Métodos Numéricos

Profesor: Ing. Félix David Suárez Bonilla — Diciembre, 2021

Universidad Técnica Nacional — 50 puntos

Angie Marchena Mondell — 604650904

Examen Parcial #2

El siguiente examen se debe resolver en forma individual. Su objetivo principal es evaluar los conocimientos adquiridos. Se atenderán consultas por correo.

Ejercicio #1

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, obtenga: la matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas y la matriz ampliada. (10pts)

$$4x + 2y + 3z = 0 \; 7x + 2y + 4z = 1 \; 5x + 1y + 2z = 2$$

Respuesta

$$4x + 2y + 3z = 0$$

$$7x + 2y + 4z = 1$$

$$5x + y + 2z = 2$$

Matriz ampliada asociada al sistema

Matriz coeficientes

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Matriz términos independientes

$$F_2 - \left(-\frac{7}{4}\right) F_1 \rightarrow F_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3/2 & -5/4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_3 - \left(-\frac{5}{4}\right) F_1 \rightarrow F_3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3/2 & -5/4 & 1 \\ 0 & -3/2 & -7/4 & 2 \end{pmatrix}$$

$F_3 - (1)F_2 \rightarrow F_3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3/2 & -5/4 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Formamos el nuevo sistema

$$4x + 2y + 3z = 0$$

$$0x - \frac{3}{2}y - \frac{5}{4}z = 1$$

$$0x + 0y - \frac{1}{2}z = 1$$

Con esto sacamos el valor de las variables:

$$-\frac{1}{2}z = 1 \ \rightarrow \ z = -2$$

$$-\frac{3}{2}y - \frac{5}{4}(-2) = 1 \ \rightarrow \ y = 1$$

$$4x + 2(1) + 3(-2) = 0 \rightarrow \ x = 1$$

Por lo que tenemos el valor de las incógnitas:

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio #2

Determine $f'(1.2)$ usando diferencias centrales para $f(x) = x^3 + e^{2x} + x$ y $h = 0.1$. (5pts)

Respuesta

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$f'(1.2) \approx \frac{f(1.2 + 0.1) - f(1.2 - 0.1)}{2(0.1)}$$

$$f'(1.2) \approx \frac{f(1.3) - f(1.1)}{0.2}$$

$$f'(1.2) \approx \frac{(1.3)^3 + e^{2(1.3)} + (1.3) - ((1.1)^3 + e^{2(1.1)} + (1.1))}{0.2}$$

$$f'(1.2) \approx 27.52$$

Ejercicio #3

Determine $f'(1.1)$ usando diferencias hacia adelante y diferencias hacia atrás para $f(x) = x^2 + e^{2x}$ y $h = 0.1$. (5pts)

Respuesta

Diferencias hacia adelante

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{f(1.1 + 0.1) - f(1.1)}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{f(1.2) - f(1.1)}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{(1.2)^2 + e^{2(1.2)} - ((1.1)^2 + e^{2(1.1)})}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx 22.28$$

Diferencias hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{f(1.1) - f(1.1 - 0.1)}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{f(1.1) - f(1.0)}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx \frac{(1.1)^2 + e^{2(1.1)} - ((1.0)^2 + e^{2(1.0)})}{0.1}$$

$$f'(1.1) \approx 18.45$$

Ejercicio #4

Use la regla de Simpson y la regla del Trapecio para calcular la siguiente integral definida. Use radianes. (10pts)

$$\int_{1}^{2} x^{\cos x}\ dx$$

Respuesta
Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)[f(a)+f(b)]}{2}$$

$$\int_1^2 x^{\cos x} dx \approx \frac{(2-1)[f(1)+f(2)]}{2}$$

$$\int_1^2 x^{\cos x} dx \approx \frac{[1^{\cos 1}+2^{\cos 2}]}{2}$$

$$\int_1^2 x^{\cos x} dx \approx 0.874$$

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$\int_1^2 x^{\cos x} dx \approx \frac{2-1}{6}\left[f(1)+4f\left(\frac{1+2}{2}\right)+f(2)\right]$$

$$\int_1^2 x^{\cos x} dx \approx \frac{1}{6}[1^{\cos 1}+4(3/2^{\cos 3/2})+2^{\cos 2}]$$

$$\int_1^2 x^{\cos x} dx \approx 0.978$$

Ejercicio #5

Use la regla del trapecio para calcular la siguiente integral definida. Considere radianes. (5 pts)

$$\int_1^2 e^{x^2}\ dx$$

Respuesta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)[f(a)+f(b)]}{2}$$

$$\int_1^2 e^{x^2}dx \approx \frac{(2-1)[f(1)+f(2)]}{2}$$

$$\int_1^2 e^{x^2}dx \approx \frac{[e^{1^2}+e^{2^2}]}{2}$$

$$\int_1^2 e^{x^2}dx \approx 28.658$$

Ejercicio #6

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, obtenga: la matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas, la matriz de los términos independientes, la matriz ampliada, el conjunto solución del sistema y por último, determine de que tipo de sistema se trata. (15 pts)

$$2x + 4y + 3z = 07x + 2y + 4z = 15x + 7y + 2z = 2$$

Respuesta

$$2x + 4y + 3z = 0$$

$$7x + 2y + 4z = 1$$

$$5x + 7y + 2z = 2$$

Matriz ampliada asociada al sistema

Matriz coeficientes

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Matriz términos independientes

$F_2 - \left(\frac{7}{2}\right) F_1 \to F_2$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & -13/2 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$F_3 - \left(\frac{5}{2}\right) F_1 \to F_3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & -13/2 & 1 \\ 0 & -3 & -11/2 & 2 \end{pmatrix}$$

$F_3 - \left(\frac{1}{4}\right) F_2 \to F_3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & -13/2 & 1 \\ 0 & 0 & -31/2 & 7/4 \end{pmatrix}$$

Formamos el nuevo sistema

$$2x + 4y + 3z = 0$$

$$0x - 12y - \frac{13}{2}z = 1$$

$$0x + 0y - \frac{31}{2}z = \frac{7}{4}$$

Con esto sacamos el valor de las variables:

$$-\frac{31}{2}z = \frac{7}{4} \ \rightarrow \ z = -\frac{14}{31}$$

$$-12y - \frac{13}{2}\left(-\frac{14}{31}\right) = 1 \ \rightarrow \ \ y = \frac{5}{31}$$

$$2x + 4\left(\frac{5}{31}\right) + 3\left(-\frac{14}{31}\right) = 0 \rightarrow \ \ x = \frac{11}{31}$$

Por lo que tenemos el valor de las incógnitas:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{11}{31} \\ \frac{5}{31} \\ -\frac{14}{31} \end{pmatrix}$$