

# Capítulo 7:

## **Campos magnetostáticos-El Campo Magnético Estable**

# Introducción al campo magnético

El campo eléctrico, el campo de potencial, el de flujo eléctrico y otros campos no poseen bases físicas reales. Las mediciones físicas que se realicen para demostrar su existencia deben estar siempre en términos de las fuerzas sobre cargas en el sistema de detección.

La relación del campo eléctrico con su fuente está suficientemente fundamentada y clara en los capítulos tratados anteriormente.

La relación del campo magnético estable con su fuente es mucho más complicada que la del caso anterior.

En la primera parte tendremos que aceptar temporalmente varias leyes como ciertas sin demostrarlo - como acto de fe religiosa - hasta que se demuestre posteriormente.

# Introducción al campo magnético

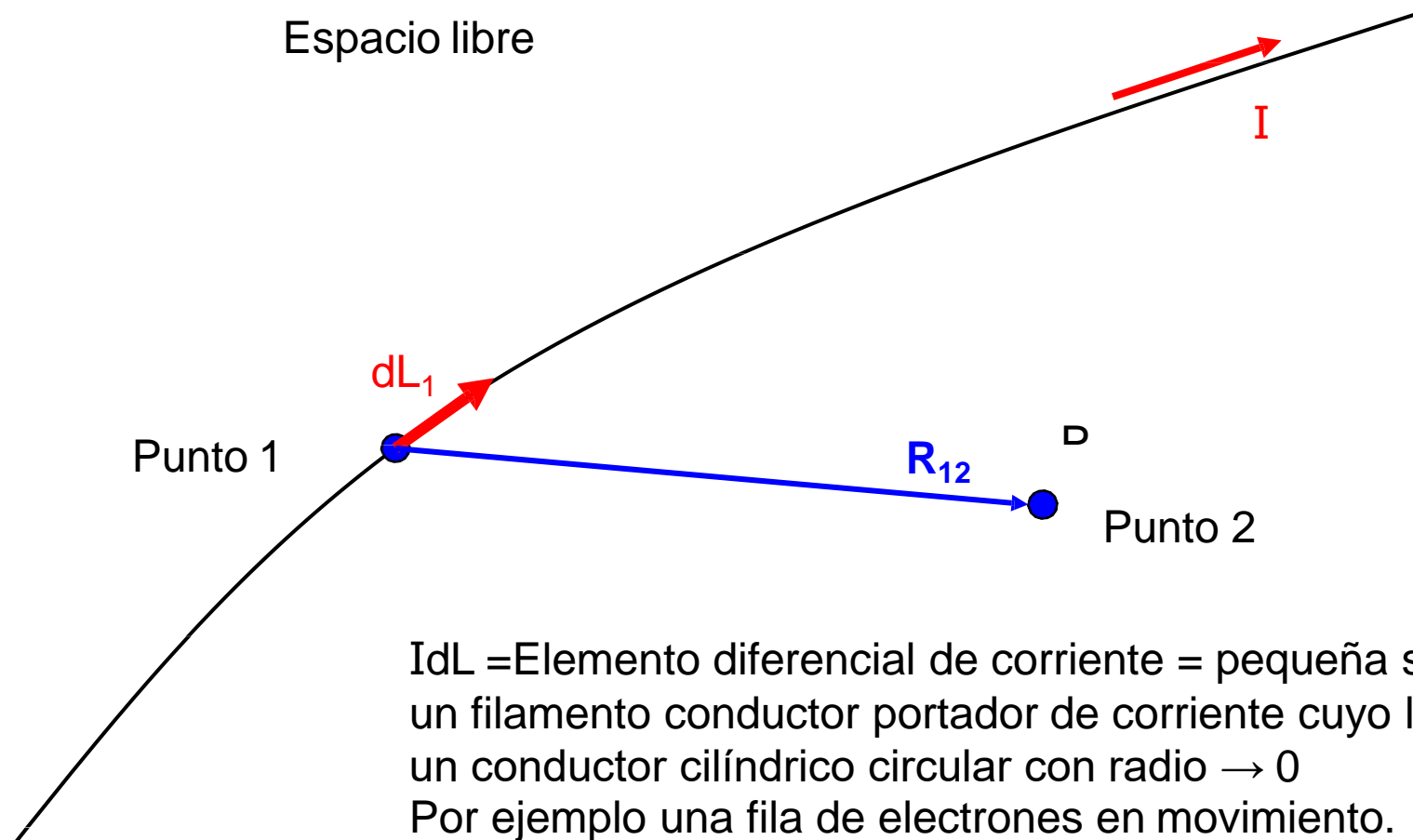
La fuente de un campo magnético estable puede ser un imán permanente, una corriente eléctrica que cambia linealmente con el tiempo o una corriente directa.

Aquí se analizará primeramente el CM producido por una corriente directa, constante en  $t$ .

La Ley de Biot-Savart describe de una forma teórica la relación que se establece entre un “**elemento diferencial de corriente**” y la intensidad de campo magnético  $H$  que esta produce.

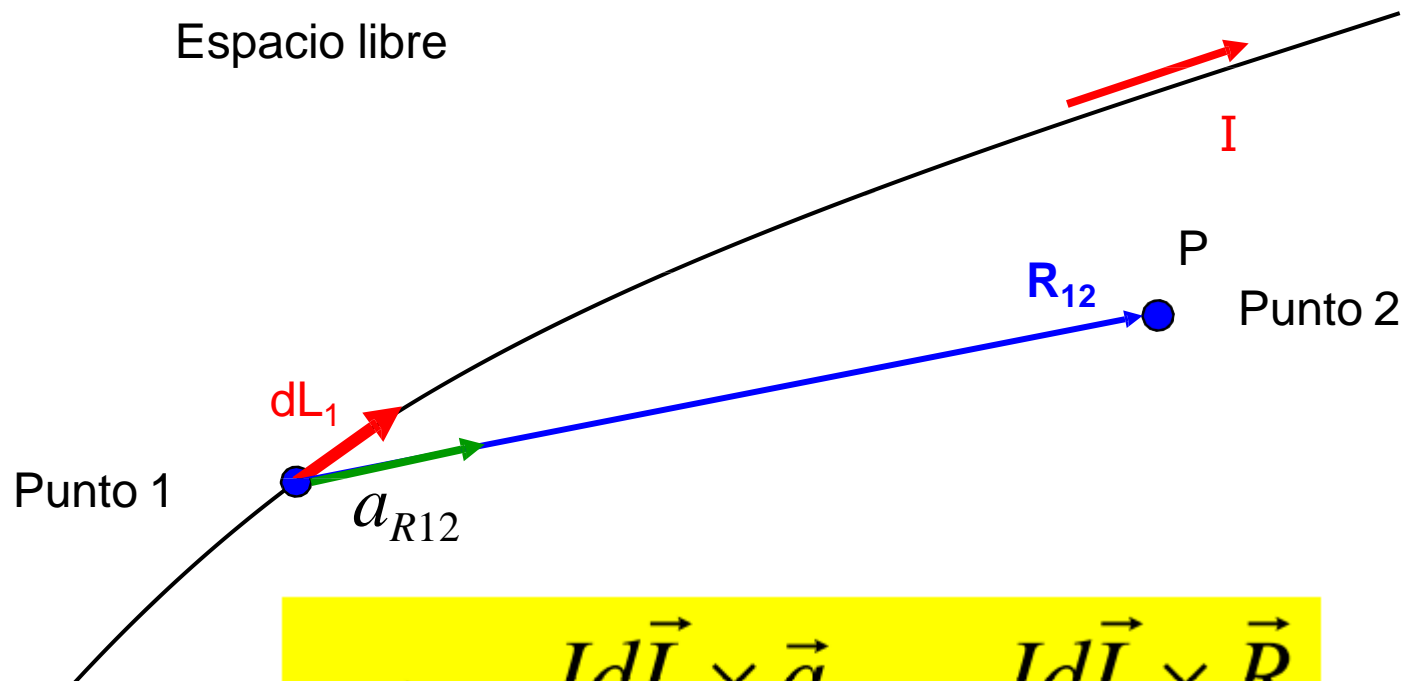
El concepto del “**elemento diferencial de corriente**” es un concepto puramente teórico que no es reproducible en el laboratorio, sin embargo es lo suficientemente consistente para poder operar con él.

# Ley de Biot-Savart



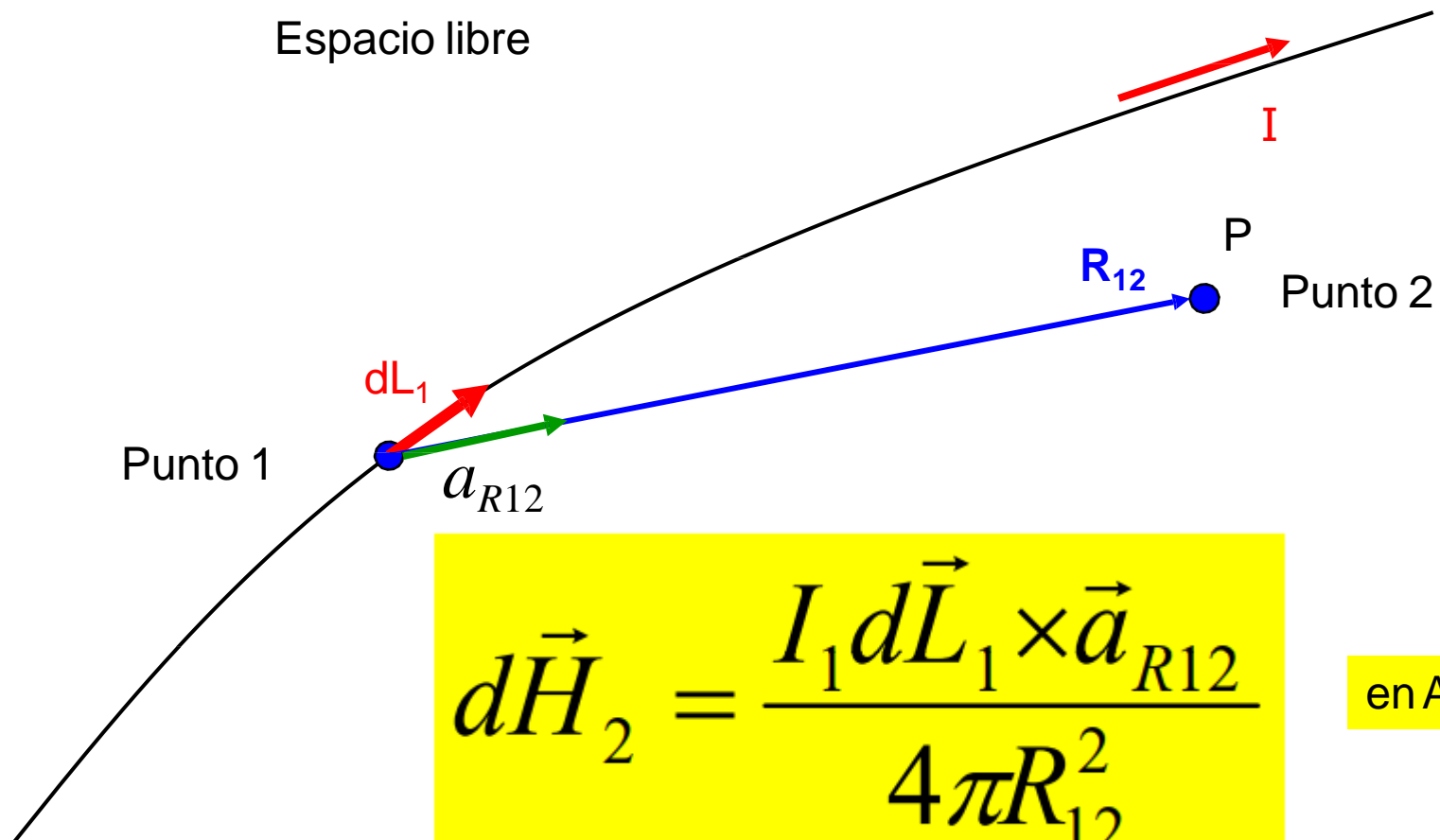
# Ley de Biot-Savart

Biot y Savart fueron colegas contemporáneos de Ampère. La ley fue propuesta en 1820

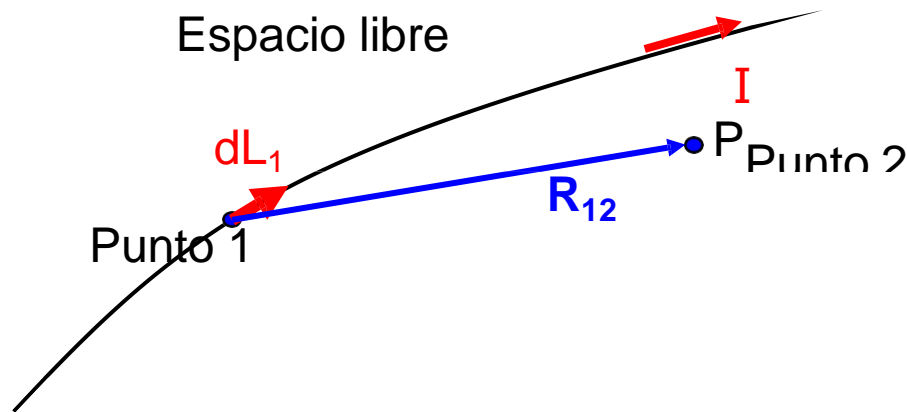


$$d\vec{H} = \frac{Id\vec{L} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{Id\vec{L} \times \vec{R}}{4\pi R^3} \quad \text{en A/m}$$

# Ley de Biot-Savart



# Ley de Biot-Savart

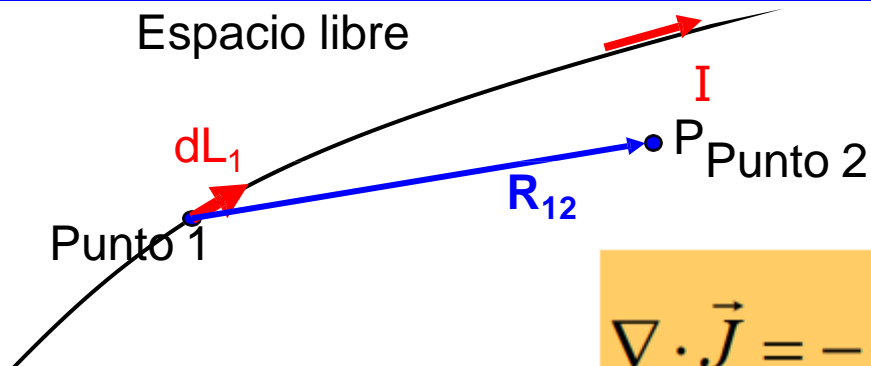


Es imposible verificar la ley de BS porque es imposible aislar un elemento de corriente y medir el CM que produce, adicionalmente la ley de continuidad de la corriente eléctrica:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

# Ley de Biot-Savart



$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

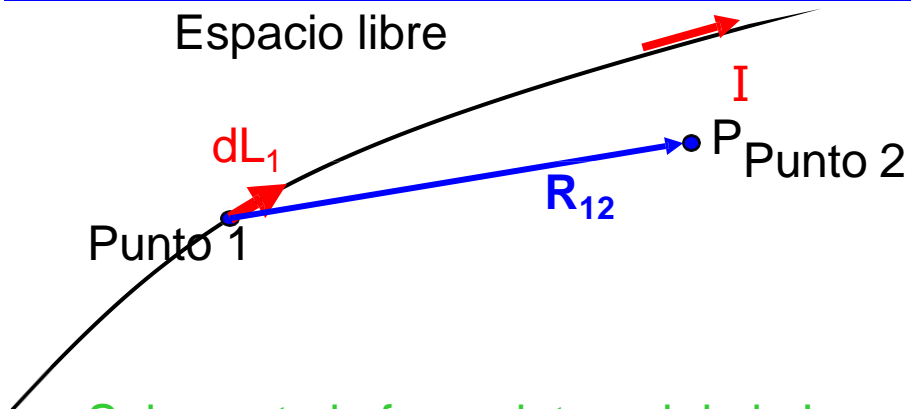
Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

La corriente total que atraviesa cualquier superficie es cero y esta condición solo puede satisfacerse si se supone que la corriente eléctrica que abandona e ingresa esa superficie cerrada es idéntica, o sea, la corriente eléctrica fluye a través de una trayectoria cerrada.



# Ley de Biot-Savart



Solamente la forma integral de la Ley de Biot-Savart se puede verificar experimentalmente

$$H = \oint \frac{I_1 dL_1 \times a_R}{4 R^2}$$

# Ley de Biot-Savart

La LeyBS se puede expresar también en términos de fuentes distribuidas tales como la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , y la densidad superficial de corriente  $\mathbf{K}$ . La corriente superficial fluye en una hoja cuyo espesor tiende a cero y por lo tanto su densidad de corriente  $\mathbf{J} \rightarrow \infty$ .  $\mathbf{K}$  se mide en A/m de ancho.

Si  $\mathbf{K}$  es constante, la corriente total  $\mathbf{I}$  de un ancho  $b$  es:

$$I = K \cdot b$$

$$I = \int K dN \quad b \perp \mathbf{K}$$

En donde  $dN$  es un elemento diferencial de la longitud transversal al flujo de corriente

Así se pueden escribir las siguientes equivalencias válidas:

$$Id\vec{L} = \vec{K}dS = \vec{J}dv$$

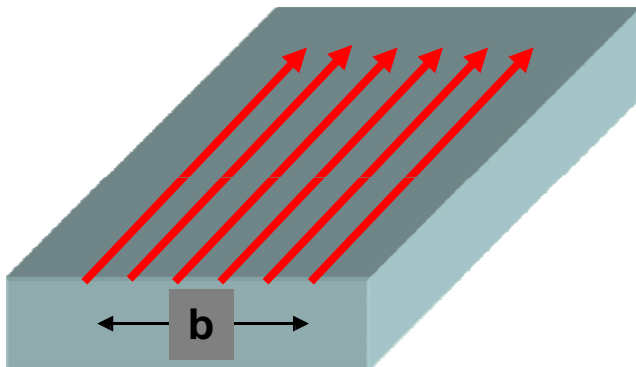
# Ley de Biot-Savart

Y las formas alternas de la LeyBS son:

$$\vec{H} = \oint_S \frac{\vec{K} \times \vec{a}_R ds}{4\pi R^2}$$

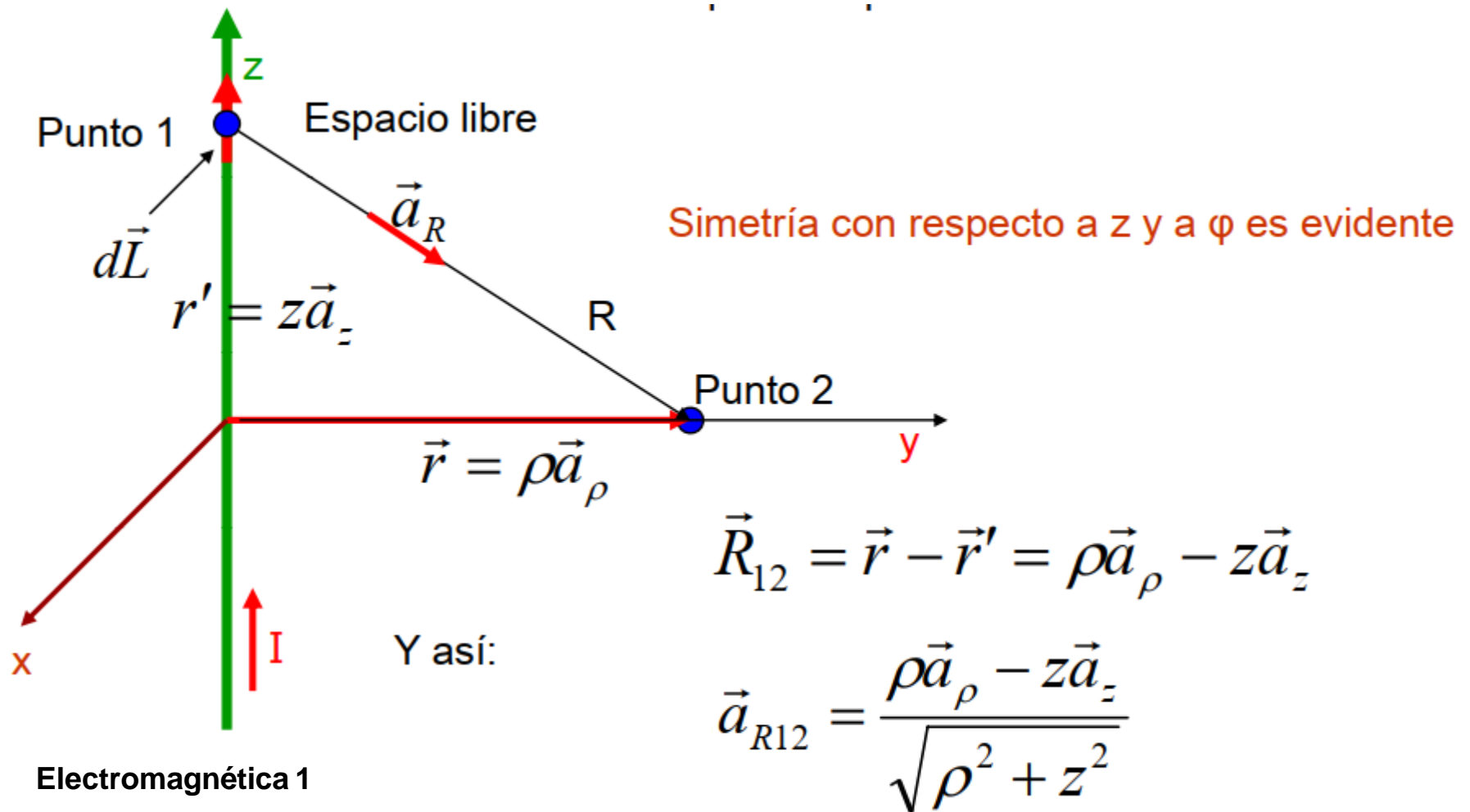
$$\vec{H} = \int_{vol} \frac{\vec{J} \times \vec{a}_R dv}{4\pi R^2}$$

**K**

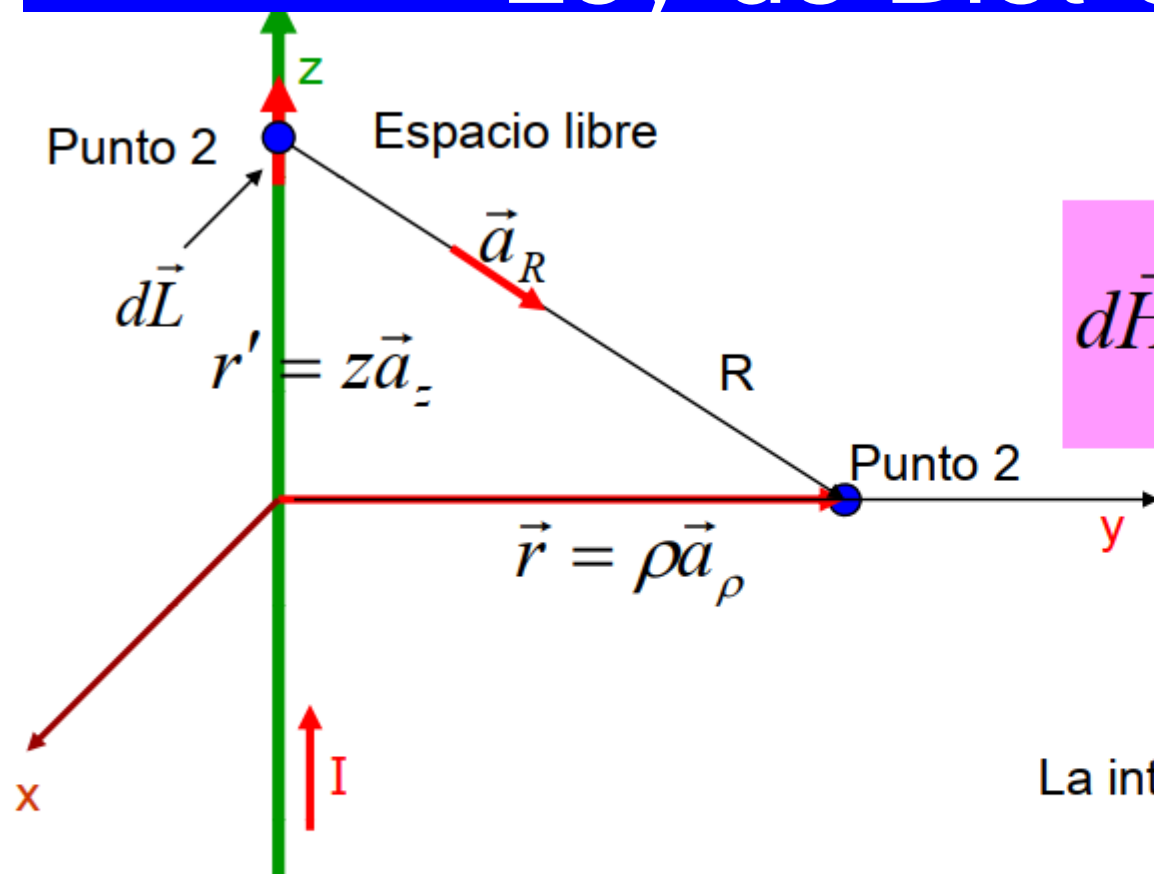


# Ley de Biot-Savart

La típica aplicación de la LeyBS consiste en calcular la intensidad de CM en los alrededores de un conductor rectilíneo que transporta una corriente eléctrica I:



# Ley de Biot-Savart



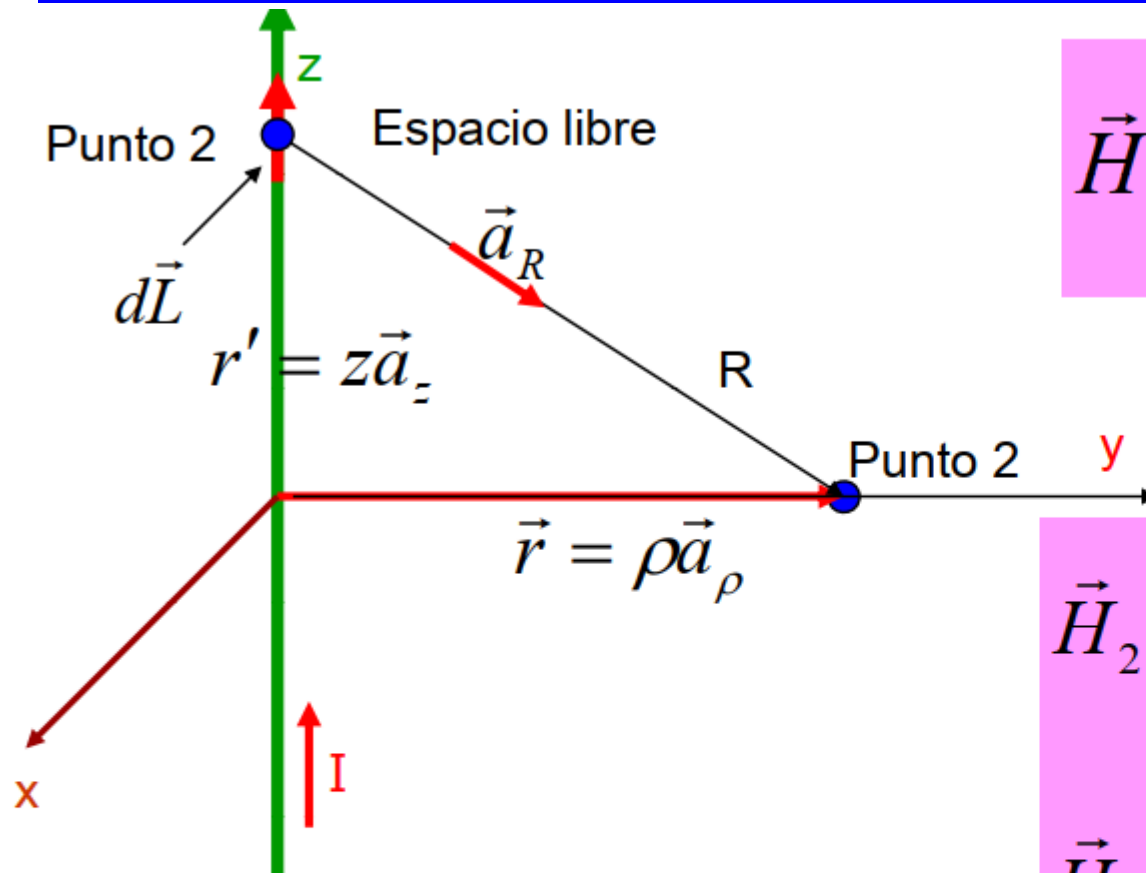
Con :  $d\vec{L} = dz \vec{a}_z$

$$d\vec{H}_2 = \frac{Idz \vec{a}_z \times (\rho \vec{a}_\rho - z \vec{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

La integral de la expresión arriba:

$$\vec{H}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Idz \vec{a}_z \times (\rho \vec{a}_\rho - z \vec{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz \vec{a}_\phi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

# Ley de Biot-Savart



$$\vec{H}_2 = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz \vec{a}_\phi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

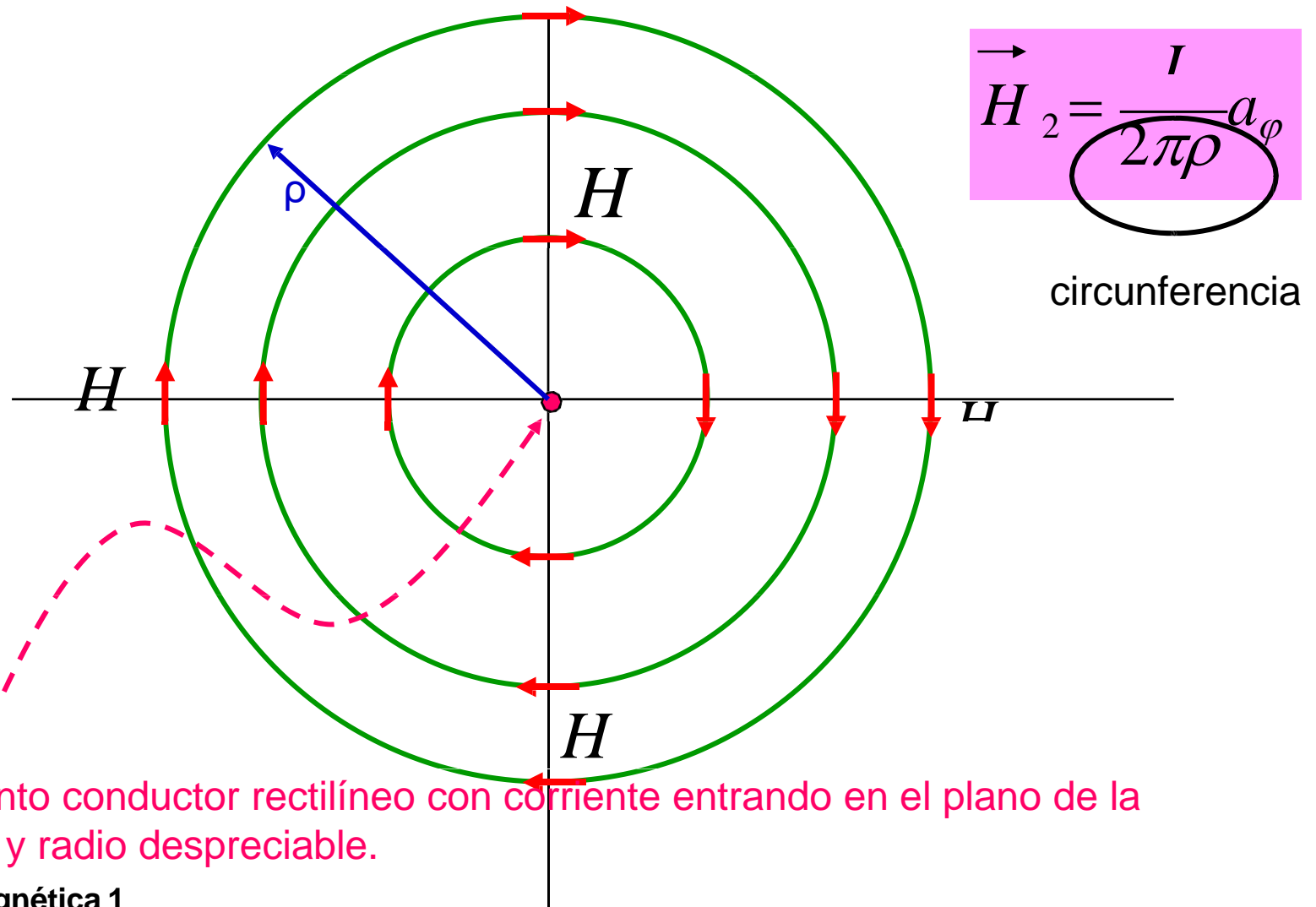
Aquí  $\vec{a}_\phi$  es constante con respecto a  $z$  y a  $\rho$

$$\vec{H}_2 = \frac{I\rho\vec{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} =$$

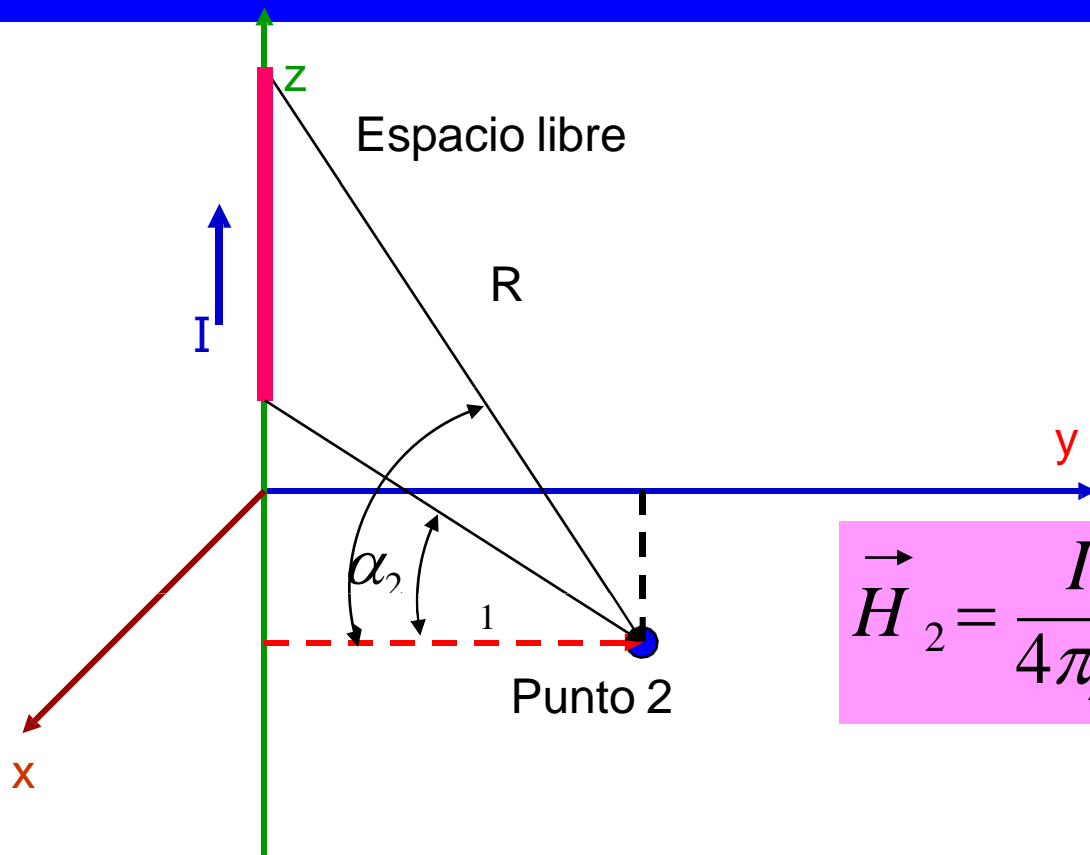
$$\vec{H}_2 = \frac{I\rho\vec{a}_\phi}{4\pi} \cdot \frac{z}{\rho^2(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{a}_\phi$$

# Ley de Biot-Savart



# Ley de Biot-Savart



$$\vec{H}_2 = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \vec{a}_\phi$$



# Ley circuital de Ampère

En electrostática se facilitó la solución de algunos problemas con alto grado de simetría, aplicando la ley de Gauss. De modo totalmente análogo en el campo magnético lo representa la **Ley circuital de Ampère o Ley de circuitos de Ampère o Ley de trabajo de Ampère**.

Esta ley establece que:

$$\oint_{\text{Línea}} \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

La corriente positiva se define como aquella que fluye en la dirección de avance de un tornillo con rosca derecha que se gira en el sentido en el cual se recorre la trayectoria cerrada. Semejante a la regla de mano derecha: Pulgar = corriente, dedos = sentido de la trayectoria

# Ley circuital de Ampère

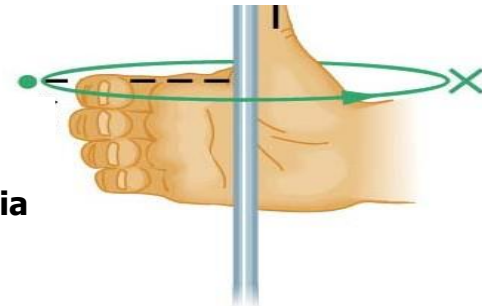
La corriente positiva se define como aquella que fluye en la dirección de avance de un tornillo con rosca derecha que se gira en el sentido en el cual se recorre la trayectoria cerrada. Semejante a la regla de mano derecha: Pulgar = corriente, dedos = sentido de la trayectoria

$$\oint_{\text{Línea}} \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

Ojo!!!

No se trata de la dirección del campo magnético

Dirección  
de la  
trayectoria  
cerrada



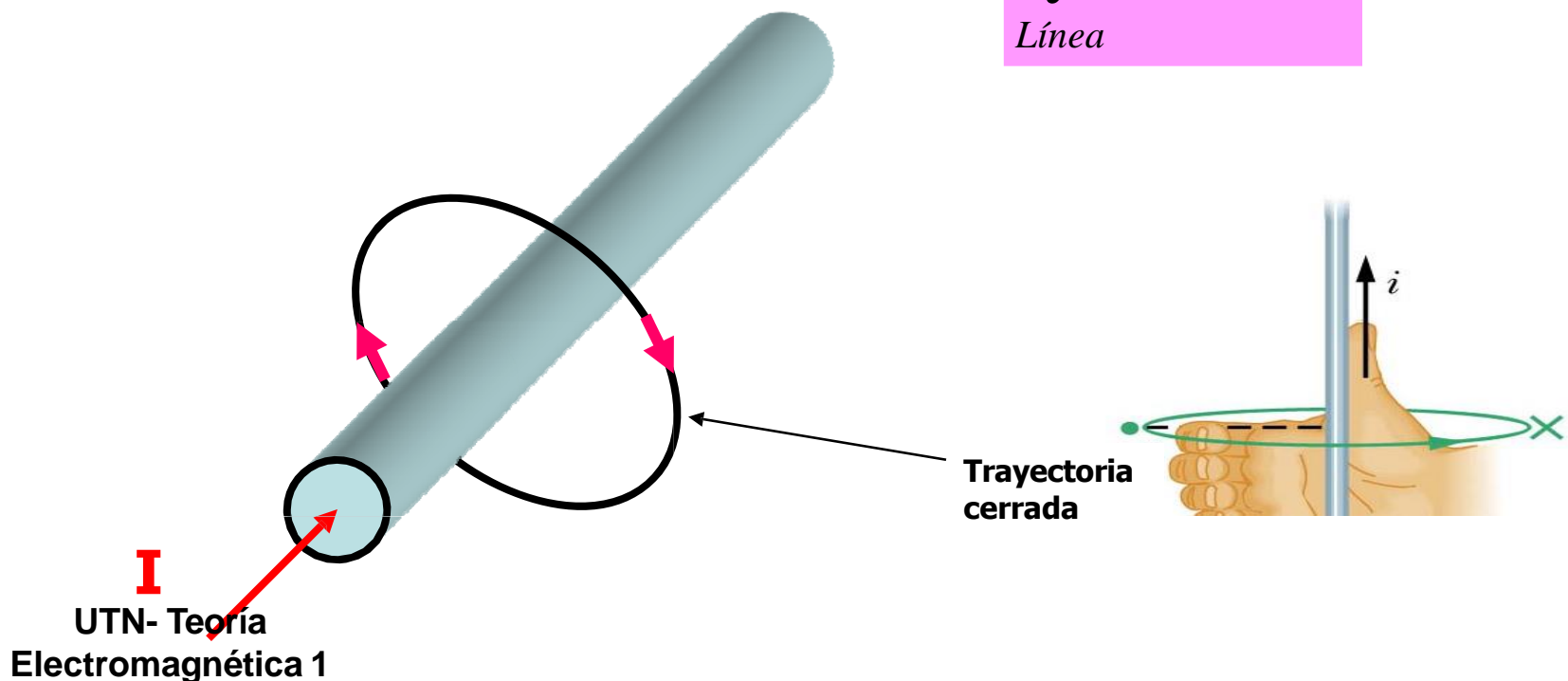
# Ley circuital de Ampère

La corriente positiva se define como aquella que fluye en la dirección de avance de un tornillo con rosca derecha que se gira en el sentido en el cual se recorre la trayectoria cerrada.

Ojo!!! No se trata de la dirección del campo magnético

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

*Línea*



# Ley circuital de Ampère

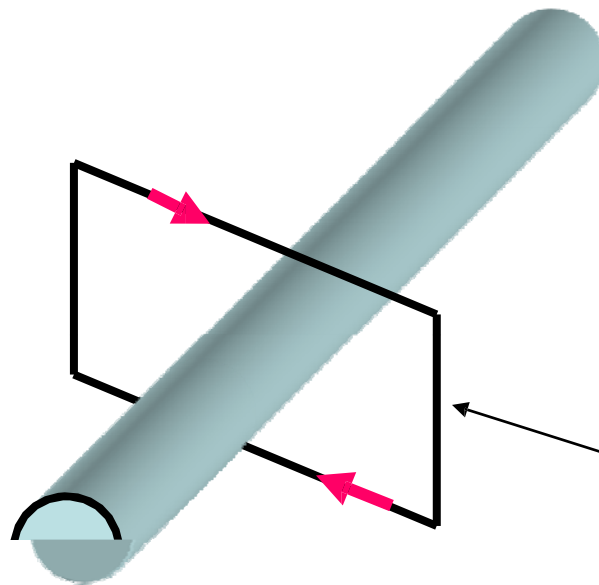
La corriente positiva se define como aquella que fluye en la dirección de avance de un tornillo con rosca derecha que se gira en el sentido en el cual se recorre la trayectoria cerrada.

Ojo!!!

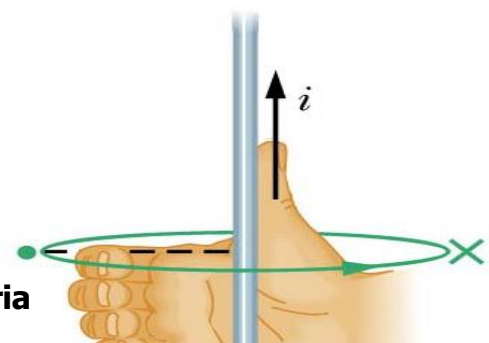
No se trata de la dirección del campo magnético

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

Línea



Trayectoria  
cerrada



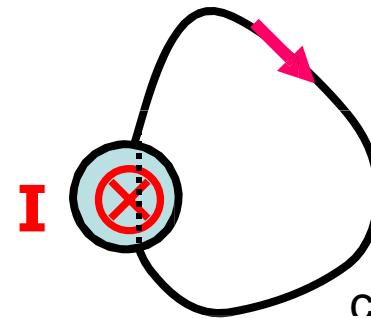
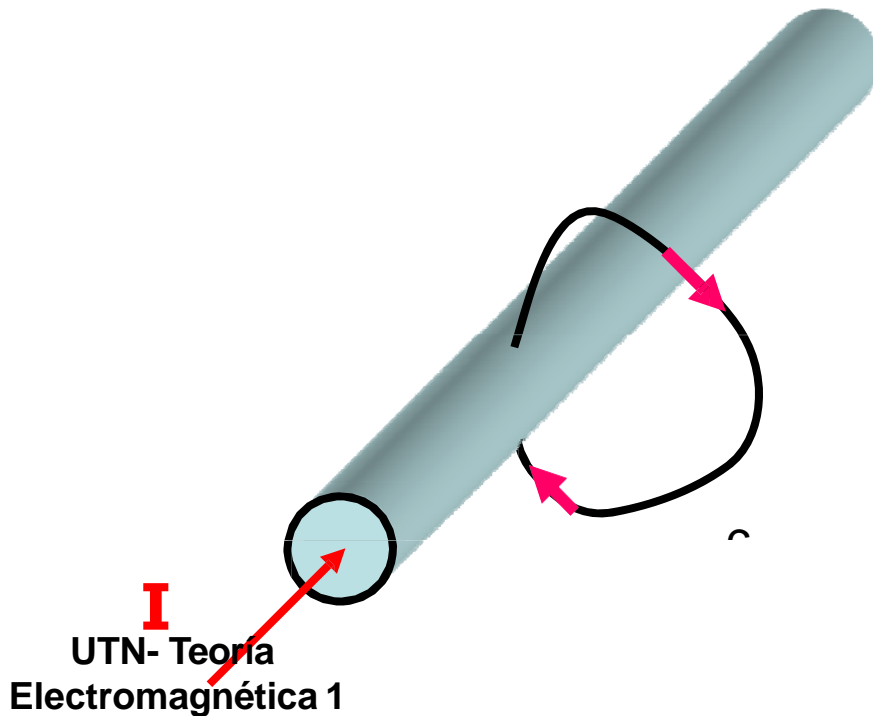
# Ley circuital de Ampère

La corriente positiva se define como aquella que fluye en la dirección de avance de un tornillo con rosca derecha que se gira en el sentido en el cual se recorre la trayectoria cerrada.

Ojo!!!

No se trata de la dirección del campo magnético

$$\oint_{\text{Línea}} \vec{H} d\vec{L} \neq I$$



# Ley circuital de Ampère

Aplicando la LeyCA al caso de un conductor circular en el cual fluye un corriente eléctrica  $I$  con densidad constante. La trayectoria más simple, a nuestra elección, es un círculo con radio  $\rho$ :

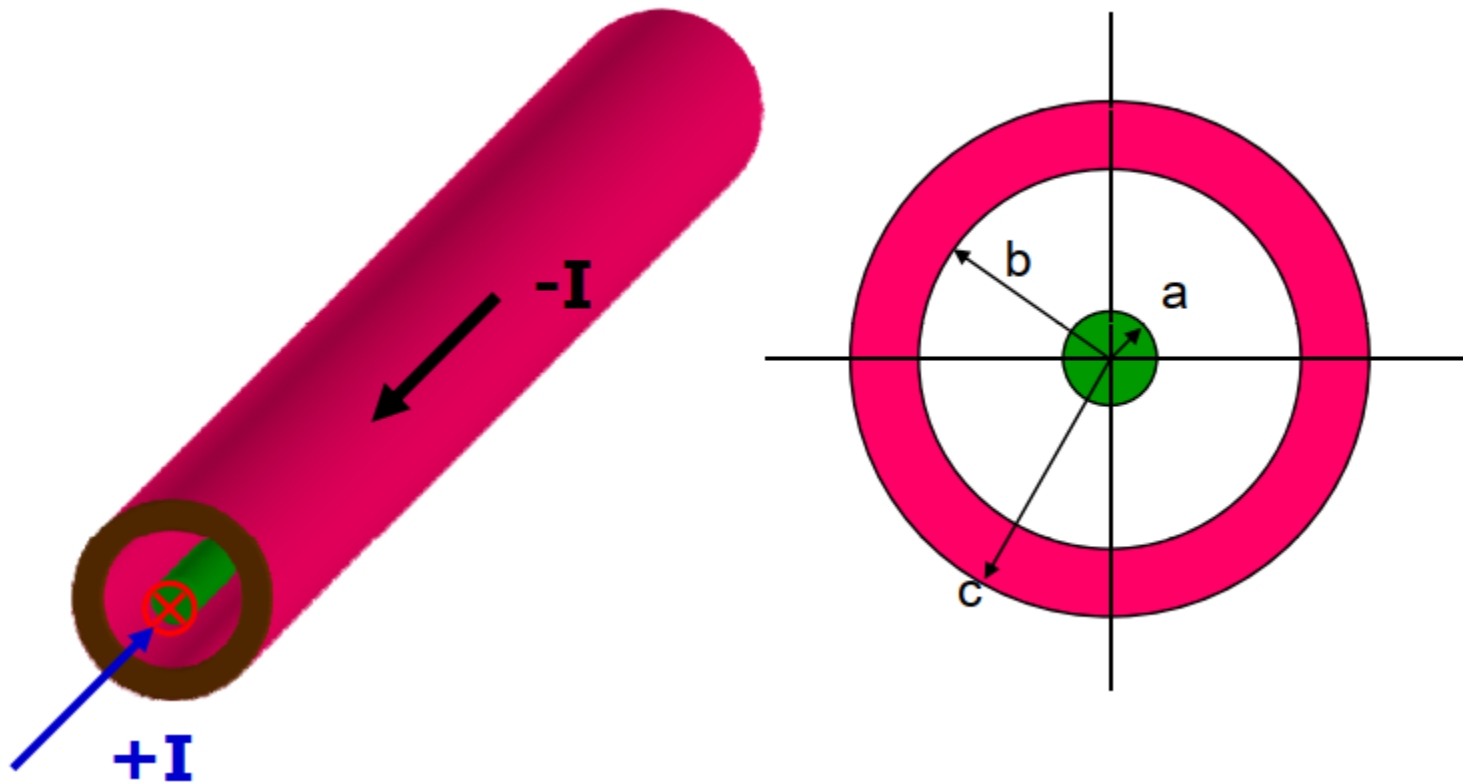
$$\oint_{\text{Línea}} \vec{H} d\vec{L} = \int_0^{2\pi} H_{\varphi} \rho d\varphi =$$

$$\oint_{\text{Línea}} \vec{H} d\vec{L} = H_{\varphi} \rho \int_0^{2\pi} d\varphi = H_{\varphi} \rho \cdot 2\pi = I$$

$$H_{\varphi} = \frac{I}{2\pi\rho}$$

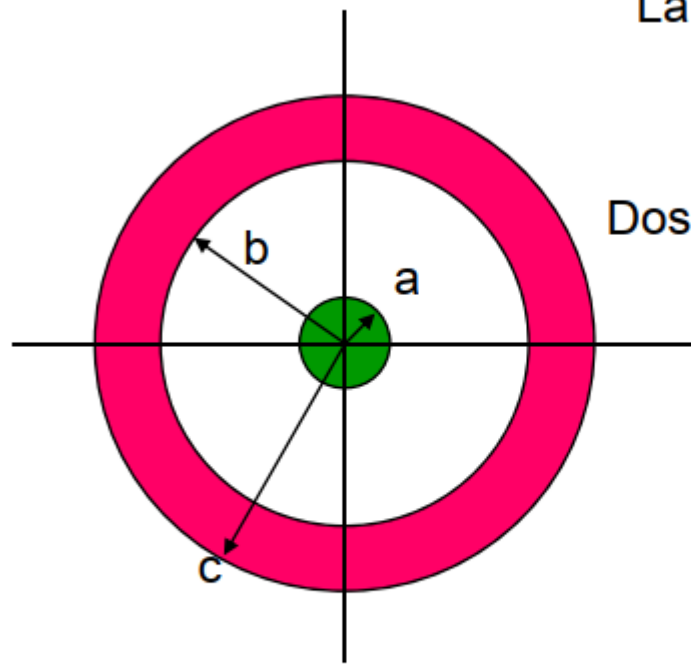
# Ley circuital de Ampère

Aplicando la LeyCA al caso de un conductor coaxial circular con el blindaje con espesor diferente de cero en donde la corriente fluye en un sentido y regresa por el otro conductor:



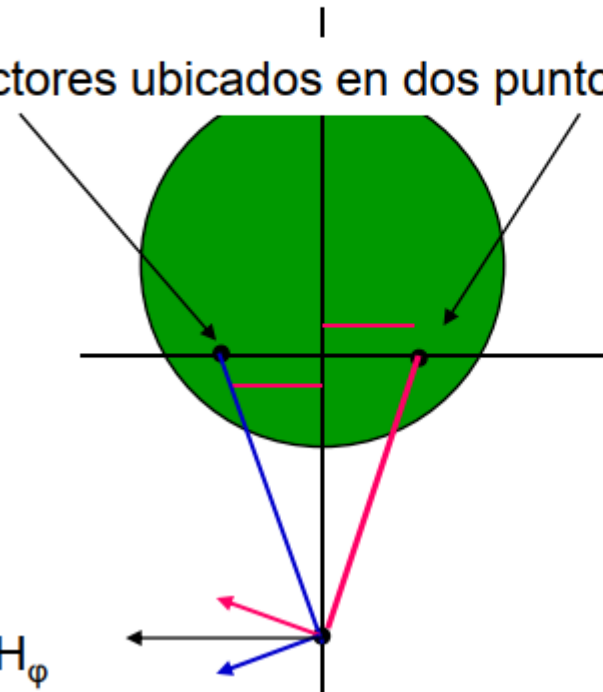
# Ley circuital de Ampère

Aplicando la LeyCA al caso de un conductor coaxial circular con el blindaje con espesor diferente de cero en donde la corriente fluye en un sentido y regresa por el otro conductor:



La simetría muestra que  $\mathbf{H}$  no es función de  $\varphi$  ni de  $z$

Dos hilos conductores ubicados en dos puntos simétricos



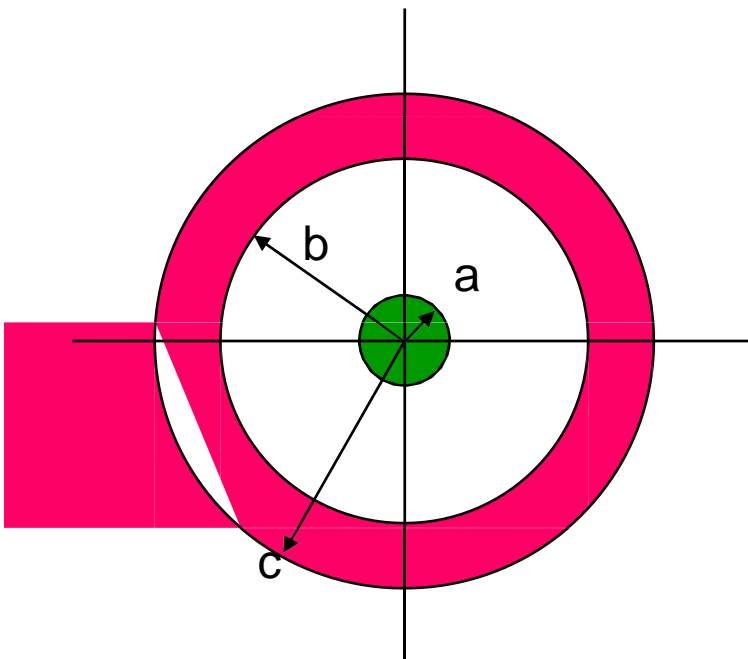
$$\mathbf{H}_{res} = \mathbf{H}_\varphi$$



# Ley circuital de Ampère

Aplicando la LeyCA al caso de un conductor coaxial circular con el blindaje con espesor diferente de cero en donde la corriente fluye en un sentido y regresa por el otro conductor:

Para  $\rho < a$ :



$$I_{\text{encerrada}} = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

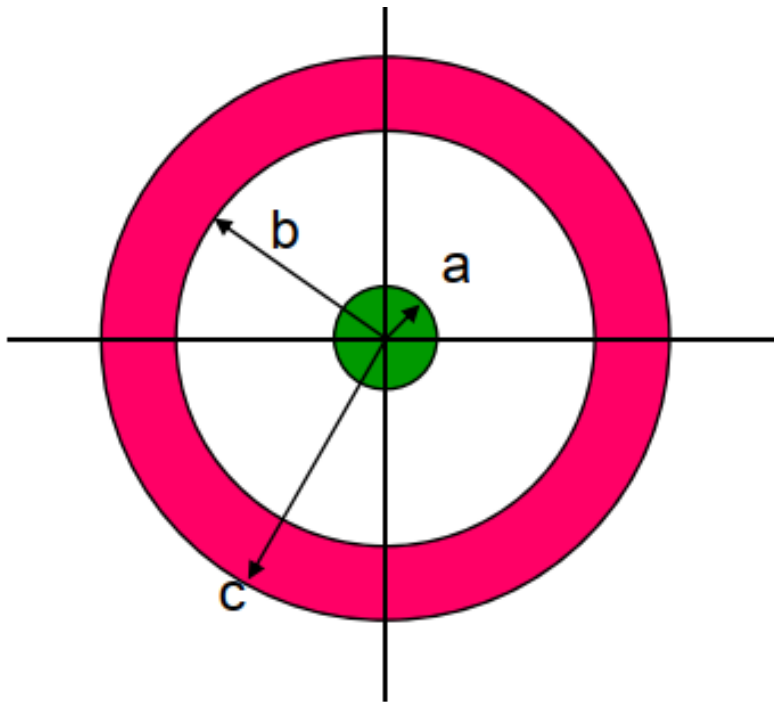
$$2\pi\rho H_{\varphi} = I \frac{\rho^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$H_{\varphi} = I \frac{\rho}{2\pi a^2}$$

# Ley circuital de Ampère

Aplicando la LeyCA al caso de un conductor coaxial circular con el blindaje con espesor diferente de cero en donde la corriente fluye en un sentido y regresa por el otro conductor:

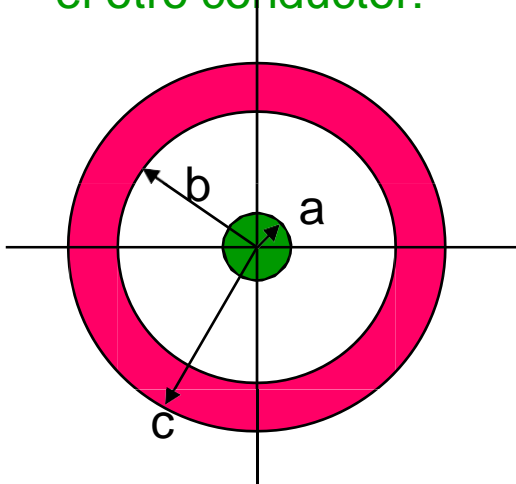
Para  $a < \rho < b$ :



$$H_{\varphi} = I \frac{1}{2\pi\rho}$$

# Ley circuital de Ampère

Aplicando la LeyCA al caso de un conductor coaxial circular con el blindaje con espesor diferente de cero en donde la corriente fluye en un sentido y regresa por el otro conductor:



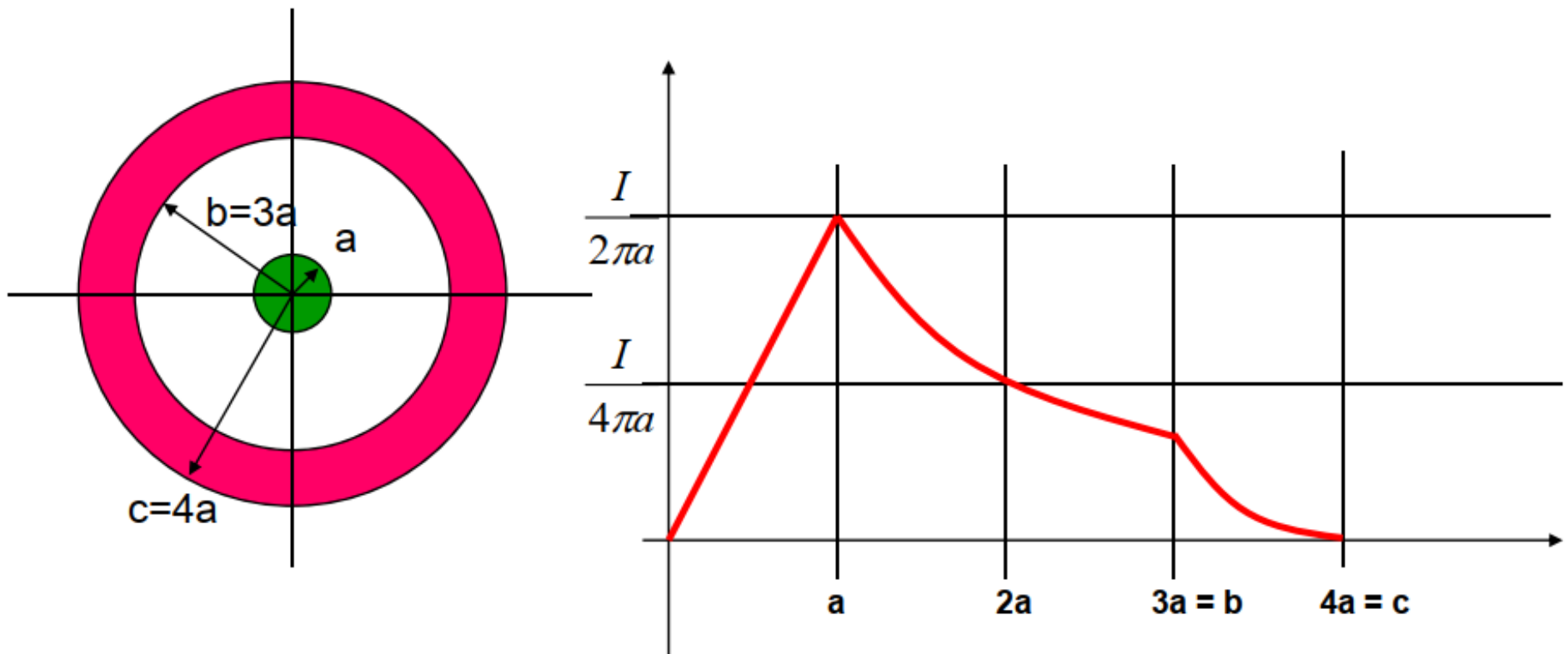
Para  $b < \rho < c$ :

$$I_{\text{encerrada}} = I - I \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} \Rightarrow$$

$$2\pi\rho H_{\varphi} = I - I \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} \Rightarrow H_{\varphi} = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$$

# Ley circuital de Ampère

Aplicando la LeyCA al caso de un conductor coaxial circular con el blindaje con espesor diferente de cero en donde la corriente fluye en un sentido y regresa por el otro conductor:



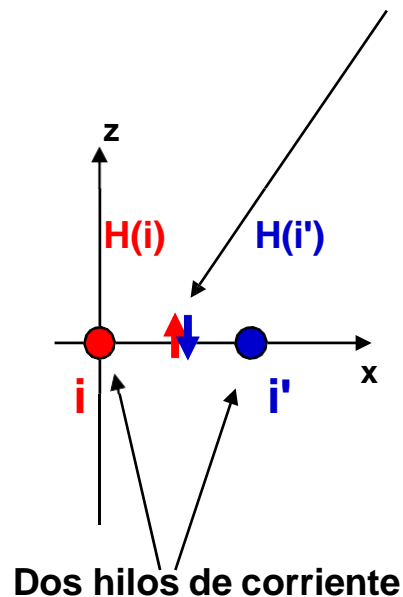
Para  $\rho > c$   $H_\varphi = 0$  porque  $I_{encerrada} = 0$

# Ley circuital de Ampère

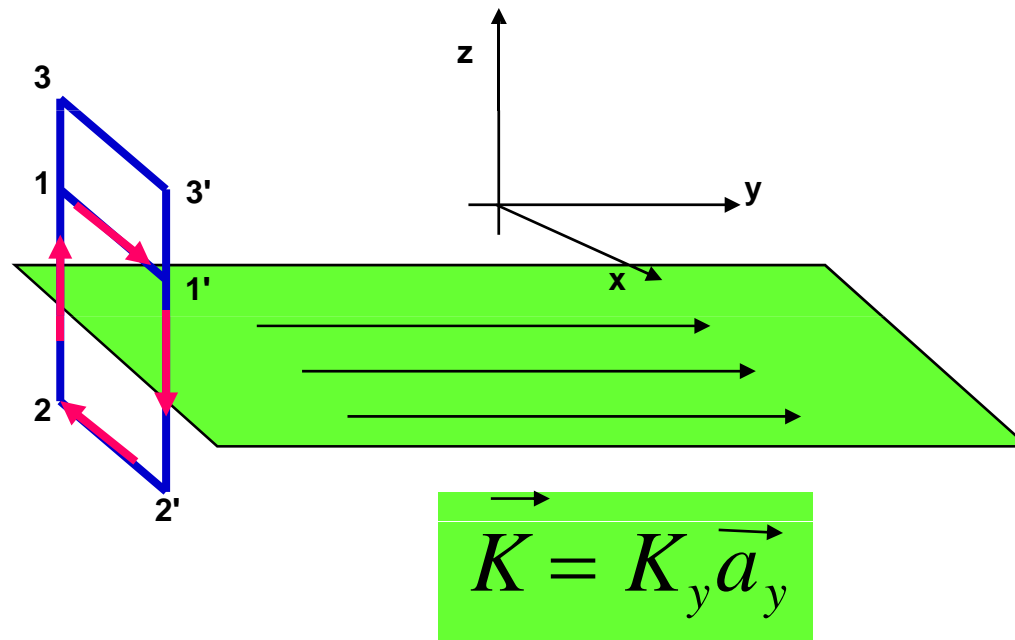
Aplicando la LeyCA al caso de una lámina con densidad superficial de corriente uniforme  $\mathbf{K} = K_y \mathbf{a}_y$  que fluye en la dirección positiva de  $y$ , localizada en el plano  $z = 0$ . El conductor de retorno se encuentra para este caso en  $\infty$ .

$H_y$  (  $\parallel$  a  $\mathbf{I}$  ) y  $H_z$  (por simetría) son cero!!!

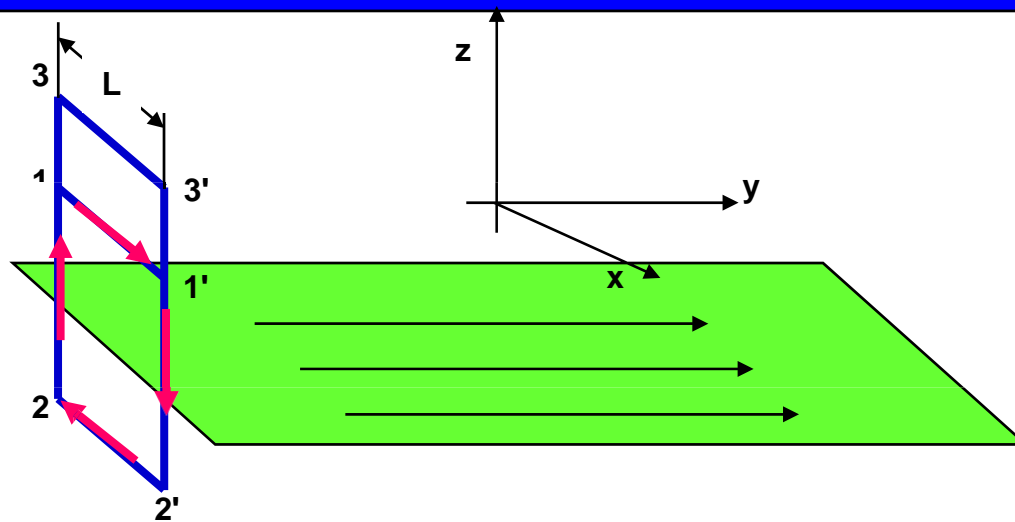
$H_x \neq 0$



UTN- Teoría  
Electromagnética 1



# Ley circuital de Ampère



$$\vec{K} = K_y \vec{a}_y$$

$$H_{x1}L - H_{x2}L = K_y L$$

Por lo tanto:

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$

Con la otra trayectoria:

$$H_{x3}L - H_{x2}L = K_y L \Rightarrow$$

$$H_{x3} - H_{x2} = K_y$$

$$H_{x1} = H_{x3}$$

# Ley circuital de Ampère

$$H_{x1}L - H_{x2}L = K_y L$$

Por lo tanto:

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$

Con la otra trayectoria:

$$H_{x3}L - H_{x2}L = K_y L \Rightarrow$$

$$H_{x3} - H_{x2} = K_y$$

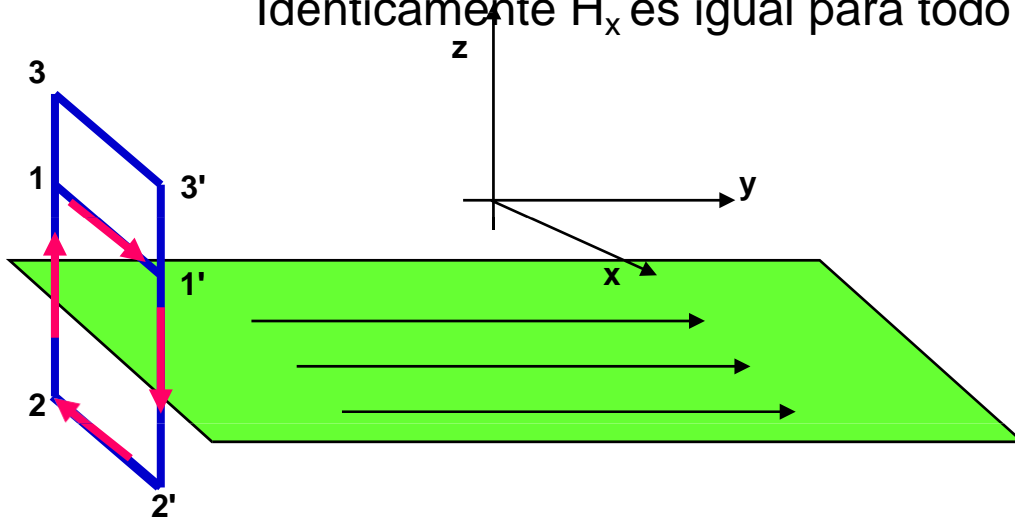
$$H_{x1} = H_{x3}$$

La conclusión más importante del análisis anterior:

La intensidad de CM es idéntica para todo el semiplano superior o inferior

# Ley circuital de Ampère

Por lo tanto:  $H_x$  es igual para todo valor  $z > 0$ .  
Idénticamente  $H_x$  es igual para todo valor  $z < 0$ .



$$H_x = \frac{1}{2} K_y \quad z > 0$$

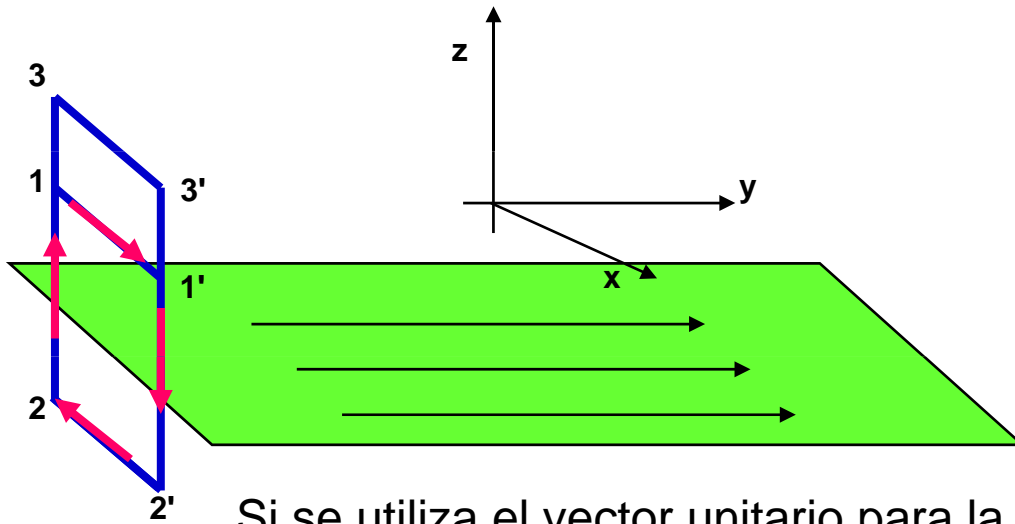
Sobre la lámina

$$H_x = -\frac{1}{2} K_y \quad z < 0$$

Debajo de la lámina



# Ley circuital de Ampère

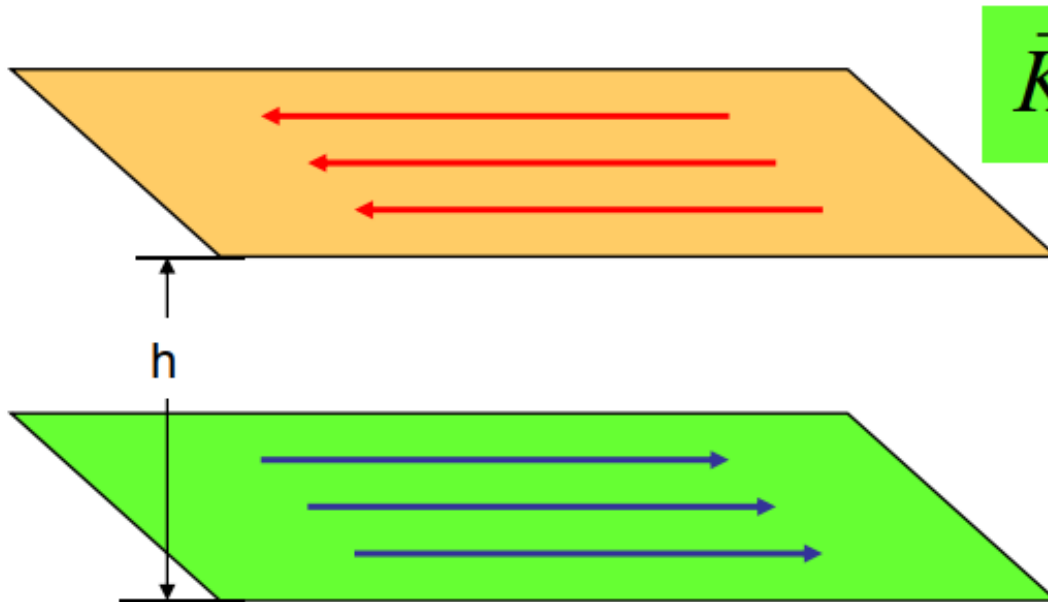


Si se utiliza el vector unitario para la superficie de la lámina  $\mathbf{a}_N$ :

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{K} \times \vec{a}_N$$

# Ley circuital de Ampère

Si se utiliza el vector unitario para la superficie de la lámina  $\mathbf{a}_N$ :



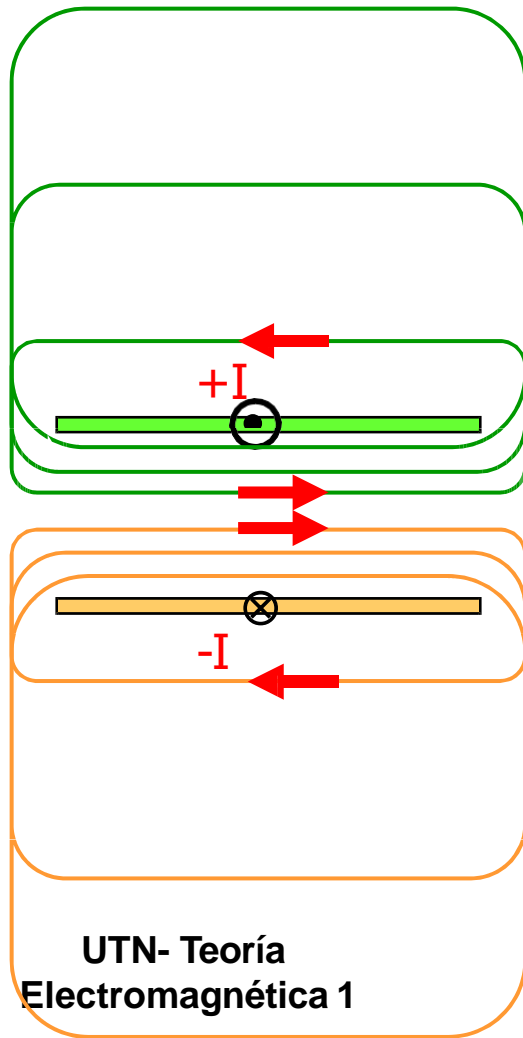
$$\vec{K} = K_y \vec{a}_y$$

$$\vec{H} = \vec{K} \times \vec{a}_N \text{ para } 0 < z < h$$

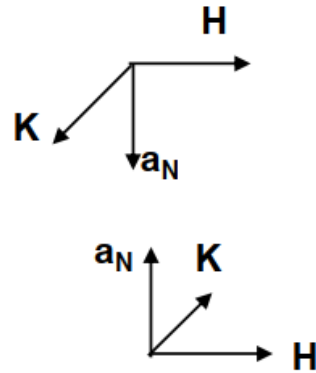
$$\vec{H} = 0 \text{ para } z < 0 \text{ y para } z > h$$

# Ley circuital de Ampère

Si se utiliza el vector unitario para la superficie de la lámina  $\mathbf{a}_N$ :



$$\vec{K} = K_y \vec{a}_y$$

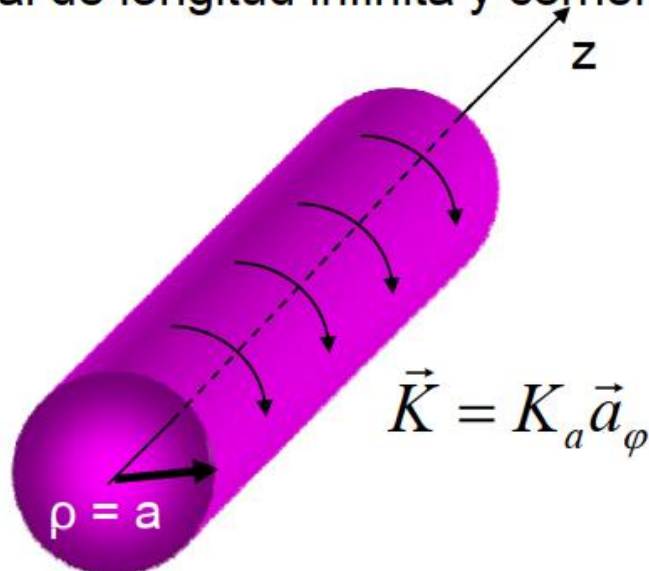


$$\vec{H} = \vec{K} \times \vec{a}_N \text{ para } 0 < z < h$$

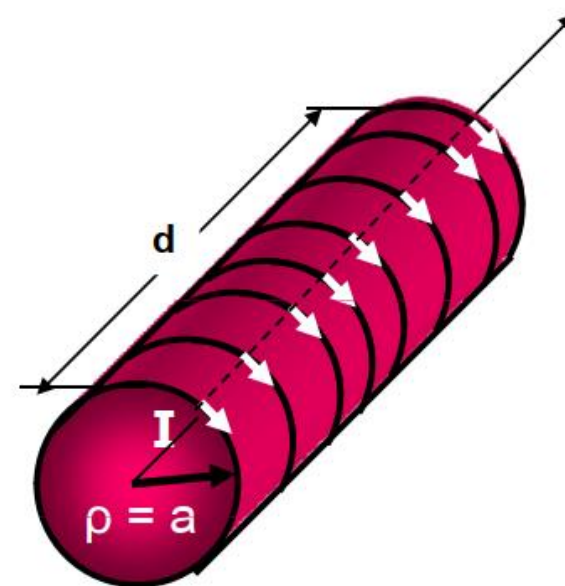
$$\vec{H} = 0 \text{ para } z < 0 \text{ y para } z > h$$

# Ley circuital de Ampère

Solenoides ideal de longitud infinita y corriente laminar



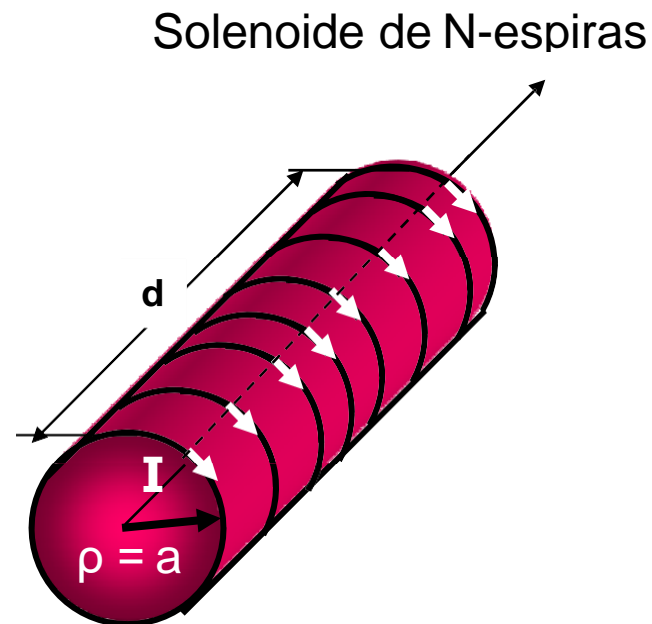
Solenoides de N-espiras



$$\begin{aligned}\vec{H} &= K_a \vec{a}_z \quad \text{para } \rho < a \\ \vec{H} &= 0 \quad \text{para } \rho > a\end{aligned}$$

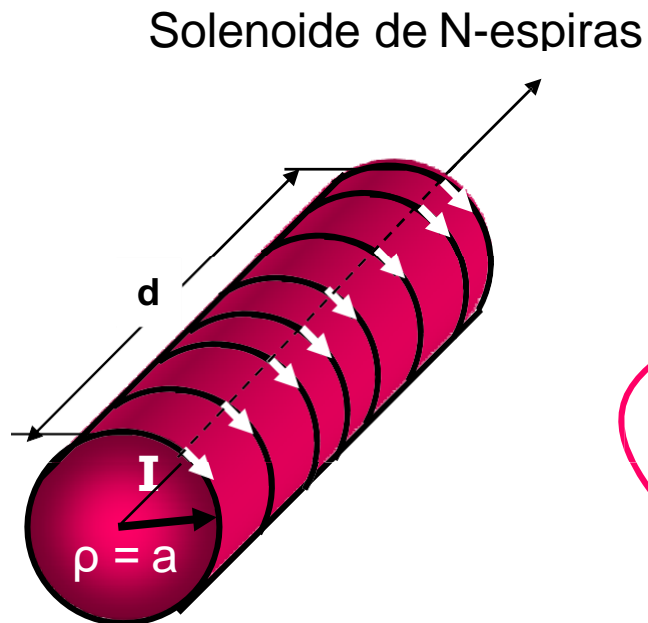
$$\vec{H} = \frac{NI}{d} \vec{a}_z \quad \text{dentro de la bobina}$$

# Ley circuital de Ampère



$$\vec{H} = \frac{NI}{d} \vec{a}_z \quad \text{dentro de la bobina}$$

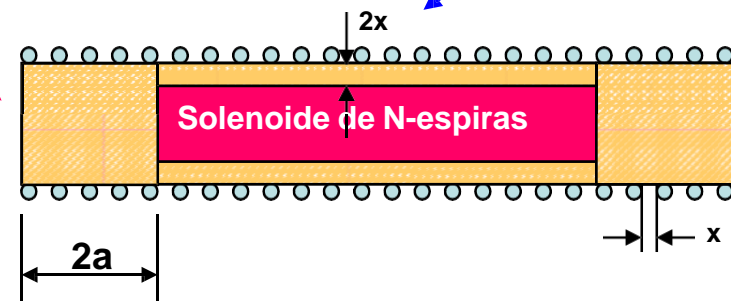
# Ley circuital de Ampère



$$\vec{H} = \frac{NI}{d} \vec{a}_z \quad \text{dentro de la bobina}$$

UTN- Teoría  
Electromagnética 1

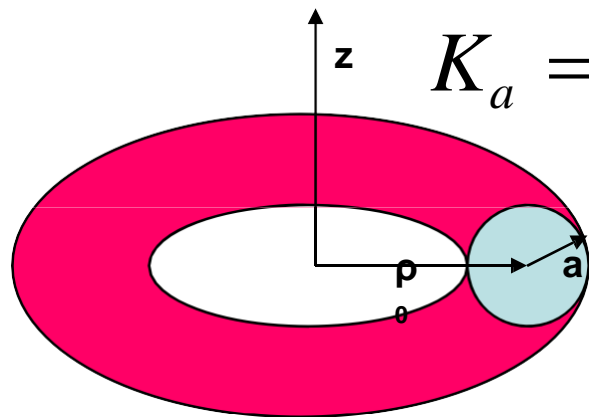
Esta aproximación es útil si no se aplica a **distancias menores al diámetro del solenoide**, entrando en el seno del mismo, ni a distancias inferiores a **dos veces la separación entre espiras**, medida de la base del solenoide hacia el centro del mismo!!!



Fórmula solo es válida en el interior rosa del solenoide

# Ley circuital de Ampère

Para el toroide dibujado, se puede mostrar que en el caso ideal que la intensidad de campo magnético  $H$  fuera del toroide es CERO y en el interior de mismo es:



$$K_a = K_a a_z \quad \text{en} \quad \rho = \rho_0 - a, \quad \& \quad z = 0$$

$$\vec{H} = K_a \frac{\rho_0 - a}{a} \vec{a}_\phi$$

Y para un toroide con  $N$ - espiras,  $H$  es CERO fuera del material ferromagnético y dentro del toroide (en el material ferromagnético) se obtiene una buena aproximación para la intensidad de CM con:

$$\vec{H} = \frac{NI}{2\pi\rho_0} \vec{a}_\phi$$

# El rotacional

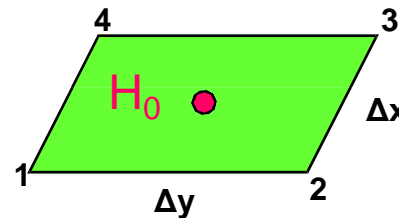
El estudio de la ley de Gauss se completó aplicándola en un elemento diferencial de volumen, lo cual condujo al concepto de divergencia

Ahora vamos a proceder en forma análoga, aplicando la ley circuital de Ampère al perímetro de un elemento diferencial de superficie para obtener la tercera derivada especial del análisis vectorial: EL ROTACIONAL

El objetivo inmediato es obtener la forma puntual de la ley circuital de Ampère.

Se elige una trayectoria incremental cerrada de lados  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  ubicada en  $z = \text{constante}$ , para aplicar en ella la ley CA y. Se supone adicionalmente que una corriente no especificada produce un CM de referencia en el centro de ese rectángulo  $H_0$

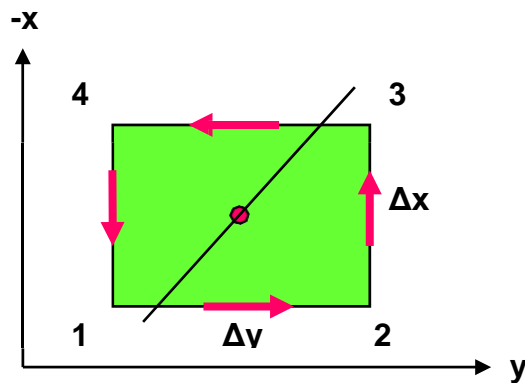
$$\vec{H}_0 = H_{xo}\vec{a}_x + H_{yo}\vec{a}_y + H_{zo}\vec{a}_z$$





# El rotacional

Se elige una trayectoria incremental cerrada ubicada en  $z = \text{constante}$  de lados  $\Delta x, \Delta y$ , para aplicar en ella la ley CA. Se supone adicionalmente que una corriente no especificada produce un CM  $\vec{H}_0$  de referencia en el centro de ese rectángulo.



$$\vec{H}_0 = H_{x0} \vec{a}_x + H_{y0} \vec{a}_y + H_{z0} \vec{a}_z$$

La integral cerrada de línea de  $\vec{H}$  alrededor de esta trayectoria es aprox. la suma de los cuatro valores de  $\vec{H} \cdot \vec{L}$  sobre cada lado.

Trayectoria: 1-2-3-4-1, para una corriente positiva en dirección  $+\vec{a}_z$ .  
La primera contribución es:

$$(\vec{H} \cdot \Delta \vec{L})_{1-2} = H_{y,1-2} \Delta y \text{ o bien :}$$

$$(\vec{H} \cdot \Delta \vec{L})_{1-2} \approx \left( H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \Delta x \right) \right) \Delta y$$

# El rotacional

Trayectoria: 1-2-3-4-1, para una corriente positiva en dirección  $+\mathbf{a}_z$ . La primera contribución es:

$$(\vec{H} \cdot \Delta L)_{1-2} = H_{y,1-2} \Delta y \text{ o bien :}$$

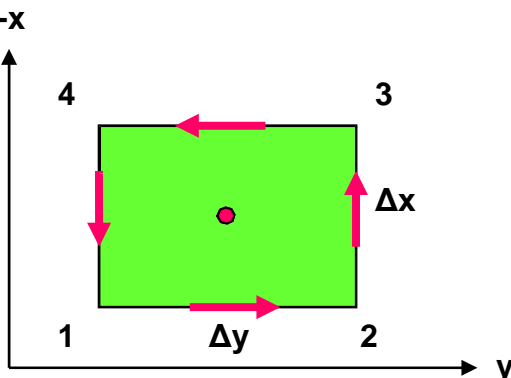
$$\vec{H}_{y,1-2} \approx H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \Delta x \right) \text{ y con ello:}$$

$$(\vec{H} \cdot \Delta L)_{1-2} = \left( H_{y0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y$$

La siguiente trayectoria arroja:

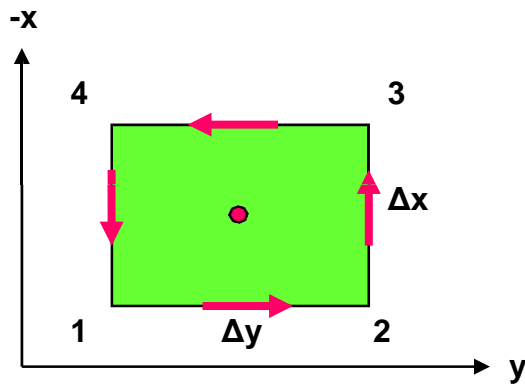
$$(\vec{H} \cdot \Delta L)_{2-3} = H_{x,2-3} (-\Delta x) \text{ o bien :}$$

$$(\vec{H} \cdot \Delta L)_{2-3} = \left( H_{x0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x$$



# El rotacional

Si se continúa con los dos segmentos restantes y se suman los 4 resultados, se obtiene:



$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{L} \approx \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

Con base en la ley CA, este resultado debe ser igual a la corriente encerrada por la trayectoria, o la corriente que atraviesa cualquier superficie que haya limitado la trayectoria. Si se supone una densidad de corriente universal  $J$ , entonces la corriente encerrada es:

$$\Delta I \approx J_z \Delta x \Delta y \quad \text{y la expresión anterior es:}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} \approx \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \approx J_z \Delta x \Delta y$$

# El rotacional

O bien:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{L} \approx \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \approx J_z \Delta x \Delta y$$

$$\frac{\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{L}}{\Delta x \Delta y} \approx \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \approx J_z$$

A medida que la trayectoria cerrada se contrae, la expresión se hace cada vez más exacta y en el límite el signo “aproximado” se puede sustituir por el signo “igual”

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

# El rotacional

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{c}{\Delta x \Delta y} \oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

Esta relación involucra tanto la integral de línea cerrada de H por unidad de área encerrada, como la densidad de corriente J.

Analogía con la ley de Gauss!!!

Si se elijen trayectorias cerradas perpendiculares ( $y = \text{constante}$  &  $x = \text{constante}$ ), y se procede en forma análoga, se obtienen expresiones para las componentes de  $x$  &  $y$  de la densidad de corriente:

$$\lim_{\Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{c}{\Delta y \Delta z} \oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$
$$\lim_{\Delta z, \Delta x \rightarrow 0} \frac{c}{\Delta z \Delta x} \oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y$$

# El rotacional

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

Al observar estos tres resultados se nota que la componente de la densidad de corriente está dada por el límite del **cociente** de la integral de línea cerrada de **H** alrededor de una pequeña trayectoria **y del** diferencial de área (perpendicular a dicha componente de J) que encierra dicha trayectoria.

Esta expresión ya ha sido definido previamente en **otras disciplinas de la Física** (dinámica de flúidos) antes que en la Electrotecnia y recibió previamente el nombre de **rotacional**, en inglés “**curl**”; traducido “**colochos**” o rizos.

El rotacional de cualquier vector es un vector. La expresión matemática para el rotacional es independiente del sistema de coordenadas en uso y está dada por:

$$(\text{rotacional } \vec{H})_N = \lim_{\Delta S_N \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{L}}{\Delta S_N}$$

$\Delta S_N$  = Área plana encerrada por la integral cerrada de línea. N significa que la componente del rotacional de marras es normal a dicha superficie.

# El rotacional

En coordenadas rectangulares:

$$\text{rotacional } \vec{H} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z$$

O mejor:

$$\text{rotacional } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

Y en términos del operador vectorial nabra:

$$\text{rotacional } \vec{H} = \nabla \times \vec{H}$$

# El rotacional

En coordenadas rectangulares:

$$\text{rotacional } \vec{H} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \times \vec{H} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) \vec{a}_\rho + \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \vec{a}_\varphi + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{a}_z$$

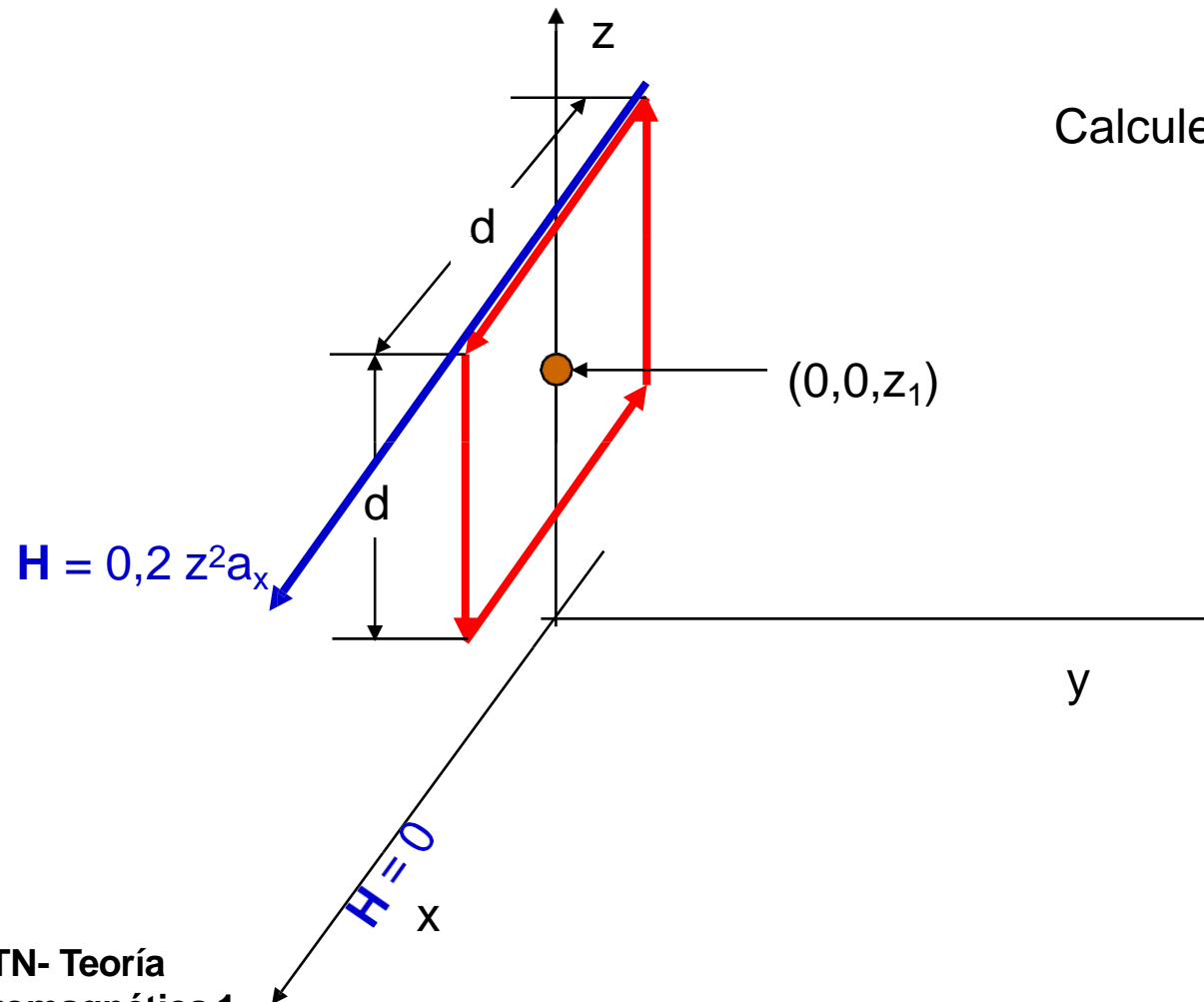
En coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} = & \frac{1}{r \sin \Theta} \left( \frac{\partial(H_\varphi \sin \Theta)}{\partial \Theta} - \frac{\partial H_\Theta}{\partial \varphi} \right) \vec{a}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r H_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{a}_\Theta + \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r H_\Theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \Theta} \right) \vec{a}_\varphi \end{aligned}$$



# El rotacional

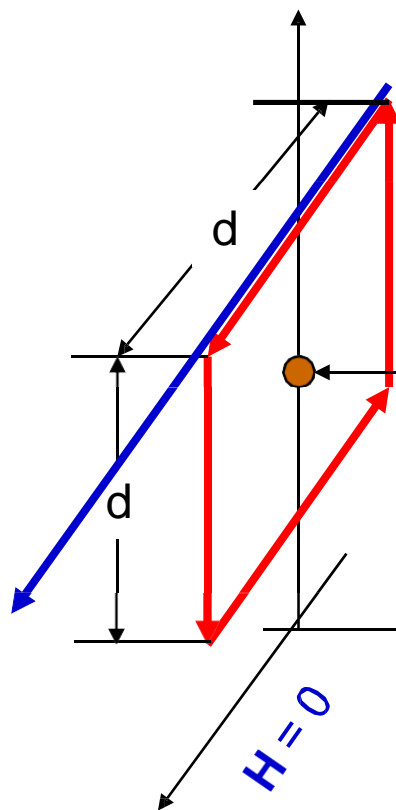
$\mathbf{H} = 0,2 z^2 \mathbf{a}_x$  para  $z > 0$  y  $\mathbf{H} = 0$  para cualquier otra parte.



Calcule la circulación de  $\mathbf{H}$ !

# El rotacional

$\mathbf{H} = 0,2 z^2 \mathbf{a}_x$  para  $z > 0$  y  $\mathbf{H} = 0$  para cualquier otra parte.



$$\mathbf{H} = 0,2 z^2 \mathbf{a}_x$$

a) Calcule la circulación de  $\mathbf{H}$ !

$$\oint_{c(0,0,z_1)} \vec{H} \cdot d\vec{L} = 0,2(z_1 + \frac{1}{2}d)^2 d + 0 - 0,2(z_1 - \frac{1}{2}d)^2 d + 0 =$$

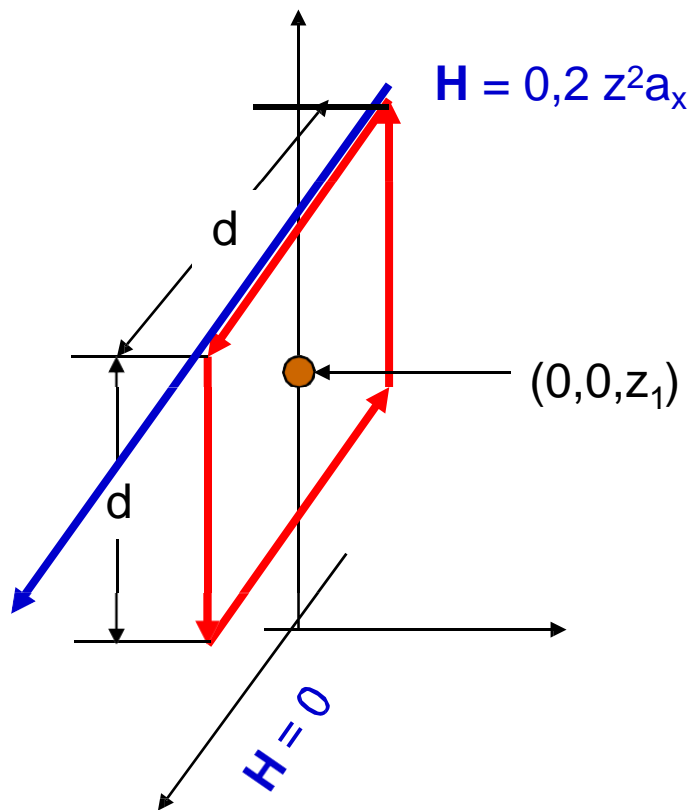
$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{L} = 0,2(z_1^2 + \frac{1}{4}d^2 + z_1 d)d - 0,2(z_1^2 + \frac{1}{4}d^2 - z_1 d)d =$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{L} = 0,4z_1 d^2$$

b) Calcule la rotación de  $\mathbf{H}$ !

# El rotacional

$\vec{H} = 0,2 z^2 \vec{a}_x$  para  $z > 0$  y  $\vec{H} = 0$  para cualquier otro valor de  $z$ .



b) Calcule el rotacional de  $\vec{H}$ !

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{L} = 0,4 z_1 d^2$$

$$|(\text{rotacional } \vec{H})_y| = |(\nabla \times \vec{H})_y| = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}}{d^2} =$$

$$|(\nabla \times \vec{H})_y| = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{0,4 z_1 d^2}{d^2} = 0,4 z_1$$

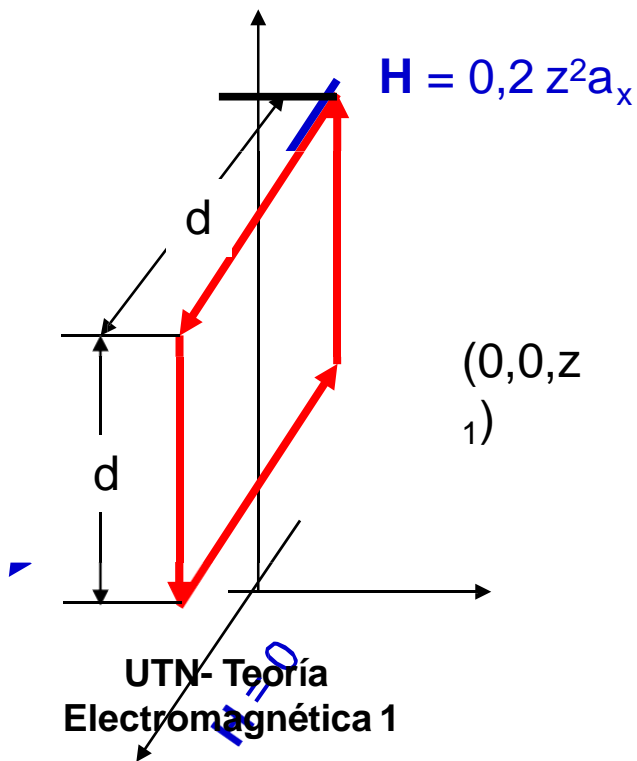
$$(\nabla \times \vec{H})_y = 0,4 z_1 \vec{a}_y,$$

$$(\nabla \times \vec{H})_x = 0 \quad y \quad (\nabla \times \vec{H})_z = 0$$

# El rotacional

b) Calcule el rotacional de H!

$$\text{rotacional } \vec{H} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z$$



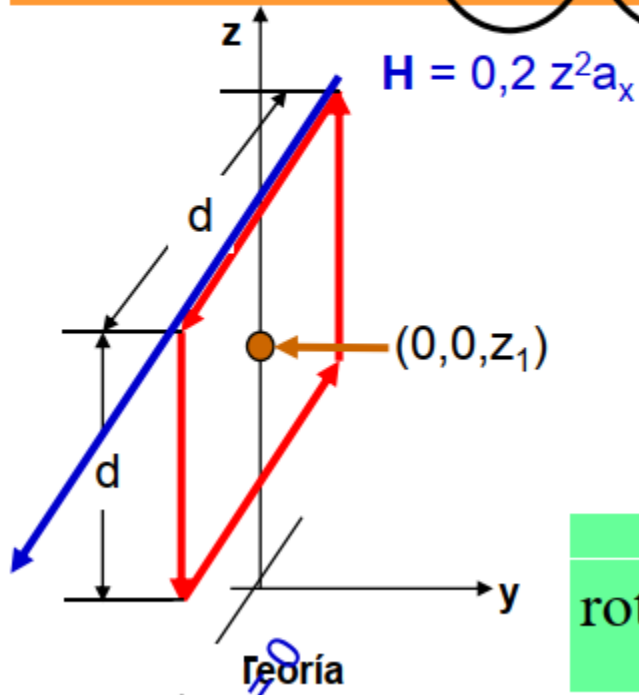
$$\text{rotacional } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

# El rotacional

b) Calcule el rotacional H!

H tiene solo componente en x, por lo tanto sus derivadas en otra dirección son CERO

$$\text{rotacional } \vec{H} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z$$



Mejor dicho:  $\nabla \times \hat{H}$  tiene solo componente en y:

$$\text{rotacional } \vec{H} = + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial H_z}{\partial x}}_{=0} \right) \vec{a}_y +$$

$$\text{rotacional } \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} \vec{a}_y = \frac{\partial (0,2z^2)}{\partial z} \vec{a}_y = 0,4z \vec{a}_y$$

# El rotacional

$$\text{rotacional } \vec{H} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z$$

$$\text{rotacional } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Se llega a la forma puntual de la ley circuital de Ampère

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Esta es la segunda de las cuatro ecuaciones de Maxwell, cuando se aplican a **condiciones invariables con el tiempo**. Ahora podemos escribir la tercera ecuación de Maxwell también aplicadas a **condiciones invariables en el tiempo** : La forma puntual de la integral cerrada de línea:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0 \quad \text{o bien:}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

# El rotacional

Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial o puntual cuando se aplican a CE  
estáticos o CM estables:

1) divergencia  $\vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$  Ley de Gauss

2) rotacional  $\vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  ó  $0$  (caso estático! Ley de Ampere)

3) rotacional  $\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  ó  $0$  (caso estático!!! Ley de Faraday)

4) divergencia  $\vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$

# El teorema de Stokes

Para obtener la forma integral de la 2da. Ecuación de Maxwell, se usará el teorema llamado de Stokes.

Ley circuital de Ampère



$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

+

Teorema de Stokes

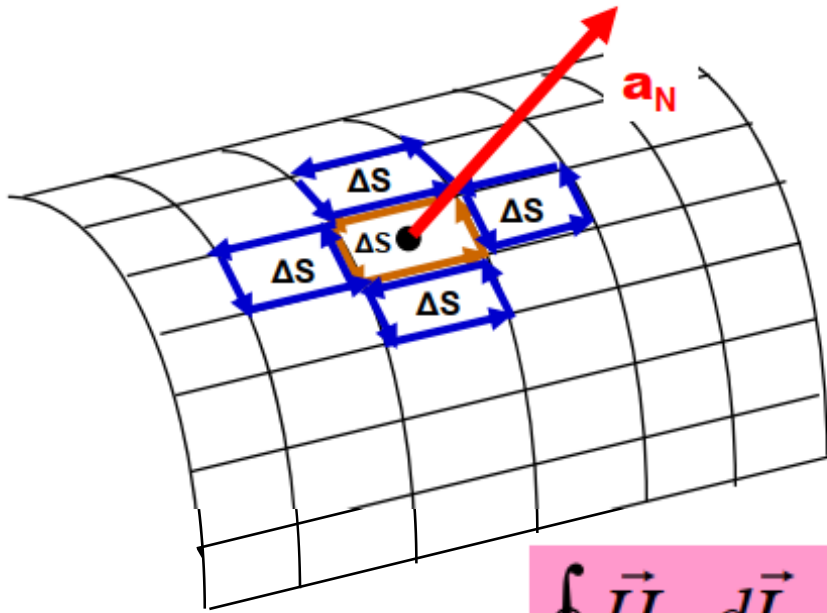
=

Forma integral de Maxwell 2



# El teorema de Stokes

Se tiene una superficie como la mostrada. Se aplica en ella la definición de rotacional en uno de esos elementos de superficie  $\Delta S$ :



$$(\nabla \times \vec{H})_N \approx \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}_{\Delta S}}{\Delta S}$$

$\mathbf{N}$  normal a  $\Delta S$

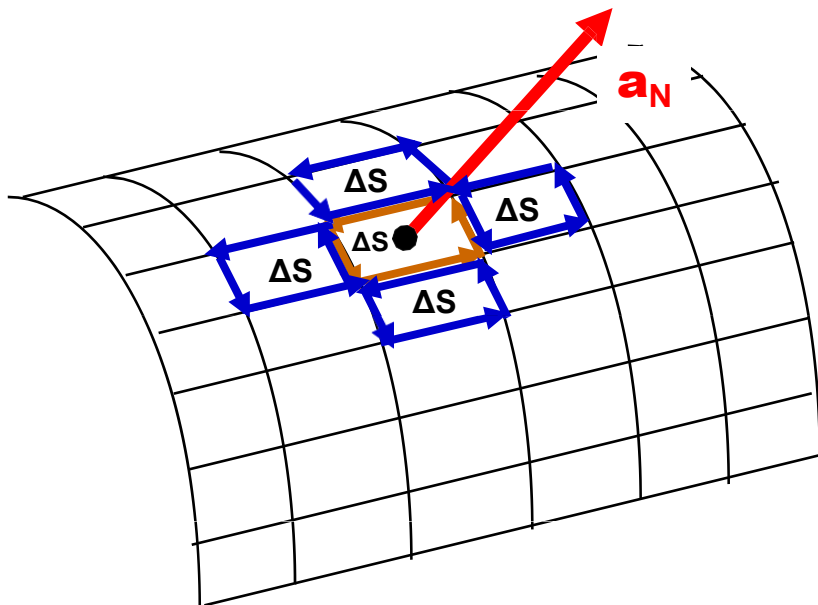
Esta expresión también puede escribirse como:

$$\frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \approx (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{a}_N \quad \text{o bien}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}_{\Delta S} \approx (\nabla \times \vec{H}) \cdot \underbrace{\vec{a}_N \Delta S}_{\Delta \vec{S}} = (\nabla \times \vec{H}) \cdot \Delta \vec{S}$$

# El teorema de Stokes

Con el ánimo de aplicar esa definición a toda el área, se aplica a cada diferencial de área y se suman todos los resultados. Se puede observar fácilmente que en esa sumatoria hay muchos sumandos que se cancelan porque cada pared interior se recorre dos veces **con sentido invertido y por lo tanto se anulan**. La únicas fronteras sobre las cuales la integral cerrada es diferente de cero, son aquellas ubicadas en la frontera exterior del área en cuestión. Por lo tanto:

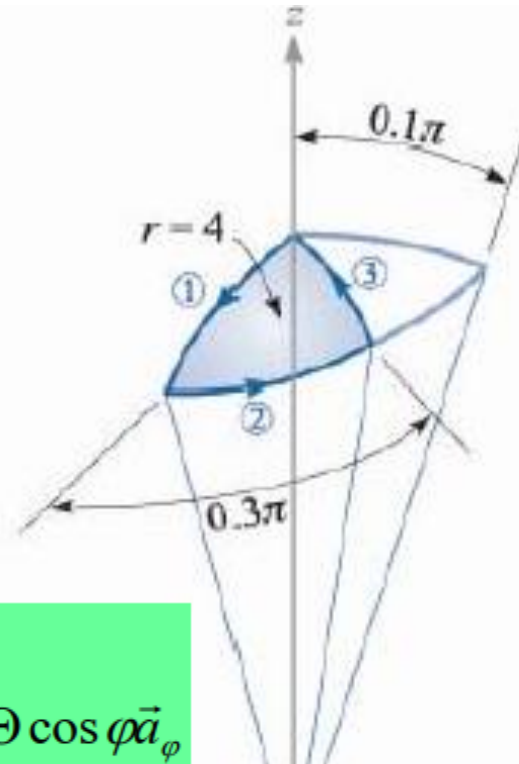


$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}_{\Delta S} \equiv \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

En donde  $d\vec{L}$  se toma sobre el perímetro de  $S$

Esta expresión es válida para cualquier campo vectorial y **se conoce como el Teorema de Stokes.**

# Ejemplo del teorema de Stokes



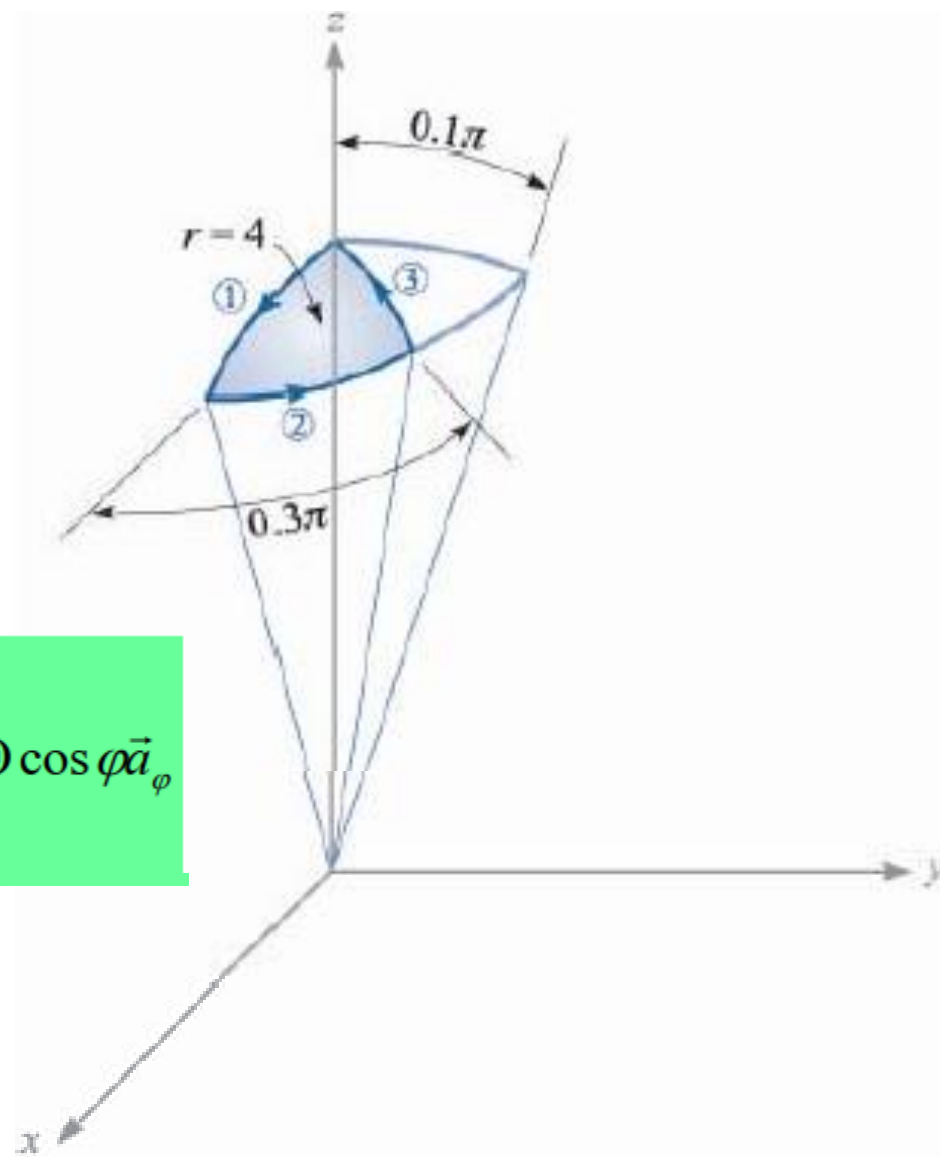
$$\left. \begin{array}{l} r = 4m \\ 0 \leq \Theta \leq 0,1\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 0,3\pi \end{array} \right\} \quad \vec{H} = 6r \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_r + 18r \operatorname{sen} \Theta \cos \varphi \vec{a}_\varphi$$



# Ejemplo del teorema de Stokes

La trayectoria de la circulación de  $\vec{H}$  se compone de tres arcos circulares.  
Determine la identidad del teorema de Stokes.

$$\left. \begin{array}{l} r = 4m \\ 0 \leq \Theta \leq 0,1\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 0,3\pi \end{array} \right\} \quad \vec{H} = 6r \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_r + 18r \operatorname{sen} \Theta \cos \varphi \vec{a}_\varphi$$



# Ejemplo del teorema de Stokes

El primer segmento de la circulación en coordenadas esféricas está descrito por:

$$r = 4m \quad 0 \leq \Theta \leq 0,1\pi \quad \varphi = 0$$

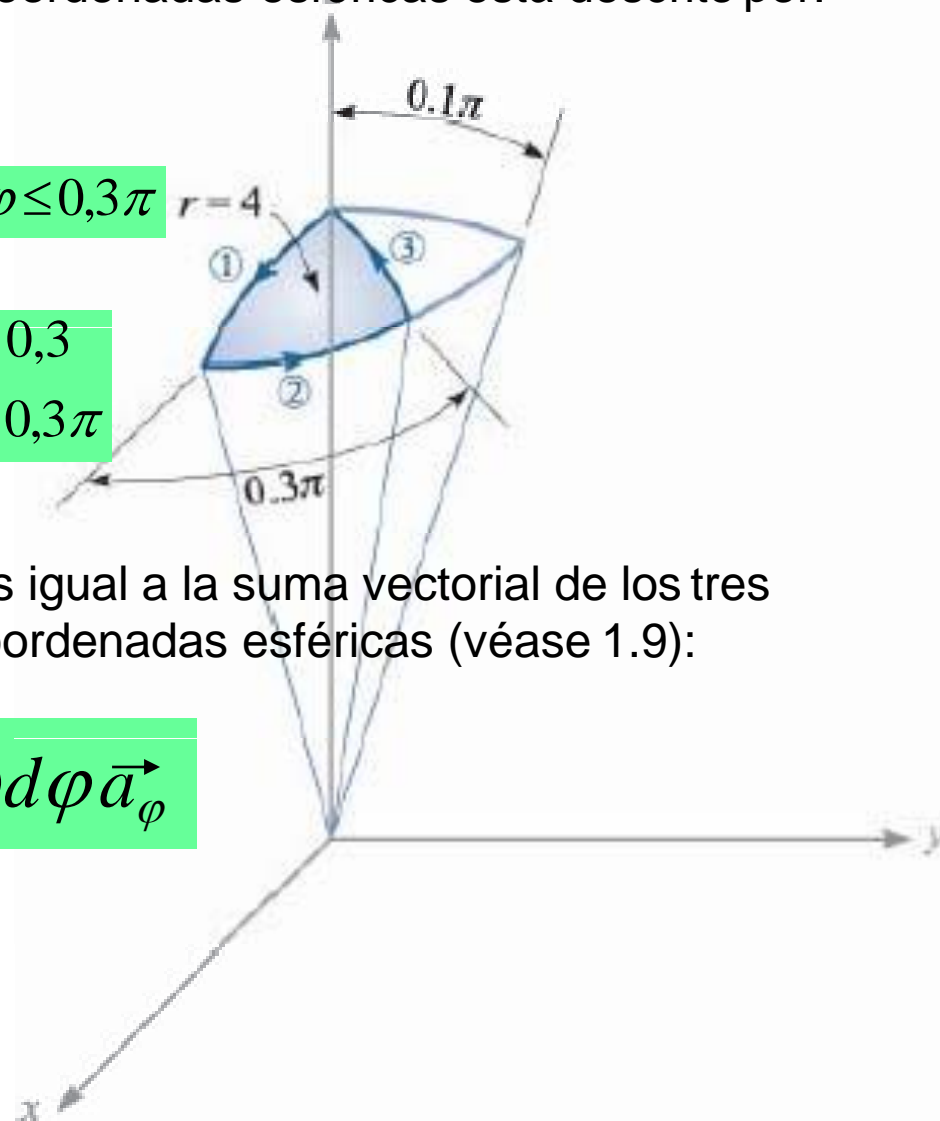
El segundo por:  $r = 4m \quad \Theta = 0,1\pi \quad 0 \leq \varphi \leq 0,3\pi$

Y el tercero:

$$r = 4m \quad 0,1 \geq \Theta \geq 0 \quad \varphi = 0,3\pi$$

El elemento diferencial de trayectoria  $d\vec{L}$  es igual a la suma vectorial de los tres diferenciales de longitud del sistema de coordenadas esféricas (véase 1.9):

$$d\vec{L} = dr\vec{a}_r + r d\Theta \vec{a}_\Theta + r \sin\Theta d\varphi \vec{a}_\varphi$$



# Ejemplo del teorema de Stokes

$$d\vec{L} = dr\vec{a}_r + r d\Theta \vec{a}_\Theta + r \sin\Theta d\varphi \vec{a}_\varphi$$

Se aplica la ley circuital de Ampère a todos los segmentos de la trayectoria:

$$dr\vec{a}_r$$

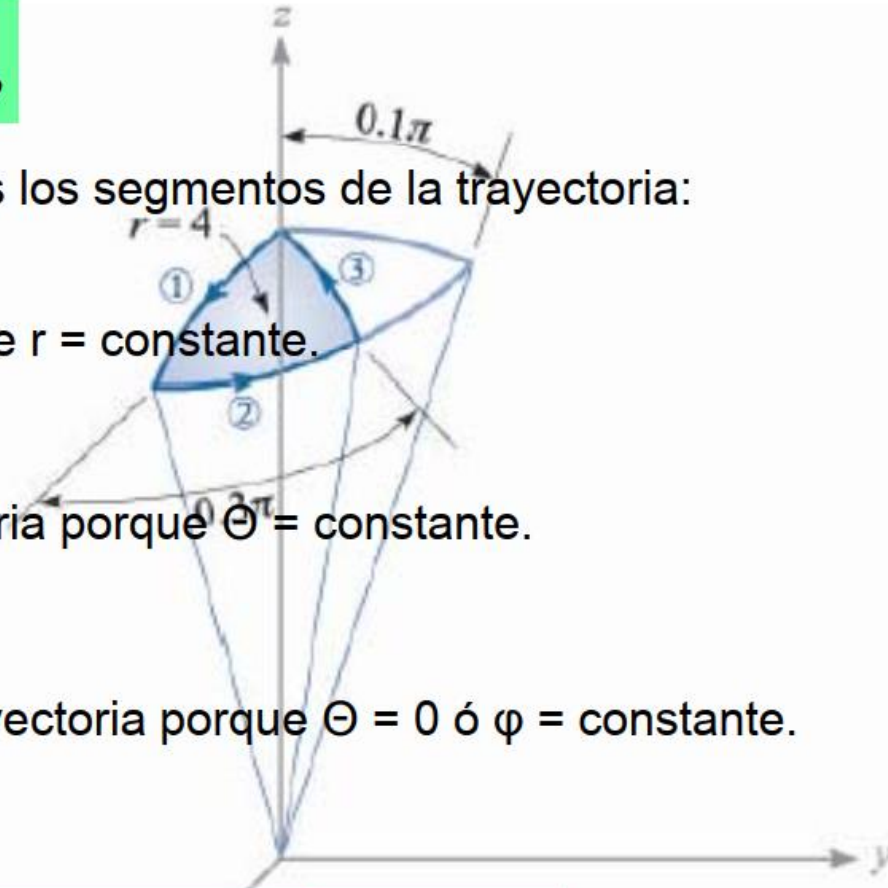
= cero en las tres arcos, porque  $r = \text{constante}$ .

$$r d\Theta \vec{a}_\Theta$$

= cero en la segunda trayectoria porque  $\Theta = \text{constante}$ .

$$r \sin\Theta d\varphi \vec{a}_\varphi$$

= cero en la 1ª. y la 3ª. trayectoria porque  $\Theta = 0$  ó  $\varphi = \text{constante}$ .



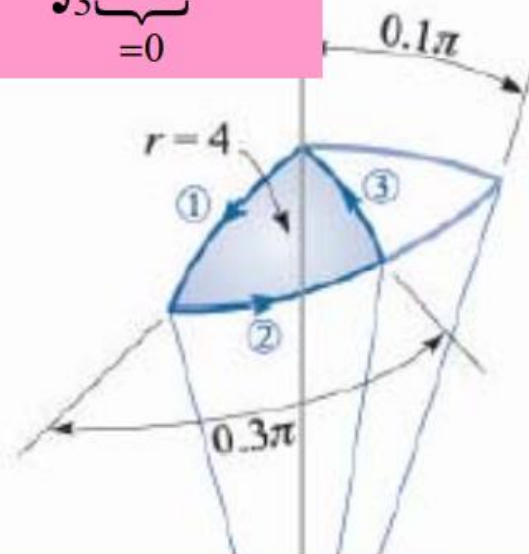
Así:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_1 \underbrace{H_\Theta}_{=0} r d\Theta + \int_2 H_\varphi r \sin\Theta d\varphi + \int_3 \underbrace{H_\Theta}_{=0} r d\Theta$$

# Ejemplo del teorema de Stokes

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_1 \underbrace{H_\Theta}_{=0} r d\Theta + \int_2 H_\varphi r \sin\Theta d\varphi + \int_3 \underbrace{H_\Theta}_{=0} r d\Theta$$

Solamente queda la segunda integral:



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_2 H_\varphi r \sin\Theta d\varphi = \int_0^{0,3\pi} [18 \cdot 4 \sin 0,1\pi \cos \varphi] 4 \sin 0,1\pi d\varphi =$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = 288 \sin^2 0,1\pi \sin 0,3\pi = 22,2 A$$



# Ejemplo del teorema de Stokes

Para calcular el otro lado de la identidad del teorema de Stokes:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r \sin \Theta} \left( \frac{\partial (H_\varphi \sin \Theta)}{\partial \Theta} - \frac{\partial H_\Theta}{\partial \varphi} \right) \vec{a}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{a}_\Theta + \underbrace{\frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r H_\Theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \Theta} \right)}_{=0} \vec{a}_\varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} r = 4m \\ 0 \leq \Theta \leq 0,1\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 0,3\pi \end{array} \right\} \quad \vec{H} = 6r \sin \varphi \vec{a}_r + 18r \sin \Theta \cos \varphi \vec{a}_\varphi$$

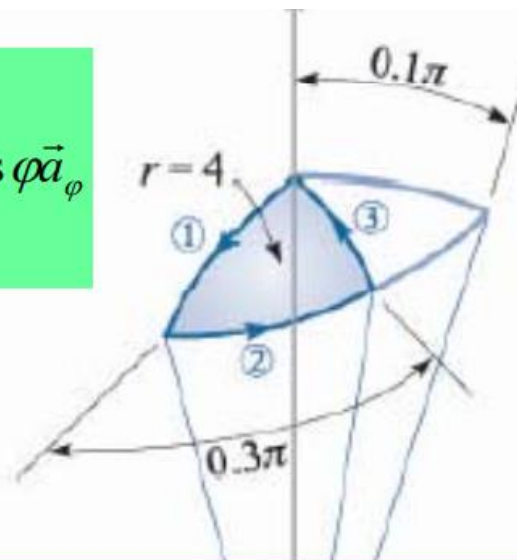
$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r \sin \Theta} \left( \frac{\partial (H_\varphi \sin \Theta)}{\partial \Theta} - \frac{\partial H_\Theta}{\partial \varphi} \right) \vec{a}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{a}_\Theta$$



# Ejemplo del teorema de Stokes

Para calcular el otro lado de la identidad del teorema de Stokes:

$$\left. \begin{array}{l} r = 4m \\ 0 \leq \Theta \leq 0,1\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 0,3\pi \end{array} \right\} \quad \vec{H} = 6r \operatorname{sen} \varphi \vec{a}_r + 18r \operatorname{sen} \Theta \cos \varphi \vec{a}_\varphi$$



$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \Theta} \left( \frac{\partial (H_\varphi \operatorname{sen} \Theta)}{\partial \Theta} - \frac{\partial H_\Theta}{\partial \varphi} \right) \vec{a}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \Theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{a}_\Theta$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \Theta} (36r \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta \cos \varphi) \vec{a}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \Theta} 6r \cos \varphi - 36r \operatorname{sen} \Theta \cos \varphi \right) \vec{a}_\Theta$$

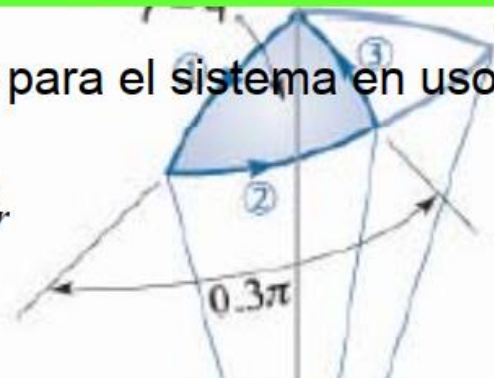
# Ejemplo del teorema de Stokes

Para calcular el otro lado de la identidad del teorema de Stokes:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r \sin \Theta} (36 r \sin \Theta \cos \Theta \cos \varphi) \vec{a}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \Theta} 6r \cos \varphi - 36 r \sin \Theta \cos \varphi \right) \vec{a}_\Theta$$

Como un elemento diferencial de superficie para el sistema en uso es:

$$d\vec{S} = r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi \vec{a}_r$$



$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_0^{0,3\pi} \int_0^{0,1\pi} (36 \cos \Theta \cos \varphi) 16 \sin \Theta d\Theta d\varphi =$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_0^{0,3\pi} \int_0^{0,1\pi} 576 \left( \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \right)_0^{0,1\pi} \cos \Theta d\varphi =$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = 288 \sin^2 0,1\pi \sin 0,3\pi = 22,2 \text{ A}$$

# Más sobre el teorema de Stokes

Se muestra lo sencillo que es obtener la respuesta de la ley CA partiendo de la circulación de H:

$$\underbrace{\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}}_{\text{circulación } H} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

En donde I es la corriente encerrada por la integral curvilínea indicada en la integral o por la superficie mostrada en la segunda expresión.

# Flujo magnético y densidad de flujo magnético

En el espacio libre, la densidad de flujo magnético **B** se define como:

$$B = \mu_0 H \quad \text{expresión válida sólo para el espacio libre}$$

**B** se mide en  $\text{Wb/m}^2$  o bien  $\text{Vs/m}^2$  o también Tesla T

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad \text{H / m} \quad \text{llamada la constante de permeabilidad del espacio libre}$$

B es otro miembro de la familia de densidad de flujo de campos vectoriales

# Flujo magnético y densidad de flujo magnético

B es otro miembro de la familia de densidad de flujo de campos vectoriales

	Campo eléctrico	Campo magnético
Intensidad de campo	$\vec{E}$	$\vec{H}$
densidad de campo	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
Flujo	$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \text{ en } As$	$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \text{ en } Vs(Wb)$

# Flujo magnético y densidad de flujo magnético

Hasta ahora no se ha podido descubrir una carga magnética aislada. La naturaleza de las líneas de CM es la de **una flujo continuo** sin interrupción. A diferencia del CE, no terminan en una “carga magnética”. Por esta razón la ley de Gauss para el campo magnético **está fundamentada** en la observación actualmente válida!!!!

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Y la aplicación del teorema de la divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Esta última ecuación es la última de las cuatro ecuaciones de Maxwell aplicadas a CE estáticos y CM estables (**i** invariable en t).

# Cuatro leyes de Maxwell

Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial o puntual

1) divergencia  $\vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$  Ley de Gauss

2) rotacional  $\vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  ó  $0$  (caso estático! Ley de Ampere)

3) rotacional  $\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  ó  $0$  (caso estático! Ley de Faraday)

4) divergencia  $\vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$

A estas ecuaciones se le pueden agregar las dos ecuaciones de materiales:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

y

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

En campo eléctrico se definió también la relación entre el potencial electrostático  $V$  y la intensidad de CE:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

# Cuatro leyes de Maxwell

Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial o puntual

- 1) divergencia  $\vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$  Ley de Gauss
- 2) rotacional  $\vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  ó  $0$  (caso estático! Ley de Ampere)
- 3) rotacional  $\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (Ley de Faraday) o *CERO* (estático)
- 4) divergencia  $\vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$

**El conjunto de ecuaciones integrales correspondiente a las anteriores es:**

- 1)  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q = \int_{vol} \rho_v dv$
- 2)  $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$
- 3)  $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{L} = I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$
- 4)  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$



# Potenciales magnéticos escalares y vectoriales

Se puede definir una función de potencial magnético que pueda determinarse a partir de la corriente eléctrica, con la cual se puedan calcular los campos magnéticos con facilidad???... .....R/ Sí

Puede definirse un potencial magnético escalar similar al potencial electrostático escalar??? R/ no siempre

Para dar respuesta a la última, se supondrá la existencia de un potencial magnético escalar que se denominará  $V_m$  tal que:

$$\vec{H} = -\nabla V_m$$

Con esta selección se logra una analogía al campo eléctrico y a la vez debe cumplir con las exigencias para el campo magnético ya discutidas, como:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = \nabla \times (-\nabla V_m)$$

# Potencial magnético escalar

Sin embargo como el rotacional del gradiente de un escalar es cero, entonces la densidad de la corriente eléctrica debe ser CERO para la región en la cual el potencial magnético escalar está definido así:

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad \text{para } \mathbf{J} = 0$$

O sea en todo lugar menos  
en conductores eléctricos.

Dado que hay muchas geometrías en las cuales esto aplica (máquinas eléctricas rotatorias, transformadores, sensores, imanes etc.) esto suele ser muy útil. Las unidades son:

$$[V_m] = A \quad [V_m] = A - \text{vuelta}$$

¿Satisface el potencial magnético escalar también la ecuación de Laplace, por ejemplo para el espacio libre?

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \vec{H} = ???$$

# Potencial magnético escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = ???$$

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = ?$$

$$-\mu_0 (\nabla \cdot \nabla V_m) = -\mu_0 \nabla^2 V_m = 0$$

Se define  $\nabla^2 V_m$  como:

$$\nabla^2 V_m = \left( \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} \right)$$

$$\nabla^2 V_m = 0 \quad \text{para } J = 0$$

$V_m$  satisface la ecuación de Laplace en materiales con  $\mu$  isotrópica. Además este potencial escalar **no está definido** cuando está presente una corriente eléctrica en la región en análisis .

# Potencial magnético escalar

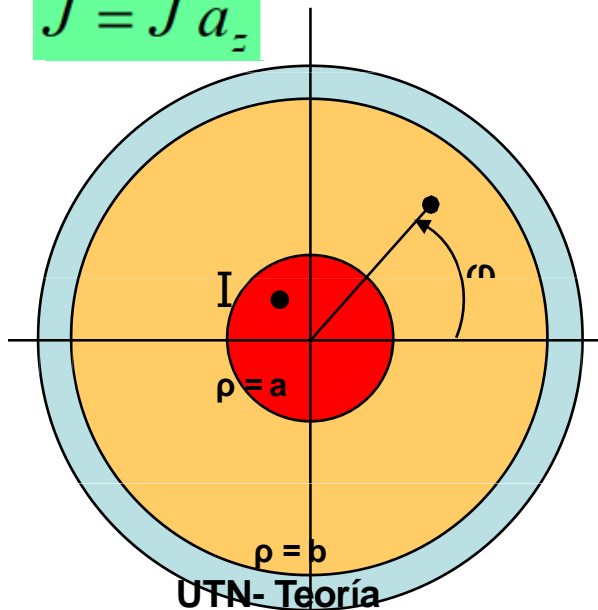
Una diferencia significativa entre el potencial magnético  $V_m$  y el potencial eléctrico  $V$  radica en el hecho de que  $V_m$  **no es una función univalente** de la posición, lo que si es válido para  $V$ . En este último, el potencial del punto  $V(P)$  definido con respecto a alguna referencia  $V = 0$ , está definido, al igual que todos los demás puntos situados a su alrededor. **En el caso del potencial magnético no es así.**

$$\vec{H} = -\nabla V_m \quad \text{para } J = 0$$

Ejemplo de un conductor coaxial:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{a}_\phi$$

$$\vec{J} = J \vec{a}_z$$



UTN- Teoría  
Electromagnética 1

$$\begin{aligned} \frac{I}{2\pi\rho} &= -\nabla V_m|_\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_m}{\partial \phi} \Rightarrow \\ \frac{\partial V_m}{\partial \phi} &= -\frac{I}{2\pi} \Rightarrow V_m = -\frac{I}{2\pi} \phi + C; \quad \text{con } C = 0 \\ V_m &= -\frac{I}{2\pi} \phi \end{aligned}$$

# Potencial magnético escalar

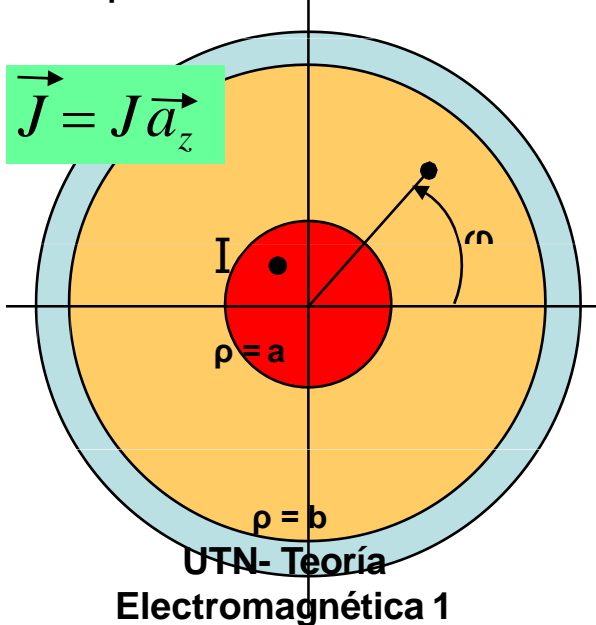
Definamos el potencial magnético en  $\varphi = 0$  como CERO. Qué valor tiene  $V_m$  para  $\varphi = \pi/4$ ? La respuesta es evidente:

$$V_m = -\frac{I}{2\pi} \frac{\pi}{4} = -\frac{I}{8}$$

Si se aumenta el ángulo hasta  $2\pi$ , hasta completar una vuelta completa desde el punto de partida  $\varphi = 0$ , se nota que el resultado para  $V_m$  es ahora  $-I$  y no 0 como se supuso antes.

En P.  $\omega$  se define como:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}, \text{ o bien: } -\frac{7\pi}{4}, -\frac{15\pi}{4}, -\frac{23\pi}{4}, \text{ etc.}$$



$$V_m(P) = \frac{I}{2} \left( 2n - \frac{1}{4} \right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \text{ o bien}$$

$$V_m(P) = I \left( n - \frac{1}{8} \right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

# Potencial magnético escalar

El motivo por el cual se presenta esa **multivalencia** se puede evidenciar comparándolo con el campo electrostático:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0 \quad V_{ab} = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

La última integral es independiente de la trayectoria que se elija!!!

En el caso de la magnetostática:

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad \text{sólo donde } \vec{J} = 0$$

$$\text{pero } \oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

Aún en el caso de que **J** sea CERO a lo largo de la trayectoria de integración

Pero cada vez que se dé una vuelta completa alrededor de la corriente, el resultado de la integración se incrementa en I.

# Potencial magnético escalar

Si la trayectoria de integración no encierra una corriente  $I$ , entonces se puede definir un potencial univalente. Sin embargo en general se puede afirmar:

$$V_{m,ab} = - \int_h^a \vec{H} \cdot d\vec{L} \quad \text{a lo largo de una trayectoria especificada!!!}$$

En el caso del cable coaxial, se debe acordar seleccionar una trayectoria que no sobrepase la barrera  $\varphi = \pi/4$ . O sea no se debe encerrar la corriente  $I$  en la trayectoria elegida!!! Entonces el potencial univalente sería:

$$V_m = -\frac{I}{2\pi} \varphi \quad \text{para } -\pi < \varphi < \pi; \text{ o bien: } V_m(P) = -\frac{I}{8} \quad \text{para } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Recuerde: El potencial electrostático  $V$  es un campo conservativo

El potencial magnético escalar  $V_m$  **NO** es un campo conservativo

# Potencial magnético vectorial

El potencial magnético vectorial es uno de los más útiles en el estudio de:

- Radiación de antenas
- Aperturas y de dispersión de radiación en líneas de transmisión
- Guías de ondas
- Hornos de microondas
- Cálculo de distribución de corriente eléctrica en materiales conductores
- Etc.
- Se aplica en regiones con o sin densidad de corriente  $J$
- Se aplica también a campos variables en  $t$

La elección de un potencial magnético vectorial es sugerida al notar que:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

Dado que la identidad vectorial mostrada en la sección anterior que indica que la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial es CERO, entonces se puede definir:

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}$$



# Potencial magnético vectorial

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}} = \text{rot } \vec{\mathbf{A}}$$

En donde se define **A** como el potencial magnético vectorial. Automáticamente se satisface la condición  $\text{div } \vec{\mathbf{B}} = 0$ . La intensidad de CM es por lo tanto:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \quad y$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \vec{A} =$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\nabla \times \underbrace{\nabla \times \vec{A}}_{\text{rot } \vec{A}}}_{\text{rot rot } \vec{A}} \neq 0$$

Qué dirección tiene A?

# Potencial magnético vectorial

El rotacional del rotacional de un campo vectorial es diferente de CERO. En general es una expresión complicada. En casos en que A es conocido, si se aplica  $\text{rot rot } \vec{A}$  permite determinar la densidad de corriente en un conductor.

$$\text{rot rot } \vec{A} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A};$$

en donde  $\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}$  cartesianas :

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \vec{a}_x + \nabla^2 A_y \vec{a}_y + \nabla^2 A_z \vec{a}_z$$

En caso de que la forma de A sea conocida, se puede aplicar dos veces el rot para obtener la densidad de corriente. Para otros sistemas de coordenadas,  $\nabla^2 \vec{A}$  se puede expresar por medio de la evaluación de las derivadas parciales de segundo orden en :

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}$$

# Potencial magnético vectorial

Dado que el rotacional es un operador que implica una derivada con respecto a la longitud, sus unidades son  $Vs/m = Wb/m$ .

Sin embargo **A** no es una cantidad fácilmente medible en un laboratorio. Lo que sí hace es contribuir a que los cálculos con campos magnéticos se hagan más sencillos.

Dada la ley de BS y la definición de **B** y la de **A**, se puede definir **A** a partir de los elementos diferenciales de corriente por:

$$\vec{A} = \oint \frac{\mu_0 IdL}{4\pi R}$$

El significado de esta ecuación es el mismo que el de la LeyBS: Un elemento diferencial de corriente  $IdL$  produce a una distancia  $R$  el valor de **A** que se debe determinar allí.

# Potencial magnético vectorial

$$\vec{A} = \oint \frac{\mu_0 I dL}{4\pi R}$$

$$V = \int \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R}$$

La diferencia entre esta expresión y la del campo electrostático es evidente cuando se compara con la siguiente:

La integral se realiza a lo largo de una fuente de carga lineal o bien a largo de una corriente lineal. Cada integrando es inversamente proporcional a la distancia desde la fuente hasta el punto de interés, Cada una involucra a la constante que tiene que ver con su naturaleza, eléctrica o magnética.

El diferencial del potencial magnético vectorial se puede escribir como:

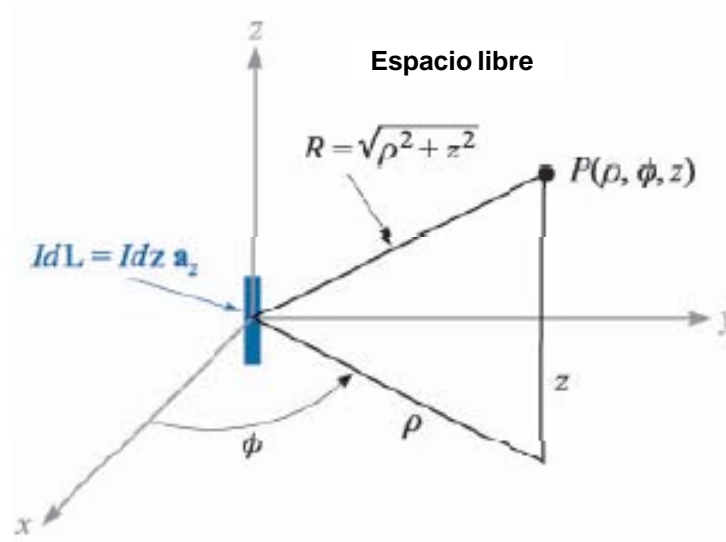
$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I dL}{4 R}$$

Esta ecuación no tiene significado físico en su ámbito de aplicación si no se considera la trayectoria como CERRADA.

# Potencial magnético vectorial

Consideremos ahora el potencial magnético vectorial causado por un elemento diferencial de corriente  $I d\mathbf{L}$  ubicado en el origen en el espacio libre. Determine  $d\mathbf{A}$  en el punto  $P(\rho, \phi, z)$  si  $d\mathbf{L} = dz \mathbf{a}_z$ :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I d\vec{L}}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I dz \vec{a}_z}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad dA_\phi = 0 \quad y \quad dA_\rho = 0$$

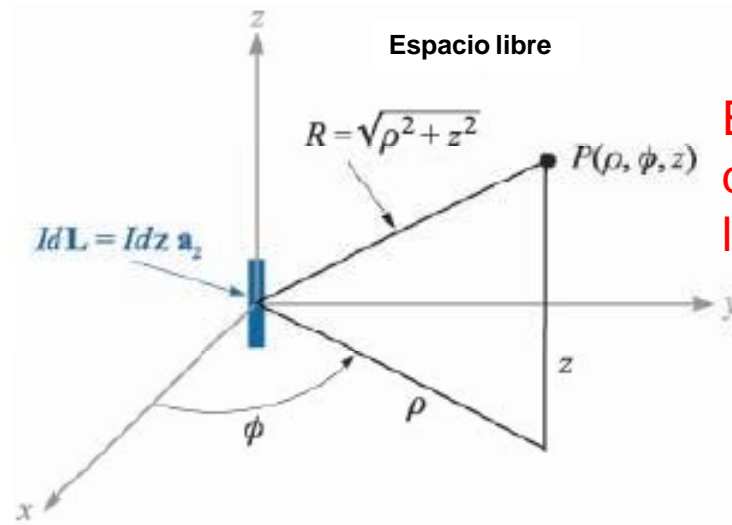


# Potencial magnético vectorial

$$\nabla \times \vec{H} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \vec{a}_\rho + \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \vec{a}_\phi + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{a}_z$$

Para encontrar  $d\vec{H}$  se necesita determinar el rot de  $d\vec{A}_z$ , que en coordenadas cilíndricas conduce a:

$$d\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\nabla \times d\vec{A}}_{\text{rot}(d\vec{A})} = \frac{1}{\mu_0} \left( - \frac{\partial dA_z}{\partial \rho} \right) \vec{a}_\phi = \frac{Idz}{4\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} \vec{a}_\phi$$



Este resultado es el mismo que se obtiene si se utiliza la LeyBS

# Potencial magnético vectorial

Para el caso de otras **fuentes distribuidas**, se puede expresar un elemento diferencial de corriente por:

$$\vec{A} = \oint \frac{\mu_0 Id\vec{L}}{4\pi R}$$

$$Id\vec{L} = \vec{K}dS \quad y$$

$$Id\vec{L} = \vec{J}dv$$

Así puede escribir el  
potencial magnético vectorial  
A para fuentes distribuidas  
como:

$$\vec{A} = \int_S \frac{\mu_0 \vec{K}dS}{4\pi R} \quad o \quad bien$$

$$\vec{A} = \int_v \frac{\mu_0 \vec{J}dv}{4\pi R}$$

# Práctica. Parte I