Universidad Técnica Nacional

Área de Ciencias Básicas

Problemas resueltos para el curso CB-008 Física II

BSc. Iván Cordero

Última fecha de actualización
13 de agosto de 2020

Índice general

Capítulo 1

Introducción

A continuación se presentan una serie de ejercicios resueltos en detalle. Todos han sido tomados del libro de texto *Física Universitaria* de Sears-Zemansky-Young-Freedman, décimo tercera edición y su numeración corresponde con la del libro de texto.

Capítulo 2

Movimiento Periódico

2.1. Descripción de la oscilación

Ejercicio 14.2

Si un objeto en una superficie horizontal sin fricción se une a un resorte, se desplaza y después se suelta, oscilará. Si se desplaza 0,120 m a partir de su posición de equilibrio y se suelta con rapidez inicial cero, luego de 0,800 s su desplazamiento es de 0,120 m en el lado opuesto, habiendo pasado la posición de equilibrio una vez durante este intervalo. Calcule a) la amplitud, b) el periodo y c) la frecuencia.

Solución. **(a)** Las condiciones iniciales, posición y velocidad al inicio del movimiento

$$x_0 = 0,120\,\mathrm{m} \qquad \text{y} \qquad v_0 = 0 \tag{2.1}$$

nos permiten calcular la amplitud que viene dada por

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{(0,120\,\mathrm{m})^2 + \frac{0^2}{\omega^2}} = 0,120\,\mathrm{m}. \tag{2.2}$$

Es importante notar que aún cuando desconocemos el valor de la frecuencia angular ω esto es irrelevante para el cálculo ya que la rapidez inicial es igual a cero y el segundo término dentro del radical se anula. De hecho siempre podemos calcular el valor de la amplitud sin necesidad de calcular antes la frecuencia angular, esto cuando el objeto parte del reposo[1]

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{0^2}{\omega^2}} = |x_0| \tag{2.3}$$

es decir, la amplitud es igual al valor de la posición inicial despreciando el signo, debido a la definición del valor absoluto

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es un número positivo o igual a cero} \\ -x & \text{si } x \text{ es un número negativo} \end{cases} \tag{2.4}$$

[1]En caso contrario, que el objeto tenga una velocidad inicial distinta de cero, será necesario calcular primero la frecuencia angular para luego usar la fórmula de la amplitud.

(b) El periodo es, por definición, el tiempo que le toma al móvil regresar al punto de partida. De acuerdo con el problema, el tiempo necesario para ir desde el punto de partida $x_0 = 0,120\,\mathrm{m}$ hasta un punto situado en el extremo opuesto $x = 0,120\,\mathrm{m}$ pasando una vez por la posición de equilibrio $x = 0$ es $t_{1/2} = 0,800\,\mathrm{s}$, donde hemos usado el subíndice 1/2 para indicar que este es el tiempo que le toma recorrer la mitad de su trayectoria. De este modo, el periodo viene dado por el doble de dicho valor

$$T = 2 \cdot t_{1/2} = 2 \cdot 0,800\,\mathrm{s} = 1,60\,\mathrm{s}. \tag{2.5}$$

(c) Finalmente, la frecuencia puede calcularse de la definición

$$f = \frac{\#\,\text{de oscilaciones}}{t} = \frac{1/2}{t_{1/2}} = \frac{0,5}{0,800\,\mathrm{s}} = 0,625\,\mathrm{Hz} \tag{2.6}$$

o bien de la expresión

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,60\,\mathrm{s}} = 0,625\,\mathrm{Hz}. \tag{2.7}$$

■

Ejercicio 14.5

Una pieza de una máquina está en MAS con frecuencia de 5,00 Hz y amplitud de 1,80 cm. ¿Cuánto tarda la pieza en ir de $x = 0$ a $x =$ -1,80 cm?

Solución. Como la amplitud es $A =$ 1,80 cm la pieza está restringida a moverse en el intervalo $-1,80 < x < +1,80$, es decir, moverse desde $x = 0$ hasta $x =$ -1,80 cm, corresponde a una cuarta parte de su trayectoria.
El periodo, que es el tiempo que toma en realizar una oscilacion completa, puede calcularse de

$$f = \frac{1}{T} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5,00\,\mathrm{Hz}} = 0,200\,\mathrm{s} \tag{2.8}$$

de modo que el tiempo que toma recorrer un cuarto de oscilación es

$$t_{1/4} = \frac{1}{4} \cdot T = \frac{1}{4} \cdot 0,200\,\mathrm{s} = 0,0500\,\mathrm{s}. \tag{2.9}$$

■

2.2. Movimiento armónico simple

Ejercicio 14.11

Un bloque de 2,00 kg, que resbala sin fricción, se conecta a un resorte ideal con constante de fuerza de 300 N·m. En $t = 0$, el resorte no está estirado ni comprimido, y el bloque se mueve en la dirección negativa a 12,0 m/s. Calcule a) la amplitud y b) el ángulo de fase. c) Escriba una ecuación para la posición en función del tiempo.

Solución. **(a)** Las condiciones iniciales, posición y velocidad al inicio del movimiento

$$x_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad v_0 = -12,0\,\mathrm{m/s} \tag{2.10}$$

nos permiten calcular la amplitud que viene dada por

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{0^2 + \frac{(-12\,\mathrm{m/s})^2}{\omega^2}} = \frac{12\,\mathrm{m/s}}{\omega} \tag{2.11}$$

sin embargo, a diferencia del **Ejercicio 14.2**, para completar el cálculo es necesario conocer el valor de la frecuencia angular ω ya que al tener una velocidad inicial distinta de cero el segundo término dentro del radical no se anula.
La frecuencia angular para el sistema masa resorte se define como

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{300\,\mathrm{N\cdot m}}{2,00\,\mathrm{kg}}} = 12,2\,\mathrm{rad/s} \tag{2.12}$$

valor que al sustituir en la ecuación (11) nos dá como resultado $A = 0,984\,\mathrm{m}$.

(b) Luego, el ángulo de fase viene dado por

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) = \arctan\left(-\frac{-12\,\mathrm{m/s}}{12,2\,\mathrm{rad/s}\cdot 0}\right), \tag{2.13}$$

esto no se puede calcular, pues no está definida la división por cero. Sin embargo podemos calcular el ángulo de fase en el límite cuando $x_0 \to 0$

$$\phi = \lim_{x_0 \to 0}\left[\arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)\right] = \frac{\pi}{2}. \tag{2.14}$$

(c) Finalmente, la ecuación que describe la posición del resorte como función del tiempo es

$$x(t) = (0,984\,\mathrm{m})\cos\left[(12,2\,\mathrm{rad/s})\,t + \frac{\pi}{2}\right]. \tag{2.15}$$

■

Ejercicio 14.19

El desplazamiento en función del tiempo de una masa de 1,50 kg en un resorte está dado por la ecuación

$$x(t) = (7,40\,\mathrm{cm})\cos[(4,16s^{-1})t - 2,42]$$

Calcule a) el tiempo que tarda una vibración completa; b) la constante de fuerza del resorte; c) la rapidez máxima de la masa; d) la fuerza máxima que actúa sobre la masa; e) la posición, rapidez y aceleración de la masa en $t = 1{,}00$ s, y f) la fuerza que actúa sobre la masa en ese momento.

Solución. **(a)** Comparando el enunciado con la expresión para la posición como función del tiempo en el MAS

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{2.16}$$

podemos determinar

$$A = 7,40\,\mathrm{cm} \qquad \omega = 4,16\,\mathrm{rad/s} \qquad \phi = -2,42\,\mathrm{rad} \tag{2.17}$$

la amplitud, frecuencia angular y fase inicial del movimiento.
Por definición, el tiempo que tarda el móvil en una oscilación completa es el periodo del movimiento, que puede determinarse a partir de

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4,16\,\mathrm{rad/s}} = 1,51\,\mathrm{s}. \tag{2.18}$$

(b) De la definición de la frecuencia angular para un resorte en MAS

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad \Longrightarrow \qquad k = \omega^2 m = (4,16\,\mathrm{rad/s})^2 \cdot 1,50\,\mathrm{kg} = 26,0\,\mathrm{N/m} \tag{2.19}$$

obtenemos la constante elástica del resorte.

(c) La rapidez es la derivada de la posición

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \phi)] = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \tag{2.20}$$

y como la función seno es acotada entre -1 y 1, la rapidez máxima

$$v_{max} = A\omega = 0,0740\,\mathrm{m} \cdot 4,16\,\mathrm{rad/s} = 0,308\,\mathrm{m/s}. \tag{2.21}$$

(d) Usando la segunda ley de Newton $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ obtenemos

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \qquad \Longrightarrow \qquad F_R = ma \tag{2.22}$$

donde $\vec{F}_R$ es la fuerza del resorte, que es la única fuerza que actúa sobre la masa, además como el movimiento es unidimensional, hemos tomado únicamente la magnitud de la expresión anterior.
La aceleración es la derivada de la rapidez

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[-A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)] = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \tag{2.23}$$

y como la función coseno es acotada entre -1 y 1, la aceleración máxima

$$a_{max} = A\omega^2 = 0,0740\,\mathrm{m} \cdot (4,16\,\mathrm{rad/s})^2 = 1,28\,\mathrm{m/s^2}, \tag{2.24}$$

de modo que la fuerza máxima viene dada por

$$(F_R)_{max} = ma_{max} = 1,50\,\mathrm{kg} \cdot 1,28\,\mathrm{m/s^2} = 1,92\,\mathrm{N}. \tag{2.25}$$

(e) Evaluando las expresiones como función del tiempo en $t = 1,00\,\mathrm{s}$ obtenemos la posición

$$x(1,00\,\mathrm{s}) = (0,0740\,\mathrm{m}) \cos[(4,16 s^{-1}) \cdot 1,00\,\mathrm{s} - 2,42] = -0,0125\,\mathrm{m}, \tag{2.26}$$

rapidez

$$v(1,00\,\mathrm{s}) = -(0,0740\,\mathrm{m}) \cdot (4,16\,\mathrm{rad/s}) \operatorname{sen}[(4,16 s^{-1}) \cdot 1,00\,\mathrm{s} - 2,42] = -0,303\,\mathrm{m/s}, \tag{2.27}$$

y aceleración

$$a(1,00\,\mathrm{s}) = -(0,0740\,\mathrm{m}) \cdot (4,16\,\mathrm{rad/s})^2 \cos[(4,16 s^{-1}) \cdot 1,00\,\mathrm{s} - 2,42] = 0,216\,\mathrm{m/s^2}, \tag{2.28}$$

en el instante requerido.[2]

Note que el signo negativo en la posición indica que el objeto se encuentra a la izquierda de la posición de equilibrio mientras que el signo negativo en la velocidad indica que se mueve hacia la izquierda, es decir, alejándose de la posición de equilibrio. Por otro lado la aceleración tiene signo positivo pues la fuerza actúa siempre en dirección de la posición de equilibrio, en este caso hacia la derecha.

Podemos calcular también el valor de la fase $\theta(t) = \omega t + \phi$ en el instante $t = 1,00\,\mathrm{s}$

$$\theta(1,00\,\mathrm{s}) = (4,16 s^{-1}) \cdot 1,00\,\mathrm{s} - 2,42 = 1,74\,\mathrm{rad} \tag{2.29}$$

que al convertirlo a grados

$$1,74\,\mathrm{rad} \times \frac{180^\circ}{\pi\,\mathrm{rad}} = 99,7^\circ \tag{2.30}$$

nos permite ver de forma simple, que el ángulo de fase está en el segundo cuadrante ($90^\circ < \theta < 180^\circ$). Así los resultados obtenidos son consistentes con la interpretación del ángulo de fase

[2] Note que los argumentos de las funciones seno y coseno involucradas están en radianes, de modo que debe utilizar la calculadora en modo `Rad` al realizar los cálculos.

vista en clase, cuando la fase está en el segundo cuadrante, el objeto se encuentra a la izquierda de la posición de equilibrio y está alejándose.

(f) Por último, la fuerza en el instante $t = 1,00\,\mathrm{s}$

$$F_R(1,00\,\mathrm{s}) = ma(1,00\,\mathrm{s}) = 1,50\,\mathrm{kg} \cdot 0,216\,\mathrm{m/s^2} = 0,324\,\mathrm{N}. \tag{2.31}$$

■

2.3. Energía en el movimiento armónico simple

Ejercicio 14.30

Un juguete de 0,150 kg está en MAS en el extremo de un resorte horizontal con constante de fuerza k = 300 N·m. Cuando el objeto está a 0,0120 m de su posición de equilibrio, tiene una rapidez de 0,300 m/s. Calcule a) la energía total del objeto en cualquier punto de su movimiento; b) la amplitud del movimiento; c) la rapidez máxima alcanzada por el objeto durante su movimiento.

Solución. **(a)** La energía total del objeto es igual a la suma de las energías cinética y potencial elástica

$$\begin{aligned} E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \\ = \frac{1}{2}\left[0,150\,\mathrm{kg} \cdot (0,300\,\mathrm{m/s})^2 + 300\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot (0,0120\,\mathrm{m})^2\right] = 0,0284\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{2.32}$$

y como la energía total es una cantidad conservada, su valor es igual en este instante a cualquier otro punto del movimiento.

(b) De la expresión para la energía total

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,0284\,\mathrm{J}}{300\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}} = 0,0138\,\mathrm{m} \tag{2.33}$$

obtenemos la amplitud del movimiento.

(c) Finalmente, el objeto alcanza su rapidez máxima cuando la energía potencial se anula $U = 0$. Usando esto en la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{kA^2}{m}} = \sqrt{\frac{300\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot (0,0138\,\mathrm{m})^2}{0,150\,\mathrm{kg}}} = 0,617\,\mathrm{m/s} \tag{2.34}$$

nos permite obtener el valor de su rapidez máxima. ■

Ejercicio 14.33

Una masa oscila con amplitud A en el extremo de un resorte. ¿A qué distancia (en términos de A) se encuentra esta masa con respecto a la posición de equilibrio del resorte cuando la energía potencial elástica es igual a la energía cinética?

Solución. Usando la conservación de la energía $E = K + U$ cuando la energía potencial elástica es igual a la energía cinética $U = K$ obtenemos

$$E = U + U = 2U \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}kA^2 = 2\frac{1}{2}kx^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{\frac{A^2}{2}} = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} \tag{2.35}$$

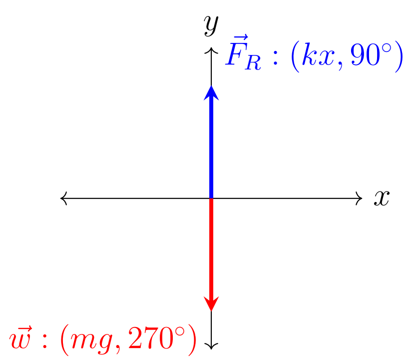
la distancia desde la posición de equilibrio en que se encuentra la masa cuando la energía potencial es igual a la cinética. ■

2.4. Aplicaciones del movimiento armónico simple

Ejercicio 14.36

Un orgulloso pescador de alta mar cuelga un pescado de 65,0 kg de un resorte ideal de masa despreciable. El pescado estira el resorte 0,120 m. a) Calcule la constante de fuerza del resorte. Ahora se tira del pez 5,00 cm hacia abajo y luego se suelta. b) ¿Qué periodo de oscilación tiene el pez? c) ¿Qué rapidez máxima alcanzará?

Solución. **(a)** El diagrama de cuerpo libre sobre el pescado



donde $\vec{F}_R$ es la fuerza del resorte y $\vec{w}$ es el peso del pescado. Usando la primera ley de Newton $\Sigma\vec{F} = 0$

$$\vec{F}_R + \vec{w} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad kx\hat{\jmath} - mg\hat{\jmath} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad kx = mg \tag{2.36}$$

podemos obtener para la constante elástica del resorte

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{65,0\,\mathrm{kg}\cdot 9,8\,\mathrm{m/s^2}}{0,120\,\mathrm{m}} = 5,31\times 10^3\,\mathrm{N/m}. \tag{2.37}$$

(b) Para calcular el periodo, primero necesitamos la frecuencia angular ω, que para un sistema masa resorte se define como

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5,31 \times 10^3\,\mathrm{N/m}}{65,0\,\mathrm{kg}}} = 9,04\,\mathrm{rad/s} \tag{2.38}$$

y luego utilizando la expresión para el periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9,04\,\mathrm{rad/s}} = 0,695\,\mathrm{s}. \tag{2.39}$$

(c) La rapidez es la derivada de la posición

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \phi)] = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \tag{2.40}$$

y como la función seno es acotada entre -1 y 1, la rapidez máxima

$$v_{max} = A\omega = 0,0500\,\mathrm{m} \cdot 9,04\,\mathrm{rad/s} = 0,452\,\mathrm{m/s}. \tag{2.41}$$

■

Ejercicio 14.43

Usted desea determinar el momento de inercia de una pieza mecánica complicada, con respecto a un eje que pasa por su centro de masa, así que la cuelga de un alambre a lo largo de ese eje. El alambre tiene una constante de torsión de 0,450 N·m/rad. Usted gira un poco la pieza alrededor del eje y la suelta, cronometrando 125 oscilaciones en 265 s. ¿Cuánto vale el momento de inercia buscado?

Solución. Usando la definición para la frecuencia angular de un péndulo de torsión

$$\omega^2 \equiv \frac{\kappa}{I} \qquad \Longrightarrow \qquad I = \frac{\kappa}{\omega^2} = \frac{0,450\,\mathrm{N \cdot m/rad}}{\omega^2} \tag{2.42}$$

obtenemos el momento de inercia de la pieza que cuelga, pero antes necesitamos calcular la frecuencia angular del sistema. Usando la definición de la frecuencia

$$f = \frac{\#\,\text{de oscilaciones}}{t} = \frac{125}{265\,\mathrm{s}} = 0,472\,\mathrm{Hz} \tag{2.43}$$

y luego, la relación de esta con la frecuencia angular

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,472\,\mathrm{Hz} = 2,96\,\mathrm{rad/s} \tag{2.44}$$

con lo cual podemos completar el cálculo del momento de inercia

$$I = \frac{0,450\,\mathrm{N \cdot m/rad}}{(2,96\,\mathrm{rad/s})^2} = 0,0514\,\mathrm{kg \cdot m^2}. \tag{2.45}$$

■

2.5. El péndulo simple

Ejercicio 14.45

Se tira de un péndulo simple de 0,240 m de longitud para moverlo 3,50° hacia un lado y luego se suelta. a) ¿Cuánto tarda la lenteja del péndulo en alcanzar su rapidez máxima? b) ¿Cuánto tarda si el péndulo se suelta a un ángulo de 1,75° en vez de 3,50°?

Solución. **(a)** El péndulo alcanzará su máxima rapidez cuando la energía potencial se anula $U = 0$ (ya que toda su energía estará manifestada como energía cinética), esto sucede en la posición de equilibrio.

Como el péndulo se suelta desde el reposo a un ángulo de $3,50°$ el tiempo que le toma llegar a la posición de equlibrio es una cuarta parte de su periodo (pues debe recorrer una cuarta parte de su trayectoria). Para calcular el periodo, primero necesitamos la frecuencia angular ω, que para un péndulo simple se define como

$$\omega^2 \equiv \frac{g}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9,8\,\mathrm{m/s^2}}{0,240\,\mathrm{m}}} = 6,39\,\mathrm{rad/s} \tag{2.46}$$

y luego utilizando la expresión para el periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6,39\,\mathrm{rad/s}} = 0,983\,\mathrm{s} \tag{2.47}$$

del cual, una cuarta parte

$$t_{1/4} = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4} \cdot 0,983\,\mathrm{s} = 0,246\,\mathrm{s}, \tag{2.48}$$

es el tiempo que le toma alcanzar su máxima rapidez.

(b) Como se estudió en clase, el periodo de oscilaciones pequeñas para un péndulo simple es independiente de la amplitud, es decir, su valor es el mismo sin importar desde donde inicia el movimiento. Por lo tanto el resultado es el mismo que se obtuvo en el apartado anterior $t = 0,246\,\mathrm{s}$ ■

Ejercicio 14.49

Después de posarse en un planeta desconocido, un explorador espacial fabrica un péndulo simple con longitud de 50,0 cm y determina que efectúa 100 oscilaciones completas en 136 s. ¿Cuánto vale g en ese planeta?

Solución. Usando la definición para la frecuencia angular de un péndulo simple

$$\omega^2 \equiv \frac{g}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad g = l\omega^2 = 0,500\,\mathrm{m} \cdot \omega^2 \tag{2.49}$$

obtenemos el valor de la aceleración de gravedad, pero antes necesitamos calcular la frecuencia angular del sistema. Usando la definición de la frecuencia

$$f = \frac{\#\,\text{de oscilaciones}}{t} = \frac{100}{136\,\text{s}} = 0,735\,\text{Hz} \tag{2.50}$$

y luego, la relación de esta con la frecuencia angular

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,735\,\text{Hz} = 4,62\,\text{rad/s} \tag{2.51}$$

con lo cual podemos completar el cálculo de la aceleración de gravedad

$$g = 0,500\,\text{m} \cdot (4,62\,\text{rad/s})^2 = 10,7\,\text{m/s}^2. \tag{2.52}$$

■

2.6. El péndulo físico

Ejercicio 14.54

> Una llave inglesa de 1,80 kg tiene su pivote a 0,250 m de su centro de masa y puede oscilar como péndulo físico. El periodo para oscilaciones de ángulo pequeño es de 0,940 s. a) ¿Qué momento de inercia tiene la llave con respecto a un eje que pasa por el pivote? b) Si la llave inicialmente se desplaza 0,400 rad de la posición de equilibrio, ¿qué rapidez angular tiene al pasar por la posición de equilibrio?

Solución. **(a)** Usando la definición para la frecuencia angular de un péndulo físico

$$\omega^2 \equiv \frac{mgd}{I} \qquad \Longrightarrow \qquad I = \frac{mgd}{\omega^2} = \frac{1,80\,\text{kg} \cdot 9,8\,\text{m/s}^2 \cdot 0,250\,\text{m}}{\omega^2} \tag{2.53}$$

obtenemos el momento de inercia del péndulo, pero antes necesitamos calcular la frecuencia angular del sistema. Usando la expresión para el periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,940\,\text{s}} = 6,68\,\text{rad/s} \tag{2.54}$$

obtenemos el valor de la frecuencia angular con el cual podemos completar el cálculo del momento de inercia

$$I = \frac{1,80\,\text{kg} \cdot 9,8\,\text{m/s}^2 \cdot 0,250\,\text{m}}{(6,68\,\text{rad/s})^2} = 0,0988\,\text{kg} \cdot \text{m}^2. \tag{2.55}$$

(b) Usando la ley de conservación de la energía mecánica

$$K_i + U_i = K_f + U_f \qquad \Longrightarrow \qquad 0 + mgh = \frac{1}{2} I v_\sigma^2 + 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_\sigma = \sqrt{\frac{2mgh}{I}} \tag{2.56}$$

donde h es la altura máxima que alcanza el péndulo y v_σ representa la rapidez angular con que gira, que es la única que contribuye a su energía cinética. hemos considerado que el péndulo alcanza instantáneamente el reposo al llegar a su máxima altura y que su energía potencial gravitacional es cero en el punto de equilibrio. La altura que alcanza el centro de masa del péndulo depende del ángulo de inclinación α

$$h = d(1 - \cos\sigma) \tag{2.57}$$

de este modo, la rapidez angular máxima viene dada por

$$\begin{aligned} v_\alpha = \sqrt{\frac{2mgd(1-\cos\sigma)}{I}} &= \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 1,80\,\mathrm{kg} \cdot 9,8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0,250\,\mathrm{m} \cdot [1 - \cos(0,400\,\mathrm{rad})]}{0,0988\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2}}} = 2,65\,\mathrm{rad/s}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

■

Ejercicio 14.56

Un adorno navideño con forma de esfera hueca de masa $M = 0{,}015$ kg y radio $R = 0{,}050$ m se cuelga de una rama mediante una espira de alambre unida a la superficie de la esfera. Si el adorno se desplaza una distancia corta y se suelta, oscila como péndulo físico con fricción despreciable. Calcule su periodo. (Sugerencia: Use el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de la esfera con respecto al pivote en la rama).

Solución. Para calcular el periodo, primero necesitamos la frecuencia angular ω, que para un péndulo físico se define como

$$\omega^2 \equiv \frac{mgd}{I} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} = \sqrt{\frac{0,015\,\mathrm{kg} \cdot 9,8\,\mathrm{m/s^2} \cdot d}{I}} \tag{2.59}$$

pero antes necesitamos el momento de inercia con respecto al pivote (punto alrededor del cual oscila el péndulo) y el brazo de palanca d (distancia entre el pivote y el centro de masa del objeto).

Para calcular el momento de inercia utilizamos el teorema de los ejes paralelos

$$I = I_{CM} + Mr^2 \tag{2.60}$$

donde I_{CM} es el momento de inercia con respecto al centro de masa del objeto, que para una esfera hueca viene dado por

$$(I_{CM})_{esfera\,hueca} = \frac{2}{3}MR^2, \tag{2.61}$$

M es la masa de la esfera y r es la distancia entre un eje que pasa por el centro de masa y un eje paralelo que pasa a través del pivote. Como el pivote se encuentra sobre la superficie de la esfera, la distancia r es igual al radio de la esfera R ya que es la distancia entre el centro de la esfera y la superficie. De este modo, el momento de inercia

$$
\begin{aligned}
I = \frac{2}{3}MR^2 + MR^2 = \frac{5}{3}MR^2 = \\
= \frac{5}{3}0,015\,\mathrm{kg} \cdot (0,050\,\mathrm{m})^2 = 6,25 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2. \quad (2.62)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, el brazo de palanca d también es igual al radio de la esfera R pues el pivote se ubica sobre la superficie de la esfera.

Ahora podemos completar el cálculo de la frecuencia angular

$$
\omega = \sqrt{\frac{0,015\,\mathrm{kg} \cdot 9,8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0,050\,\mathrm{m}}{6,25 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}} = 10,8\,\mathrm{rad/s}. \quad (2.63)
$$

Por último, utilizamos la expresión para el periodo

$$
T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10,8\,\mathrm{rad/s}} = 0,581\,\mathrm{s}. \quad (2.64)
$$

■

Capítulo 3

Ondas Mecánicas

3.1. Ondas periódicas

Ejercicio 15.3

¡Tsunami! El 26 de diciembre de 2004 ocurrió un gran terremoto en las costas de Sumatra, y desencadenó olas inmensas (un tsunami) que provocaron la muerte de 200 000 personas. Gracias a los satélites que observaron esas olas desde el espacio, se pudo establecer que había 800 km de la cresta de una ola a la siguiente, y que el periodo entre una y otra fue de 1,0 hora. ¿Cuál fue la rapidez de esas olas en m/s y en km/h? ¿Su respuesta le ayudaría a comprender por qué las olas causaron tal devastación?

Solución. La rapidez de una onda mecánica viene dada por $v = \lambda f = \lambda/T$ donde la longitud de onda λ es la distancia que hay entre dos crestas (o dos valles) sucesivos de una onda. Entonces

$$v = \frac{800000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 222\,\mathrm{m/s} \qquad\qquad v = \frac{800\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 800\,\mathrm{km/h} \tag{3.1}$$

son la rapidez de las olas en m/s y km/h respectivamente.

Es comprensible la devastación ya que ante tal rapidez con que sucede dicho desastre natural es prácticamente imposible evacuar a las personas. ■

Ejercicio 15.6

Un pescador observa que su bote se mueve periódicamente hacia arriba y hacia abajo, debido a las olas en la superficie del agua. Al bote le toma 2,5 s pasar de su punto más alto al más bajo, una distancia total de 0,62 m. El pescador nota que las crestas de las olas están separadas 6,0 m. a) ¿Con qué rapidez se mueven las olas? b) ¿Cuál es la amplitud de cada ola? c) Si la distancia vertical total que viaja el bote fuera de 0,30 m y los otros datos fueran los mismos, ¿cómo variarían las respuestas de los incisos a) y b).

Solución. **(a)** La longitud de onda es la distancia que hay entre dos crestas (o entre dos valles) sucesivos, $\lambda = 6,0\,\mathrm{m}$. La onda completa una oscilación cuando va desde el punto más alto hasta el más bajo y de regreso, de modo que el periodo viene dado por

$$T = 2 \cdot t_{1/2} = 2 \cdot 2,5\,\mathrm{s} = 5,0\,\mathrm{s} \tag{3.2}$$

donde hemos usado el subíndice 1/2 para indicar que 2,5 s es el tiempo que le toma a la onda realizar media oscilación.

Ahora la rapidez de la onda viene dada por

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{6,0\,\mathrm{m}}{5,0\,\mathrm{s}} = 1,2\,\mathrm{m/s}. \tag{3.3}$$

(b) La distancia que hay entre el punto más alto y el más bajo de la onda es el doble de la amplitud de la onda, que es la distancia que hay entre el punto de equilibrio y el punto más alejado de éste. Entonces

$$0,62\,\mathrm{m} = 2A \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{0,62\,\mathrm{m}}{2} = 0,31\,\mathrm{m}. \tag{3.4}$$

(c) La respuesta del inciso (a) no cambia pues la rapidez depende de la longitud de onda y del periodo, pero ninguno de estos ha cambiado. La respuesta del inciso (b) cambia pues la amplitud

$$0,30\,\mathrm{m} = 2A \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{0,30\,\mathrm{m}}{2} = 0,15\,\mathrm{m} \tag{3.5}$$

se reduce ya que la distancia vertical total es menor. ■

3.2. Descripción matemática de una onda

Ejercicio 15.8

La ecuación de cierta onda transversal es

$$y(x,t) = (6,50\,\mathrm{mm}) \cos 2\pi \left(\frac{x}{28,0\,\mathrm{cm}} - \frac{t}{0,0360\,\mathrm{s}} \right)$$

Determine a) amplitud, b) longitud de onda, c) frecuencia, d) rapidez de propagación y e) dirección de propagación de la onda.

Solución. **(a)** Comparando el enunciado con la expresión matemática para una onda

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{3.6}$$

podemos determinar

$$A = 6,50\,\mathrm{mm} = 0,00650\,\mathrm{m}, \qquad k = \frac{2\pi}{28,0\,\mathrm{cm}}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{0,0360\,\mathrm{s}}. \tag{3.7}$$

(b) De la expresión para el número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi/28,0\,\mathrm{cm}} = 0,280\,\mathrm{m} \tag{3.8}$$

obtenemos la longitud de onda.

(c) De la relación entre frecuencia y frecuencia angular

$$\omega = 2\pi f \qquad \Longrightarrow \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi/0,0360\,\mathrm{s}}{2\pi} = 27,8\,\mathrm{Hz} \tag{3.9}$$

obtenemos la frecuencia.

(d) La rapidez de propagación de la onda viene dada por

$$v = \lambda f = 0,280\,\mathrm{m} \cdot 27,8\,\mathrm{Hz} = 7,78\,\mathrm{m/s}. \tag{3.10}$$

(e) La dirección en que viaja la onda viene dada por el signo de ωt en el argumento de la función de onda. Como es negativo, indica que la onda se mueve hacia la derecha. ■

Ejercicio 15.10

Una onda de agua que viaja en línea recta en un lago queda descrita por la ecuación

$$y(x,t) = (13,75\,\mathrm{cm})\cos\big(0,450\,\mathrm{cm}^{-1}x + 5,40\,\mathrm{s}^{-1}t\big)$$

donde y es el desplazamiento perpendicular a la superficie tranquila del lago. a) ¿Cuánto tiempo tarda un patrón de onda completo en pasar por un pescador en un bote anclado, y qué distancia horizontal viaja la cresta de la onda en ese tiempo? b) ¿Cuál es el número de onda y el número de ondas por segundo que pasan por el pescador? c) ¿Qué tan rápido pasa una cresta de onda por el pescador y cuál es la rapidez máxima de su flotador de corcho cuando la onda provoca que este oscile verticalmente?

Solución. **(a)** Comparando el enunciado con la expresión matemática para una onda

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{3.11}$$

podemos determinar

$$A = 13,75\,\mathrm{cm}, \qquad k = 0,450\,\mathrm{cm}^{-1}, \qquad \omega = 5,40\,\mathrm{s}^{-1}. \tag{3.12}$$

El tiempo que tarda un patrón de onda completo es el periodo, que viene dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5,40\,\mathrm{s}^{-1}} = 1,16\,\mathrm{s}, \tag{3.13}$$

mientras que la distancia horizontal que viaja una cresta durante un periodo es la longitud de onda, que se obtiene de la expresión para el número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0,450\,\mathrm{cm}^{-1}} = 14,0\,\mathrm{cm} = 0,140\,\mathrm{m} \tag{3.14}$$

(b) El número de onda

$$k = 0,450\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{cm}} \times \frac{100\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{m}} = 45,0\,\mathrm{m}^{-1} \tag{3.15}$$

mientras que el número de ondas por segundo es, por definición, la frecuencia

$$f \equiv \frac{\#\text{de oscilaciones}}{t} = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,16\,\mathrm{s}} = 0,862\,\mathrm{Hz}. \tag{3.16}$$

(c) La rapidez de propagación de la onda viene dada por

$$v = \lambda f = 0,140\,\mathrm{m} \cdot 0,862\,\mathrm{Hz} = 0,121\,\mathrm{m/s}. \tag{3.17}$$

Mientras que la rapidez vertical con que se mueve el medio, es la derivada con respecto al tiempo de la función de onda

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \tag{3.18}$$

y como la función seno es acotada entre -1 y 1, la rapidez vertical máxima

$$(v_y)_{max} = A\omega = 0,1375\,\mathrm{m} \cdot 5,40\,\mathrm{rad/s} = 0,743\,\mathrm{m/s}. \tag{3.19}$$

Note que, como es de esperar, este resultado es equivalente al que se obtiene para la rapidez máxima en el MAS, ya que todos los puntos del medio a través del cual se propaga una onda mecánica transversal oscilan con MAS en dirección perpendicular a la que se propaga la onda.

■

3.3. Rapidez de una onda transversal

Ejercicio 15.18

Una cuerda de 1,50 m que pesa 0,0125 N está atada al techo por su extremo superior, mientras que el extremo inferior sostiene un peso W. Desprecie la pequeña variación de la tensión a lo largo de la cuerda producida por el peso de la misma. Cuando usted da un leve pulso a la cuerda, las ondas que viajan hacia arriba de esta obedecen la ecuación

$$y(x,t) = (8,50\,\mathrm{mm})\cos\big(172\,\mathrm{m}^{-1}x - 4830\,\mathrm{s}^{-1}t\big)$$

Suponga que la tensión de la cuerda es constante e igual a W. a) ¿Cuánto tiempo tarda un pulso en recorrer toda la cuerda? b) ¿Cuál es el peso W? c) ¿Cuántas longitudes de onda hay en la cuerda en cualquier instante? d) ¿Cuál es la ecuación para las ondas que viajan hacia abajo de la cuerda?

Solución. **(a)** Como la rapidez de una onda es constante, podemos utilizar

$$v = \frac{d}{t} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{d}{v} = \frac{1,50\,\mathrm{m}}{v} \tag{3.20}$$

para cacluar el tiempo que le toma a la onda recorrer toda la cuerda, pero antes debemos determinar la rapidez de propagación de la onda a través de la cuerda.

Comparando el enunciado con la expresión matemática para una onda

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{3.21}$$

podemos determinar

$$A = 8,50\,\mathrm{mm} \qquad k = 172\,\mathrm{m}^{-1} \qquad \omega = 4830\,\mathrm{s}^{-1} \tag{3.22}$$

y usando la expresión para la frecuencia angular de una onda

$$\omega \equiv kv \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{\omega}{k} = \frac{4830\,\mathrm{s}^{-1}}{172\,\mathrm{m}^{-1}} = 28,1\,\mathrm{m/s} \tag{3.23}$$

podemos calcular directamente la rapidez de la onda.

Luego, podemos completar el cálculo del tiempo que le toma a la onda atravesar toda la cuerda

$$t = \frac{1,50\,\mathrm{m}}{28,1\,\mathrm{m/s}} = 0,0534\,\mathrm{s}. \tag{3.24}$$

(b) El enunciado indica que podemos suponer que la tensión en la cuerda F es igual al peso W, de este modo, a partir de la rapidez de propagación de ondas en una cuerda

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \Longrightarrow \qquad F = v^2\mu = (28,1\,\mathrm{m/s})^2 \cdot \mu = W \tag{3.25}$$

obtenemos el peso requerido, pero antes necesitamos calcular la densidad de masa de la cuerda

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,0165\,\mathrm{kg}}{0,750\,\mathrm{m}} = 0,0220\,\mathrm{kg/m}. \tag{3.26}$$

Finalmente, podemos completar el cálculo del peso

$$W = (28,1\,\mathrm{m/s})^2 \cdot 0,0220\,\mathrm{kg/m} = 17,4\,\mathrm{N}. \tag{3.27}$$

(c) De la expresión para el número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{172\,\mathrm{m}^{-1}} = 0,0365\,\mathrm{m} \tag{3.28}$$

obtenemos la longitud de la onda, que cabe un total de

$$\frac{1,50\,\mathrm{m}}{0,0365\,\mathrm{m}} = 41,1 \tag{3.29}$$

veces en la longitud de la cuerda.

(d) Como el enunciado indica que la función de onda dada representa ondas que viajan hacia arriba por la cuerda, la expresión

$$y(x,t) = (8,50\,\mathrm{mm})\cos\bigl(172\,\mathrm{m}^{-1}x + 4830\,\mathrm{s}^{-1}t\bigr) \tag{3.30}$$

servirá para describir ondas que viajan en sentido contrario (hacia abajo), únicamente se debe cambiar el signo del término ωt dentro del argumento de la función de onda. ■

Ejercicio 15.19

> Un alambre delgado de 75,0 cm tiene una masa de 16,5 g. Un extremo está sujeto a un clavo y el otro a un tornillo que puede ajustarse para variar la tensión en el alambre. a) ¿A qué tensión (en newtons) debe ajustarse el tornillo para que una onda transversal cuya longitud de onda es de 3,33 cm ejecute 875 vibraciones por segundo? b) ¿Con qué rapidez viajaría esta onda?

Solución. **(a)** De la expresión para la rapidez de propagación de ondas a través de una cuerda

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \Longrightarrow \qquad F = v^2\mu \tag{3.31}$$

obtenemos el valor de la tensión a la cual está sometida la cuerda, pero antes necesitamos calcular la rapidez de la onda y la densidad de masa.

Usando la definición de la frecuencia

$$f \equiv \frac{\#\text{de oscilaciones}}{t} = \frac{875}{1\,\mathrm{s}} = 875\,\mathrm{Hz}, \tag{3.32}$$

luego, podemos calcular la rapidez

$$v = \lambda f = 0,0333\,\mathrm{m}\cdot 875\,\mathrm{Hz} = 29,1\,\mathrm{m/s}. \tag{3.33}$$

Para la densidad de masa tenemos

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,0165\,\mathrm{kg}}{0,750\,\mathrm{m}} = 0,0220\,\mathrm{kg/m}. \tag{3.34}$$

Finalmente, podemos completar el cálculo de la tensión

$$F = v^2\mu = (29,1\,\mathrm{m/s})^2\cdot 0,0220\,\mathrm{kg/m} = 18,6\,\mathrm{N}. \tag{3.35}$$

(b) La rapidez con que se propaga la onda se calculó como parte del inciso anterior $v = 29,1\,\mathrm{m/s}$. ■

3.4. Energía del movimiento ondulatorio

Ejercicio 15.23

Un alambre horizontal se estira con una tensión de 94,0 N, y la rapidez de las ondas transversales en el alambre es de 492 m/s. ¿Cuál debe ser la amplitud de una onda viajera de 69,0 Hz de frecuencia para que la potencia media transportada sea de 0,365 W?

Solución. De la expresión para la potencia media

$$P_{med} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 A^2 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{2P_{med}}{\sqrt{\mu F}\omega^2}} \tag{3.36}$$

obtenemos el valor de la amplitud, pero antes necesitamos calcular la densidad de masa de la cuerda y la frecuencia angular de la onda.

Usando la expresión para la rapidez de propagación de ondas a través de una cuerda

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu = \frac{F}{v^2} = \frac{94,0\,\mathrm{N}}{(492\,\mathrm{m/s})^2} = 3,88 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg/m} \tag{3.37}$$

obtenemos la densidad de masa, mientras que la frecuencia angular viene dada por

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 69,0\,\mathrm{Hz} = 434\,\mathrm{rad/s}. \tag{3.38}$$

Finalmente, podemos completar el cálculo de la amplitud

$$A = \sqrt{\frac{2 \cdot (0,365\,\mathrm{W})}{\sqrt{(3,88 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}) \cdot (94,0\,\mathrm{N})} \cdot (434\,\mathrm{rad/s})^2}} = 4,50 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}. \tag{3.39}$$

■

Ejercicio 15.26

Umbral de dolor. Imagine que investiga un informe del aterrizaje de un OVNI en una región despoblada de Nuevo México, y encuentra un objeto extraño que radia ondas sonoras uniformemente en todas direcciones. Suponga que el sonido proviene de una fuente puntual y que puede ignorar las reflexiones. Camina lentamente hacia la fuente y cuando está a 7,5 m de ella, determina que la intensidad es de 0,11 W/m^2. Comúnmente, se considera que una intensidad de 1,0 W/m^2 es el "umbral de dolor". ¿Cuánto más podrá acercarse a la fuente, antes de que la intensidad del sonido alcance ese umbral?

Solución. Este ejercicio se resuelve por medio de una aplicación directa de la ley de inverso cuadrado, la cual es válida para fuentes puntuales de ondas que irradian isotrópicamente en todas direcciones donde no hay obstáculos que puedan absorber energía de las ondas

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \qquad \Longrightarrow \qquad r_2 = \sqrt{\frac{I_1}{I_2} r_1^2} = 7,5\,\mathrm{m}\sqrt{\frac{0,11\,\mathrm{W/m^2}}{1,0\,\mathrm{W/m^2}}} = 2,5\,\mathrm{m} \tag{3.40}$$

de la cual obtenemos la distancia desde la fuente en la cual la intensidad alcanza el umbral de dolor. Por lo tanto, es posible acercarse más a la fuente de sonido una distancia de

$$d = r_1 - r_2 = 7,5\,\mathrm{m} - 2,5\,\mathrm{m} = 5,0\,\mathrm{m} \tag{3.41}$$

antes de que el sonido sea doloroso para el oido. ■

Ejercicio 15.28

Un compañero con dotes matemáticas le dice que la función de onda de una onda que viaja en una cuerda delgada es $y(x,t) = 2,30\,\mathrm{mm}\cos[(6,98\,\mathrm{rad/m})x + (742\,\mathrm{rad/s})t]$. Usted, que es más práctico, efectúa mediciones y determina que la cuerda tiene una longitud de 1,35 m y una masa de 0,00338 kg. Ahora le piden determinar lo siguiente: a) amplitud, b) frecuencia, c) longitud de onda, d) rapidez de la onda, e) dirección en que viaja la onda, f) tensión en la cuerda, g) potencia media transmitida por la onda.

Solución. **(a)** Comparando el enunciado con la función de onda

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{3.42}$$

podemos determinar

$$A = 2,30\,\mathrm{mm} = 0,00230\,\mathrm{m} \qquad k = 6,98\,\mathrm{rad/m} \qquad \omega = 742\,\mathrm{rad/s}. \tag{3.43}$$

(b) De la relación entre frecuencia y frecuencia angular

$$\omega = 2\pi f \qquad \Longrightarrow \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{742\,\mathrm{rad/s}}{2\pi} = 118\,\mathrm{Hz}, \tag{3.44}$$

obtenemos la frecuencia.

(c) De la expresión para el número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6,98\,\mathrm{rad/m}} = 0,900\,\mathrm{m}, \tag{3.45}$$

obtenemos la longitud de onda.

(d) La rapidez de propagación de la onda viene dada por

$$v = \lambda f = 0,900\,\mathrm{m} \cdot 118\,\mathrm{Hz} = 106\,\mathrm{m/s}. \tag{3.46}$$

(e) La dirección en que viaja la onda viene dada por el signo de ωt en el argumento de la función de onda. Como es positivo, indica que la onda se mueve hacia la izquierda.

(f) De la expresión para la rapidez de propagación de ondas a través de una cuerda

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \Longrightarrow \qquad F = v^2\mu = (106\,\mathrm{m/s})^2 \cdot \mu \tag{3.47}$$

obtenemos el valor de la tensión a la cual está sometida la cuerda, pero antes necesitamos calcular la densidad de masa

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,00338\,\mathrm{kg}}{1,35\,\mathrm{m}} = 2,50 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}, \tag{3.48}$$

luego, podemos completar el cálculo de la tensión

$$F = (106\,\mathrm{m/s})^2 \cdot 2,50 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m} = 28,1\,\mathrm{N}. \tag{3.49}$$

(g) Finalmente, la potencia media viene dada por

$$\begin{aligned} P_{med} &= \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 A^2 = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(2,50 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}) \cdot (28,1\,\mathrm{N})} \cdot (742\,\mathrm{rad/s})^2 \cdot (0,00230\,\mathrm{m})^2 = \\ &= 0,386\,\mathrm{W}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

■

Ejercicio 15.29

A una distancia de $7{,}00\times10^{12}$ m de una estrella, la intensidad de su radiación es de 15,4 W/m^2. Suponiendo que la estrella irradia uniformemente en todas direcciones, ¿cuál es la potencia total de salida de la estrella?

Solución. Usando la expresión para la intensidad I, medida a una distancia r desde la fuente

$$\begin{aligned} I = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad \Longrightarrow \qquad P &= 4\pi r^2 I \\ &= 4\pi(7,00 \times 10^{12}\,\mathrm{m})^2 \cdot 15,4\,\mathrm{W/m} = 9,48 \times 10^{27}\,\mathrm{W} \end{aligned} \tag{3.51}$$

podemos calcular fácilmente la potencia total de salida de la fuente. ■

3.5. Ondas estacionarias en una cuerda

3.6. Modos normales de una cuerda

Ejercicio 15.40

> Una cuerda de 1,50 m de largo se estira entre dos soportes con una tensión que hace que la rapidez de las ondas transversales sea de 48,0 m/s. ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia a) fundamental, b) del segundo sobretono y c) del cuarto armónico?

Solución. **(a)** Cuando la cuerda vibra en su modo fundamental tenemos que $n = 1$, entonces la longitud de onda $\lambda_n = 2L/n$

$$\lambda_1 = \frac{2L}{1} = 2 \cdot 1,50\,\mathrm{m} = 3,00\,\mathrm{m} \tag{3.52}$$

y la frecuencia $f_n = nv/2L$

$$f_1 = \frac{1 \cdot v}{2L} = \frac{48,0\,\mathrm{m/s}}{2 \cdot 1,50\,\mathrm{m}} = 16,0\,\mathrm{Hz}. \tag{3.53}$$

(b) Cuando la cuerda vibra en el segundo sobretono, tenemos que $n = 3$, entonces la longitud de onda $\lambda_n = 2L/n$

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{2 \cdot 1,50\,\mathrm{m}}{3} = 1,00\,\mathrm{m} \tag{3.54}$$

y la frecuencia $f_n = nv/2L$

$$f_3 = \frac{3 \cdot v}{2L} = \frac{3 \cdot 48,0\,\mathrm{m/s}}{2 \cdot 1,50\,\mathrm{m}} = 48,0\,\mathrm{Hz}. \tag{3.55}$$

(c) Cuando la cuerda vibra en el cuarto armónico, tenemos que $n = 4$, entonces la longitud de onda $\lambda_n = 2L/n$

$$\lambda_4 = \frac{2L}{4} = \frac{2 \cdot 1,50\,\mathrm{m}}{4} = 0,750\,\mathrm{m} \tag{3.56}$$

y la frecuencia $f_n = nv/2L$

$$f_4 = \frac{4 \cdot v}{2L} = \frac{4 \cdot 48,0\,\mathrm{m/s}}{2 \cdot 1,50\,\mathrm{m}} = 64,0\,\mathrm{Hz}. \tag{3.57}$$

■

Ejercicio 15.41

> Un alambre con masa de 40,0 g está estirado de modo que sus extremos están fijos en puntos separados 80,0 cm. El alambre vibra en su modo fundamental con frecuencia de 60,0 Hz y amplitud en los antinodos de 0,300 cm. a) Calcule la rapidez de propagación de las ondas transversales en el alambre. b) Calcule la tensión en el alambre. c) Determine la velocidad y aceleración transversales máximas de las partículas del alambre.

Solución. **(a)** A partir de la frecuencia fundamental

$$f_1 = \frac{1 \cdot v}{2L} \qquad \Longrightarrow \qquad v = 2Lf_1 = 2 \cdot 0,800\,\mathrm{m} \cdot 60,0\,\mathrm{Hz} = 96,0\,\mathrm{m/s} \tag{3.58}$$

podemos obtener la rapidez con que viajan las ondas a través de la cuerda.

(b) De la expresión para la rapidez de propagación de ondas a través de una cuerda

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \Longrightarrow \qquad F = v^2\mu = (96,0\,\mathrm{m/s})^2 \cdot \mu \tag{3.59}$$

obtenemos el valor de la tensión a la cual está sometida la cuerda, pero antes necesitamos calcular la densidad de masa

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,0400\,\mathrm{kg}}{0,800\,\mathrm{m}} = 0,0500\,\mathrm{kg/m}, \tag{3.60}$$

luego, podemos completar el cálculo de la tensión

$$F = (96,0\,\mathrm{m/s})^2 \cdot 0,0500\,\mathrm{kg/m} = 461\,\mathrm{N}. \tag{3.61}$$

(c) La rapidez transversal con que oscila el medio, es la derivada de la función de onda con respecto al tiempo

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \tag{3.62}$$

y como la función seno es acotada entre -1 y 1, la rapidez transversal máxima puede calularse a partir de

$$(v_y)_{max} = A\omega = 0,00300\,\mathrm{m} \cdot \omega \tag{3.63}$$

pero antes hay que obtener la frecuencia angular del modo fundamental

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \cdot 60,0\,\mathrm{Hz} = 377\,\mathrm{rad/s}, \tag{3.64}$$

luego, la rapidez transversal máxima

$$(v_y)_{max} = 0,00300\,\mathrm{m} \cdot 377\,\mathrm{rad/s} = 1,13\,\mathrm{m/s}. \tag{3.65}$$

La aceleración transversal con que oscila el medio, es la derivada de la rapidez transversal con respecto al tiempo

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -A\omega^2 \cos(kx - \omega t) \tag{3.66}$$

y como la función coseno es acotada entre -1 y 1, la aceleración transversal máxima

$$(a_y)_{max} = A\omega^2 = 0,00300\,\mathrm{m} \cdot (377\,\mathrm{rad/s})^2 = 426\,\mathrm{m/s^2}. \tag{3.67}$$

■

Ejercicio 15.42

> Un afinador de pianos estira la cuerda de acero de un piano, con una tensión de 800 N. La cuerda tiene 0,400 m de longitud y una masa de 3,00 g. a) Calcule la frecuencia de su modo fundamental de vibración. b) Determine el número del armónico más alto que podría escuchar una persona capaz de oír frecuencias de hasta 10 000 Hz.

Solución. **(a)** La frecuencia del modo fundamental

$$f_1 = \frac{1 \cdot v}{2L} = \frac{v}{2 \cdot 0,400\,\mathrm{m}} \tag{3.68}$$

requiere de calcular primero la rapidez de propagación de las ondas a través de la cuerda

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{800\,\mathrm{N}}{\mu}} \tag{3.69}$$

pero antes debemos calcular la densidad de masa de la cuerda

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,00300\,\mathrm{kg}}{0,400\,\mathrm{m}} = 7,50 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}, \tag{3.70}$$

luego, la rapidez de la onda

$$v = \sqrt{\frac{800\,\mathrm{N}}{7,50 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}}} = 327\,\mathrm{m/s} \tag{3.71}$$

y la frecuencia fundamental

$$f_1 = \frac{327\,\mathrm{m/s}}{2 \cdot 0,400\,\mathrm{m}} = 409\,\mathrm{Hz}. \tag{3.72}$$

(b) La frecuencia para el n-ésimo armónico

$$f_n = \frac{nv}{2L} \qquad \Longrightarrow \qquad n = \frac{2Lf_n}{v} \tag{3.73}$$

puede resolverse para hallar la variable n. Insertando el valor requerido de la frecuencia

$$n = \frac{2 \cdot 0,400\,\mathrm{m} \cdot 10000\,\mathrm{Hz}}{327\,\mathrm{m/s}} = 24,5 \approx 24 \tag{3.74}$$

obtenemos el valor de la variable n que como es un número entero, se debe redondear al entero menor más próximo, de modo que una persona con esta capacidad auditiva podría escuchar hasta el vigésimo cuarto armónico. ■

Ejercicio 15.46

La cuerda de cierto instrumento musical mide 75,0 cm de longitud y tiene una masa de 8,75 g. Se utiliza en una habitación donde la rapidez del sonido es de 344 m/s. a) ¿A qué tensión debe ajustarse la cuerda de manera que, cuando vibre en su segundo sobretono, produzca un sonido cuya longitud de onda sea de 0,765 m? (Suponga que el esfuerzo de rotura de la cuerda es muy grande y no se rebasa). b) ¿Qué frecuencia de sonido produce la cuerda en su modo fundamental de vibración?

Solución. **(a)** De la expresión para la rapidez de propagación de ondas a través de una cuerda

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \Longrightarrow \qquad F = v^2\mu \tag{3.75}$$

obtenemos el valor de la tensión a la cual está sometida la cuerda, pero antes necesitamos calcular la rapidez de la onda y la densidad de masa.

Como la cuerda vibra en su segundo sobretono ($n = 3$), la longitud de una onda estacionaria viene dada por

$$\lambda_2 = \frac{2L}{3} = \frac{2 \cdot 0,750\,\mathrm{m}}{3} = 0,500\,\mathrm{m} \tag{3.76}$$

además, la frecuencia de vibración de la cuerda es igual a la frecuencia de la onda de sonido que produce

$$v = \lambda f \qquad \Longrightarrow \qquad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{344\,\mathrm{m/s}}{0,765\,\mathrm{m}} = 450\,\mathrm{Hz} \tag{3.77}$$

de modo que la rapidez de las ondas estacionarias en la cuerda

$$v = \lambda f = 0,500\,\mathrm{m} \cdot 450\,\mathrm{Hz} = 225\,\mathrm{m/s}. \tag{3.78}$$

Para la densidad de masa tenemos

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,00875\,\mathrm{kg}}{0,750\,\mathrm{m}} = 0,0117\,\mathrm{kg/m}, \tag{3.79}$$

finalmente, completamos el cálculo de la tensión

$$F = v^2\mu = (225\,\mathrm{m/s})^2 \cdot 0,0117\,\mathrm{kg/m} = 592\,\mathrm{N}. \tag{3.80}$$

(b) La frecuencia fundamental viene dada por

$$f_1 = \frac{1 \cdot v}{2L} = \frac{225\,\mathrm{m/s}}{2 \cdot 0,750\,\mathrm{m}} = 150\,\mathrm{Hz}. \tag{3.81}$$

■

Capítulo 4

Electrostática

4.1. Campo eléctrico

Ejercicio 21.53

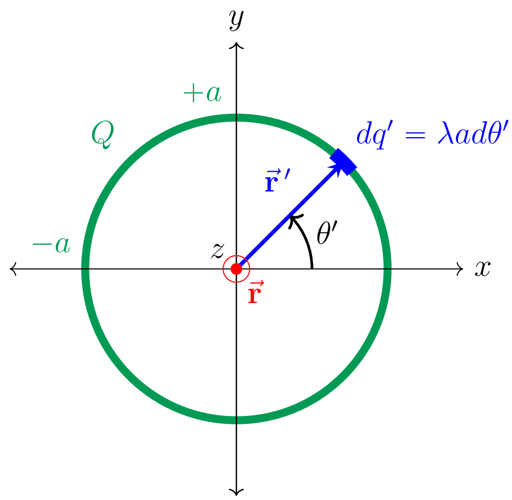
Un conductor en forma de anillo con radio $a = 2,50\,\text{cm}$ tiene una carga positiva total $Q = +0,125\,\text{nC}$, distribuida de manera uniforme en toda su circunferencia. El centro del anillo está en el origen de coordenadas O. a) ¿Cuál es el campo eléctrico (magnitud y dirección) en el punto P, que está en el eje z en $z = 40,0\,\text{cm}$? b) En el punto P del inciso anterior se coloca una carga puntual $q = -2,50\,\mu\text{C}$. ¿ Cuáles son la magnitud y la dirección de a fuerza ejercida por la carga q sobre el anillo?

Solución. **(a)** El campo eléctrico debido a una distribución continua de carga viene dado por

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3}(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'), \tag{4.1}$$

igual como se hizo en clase hay que encontrar los elementos de carga dq', el vector $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'$ y su magnitud $|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|$ para construir la expresión anterior.

Ubicando el anillo en el plano xy, su eje coincidirá con el eje z (saliendo de la página) y el punto P en general estará a una distancia z del centro del anillo como se observa en el siguiente diagrama



Por simplicidad, hemos ubicado el diferencial de carga genérico dq' en el primer cuadrante, a pesar de que este puede estar localizado en cualquier punto sobre el anillo.[1] Como se trata de una distribución lineal de carga, podemos usar

$$\lambda = \frac{dq'}{dl'} \qquad \Longrightarrow \qquad dq' = \lambda dl' \tag{4.2}$$

la densidad lineal de carga λ para obtener una expresión para el diferencial de carga dq'. El diferencial de longitud dl' corresponde a un pequeño arco de circunferencia (diferencial) cuya expresión se obtiene tomando el diferencial de la expresión para la longitud de arco

$$s = R\theta \qquad \Longrightarrow \qquad ds = Rd\theta \tag{4.3}$$

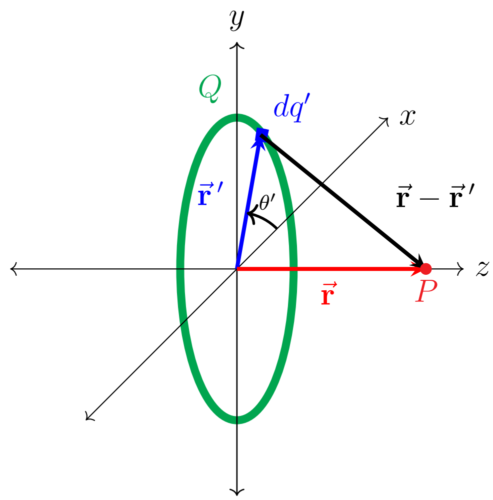
de modo que podemos escribir

$$dl' = ds' = ad\theta' \qquad \Longrightarrow \qquad dq' = \lambda a d\theta' \tag{4.4}$$

donde hemos usado que a es el radio del anillo (una constante) pues todos los elementos diferenciales de carga se encuentran a la misma distancia del centro.

El vector $\vec{\mathbf{r}}$ (rojo) es el vector que señala la posición del punto P donde queremos calcular el campo eléctrico, mientras que el vector $\vec{\mathbf{r}}\,'$ (azul) es el vector que señala la posición del diferencial de carga dq'. Aunque ambos se ubicaron en el diagrama anterior, es posible apreciarlos mejor en la vista lateral del mismo

[1] Recuerde que no importa donde elegimos el diferencial de carga ya que la integral en la expresión del campo eléctrico indica que habrá una suma sobre todos los posibles elementos de carga, tomándolos en cuenta todos a la vez.



donde además es posible dibujar el vector $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'$ (negro) que sale desde el diferencial de carga y llega hasta el punto P. Entonces, para los vectores de posición tenemos

$$\vec{\mathbf{r}} = z\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathbf{r}}\,' = a\cos\theta'\hat{\boldsymbol{\imath}} + a\text{sen}\theta'\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{4.5}$$

con lo cual podemos calcular

$$\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,' = -a\cos\theta'\hat{\boldsymbol{\imath}} - a\,\text{sen}\theta'\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'| = \sqrt{a^2 + z^2}. \tag{4.6}$$

el vector $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'$ y su magnitud.

Insertando en la expresión (4.1) obtenemos

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\theta'}{\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}(-a\cos\theta'\hat{\boldsymbol{\imath}} - a\,\text{sen}\theta'\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\mathbf{k}}) \tag{4.7}$$

la integral que hay que resolver.

Podemos separar en tres términos y factorizar fuera todas las constantes

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}\left(-a\hat{\boldsymbol{\imath}}\int_0^{2\pi} d\theta'\cos\theta' - a\hat{\boldsymbol{\jmath}}\int_0^{2\pi} d\theta'\,\text{sen}\theta' + z\hat{\mathbf{k}}\int_0^{2\pi} d\theta'\right) \tag{4.8}$$

utilizando la calculadora para resolver las integrales restantes y obtener

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}[-a\hat{\boldsymbol{\imath}}(0) - a\hat{\boldsymbol{\jmath}}(0) + z\hat{\mathbf{k}}(2\pi)] = \frac{2\pi\lambda a z\hat{\mathbf{k}}}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}. \tag{4.9}$$

la expresión integrada para el campo eléctrico.

En este punto es importante notar, que el problema nos dió como dato la carga total Q que se distribuye en el anillo, y no su densidad λ, entonces debemos utilizar

$$\lambda \equiv \frac{\text{carga total}}{\text{longitud total}} = \frac{Q}{2\pi a} \tag{4.10}$$

para escribir la densidad λ en términos de la carga y longitud totales.[2] Finalmente, insertando este valor en la expresión (4.9) obtenemos

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3}\hat{\mathbf{k}} \tag{4.11}$$

el campo eléctrico para un anillo de radio a que tiene una carga Q en un punto ubicado sobre su eje a una distancia z del centro. De esta expresión podemos ver simplemente que su magnitud es igual a

$$E = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3} \tag{4.12}$$

en dirección $\hat{\mathbf{k}}$, es decir, saliendo de la página.

Podemos utilizar los valores numéricos para obtener

$$E = (9\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2})\frac{(0,125\times10^{-9}\,\mathrm{C})(0,4\,\mathrm{m})}{\left(\sqrt{(0,0250\,\mathrm{m})^2+(0,40\,\mathrm{m})^2}\right)^3} = 7,0\,\mathrm{N/C} \tag{4.13}$$

el valor de la magnitud del campo eléctrico.

(b) La definición del campo eléctrico

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} \tag{4.14}$$

nos permite obtener la fuerza electrostática que experimenta la carga q al ubicarse en el punto P

$$\vec{\mathbf{F}} = -2,5\times10^{-6}\,\mathrm{C}\cdot(7,0\,\mathrm{N/C}\hat{\mathbf{k}}) = -1,8\times10^{-5}\,\mathrm{N}\hat{\mathbf{k}} \tag{4.15}$$

con magnitud de $1,8\times10^{-5}\,\mathrm{N}$ en dirección $-\hat{\mathbf{k}}$, entrando a la página. ■

Problema 21.97

La carga negativa $-Q$ está distribuida de manera uniforme alrededor de un cuarto de círculo de radio a que se encuentra en el primer cuadrante, con el centro de curvatura en el orígen. Calcule las componentes x y y del campo eléctrico neto en el orígen.

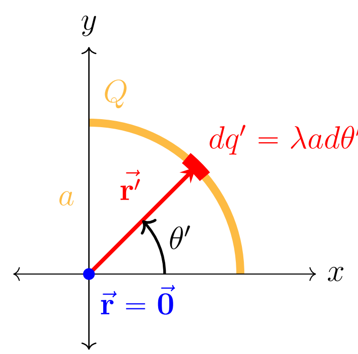
Solución. El campo eléctrico debido a una distribución continua de carga viene dado por

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq'}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^3}(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'), \tag{4.16}$$

igual como se hizo en clase, hay que encontrar los elementos de carga dq', el vector $(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')$ y su magnitud $|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|$ para construir la expresión anterior.

Vamos a ubicar el cuarto de circunferencia en el primer cuadrante del pano xy como se muestra en el siguiente diagrama

[2] Note que hemos usado el resultado elemental $C = 2\pi a$ para la longitud de la circunferencia.



Como se trata de una distribución lineal de carga, podemos usar

$$\lambda = \frac{dq'}{dl'} \qquad \Longrightarrow \qquad dq' = \lambda dl' \tag{4.17}$$

la densidad lineal de carga λ para obtener una expresión para el diferencial de carga dq'. El diferencial de longitud dl' corresponde a un pequeño arco de circunferencia (diferencial) de modo que podemos escribir

$$dl' = ds' = a d\theta' \qquad \Longrightarrow \qquad dq' = \lambda a d\theta' \tag{4.18}$$

donde hemos usado que a es el radio del anillo (una constante) pues todos los elementos diferenciales de carga se encuentran a la misma distancia del centro.

Este problema requiere calcular el campo eléctrico en el orígen del sistema de coordenadas para lo cual existen dos posibilidades. Una consiste en desarrollar la solución igual a como se hizo con el anillo completo y al final sustituir $z = 0$ que significa que el punto P está a cero distancia del centro, es decir, que el punto P coincide con el orígen.

Otro camino es utilizar el vector $\vec{\mathbf{0}}$ que sale del orígen y llega hasta el orígen, es decir, es un punto como se representó en la figura. Estudiaremos esta segunda posibilidad para observar como se obtienen algunas simplificaciones en el desarrollo.

Por otro lado, el vector $\vec{\mathbf{r}}\,'$ (rojo) es el vector que señala la posición del diferencial de carga dq' y es el mismo que se utilizó en el problema del anillo completo. Entonces para los vectores de posición tenemos

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathbf{r}}\,' = a\cos\theta'\hat{\boldsymbol{\imath}} + a\text{sen}\theta'\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{4.19}$$

con lo que podemos calcular

$$\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,' = -a\cos\theta'\hat{\boldsymbol{\imath}} - a\,\text{sen}\theta'\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad \Longrightarrow \qquad |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'| = a. \tag{4.20}$$

el vector $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'$ y su magnitud.

Insertando en la expresión (4.16) obtenemos

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi/2} \frac{\lambda a d\theta'}{a^3}(-a\cos\theta'\hat{\boldsymbol{\imath}} - a\,\text{sen}\theta'\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \tag{4.21}$$

la integral que hay que resolver. Note que en este caso, el límite superior de la integral tiene un valor de $\frac{\pi}{2}$ lo que indica que la variable angular considera los únicamente los elementos de carga que se encuentran en el primer cuadrante, a diferencia del problema anterior donde debía abarcar el anillo completo.

Podemos separar en dos términos y factorizar fuera todas las constantes

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{a^2}\left(-a\hat{\boldsymbol{\imath}}\int_0^{\pi/2} d\theta' \cos\theta' - a\hat{\boldsymbol{\jmath}}\int_0^{\pi/2} d\theta' \, \mathrm{sen}\theta'\right) \tag{4.22}$$

utilizando la calculadora para resolver las integrales restantes y obtener

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a^2}[-a\hat{\boldsymbol{\imath}}(1) - a\hat{\boldsymbol{\jmath}}(1)] = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}) \tag{4.23}$$

la expresión integrada para el campo eléctrico.

En este punto es importante notar, que el problema nos dió como dato la carga total $-Q$ que se distribuye en el anillo, y no su densidad λ, entonces debemos utilizar

$$\lambda \equiv \frac{\text{carga total}}{\text{longitud total}} = \frac{-Q}{2\pi a/4} \tag{4.24}$$

para escribir la densidad λ en términos de la carga y longitud totales.[3] Finalmente, insertando este valor en la expresión (4.23) obtenemos

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}) \tag{4.25}$$

el campo eléctrico para un cuarto de anillo de radio a que tiene una carga $-Q$ en un punto ubicado en su centro.

Por último, es fácil ver de esta expresión que las componentes x y y del campo eléctrico coinciden en el valor

$$E_x = E_y = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}. \tag{4.26}$$

■

[3] Note que en este caso hemos usado el resultado elemental $C = 2\pi a$ dividido entre cuatro, correspondiente a la longitud de un cuarto de circunferencia.

4.2. Potencial eléctrico

Ejercicio 23.29

Un anillo delgado uniformemente cargado tiene un radio de 15,0 cm y carga total de +24,0 nC. Se coloca un electrón sobre el eje del anillo a una distancia de 30,0 cm de su centro y queda restringido a permanecer sobre ese eje. Después se libera el electrón desde el reposo. a) Describa el movimiento posterior del electrón. b) Determine la rapidez del electrón cuando alcanza el centro del anillo.

Solución.

(a) Debido a que el anillo tiene carga neta positiva y el electrón tiene carga negativa, éste se verá atraido hacia el anillo por una fuerza eléctrica.

(b) Para resolver este problema, debemos aplicar la ley de conservación de la energía al sistema. Considerando al electrón como una carga puntual y que el anillo permanece estático, además que se ignora la fuerza de gravedad, únicamente intervienen la energía cinética traslacional K y la energía potencial eléctrica U, de modo que la energía total $E = K + U$, es la cantidad que se conserva.

Usando la conservación de la energía $\Delta E = 0$ obtenemos

$$K_A + U_A = K_B + U_B \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}m_e v_A^2 + q_e U_A = \frac{1}{2}m_e v_B^2 + q_e U_B \tag{4.27}$$

una relación para las energíes en cualesquiera dos instantes A y B de la trayectoria del electrón.

Escogiendo A como el instante cuando electrón y anillo están separados 30,0 cm (y el electrón está en reposo) y B como el instante cuando el electrón está en el centro del anillo, podemos resolver la expresión anterior para hallar

$$\frac{1}{2}m_e \cancelto{0}{v_A^2} + q_e U_A - q_e U_B = \frac{1}{2}m_e v_B^2 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\frac{2q_e(U_A - U_B)}{m_e}} = v_B$$

la rapidez del electrón en el instante requerido.

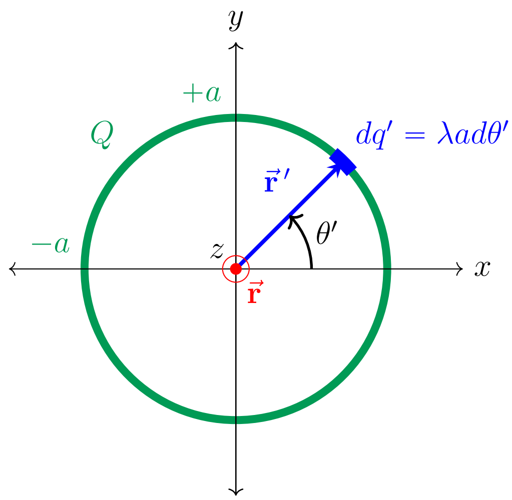
Antes poder hallar el valor de la rapidez, necesitamos obtener la expresión para el potencial eléctrico que produce el anillo cargado, y así poder calcular los valores de la energía potencial U_A y U_B en los instantes escogidos.

El potencial eléctrico debido a una distribución continua de carga viene dado por

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}, \tag{4.28}$$

igual como se hizo en clase hay que encontrar los elementos de carga dq', el vector $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'$ y su magnitud $|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'|$ para construir la expresión anterior.

Ubicando el anillo en el plano xy, su eje coincidirá con el eje z (saliendo de la página) y el punto P en general estará a una distancia z del centro del anillo como se observa en el siguiente diagrama



Por simplicidad, hemos ubicado el diferencial de carga genérico dq' en el primer cuadrante, a pesar de que este puede estar localizado en cualquier punto sobre el anillo.[4] Como se trata de una distribución lineal de carga, podemos usar

$$\lambda = \frac{dq'}{dl'} \qquad \Longrightarrow \qquad dq' = \lambda dl' \tag{4.29}$$

la densidad lineal de carga λ para obtener una expresión para el diferencial de carga dq'. El diferencial de longitud dl' corresponde a un pequeño arco de circunferencia (diferencial) cuya expresión se obtiene tomando el diferencial de la expresión para la longitud de arco

$$s = R\theta \qquad \Longrightarrow \qquad ds = Rd\theta \tag{4.30}$$

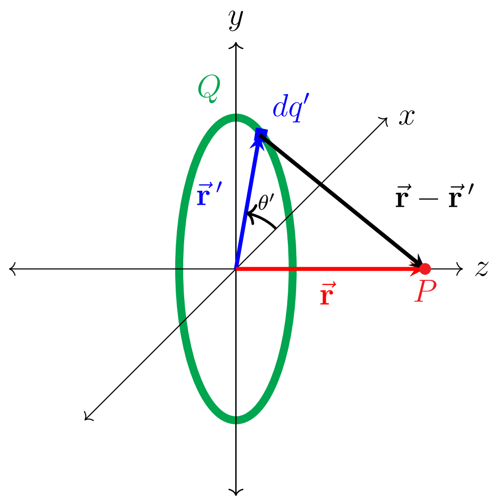
de modo que podemos escribir

$$dl' = ds' = ad\theta' \qquad \Longrightarrow \qquad dq' = \lambda a d\theta' \tag{4.31}$$

donde hemos usado que a es el radio del anillo (una constante) pues todos los elementos diferenciales de carga se encuentran a la misma distancia del centro.

El vector $\vec{\mathbf{r}}$ (rojo) es el vector que señala la posición del punto P donde queremos calcular el potencial eléctrico, mientras que el vector $\vec{\mathbf{r}}\,'$ (azul) es el vector que señala la posición del diferencial de carga dq'. Aunque ambos se ubicaron en el diagrama anterior, es posible apreciarlos mejor en la vista lateral del mismo

[4] Recuerde que no importa donde elegimos el diferencial de carga ya que la integral en la expresión del potencial eléctrico indica que habrá una suma sobre todos los posibles elementos de carga, tomándolos en cuenta todos a la vez.



donde además es posible dibujar el vector $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'$ (negro) que sale desde el diferencial de carga y llega hasta el punto P. Entonces, para los vectores de posición tenemos

$$\vec{\mathbf{r}} = z\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathbf{r}}\,' = a\cos\theta'\hat{\boldsymbol{\imath}} + a\text{sen}\theta'\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{4.32}$$

con lo cual podemos calcular

$$\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,' = -a\cos\theta'\hat{\boldsymbol{\imath}} - a\,\text{sen}\theta'\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'| = \sqrt{a^2 + z^2}. \tag{4.33}$$

el vector $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\,'$ y su magnitud.

Insertando en la expresión para el potencial obtenemos

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\theta'}{\sqrt{a^2 + z^2}} \tag{4.34}$$

la integral que hay que resolver.

Podemos factorizar fuera todas las constantes

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}}\int_0^{2\pi} d\theta' \tag{4.35}$$

utilizando la calculadora para resolver la integral restante y obtener

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}}(2\pi) = \frac{2\pi\lambda a}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}}, \tag{4.36}$$

la expresión integrada para el potencial eléctrico.

En este punto es importante notar, que el problema nos dió como dato la carga total Q que se distribuye en el anillo, y no su densidad λ, entonces debemos utilizar

$$\lambda \equiv \frac{\text{carga total}}{\text{longitud total}} = \frac{Q}{2\pi a} \tag{4.37}$$

para escribir la densidad λ en términos de la carga y longitud totales.[5] Finalmente obtenemos

$$\varphi(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}} \tag{4.38}$$

el potencial eléctrico para un anillo de radio a que tiene una carga Q en un punto ubicado sobre su eje a una distancia z del centro.

Usando la expresión obtenida, podemos evaluar

$$\varphi_A = \varphi(z = z_A) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + z_A^2}} = \frac{+24{,}0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(0{,}150\,\mathrm{m})^2 + (0{,}300\,\mathrm{m})^2}} = 643\,\mathrm{J/C} \tag{4.39}$$

$$\varphi_B = \varphi(z = z_B) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + z_B^2}} = \frac{+24{,}0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(0{,}150\,\mathrm{m})^2 + (0\,\mathrm{m})^2}} = 1438\,\mathrm{J/C} \tag{4.40}$$

el potencial producido por el anillo en los puntos A y B y así determinar

$$U_A = q_e\varphi_A = (-1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (643\,\mathrm{J/C}) = 1{,}03 \times 10^{-16}\,\mathrm{J} \tag{4.41}$$

$$U_B = q_e\varphi_B = (-1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (1438\,\mathrm{J/C}) = 2{,}30 \times 10^{-16}\,\mathrm{J} \tag{4.42}$$

la energía potencial eléctrica del electrón en dichos puntos.

Finalmente, podemos calcular[6]

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot (-1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot (1{,}03 \times 10^{-16}\,\mathrm{J} - 2{,}30 \times 10^{-16}\,\mathrm{J})}{9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 6{,}68 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s} \tag{4.43}$$

la rapidez con que el electrón llega al centro del anillo.

■

[5] Note que hemos usado el resultado elemental $C = 2\pi a$ para la longitud de la circunferencia.
[6] Aquí usamos la masa de un electrón $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.

Capítulo 5

Magnetismo

5.1. Fuerza magnética

Problema 27.66

Una partícula de carga $q > 0$ se mueve con rapidez v en la dirección $+z$ a través de una región de campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. La fuerza magnética sobre la partícula es $\vec{\mathbf{F}} = F_0(3\hat{\boldsymbol{\imath}} + 4\hat{\boldsymbol{\jmath}})$, donde F_0 es una constante positiva. a) Determine las componentes B_x, B_y y B_z, o las que sean posibles con la información proporcionada. b) Si además se tiene el dato de que la magnitud del campo magnético es de $6F_0/qv$, determine tantas de las componentes restantes de $\vec{\mathbf{B}}$ como sea posible.

Solución.

(a) Del enunciado sabemos que la partícula se mueve a lo largo del eje $+z$, de modo que para su velocidad podemos escribir

$$\vec{\mathbf{v}} = v_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + v_z\hat{\mathbf{k}} = 0\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0\hat{\boldsymbol{\jmath}} + v\hat{\mathbf{k}} = v\hat{\mathbf{k}} \tag{5.1}$$

y como el campo magnético es indeterminado, escribimos en general

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\hat{\mathbf{k}}. \tag{5.2}$$

Usando la expresión para la fuerza magnética sobre una carga puntual, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{F}} &= q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = \\
&= q(v\hat{\mathbf{k}}) \times (B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\hat{\mathbf{k}}) = \\
&= q[vB_x\cancelto{\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\boldsymbol{\imath}})} + vB_y\cancelto{-\hat{\boldsymbol{\imath}}}{(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}})} + vB_z\cancelto{0}{(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}})}] = \\
&= q[vB_x\hat{\boldsymbol{\jmath}} + vB_y(-\hat{\boldsymbol{\imath}}) + 0\hat{\mathbf{k}}] = \\
&= -qvB_y\hat{\boldsymbol{\imath}} + qvB_x\hat{\boldsymbol{\jmath}}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

e insertando en el lado izquierdo la fuerza que nos dá el enunciado

$$F_0(3\hat{\boldsymbol{\imath}} + 4\hat{\boldsymbol{\jmath}}) = -qvB_y\hat{\boldsymbol{\imath}} + qvB_x\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \Longrightarrow \quad 3F_0 = -qvB_y \quad , \quad 4F_0 = qvB_x \tag{5.4}$$

obtenemos dos ecuaciones que podemos resolver para las componentes del campo magnético

$$B_x = \frac{4F_0}{qv} \quad \text{y} \quad B_y = \frac{-3F_0}{qv} \tag{5.5}$$

quedando indeterminada la componente B_z.

(b) Aplicando la expresión para la magnitud de un vector al campo magnético

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad \Longrightarrow \quad B_z = \sqrt{B^2 - B_x^2 - B_y^2} \tag{5.6}$$

podemos resolver para la componente z e insertando los valores obtenidos en el inciso anterior finalmente obtenemos

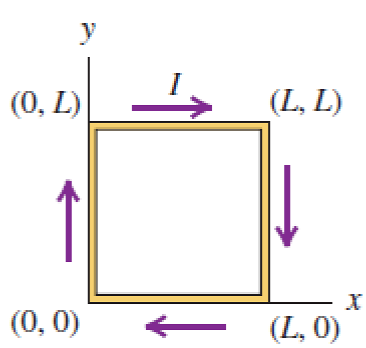
$$B_z = \sqrt{\left(\frac{6F_0}{qv}\right)^2 - \left(\frac{4F_0}{qv}\right)^2 - \left(\frac{-3F_0}{qv}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}F_0}{qv} \tag{5.7}$$

la componente del campo magnético que faltaba.

■

Problema 27.85

Fuerza sobre una espira de corriente en un campo magnético no uniforme.
En la sección 27.7 vimos que la fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético *uniforme* es igual a cero. Pero, ¿qué pasa si $\vec{\mathbf{B}}$ no es uniforme? La figura muestra una espira de alambre cuadrada que se encuentra en el plano xy.



La espira tiene sus esquinas en $(0,0)$, $(0,L)$, $(L,0)$ y (L,L) y transporta una corriente I constante en sentido horario. El campo magnético no tiene componente x, pero tiene componentes y y z: $\vec{\mathbf{B}} = (B_0 z/L)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (B_0 y/L)\hat{\mathbf{k}}$, donde B_0 es una constante positiva. a) Elabore un dibujo de las líneas de campo magnético en el plano yz. b) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre cada uno de los lados de la espira integrando la ecuación (27.20). c) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza magnética neta sobre la espira.

Solución.

(a)

(b) La fuerza magnética sobre un elemento diferencial de alambre $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$ que transporta una corriente I viene dada por

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_B = I\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{5.8}$$

donde $\vec{\mathbf{B}}$ es el campo magnético en el lugar donde se encuentra el diferencial de alambre.

Etiquetando los segmentos rectilíneos que forman la espira rectangular como 1, 2, 3 y 4 en los lados izquierdo, superior, derecho e inferior respectivamente, podemos escribir

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_{B1} = I_1\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_1 \times \vec{\mathbf{B}}_1 \qquad \mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_{B2} = I_2\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_2 \times \vec{\mathbf{B}}_2 \tag{5.9}$$

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_{B3} = I_3\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_3 \times \vec{\mathbf{B}}_3 \qquad \mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_{B4} = I_4\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_4 \times \vec{\mathbf{B}}_4 \tag{5.10}$$

para las fuerzas magnéticas que sienten los elementos diferenciales $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_1$, $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_2$, $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_3$ y $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_4$ de corriente sobre cada uno de los alambres, debido al campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$.

Como la espira es cerrada, tenemos que $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I$ la corriente en cada uno de los lados es igual. Además, los diferenciales de longitud son verticales u horizontales y tienen dirección de acuerdo al sentido de la corriente en cada alambre de modo que

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_1 = \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_2 = \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{\imath}} \qquad \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_3 = \mathrm{d}y(-\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \qquad \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}_4 = \mathrm{d}x(-\hat{\boldsymbol{\imath}}) \tag{5.11}$$

Sin embargo, los campos magnéticos $\vec{\mathbf{B}}_1$, $\vec{\mathbf{B}}_2$, $\vec{\mathbf{B}}_3$ y $\vec{\mathbf{B}}_4$ son diferentes en cada uno de los lados de la espira, pues el campo magnético en la región no es uniforme. Podemos obtener el campo magnético sobre cada uno de los lados de la espira evaluando en las coordenadas de cada uno de los alambres

$$\vec{\mathbf{B}}_1(y, z = 0) = [B_0(0)/L]\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (B_0 y/L)\hat{\mathbf{k}} = (B_0 y/L)\hat{\mathbf{k}} \tag{5.12}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_2(y = L, z = 0) = [B_0(0)/L]\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (B_0(L)/L)\hat{\mathbf{k}} = B_0\hat{\mathbf{k}} \tag{5.13}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_3(y, z = 0) = [B_0(0)/L]\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (B_0 y/L)\hat{\mathbf{k}} = (B_0 y/L)\hat{\mathbf{k}} \tag{5.14}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_4(y = 0, z = 0) = [B_0(0)/L]\hat{\boldsymbol{\jmath}} + [B_0(0)/L]\hat{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{5.15}$$

Volviendo a la expresión para las fuerzas

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_{B1} = I(\mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (B_0 y/L)\hat{\mathbf{k}} = I\mathrm{d}y(B_0 y/L)\cancelto{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{(\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\mathbf{k}})} = I\mathrm{d}y(B_0 y/L)\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{5.16}$$

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_{B2} = I(\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{\imath}}) \times (B_0\hat{\mathbf{k}}) = I\mathrm{d}xB_0\cancelto{-\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{(\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\mathbf{k}})} = -I\mathrm{d}xB_0\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{5.17}$$

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_{B3} = I(-\mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (B_0 y/L)\hat{\mathbf{k}} = -I\mathrm{d}y(B_0 y/L)\cancelto{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{(\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\mathbf{k}})} = -I\mathrm{d}y(B_0 y/L)\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{5.18}$$

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_{B4} = I(-\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{\imath}}) \times \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{5.19}$$

podemos integrar cada una de ellas para obtener

$$\vec{\mathbf{F}}_{B1} = \int_0^L I\mathrm{d}y(B_0 y/L)\hat{\boldsymbol{\imath}} = \frac{IB_0\hat{\boldsymbol{\imath}}}{L}\int_0^L y\mathrm{d}y = \frac{IB_0\hat{\boldsymbol{\imath}}}{L}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^L = \frac{IB_0L}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{5.20}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{B2} = \int_0^L -I\mathrm{d}xB_0\hat{\boldsymbol{\jmath}} = -IB_0\hat{\boldsymbol{\jmath}}\int_0^L \mathrm{d}x = -IB_0L\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{5.21}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{B3} = \int_0^L -I\mathrm{d}y(B_0 y/L)\hat{\boldsymbol{\imath}} = \frac{-IB_0\hat{\boldsymbol{\imath}}}{L}\int_0^L y\mathrm{d}y = \frac{-IB_0\hat{\boldsymbol{\imath}}}{L}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^L = \frac{-IB_0L}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{5.22}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{B4} = \int_0^L I(-\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{\imath}}) \times \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{5.23}$$

la fuerza magnética sobre cada uno de los lados de la espira.

(c) Para la fuerza neta simplemente hay que sumar

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2 + \vec{\mathbf{B}}_3 + \vec{\mathbf{B}}_4 = \frac{IB_0L}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}} + -IB_0L\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{-IB_0L}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \vec{\mathbf{0}} = -IB_0L\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{5.24}$$

■