UTN

Universidad Técnica Nacional

Profesora: Jackeline Cascante Paniagua

FOLLETO 6

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sea F(t) una función de "t", $t > 0$. La transformada de Laplace de F(t) se denota

$\mathcal{L}\left(\mathrm{F(t)}\right) = f\,(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,F(t)\,dt$ $\qquad \mathcal{L}$: operador de Laplace

Se dice que la trasformada de Laplace existe cuando la integral converge para algún valor de "s" de otra manera se dice que no existe

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}[1]$

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}[3]$

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}\left[e^{2t}\right]$

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}\left[7t^4\right]$

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}\left[e^{-5t}\right]$

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}\left[Cosh\ 8t\right]$

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}\left[Sen\ 7t\right]$

Propiedad de linealidad

Si c_1 y c_2 son constantes $F_1(t)$ $F_2(t)$ son funciones cuyas transformadas de Laplace son respectivamente $f_1(s)$ $f_2(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\left\{c_1 F_1(t) + c_2 F_{21}(t)\right\} = c_1\ \mathcal{L}\left\{F_1(t)\right\} + c_2\ \mathcal{L}\left\{F_2(t)\right\}$$

$$= c_1\ f_1(s) + c_2\ f_2(s)$$

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}\left[e^{-4t} + 10 + \cosh(5t)\right]$

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}\left[3\cosh(2t) - 9\,senh(8t)\right]$

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}\left[10t^5 - 3t^7 + \cosh 2t + 10e^{-3t}\right]$

Ejercicios

a) Encontremos $\mathcal{L}\left[sen(8t)\right]$

b) Encontremos $\mathcal{L}\left[2\cosh(4t) - 6\,sen(3t)\right]$

c) Encontremos $\mathcal{L}\left[4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\right]$

Primer teorema de Traslación

Si $\mathcal{L}\left[F(t)\right] = f(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left[e^{at}F(t)\right] = f(s-a)$

Informalmente: *Si una función está multiplicada por un* e^{at} *significa que la transformada de Laplace debe trasladarse en a. Primero encontramos F(t) que va hacer igual a f(s)*

Ejemplo:

Obtener $\mathcal{L}\left[e^{4t}\cosh(8t)\right]$

Ejemplo:

Obtener $\mathcal{L}\left[e^{2t}\,t^{3}\right]$

Ejemplo:

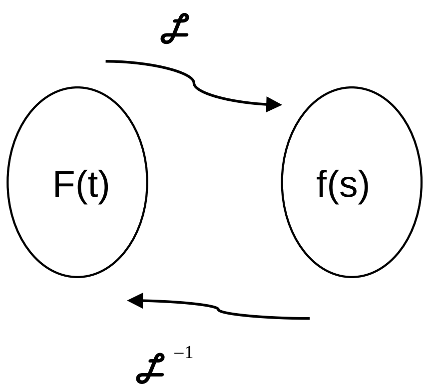
Obtener $\mathcal{L}\left[e^{-6t}\,t\right]$

Ejemplo:

Obtener $\mathcal{L}\left[e^{-t}\cos(2t)\right]$

Transformada de Laplace inversa

$\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$ *se lee transformada inversa de Laplace*



Ejemplo:

Obtener las siguientes transformadas inversas

a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+9}\right]$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{8}{s^{10}}\right]$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+10}-\frac{1}{s-3}\right]$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+10}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

$$\underbrace{4\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+10}\right]}-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

Se parece $\text{Sen } at = \frac{a}{s^2+a^2}$ pero necesito $\sqrt{10}$

$$4\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{10}}{(s^2+10)\cdot\sqrt{10}}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

$$\frac{4}{\sqrt{10}}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{10}}{(s^2+10}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

$$\frac{4}{\sqrt{10}}\,\text{Sen}\,(\sqrt{10}\,t)-e^{3t}\ /\!/$$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s^2 - 2s - 15}\right]$

$$\frac{2}{\cancel{(s-5)(s+3)}} = \frac{A}{(s-5)} + \frac{B}{(s+3)}$$

$s^2 - 2s - 15$

$$\begin{array}{cc} s & -5 \\ s & 3 \end{array}$$

$$= \frac{A(s+3) + B(s-5)}{\cancel{(s-5)(s+3)}}$$

$$2 = As + 3A + Bs - 5B$$

$$A + B = 0$$
$$3A - 5B = 2$$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{-1}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{(s-5)} + \frac{B}{(s+3}\right]$$

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-5}\right] - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]$$

$$\frac{1}{4}e^{5t} - \frac{1}{4}e^{-3t}$$

e) Determinar $L^{-1}\left\{ \dfrac{2s^2+15s+7}{(s+1)^2(s-2)} \right\}$

$$\frac{2s^2+15s+7}{(s+1)^2(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s-2)}$$

$$= \frac{A(s+1)(s-2) + B(s-2) + C(s+1)^2}{(s+1)^2(s-2)}$$

$$2s^2+15s+7 = A(s^2-2s+s-2) + Bs - 2B + C(s^2+2s+1)$$

$$2s^2+15s+7 = As^2 - As - 2A + Bs - 2B + Cs^2 + 2Cs + C$$

$$A + C = 2$$
$$-A + B + 2C = 15$$
$$-2A - 2B + C = 7$$

$A = -3 \qquad B = 2 \qquad C = 5$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-3}{(s+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{(s-2)}\right]$$

$$-3\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] + 5\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)}\right]$$

$$-3e^{-t} + 2te^{-t} + 5e^{2t}$$

Ejemplo: Hallar $L^{-1}\left\{\dfrac{s-3}{s^2+2s+5}\right\}$

Completando cuadrados:

$$s^2+2s+5+1-1$$
$$(s^2+2s+1)+4$$
$$(s+1)^2+4$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s+1)^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1-1-3}{(s+1)^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)-4}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{(s+1)^2+4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+1)^2+4}\right\}$$ "Hay traslación"

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$e^{t}\operatorname{Cos} 2t - 2e^{-t}\operatorname{Sen} 2t \quad //$$

Ejemplo:

Calcular $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-3)^4}\right\}$

Ejemplo Evaluar $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+2)^2}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2}\right\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)}{(s+2)^2}\right\} - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\} - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} \Rightarrow \text{"hay traslación"}$$

$$e^{-2t} - 2te^{-t} \quad //$$

Ejemplo:

Evaluar $L^{-1}\left\{ \dfrac{s+2}{s^2-6s+34} - \dfrac{s+1}{(s-3)^5} \right\}$

Ejemplo: Hallar $L^{-1}\left\{ \dfrac{s-3}{s^2+2s+5} \right\}$

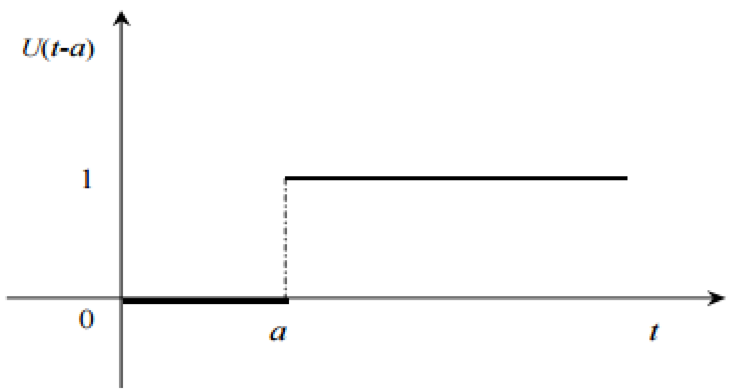
FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO O FUNCIÓN DE HEAVISIDE

Se define como:

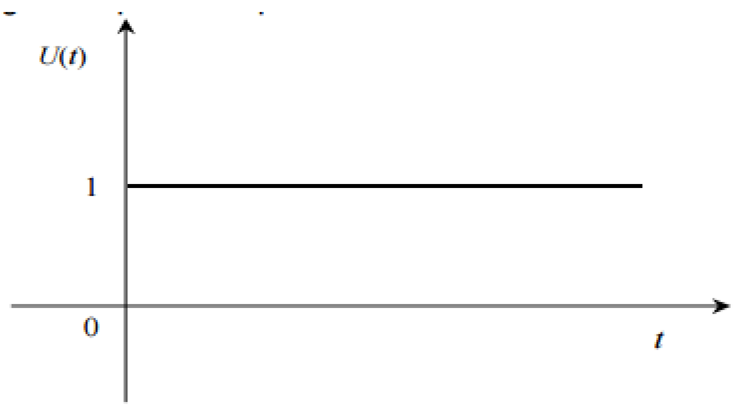
$$U_a(t) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0 & t \leq a \end{cases} \qquad \forall\ a \geq 0$$

$$U(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

"a" indica el desplazamiento



Por otra parte, si a=0, entonces se tiene que $U(t)=1,\ t \geq 0$. Para este caso particular, la gráfica que corresponde es:



Ejemplo: Trazar las gráficas $U\left(t-2\right)$ $U\left(t-5\right)$

Ejemplo: Grafique

$U_4(t) =$

Trasformada de Laplace de la función escalón

$$\mathcal{L}\left[U_a(t)\right] = \frac{e^{-as}}{s}$$

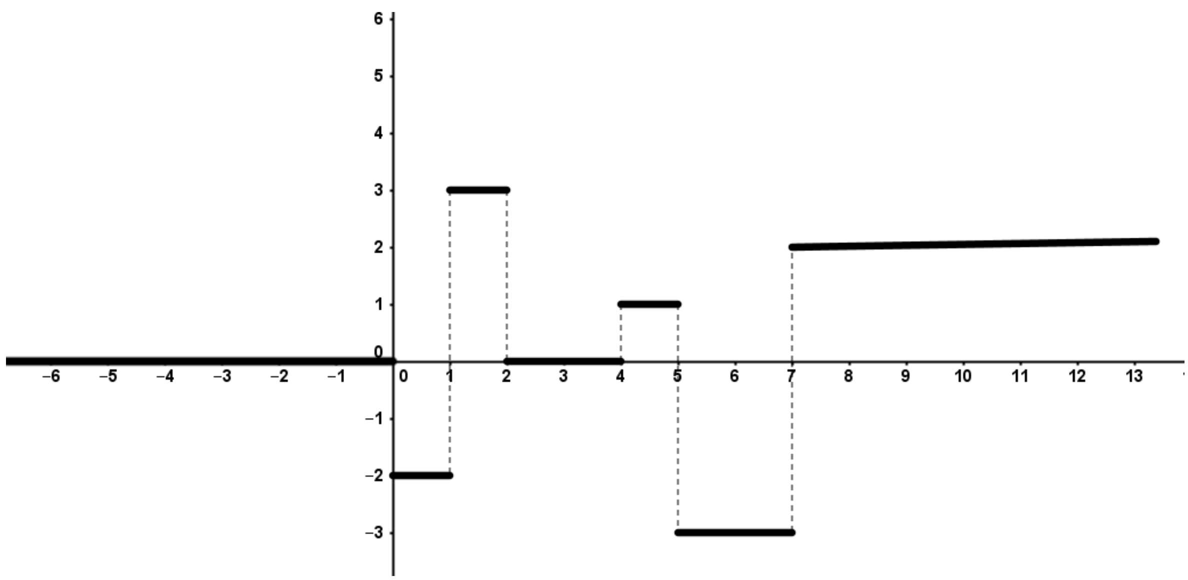
Ejemplo:

Calcule:

a) $\mathcal{L}\left[2U_4(t)\right]$

b) $\mathcal{L}\left[U_0(t)\right]$

Ejemplo: Obtener a) $\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ de la siguiente gráfica:



Segundo teorema de traslación

$$\mathcal{L}\left[f\ (t-a)\ \mu_a(t)\right] = e^{-as}\ F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}\ F(s)\right] = f\ (t-a)\ \mu_a(t)$$

Una consecuencia directa sería

$$\mathcal{L}\left[f\ (t)\ \mu_a(t)\right] = e^{-as}\ \ \mathcal{L}\left\{f\left(t+a\right)\right\}$$

Ejemplo: Calcule

1) $\mathcal{L}\left[\ (t-1)^3 U_1(t)\ \right]$

$\mathcal{L}\ \{(t-1)^3 \cdot \mathcal{U}_1(t)\}$

$\mathcal{L}\ \{(t-1)^3 \cdot \mathcal{U}(t-1)\}$ $\qquad \mathcal{L}\ \{t^3 \cdot \mathcal{U}(t)\}$ $\qquad F(t) = t^3$

$\mathcal{L}\ \{t^3 \cdot \mathcal{U}(t)\}$

$$e^{-s} \cdot \frac{3!}{s^4} = \frac{6e^{-s}}{s^4}$$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-3s}}{s^2-2s+2}\right]$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2-2s+2}\right\}$$

s^2-2s+2

$s^2-2s+1+2-1$

$(s-1)^2+1$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\cdot\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)^2+1}=\frac{1}{s^2+1}$$

$$F(t)=e^{t}\,\text{Sen}\,t$$

$$\Rightarrow F(t-3)=e^{t-3}\,\text{Sen}\,(t-3)$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_3(t)\,e^{t-3}\,\text{Sen}\,(t-3)$$

//

3) $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\,\dfrac{s}{s^2+5}\right]$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\cdot\frac{s}{s^2+5}\right\}$$

$$F(s)=\frac{s}{s^2+5}$$

$$F(t)=\cos(\sqrt{5}t)$$

$$F(t-2)=\cos(\sqrt{5}(t-2))$$
$$F(t-2)=\cos(\sqrt{5}t-2\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_2(t)\cos(\sqrt{5}t-2\sqrt{5})$$

4) $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s}\,\dfrac{(s-3)}{(s-3)^2+6}\right]$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\cdot\frac{(s-3)}{(s-3)^2+6}\right\}$$

$$f(s)=\frac{(s-3)}{(s-3)^2+6}$$ "hay traslación"

$$=\frac{s}{s^2+6}$$

$$= e^{3t} \cdot \cos(\sqrt{6}t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_1(t)\, e^{3(t-1)} \cdot \cos(\sqrt{6}(t-1))$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_1(t)\, e^{3(t-1)} \cos(\sqrt{6}t-\sqrt{6})$$ //

5) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-4s}}{(s+8)^3}\right]$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{(s+8)^3}\right\}$$

$f(s) = \dfrac{1}{(s+8)^3}$ Sin traslación sería: $f(s) = \dfrac{1}{s^3} = \dfrac{2!}{s^3 \cdot 2!}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}t^2$

$$\Rightarrow F(t) = e^{-8t} \cdot \frac{1}{2}t^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_4(t)\, e^{-8(t-4)} \cdot \frac{1}{2}(t-4)^2$$

Si escribo la función inversa sin la escalón quedaría

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{(s+8)^3}\right\} = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < 4 \\ e^{-8(t-4)} \cdot \frac{1}{2}(t-4)^2 & , \quad t \geq 4 \end{cases}$$

Teorema de la derivada de la Transformada de Laplace

Si $\mathcal{L}(\mathrm{F(t)}) = f\,(s) \Rightarrow \frac{-d}{ds} F\,(s) = \mathcal{L}\;(\mathrm{t\;\;F(t)})$

Podemos encontrar cualquier $\mathcal{L}$ acompañada de la función $t,\; t^2, \ldots.., t^n$

Informalmente: Vemos quien es $\mathcal{L}\;(\mathrm{F(t)})$

La "t" lo que implica son las veces que tengo que derivar con respecto a "s"

Ejemplo: Encontremos

$\mathcal{L}[t\;\;sen\;t]$

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}\left[t^{2}\ sen\ t\right]$

Ejemplo: Encontremos $\mathcal{L}\left[e^{3t}\ t\ \cos(3t)\right]$

La función escalón sirve para reescribir funciones a trozos en una sola función. A continuación se presenta la forma de hacerlo:

$$f(t)=\begin{cases} g(t) & a\le t<b \\ h(t) & b\le t<c \\ k(t) & c\ \ge 5 \end{cases}$$

$$f(t)=g(t)\,\mu_a(t)+\left[h(t)-g(t)\right]\mu_b(t)+\left[k(t)-h(t)\right]\mu_c(t)$$

Ejemplo:

Dada la función $g(t)=\begin{cases} 0, & t \le 2\pi \\ sent & t > 2\pi \end{cases}$. Escriba la función escalón unitaria y encuentre la trasformada de Laplace

$$g(t) = 0 \cdot \mathcal{U}_0(t) + [\operatorname{Sen} t - 0] \cdot \mathcal{U}_{2\pi}(t)$$

$$g(t) = \mathcal{U}_{2\pi}(t) \operatorname{Sen} t$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\operatorname{Sen} t \cdot \mathcal{U}_{2\pi}(t)\}$$

$$= \mathcal{L}\{\operatorname{Sen}(t+2\pi) \cdot \mathcal{U}_{2\pi}(t)\}$$ Seno tiene periodo $\pm 2\pi$

$$= e^{-2\pi s} \cdot \mathcal{L}\{\operatorname{Sen} t\}$$

$$= e^{-2\pi s} \cdot \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} \quad //$$

Ejemplo

La función $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{si } 0\le t<2 \\ 2t-6 & \text{si } 2\le t<3 \\ 0 & \text{si } t\ge 3 \end{cases}$$

Evaluar $L\{f(t)\}$

$$f(t) = t\cdot \mathcal{U}_0(t) + (2t-6-t)\cdot \mathcal{U}_2(t) + (0-2t+6)\cdot \mathcal{U}_3(t)$$

$$f(t) = t\cdot \mathcal{U}_0(t) + (t-6)\cdot \mathcal{U}_2(t) + (-2t+6)\cdot \mathcal{U}_3(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\cdot \mathcal{U}_0(t)\} + \mathcal{L}\{(t-6)\cdot \mathcal{U}_2(t)\} + \mathcal{L}\{(-2t+6)\cdot \mathcal{U}_3(t)\}$$

$\rightarrow \mathcal{L}\{t\cdot \mathcal{U}_0(t)\}$ $\qquad \rightarrow \mathcal{L}\{\mathcal{U}_0(t)\} = \frac{1}{s}$

↳ derivo una vez.

cambio signo

$\rightarrow \mathcal{L}\{t\cdot \mathcal{U}_0(t)\} = -\frac{-1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$

$$\mathcal{L}\{(t-6)\cdot \mathcal{U}_2(t)\} = \mathcal{L}\{t\cdot \mathcal{U}_2(t)\} - 6\,\mathcal{L}\{\mathcal{U}_2(t)\}$$

↳ derivo una vez.

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}_2(t)\} = \frac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow \text{derivo} \rightarrow \frac{-2e^{-2s}\cdot s - e^{-2s}\cdot 1}{s^2}$$

$$\rightarrow -\frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} \quad \text{Cambio signo}$$

$$\mathcal{L}\{t\cdot \mathcal{U}_2(t)\} \rightarrow \frac{2}{s}e^{-2s} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}\{(t-6)\cdot \mathcal{U}_2(t)\} = \frac{2}{s}e^{-2s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{6}{s}e^{-2s} = -\frac{4}{s}e^{-2s} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\cdot \mathcal{U}_0(t)\} + \mathcal{L}\{(t-6)\cdot \mathcal{U}_2(t)\} + \mathcal{L}\{(-2t+6)\cdot \mathcal{U}_3(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s} - \frac{2}{s^2}e^{-3s} \quad //$$

Práctica

Resuelva las transformadas de Laplace, utilizando los teoremas

1) $\mathcal{L}\{\operatorname{Sen} 2t + \operatorname{Cos} 2t\}$ R/ $\frac{2}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4}$

2) $\mathcal{L}\{t^2 + 6t - 3\}$ R/ $\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{3}{s}$

3) $\mathcal{L}\{(1+e^{2t})^2\}$ R/ $\frac{1}{s} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-4}$

4) $\mathcal{L}\{e^{2t}\operatorname{Cos} 2t\}$ R/ $\frac{s-2}{s^2-4s+8}$

5) $\mathcal{L}\{e^{t}\operatorname{Sen} 3t\}$ R/ $\frac{3}{(s-1)^2+9}$

6) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$ R/ $\frac{1}{2}t^2$

7) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$ R/ $\frac{1}{6}t^3$

8) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{48}{s^5}\right\}$ R/ $t + 2t^4$

9) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}-\frac{1}{s^3}\right\}^2$ R/ $4t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{120}t^5$

10) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-2}\right\}$ R/ $t-1+e^{2t}$

11) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$ R/ $\frac{5}{7}$ Sen $7t$

12) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2+16}\right\}$ R/ 10 Cos $4t$

13) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$ R/ 2 Cos $3t - 2$ Sen $3t$

14) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s-2)(s-3)(s-6)}\right\}$ R/ $\frac{1}{2}e^{2t}-e^{3t}+\frac{1}{2}e^{6t}$

15) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$ R/ $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$ Cos $2t$

16) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right\}$ R/ $2e^{2t}$Cos $4t+\frac{7}{4}e^{2t}$Sen $4t$