Ejercicios 1

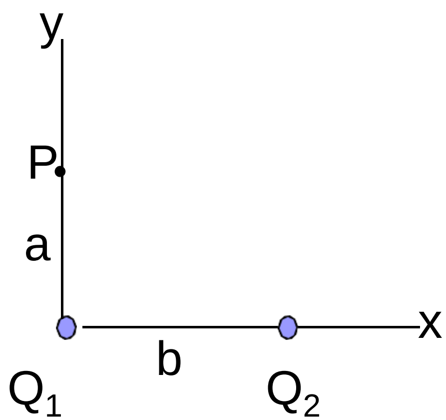
Teoría Electromagnética 1

MSc.-Ing. Jefry Mendoza Robles

Cálculo de la intensidad de campo eléctrico producido por dos cargas

$Q_1 > 0$ en P_1 (0,0,0), $Q_2 > 0$ en P_2 (4,0,0).

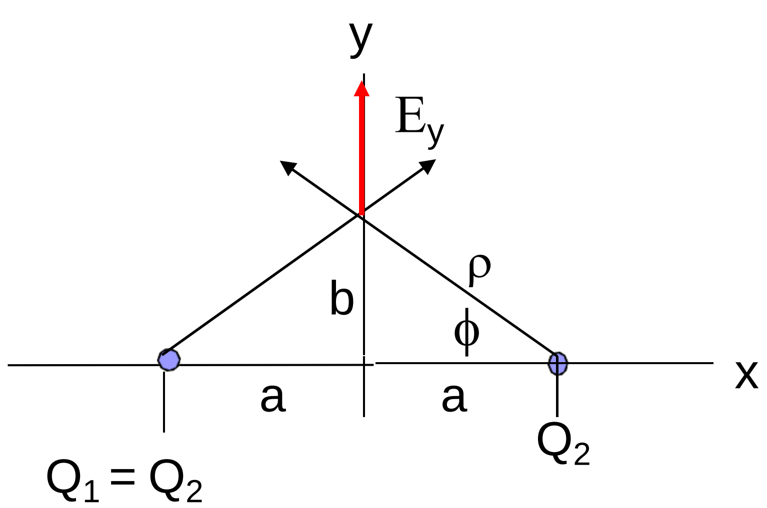
Determine el valor de E en el punto P = (0,3,0)?



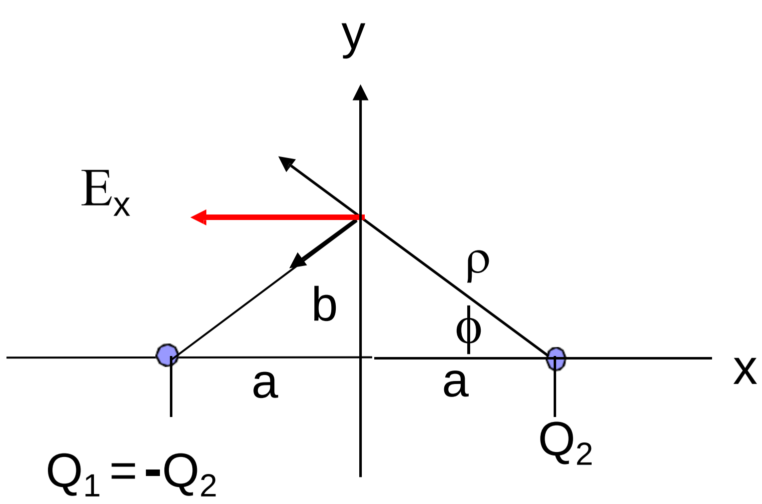
Use el principio de superposición

Cálculo de la intensidad de campo eléctrico producido por dos cargas

Dos cargas positivas equidistantes en el eje x. Encuentre E en cualquier punto sobre el eje y

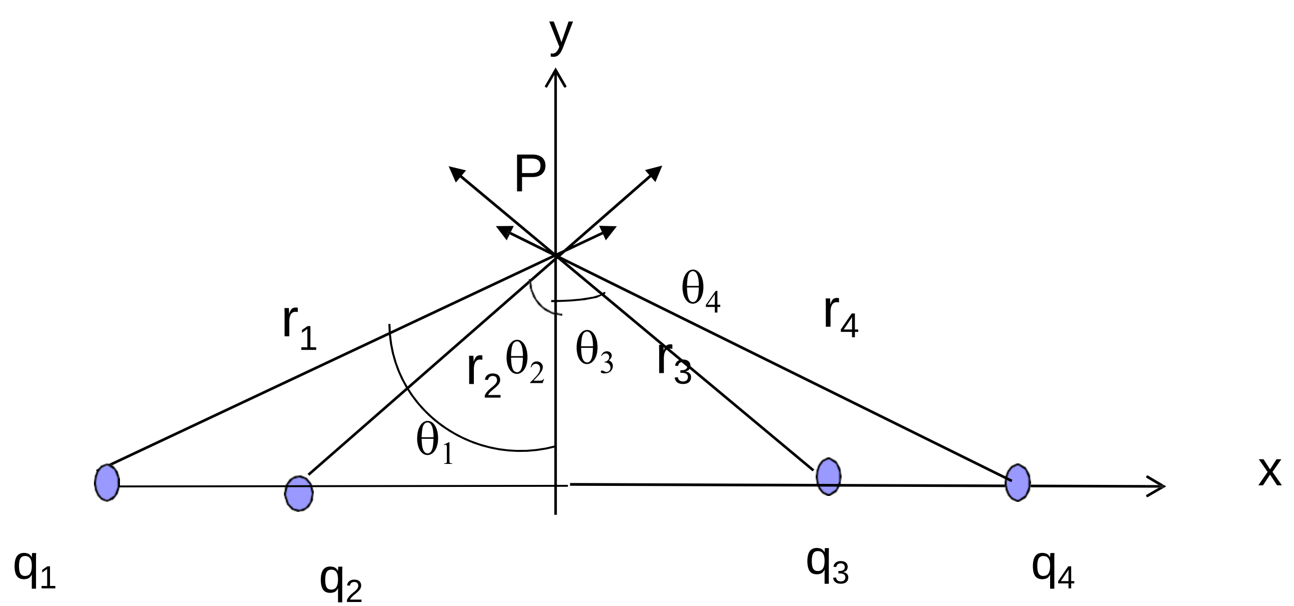


Dos cargas equidistantes de diferente polaridad en el eje x. Encuentre E en cualquier punto sobre el eje y



Cálculo de la intensidad de campo eléctrico producido por cuatro o más cargas

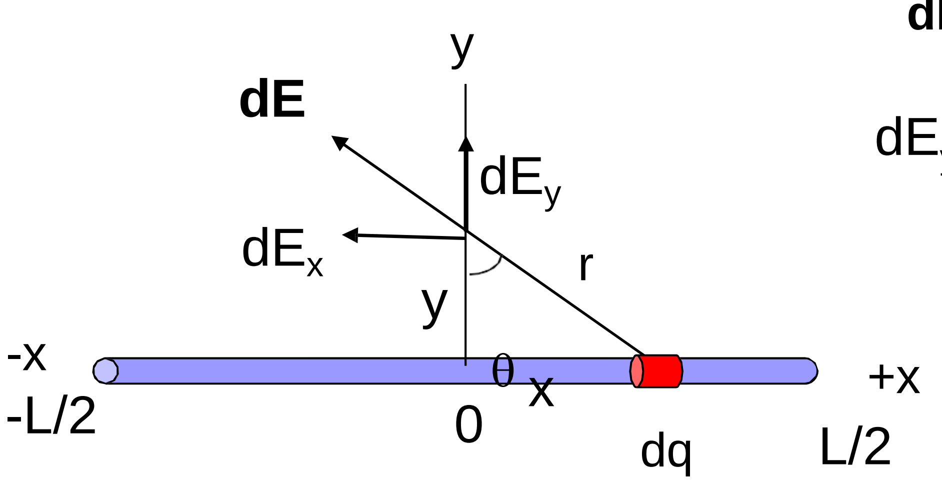
4 cargas iguales espaciadas simétricamente a lo largo de una línea.
Determine E en P (0,y,0)



$$E_y = k\sum_{i=1}^{4} q_i \cos\theta_i / r_i^2$$

$$E_y = k\sum_{i=1}^{\infty} \Delta q_i \cos\theta_i / r_i^{\;2}$$

Cálculo de E producido por un conductor rectilíneo de longitud L con ρ_L = Q/l = constante



dE = k dq /r²

dE_y= dE cos θ

$$E_x = \int_{-L/2}^{L/2} dE_x = 0$$

dq = $\rho_L$dx

dE_y= k $\rho_L$dx cos θ /r²

E_y= k ρ_Lq cos θ /r² para una carga puntual

$$\boxed{E_y = k\rho_L \int_{-L/2}^{L/2} \cos\theta \, dx / r^2}$$

dx/r² = dθ/y

x= y tanθ dx = y sec² θ dθ

r =y sec θ r² =y²sec² θ

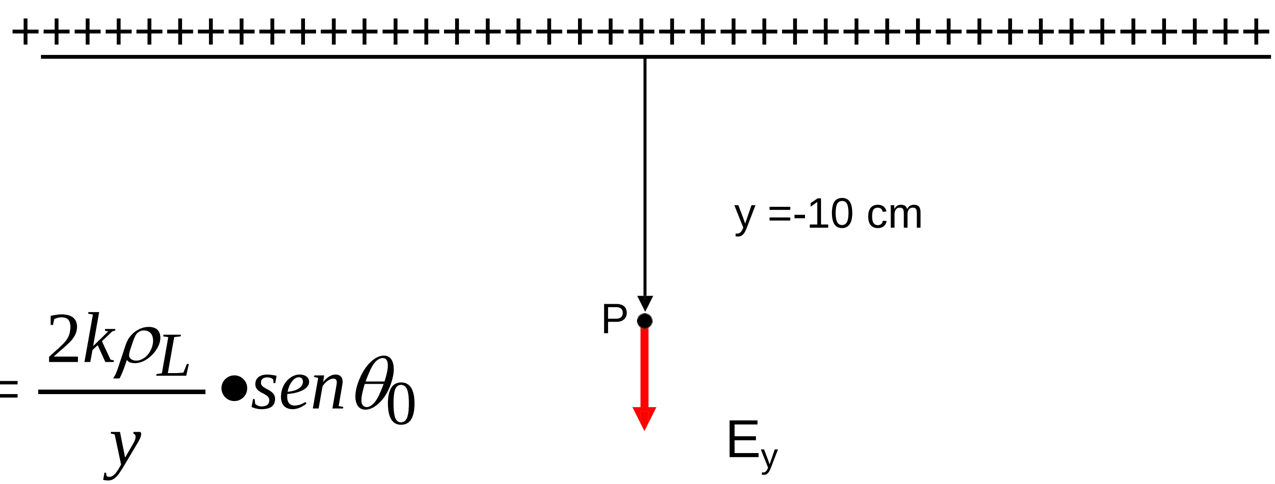
$$E_y = k\rho_L / y \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos\theta \, d\theta$$

$$\boxed{E_y = \frac{2k\lambda}{y} \sin\theta_0}$$

$$\boxed{\sin\theta_0 = \frac{L/2}{\sqrt{y^2 + L^2/4}}}$$

Cálculo de E producido por un conductor rectilíneo de longitud L con ρ_L = **Q/l = constante**

Determine la intensidad de campo eléctrico de un conductor rectilíneo de longitud infinita que tiene una densidad lineal de carga de +100 nC/m en un punto situado a 10 cm m(eje -y). Cómo se verían las líneas de campo?



$$\vec{E}_y = \frac{2k\rho_L}{y} \bullet sen\,\theta_0$$

$$\vec{E}_y = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9\, Nm^2 \cdot 10^{-9} C/m k\rho_L}{0{,}1 m \cdot C^2} \bullet sen 90º = 1{,}8 \cdot 10^4\, N/C$$

Fuerza de Coulomb

Dos esferas con cargas $Q_1 = Q_2 = Q$ y pesos $G_1 = G_2 = 40$ mN están atadas en un punto de sujeción como indicado en la figura por medio de hilos sin masa de $l = 30$ cm de longitud. Como consecuencia de la fuerza de repulsión electrostática se separan una distancia d = 9,6 cm. Si el radio de las esferas es despreciable con relación a la distancia d, calcule la carga eléctrica Q

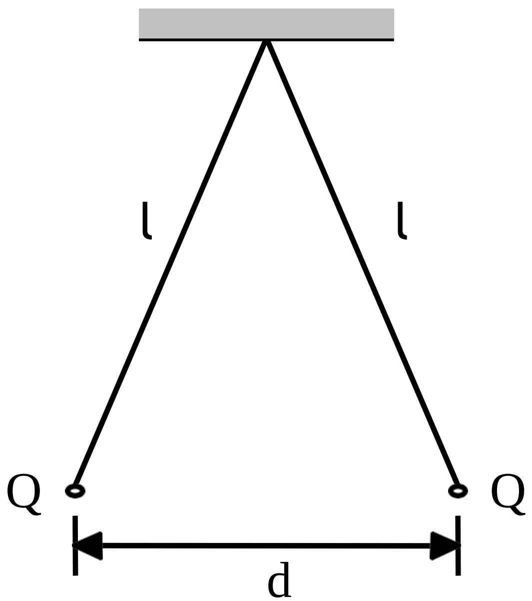
Ley de Coulomb:

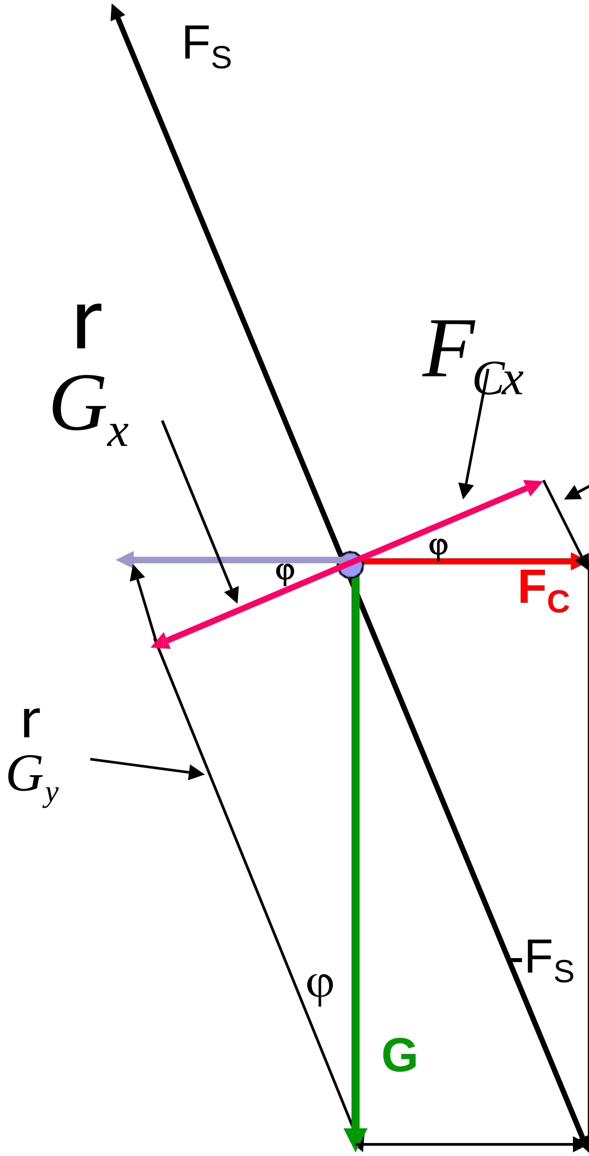
$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \bullet \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \vec{\mathbf{e}}x}$$

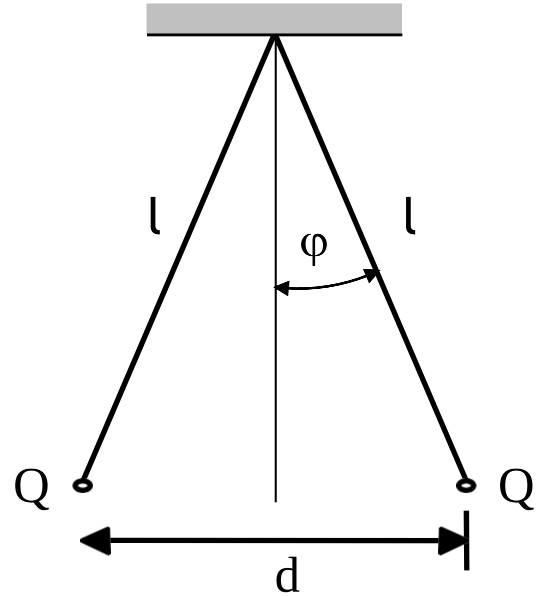
$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Para una carga puntual:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \vec{\mathbf{e}}r$$







$$\vec{F}_C + \vec{G} = -\vec{F}_S$$

Ambas fuerzas se descomponen en sus componentes rectangulares, pero ortogonales a la cuerda tensa.

$$\vec{F}_C = \vec{F}_{Cx} + \vec{F}_{Cy} \quad y \quad \vec{G} = \vec{G}_x + \vec{G}_y$$

Fuerza de Coulomb

$$\vec{F}_C + \vec{G} = \vec{F}_S$$

Ambas fuerzas se descomponen en sus componentes rectangulares

$$\vec{F}_C = \vec{F}_{Cx} + \vec{F}_{Cy} \quad y \quad \vec{G} = \vec{G}_x + \vec{G}_y$$

En estado de equilibrio :

$$\vec{F}_{Cx} = \vec{G}_x = \left|\vec{G}\right| sen\varphi = \left|\vec{F}_C\right| \cos\varphi \Rightarrow$$

$$F_C = G\tan\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2} \qquad \tan\varphi = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

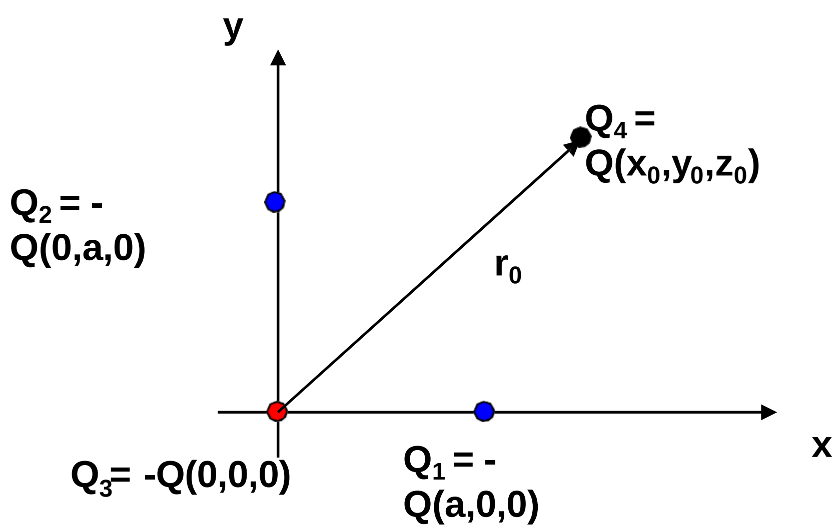
$$Q = \sqrt{G\frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}} 4\pi\varepsilon_0 d^2} = \sqrt{\frac{4{,}8\cdot 10^{-2}}{\sqrt{(0{,}3m)^{-2} - \left(4{,}8\cdot 10^{-2}\right)^2}}\frac{40\cdot 10^{-3}N}{9\cdot 10^9}(9{,}6\cdot 10^{-2})^2}$$

$$Q = 81{,}54nC$$

Suma vectorial de fuerzas electrostáticas

En un sistema de coordenadas rectangulares se encuentran dos cargas negativas en los puntos $P_1 = (a; 0; 0)$ y $P_2 = (0; a; 0)$. En la posición $P_3 = (0; 0; 0)$ se coloca una tercera carga positiva. Se desea colocar una cuarta carga en tal lugar, que la fuerza resultante en la carga situada en el origen de los ejes sea cero.

¡Determine las coordenadas de esta cuarta carga si se parte del hecho de que todas las cargas tienen la misma carga Q!



$$\vec{E}_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{a}_x}{a^2} + \frac{\vec{a}_y}{a^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\vec{a}_x + \vec{a}_y\right) = \vec{E}_4$$

$$\vec{E}_4 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x_0\vec{a}_x}{\left(x_0^2 + y_0^2\right)^3} + \frac{y_0\vec{a}_y}{\left(x_0^2 + y_0^2\right)^3}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\vec{a}_x + \vec{a}_y\right) \Rightarrow$$

$$\frac{x_0\vec{a}_x}{\left(x_0^2 + y_0^2\right)^3} = \frac{\vec{a}_x}{a^2} \Rightarrow \frac{x_0}{\left(x_0^2 + y_0^2\right)^3} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow \frac{\left(x_0^2 + y_0^2\right)^{3/2}}{x_0} = a^2$$

con $x_0 = y_0$:

$$\frac{\left(2x_0^2\right)^{3/2}}{x_0} = a^2 = \frac{\left(2^{3/2} x_0^3\right)}{x_0} \Rightarrow x_0^2 = \frac{a^2}{2^{3/2}}$$

$$x_0 = \frac{a}{2^{3/4}} = 0{,}5946\ a$$

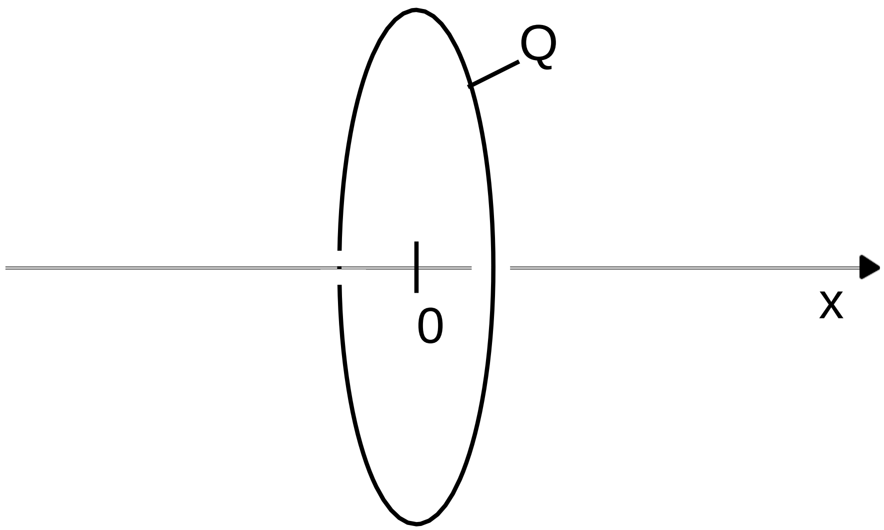
Campo eléctrico de una línea de carga anular:

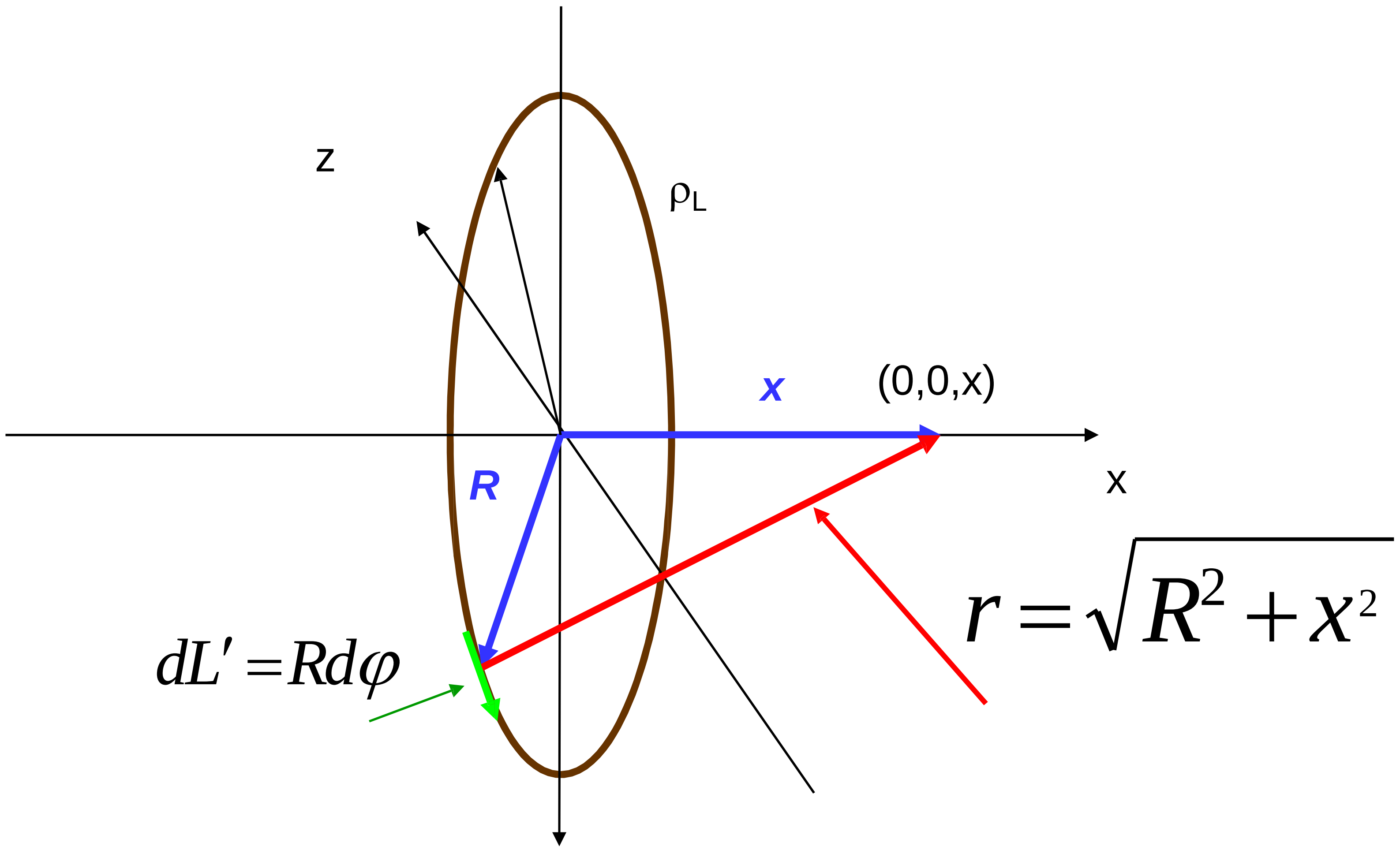
Un anillo de radio R está formado por una conductor muy delgado y tiene una carga eléctrica positiva Q distribuída uniformemente a lo largo del mismo. El eje x de un sistema de coordinadas se coloca en el centro de dicho anillo.

Determine:

a) La trayectoria de la intensidad de campo $E_x(x)$ sobre el eje x!

b) El punto sobre el eje x en el cual aparecen los valores máximos de E_x!

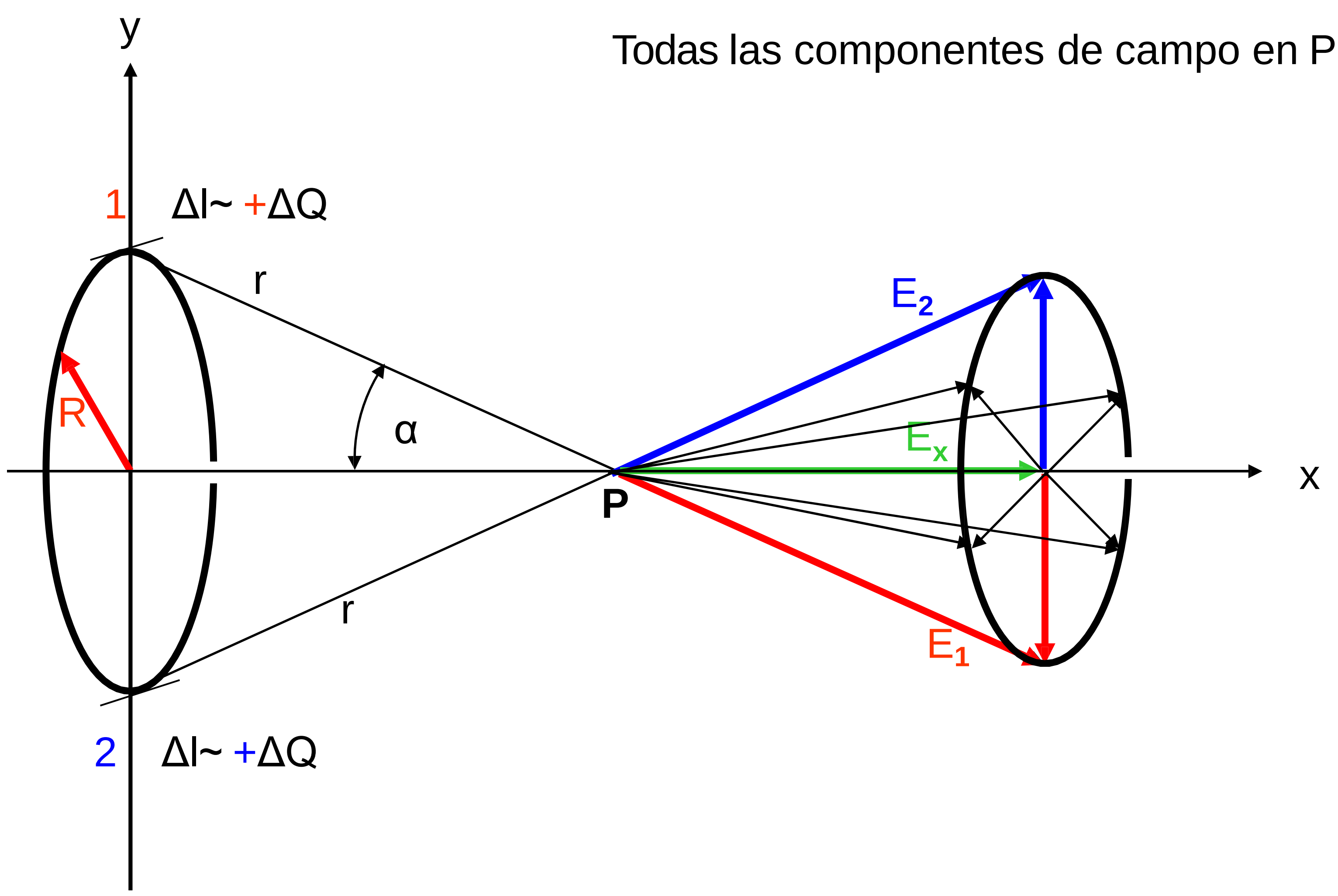




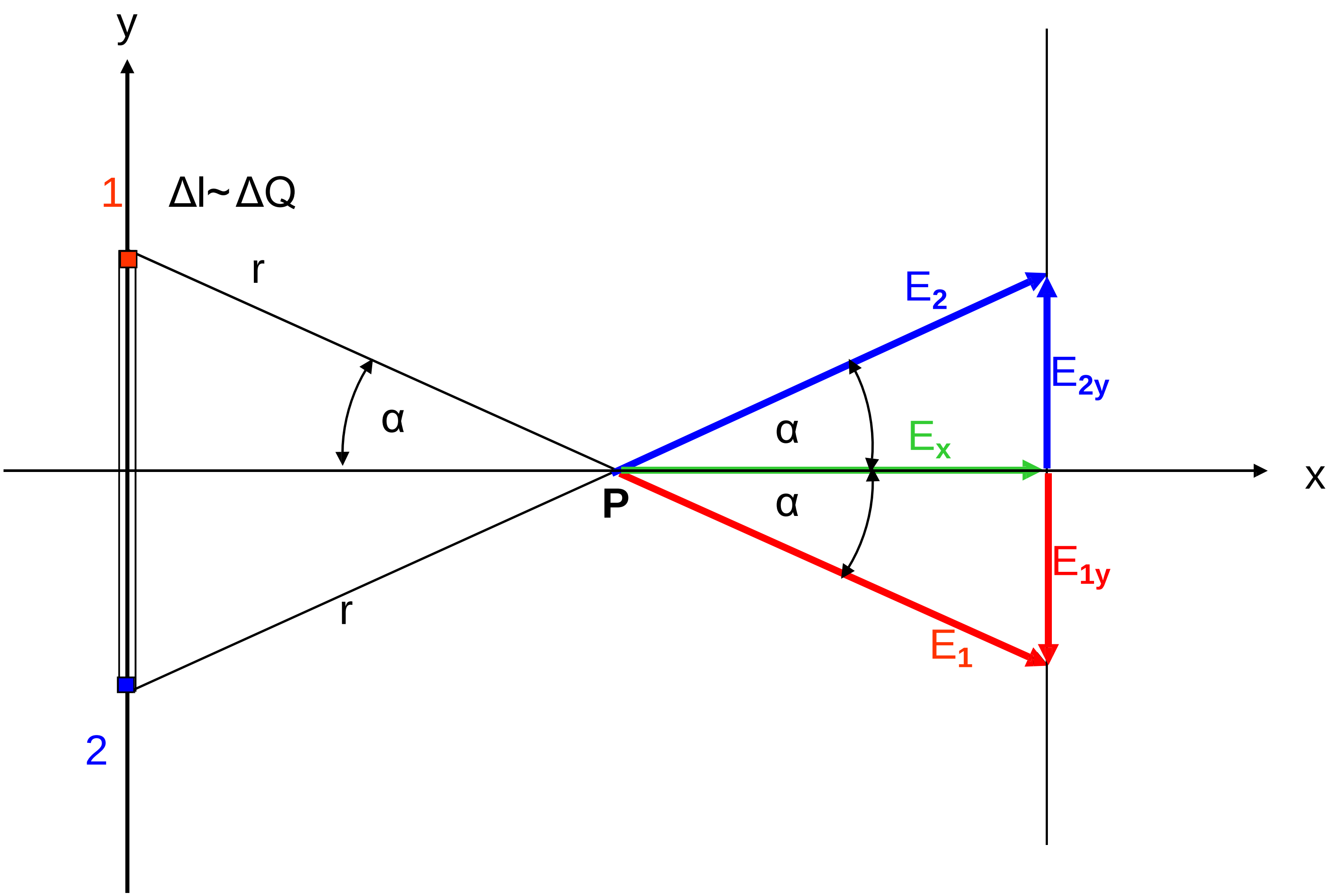
z
ρ_L
x
(0,0,x)
x
R
$r = \sqrt{R^2 + x^2}$
$dL' = R d\varphi$

Campo eléctrico de una línea de carga anular:

Todas las componentes de campo en P



Campo eléctrico de una línea de carga anular:



Campo eléctrico de una línea de carga anular:

$$dQ = \frac{dl}{2\pi R}\cdot Q = \frac{Q}{2\pi R} R\,d\varphi$$

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 \left|r^2\right|}\cdot \vec{a}_r = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 \left|R^2\right|}\,\vec{a}_r$$

Como la componente radial de E se cancela en todo punto :

$$d\vec{E}_x = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha\;\vec{a}_x = \frac{Q}{2\pi R} R\,d\varphi \frac{x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{a}_x \quad con\ \ r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$\vec{E}_x = \frac{Q}{2\pi R} R \frac{x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int_0^{2\pi} d\varphi\;\vec{a}_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(\sqrt{R^2 + x^2}\right)^3}\,\vec{a}_x$$

Campo eléctrico de una línea de carga anular:

$$\frac{d}{dx}\left(\vec{E}_x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(\sqrt{R^2+x^2}\right)^3}\vec{a}_x\right)$$

Regla de la cadena :

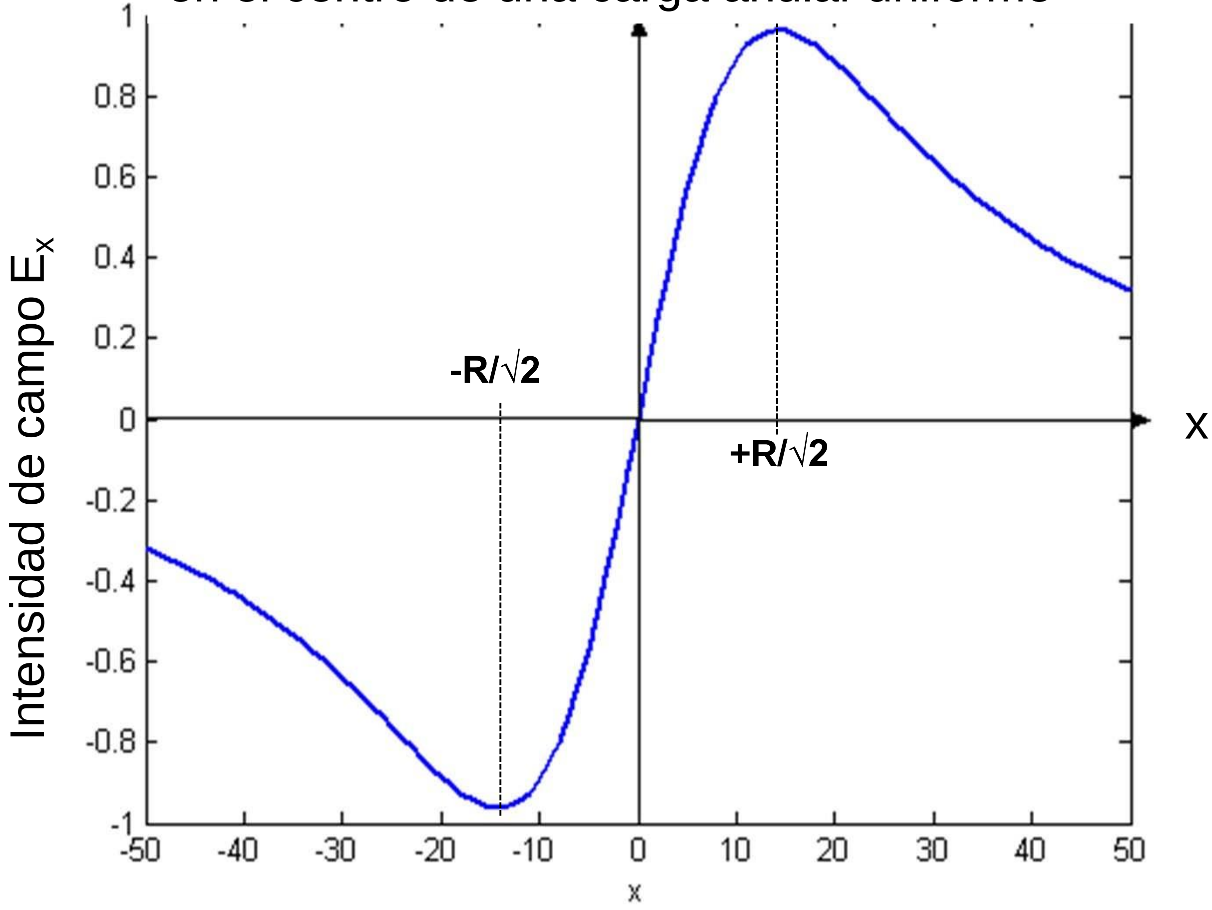
$$\frac{d}{dx}\left(E_x\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\left(\sqrt{R^2+x^2}\right)^3}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(\sqrt{R^2+x^2}\right)^3-3x^2\left(R^2+x^2\right)^{1/2}}{\left(R^2+x^2\right)^3}\right]=0$$

$$\left(\sqrt{R^2+x^2}\right)\left(R^2+x^2\right)=3x^2\left(R^2+x^2\right)^{1/2}\Rightarrow R^2=2x^2\Rightarrow x=\pm\frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$E_{\left(\pm\frac{R}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pm\frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{R^2+\left(\pm\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)^3}=\frac{Q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Campo eléctrico de una línea de carga anular:

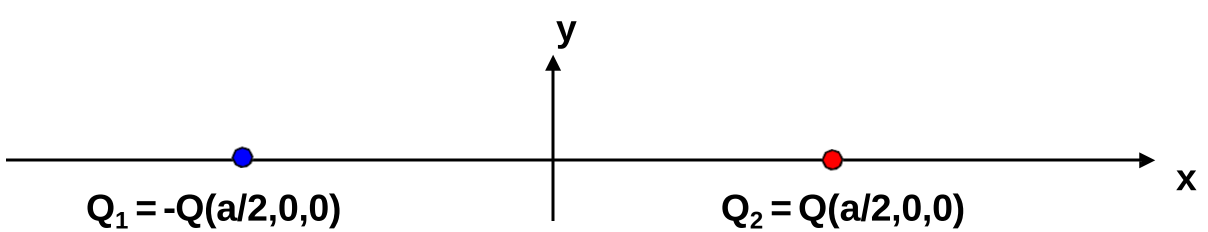
Intensidad de campo E sobre el eje x ubicado en el centro de una carga anular uniforme



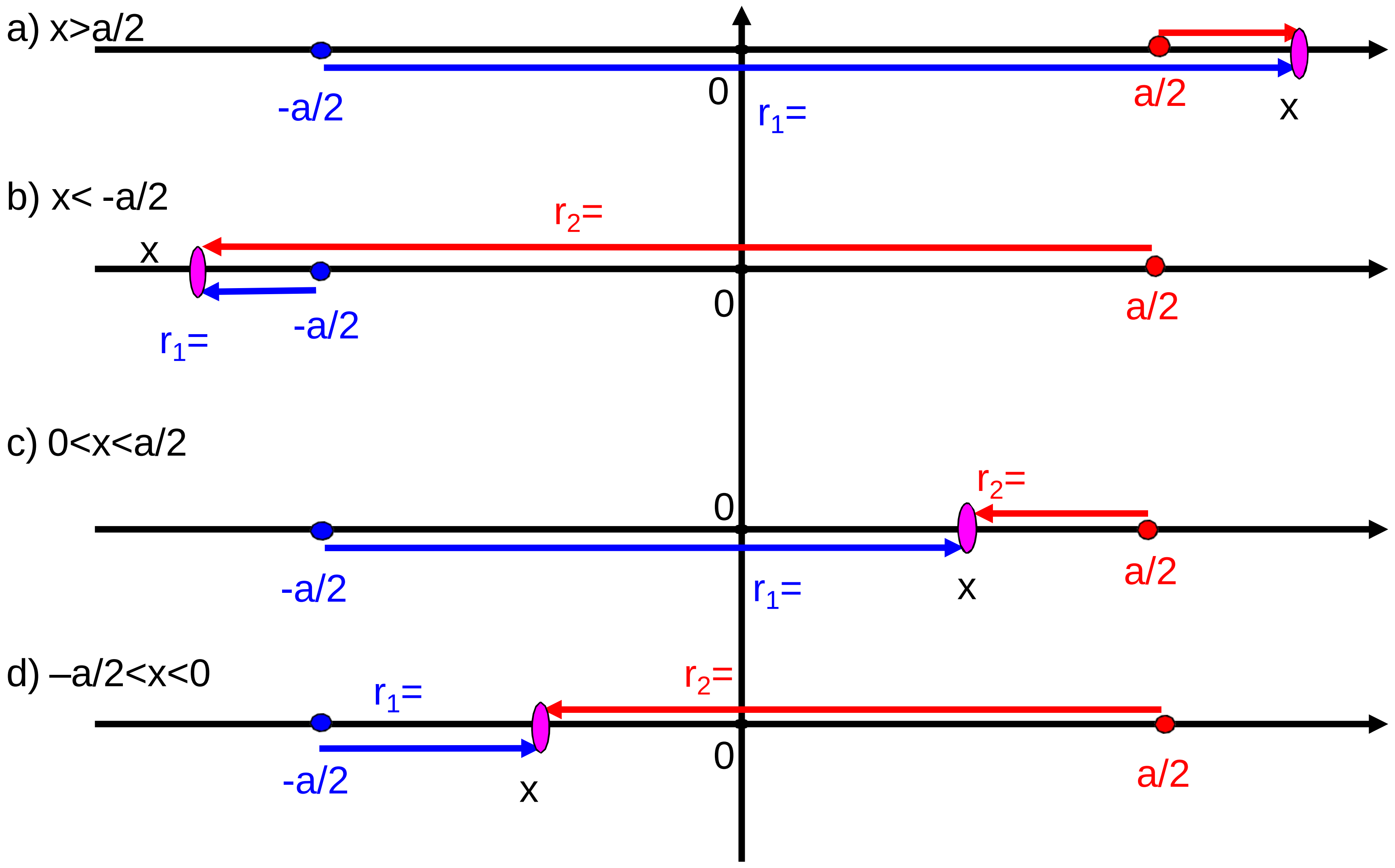
Dipolo electrostático

Una carga puntual negativa $Q_1 = -Q$ y otra positiva $Q_2 = +Q$ se ubican sobre el eje x de un sistema de coordenadas en $x_1 = -a/2$ o bien $x_2 = +a/2$ respectivamente.

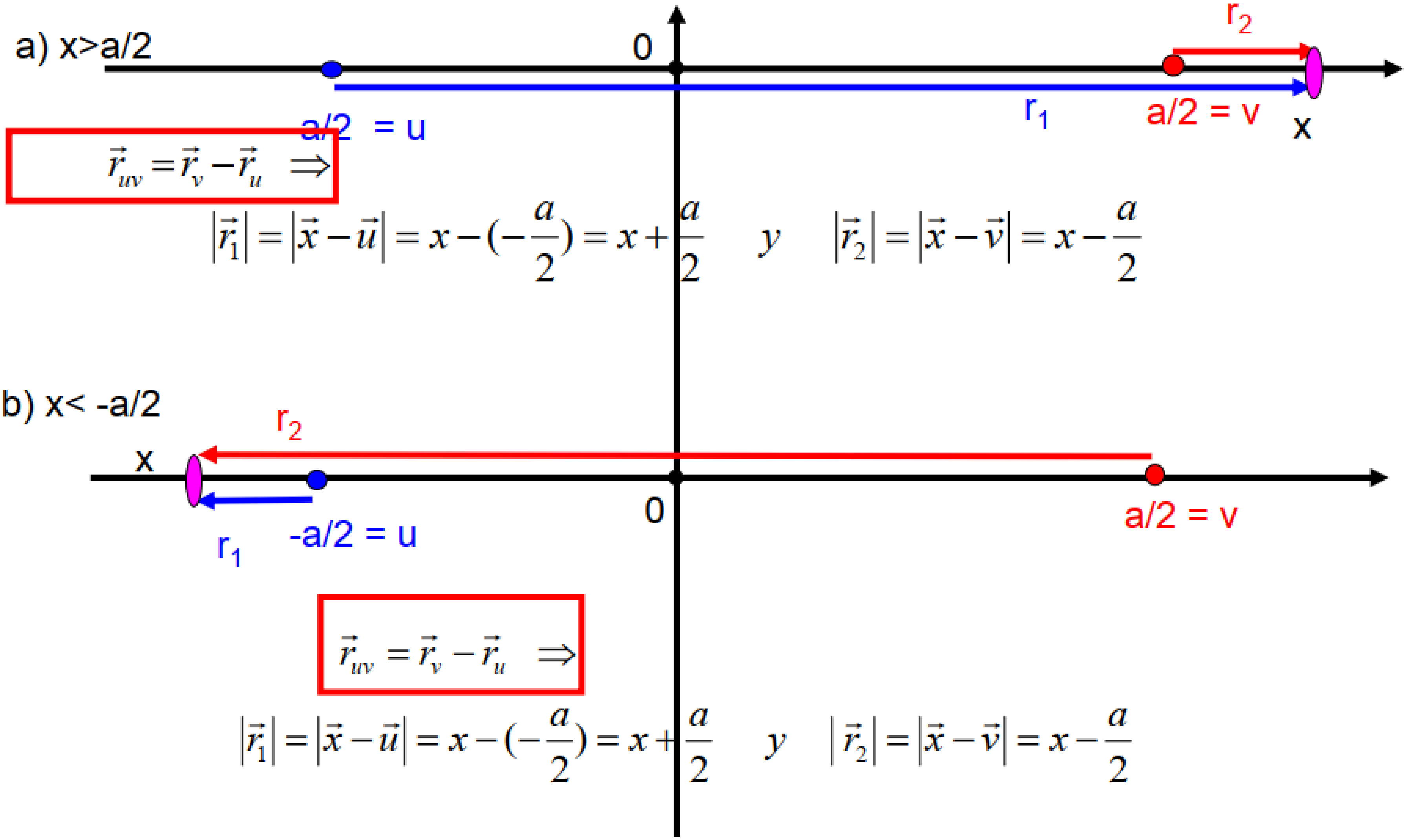
a) ¿Qué dirección tiene el campo eléctrico sobre el eje x?
b) Determine por medio de cálculo la componente x de dicho campo $E_x(x,0,0)$ y dibuje su trayectoria $E_x(x,0,0)$!
c) Ahora se empieza a reducir la distancia ***a*** y a la vez se aumenta la magnitud de las cargas de tal modo que el producto $\mathbf{p = Q \cdot a}$ permanezca constante. ¡Calcule y dibuje $E_x(x,0,0)$ para el límite $\boldsymbol{a \to 0}$! ¡Compare este resultado con el de una carga puntual única! **p = Momento dipolar eléctrico**



Dipolo electrostático



Dipolo electrostático



$$\boxed{\vec{r}_{uv} = \vec{r}_v - \vec{r}_u \quad \Rightarrow}$$

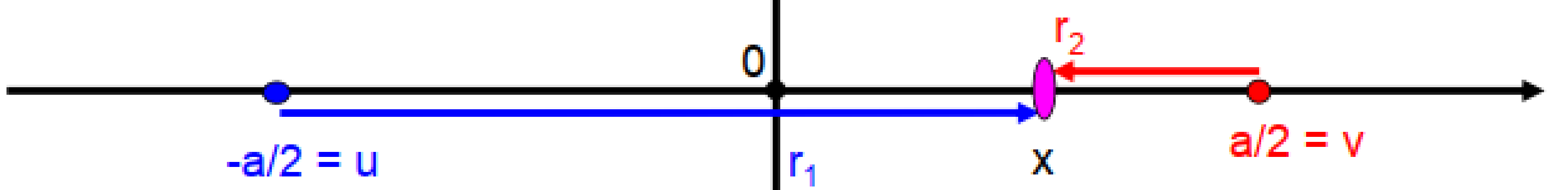
$$|\vec{r}_1| = |\vec{x} - \vec{u}| = x - (-\frac{a}{2}) = x + \frac{a}{2} \quad y \quad |\vec{r}_2| = |\vec{x} - \vec{v}| = x - \frac{a}{2}$$

$$\boxed{\vec{r}_{uv} = \vec{r}_v - \vec{r}_u \quad \Rightarrow}$$

$$|\vec{r}_1| = |\vec{x} - \vec{u}| = x - (-\frac{a}{2}) = x + \frac{a}{2} \quad y \quad |\vec{r}_2| = |\vec{x} - \vec{v}| = x - \frac{a}{2}$$

Dipolo electrostático

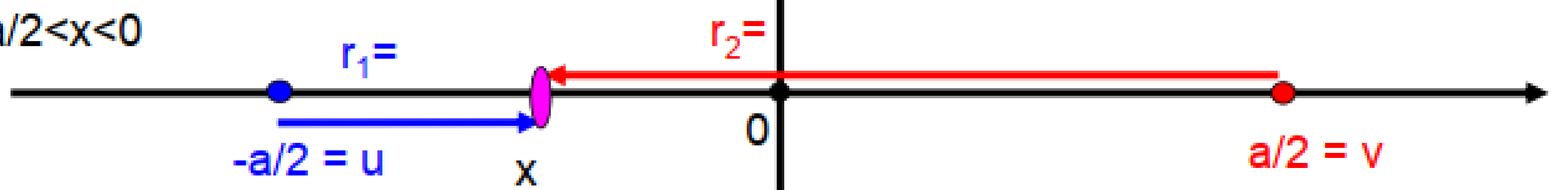
c) 0<x<a/2



$$\boxed{\vec{r}_{uv} = \vec{r}_v - \vec{r}_u \quad \Rightarrow}$$

$$|\vec{r}_1| = |\vec{x} - \vec{u}| = x - (-\frac{a}{2}) = x + \frac{a}{2} \quad y \quad |\vec{r}_2| = |\vec{x} - \vec{v}| = x - \frac{a}{2}$$

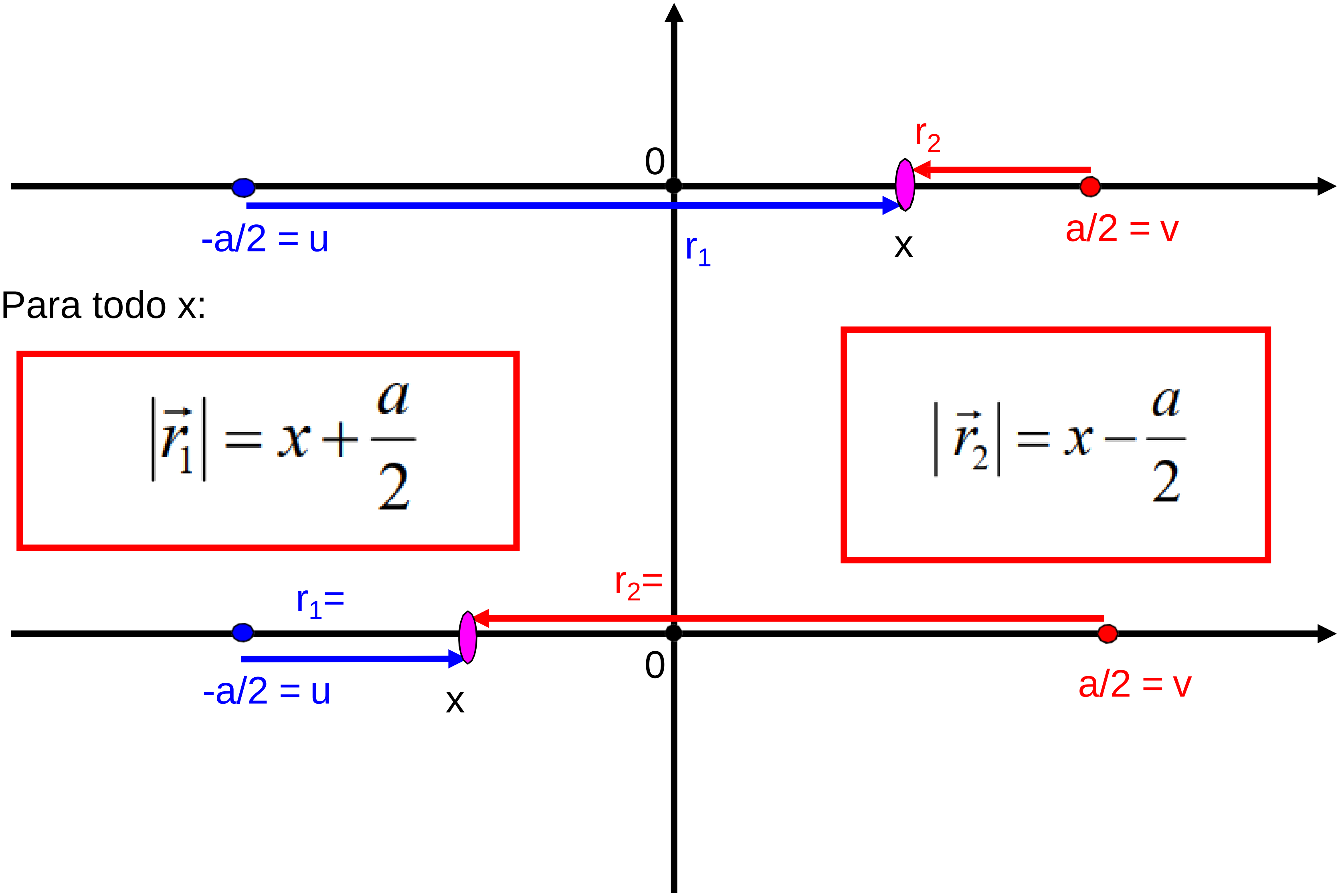
d) –a/2<x<0



$$\boxed{\vec{r}_{uv} = \vec{r}_v - \vec{r}_u \quad \Rightarrow}$$

$$|\vec{r}_1| = |\vec{x} - \vec{u}| = x - (-\frac{a}{2}) = x + \frac{a}{2} \quad y \quad |\vec{r}_2| = |\vec{x} - \vec{v}| = x - \frac{a}{2}$$

Dipolo electrostático



Para todo x:

$$\left|\vec{r}_1\right| = x + \frac{a}{2}$$

$$\left|\vec{r}_2\right| = x - \frac{a}{2}$$

Dipolo electrostático

$$E_X(x)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2}-\dfrac{1}{\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2}, & para \qquad x>\dfrac{a}{2}\\[2ex] -\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2}-\dfrac{1}{\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2}, & para \quad -\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{a}{2}\\[2ex] -\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2}, & para \qquad x<-\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

Dipolo electrostático

$$E_X(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \dfrac{2a|x|}{\left[|x|^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2\right]^2}, & para\ \ |x| > \dfrac{a}{2} \\[2ex] -\dfrac{2\left[|x|^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)\right]}{\left[|x|^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2\right]^2}, & para\ \ |x| < -\dfrac{a}{2} \end{cases}$$

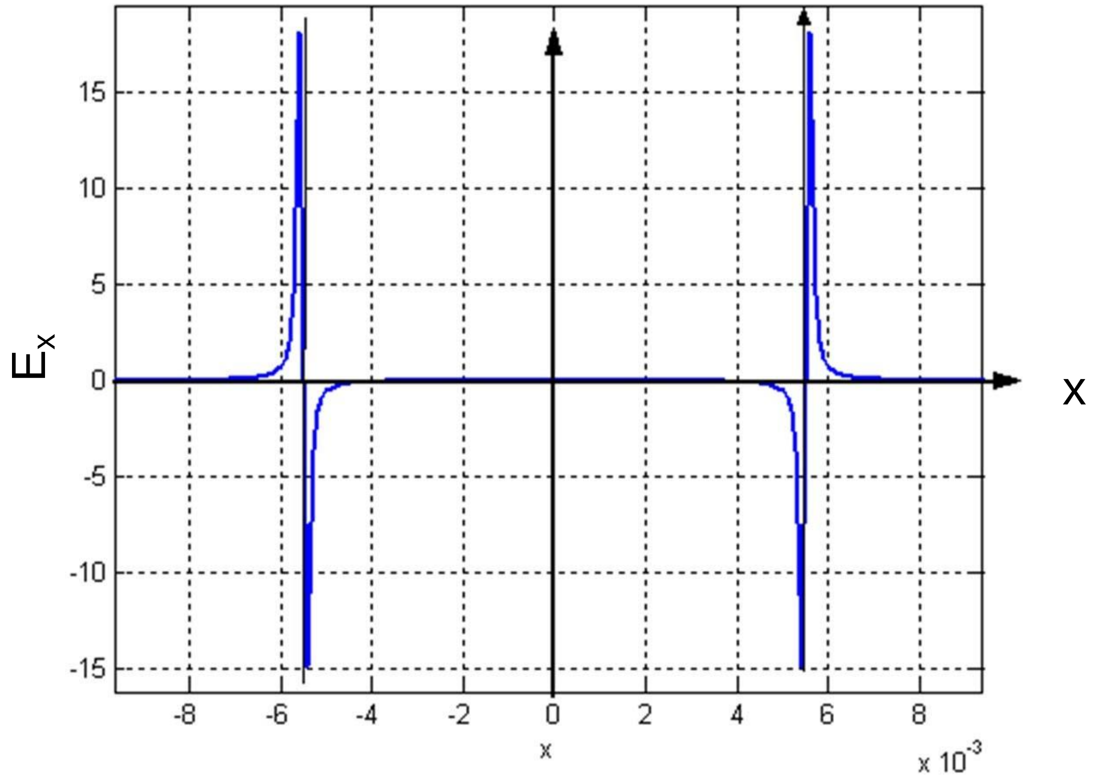
Dipolo electrostático

$$p = a \cdot Q = const.$$

$$\Rightarrow E_x(x) = \frac{2 \cdot p \cdot |x|}{4\pi\varepsilon_0 \left[|x|^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]^2} \xrightarrow{a \to 0} \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 |x|^3} \sim \frac{1}{|x|^3}$$

Dipolo electrostático

Intensidad de campo E_x de un dipolo electrostático

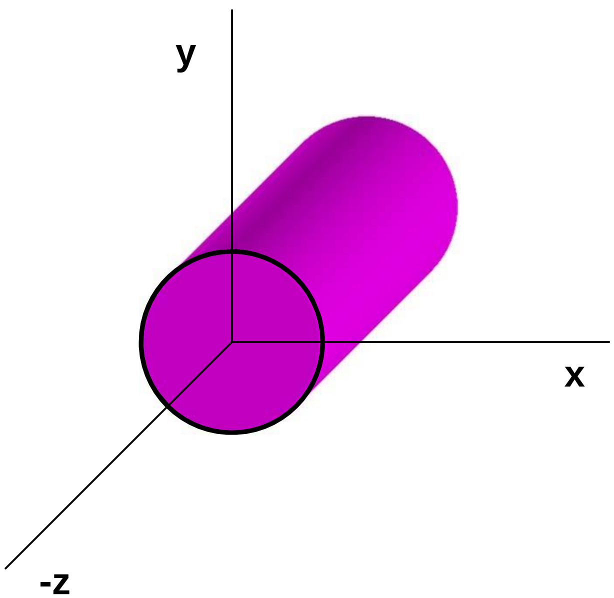


$$\otimes Q = \rho_v \otimes V$$

Campo causado por una distribución volumétrica uniforme de carga.

$$\rho_v = \lim_{\otimes v \to 0} \frac{\otimes Q}{\otimes v}$$

$$Q = \int_{vol} \rho_v dv$$



$$\rho_v = -5e^{-10^5 rz} \quad \mu C / m^3$$

$$Q = \int_{vol} \rho_v dv$$

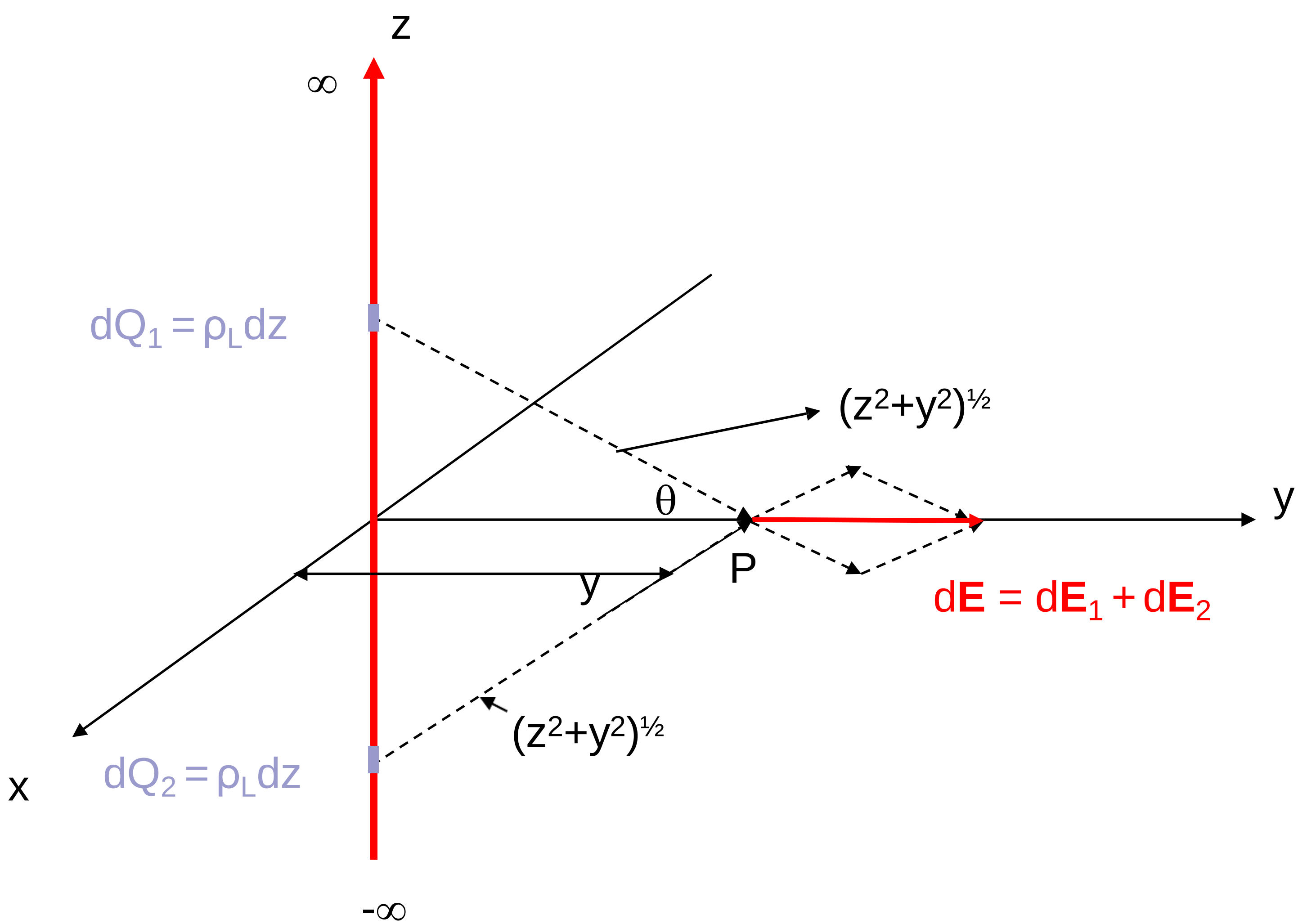
$0 < z < 2$ cm

$0 < r < 1$ cm

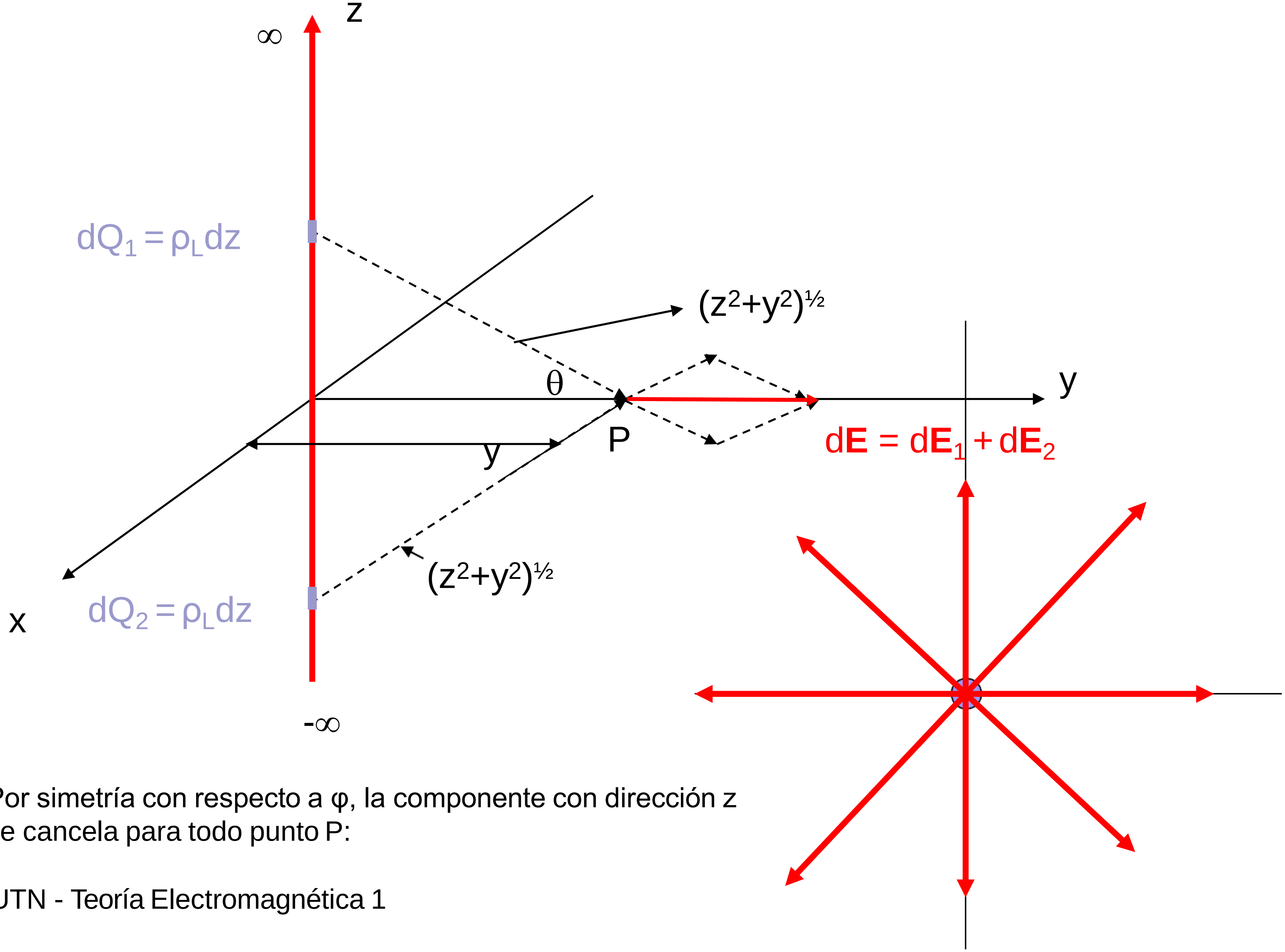
$0 < \varphi < 2\pi$

Ejemplo 2.3 texto

Campo de un conductor infinito de carga lineal ρL uniforme

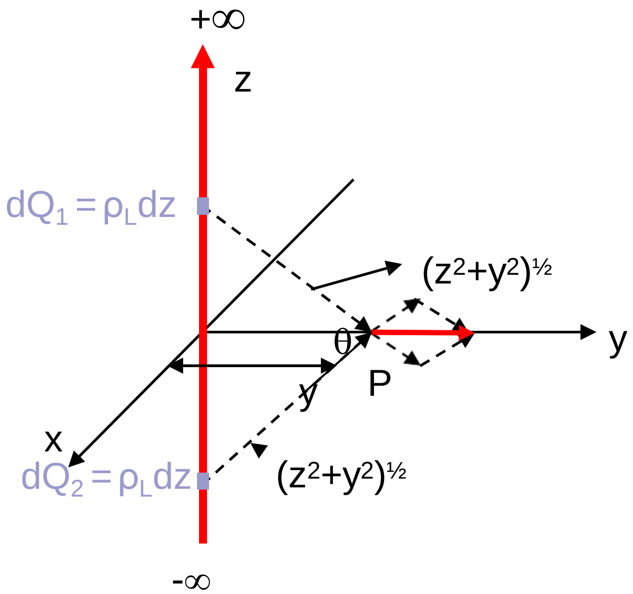


Campo de un conductor infinito de carga lineal ρL uniforme



Por simetría con respecto a φ, la componente con dirección z se cancela para todo punto P:

Campo de un conductor infinito de carga lineal ρL uniforme

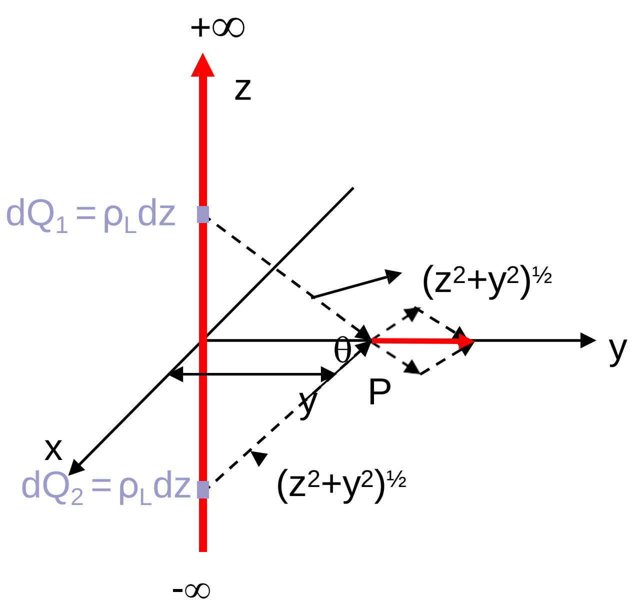


$$d\vec{E}_1 = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}$$

$$d\vec{E}_2 = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$$

Por simetría con respecto a φ, la componente con dirección z se cancela para todo punto P:

Campo de un conductor infinito de carga lineal ρL uniforme



$$d\vec{E}y = d\vec{E}\cos\theta = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\,\vec{a}_y$$

con magnitud solamente :

$$dEy = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{y}{r} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,y$$

$$dEy = \frac{\rho_L\,dz}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2+z^2}^{\,3}}\,y = \frac{\rho_L\,y}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dz}{\sqrt{y^2+z^2}^{\,3}}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

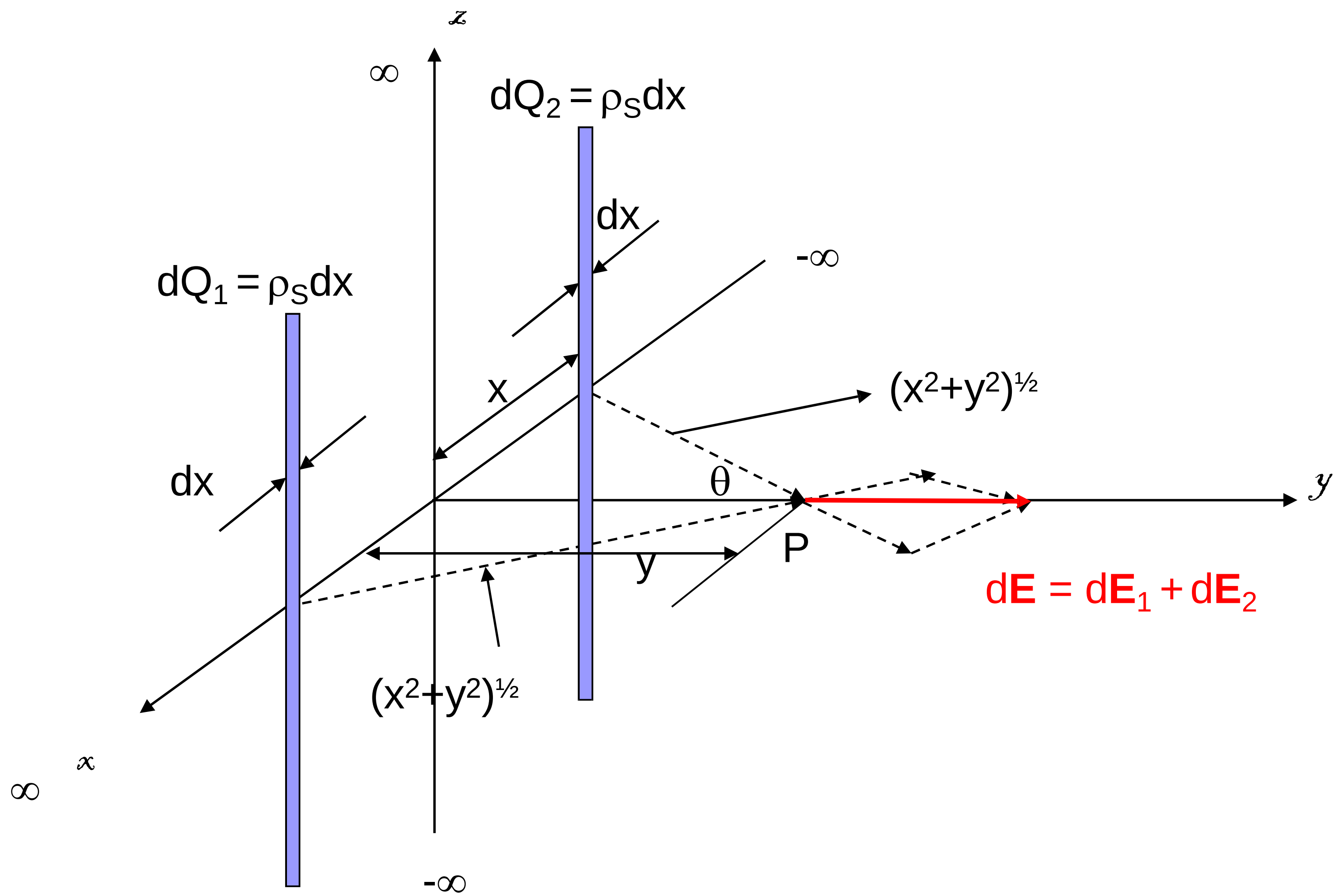
Bro.206

$$E_y = \frac{\rho_L\,y}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\sqrt{y^2+z^2}^{\,3}} = \frac{\rho_L\,y}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{z}{y^2\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} =$$

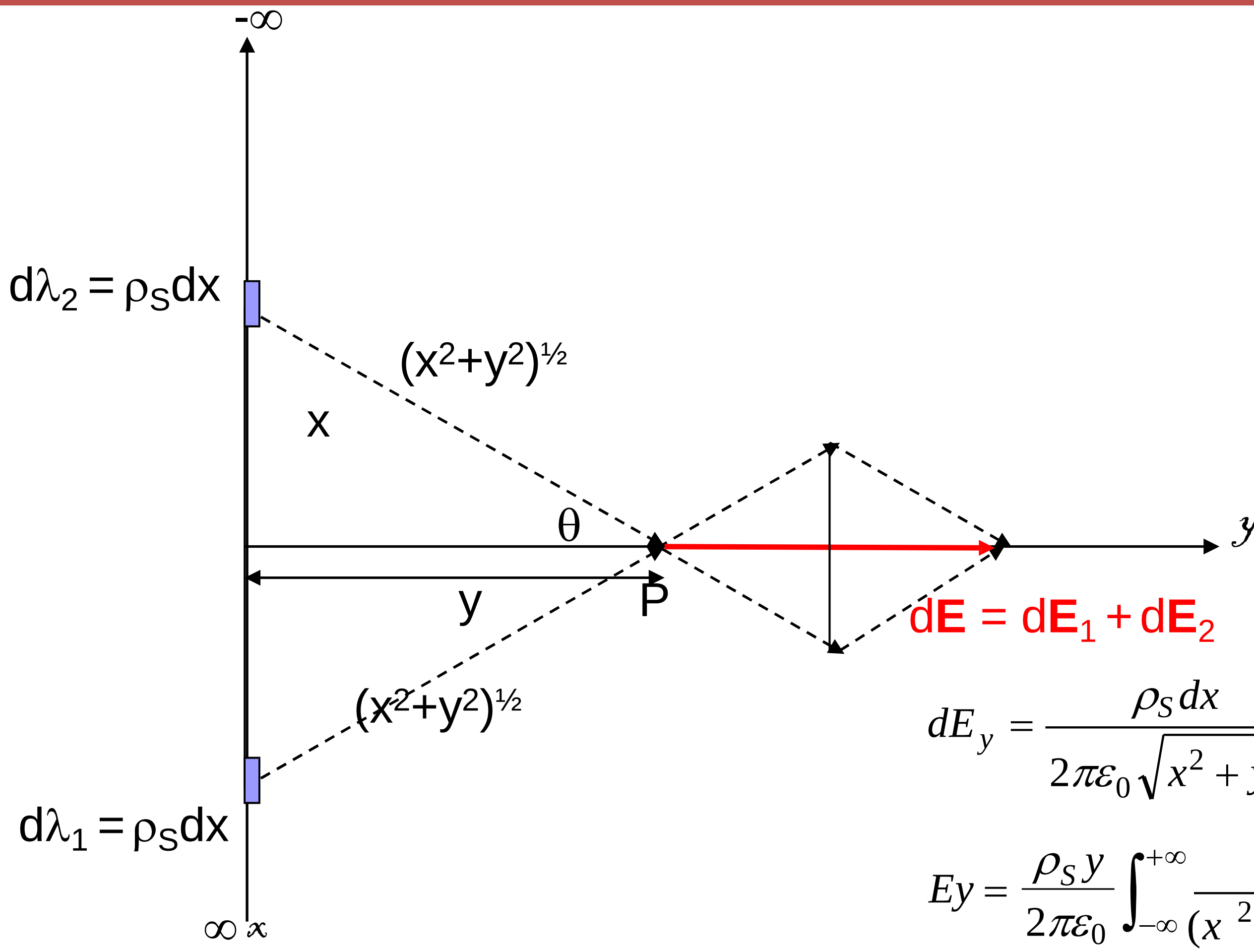
$$E_y = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{y} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y}$$

$$\boxed{E_y = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 y}}$$

Campo de una lámina infinita de carga superficial



Campo de una lámina infinita de carga superficial



$$dE_y = \frac{\rho_S\, dx}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}\cos\theta = \frac{\rho_S\, y\, dx}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}$$

$$Ey = \frac{\rho_S\, y}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y^2)} = \frac{\rho_S\, y}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{y}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty}$$

$$Ey = \frac{\rho_S}{2\pi\varepsilon_0}\pi \quad para \quad y>0$$

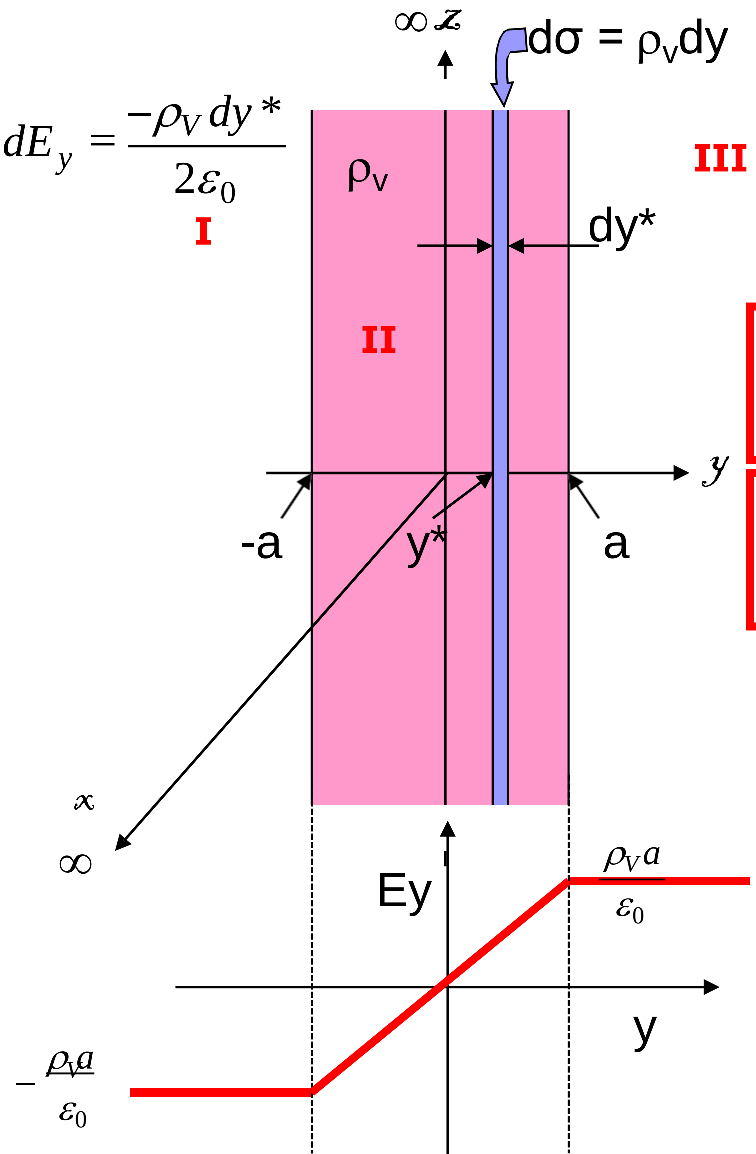
$$Ey = -\frac{\rho_S}{2\pi\varepsilon_0}\pi \quad para \quad y<0$$

Campo de un volumen uniformemente cargado

$$dE_y = \frac{-\rho_V\, dy^*}{2\varepsilon_0} \quad \textbf{I}$$

$$\textbf{III} \quad dE_y = \frac{\rho_V\, dy^*}{2\varepsilon_0}$$

x→∞, z→∞



$$\boxed{Ey = \int_{y^*=-a}^{y^*=+a} \frac{-\rho_V}{2\varepsilon_0}\, dy^* = \frac{-\rho_V\, a}{\varepsilon_0}} \quad para \quad y \le -a$$

$$\boxed{Ey = \int_{y^*=-a}^{y^*=+a} \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\, dy^* = \frac{\rho_V\, a}{\varepsilon_0}} \quad para \quad y \ge a$$

Para la regiòn II :

$$Ey = \int_{y^*=-a}^{y^*=+y} \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\, dy^* + \int_{y^*=y}^{y^*=a} \frac{-\rho_V}{2\varepsilon_0} dy^* = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}\, y$$

$$\boxed{Ey = \frac{-\rho_V\, y}{\varepsilon_0} \quad para - a \le y \le a}$$