Capítulo 5:

Corriente eléctrica y conductores

Densidad de corriente

Corriente eléctrica = movimiento de cargas eléctricas positivas en el tiempo.
I = 1 A ≡ Flujo de una carga de 1 C por segundo, o sea, $6{,}24 \cdot 10^{18}$ electrones / segundo

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

En la “Teoría de Campo” interesan siempre lo que ocurre en un punto específico de una región. Dado que generalmente la magnitud de la corriente eléctrica no es constante en todo el volumen de cuerpos conductores, se define convenientemente el vector densidad de Corriente **J** en A/m².

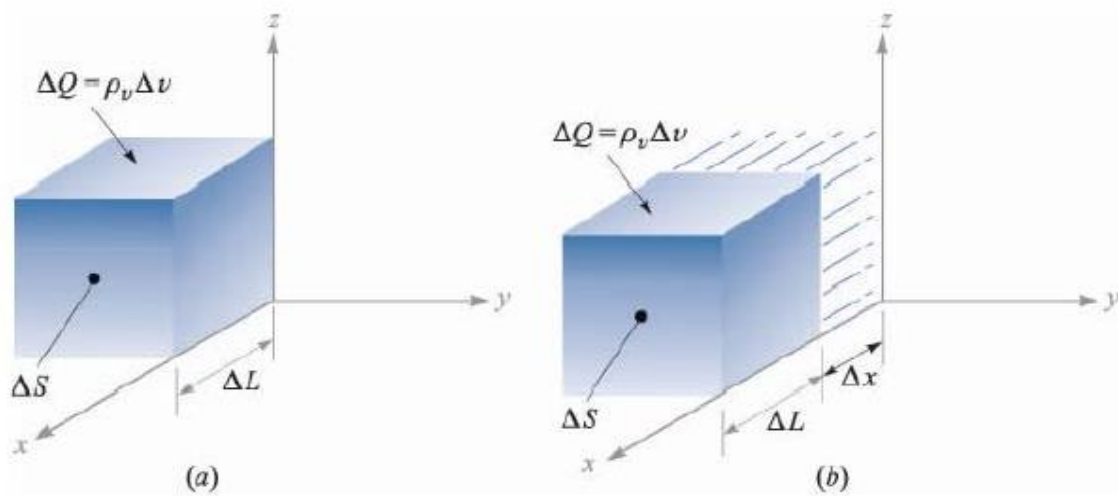
Un cierto monto de corriente ΔI que atraviesa una superficie ΔS normal a la densidad de corriente es:

$$\Delta I = J_N \Delta S \quad \textbf{o bien si el } \vec{\mathbf{J}} \textbf{ no es ortogonal con } \Delta\vec{\mathbf{S}}: \quad \Delta I = \vec{J} \cdot \Delta\vec{S}$$

$$\textbf{y la corriente total se obtiene:} \quad \mathbf{I} = \int_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

Densidad de corriente

La densidad de corriente se puede relacionar con la velocidad de una densidad carga volumétrica en cualquier punto:



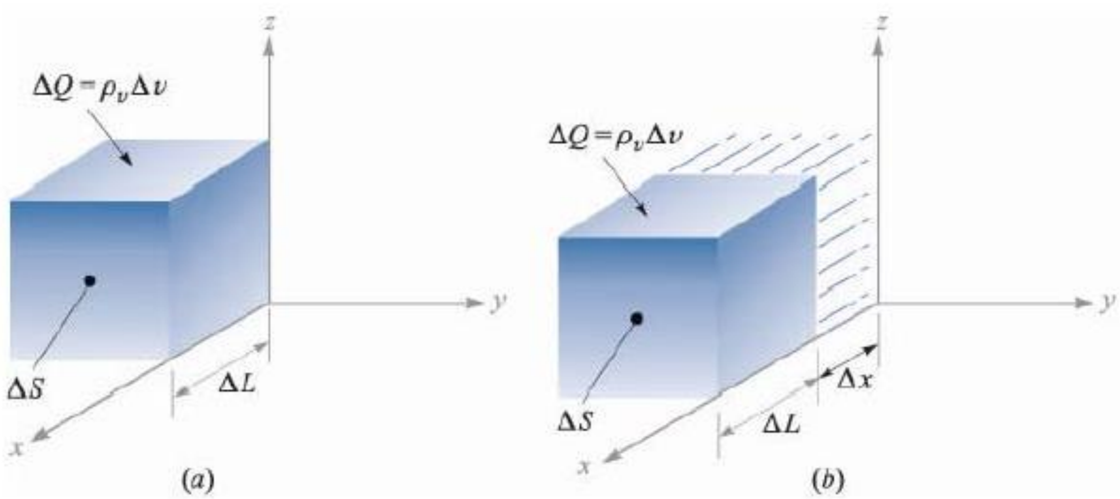
Una cantidad diferencial de carga $\Delta Q = \rho_V \Delta v = \rho_V \Delta S\, \Delta L$ que barre una distancia Δx en un tiempo Δt desplaza una carga $\Delta Q = \rho_V \Delta S \Delta x$ a través del plano indicado. La corriente que ha fluido en ese intervalo de tiempo es:

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \frac{\Delta x}{\Delta t}$$ si se toma el límite con respecto al tiempo:

$$\Delta I = \rho_v \Delta S v_x$$ en donde v_x representa la componente x de la velocidad v

Densidad de corriente

La densidad de corriente se puede relacionar con la velocidad de una densidad carga volumétrica en cualquier punto:



En términos de la densidad de corriente

$$Jx = \rho_v v_x$$

y en forma más general:

$$\vec{J} = \rho_v \vec{v}$$

Densidad de corriente

$$\vec{J} = \rho_v \vec{v}$$

Esta ecuación muestra claramente en forma matemática, lo que ya se definió anteriormente: Que cargas en movimiento constituyen una corriente eléctrica. A este tipo de corriente eléctrica se le denomina corriente por convección, conducción o por arrastre.

Corrientes o flujos por convección, conducción o por arrastre se presentan cuando existe una fuente de energía que causa ese flujo de partículas. (Fuentes térmicas, de luminosidad, eléctricas, de campo magnético, de campo eléctrico, etc.)

Cuáles son los otros tipos de corriente eléctrica que se conocen en la Electrotecnia?

Densidad de corriente

$$\vec{J} = \rho_v \vec{v}$$

Cuáles son los otros tipos de corriente eléctrica que se conocen en la Electrotecnia?

Corriente de difusión (Junta PN)

y corriente de desplazamiento

$$rot\,\vec{H} = \nabla \mathbf{x} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Densidad de corriente

Si $\mathbf{J} = 10\, r^2 z\, \mathbf{a}_r - 4r\cos^2\varphi\, \mathbf{a}_\varphi$:

a) Calcule la densidad de corriente J(P) si P = (3m, 30°,2m)
b) b) Calcule el valor de la corriente total que fluye a través (ortogonalmente) de la banda circular: (3m, $0<\varphi<2\pi$, $2<z<2,8$m)

Ecuación de continuidad de la corriente eléctrica

La ecuación de continuidad de la corriente:
Principio de conservación de la carga:

Las cargas eléctricas no se pueden crear ni destruir! (Sin embargo se pueden crear o desaparecer simultáneamente cantidades iguales de cargas positivas y negativas, por separación, recombinación o por destrucción, e.d. transformación en otro tipo de energía)

La ecuación de continuidad de la corriente se basa en este principio cuando se considera una región limitada por una superficie cerrada La corriente que fluye a través de la superficie cerrada (hacia fuera) es:

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Este flujo debe ser equilibrado por una disminución de cargas positivas o por un aumento de cargas negativas dentro de la superficie cerrada

Ecuación de continuidad de la corriente eléctrica

Si la carga dentro de esta área se denomina Q_i, la razón de cambio con que disminuye se expresa como $-dQ_i/dt$ y el principio de conservación de la carga exige que:

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQi}{dt}$$

Esta expresión se denomina como la forma integral de la ecuación de continuidad de la corriente eléctrica.
La forma diferencial se obtiene aplicando el teorema de la divergencia:

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_v \nabla \cdot \vec{J} dv = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_v \rho_v dv}_{Q_i}$$

Ecuación de continuidad de la corriente eléctrica

Si la superficie no varía (el radio de una esfera que forma esta superficie se mantiene constante), la derivada se convierte en una derivada parcial y la expresión adquiere la forma:

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_v \nabla \cdot \vec{J} dv = -\int_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

Y dado que esta expresión es válida para cualquier volumen por pequeño que sea, es válida también para cualquier incremento pequeño de volumen ΔV:

$$(\nabla \cdot \vec{J})\,\Delta v = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\Delta v$$

Y de esta expresión se obtiene la forma puntual de la ecuación de la continuidad:

$$(\nabla \cdot \vec{J}) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Ecuación de continuidad de la corriente eléctrica

$$\underbrace{(\nabla \cdot \vec{J})\,\Delta v}_{I} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\,\Delta v$$

$$\underbrace{\nabla \cdot \vec{J}}_{A/m^3} = -\underbrace{\frac{\partial \rho_v}{\partial t}}_{A/m^3}$$

Interpretación física:

La corriente eléctrica (o la carga eléctrica por unidad de tiempo) que sale de un volumen pequeño por unidad de volumen es igual a la razón de cambio con la que la carga eléctrica decrece en el tiempo por unidad de volumen en cada punto.

Ejemplo sobre la ecuación de continuidad de la corriente eléctrica

Se tiene una densidad de corriente en una esfera con dirección radial la cual decrece en forma exponencial con el tiempo:

$$\vec{J} = \frac{1}{r} e^{-t} \vec{a}_r \quad A/m^2$$

De desea calcular la corriente total que fluye hacia fuera en t = 1 s en una distancia r = 5m

$$I = J_r S = (\frac{1}{5} e^{-1})(4\pi 5^2) = 23{,}1A$$

En ese mismo instante y con un radio mayor r = 6m, fluye una corriente:

$$I = J_r S = (\frac{1}{6} e^{-1})(4\pi 6^2) = 27{,}7\,A \quad ???????$$

Ecuación de continuidad de la corriente eléctrica

Así la corriente eléctrica total es mayor para r = 6 m que para r = 5 m en el mismo instante. Cómo se entiende esto????

Para intentar comprender esto se necesita obtener una expresión para analizar lo que ocurre con la velocidad de cambio de la densidad de carga volumétrica. Calculemos primero la densidad volumétrica de carga ρ_v:

$$-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \underbrace{(\nabla \cdot \vec{J})}_{div\vec{J}} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{r} e^{-t} \vec{a}_r\right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \underbrace{\frac{1}{r} e^{-t}}_{\vec{J}_r}\Big) = \frac{1}{r^2} e^{-t}$$

$$-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{1}{r^2} e^{-t}$$

Ecuación de continuidad de la corriente eléctrica

$$-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{1}{r^2} e^{-t}$$

La densidad de carga volumétrica se calcula integrando con respecto al tiempo:

$$-d\rho_v = \frac{1}{r^2} e^{-t} dt$$

$$\rho_v = -\int \frac{1}{r^2} e^{-t} dt = \frac{1}{r^2} e^{-t} + K(r)$$

Con condiciones iniciales conocidas, p.ej. para $r \to \infty$ la densidad $\rho_v \to 0$ (porque el cuerpo no tiene dimensiones infinitas) y por lo tanto la constante $K(r \to \infty) = 0$

$$\rho_v = \frac{1}{r^2} e^{-t} \quad \frac{C}{m^3}$$

Ecuación de continuidad de la corriente eléctrica

$$\vec{J} = \frac{1}{r} e^{-t} \vec{a}_r \quad A/m^2 \qquad \rho_v = \frac{1}{r^2} e^{-t} \quad \frac{C}{m^3}$$

Si se calcula ahora la velocidad de los portadores de carga:

$$\vec{v}_r = \frac{\vec{J}_r}{\rho_v} = \frac{1}{r} e^{-t} \vec{a}_r \frac{A}{m^2} \cdot r^2 e^{t} \frac{m^3}{C} = r\, \vec{a}_r \quad en \quad \frac{m}{s}$$

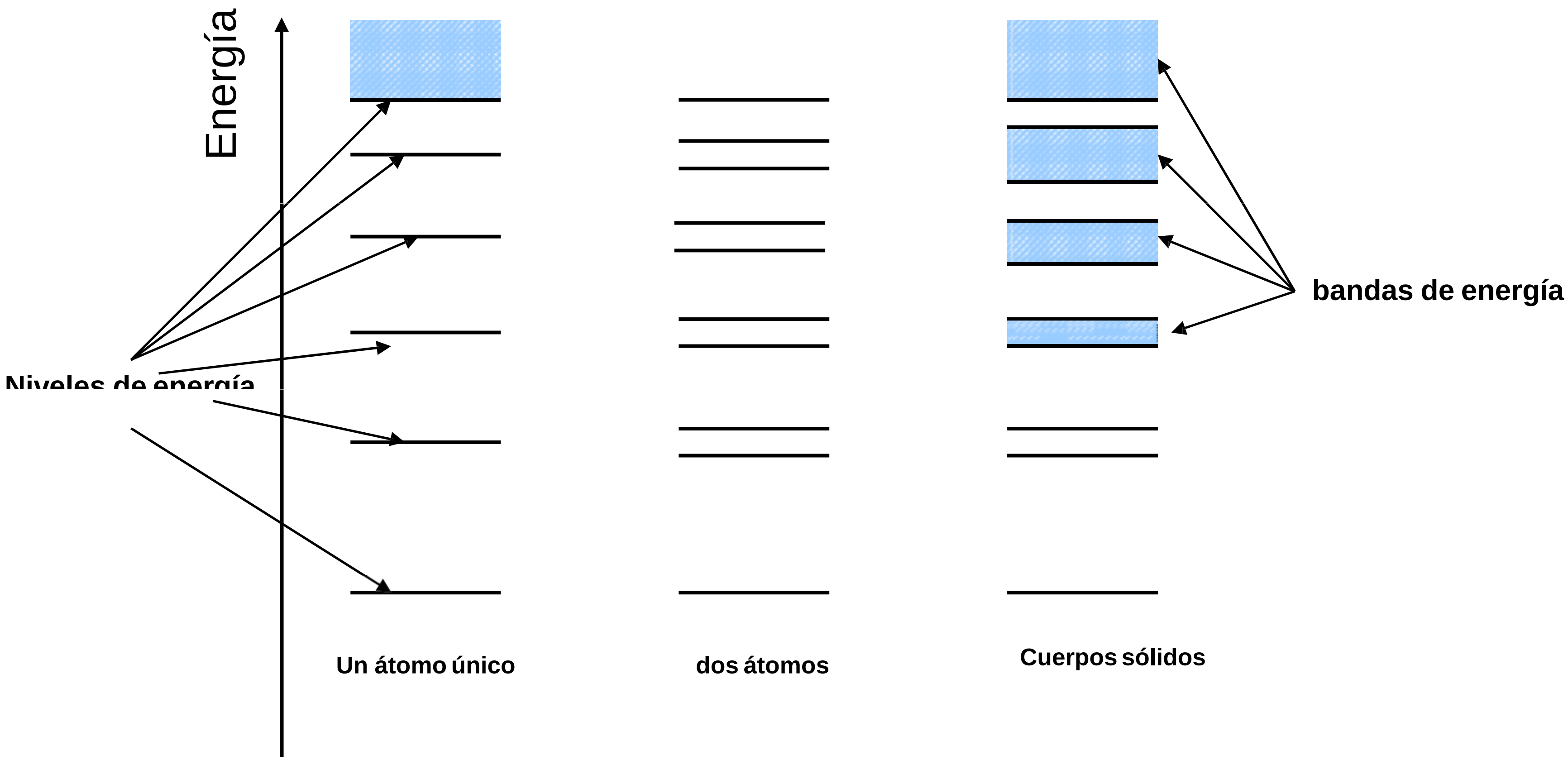
La velocidad aumenta en función del radio. Para radios mayores la velocidad es mayor y alguna fuerza no especificada está acelerando las partículas portadoras de carga!!!!

Moraleja: Un campo

$$\vec{J} = \frac{1}{r} e^{-t} \vec{a}_r \quad A/m^2$$

no es físicamente posible excepto tal vez para cuerpos celestes como estrellas !!!

Modelo de Bandas de Energía

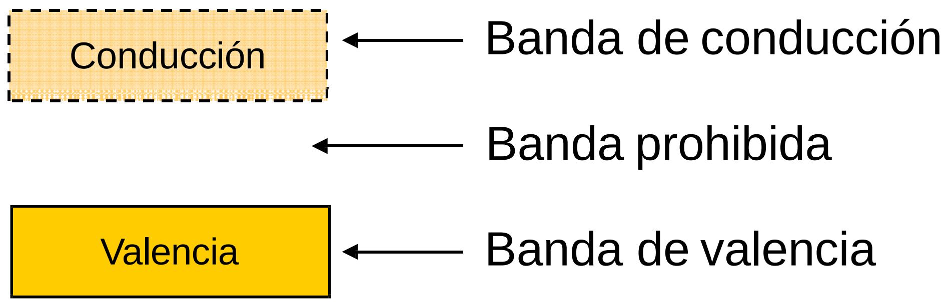


Para las características eléctricas son relevantes sólo dos bandas: la penúltima banda totalmente llena de electrones (banda de valencia) y la última banda parcialmente llena o vacía, llamada banda de conducción.

Modelo de Bandas de Energía

- Cuando los átomos se aproximan unos a otros, los niveles de energía se desdoblan formando bandas de energía$\rightarrow$ Principio de Exclusión de Pauli

–**Bandas:** conjunto de niveles de energía atómicos (regiones de probabilidad de encontrar al electrón)

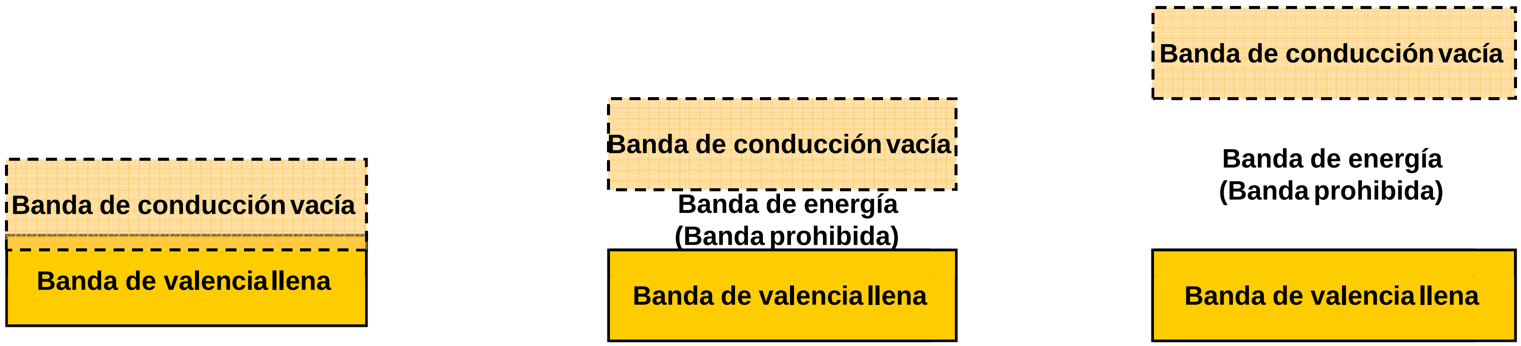


- **Banda de valencia:** nivel de energía más alto que está lleno a T = 0 K; electrones no participan en conducción
- **Banda prohibida:** banda de estados prohibidos para el electrón, energía necesaria para mover un electrón de la banda de valencia a la banda de conducción
- **Banda de conducción:** nivel de energía separado de la banda de valencia por la banda prohibida; electrones participan en conducción

Clasificación de Materiales por su características eléctricas

- Clasificación de acuerdo con propiedades eléctricas
- **Estructura de bandas del material define propiedades eléctricas, ópticas, químicas, térmicas, etc, del material**

Conductores | Semiconductores | Aislantes



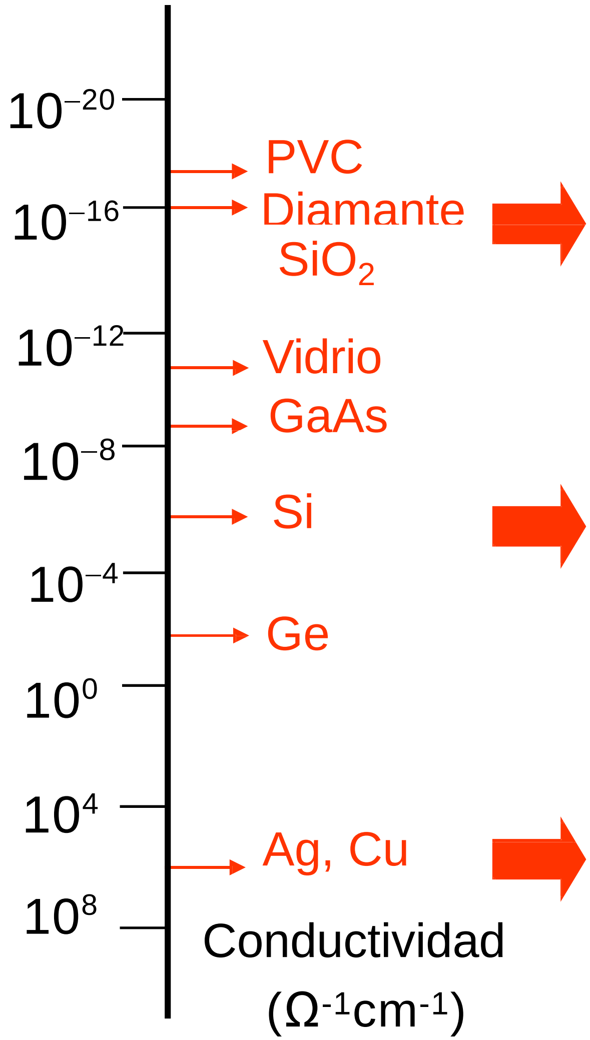
- Traslape de bandas
- Banda prohibida no existe
- Plata, Cobre, Oro, Aluminio

(Orden según calidad de conductores)

- Banda prohibida (1-3 eV)
- Silicio, Germanio, compuestos como GaAs, InP

- Banda prohibida (8-9 eV)
- Diamante, óxido de silicio (SiO_2), nitruro de silicio (Si_3N_4)

Clasificación de Materiales por su características eléctricas



Aislantes:

- electrones fuertemente ligados al núcleo
- muy alta resistencia
- Ej: banda prohibida del $SiO_2 \approx$ 8eV, del diamante (5,46 – 6,4eV)

Semiconductores:

- enlaces covalentes
- la resistencia puede disminuirse por medio de dopado
- Ej: banda prohibida del Silicio Si = 1,12eV, del Germanio Ge = 0,67eV

Conductores:

- electrones débilmente ligados al núcleo
- baja resistencia
- Ej: Ag, Cu, Au,Al

*Nota: 1eV= $1{,}6\times10^{-19}$J

Conductores metálicos

En los conductores, los electrones de valencia o de conducción se mueven bajo la influencia de un campo eléctrico. Cada electrón experimenta una fuerza:

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

En el vacío el electrón se acelera incrementando su velocidad y energía cinética
En un metal con estructura cristalina, el electrón **choca frecuentemente contra el resto de la estructura cristalina de la red que está térmicamente excitada** logrando tan sólo una velocidad media de avance dentro de esa red.
A esa velocidad se le denomina **velocidad de arrastre (drift velocity)** y su relación con el campo eléctrico se establece por medio del **coeficiente de movilidad del electrón** en dicho material. La movilidad se designa con la letra **μ** y es positiva por definición:

$$\vec{v}_d = -\mu_e\vec{E}$$ (velocidad **v** opuesta a **E)**

μ_e (Ag) =56; μ_e (Cu) =32; μ_e (Au) =48,4 ; μ_e (Al) =12; todos en cm^2/ Vs

Conductores metálicos

Todos estos buenos conductores tienen velocidades de arrastre relativamente bajas (algunos cm/s) y esto basta para aumentar la temperatura hasta extremos de llevarlo a fusión si no se evacua la temperatura que producen por algún medio disipativo de calor.

Tomando en cuenta la expresión de la densidad de la corriente en función de la velocidad, la densidad de corriente se expresa entonces por:

$$\vec{J} = \rho_v \vec{v} \qquad J = -\rho_e \underbrace{\mu_e E}_{\vec{v}_d}$$

ρ_e = Densidad de carga de los electrones libres (con valor negativo por definición)
ρ_v es cero porque los elementos son neutros.

La relación entre J y E para un conductor metálico se puede especificar por medio de la conductividad σ dada en S/m.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Corriente de Arrastre* para semiconductores

$$J_{drift} = \sigma \cdot E$$

J: densidad de corriente de arrastre
σ: conductividad
E: campo eléctrico

$$\sigma = (qn\mu_e + qp\mu_h)$$

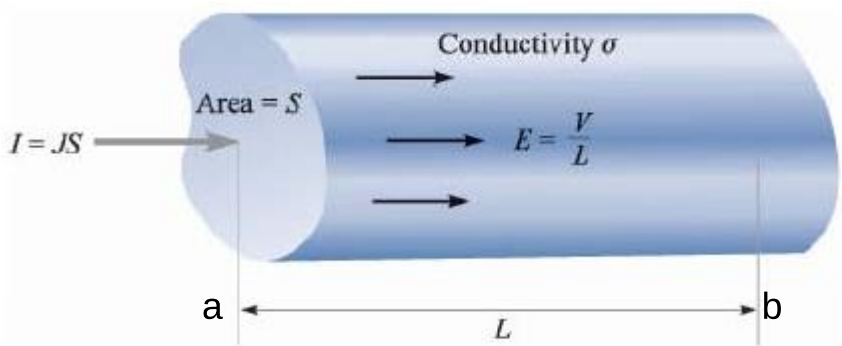
q: carga del electrón
n: concentración del portador de carga
μ_e: movilidad del portador de carga (electrones)
μ_h: movilidad del portador de carga (huecos)

$$J_{drift} = (qn\,\mu_e + qp\,\mu_h)E$$

μ_e (Ag) =56; μ_e (Cu) =32; μ_e (Au) = 48,4 ; μ_e (Al) =12; μ_e (Si puro o intrínseco) = 1200; μ_h (Si puro o intrínseco) = 250; μ_e (Ge puro o intrínseco) = 3600; μ_h (Ge puro o intrínseco) = 1700; todos en cm^2/Vs

***En inglés: drift current.**
Algunas veces traducido como corriente de desplazamiento o corriente de deriva, sin embargo, corriente de desplazamiento se refiere a la variación de densidad de flujo en materiales aislantes

Conductores metálicos



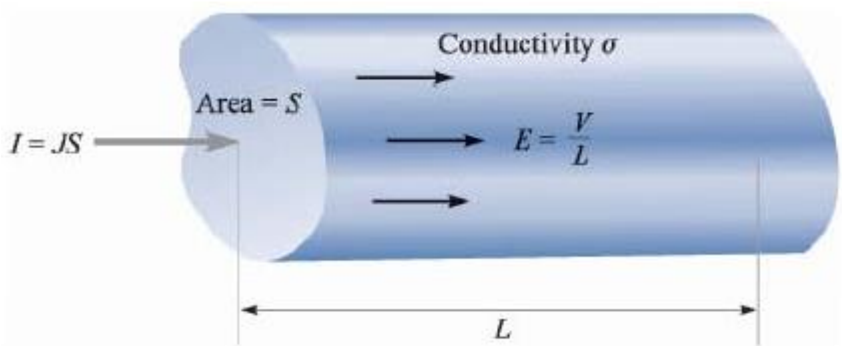
Ejemplo de aplicación en un conductor con campo eléctrico uniforme:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = JS$$

$$V_{ab} = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\vec{E} \cdot \int_b^a d\vec{L} = -\vec{E} \cdot \vec{L}\Big|_b^a = \vec{E} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{E} \cdot \vec{L}_{ab}$$

$$V_{ab} = \vec{E} \cdot \vec{L}_{ab}$$

Conductores metálicos



Ejemplo de aplicación en un conductor con campo eléctrico uniforme:

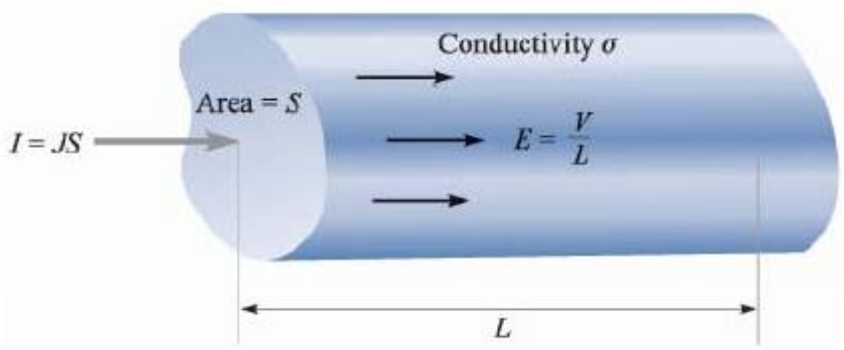
$$J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L}$$

o bien:

$$V = E \cdot L$$

$$V = \underbrace{\frac{L}{\sigma S}}_{R} I = I\,R \quad en\ donde \quad R = \frac{L}{\sigma S}$$

Ley de Ohm en forma integral



Si el campo magnético no es uniforme:

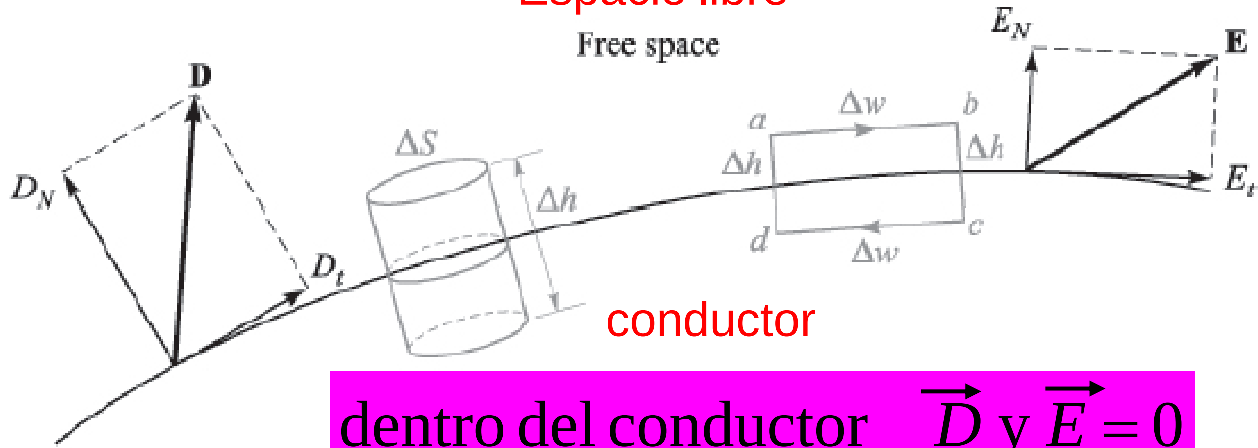
$$R = \frac{V_{ab}}{I}$$

$$R = \frac{-\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{L}}{\int_S E \; d\vec{S}}$$

Condiciones de frontera

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

Espacio libre



dentro del conductor $\vec{D}$ y $\vec{E} = 0$

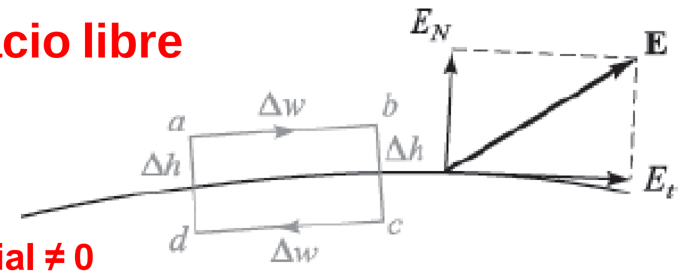
Carga superficial ≠ 0

El campo tangencial se determina aplicando la propiedad conservativa para campos eléctricos estáticos:

$$V = \oint_c \vec{E} \cdot \vec{dL} = 0$$

Condiciones de frontera: campo tangencial

Espacio libre



Carga superficial ≠ 0

conductor

dentro del conductor $\vec{D}$ y $\vec{E} = 0$

$$V = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$

$$V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{L} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{L} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{L} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$

$$V = E_t \Delta w - E_N(b) \underbrace{\frac{\Delta h}{2}}_{\approx 0} - \underbrace{E_t}_{0} \Delta w + E_N(a) \underbrace{\frac{\Delta h}{2}}_{\approx 0} = 0$$

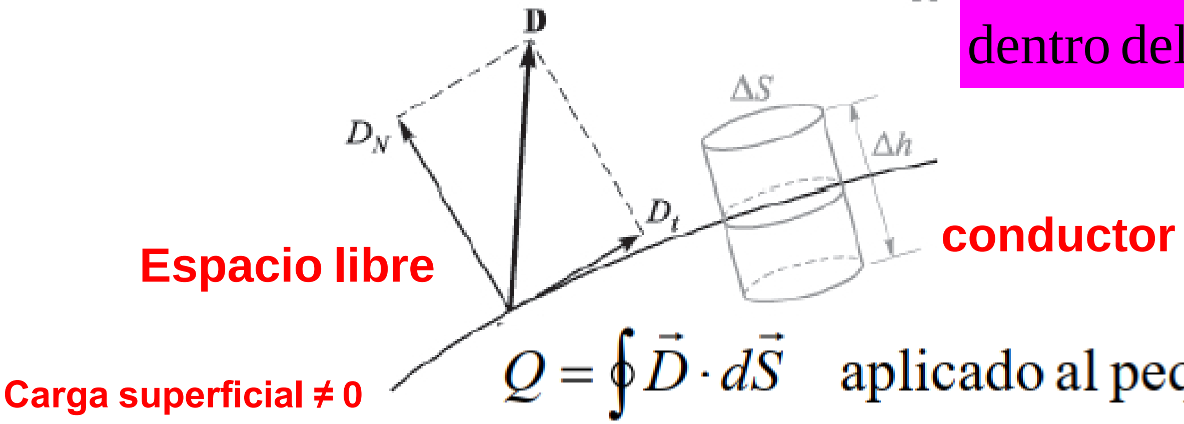
$h \to 0$

por lo tanto :

$E_t \Delta w = 0$ $\quad$ *o sea* $\quad \boxed{E_t = 0}$

Condiciones de frontera: Campo normal

dentro del conductor $D \text{ y } E = 0$



$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad \text{aplicado al pequeño cilindro:}$$

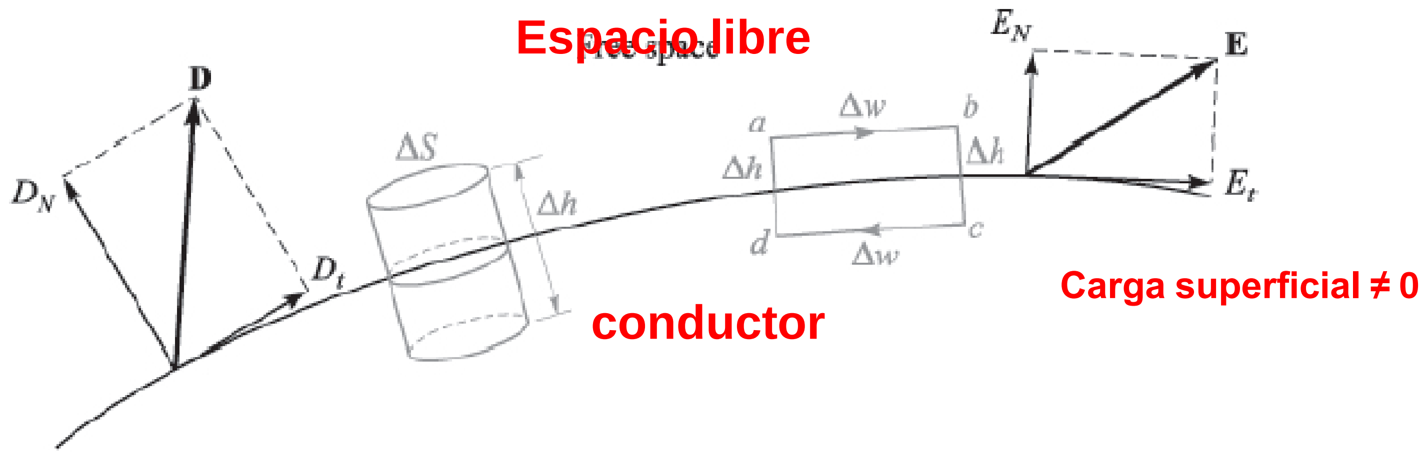
$$Q = \int_{tapa} \vec{D}_N \cdot d\vec{S} - \underbrace{\int_{fondo} \underbrace{\vec{D}_N}_{0} \cdot d\vec{S}}_{=0} + \underbrace{\int_{cilindro} \underbrace{\vec{D}_t}_{0} \cdot d\vec{S}}_{=0}$$

por lo tanto:

$$Q = D_N dS = \rho_S dS$$

$$Q = D_N \Delta S = \rho_S \Delta S \qquad o \ sea \quad \boxed{D_N = \rho_S}$$

Condiciones de frontera



$$D_t = E_t = 0$$

$$D_N = {}_0E_N - {}_s$$

Conductores en campos electrostáticos:

1. **E dentro del conductor es CERO**
2. **E es normal a la superficie**
3. **La superficie del conductor es una superficie equipotencial**

Ejemplo 5.2

Si el potencial V en el punto P de cuerpo sólido conductor es $V = 100(x^2-y^2)$ siendo $P = (2;-1;3)$ ubicado en la frontera entre el conductor y el espacio libre: Determine:

a) el potencial eléctrico V en P
b) El lugar geométrico (ecuación) que presenta todos los puntos con V = 300V
c) La intensidad de campo eléctrico E primero en forma general luego en P
d) La densidad de campo eléctrico D primero en forma general luego en P
e) La densidad de carga superficial ρ_S
f) La ecuación de las líneas de flujo que pasan por P

Ejemplo 5.2

a) Potencial en el punto P:

$$V(P) = 100(x^2 - y^2) = 300V$$

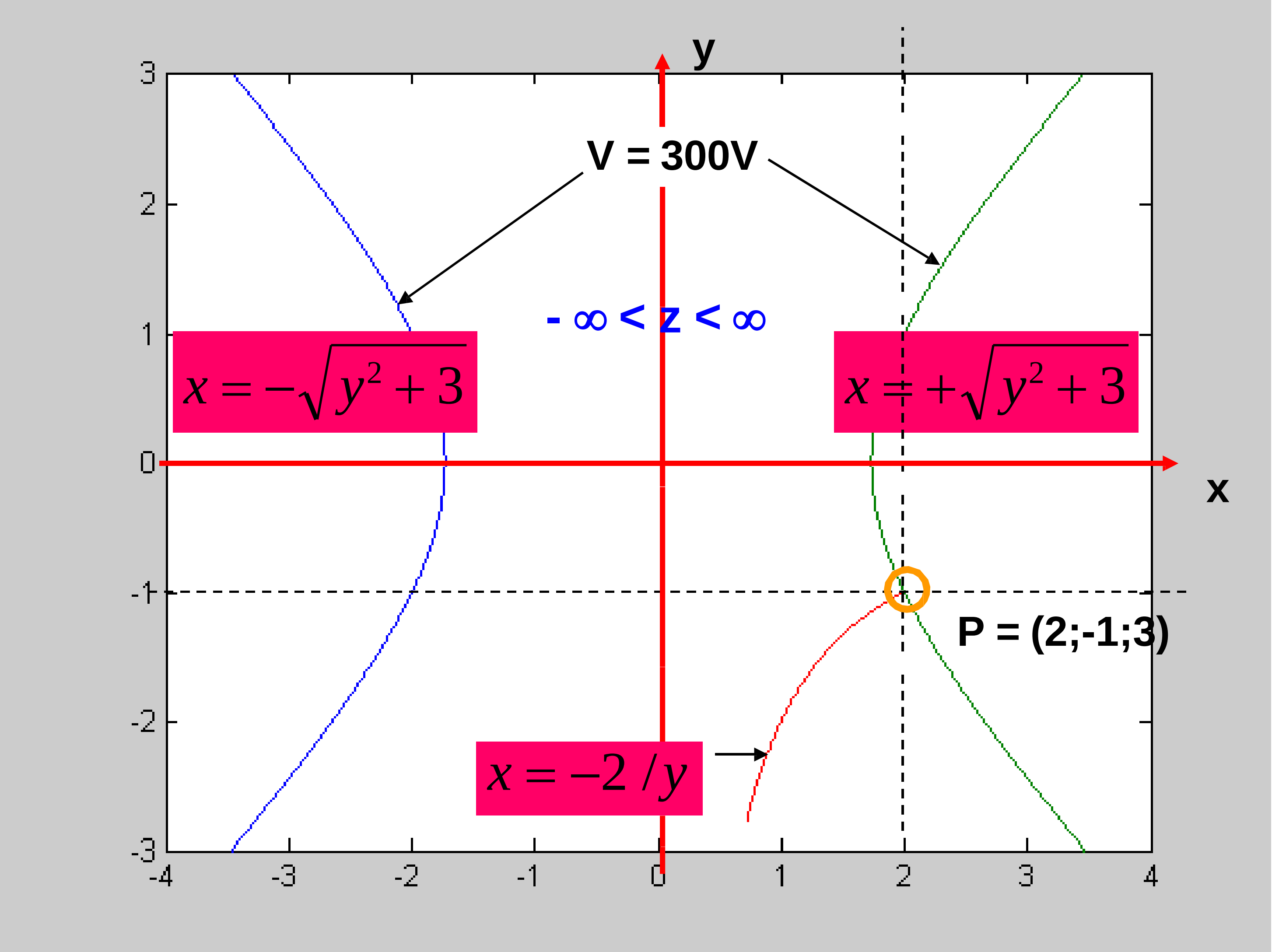
Entonces el potencial de la superficie de ese cuerpo (sólido o hueco) es de 300 V, puesto que conforma una superficie equipotencial. Si fuera un cuerpo sólido, V_i = 300 V y E_i = 0.

b) La ecuación que representa todos los puntos con V = 300 V: **P = (2;-1;3)**

$$300V = 100V(x^2 - y^2) \Rightarrow x^2 - y^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3 + y^2} \Longrightarrow \textbf{dos cilindros hiperbólicos}$$

Ejemplo 5.2


y
V = 300V
$- \infty < z < \infty$
$x = -\sqrt{y^2 + 3}$
$x = +\sqrt{y^2 + 3}$
x
P = (2;-1;3)
$x = -2 / y$
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

Ejemplo 5.2

c) La intensidad de campo eléctrico **E** :

$$\vec{E} = -\nabla V = -100\nabla(x^2 - y^2) = -200x\vec{a}_x + 200y\vec{a}_y \quad V/m$$

En el punto P :

$$\vec{E}(P) = -400\vec{a}_x - 200\vec{a}_y \quad V/m$$

d) La densidad de flujo eléctrico **D** :

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = -200V\varepsilon_0 x\vec{a}_x + 200V\varepsilon_0 y\vec{a}_y$$

$$\vec{D} = -200\frac{V}{m}\frac{10^{-9}C}{36\pi\ Vm^2}x\vec{a}_x + 200\frac{V}{m}\frac{10^{-9}C}{36\pi\ Vm^2}y\vec{a}_y$$

El campo eléctrico está dirigido perpendicularmente hacia afuera del conductor

$$\vec{D} = -\frac{50nC}{9\pi\ m^3}x\vec{a}_x + \frac{50nC}{9\pi\, m^3}y\vec{a}_y$$

En el punto P : P = (2;-1;3)

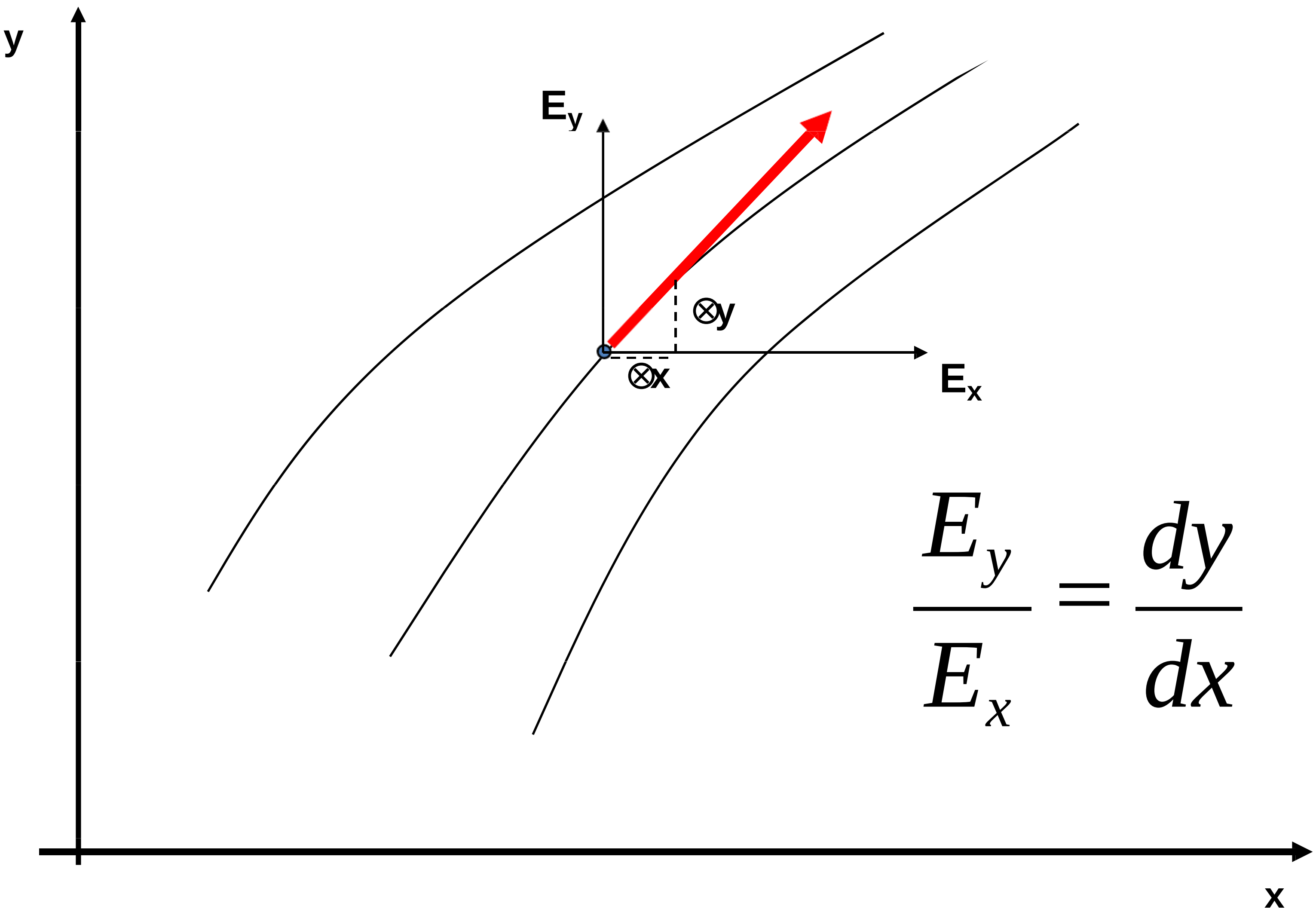
$$\vec{D}(P) = -3{,}537\vec{a}_x - 1{,}768\vec{a}_y \quad nC/m^2$$

Ejemplo 5.2

e) La densidad de carga superficial ρ_S :

$$_S(P) = D_N(P) = \left|\vec{D}(P)\right| = \sqrt{(-3{,}54)^2 + (-1{,}77)^2} = 3{,}96\frac{nC}{m^2}$$

Líneas de flujo y esquemas de campo



$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx}$$

Ejemplo 5.2

f) La ecuación de las líneas de flujo que pasan por P

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{200y}{-200x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{-dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln(x) + \ln(y) = C_1$$

$$\ln(xy) = C_1 \Rightarrow xy = e^{C_1} = C_2$$

Ejemplo 5.2

f) C_2 se determina en el punto P:

$$xy = e^{C_1} = C_2$$

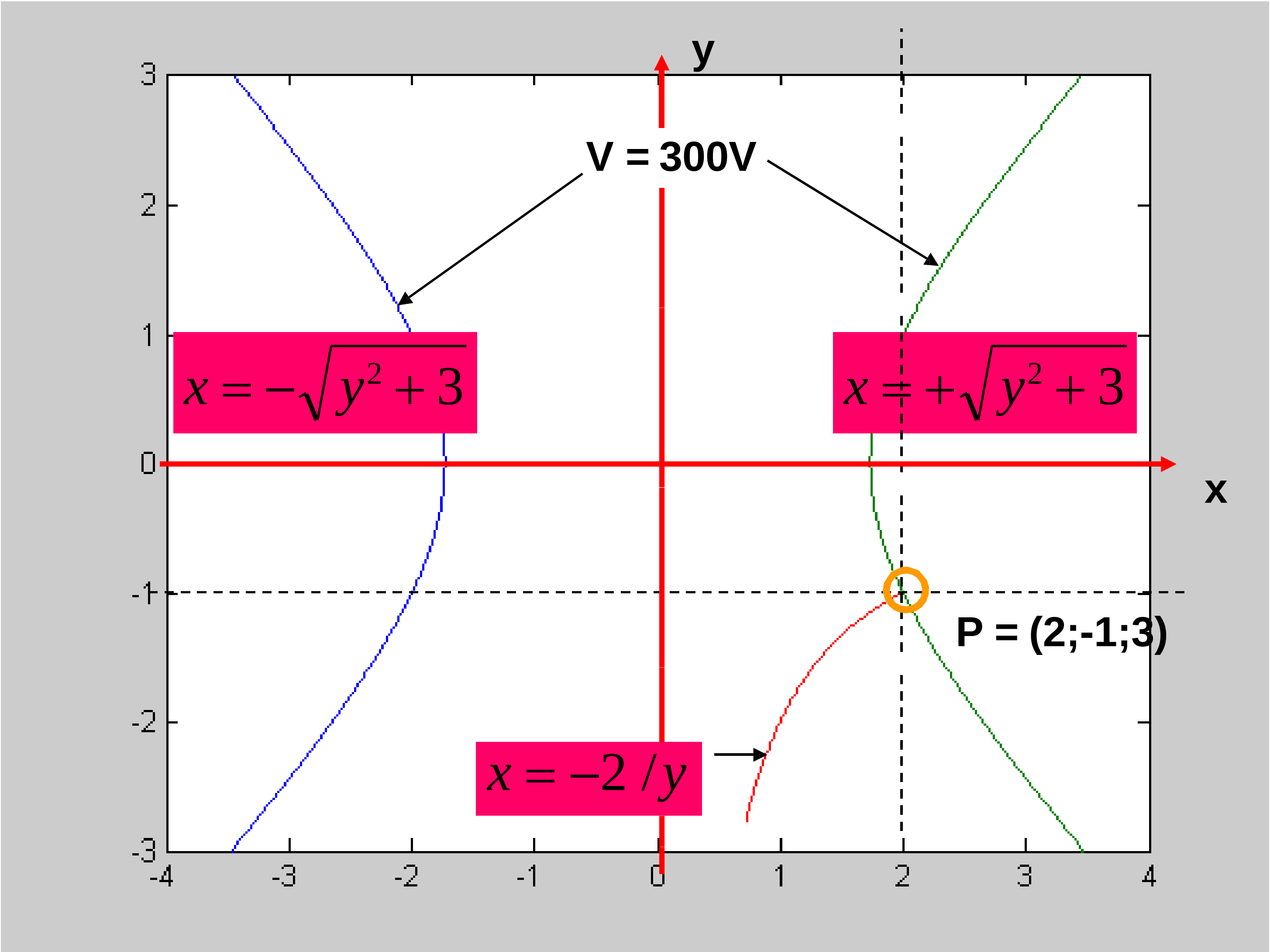
$$C_2 \ en \ P(2,-1,3):$$

$$C_2(P) = 2(-1) = -2$$ **y la ecuación para la línea de flujo en P es :**

$$xy = -2 \quad o \ \ bien \quad x = \frac{-2}{v}$$

Solución resuelta con Matlab

Ejemplo 5.2



Líneas de flujo y esquemas de campo

Ejemplo:
Obtenga las ecuaciones de líneas de flujo para una línea de carga uniforme con

$$\rho_L = 2\pi\varepsilon_0$$

$$\text{con} \quad \vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{a}_r \quad y \quad \rho_L = 2\pi\varepsilon_0 :$$

$$\vec{E} = \frac{1}{r}\vec{a}_r \quad \text{en coordenadas rectangulares}$$

$$\vec{E} = \frac{x}{r^2}\vec{a}_x + \frac{y}{r^2}\vec{a}_y = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{a}_x + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{a}_y$$

Líneas de flujo y esquemas de campo

Así se establece la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Ey}{Ex}=\frac{\dfrac{y}{x^2+y^2}}{\dfrac{x}{x^2+y^2}}=\frac{y}{x}\quad \text{o bien:}$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}\quad \text{si se integra:}$$

$$\ln(y)=\ln(x)+C_1\quad \text{o también:}$$

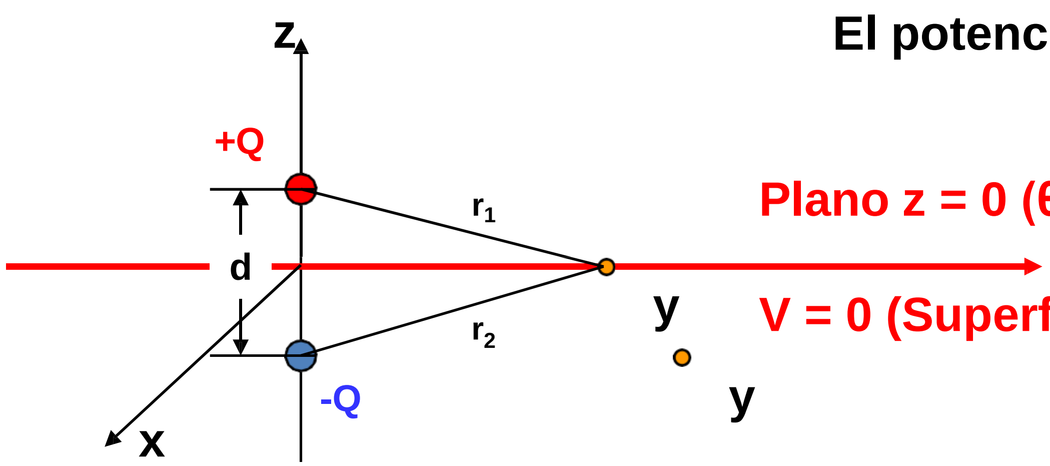
$$\ln(y)=\ln(x)+\ln C\quad \text{y aplicando la función inversa:}$$

$$e^{\ln(y)}=e^{\ln(x)\cdot C}\Rightarrow y=Cx$$

El dipolo eléctrico

El potencial V en un punto P es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$



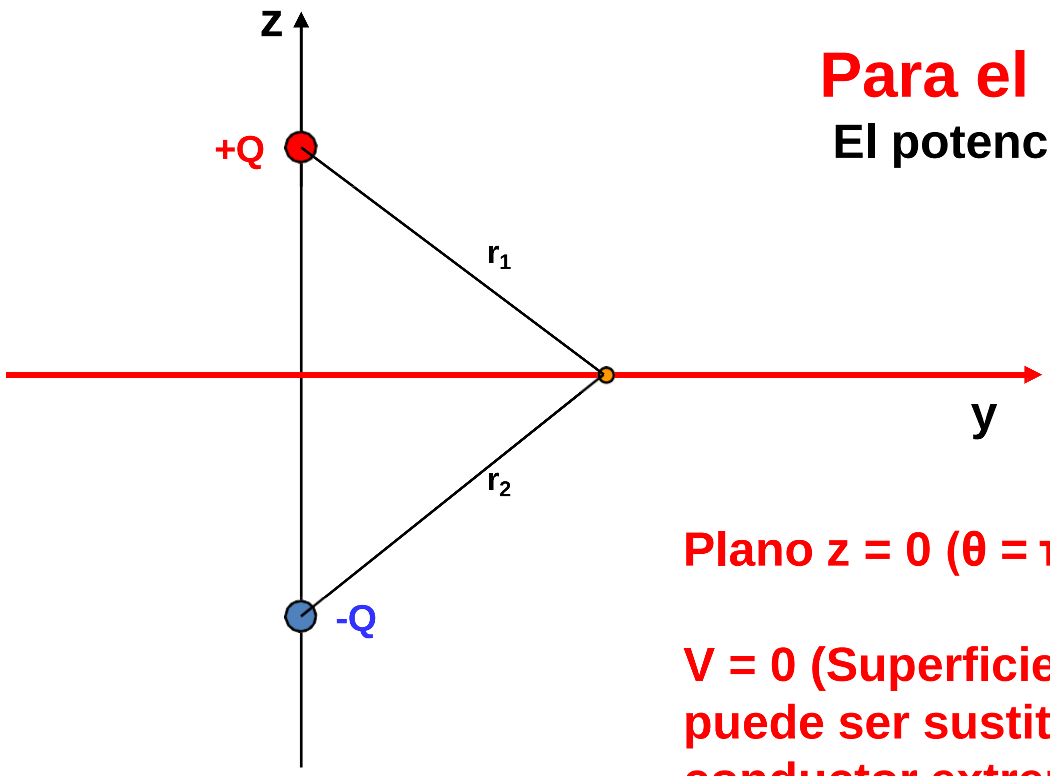
Para el plano z = 0:

El potencial sería cero dado que r_2-r_1 = 0:

Plano z = 0 (θ = π/2):

V = 0 (Superficie equipotencial)

El método de las imágenes



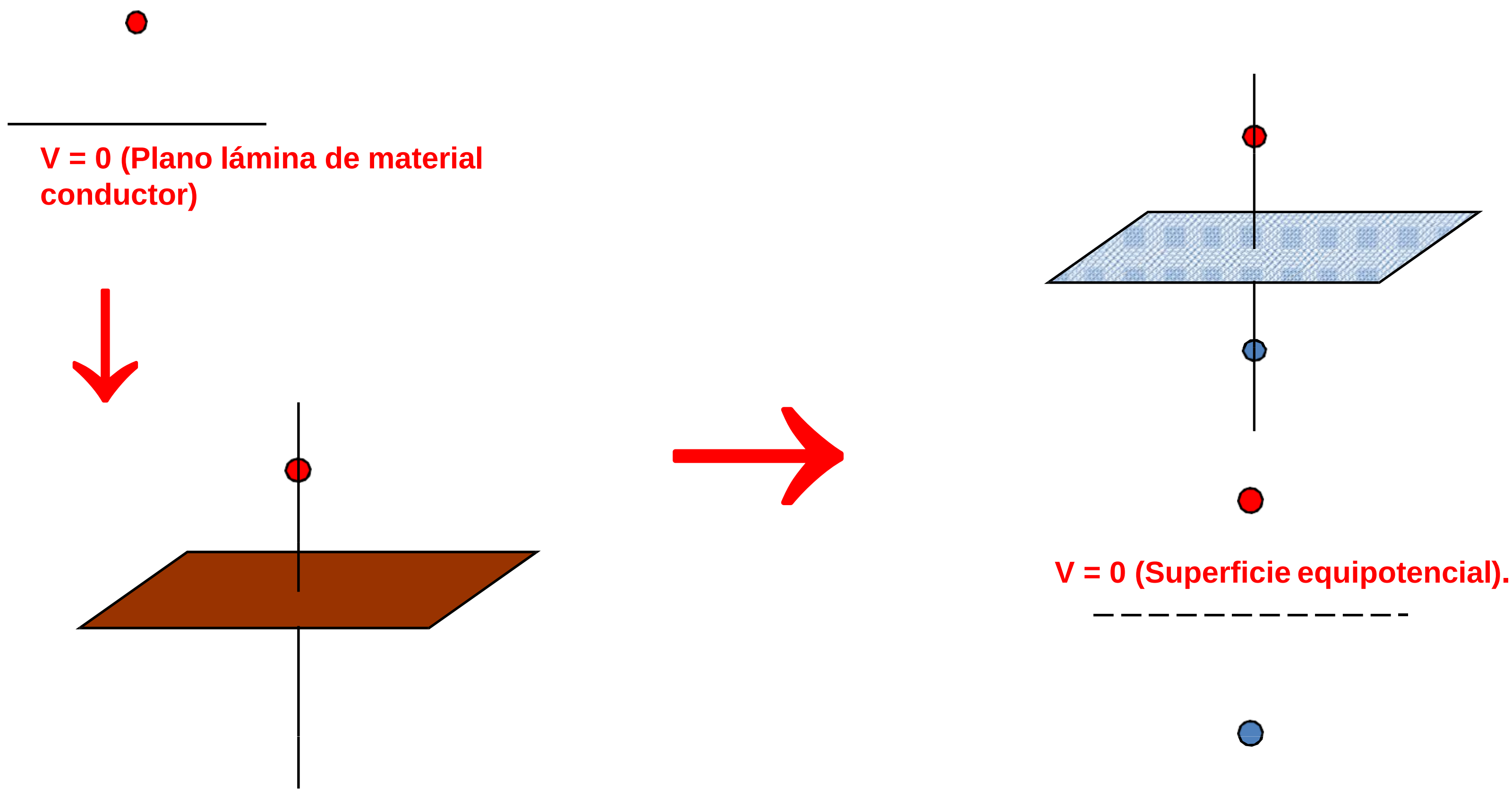
Para el plano z = 0:

El potencial sería cero dado que $r_2 - r_1 = 0$:

Plano z = 0 ($\theta = \pi/2$):

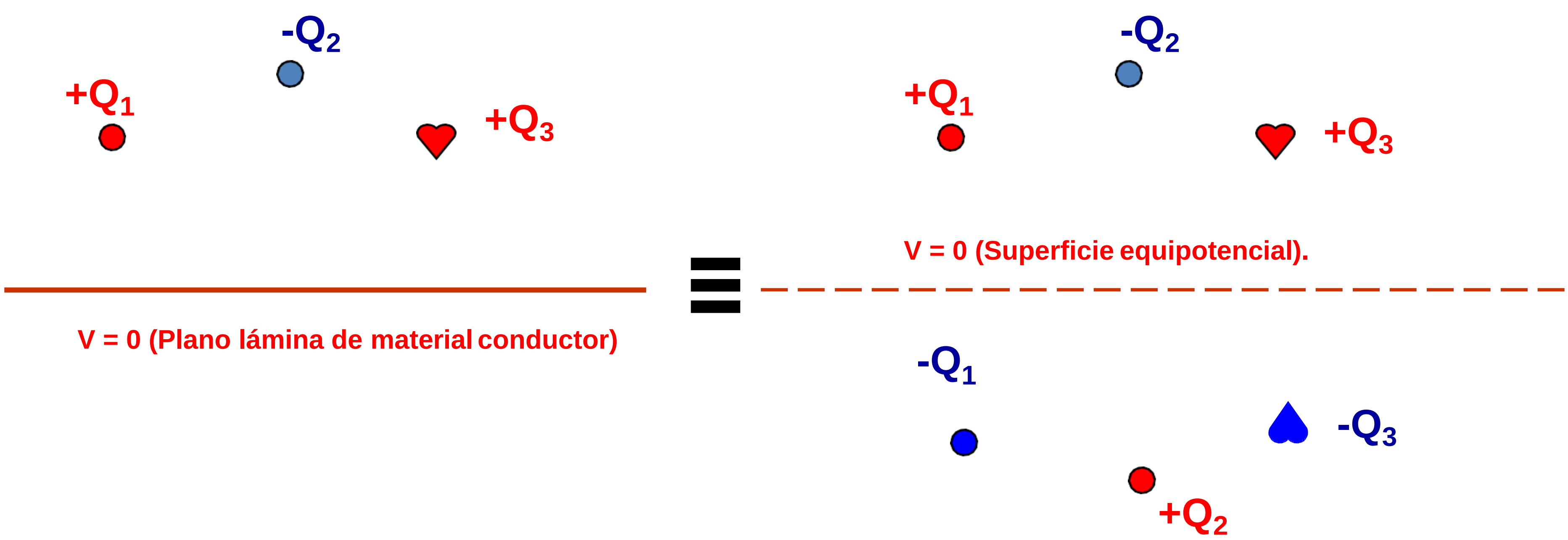
V = 0 (Superficie equipotencial). Este plano puede ser sustituido por una lámina de material conductor extremamente delgada

El método de las imágenes



Una sola carga y un plano conductor pueden reemplazarse por dos cargas de igual magnitud pero de signo opuesto, sin que esto afecte la forma ni la intensidad de los campos arriba de la superficie V = 0

El método de las imágenes



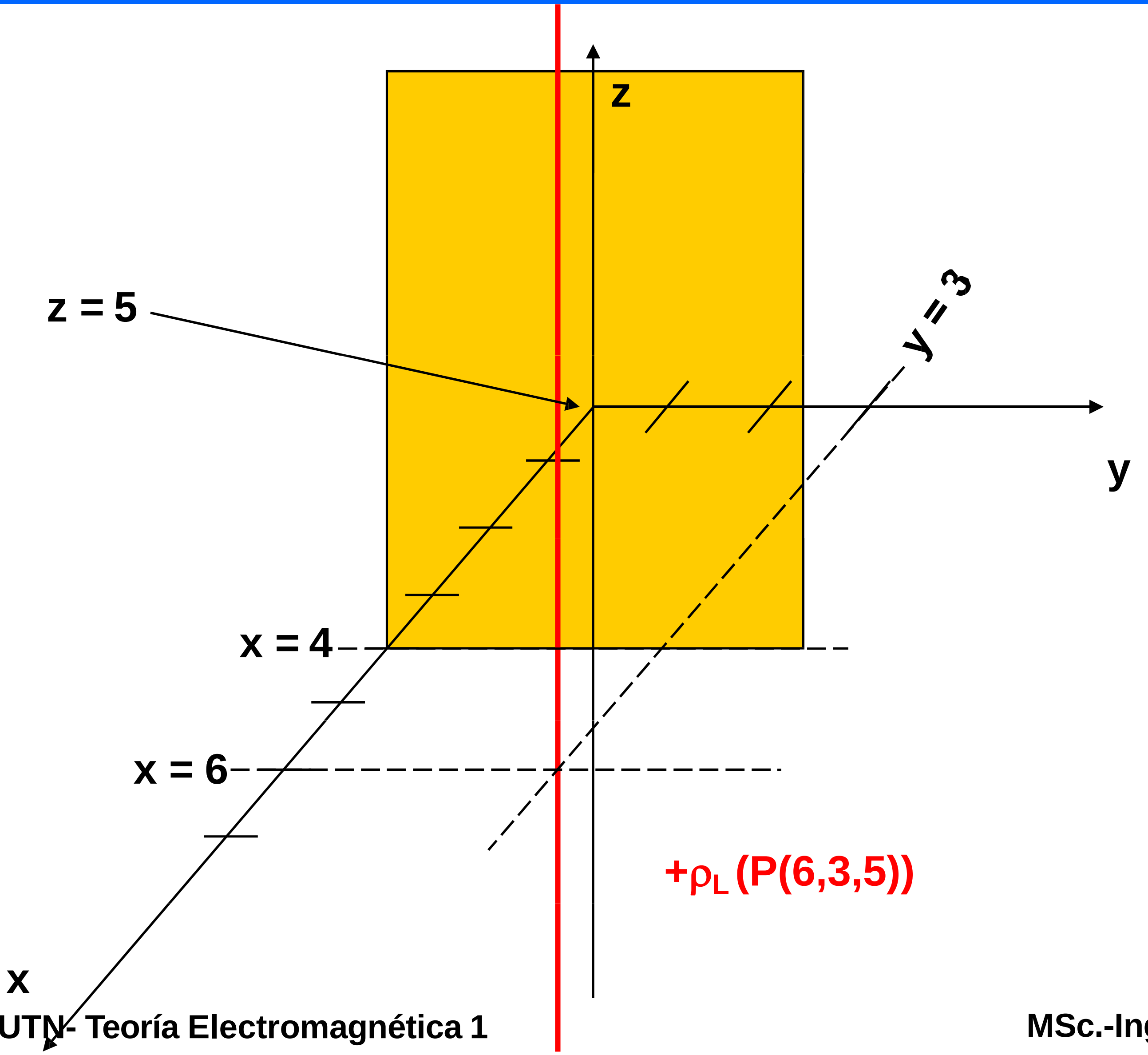
Ejemplo del método de las imágenes

Problema 5.6

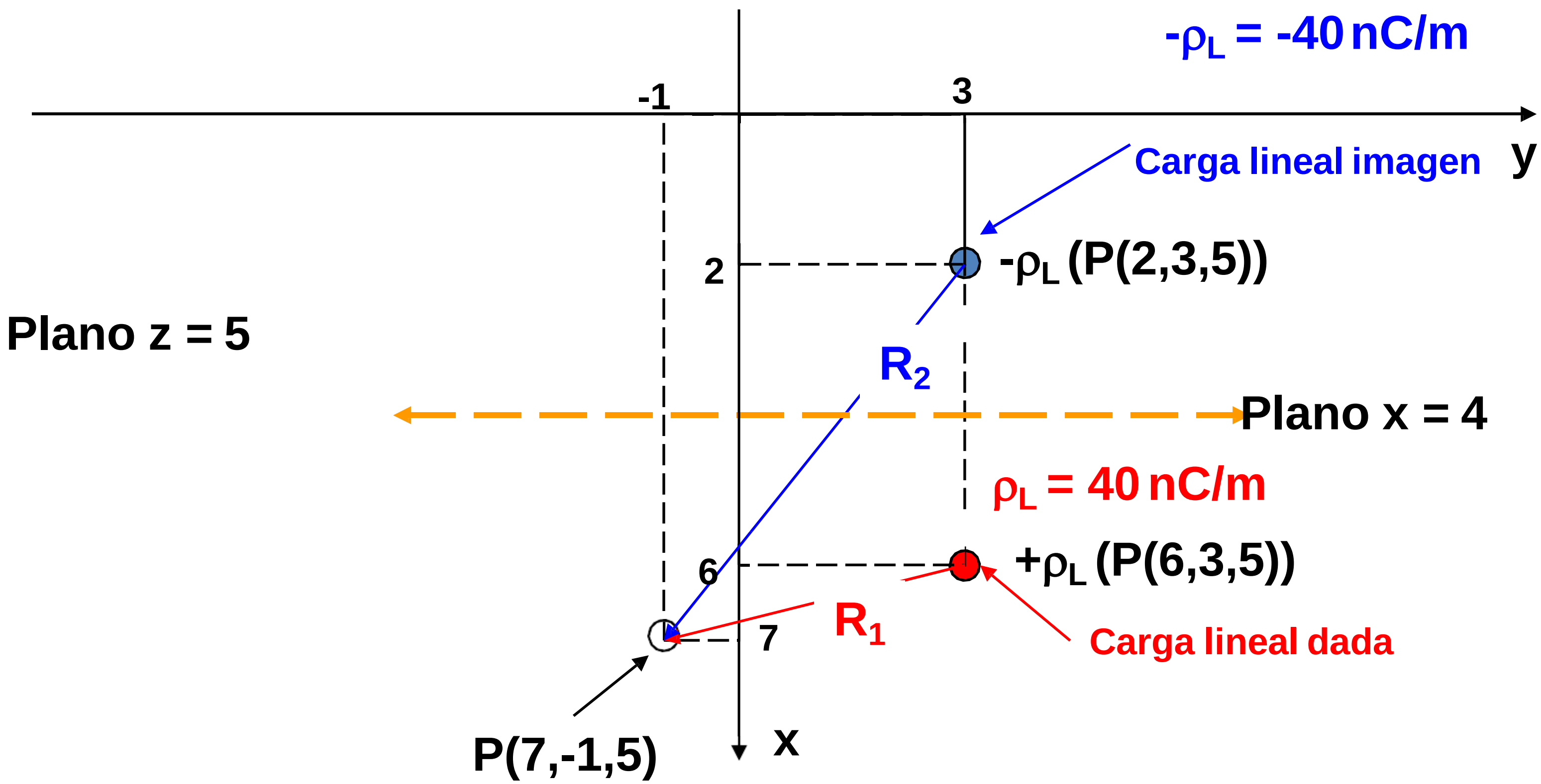
Un plano perfectamente conductor está ubicado en el espacio libre en $x = 4m$ y una línea de carga infinita y uniforme de 40 nC/m se ubica a lo largo de la línea $x = 6m$, $y = 3m$. Sea $V = 0$ V en el plano conductor. Encuentre para el punto P (7,-1,5):

a) El potencial V
b) La intensidad de campo eléctrico E.

Problema 5.6



Problema 5.6


-ρL = -40 nC/m
-1
3
y
Carga lineal imagen
2
-ρL (P(2,3,5))
Plano z = 5
R2
Plano x = 4
ρL = 40 nC/m
6
+ρL (P(6,3,5))
7
R1
Carga lineal dada
P(7,-1,5)
x

Ejemplo del método de las imágenes

Problema 5.6

Encuentre para el punto P (7,-1,5):

a) El potencial V

$$V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln 2L \quad \ln R_1\right) \quad \textbf{de modo análogo :}$$

$$V_2 = \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln 2L - \ln R_2\right)$$

$$R_1 = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \quad y \quad R_2 = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Ejemplo del método de las imágenes

Problema 5.6

Encuentre para el punto P (7,-1,5):

a) El potencial V

$$V(P) = V_1 + V_2 = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln R_2 - \ln R_1\right) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$V(P) = \frac{40nC36\pi \cdot 10^9 Vm}{m \cdot 2\pi \cdot C}\ln\sqrt{\frac{41}{17}} = 316{,}93V$$

Ejemplo del método de las imágenes

Problema 5.6

Encuentre para el punto P (7,-1,5): b) La intensidad de campo eléctrico **E**.

$$\vec{E}_1 = -\nabla V \quad \textbf{No lleva a ninguna respuesta}$$

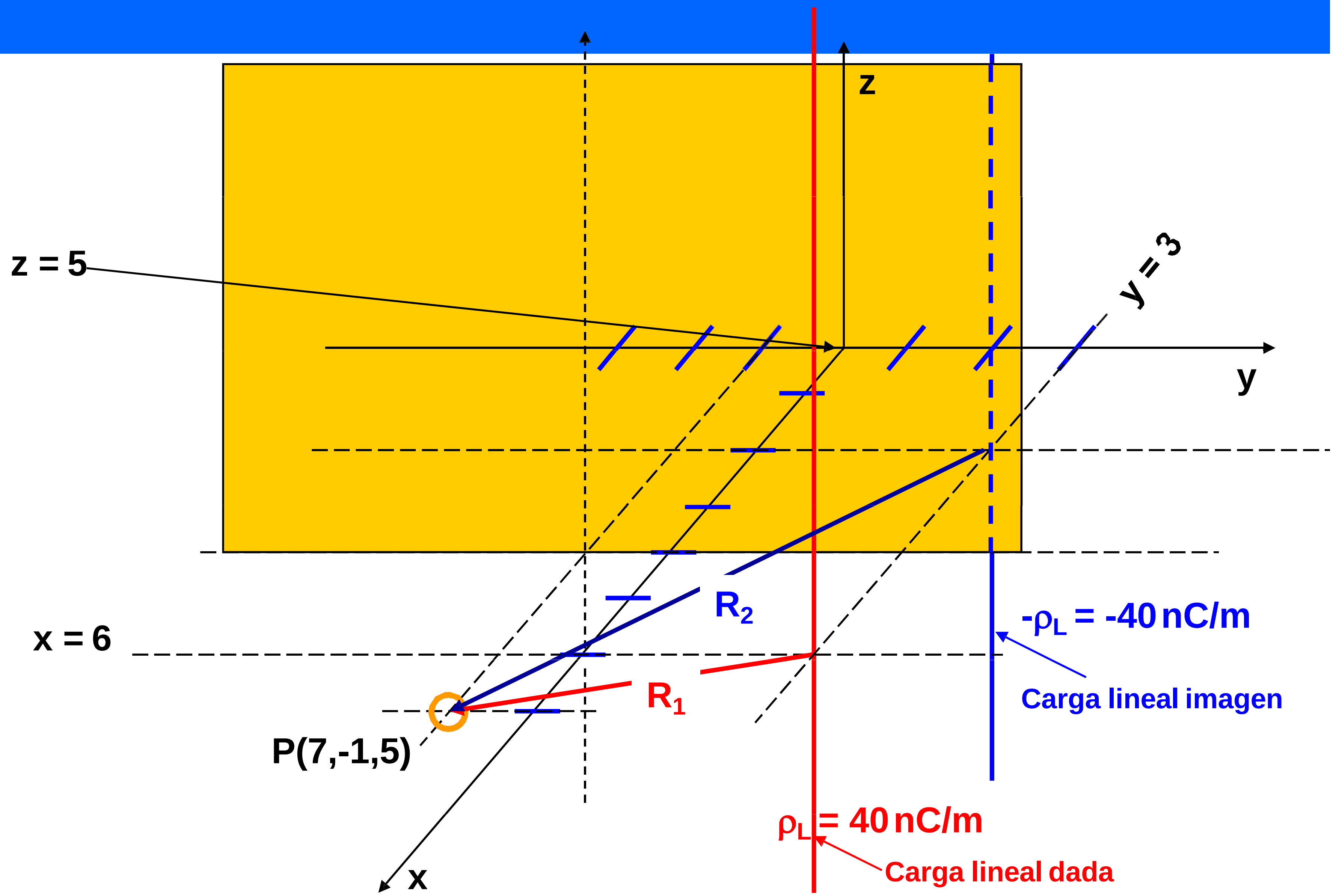
$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}_1}{R_1^2} \quad y \quad \vec{E}_2 = \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}_2}{R_2^2}$$

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{R}_1}{R_1^2} - \frac{\vec{R}_2}{R_2^2}\right]$$

$$\vec{E}(P) = \frac{40nC \cdot 36\pi \cdot 10^9 \cdot Vm}{m \cdot 2\pi \cdot C}\left[\frac{(1\vec{a}_x - 4\vec{a}_y)m}{17m^2} - \frac{(5\vec{a}_x - 4\vec{a}_y)m}{41m^2}\right]$$

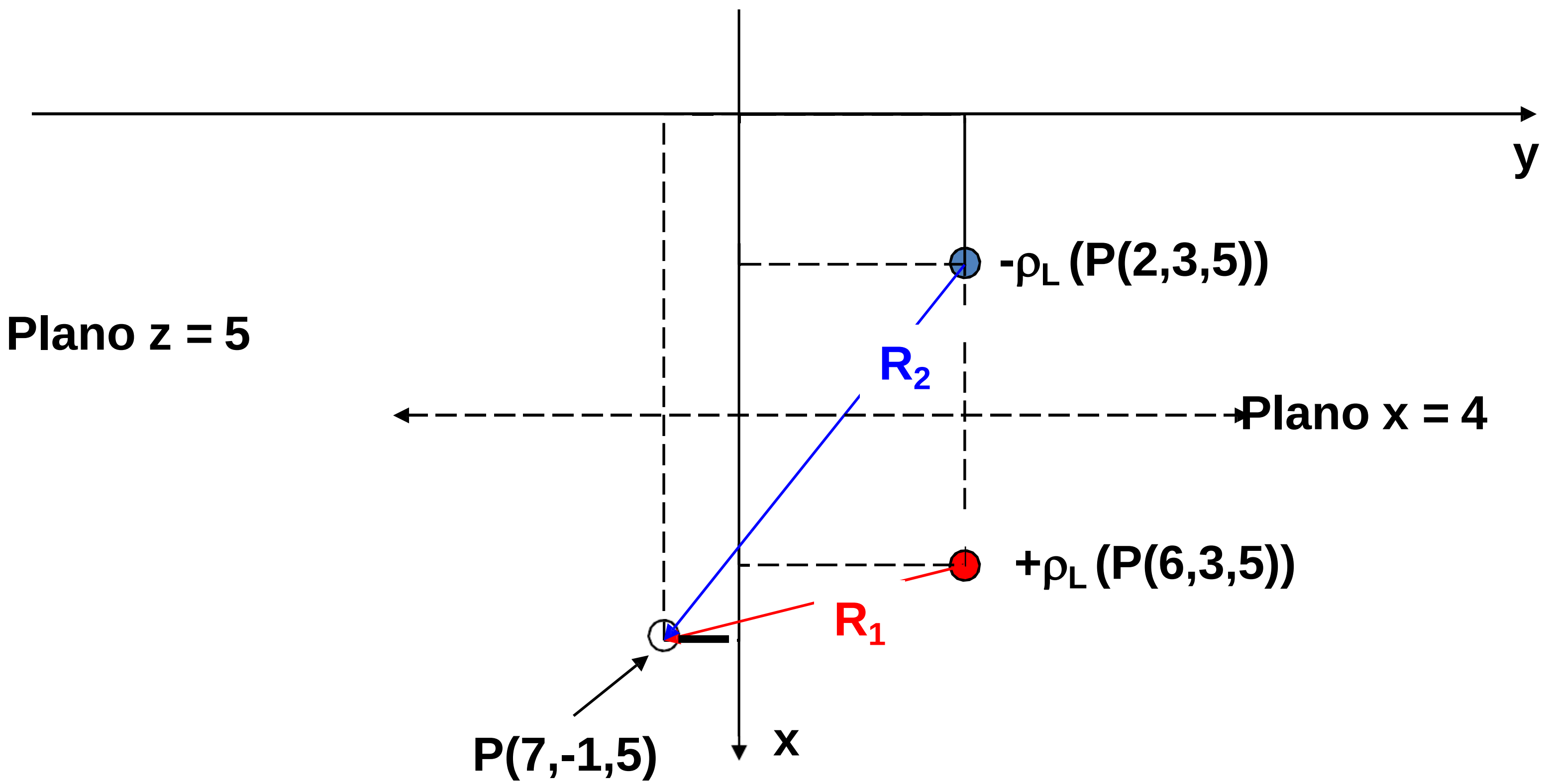
$$\vec{E}(P) = 1{,}0329(-44\vec{a}_x - 96\vec{a}_y) = -45{,}45\vec{a}_x - 99{,}17\vec{a}_y$$

Problema 5.6



z
z = 5
y = 3
y
x = 6
R2
-ρL = -40 nC/m
R1
Carga lineal imagen
P(7,-1,5)
ρL = 40 nC/m
x
Carga lineal dada

Problema 5.6



Problema No. 1

Un conductor de cobre con sección transversal circular y longitud l = 104 mm, tiene un diámetro de 3 mm y conduce una corriente de 10 A.

Datos del cobre:

Número de Avogadro: $N_A = 6{,}02x10^{26}$ átomos/kmol

Gravedad específica $\delta_{Cu} = 8{,}96$ kg/dm^3

Peso atómico del cobre: 63,54 kg/kmol

Conductividad específica: σ_{Cu}=58S/m=58($\wedge$m)$^{-1}$

Calcule:

a) **La densidad volumétrica de los átomos del cobre**
b) **La densidad volumétrica de electrones de conducción del cobre Ne**
c) **La cantidad de electrones de conducción que hay en el conductor mencionado**
d) **El corriente eléctrica en electrones/segundo**
e) **El porcentaje de los electrones de conducción que pasa cada segundo del conductor arriba especificado.**
f) **Qué valor tendría la corriente eléctrica que fluiría en dicho conductor, si todos los electrones de conducción en ese volumen son parte de la corriente eléctrica?**
g) **Qué valor tendría la velocidad de los electrones en el conductor del caso d)**
h) **Qué valor tendría la velocidad de los electrones en el conductor del caso f)**

Problema No. 1

Número de Avogadro: $N_A = 6{,}02 \times 10^{26}$ átomos/kmol
Gravedad específica $\delta_{Cu} = 8{,}96$ kg/dm^3
Peso atómico del cobre: 63,54 kg/kmol ; Conductividad σ_{Cu}=58S/m=58($\wedge$m)-1
Calcule:

a) La densidad volumétrica de los átomos del cobre N

$$N = N_A \cdot \delta_{\mathbf{Cu}} \cdot \mathbf{P_{at}}$$

$$N = 6{,}02 \cdot 10^{26} \frac{\acute{a}tomos}{kmol} \cdot \frac{1kmol}{63{,}54kg} \cdot \frac{8{,}96kg}{1dm^3} \cdot \frac{10^3 dm^3}{1m^3} =$$

$$N = 8{,}49 \cdot 10^{28} \frac{\acute{a}tomos}{m^3} = 8{,}49 \cdot 10^{22} \frac{\acute{a}tomos}{cm^3}$$

Problema No. 1

b) La densidad volumétrica de los electrones de conducción del cobre N_e

$$N = 8{,}49 \cdot 10^{28} \frac{\acute{a}tomos}{m^3} \cdot \frac{1 \;\; \bar{e} \;\; de\ cond.}{\acute{a}tomo} =$$

$$Ne = 8{,}49 \cdot 10^{28} \frac{\bar{e} \;\; de\ conducci\acute{o}n}{m^3}$$

$$Ne = 8{,}49 \cdot 10^{22} \frac{\bar{e} \;\; de\ conducci\acute{o}n}{cm^3}$$

$$Ne = 8{,}49 \cdot 10^{19} \frac{\bar{e} \;\; de\ conducci\acute{o}n}{mm^3}$$

Problema No. 1

c) La cantidad de electrones de conducción que hay en el conductor mencionado

$$N_{e_{conductor}} = N_e \cdot V_{cond} = N_e \cdot l \cdot \frac{\pi}{4} dcu^2$$

$$N_{e_{conductor}} = 8{,}49 \; 10^{22} \frac{e}{cm^3} \underbrace{\frac{\pi}{4}(0{,}3cm)^2 \; 10{,}4cm}_{=0{,}735cm^3}$$

$$N_{e_{conductor}} = 6{,}24 \cdot 10^{22} electrones$$

d) El corriente eléctrica I = 10 A en electrones/segundo

$$I = 10A = 10\frac{C}{s} = 10\frac{C}{s} \cdot \frac{1e}{1{,}602 \cdot 10^{-19} C} = 6{,}24 \cdot 10^{19} \frac{e}{s}$$

$$I = 6{,}24 \cdot 10^{19} \frac{e}{s}$$

Problema No. 1

e) El porcentaje de los electrones de conducción que pasa cada segundo por conductor arriba especificado con relación al total disponible.

$$\% \, e \, de \, c = \frac{6{,}24 \cdot 10^{19} \frac{e}{s}}{6{,}24 \cdot 10^{22} \frac{e}{s}} \cdot 100 = 0{,}1\%$$

f) Qué valor tendría la corriente eléctrica que fluiría en dicho conductor, si todos los electrones de conducción en ese volumen son parte de la corriente eléctrica?

$$I = \frac{1A}{6{,}24 \cdot 10^{18} \frac{e}{s}} \cdot 6{,}24 \cdot 10^{22} \frac{e}{s} = 10000 A$$

Problema No. 1

g) Qué valor tendría la velocidad de los electrones en el conductor del caso d)

$$\left|\vec{v}_d\right| = \left|-\mu_e \vec{E}\right| = \left|\mu_e \frac{\vec{J}}{\sigma}\right| = 32\frac{cm^2}{Vs}\frac{4\cdot 10A}{\pi(0{,}3cm)^2}\cdot\frac{1\Omega m}{58\cdot 10^6} =$$

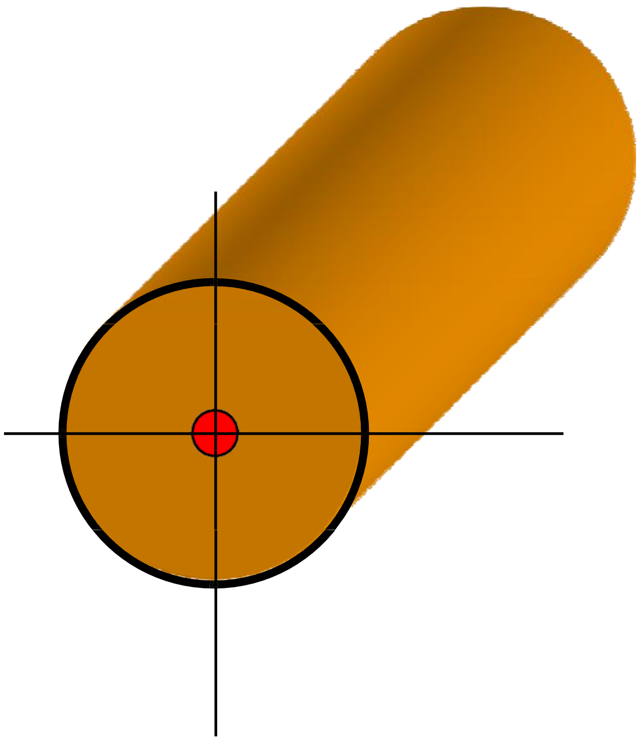
$$v_d = 7{,}8053\cdot 10^{-2}\frac{mm}{s} = 78{,}053\frac{\mu m}{s}$$

h) Qué valor tendría la velocidad de los electrones en el conductor del caso f)

$$v_d = 32\frac{cm^2}{Vs}\frac{4\cdot 10^4 A}{\pi(0{,}3cm)^2}\cdot\frac{1\Omega m}{58\cdot 10^6} = 7{,}8053\frac{cm}{s}$$

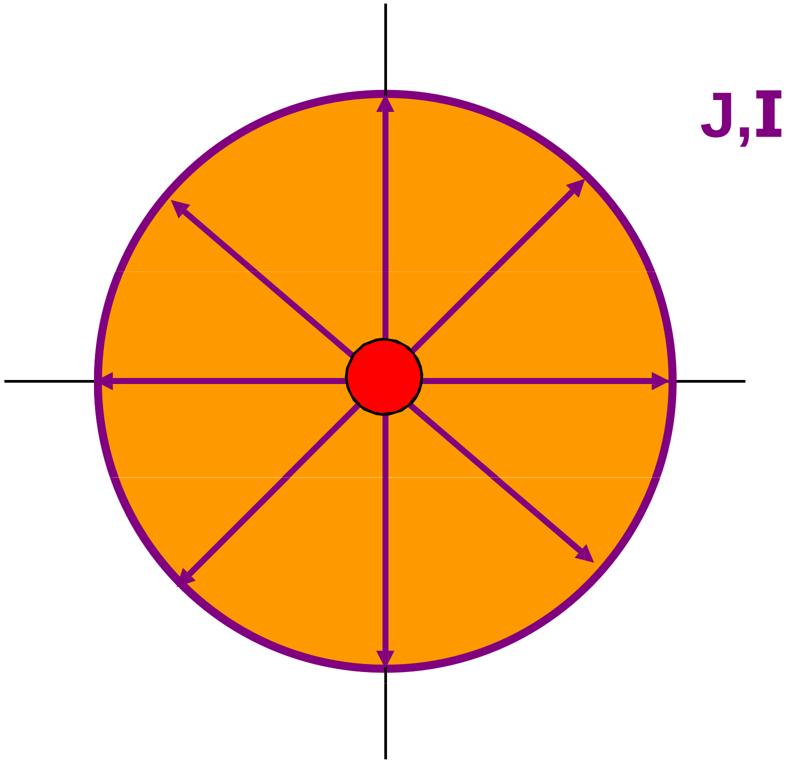
Problema No. 2

Determine la resistencia del dieléctrico con conductividad σ de un cable coaxial con un conductor interno de radio *a* de forma circular y un conductor externo cilíndrico-circular con espesor despreciable y radio externo *b*.

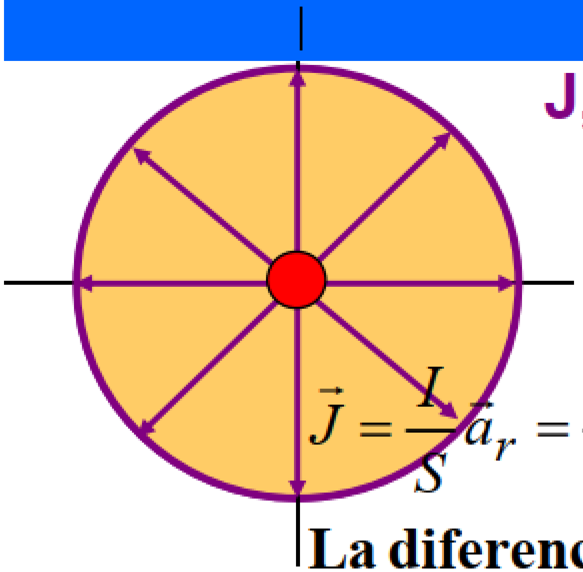


Problema No. 2

Determine la resistencia del dieléctrico con conductividad σ de un cable coaxial con un conductor interno de radio *a* de forma circular y un conductor externo cilíndrico-circular con espesor despreciable y radio externo *b*.



Problema No. 2



$$\vec{J} = \frac{I}{S}\vec{a}_r = \frac{I}{2\pi r l}\vec{a}_r \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}\vec{a}_r = \frac{I}{2\pi r l \sigma}\vec{a}_r$$

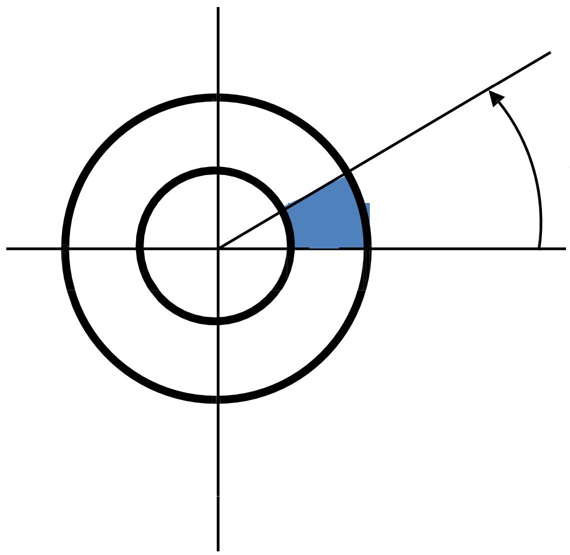
La diferencia de potencial entre el conductor interno y externo :

$$V_{ab} = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a \frac{I}{2\pi r l \sigma}\vec{a}_r dr \vec{a}_r = V_{ab} = \frac{I}{2\pi l \sigma}\ln\frac{b}{a}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{V_{ab}}}{\mathbf{I}} = \mathbf{R} = \frac{-\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r}}{\int_S \sigma E \cdot d\vec{S}} = \frac{\frac{I}{2\pi l \sigma}}{I}\ln\frac{b}{a} = \boxed{R = \frac{1}{2\pi l \sigma}\ln\frac{b}{a}}$$

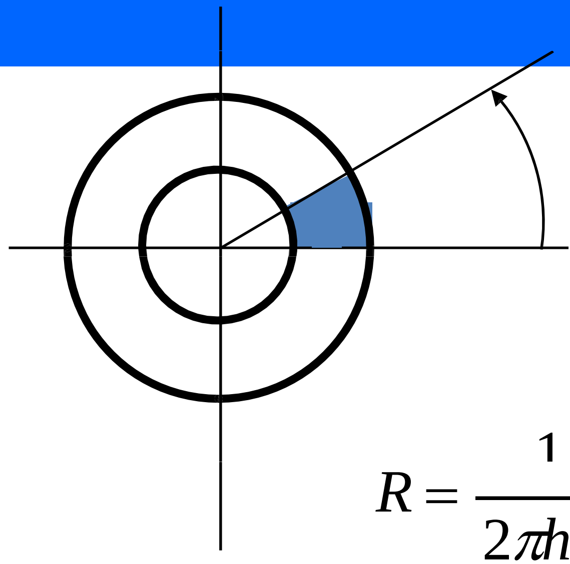
Problema No. 3

Una arandela de cobre tiene el radio interno = a, el radio externo = b, y el espesor es h. Determine la resistencia de una porción de la misma si la corriente fluye radialmente y la porción está descrita por un Δφ = π/6.



$\Delta\varphi = \pi/6$

Problema No. 3



Δφ = π/6

$$R = \frac{1}{2\pi h\sigma}\ln\frac{b}{a}$$ **para una arandela completa.**

Para una sección de ella :

$$R(\Delta\varphi = \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2\pi h\sigma}\ln\frac{b}{a}\bullet\frac{2\pi}{\pi/6} = 12\underbrace{\frac{1}{2\pi h\sigma}\ln\frac{b}{a}}_{R(2\pi)}$$

La resistencia eléctrica de la sección es 12 veces mayor que la resistencia de la arandela completa