat{r})}{|d\hat{z} - a\hat{r}|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 a}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{d \cdot d\theta \hat{r}}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot d\theta \hat{z}}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I_1 a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta \hat{z}}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}\end{aligned}$$

Por lo tanto el el flujo en la espira de radio  $b$  está dado por

$$\Phi_2 = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \pi b^2 \cdot \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Por lo que la inductancia mutua está dada por

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi (ab)^2}{2(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

#### Solución 16.3

Sabiendo que el campo producido por un alambre infinito con corriente  $I$  vale  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$ , entonces a una distancia  $r$  de uno de los dos cables se tiene que el campo magnético total es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{2a - r} \right)$$



## CAPÍTULO 16. INDUCTANCIA Y ENERGÍA MAGNÉTICA

Donde  $\hat{z}$  es el vector unitario que entra a la hoja, perpendicular a ella. De esta manera, se calcula el flujo magnético, teniendo en cuenta que  $r = a + x$  donde  $x$  es la coordenada vertical en la figura, e  $y$  es la coordenada horizontal, con el origen ubicado al centro del anillo.

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{2a - r} \right) dy dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \left( \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) dy dx$$

Luego:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-a}^a \left( \frac{2a}{a^2 - x^2} \right) (2a\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \frac{2\mu_0 I a}{\pi} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\mu_0 I a$$

Y recordando la relación de inducción mutua  $\Phi = MI$ , finalmente resulta:

$$M = 2\mu_0 a$$

### Solución 16.4

- a) Para determinar la inducción mutua, se supone en primera instancia una corriente  $I_1$  que pasa por la bobina y una corriente nula en la espira. Luego, es necesario determinar el flujo  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  que genera el campo magnético de la bobina sobre la espira. El campo magnético que genera la bobina dentro de ella es

$$\vec{B} = \mu_0 n I_1 \hat{z}$$

y la normal de la espira (dado que está rotada con respecto al eje de la bobina) es

$$\hat{n} = \cos \alpha \hat{y} + \sin \alpha \hat{z}$$

Por lo tanto el flujo es

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^b \mu_0 n I_1 \hat{z} \cdot r dr d\theta (\cos \alpha \hat{y} + \sin \alpha \hat{z}) = \mu_0 n I_1 \pi b^2 \sin \alpha$$

Luego la inducción mutua es

$$M = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \mu_0 n \pi b^2 \sin \alpha$$

- b) La fem inducida en la bobina estará dado por  $\varepsilon = -\frac{d\Phi_{2 \rightarrow 1}}{dt}$ . Donde  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  es el flujo de la espira sobre la bobina. A priori, parece complicado determinar el valor del flujo  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ , sin embargo es posible utilizar el calculo anterior, ya que por simetría de la inductancia mutua

$$M = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \frac{\Phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2} \implies \Phi_{2 \rightarrow 1} = M I_2$$



## CAPÍTULO 16. INDUCTANCIA Y ENERGÍA MAGNÉTICA

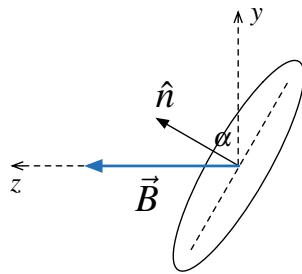


Figura 16.1: Representación normal espira y campo magnético.

Utilizando el hecho que  $I_2(t) = I_0 \sin \omega t$ , se obtiene que

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{2 \rightarrow 1}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} = -\mu_0 n \pi b^2 \sin \alpha \cdot I_0 \omega \cos \omega t$$

Finalmente, el máximo valor que alcanza la fem en la bobina (o equivalentemente, la diferencia de potencial en sus terminales) es en  $t = \frac{\pi}{\omega}$

$$\Delta V_{\max} = \mu_0 n I_0 \omega \pi b^2 \sin \alpha$$

### Solución 16.5

- a) El campo magnético que genera cualquier alambre con corriente  $I$  es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$

Extrapolando ese resultado al problema, y considerando que el sistema de referencia está ubicado con el alambre inferior  $y = 0$

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_{\text{cable1}} + \vec{B}_{\text{cable2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{z} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(y-d)} (-\hat{z})$$

Luego

$$\iint \vec{B}_{\text{tot}} \cdot d\vec{S} = \int_0^d \int_{2d}^{3d} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y-d} \right) \cdot dx dy \hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} d \left( \ln \left( \frac{3}{2} \right) - \ln(2) \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} d \ln \left( \frac{3}{4} \right)$$

Finalmente como

$$M = \frac{|\Phi|}{I} = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \left( \frac{4}{3} \right)$$



## CAPÍTULO 16. INDUCTANCIA Y ENERGÍA MAGNÉTICA

b) Usando la Ley de Lenz y los resultados de la parte anterior  $\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d \ln \left( \frac{3}{4} \right) < 0$ .

Luego

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi} d}_{<0} \left( \ln \left( \frac{3}{4} \right) \right) \underbrace{\frac{dI}{dt}}_{>0} > 0$$

Como  $\varepsilon > 0$ , la corriente va en el sentido positivo de la normal  $\hat{z}$  (antihorario).

c) Como la resistencia de espira es  $r$ , la corriente que ciercola por ella es

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r} = -\frac{\mu_0 d}{2\pi r} \ln \left( \frac{3}{4} \right) \frac{dI}{dt}$$

La fuerza puede calcularse en los cuatro lados de la espira.

Para los lados verticales la fuerza es simétrica, igual en módulo pero en sentidos contrarios, por ende se anulan.

Por otro lado

$$dF_1 = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{tot}}(y = 2d) = I_1 dx \hat{x} \times \left. \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y-d} \right) \right|_{y=2d} \hat{z} = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi} \left( \frac{1}{2d} - \frac{1}{d} \right) dx (-\hat{y})$$

Integrando en  $x$  entre 0 y  $d$ ,

$$\implies \vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I I_1}{4\pi} \hat{y}$$

Análogamente para la sección horizontal del cable superior, usando  $y = 3d$

$$dF_3 = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{tot}}(y = 3d) = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi} \left( \frac{1}{3d} - \frac{1}{2d} \right) dx (-\hat{y})$$

$$\implies \vec{F}_3 = -\frac{\mu_0 I I_1}{12\pi} \hat{y}$$

Finalmente la fuerza está dada por la suma de  $\vec{F}_1 + \vec{F}_3$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 I I_1}{6\pi} \hat{y} = -\frac{\mu_0 I}{6\pi} \frac{\mu_0 d}{2\pi r} \ln \left( \frac{3}{4} \right) \frac{dI}{dt} \hat{y}$$

### Solución 16.6

Existen dos maneras de resolverlo, mediante la energía magnética o mediante el flujo magnético:

- i) Energía magnética: Primero que todo, se calcula el campo magnético en el espacio mediante Ley de Ampére en una superficie circular de radio  $r$ , perpendicular a los dos cascarones cilíndricos. De esta manera, para  $a < r < b$ :

$$\vec{B} = B(r) \hat{\theta} \implies \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$



## CAPÍTULO 16. INDUCTANCIA Y ENERGÍA MAGNÉTICA

Luego, la corriente que atraviesa dicho camino es:

$$I = \int (\vec{K}_a \times \hat{n}) \cdot d\vec{l}$$

Donde  $\hat{n} = \hat{r}$  es el vector normal a la superficie cilíndrica de radio  $a$  (superficie a través de la cuál circula la corriente enlazada), y  $d\vec{l} = r d\theta \hat{\theta}$ . Por lo tanto:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{I_0}{2\pi a} ad\theta = I_0 \implies \vec{B}(a < r < b) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{\theta}$$

Además, se debe tener claro que  $\vec{B}(r < a) = 0$  debido a que no hay corrientes enlazadas para  $r < a$ ; y  $\vec{B}(r > b) = 0$  debido a que la suma de corrientes enlazadas es nula para  $r > b$ .

Ahora, se calcula la energía magnética asociada a una altura  $h$  arbitraria en los cilindros:

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint |\vec{B}|^2 dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\mu_0^2 I_0^2}{4\pi^2 r^2} r dr d\theta dz = \frac{\mu_0 I_0^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Así, se obtiene la energía por unidad de largo:

$$u_m = \frac{U_m}{h} = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Para calcular la autoinductancia por unidad de largo, se debe recordar que la energía magnética asociada a una autoinductancia es (recordar que en este caso  $I = I_0$ ):

$$U_m = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{\mu_0 I_0^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \implies L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Por lo tanto, la autoinductancia por unidad de largo vale:

$$l = \frac{L}{h} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- ii) Flujo magnético: Usando los resultados anteriores del campo magnético, se calcula el flujo magnético a través de una superficie rectangular, perpendicular al campo  $\vec{B}$ , de lado  $(b-a)$  y altura  $h$ :

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \int_0^h \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Recordando que:

$$\Phi = LI_0 \implies L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \implies l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



**Solución 16.7**  

Dado que la carga comienza a rotar, se genera una densidad superficial de corriente  $\vec{K}(t) = \sigma_0\omega(t)R\hat{\theta}$ . Este problema es análogo al de una bobina con una corriente circulando por ella, por ende el campo magnético fuera del cilindro es nulo. A partir de eso se obtiene por ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \implies B \cdot H = \mu_0 K H \implies \vec{B} = \mu_0 \sigma_0 \alpha t R \hat{z}$$

El camino elegido es el mismo que se usa en bobina, un rectángulo de altura  $H$ . Luego, usando la ley de Faraday para un disco de radio  $r < R$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies E(r, t) \cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 \cdot \mu_0 \sigma_0 \alpha t R) \implies \vec{E}(r) = \frac{\mu_0 \sigma_0 \alpha R r}{2} \hat{\theta}$$

El campo eléctrico cambia debido a la inducción que provoca el campo magnético en el tiempo. Finalmente, la energía magnética es

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint |\vec{B}|^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (\mu_0 \sigma_0 \alpha t R)^2 r dr d\theta dz = \frac{\mu_0 (\sigma_0 \alpha t R)^2 \cdot \pi R^2 H}{2}$$

y la energía eléctrica es

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint |\vec{E}|^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \frac{\mu_0 \sigma_0 \alpha R r}{2} \right)^2 r dr d\theta dz = \frac{\varepsilon_0 (\mu_0 \sigma_0 \alpha R)^2}{4} \cdot \pi H \cdot \frac{R^4}{4}$$

**Solución 16.12**  

- a) Para  $t = 0$ , el interruptor  $S$  ha estado abierto mucho tiempo, por cual la corriente que circula en el circuito se vuelve constante (la inductancia en un tiempo muy extenso actúa como un cortocircuito, es decir, como un simple cable). Por ende la corriente está dada por

$$I(t=0) = \frac{V_0}{R_2} = 4 \text{ [A].}$$

Para el caso que  $t \rightarrow \infty$ , el interruptor se cierra y quedan las dos resistencias en paralelo. Al igual que el caso anterior se tiene la corriente es

$$I(t \rightarrow \infty) = V_0 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 8 \text{ [A].}$$

- b) Usando un Kirchoff de Voltajes, se obtiene

$$V_0 = IR + L \frac{dI}{dt} \implies \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{V_0}{L}$$



## CAPÍTULO 16. INDUCTANCIA Y ENERGÍA MAGNÉTICA

Donde  $R = (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1} = 15 \Omega$ . Usando factor integrante (ie. multiplicar a ambos lados  $e^{\frac{R}{L}t}$ )

$$\frac{dI}{dt}e^{\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}Ie^{\frac{R}{L}t} = \frac{V_0}{L}e^{\frac{R}{L}t} \implies \frac{d}{dt}(I(t)e^{\frac{R}{L}t}) = \frac{V_0}{L}e^{\frac{R}{L}t} \implies I(t)e^{\frac{R}{L}t} - I(0) = \frac{V_0}{R}(e^{\frac{R}{L}t} - 1)$$

Reemplazando los valores de  $R$  e  $I(0)$ , se obtiene que

$$I(t) = \frac{V_0}{R_2}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = 8 - 4e^{-300t}$$

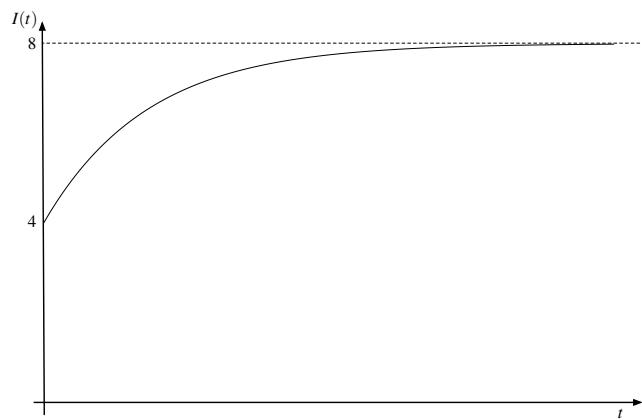


Figura 16.2: Gráfico de  $I(t)$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 16.1

- Divida el flujo en dos triángulos rectángulos más pequeños, los cuales quedan definidos a partir de la altura del triángulo isósceles. Por simetría ambos flujos son iguales.
- Note que al integrar el triángulo rectángulo definido por la altura se cumple que  $z(r) = r \tan \alpha$ .

### Indicación 16.8

- Determine el campo magnético que existe dentro del toroide suponiendo que por este circula una corriente  $I$ , para ello use la ley de Ampère tomando un camino circunferencial de radio  $r$  entre  $a$  y  $b$ .
- Una vez determinado el campo magnético, determine el flujo sobre todo el toroide. Recuerde que el flujo total sobre el toroide es  $N$  veces el que cruza una sección transversal. La autoinductancia es directa a partir de lo anterior.
- Para la segunda parte puede ser útil la relación la aproximación  $\ln(1 + x) \approx x$  cuando  $x \ll 1$ .

### Indicación 16.9

- Para determinar la fem inducida en el circuito determine el valor de la normal de la espira circular. Note que la espira rota con respecto al eje  $z$ , por lo cual su normal vale  $\hat{n}(t) = -\hat{x} \sin \omega_0 t + \hat{y} \cos \omega_0 t$  (demuéstrelo).
- Determine el flujo recordando que  $d\vec{S} = dS\hat{n} = r dr d\theta (-\hat{x} \sin \omega_0 t + \hat{y} \cos \omega_0 t)$
- Para determinar la corriente en el tiempo es necesario considerar el efecto de la inductancia  $L$  y la resistencia  $R$ . Haga un Kirchhoff del voltajes para encontrar una ecuación diferencial con respecto a la corriente, la cual debería ser de la forma  $\varepsilon(t) = RI + L\dot{I}$ . Resuélvala.
- Si la espira ha estado rotando entonces los términos de la forma  $e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ . Considerando eso, estime el valor de la corriente la cual circula por la espira y determine el torque a partir del momento magnético de la espira.



## CAPÍTULO 16. INDUCTANCIA Y ENERGÍA MAGNÉTICA

### Indicación 16.10

- Determine la fem inducida en el carrito suponiendo que este a penetrado una distancia  $x$  en la zona de campo magnético. Por Kirchhoff debe cumplirse que  $\varepsilon(t) = L\dot{I}$ .
- Por otro lado, determine la fuerza que siente el carrito debido a la corriente  $I$  que circula por ella y encuentre la ecuación de movimiento del carrito en función de la velocidad.
- Las dos ecuaciones anteriores forman un sistema de ecuaciones diferenciales, donde las dos incógnitas a resolver son la velocidad y la corriente. Encuentre las condiciones iniciales y resuélvalo.
- Una vez encontrada la velocidad, determine la posición en el tiempo del carrito. El movimiento debería ser oscilatorio ya que no existen perdidas de energía en el carrito. Determine cual es la máxima penetración que puede tener el carrito antes que se devuelva y deduzca la condición pedida.

### Indicación 16.11

- Para este problema no es necesario hacer ningún cálculo. Recuerde que la corriente no puede ser discontinua en una inductancia (ie. no pueden existir variaciones abruptas de ella).

### Indicación 16.13

- Mediante la aplicación de la ley Kirchhoff de voltaje, establezca la ecuación que sigue el circuito RLC con respecto a su carga  $Q$ . Ésta debería ser una ecuación diferencial de segundo orden.
- El circuito se encuentra subamortiguado inicialmente debido a que se encuentra oscilando con una amplitud decreciente. Si el circuito ya no oscila al cambiar la resistencia, significa que su régimen ahora es de críticamente amortiguado.
- Establezca las soluciones de cada caso y relacione los valores de  $L$  y  $C$  con los de  $R$  y  $\omega_0$ .

### Indicación 16.14

- Determine el campo magnético dentro del disco conductor. Para ello debe usar la ley de Ampère previamente en el toroide.
- Como  $\vec{B}$  tiene una dependencia temporal, éste inducirá un campo eléctrico.



## CAPÍTULO 16. INDUCTANCIA Y ENERGÍA MAGNÉTICA

- Dada la conductividad asociada del disco, se provocará una densidad corriente en el cilindro. Conocido  $\vec{E}$  y  $\vec{J}$  es suficiente para determinar la potencia.

**Indicación 16.15**  

- Plantee el toroide como un circuito magnético con reluctancias. Utilizando eso, determine el flujo que circula por el toroide y luego la autoinductancia.
- Conocido el flujo y la autoinductancia determine la energía del sistema. Recuerde que la fuerza es posible de determinar mediante  $\vec{F} = -\nabla U$  donde  $U$  es la energía.



## V. Resultados

Problema	Respuestas
 <b>16.1</b>	$M = \frac{\mu_0 h \tan \alpha}{\pi}$
 <b>16.2</b>	$M = \frac{\mu_0 \pi (ab)^2}{2(d^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$
 <b>16.3</b>	$M = 2\mu_0 a$
 <b>16.4</b>	a) $M = \mu_0 n \pi b^2 \sin \alpha$ b) $\Delta V_{max} = \mu_0 n \pi b^2 \omega I_0 \sin \alpha$
 <b>16.5</b>	a) $M = \frac{ \Phi }{I} = \frac{\mu_0 d \ln(4/3)}{2\pi}$ b) Antihorario en la figura. c) $\vec{F}_{\text{tot}} = -\frac{\mu_0 I}{6\pi} \frac{\mu_0 d}{2\pi r} \ln\left(\frac{3}{4}\right) \frac{dI}{dt} \hat{y}$
 <b>16.6</b>	a) $u_m = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ b) $l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
 <b>16.7</b>	$U_m = \frac{\mu_0 (\sigma_0 \alpha t)^2 R^4 \pi H}{2} \quad U_e = \frac{\varepsilon_0 (\mu_0 \alpha)^2 R^6 H \pi}{16}$
 <b>16.8</b>	a) $L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ b) $\varepsilon = -\pi a^2 B_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$
 <b>16.9</b>	b) $I(t) = \frac{\omega \pi a^2 B_0}{R^2 + \omega_0^2 L^2} (R \sin \omega_0 t - \omega_0 L (\cos \omega_0 t - e^{-\frac{R}{L} t}))$ c) $\tau(t) = \frac{\omega \pi^2 a^4 B_0^2}{R^2 + \omega_0^2 L^2} (R \sin \omega_0 t - \omega_0 L \cos \omega_0 t) \sin \omega_0 t$



## CAPÍTULO 16. INDUCTANCIA Y ENERGÍA MAGNÉTICA

Problema	Respuestas
<b>P</b> 16.10	$v(t) = v_0 \cos \frac{aB}{\sqrt{mL}} t, i(t) = -\frac{mv_0}{\sqrt{mL}} \sin \frac{aB}{\sqrt{mL}} t.$ El largo del carrito debe ser menor a $\frac{v_0 \sqrt{mL}}{aB}$ para que logre entrar.
<b>P</b> 16.11	a) $I_3 = 0$ (la corriente no puede aumentar en forma abrupta en una inductancia), $I_1 = I_2 = \frac{V_0}{R_1 + R_2}$ b) $I_1 = I_3 = \frac{V_0}{R_1}, I_2 = 0$ (la inductancia actúa como un cortocircuito en un tiempo muy largo).
<b>P</b> 16.12	a) $I(0) = 4 \text{ A. e } I(\infty) = 8 \text{ A.}$ b) $I(t) = 8 - 4e^{-300t} \text{ A.}$
<b>P</b> 16.13	a) $L = \frac{\sqrt{3}R}{2\omega_0}, C = \frac{2\omega_0 R}{\sqrt{3}}$ b) $Q(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega't + \phi)$ con $\gamma = \frac{R}{2L}, \omega' = \sqrt{-(\frac{R}{2L})^2 + (\frac{1}{LC})^2}, A = \frac{Q_0}{\cos \phi}$ y $\tan \phi = -\frac{\gamma}{\omega'}$
<b>P</b> 16.14	
<b>P</b> 16.15	a) $\Phi = \frac{NI_0\mu\mu_0a^2}{32a\mu_0+2g\mu}, L = \frac{N^2\mu\mu_0a^2}{32a\mu_0+2g\mu}$ b) $ \vec{F}  = \frac{N^2I_0^2\mu^2\mu_0a^2}{(32a\mu_0+2g\mu)^2}$ la fuerza es atractiva.



## CAPÍTULO 16. INDUCTANCIA Y ENERGÍA MAGNÉTICA



# Corriente Alterna

## I. Resumen Teórico

---

### Corriente Alterna

Los circuitos de corriente alterna son circuitos alimentados por una fuente de voltaje de la forma

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t - \phi) \quad (17.1)$$

donde  $V_0$  es amplitud de la señal,  $\omega$  su frecuencia angular y  $\phi$  su fase. En general, para enfrentar problemas de este tipo se utiliza la técnica de fasores, es decir

$$V(t) = \operatorname{Re}\{V_0 e^{j\omega t}\} \quad (17.2)$$

donde se expresa la tensión de la fuente como una exponencial compleja donde  $j = \sqrt{-1}$ <sup>1</sup>. Adicionalmente, se suele tomar como referencia la fuente de voltaje de modo que  $\phi = 0$ . Como notación, se suele obviar el hecho que se trabaja sólo con la parte real, por lo cual

$$V(t) = V_0 e^{j\omega t} \quad (17.3)$$


---

### Impedancias

La impedancia es la resistencia aparente (compleja) que tiene un circuito alimentando por una fuente de voltaje alterna. Se define entonces

$$Z_R = R \quad (17.4)$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (17.5)$$

$$Z_L = j\omega L \quad (17.6)$$

Donde  $Z_R$ ,  $Z_C$  y  $Z_L$  son las impedancias de una resistencia, un condensador y un inductor, respectivamente.

---

<sup>1</sup>En Ingeniería Eléctrica no se suele la notación  $i = \sqrt{-1}$  para evitar confusión con la corriente  $i$ . En este libro se denotará  $j$  como la unidad compleja.

## Potencia

La potencia instantánea de un circuito con una fuente de voltaje  $V(t)$  que entrega una corriente  $I(t)$  está dada por

$$P(t) = V(t)I(t) \quad (17.7)$$

Por interés práctico, es útil conocer el valor de la potencia promedio que emite

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad (17.8)$$

donde  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . En caso de usar fasores, con  $V(t) = V_0 e^{j\omega t}$  y  $I(t) = I_0 e^{j(\omega t - \phi)}$  la potencia promedio puede ser determinada en forma equivalente como

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V(t)I^*\} = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \phi \quad (17.9)$$

Donde  $I^*$  es el conjugado de  $I$ . A partir de lo anterior, se define el valor rms ("Root Mean Square") o efectivo de una señal como

$$V_{\text{rms}}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad (17.10)$$

de modo que

$$\langle P(t) \rangle = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \phi \quad (17.11)$$

---

## Frecuencia de Resonancia

La frecuencia de resonancia  $\omega_0$  de un circuito eléctrico es aquella frecuencia la cual anula la parte imaginaria de la impedancia equivalente de un circuito eléctrico. En esta frecuencia ocurre

- La máxima corriente que circula por el circuito.
  - La máxima potencia promedio.
- 

## Recomendaciones

- El uso de fasores en la notación de circuitos de corriente alterna facilita su desarrollo. Los condensadores y inductores pueden ser vistos como "resistencias complejas" iguales a su impedancia.



## CAPÍTULO 17. CORRIENTE ALTERNA

- Recuerde que a pesar de trabajar con números complejos, el resultado que tiene sentido físico es la parte real del resultado complejo.
- Distinga entre la tensión peak-to-peak y la rms. En general, los artefactos eléctricos hacen referencia a su consumo promedio y tensión en rms. En Chile la tensión máxima no son 220 V , sino  $220\sqrt{2}$  V.



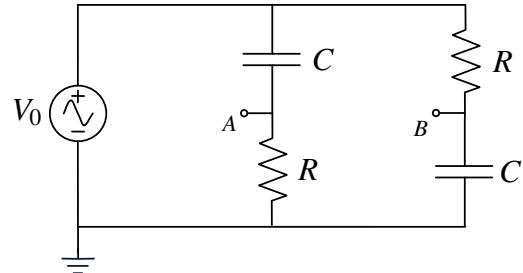
## II. Problemas Propuestos

### Problema 17.1



Considere el circuito de corriente alterna mostrado en la Figura. El circuito es alimentado con un generador de voltaje  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ .

- Demuestre que el módulo de la diferencia de potencial entre los puntos  $A$  y  $B$  es independiente de la frecuencia  $\omega$  del generador.
- Calcule la fase de esta diferencia de potencial con respecto al generador.
- Explique cualitativamente como cambiarían sus resultados si el generador tuviese una resistencia interna  $R_{\text{int}} = R/10$ .

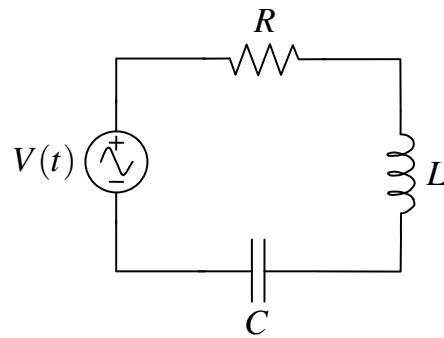


### Problema 17.2



Un circuito RLC serie tiene  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$  y una frecuencia de resonancia de  $\omega_0 = 3 \text{ kHz}$ .

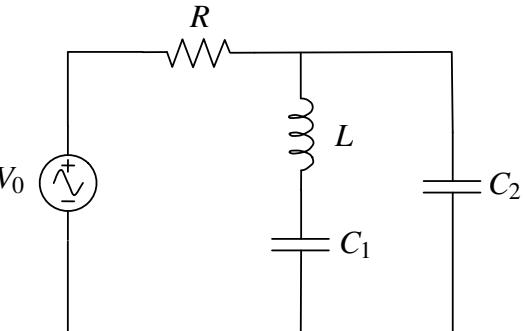
- ¿Cuál es el valor de  $C$ ?
- ¿Cuál es valor de la impedancia total cuando la frecuencia es de  $\omega' = 5 \text{ kHz}$ ?
- ¿Cuál es la corriente de respuesta a un voltaje  $V(t) = 200 \cos(10^4 \pi t)$ ?
- ¿Cuál es la potencia promedio consumida?
- ¿Cuál es el máximo voltaje en cada uno de los tres elementos de circuito? ¿Por qué estos números no suman 200 [V]?



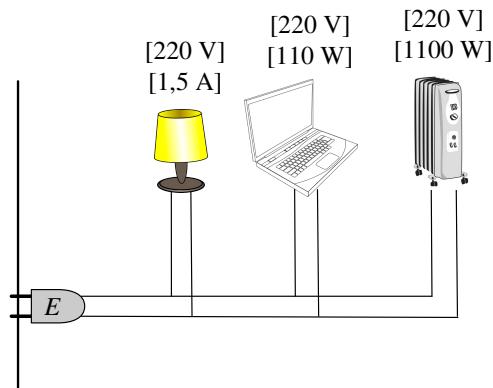
**Problema 17.3**   

Considere el circuito eléctrico de la figura, que es alimentado por una fuente de voltaje alterno  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ . Determine:

- La impedancia equivalente de la configuración, especificando claramente su parte real e imaginaria.
- La frecuencia de resonancia  $\omega_0$  del circuito, tal que haga máxima la corriente que sale de la fuente.
- La corriente que circula por la resistencia  $R$  en función del tiempo (ie. escriba la corriente de la forma  $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$ , especificando claramente los valores de  $I_0$  y  $\phi$ ).
- La potencia promedio entregada por la fuente.

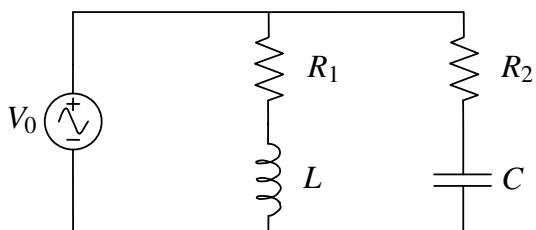
**Problema 17.4**   

En la figura se esquematiza la conexión de un computador personal, una lámpara de escritorio y una estufa eléctrica a un enchufe múltiple ("alargador") el cual es conectado al enchufe de 220 V en la muralla. Las especificaciones de cada artículo aparecen en la figura. El enchufe  $E$  conectado a la muralla tolera una corriente máxima de 7 A. Examine cuantitativamente la conexión y determine si el enchufe  $E$  es el adecuado.

**Problema 17.5**   

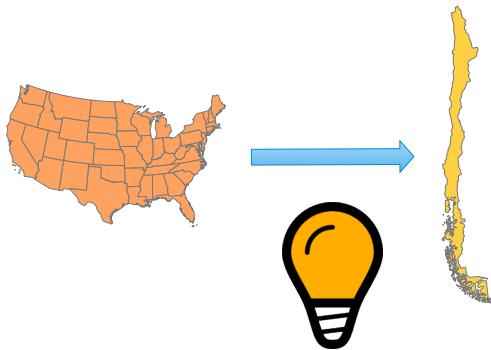
Un circuito tiene dos resistencias  $R_1$  y  $R_2$ , un condensador  $C$  y una inductancia  $L$  dispuestas de la forma que se indica en la Figura. El circuito es alimentado mediante una fuente de voltaje alterno de ecuación  $V(t) = V_0 \sin \omega t$ . Determine

- La impedancia equivalente del circuito y el módulo de la corriente en función del tiempo por cada rama del circuito.
- La frecuencia de resonancia del circuito, ¿Cuál es el valor de la corriente máxima que sale de la fuente? (exprese su resultado en función de la frecuencia de resonancia).



**Problema 17.6**   

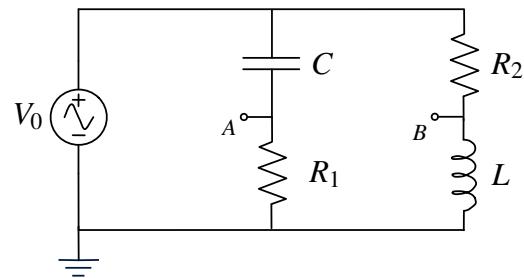
Los enchufes eléctricos chilenos proveen una fuente de voltaje alterno con 220 [V] y una frecuencia 50 [Hz], por otro lado, los enchufes en Estados Unidos usan 120 [V] y una frecuencia 60 [Hz]. Si se trae una ampolleta de 60 [W] y 120 [V] de Estados Unidos a Chile, ¿Cuán grande debe ser una inductancia  $L$ , en henrys, que debe ser conectada en serie tal que la ampolleta opere normalmente, produciendo la misma cantidad de luz como si fuese conectada en Estados Unidos?. Explique brevemente por qué es ventajoso corregir la iluminación con una inductancia en vez de una resistencia.

**Problema 17.7**   

Para el circuito en la figura, muestre si

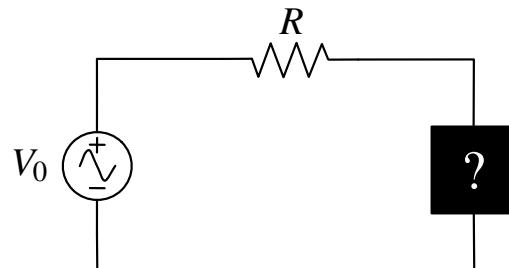
$$R_1 R_2 = \frac{L}{C}$$

entonces  $V_A = V_B$  sin importar la frecuencia  $\omega$ . Ambos potenciales están medidos de la tierra del circuito.

**Problema 17.8**   

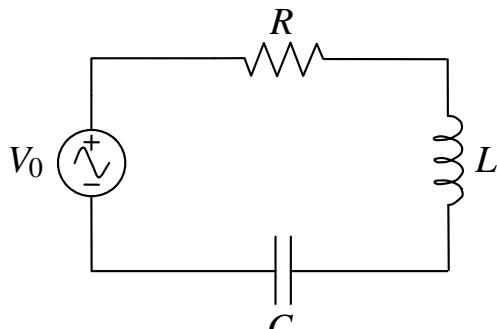
El circuito de la figura tiene una fuente de voltaje alterno  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ , conectada en serie con una resistencia  $R = 1 \Omega$  y una “caja negra”, que puede contiene un condensador, un inductor, o ambos. Se mide la corriente que circula en el circuito con una frecuencia angular  $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$  y se observa que la corriente adelanta al voltaje de la fuente en una fase de  $\pi/4$  radianes. Si se repite el experimento con una frecuencia a  $\omega_2 = 2 \text{ rad/s}$  se encuentra la corriente se atrasa exactamente  $\pi/4$  radianes con respecto a la fuente.

- ¿Qué hay dentro de la caja negra?.
- ¿Cuál/es es/son los valor/es de inductancia o/y capacitancia?.
- ¿Puede ser el circuito resonante?, en caso de serlo, ¿cuál es la frecuencia de resonancia?.

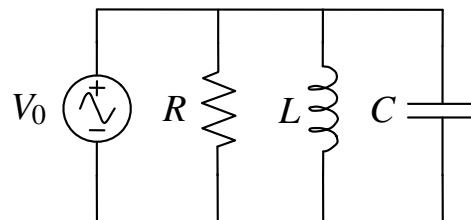


**Problema 17.9**   

- a) Un circuito RLC serie contiene una inductancia de  $0.1 \text{ H}$ . y una resistencia y capacitancia de valor desconocido. Cuando el circuito es conectado a una fuente AC  $V(t) = 230 \sin 100\pi t$ , la corriente que fluye por el circuito es  $I(t) = 2.3 \sin 100\pi t$ . Encuentre: los valores de la resistencia y la capacitancia, la diferencia de potencial en la inductancia y la potencia promedio total consumida.
- b) Un circuito resonante en paralelo consiste en un condensador  $C = 32 \text{ pF}$  en paralelo con una inductancia  $L = 18 \mu\text{H}$  y una resistencia  $R = 60 \Omega$ , respectivamente. Determine la frecuencia de resonancia del circuito y el módulo de la impedancia equivalente en función de la frecuencia  $\omega$  del generador.
- c) Un generador entrega un voltaje constante con frecuencia variable de  $V_{\text{rms}} = 100 \text{ [V]}$  (rms) a un circuito RLC serie que contiene  $R = 5\Omega$ ,  $L = 4 \text{ mH}$ , y  $C = 0.1 \mu\text{F}$ . La frecuencia del generador se varía hasta que se obtiene el máximo valor de la corriente. Determine el valor de la corriente máxima, la frecuencia en la cual ocurre, y el voltaje entre la inductancia y el condensador.



(a) RLC Serie



(b) RLC Paralelo

**Problema 17.10**   

Suponga usted que cuenta con dos herramientas que operan 110 V. Una de ellas es un taladro eléctrico cuyas especificaciones son (110 V - 2,6 A). La otra herramienta es una sierra eléctrica de especificaciones (110 V - 3 A). Para utilizar estas herramientas requiere un transformador que reduzca el voltaje de 220 V a 110 V. Estos aparatos se encuentran en el comercio y los hay de 50 W, 100 W, 800 W, 1000 W, 1500 W. Mientras mayor es la potencia tolerable por el transformador mayor es su precio. Determine el transformador más económico que permita la operación simultánea de ambas herramientas.



### III. Soluciones

#### Solución 17.3

a) La impedancia equivalente está dada por

$$\begin{aligned} Z &= R + \left( \frac{1}{jX_L - jX_{C1}} + \frac{1}{-jX_{C2}} \right)^{-1} \\ &= R + \left( \frac{-jX_{C2} + jX_L - jX_{C1}}{(X_L - X_{C1})X_{C2}} \right)^{-1} \\ &= R + j \frac{(X_L - X_{C1})X_{C2}}{X_{C2} + X_{C1} - X_L} \\ &= R + j \frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)} \end{aligned}$$

b) La frecuencia de resonancia es tal que la parte imaginaria de la impedancia se vuelve nula, es decir

$$X_L = X_{C1} \implies \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C_1} \implies \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$$

Nótese el hecho que al elegir esta frecuencia, el módulo de la impedancia se vuelve mínimo, y en consecuencia, se maxima el módulo de la corriente que sale de la fuente.

c) La corriente que circula por la resistencia es

$$I(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{V_0 e^{j\omega t}}{Z} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{V_0 e^{j\omega t}}{|Z| e^{j\phi}} \right\} = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \phi)$$

donde de la parte anterior se tiene que los valores de  $|Z|$  y  $\phi$  son

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + \left( \frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)} \right)^2} \\ \phi &= \arctan \left( \frac{\omega^2 LC_1 - 1}{R\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)} \right) \end{aligned}$$

d) Finalmente, la potencia media que entrega la fuente es

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{V_0^2}{2|Z|} \cos \phi \\ &= \frac{V_0^2}{2|Z|^2} \operatorname{Re}\{Z\} \\ &= \frac{V_0^2 R}{2R^2 + 2 \left( \frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)} \right)^2} \end{aligned}$$



**Solución 17.5** 

a) La impedancia equivalente está dada por

$$Z_{eq} = \left( \frac{1}{R_1 + Z_L} + \frac{1}{R_2 + Z_C} \right)^{-1}$$

donde  $Z_L = jX_L$  y  $Z_C = -jX_C$ , con  $X_L = \omega L$  y  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ . Luego

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= \left( \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C} \right)^{-1} \\ &= \frac{(R_1 + jX_L)(R_2 - jX_C)}{(R_1 + R_2) + j(X_L - X_C)} \\ &= \frac{(R_1 R_2 + X_L X_C) + j(X_L R_2 - X_C R_1)}{(R_1 + R_2) + j(X_L - X_C)} \\ &= \frac{[(R_1 R_2 + X_L X_C) + j(X_L R_2 - X_C R_1)][(R_1 + R_2) + j(X_L - X_C)]}{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \frac{(R_1 R_2 + X_L X_C)(R_1 + R_2) - (X_L R_2 - X_C R_1)(X_L - X_C)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &\quad + j \frac{(R_1 R_2 + X_L X_C)(X_L - X_C) + (X_L R_2 - X_C R_1)(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} \end{aligned}$$

Los módulos de cada una de las corrientes vale

$$|I_1(t)| = \left| \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R_1 + j\omega L} \right| = \frac{V_0}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}} \quad |I_2(t)| = \left| \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R_1 - j\frac{1}{\omega C}} \right| = \frac{V_0}{\sqrt{R_1^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}}$$

Nótese que los módulos de las corrientes son constantes en el tiempo y sólo dependen de los parámetros fijos del circuito. El aporte temporal está dado netamente por la parte exponencial compleja de la corriente.

b) La frecuencia de resonancia puede ser calculada al hacer nula la parte imaginaria de la impedancia, de modo que

$$(R_1 R_2 + X_L X_C)(X_L - X_C) + (X_L R_2 - X_C R_1)(R_1 + R_2) = 0$$

Reemplazando los valores de  $X_L$  y  $X_C$

$$\left( R_1 R_2 + \frac{L}{C} \right) \left( \frac{1}{\omega_0 C} - \omega_0 L \right) = \left( \omega_0 L R_2 - \frac{R_1}{\omega_0 C} \right) (R_1 + R_2)$$

donde puede despejarse el valor de  $\omega_0$  como

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{R_1^2 C - L}{R_2^2 C - L}}$$

El valor de la corriente para esa frecuencia vale

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} \implies |I| = \frac{|V_0|}{|Z_{eq}|} = V_0 \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C})^2}{(R_1 R_2 + \frac{L}{C})^2 + (\omega_0 L R_2 - \frac{R_1}{\omega_0 C})^2}$$



**Solución 17.7** 

Previamente, antes de resolver el problema, es bueno conocer el concepto de “Divisor de Voltaje” que es sumamente útil en problemas de corriente alterna.

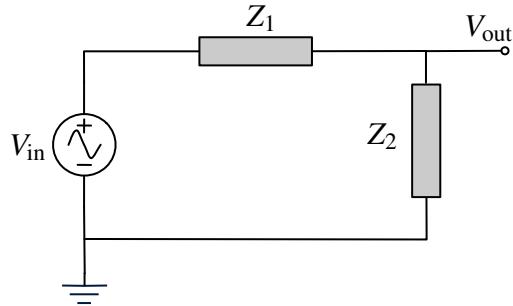


Figura 17.1: Divisor de Voltaje con Impedancias

En la Figura 17.1 es posible apreciar una malla de un circuito CA que posee dos impedancias en serie  $Z_1$  y  $Z_2$ . El divisor de voltaje permite obtener el voltaje el punto  $V_{\text{out}}$ , que es justo antes de donde comienza la impedancia  $Z_2$ . Nótese que  $V_{\text{out}}$  representa la caída de tensión al pasar la corriente por  $Z_1$ . Para determinar el valor de  $V_{\text{out}}$  se debe considerar que  $V_{\text{in}} = I \cdot (Z_1 + Z_2)$  y  $V_{\text{out}} = I \cdot Z_2$ , juntando ambas ecuaciones se llega a

$$V_{\text{out}} = V_{\text{in}} \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Volviendo al problema, usando notación fasorial para la fuente  $V(t) = V_0 e^{j\omega t}$ , se tiene que usando la fórmula del divisor de voltaje para la rama que contiene a  $C$  y  $R_1$ :

$$V_A = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{Z_{R1}}{Z_c + Z_{R1}} = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{R_1}{R_1 - \frac{j}{\omega C}} = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{j}{R_1 \omega C}}$$

De la misma manera, para la rama que contiene a  $R_2$  y  $L$ :

$$V_B = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{j\omega L}{R_2 + j\omega L} = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{jR_2}{\omega L}}$$

Luego, usando el dato que  $R_1 R_2 = \frac{L}{C}$  o equivalentemente  $R_1 C = \frac{L}{R_2}$ , se llega a que

$$V_A = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{j}{\omega R_1 C}} = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{jR_2}{\omega L}} = V_B$$

que era lo que se quería demostrar.



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 17.1

- Use las Leyes de Kirchhoff aplicadas al circuito y encuentre el la diferencia de potencial entre  $A$  y  $B$ .
- Recuerde que las impedancias pueden ser tratadas como resistencias. Se recomienda llamar  $Z_c$  a la impedancia del condensador y no reemplazar su valor hasta obtener el resultado final.

### Indicación 17.2

- Determine el valor de la frecuencia de resonancia de un circuito  $RLC$ , a partir de ello puede encontrar  $C$ .
- Las demás partes del problema son aplicaciones directas de fórmulas expresadas en el resumen.

### Indicación 17.4

- Recuerde que la potencia entregada por los fabricantes es promedio y que la corriente y el voltaje son rms (y no máximos).

### Indicación 17.6

- Determine la resistencia de la ampolleta con los datos entregados sobre Estados Unidos. Recuerde que los valores entregados de voltaje son rms.
- Ajuste el valor de la inductancia que debe ser colocada en serie para que la potencia emitida por la ampolleta en Chile sea la misma que en Estados Unidos.

### Indicación 17.8

- Haga inicialmente el análisis de que pasaría si hubiese sólo un condensador o sólo un inductor en la caja negra. ¿Podría darse la condición del enunciado al cambiar la frecuencia?.



## CAPÍTULO 17. CORRIENTE ALTERNA

- Una vez impuesto el circuito RLC, imponga las condiciones del enunciado y despeje los valores de  $R$  y  $C$ .
- De lo anterior es directo poder determinar la frecuencia de resonancia del circuito.

### Indicación 17.9

- Para el primer problema, note que cuando se alimenta el circuito con una fuente de voltaje con esa frecuencia la corriente está totalmente en fase. Lo anterior ocurre cuando el circuito está en resonancia.
- En el segundo problema, determine la impedancia equivalente del sistema (todas las impedancias se encuentran en paralelo). Lo pedido es directo de esa expresión.
- Para el tercer problema, recuerde que la máxima corriente ocurre en la frecuencia de resonancia.

### Indicación 17.10

- Encuentre la potencia consumida por las herramientas, recuerde que el voltaje y la corriente entregada es en rms.



## V. Resultados

Problema	Respuestas
<b>P</b> 17.1	<p>b) <math>\phi = 2 \arctan \frac{1}{\omega RC}</math></p> <p>c) Cambian los dos resultados anteriores, ya que ocurre una división de voltaje previa que cambia el módulo y el desfase de la diferencia de potencial.</p>
<b>P</b> 17.2	<p>a) <math>C = 281n[F]</math></p> <p>b) <math>R = (225)e^{j1,11}\Omega</math></p> <p>c) <math>I(t) = 0,89 \cos(10000\pi t - 1,11) [\text{A}]</math></p> <p>d) <math>\langle P \rangle = 39,6 [\text{W}]</math></p> <p>e) <math>I_{max} = 0,89 [\text{A}]</math>, <math>V_{max}^R = 89 [\text{V}]</math>, <math>V_{max}^L = 89\pi [\text{V}]</math>, <math>V_{max}^C = 100,7 [\text{V}]</math></p>
<b>P</b> 17.3	<p>a) <math>Z = R + j \frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)}</math></p> <p>b) <math>\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}</math></p> <p>c) <math>I(t) = \frac{V_0}{ Z } \cos(\omega t - \phi)</math> donde <math> Z  = \sqrt{R^2 + \left( \frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)} \right)^2}</math>  <math>\phi = \arctan \left( \frac{\omega^2 LC_1 - 1}{R\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)} \right)</math></p> <p>d) <math>\langle P \rangle = \frac{V_0^2 R}{2R^2 + 2 \left( \frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)} \right)^2}</math></p>
<b>P</b> 17.4	$I_{max} = 7\sqrt{2} > 7 [\text{A}]$ . El enchufe no es capaz de trabajar con esa corriente.
<b>P</b> 17.5	<p>a) <math>Z_{eq} = \left( \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C} \right)^{-1}</math>, donde <math>X_L = \omega L</math> y <math>X_C = \frac{1}{\omega C}</math>, <math> I_1(t)  = \frac{V_0}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}}</math></p> <p>b) <math> I_2(t)  = \frac{V_0}{\sqrt{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}}</math></p> <p>b) <math>\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{R_1^2 C - L}{R_2^2 C - L}}</math> y <math> I  = V_0 \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C})^2}{(R_1 R_2 + \frac{L}{C})^2 + (\omega_0 L R_2 - \frac{1}{\omega_0 C} R_1)^2}</math></p>



## CAPÍTULO 17. CORRIENTE ALTERNA

Problema	Respuestas
<b>17.6</b>	<b>P</b> $R_{\text{ampolla}} = 240\Omega$ , $L = \sqrt{\frac{V_{\text{rms-chile}}^2 R_{\text{ampolla}} - P \cdot R_{\text{ampolla}}^2}{P \cdot (2\pi f_{\text{chile}})^2}} = 1,2[H]$ (una inductancia muy grande!). Es mejor un inductor ya que no consume potencia.
<b>17.8</b>	<b>a)</b> Contiene un inductor y un condensador. <b>b)</b> $C = 0,5 \text{ F}$ y $L = 1H$ . <b>c)</b> Sí, y la frecuencia es $\omega_0 = \sqrt{2} \text{ rad/s}$ .
<b>17.9</b>	<b>a)</b> $R = 100\Omega$ , $C \approx 10^{-5} \text{ F}$ , $\Delta V(t) = 23\pi \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$ , $P = 72,25 \text{ W}$ . <b>b)</b> $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , $ Z  = \sqrt{\frac{R \cdot \frac{L}{C}}{(\frac{L}{C})^2 + R^2(\omega^2 L^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2})}}$ <b>c)</b> $I_{\max} = \frac{V_{\text{rms}}\sqrt{2}}{R}$ , esto ocurre en resonancia con $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ y $\Delta V_{LC}(\omega = \omega_0) = 0$ .
<b>17.10</b>	<b>P</b> La potencia consumida es de 616 W, por lo que bastaría un transformador de 800 W.



# Leyes de Maxwell

## I. Resumen Teórico

---

### Ley de Ampère-Maxwell

Debido a la incompatibilidad de lo propuesto por Ampère con la Ecuación de Continuidad en el caso no estático, es necesario corregirla de la siguiente forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (18.1)$$

En su forma integral, la ecuación se transforma en

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (18.2)$$

donde  $\Gamma$  es el borde de superficie  $\Omega$ . En particular, se define la corriente desplazamiento como

$$I_d = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (18.3)$$

debido a que es provocada por el cambio el tiempo de ese vector.

---

### Teorema de Poynting

El vector de Poynting se define como

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (18.4)$$

Por otro lado, la energía electromagnética por unidad de volumen estada dada por

$$u_{em} = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (18.5)$$

## CAPÍTULO 18. LEYES DE MAXWELL

El teorema de Poynting indica que

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (18.6)$$

En su versión integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint u_{em} dV + \iint \vec{S} \cdot d\vec{A} = - \iiint \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (18.7)$$

equivalentemente

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} + \Phi_S = -P \quad (18.8)$$

Esta ecuación constituye un balance de energía electromagnética  $U_{em}$ , ya que relaciona la variación de la energía electromagnética con el flujo de vector de Poynting  $\Phi_S$  y con las fuentes que provocan esta energía (término  $\vec{J} \cdot \vec{E}$ ).

---

### Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío son

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (18.9)$$

Mientras que las ecuaciones de Maxwell en medios materiales está dado por

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (18.10)$$

---

### Ecuación de Onda

Se dice que una función  $u(x, y, z, t)$  satisface la ecuación de onda cuando

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (18.11)$$



Donde se denomina  $v$  es la velocidad de la onda.

Suponiendo que las ondas viajan en vacío, de modo que  $\rho = 0$  y  $\vec{J} = 0$  y a partir de las Ecuaciones en 18.9, es posible afirmar que

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (18.12)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (18.13)$$

Esto quiere decir que los campos eléctrico y magnético satisfacen la ecuación de onda. En el caso particular de un campo eléctrico tenga dependencia de una única variable, ie.  $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, t)$  la Ecuación 18.12 se reduce a

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (18.14)$$

La Ecuación 18.14 es la ecuación de onda para una función de una sola variable, la cual tiene por solución  $\vec{E}(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt)$ , donde  $F$  y  $G$  son funciones reales. La velocidad de esta onda es

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \implies v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c \quad (18.15)$$

Las ondas electromagnéticas viajan a la velocidad de la luz. Por lo que se deduce que hay una infinidad de formas posibles tanto para el campo eléctrico como magnético mientras satisfaga las Ecuaciones en 18.9.

## Ondas Planas Monocromáticas

El caso particular de estudio son las ondas planas y monocromáticas. El campo eléctrico perteneciente a este tipo de onda es de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = E_0 \hat{n} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (18.16)$$

donde  $\vec{k}$  es conocido como el vector de onda el cual indica la dirección de propagación de la onda,  $\hat{n}$  es vector que indica la dirección del campo eléctrico (también llamado vector de polarización de la onda) y  $\omega$  su frecuencia. En su forma compleja, también se denota como

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (18.17)$$

El argumento de la exponencial compleja se puede reescribir como

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = k \left( \hat{k} \cdot \vec{r} - \frac{\omega}{k} t \right) \quad (18.18)$$

A partir de esto se deduce que

- El vector de onda  $\vec{k} = k \hat{k}$  es inversamente proporcional a la longitud de onda  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . El vector unitario  $\hat{k}$  señala la dirección de propagación de la onda.



## CAPÍTULO 18. LEYES DE MAXWELL

- La velocidad de fase de la onda es  $v = \frac{\omega}{k}$ , donde en el caso particular del vacío se tiene que  $\frac{\omega}{k} = c$ .
- La frecuencia angular de la onda es  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  donde  $T$  es el periodo de la onda y  $f$  su frecuencia.
- En el caso de la polarización lineal  $\hat{n}$  es fijo en el tiempo. En otras polarizaciones como circulares y elípticas, el vector  $\hat{n} = \hat{n}(\vec{r}, t)$  depende de la posición y el tiempo.

Dada las Ecuaciones de Maxwell es posible afirmar que

$$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k} \quad (18.19)$$

Por lo anterior

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{k} \cdot \vec{B} = \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (18.20)$$

Adicionalmente, también debe cumplirse que

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (18.21)$$

### Intensidad de una Onda

La intensidad de la onda se determina a partir del vector de Poynting promedio de una onda el cual puede ser determinado como

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt \quad (18.22)$$

donde  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Si la onda es tratada en su forma compleja, el vector de Poynting promedio puede ser determinado en forma equivalente como

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} \quad (18.23)$$

donde  $\vec{H}^*$  es el vector conjugado a  $\vec{H}$ .

### Recomendaciones

- Las ondas electromagnéticas son un resultado notable dentro de un curso de electromagnetismo.
- En la mayoría de los casos es más sencillo trabajar la expresión de onda como un complejo más que con senos y cosenos.

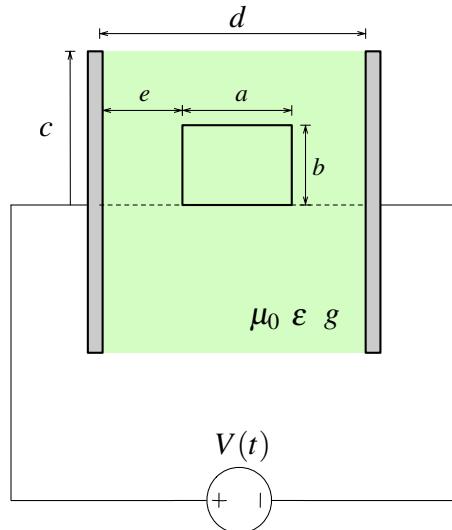


## II. Problemas Propuestos

### Problema 18.1

Se tiene dos discos conductores paralelos de radio  $c$  y separados una distancia  $d \ll c$  entre los cuales se ha colocado una sustancia homogénea de conductividad  $g$  y permitividad  $\epsilon_0$ . Los discos se someten a una diferencia de potencial  $V(t)$  conocida.

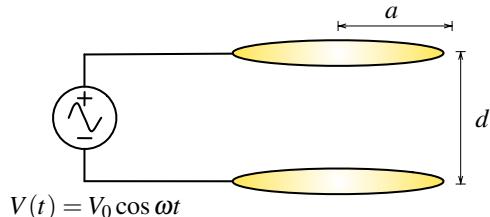
- Calcule la fem inducida en un rectángulo de lados  $a$  y  $b$  como se muestra en la Figura. Evalúe en particular esa fem si  $V(t) = V_0 e^{-\frac{g}{\epsilon_0}t}$ .
- Determine el vector de Poynting  $\vec{S}$  dentro del condensador y compruebe el teorema de Poynting.



### Problema 18.2

Para calcular de una forma más exacta el campo eléctrico dentro de un condensador de placas paralelas circulares (ver Figura), en el que se aplica una fuente de voltaje alterna se plantea el siguiente método:

- Determine  $\vec{E}_0(t)$  como valor del campo en un régimen cuasiestático.
- Conocido  $\vec{E}_0(t)$ , determine  $\vec{B}_1(t)$  inducido.
- Con  $\vec{B}_1(t)$ , determine  $\vec{E}_2(t)$  inducido.
- Finalmente, determine el valor más exacto como  $\vec{E}(t) \approx \vec{E}_0(t) + \vec{E}_2(t)$ .



### Problema 18.3

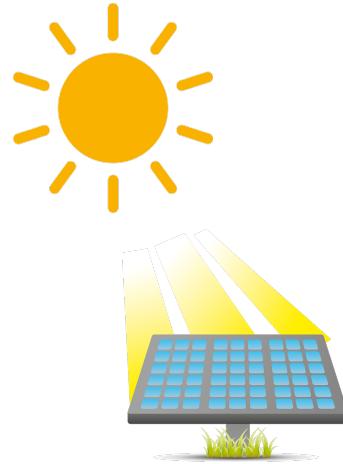
- Explique qué es una onda plana monocromática e identifique explícitamente la dirección de propagación, la velocidad de propagación, la frecuencia, y la longitud de onda.
- En el caso que la onda plana sea electromagnética, demuestre que los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares entre si y (ambos) perpendiculares a la dirección de propagación. Indicación: use las ecuaciones de Maxwell.



**Problema 18.4**   

Se plantea estimar en forma idealizada la incorporación de energía solar para suprir necesidades de potencia eléctrica del área metropolitana. Se sabe que la potencia electromagnética del Sol es  $P_S = 3,8 \cdot 10^{26}$  W. Además, la distancia entre la Tierra y el Sol es  $R = 1,5 \cdot 10^{11}$  m.

- Calcule la magnitud del vector de Poynting (valor medio) en la Tierra
- Suponiendo que: no hay pérdidas de energía por la atmósfera; que el Sol sale a las 8h00 y se pone a las 18h00; y que el Sol pasa por el zenith a las 13h30 (simplificación), calcule la energía solar directa recibida por un panel horizontal de  $1 \text{ m}^2$  de superficie durante un día.
- Si el consumo anual promedio por habitante es de 700 kWh, y suponiendo eficiencia de 100 % en el proceso de generación de energía eléctrica a partir de la solar, dimensione los paneles solares necesarios para cubrir el consumo de un habitante. ¿Qué área es la que se necesitaría para seis millones de habitantes? Comente.

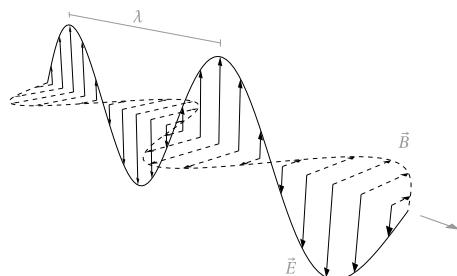
**Problema 18.5**   

Considere una onda electromagnética que posee el siguiente campo eléctrico

$$\vec{E} = E_0 \cos[(10 \text{ m}^{-1}) \cdot x + (3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}) \cdot t] \hat{z}$$

Encuentre:

- La longitud de onda  $\lambda$  y el periodo  $T$ .
- La dirección y el sentido de propagación.
- El campo magnético  $\vec{B}$  asociado a esta onda.
- El vector de Poynting  $\vec{S}$ .



**Problema 18.6**   

- a) Escriba una expresión para el campo eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana, cuyo campo eléctrico está contenido en el plano  $xy$  y se propaga desde el origen hasta el punto  $(0, 3, 3)$ . La frecuencia angular de la onda es  $\omega = 100\pi$  [rad/s] y la velocidad de la luz es  $c$ . La magnitud del campo eléctrico es  $E_0$ .
- b) Encuentre la potencia promedio que transporta esta onda.

**Problema 18.7**   

Una onda plana linealmente polarizada se propaga a lo largo de la dirección  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$  en el vacío. La polarización de la onda yace sobre el plano  $XY$  (ie, el campo eléctrico vive en el plano  $XY$ ). Si el módulo de campo eléctrico es  $E_0$  y la frecuencia de la onda es  $\omega$ , encuentre

- a) Las funciones reales que representan  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ .
- b) El promedio temporal del vector de Poynting.

**Problema 18.8**   

Considere una onda electromagnética que viaja en la dirección  $z$  en el vacío, el cual posee un campo eléctrico dado por

$$\vec{E} = E_1 e^{j(kz - \omega t)} \hat{x} + E_2 e^{j(kz - \omega t - \phi)} \hat{y}$$

donde  $E_1$  y  $E_2$  son números reales.

- a) Determine el campo magnético asociado a esta onda electromagnética y el promedio temporal de Poynting.
- b) Considere el caso  $\phi = \frac{\pi}{2}$  y  $E_1 = E_2 = E_0$ . Encuentre las funciones reales que describen el campo eléctrico y magnético de la onda.
- c) Realice un gráfico  $\vec{E}$  vs tiempo (en  $z = 0$ ) y  $\vec{E}$  vs posición  $z$  (en  $t = 0$ ) ¿Qué comportamiento tiene la onda electromagnética?.



**Problema 18.9**   

Al interior de una guía de ondas se transmite una onda electromagnética (solución de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes  $\rho = 0$  y  $\vec{J} = 0$ ) tal que las únicas componentes del campo magnético son  $\vec{B}$  son  $B_x$  y  $B_z$ . Su expresión en función de las coordenadas  $x$ ,  $z$  y del tiempo  $t$  es:

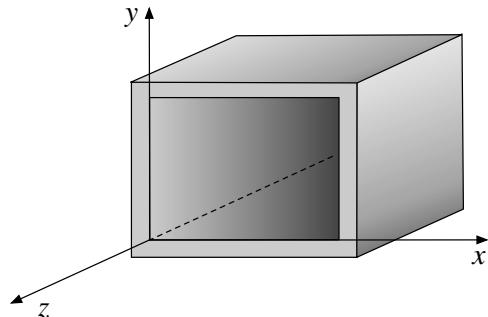
$$B_x = \frac{aB_0k}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t)$$

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t)$$

en donde  $a$ ,  $B_0$ ,  $k$  y  $\omega$  son constantes. La relación entre  $k$  y  $\omega$  es

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$$

Se sabe que el campo eléctrico  $\vec{E}$  sólo tiene componente  $E_y$  que es función solamente de las coordenadas  $x$ ,  $z$ ,  $t$ . Encuentre la expresión para este  $E_y$ .

**Problema 18.10**   

Dos ondas electromagnéticas son emitidas desde dos diferentes fuentes, de modo que

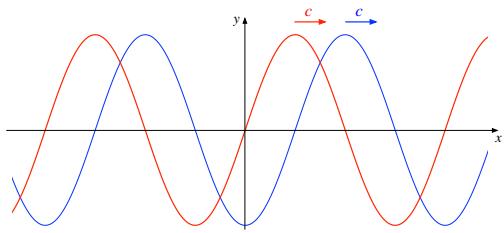
$$\vec{E}_1(x, t) = E_{10} \cos(kx - \omega t) \hat{y}$$

$$\vec{E}_2(x, t) = E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi) \hat{y}$$

- Encuentre el vector de Poynting asociado a la onda electromagnética resultante.
- Encuentre la intensidad de la onda.
- Repita el cálculo si la dirección de propagación de la segunda onda electromagnética viaja en la dirección contraria a la primera

$$\vec{E}_1(x, t) = E_{10} \cos(kx - \omega t) \hat{y}$$

$$\vec{E}_2(x, t) = E_{20} \cos(kx + \omega t + \phi) \hat{y}$$



**Problema 18.11**   

En un buen conductor, cuando la frecuencia no es demasiado grande, una buena aproximación consiste en despreciar el término de la corriente desplazamiento. En tal caso la ecuación para  $\vec{E}$  es

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 g \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Considere el caso de una onda plana que ha penetrado a un medio (interfaz: plano  $XY$ ) con conductividad  $g$ .

- a) Tomando  $\vec{k} = (0, 0, k)$  demuestre de lo anterior que  $k = (1 + j)\sqrt{\omega\mu_0 g}/2$ . En lo que sigue se usará la notación  $k_0 = \sqrt{\omega\mu_0 g}/2$
- b) Para el campo eléctrico de una onda plana en el medio conductor, luego de una incidencia normal, es  $\vec{E} = E_0 e^{j(kz - \omega t)} \hat{x}$ , (convencionalmente escoja  $E_0$  real). Determine el valor de  $\vec{B}$ .
- c) Calcule el flujo temporal del vector de Poynting  $\langle \vec{S} \rangle$



### III. Soluciones

#### Solución 18.1

- a) Dado que el potencial depende del tiempo  $V(t)$ , el campo eléctrico también estará variando en el tiempo y éste provocará un campo magnético que inducirá una fem en la espira rectangular. En una primera aproximación, el campo dentro de un condensador puede ser estimado como

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \implies V(t) = E(t)d \implies \vec{E} = \frac{V(t)}{d}\hat{z}$$

Luego, para puntos dentro del condensador  $r < c$  debe cumplirse que

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Donde  $\Omega$  es un circulo de radio  $r$  y  $\Gamma$  su borde. Como  $\vec{J} = g\vec{E}$ ,  $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$  y  $\vec{H} = H(r, t)\hat{\theta}$  la expresión anterior se transforma en

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = g \iint_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$H(r) \cdot 2\pi r = \frac{g}{d}V(t)\pi r^2 + \frac{\epsilon_0}{d}\dot{V}(t)\pi r^2$$

Luego como  $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$  el campo magnético dentro del condensador vale

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 r}{2d}(gV(t) + \epsilon_0\dot{V}(t))\hat{\theta}$$

Luego, el flujo sobre la espira es

$$\Phi = \int_e^{e+a} \int_0^b \frac{\mu_0 r}{2d}(gV(t) + \epsilon_0\dot{V}(t))drdz = \frac{\mu_0 ab^2}{4d}(gV(t) + \epsilon_0\dot{V}(t))$$

Por lo tanto

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 ab^2}{4d}(g\dot{V}(t) + \epsilon_0\ddot{V}(t))$$

En el caso particular de potencial entregado, se tiene

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{g}{\epsilon_0}t} \implies \dot{V}(t) = -\frac{V_0 g}{\epsilon_0} e^{-\frac{g}{\epsilon_0}t} \implies \ddot{V}(t) = \frac{V_0 g^2}{\epsilon_0^2} e^{-\frac{g}{\epsilon_0}t}$$

Al evaluar los valores anteriores se obtiene  $\varepsilon = 0$ .



- b) El vector de Poynting dentro del condensador vale

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = -\frac{rV(t)}{2d^2}(gV(t) + \varepsilon_0 \dot{V}(t))\hat{r}$$

Por lo que el flujo sobre la superficie del condensador (manto cilíndrico) es

$$\Phi_S = \int_0^{2\pi} \int_0^d -\frac{cV(t)}{2d^2}(gV(t) + \varepsilon_0 \dot{V}(t))\hat{r} \cdot cd\theta dz \hat{r} = -\frac{2\pi c^2 V(t)}{2d}(gV(t) + \varepsilon_0 \dot{V}(t))$$

Por otro lado, la energía electromagnética vale

$$U_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\text{Cilindro}} |E|^2 dV = \frac{\varepsilon_0 \pi c^2 V^2}{2d}$$

No se ha considerado la energía magnética, ya que al ser inducida por el campo eléctrico es de mucho menor magnitud. Falta por determinar el valor de la potencia disipada en el cilindro la cual está dada por

$$P = \iiint_{\text{Cilindro}} \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \frac{g\pi c^2 V^2}{d}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \frac{U_{em}}{\partial t} + \Phi_S &= \frac{\varepsilon_0 \pi c^2 V \dot{V}}{d} - \frac{\pi c^2 V}{d}(gV + \varepsilon_0 \dot{V}) \\ &= -\frac{g\pi c^2 V^2}{d} \\ &= -P \end{aligned}$$

Lo que comprueba el Teorema de Poynting.

### Solución 18.3

- a) Una onda plana es una onda tal que se propaga en una sola dirección en el espacio, o equivalentemente, su frentes de ondas son infinitos planos perpendiculares a la dirección de propagación. Un onda plana es monocromática debido a que posee una única frecuencia de propagación. La forma matemática para expresarla (solución de la ecuación de ondas) es

$$A(\vec{r}, t) = A e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

donde:

- La dirección de propagación está dada por el vector  $\vec{k}$ ,



## CAPÍTULO 18. LEYES DE MAXWELL

- La velocidad de onda puede ser obtenida al reemplazar la expresión anterior en la ecuación de ondas, resultando  $v = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$ .
- La frecuencia angular está dada por  $\omega = 2\pi f$ , donde  $f$  es la frecuencia.
- La longitud de onda  $\lambda$  está dada a partir del módulo del número onda como  $|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

b) Se debe considerar un campo eléctrico arbitrario como

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Reescribiendo  $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$  se tiene que  $\vec{E} = (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}) e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$ . Tomando la divergencia de este campo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = j \underbrace{(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}}_{\vec{k} \cdot \vec{E}}$$

Por la primera ley de Maxwell, se sabe que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \implies \vec{E} \cdot \vec{k} = 0 \implies \vec{E} \perp \vec{k}$ , de igual forma como  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \implies \vec{B} \perp \vec{k}$ . Por otro lado

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \underbrace{\left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)}_{j(k_y E_{0z} - k_z E_{0y}) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}} \hat{x} + \underbrace{\left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)}_{j(k_z E_{0x} - k_x E_{0z}) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}} \hat{y} + \underbrace{\left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)}_{j(k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}} \hat{z}$$

Por lo tanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = j \underbrace{[(k_y E_{0z} - k_z E_{0y}) \hat{x} + (k_z E_{0x} - k_x E_{0z}) \hat{y} + (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \hat{z}]}_{\vec{k} \times \vec{E}_0} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = j \vec{k} \times \vec{E}$$

Suponiendo que el campo magnético también es de la forma  $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  y aplicando la Ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies j \vec{k} \times \vec{E} = j \omega \vec{B} \implies \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

Aplicando producto punto con  $\vec{E}$  a ambos lados

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E} \cdot \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \vec{k} \cdot \frac{\vec{E} \times \vec{E}}{\omega} = 0$$

Por lo que se deduce finalmente que  $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$ .

### Solución 18.4

- a) La radiación del Sol tiene la misma intensidad en todas las direcciones, por lo que la tasa a la que llega a la Tierra es la misma tasa la que pasa a través de una esfera centrada en el Sol con un radio igual al radio de la órbita de la Tierra. Luego tiene que cumplirse

$$P = |S| \cdot A \implies |S| = \frac{P}{A} = \frac{3,80 \cdot 10^{26}}{4\pi(1,5 \cdot 10^{11})^2} \approx 1350 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

donde  $A$  se consideró el área de la Tierra.



- b) Dado los horarios del enunciado, se explicita que el sol se mueve con una velocidad angular constante sobre el panel.

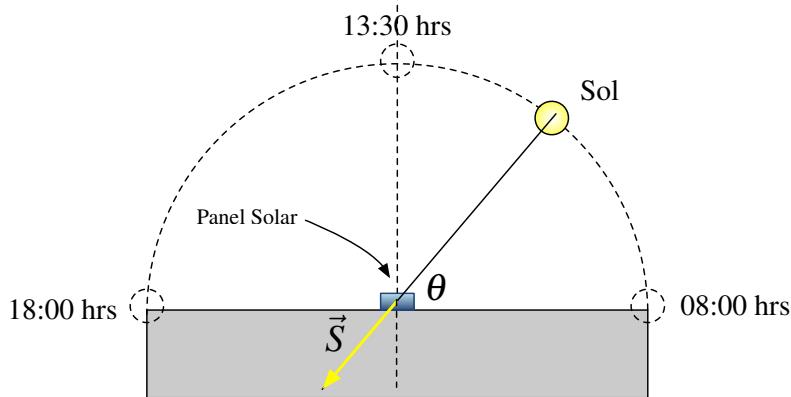


Figura 18.1: Movimiento del Sol.

La componente de vector de Poynting que apunta directamente al panel es  $|\vec{S}| \sin \theta = |\vec{S}| \sin \omega t$ , donde  $\omega = \frac{\pi}{\Delta T}$  y  $\Delta T = 10$  horas. Luego, si se desea encontrar la energía solar directa sobre el panel hay que integrar esa componente de la siguiente forma

$$U = A_{\text{Panel}} \int_0^{\Delta T} |\vec{S}| \sin \omega t dt = A_{\text{Panel}} \frac{|\vec{S}|}{\omega} (-\cos \pi + \cos 0) = 2A_{\text{Panel}} \frac{|\vec{S}| \Delta T}{\pi}$$

Evaluando numéricamente el resultado  $U \approx 8,6 \text{ kWh}$ .

- c) Del resultado anterior se tiene que la generación de energía por unidad de área es de  $8,6 \frac{\text{kWh}}{\text{m}^2 \text{día}} = 3139 \frac{\text{kWh}}{\text{m}^2 \text{año}}$ . Luego, para alcanzar los 700 kWh anual, debe tenerse un área de

$$A_t = \frac{700 \frac{\text{kWh}}{\text{año}}}{3139 \frac{\text{kWh}}{\text{m}^2 \text{año}}} = 0,22 \text{ m}^2$$

Para 6 millones de personas el área total vendría siendo  $1,32 \text{ km}^2$  esto es del orden de casi 2000 canchas de fútbol una al lado de la otra o casi el doble del tamaño del Parque O'Higgins en Santiago de Chile.

### Solución 18.6

- a) Se debe recordar que la forma general del campo eléctrico de una onda electromagnética es en este caso:

$$\vec{E} = E_0 \hat{n} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Donde  $\vec{r} = (x, y, z)$  y  $\vec{k} = k \hat{k}$  indica la dirección de propagación de la onda y  $\hat{n}$ , la polarización del campo eléctrico. En este caso la dirección de propagación de la onda es  $\hat{k}$



## CAPÍTULO 18. LEYES DE MAXWELL

(unitario) y está determinado por

$$\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 3^2}}(0, 3, 3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) = \frac{\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{2}}$$

Por otro lado se sabe que el campo eléctrico está polarizado en el plano  $xy$  por lo que

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(\alpha, \beta, 0)$$

Ahora usando el hecho que la dirección de propagación es siempre perpendicular a la polarización de la onda se cumple que

$$\hat{k} \cdot \hat{n} = 0 \implies (0, 1, 1) \cdot (\alpha, \beta, 0) = 0 \implies \beta = 0$$

Por ende

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2}}(\alpha, 0, 0) = (1, 0, 0) = \hat{x}$$

El campo eléctrico es entonces

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{j(\frac{k}{\sqrt{2}}(y+z) - \omega t)}$$

El valor de  $k$  se determina volviendo a la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \implies -\frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \implies k = \frac{\omega}{c}$$

Finalmente el campo magnético  $\vec{B}$  puede ser determinado como

$$\vec{B} = \frac{\hat{k} \times \vec{E}}{c} = \frac{(\hat{y} + \hat{z}) \times E_0 \hat{x} e^{j(\frac{k}{\sqrt{2}}(y+z) - \omega t)}}{c\sqrt{2}} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}}(\hat{y} - \hat{z}) e^{j(\frac{k}{\sqrt{2}}(y+z) - \omega t)}$$

En resumen como  $\omega = 100\pi \text{rad/s}$ :

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{j100\pi(\frac{y+z}{c\sqrt{2}} - t)} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}}(\hat{y} - \hat{z}) e^{j100\pi(\frac{y+z}{c\sqrt{2}} - t)}$$

b) El vector de Poynting Promedio está dado por

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}^*| = \frac{1}{2\mu_0} \left| E_0 \hat{x} e^{j\omega(\frac{y+z}{c\sqrt{2}} - t)} \times \frac{E_0}{c\sqrt{2}}(\hat{y} - \hat{z}) e^{-j\omega(\frac{y+z}{c\sqrt{2}} - t)} \right| = \frac{E_0^2}{\mu_0 c \sqrt{2}} |(\hat{y} + \hat{z})| = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}$$

### Solución 18.10

a) Para determinar el vector de Poynting es necesario determinar el valor del campo magnético  $\vec{B}$ . Luego para el campo  $\vec{E}_1$  se tiene que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_{10} \cos(kx - \omega t) & 0 \end{vmatrix} = E_{10} k \sin(kx - \omega t) \hat{z}$$



y dado que por Maxwell

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -k \sin(kx - \omega t) \hat{z} \implies \vec{B}_1(x, t) = E_{10} \frac{k}{\omega} \cos(kx - \omega t) \hat{z} = \frac{E_{10}}{c} \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

El cálculo es análogo para determinar  $\vec{B}_2$ , por lo tanto por principio de superposición se tiene que

$$\vec{E} = [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi)] \hat{y}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi)] \hat{z}$$

Donde finalmente el vector de Poynting vale

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{c\mu_0} [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi)]^2 \hat{x}$$

b) La intensidad de la onda está dada por

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{c\mu_0} [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi)]^2 dt$$

Antes de comenzar a trabajar la expresión debe usarse el hecho que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t + \phi) dt = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{c\mu_0 T} \left[ E_{10}^2 \int_0^T \cos^2(kx - \omega t + \phi) dt + E_{20}^2 \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt \right. \\ &\quad \left. + 2E_{10}E_{20} \int_0^T \cos(kx - \omega t + \phi) \cos(kx - \omega t) dt \right] \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \left[ \frac{E_{10}^2}{2} + \frac{E_{20}^2}{2} + \frac{2E_{10}E_{20}}{T} \underbrace{\int_0^T \cos(kx - \omega t + \phi) \cos(kx - \omega t) dt}_{J} \right] \end{aligned}$$



## CAPÍTULO 18. LEYES DE MAXWELL

Para la última integral se tiene que

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(kx - \omega t + \phi) \cos(kx - \omega t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T [\cos(kx - \omega t) \cos \phi - \sin(kx - \omega t) \sin \phi] \cos(kx - \omega t) dt \\
 &= \frac{\cos \phi}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt + \frac{\sin \phi}{T} \int_0^T \cos(kx - \omega t) \sin(kx - \omega t) dt \\
 &= \frac{\cos \phi}{2} + \frac{\sin \phi}{2T} \int_0^T \sin(2(kx - \omega t)) dt \\
 &= \frac{\cos \phi}{2}
 \end{aligned}$$

Finalmente la intensidad vale

$$I = \frac{1}{c\mu_0} \left[ \frac{E_{10}^2}{2} + \frac{E_{20}^2}{2} + E_{10}E_{20} \cos \phi \right]$$

c) Repitiendo nuevamente los cálculos de parte anterior se tiene que el campo magnético asociado a  $\vec{E}_1$  se mantiene, mientras tanto el campo asociado a  $\vec{E}_2$  vale

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_{20} \cos(kx + \omega t + \phi) & 0 \end{vmatrix} = E_{20}k \sin(kx + \omega t) \hat{z}$$

Nuevamente por Maxwell,

$$\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} = -E_{20}k \sin(kx + \omega t + \phi) \hat{z} \implies \vec{B}_2(x, t) = -\frac{E_{20}}{c} \cos(kx + \omega t + \phi) \hat{z}$$

donde se tiene que

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx + \omega t + \phi)] \hat{y} \\
 \vec{B} &= \frac{1}{c} [E_{10} \cos(kx - \omega t) - E_{20} \cos(kx + \omega t + \phi)] \hat{z}
 \end{aligned}$$

lo que implica que en este caso

$$\vec{S} = \frac{1}{c\mu_0} [E_{10}^2 \cos^2(kx - \omega t) - E_{20}^2 \cos^2(kx + \omega t + \phi)] \hat{x}$$

Por lo que la intensidad de la onda vale

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{c\mu_0} [E_{10}^2 \cos^2(kx - \omega t) - E_{20}^2 \cos^2(kx + \omega t + \phi)] dt = \frac{1}{c\mu_0} \left[ \frac{E_{10}^2}{2} - \frac{E_{20}^2}{2} \right]$$



**Solución 18.11**  

- a) Como el campo eléctrico es de la forma  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ , luego como  $\vec{k} \cdot \vec{r} = (0, 0, k) \cdot (x, y, z) = kz$  lo que entrega que

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 g \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -k^2 \vec{E}_0 e^{j(kz - \omega t)} + \mu_0 g j \omega \vec{E}_0 e^{j(kz - \omega t)} = 0$$

Esto implica que

$$k^2 = \mu_0 g j \omega \implies k = \sqrt{\mu_0 g j \omega}$$

Pero por otro lado se tiene que

$$\sqrt{j} = (e^{j\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}}$$

Por lo que se demuestra que

$$k = (1+j) \sqrt{\frac{\mu_0 g \omega}{2}}$$

- b) Para encontrar el valor de  $\vec{B}$  se usa el hecho que

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \frac{(1+j)k_0 \hat{z} \times E_0 e^{j(kz - \omega t)} \hat{x}}{\omega} = \frac{(1+j)k_0 E_0}{\omega} e^{j(kz - \omega t)} \hat{y}$$

Como  $1+j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$  y  $k = (1+j)k_0$  el campo magnético puede ser reescrito como

$$\vec{B} = \frac{k_0 E_0 \sqrt{2}}{\omega} e^{-k_0 z} e^{j(k_0 z - \omega t + \frac{\pi}{4})} \hat{y}$$

Nótese que el conductor agrego un desfase del campo magnético con respecto al eléctrico y adicionalmente una exponencial real decreciente (ie. la onda va perdiendo energía dentro del material debido a las corrientes que provoca el campo eléctrico).

- c) Finalmente, el vector de Poynting promedio está dado por

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{-k_0 z} e^{j(k_0 z - \omega t)} \hat{x} \times \frac{k_0 E_0 \sqrt{2}}{\omega \mu_0} e^{-k_0 z} e^{-j(k_0 z - \omega t + \frac{\pi}{4})} \hat{y} \right\} \\ &= \frac{k_0 E_0^2 \sqrt{2}}{2 \mu_0 \omega} e^{-2k_0 z} \hat{z} \operatorname{Re} \{ e^{-j\frac{\pi}{4}} \} \\ &= \frac{k_0 E_0^2}{2 \mu_0 \omega} e^{-2k_0 z} \hat{z} \end{aligned}$$



## IV. Indicaciones Problemas Sin Solución

### Indicación 18.2

- Determine el valor de  $\vec{E}_0$  suponiendo que la dependencia del tiempo no existiese.
- Usando la Ley de Ampère-Maxwell determine  $\vec{B}_1(t)$ . Recuerde que el campo magnético rota en alrededor del campo eléctrico, en este caso  $\vec{B}_1 = B_1(r, t)\hat{\theta}$ .
- Usando la ley de Faraday, determine el campo eléctrico  $\vec{E}_2(t)$  inducido a partir de  $\vec{B}_1$ . Recuerde que este campo eléctrico apunta en la dirección  $\hat{z}$ .

### Indicación 18.5

- A partir de la forma general de onda onda electromagnética identifique en primera instancia los valores de  $k$  y  $\omega$ . A partir de ello, es directo identificar  $\lambda$  y  $T$ .
- Recuerde el dirección y sentido de la propagación está dada por  $\vec{k}$ .
- Tanto la determinación de  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$  es directo a partir del campo eléctrico.

### Indicación 18.7

- Note que el enunciado está diciendo que  $\hat{k} = \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$  y que  $\hat{n} = \hat{x}$ . Con esto debería ser suficiente para encontrar  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$ .
- Recuerde que en una onda que viaja en el vacío siempre se cumple que  $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$  donde  $c$  es la velocidad de la luz.

### Indicación 18.8

- Identifique la dirección de la onda electromagnética y determine en forma directa cuanto es el valor de  $\vec{B}$ .
- Evalúe  $\phi$  pedido junto con las condiciones de los módulos. Recuerde que la funciones reales de las ondas electromagnéticas están dadas por su parte real.
- Note que la polarización del campo eléctrico y magnético cambia con la posición y el tiempo. ¿Qué tipo de polarización sigue la onda? Lineal, Circular o Elíptica?



**Indicación 18.9**  

- Evalué magnético dado en la Ley de Faraday (forma diferencial) y determine el campo eléctrico pedido.



**V. Respuestas**

Problema	Respuestas
<b>18.1</b>	<p><b>a)</b> <math>\varepsilon = -\frac{\mu_0 ab^2}{4d}(g\dot{V}(t) + \varepsilon_0\ddot{V}(t))</math>, caso particular <math>\varepsilon = 0</math></p> <p><b>b)</b> <math>\vec{S} = -\frac{rV(t)}{2d^2}(gV(t) + \varepsilon_0\dot{V}(t))\hat{r}</math></p>
<b>18.2</b>	<p><b>a)</b> <math>\vec{E}_0 = -\frac{V_0 \cos \omega t}{d}\hat{z}</math> (<math>z</math> crece de la placa inferior a la superior)</p> <p><b>b)</b> <math>\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 V_0 \omega}{2d} \sin \omega t \hat{\theta}</math></p> <p><b>c)</b> <math>\vec{E}_2 = \frac{\mu_0 V_0 \varepsilon_0 \omega^2}{4d} \cos \omega t \left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right)\hat{z}</math></p> <p><b>d)</b> <math>\vec{E} = -\frac{V_0 \cos \omega t}{d} \left[1 + \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}{4} \left(\frac{a^2}{2} - r^2\right)\right]\hat{z}</math></p>
<b>18.4</b>	<p><b>a)</b> <math> S  \approx 1350 \frac{W}{m^2}</math></p> <p><b>b)</b> <math>U \approx 8,6 \text{ kWh}</math>.</p> <p><b>c)</b> <math>0,22 \text{ m}^2</math>, para 6 millones <math>1,32 \text{ km}^2</math>.</p>
<b>18.5</b>	<p><b>a)</b> <math>\lambda = \frac{\pi}{5} \text{ m}</math> y <math>T = \frac{2\pi}{3} \cdot 10^{-9} \text{ s}</math>.</p> <p><b>b)</b> La onda se propaga en <math>-\hat{x}</math>.</p>
<b>18.6</b>	<p><b>a)</b> <math>\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{j100\pi(\frac{y+z}{c\sqrt{2}} - t)}</math></p> <p><b>b)</b> <math>\langle  \vec{S}  \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}</math></p>
<b>18.7</b>	<p><b>a)</b> <math>\vec{E} = E_0 \frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\omega}{c\sqrt{2}}(x + y) - \omega t)</math></p> <p><b>b)</b> <math>\langle  \vec{S}  \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}</math></p>



**Problema    Respuestas**

- 18.8** **a)**  $\vec{B} = \frac{E_1}{c} e^{j(kz - \omega t)} \hat{y} - \frac{E_2}{c} e^{j(kz - \omega t - \phi)} \hat{x}$ ,  $\langle S \rangle = \frac{1}{c\mu_0} (E_1^2 + E_2^2) \hat{z}$   
**b)**  $\vec{E} = E_0 (\cos(kz - \omega t) \hat{x} + \sin(kz - \omega t) \hat{y})$  y  $\vec{B} = \frac{E_0}{c} (\cos(kz - \omega t) \hat{y} - \sin(kz - \omega t) \hat{x})$   
**c)** La onda está polarizada circularmente.

- 18.9**  $\vec{E} = -\frac{aB_0\omega}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t) \hat{y}$

- 18.10** **a)**  $\vec{S} = \frac{1}{c\mu_0} [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi)]^2 \hat{x}$   
**b)**  $I = \frac{1}{c\mu_0} \left[ \frac{E_{10}^2}{2} + \frac{E_{20}^2}{2} + E_{10} E_{20} \cos \phi \right]$   
**c)**  $I = \frac{1}{c\mu_0} \left[ \frac{E_{10}^2}{2} - \frac{E_{20}^2}{2} \right]$

- 18.11** **b)**  $\vec{B} = \frac{E_0 k_0}{\omega} \sqrt{2} e^{-k_0 z} e^{j(k_0 z - \omega t + \frac{\pi}{4})}$   
**c)**  $\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{E_0^2 k_0}{2\mu_0 \omega} e^{-2k_0 z}$



## CAPÍTULO 18. LEYES DE MAXWELL



# Apéndice

## Herramientas Matemáticas

Sean  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  campo vectoriales y  $f$  un campo escalar.

---

### Triple Producto

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

---

### Reglas del Producto

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} - \vec{B}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

---

### Segundas Derivadas

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

## Coordenadas Esféricas

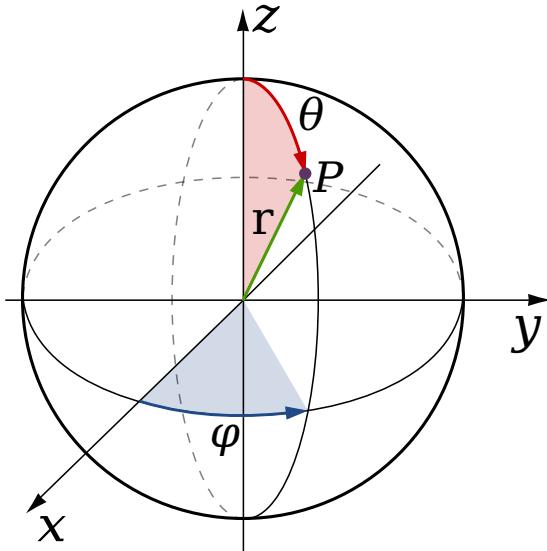


Figura 18.2: Coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
 \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{r} \\
 &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \hat{\theta} \\
 &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\varphi} \\
 \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
 \end{aligned}$$

Diferenciales:

$$\begin{aligned}
 d\vec{l} &= dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\varphi} \\
 d\vec{S} &= r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r} + r \sin \theta dr d\varphi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\varphi} \\
 dV &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi
 \end{aligned}$$



## Coordenadas Cilíndricas

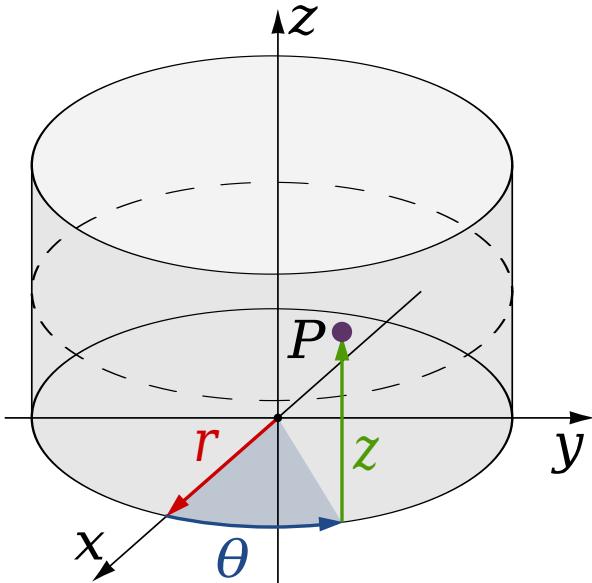


Figura 18.3: Coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} \\ &\quad + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Diferenciales:

$$\begin{aligned}\vec{dl} &= dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + dz \hat{z} \\ d\vec{S} &= rd\theta dz \hat{r} + r dz d\theta \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{z} \\ dV &= r dr d\theta dz\end{aligned}$$



## Notación usualmente usada

Magnitud Física	Símbolo	Unidades SI	Dimensiones
Capacidad	$C$	faradays (F)	$\frac{s^2 \cdot C^2}{kg \cdot m^2}$
Carga	$q$	coulomb (C)	C
Conductividad	$g$	siemens/metro (S/m)	$\frac{s \cdot C^2}{kg \cdot m^3}$
Intensidad de Corriente	$I$	ampére (A)	$\frac{C}{s}$
Desplazamiento Eléctrico	$\vec{D}$	coulomb/m <sup>2</sup>	$\frac{C}{m^2}$
Densidad Superficial de Corriente	$\vec{K}$	ampere/m	$\frac{C}{s \cdot m}$
Densidad Volumétrica de Corriente	$\vec{J}$	ampere/m <sup>2</sup>	$\frac{C}{s \cdot m^2}$
Campo Eléctrico	$\vec{E}$	volt/metro	$\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot C}$
Fuerza Electromotriz (fem)	$\varepsilon$	volt (V)	$\frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot C}$
Trabajo	$W$	joule (J)	$\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
Fuerza	$\vec{F}$	newton (N)	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$
Frecuencia	$f$	hertz (Hz)	s <sup>-1</sup>
Impedancia	$Z$	ohm ( $\Omega$ )	$\frac{kg \cdot m^2}{s \cdot C^2}$
Inductancia	$L$	henry (H)	$\frac{kg \cdot m^2}{C^2}$
Intensidad de Campo Magnético	$\vec{H}$	ampere/metro	$\frac{C}{s \cdot m}$
Largo	$\ell$	metro (m)	m
Flujo Magnético	$\Phi$	weber (Wb)	$\frac{kg \cdot m^2}{s \cdot C}$
Campo Magnético	$\vec{B}$	tesla (T)	$\frac{kg}{s \cdot C}$
Momento Magnético	$\vec{m}$	ampere-m <sup>2</sup>	$\frac{m^2 \cdot C}{s}$
Magnetización	$\vec{M}$	ampere-vuelta/m	$\frac{C}{s \cdot m}$
Permeabilidad	$\mu$	henry/metro	$\frac{kg \cdot m}{C^2}$
Permitividad	$\varepsilon$	faraday/metro	$\frac{s^2 \cdot C^2}{kg \cdot m^3}$
Polarización	$\vec{P}$	coulomb/m <sup>2</sup>	$\frac{C}{m^2}$
Potencial Eléctrico	$V$	volt (V)	$\frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot C}$
Potencia	$P$	watt (W)	$\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$
Vector de Poynting	$\vec{S}$	W/m <sup>2</sup>	$\frac{kg}{s^3}$
Resistencia	$R$	ohm ( $\Omega$ )	$\frac{kg \cdot m^2}{s \cdot C^2}$
Resistividad	$\eta$	ohm-metros	$\frac{kg \cdot m^3}{s \cdot C^2}$
Tiempo	$t$	segundos	s
Velocidad	$\vec{v}$	metro/segundos	$\frac{m}{s}$



## Bibliografía

- [1] BARGER, V., AND OLSSON, M. G. *Classical electricity and magnetism: a contemporary perspective*. Allyn & Bacon, 1987.
- [2] CORDERO, P. *Electromagnetismo*. Editorial Universitaria, 2015.
- [3] DOURMASHKIN, P., LIAO, S.-B., AND WINSTON BELCHER, J. *Introduction to electricity and magnetism*. Pearson, 2013.
- [4] GRIFFITHS, D. J., AND COLLEGE, R. *Introduction to electrodynamics*, vol. 3. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [5] LIM, Y.-K. *Problems and solutions on quantum mechanics*, vol. 6. World Scientific, 1998.
- [6] NAYFEH, M. H., AND BRUSSEL, M. K. *Electricity and magnetism*. Courier Dover Publications, 2015.
- [7] NÚÑEZ CUBERO, F., LÓPEZ PÉREZ, E., ET AL. *100 problemas de electromagnetismo*. Alianza Editorial, 1997.
- [8] POLLACK, G. L., AND STUMP, D. R. *Electromagnetism*. Addison-Wesley, 2002.
- [9] PURCELL, E. M. *Electricidad y magnetismo*, vol. 2. Reverté, 1988.
- [10] RODRÍGUEZ, V. L. *Problemas resueltos de Electromagnetismo*. Editorial Universitaria Ramon Areces, 2003.
- [11] SERWAY, R. A., JEWETT, J. W., PEDROZA, M. D. C. R., AND LÓPEZ, E. F. *Física para ciencias e ingeniería*, 7 ed., vol. 2. Cengage Learning Editores, 2015.