4- AMALIY MASHG'LOT. Akslantirishlar. Inyektiv, suryektiv, biyektiv funksiyalar. Funksiya turlarini aniklashga doir misollar yechish

Reja:

1. Akslantirishlar haqida ma'lumotlar.
2. Mustaqil bajarish uchun masala va topshiriqlar
   - 2.1. Akslantirishlar. Inyektiv, suryektiv, biyektiv funksiyalarga doir topshiriqlar
   - 2.2. Funksiya turlarini aniklashga doir topshiriqlar
   - 2.3. Funksiyalar kompozitsiyasiga doir topshiriqlar

1. Akslantirishlar haqida ma'lumotlar.

4.1-Ta'rif. Agar biror X to'plamning har bir x elementiga qandaydir qonuniyat bo'yicha yagona $f(x)$ ob'yekt mos qo'yilgan bo'lsa, bu f moslik **funktsiya** deyiladi.

4.2-Ta'rif. $f \subset A \times B$ munosabat **funktsiya** yoki A to‘plamdan B to‘plamga **akslantirish** deyiladi, agarda quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $D_l(f) = A$, $D_r(f) \subseteq B$,

2) $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$ ekanligidan $y_1 = y_2$ ekanligi kelib chiqsa.

Funktsiya $f : A \to B$ yoki $A \xrightarrow{f} B$ kabi belgilanadi, agar $(x, y) \in f$ bo‘lsa, u holda $y = f(x)$ kabi yoziladi va f funktsiya x elementga y elementni mos qo‘yadi deb gapiriladi. $y \in B$ elementga x elementning **tasviri**, $x \in A$ elementga y ning **asli** deyiladi.

Agar $D_l(f) \subset A$ bo`lsa, f funktsiya **qismiy funktsiya** deyiladi.

Ixtiyoriy funktsiya $f : A \to B$ bu binar munosabat. Shuning uchun teskari munosabat f^{-1} ni qurish mumkin. Agar buning natijasida yana funktsiya hosil bo'lsa, u holda f ga teskarilanuvchi funktsiya deyiladi va teskari funktsiya $f^{-1} : B \to A$ ko'rinishda belgilanadi.

Misol 1. 1) $g = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ - munosabat funktsiya bo‘ladi.

2) $R = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ - munosabat funktsiya bo‘lmaydi.

3) $f = \{(x, x^2 - 2x + 3),\ x \in R\}$- munosabat funktsiya bo‘ladi va $y = x^2 - 2x + 3$ ko`rinishda ham yoziladi.

4.3-Ta'rif. Agar

1) $D_l(f) = D_l(g)$;

2) ixtiyoriy $x \in D_l(f)$ uchun $f(x) = g(x)$ bajarilsa, $f : A \to B$ va $g : C \to D$ akslantirishlarga **teng akslantirishlar** deyiladi.

4.1-Teorema. $f: A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq A$ lar uchun $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ tenglik o'rinli.

(Birlashmaning obrazi obrazlar birlashmasiga teng.)

Isboti: Aytaylik, $b \in f(X \cup Y)$ bo'lsin. Demak, shunday $a \in X \cup Y$ mavjudki, uning uchun $f(a) = b$. Agar $a \in X$ bo'lsa, u holda $f(a) = b \in f(X)$, bundan esa $b \in f(X) \cup f(Y)$ kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, $a \in Y$ ham isbotlanadi. Demak, $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$ ekanligi isbotlandi.

Endi $b \in f(X) \cup f(Y)$ bo'lsin. Aniqlik uchun $b \in f(X)$ ni qaraylik, demak, shunday $a \in X$ mavjudki, uning uchun $f(a) = b$. Bundan $a \in X$ va $a \in X \cup Y$ ekanligi, demak, $b \in f(X \cup Y)$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, $b \in f(Y)$ ham isbotlanadi. Demak, $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$ ekanligi isbotlandi. $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$ va $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$ o'rinli bo'lsa, demakki, $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ tenglik o'rinli.

Teorema isbotlandi.

4.2-Teorema. $f: A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq B$ lar uchun $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ tenglik o'rinli.

(Birlashmaning proobrazi proobrazlar birlashmasiga teng.)

Isboti: $a \in f^{-1}(X \cup Y)$ elementni olaylik, bu $f(a) \in X \cup Y$ ekanini bildiradi, ya'ni $f(a) \in X$ yoki $f(a) \in Y$. Agar $f(a) \in X$ bo'lsa, u holda proobraz ta`rifiga ko'ra $a \in f^{-1}(X)$ bo'ladi, bundan esa $a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, agar $f(a) \in Y$ bo'lsa, u holda $a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Bundan

$$f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$$

kelib chiqadi.

Endi aksincha qism to'plam bo'lishini ko'rsatamiz.

$a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ bo'lsin, bundan $a \in f^{-1}(X)$ yoki $f(a) \in Y$. Agar $a \in f^{-1}(X)$ bo;lsa, u holda $f(a) \in X$ bo'ladi. Shuningdek, $f(a) \in X \cup Y$ bo'ladi, bundan $a \in f^{-1}(X \cup Y)$ kelib chiqadi. $a \in f^{-1}(Y)$ bo'lgan hol gam shunday yo'l bilan isbotlanadi va $F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y) \subseteq F^{-1}(X \cup Y)$ hosil qilinadi. Bu ikkita isbotlangan qism to'plamlar birlashtirilsa, talab qilingan tenglikka kelamiz.

$$F^{-1}(X \cup Y) = F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y).$$

Teorema isbotlandi.

4.3-Teorema. $f: A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq A$ lar uchun $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ tenglik o'rinli.

Isboti: $b \in f(X \cap Y)$ bo'lsin. Obraz ta'rifiga ko'ra, shunday $a \in X \cap Y$ elementlar to'piladiki, ular uchun $f(a) = b$ tenglik o'rinli. $a \in X \cap Y$ ekanligidan $a \in X \cap a \in Y$ kelib chiqadi, demak, $f(a) = b \in f(X)$ va $f(a) = b \in f(Y)$, ya'ni -. Bulardan talab qilingan tasdiq kelib chiqadi: $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

Teorema isbotlandi.

4.2-Misol. Teskari tasdiq o'rinli bo'lmasligini misol yordamida ko'ramiz.

$$f(x) = x^2 : R \to \cup R_+ \cup \{0\}$$

akslantirish bo'lsin.

X va Y to'plamlar sifatida $X = [-1;0]$, $Y = [0;1]$ larni ko'raylik. Ravshanki, $f(X) = [0;1]$, $f(Y) = [0;1]$, demak ularning kesishmasi $f(X) \cap f(Y) = [0;1]$. So'ngra $[-1;0] \cap [0;1] = \{0\}$ ekanligidan $f(X \cap Y) = f(\{0\}) = \{0\}$ ni aniqlaymiz. Bu holda qism to'plam bo'lish $f(X) \cap f(Y) \not\subset f(X \cap Y)$ munosabati bajarilmaydi.

4.4-Teorema. $f : A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq B$ to'plamlar uchun $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ tenglik o'rinli.

Isboti: $a \in f^{-1}(X \cap Y)$ bo'lsin, ya'ni $f(a) = b \in X \cap Y$, demak, $b \in X \cap b \in Y$, shuning uchun $a \in f^{-1}(X)$ va $a \in f^{-1}(Y)$ bundan $a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

Demak, $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

Endi teskari munosabatni isbotlash uchun $a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ ni olamiz, bundan $a \in f^{-1}(X)$ va $a \in f^{-1}(Y)$, demak, $f(a) \in X$ и $f(a) \in Y$, ya'ni $f(a) \in X \cap Y$, shuningdek, $a \in f^{-1}(X \cap Y)$ o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cap Y)$. Olingan qism to'plamlar birlashtirilsa, talab qilingan tenglikka kelamiz:

$$F^{-1}(X \cap Y) = F^{-1}(X) \cap F^{-1}(Y).$$

Teorema isbotlandi.

4.4-Ta'rif. Agar f^{-1} munosabat qismiy funktsiya bo'lsa, ya'ni $\forall\, x_1,\ x_2 \in D_l(f)$ dan olingan $x_1 \neq x_2$ uchun $f(x_1) \neq f(x_2)$ bajarilsa, f funktsiyaga **o'zaro bir qiymatli** f**unktsiya** yoki **in'yektiv funktsiya** deyiladi va $f : \mathrm{A} \xrightarrow{1-1} B$ kabi belgilanadi.

Demak, in'yektiv funktsiyada takrorlanuvchi qiymatlar bo'lmaydi. Bundan $f(x_1) = f(x_2)$ dan $x_1 = x_2$ kelib chiqadi.

4.3-Misol. $f(x) = 4x + 3$ funktsiya $f(x): R \to R$ in'yektiv funktsiya bo'lishini ko'rsating.

Yechilishi: Faraz qilaylik, $f(x_1) = f(x_2)$ bo'lsin, ya'ni $4x_1 + 3 = 4x_2 + 3$, bundan $4x_1 = 4x_2$, $x_1 = x_2$ kelib chiqadi. Demak, f - in'yektiv funktsiya bo'ladi.

4.5-Ta’rif. Agar $D_r(f)=B$ bo‘lsa, $f:A\to B$ funktsiya A **ni** B **ga ustiga akslantirish** yoki **syur’yektiv funktsiya** deyiladi va $f:A\xrightarrow{\text{ustiga}}B$ kabi belgilanadi.

4.4-Misol. 3-misoldagi $f(x)=4x+3$ funktsiyaning syur’yektivlikka tekshiramiz.

Yechilishi: Aytaylik, $b\in R$ bo’lsin. Ta’rifga ko’ra, f - syur’yektiv funktsiya bo’lishi uchun $D_r(a)=b$ o’rinli bo’ladigan shunday haqiqiy son $a\in R$ ni topish mumkin. Buning uchun $b=4a+3$ deb olsak, $a=\frac{b-3}{4}$ son topiladi. Demak, f - syur’yektiv funktsiya.

4.6-Ta’rif. Ham in’yektiv, ham syur’yektiv bo`lgan f funktsiya A va B to‘plamlarning **biyektiv funktsiyasi** deyiladi va $f:A\longleftrightarrow B$ kabi belgilanadi.

4.5-Misol. $f(x)=4x+3$ funktsiya ham in’yektiv, ham syur’yektiv, demak biyektiv ham bo’ladi.

Umuman olganda, $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$ akslantirishlarning barchasi $f(x):R\to R$ biyektsiya bo’ladi.

4.6-Misol. $f(x)=\sin x$ tenglik uchun:

a) $f(x):R\to R$ akslantirish in’yektsiya ham, syur’yektsiya ham bo’lmaydi.

b) $f(x):R\to[-1;1]$ akslantirishni olsak, bu syur’yektiv akslantirish bo’ladi, lekin in’yektiv bo'lmaydi.

v) $f(x):[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\to[-1;1]$ deb oladigan bo’lsak, bu akslantirish biyektsiya bo’ladi.

4.7-Misol. $f(x)=x^2$ tenglik uchun:

a) $f(x):R\to R$ akslantirish in’yektiv ham, syur’yektiv ham emas.

b) $f(x):[0;\infty)\to R$ in’yektiv bo’ladi, syur’yektiv emas.

v) $f(x):R\to[0;\infty)$ syur’yektiv bo’ladi, in’yektiv emas.

g) $f(x):[0;\infty)\to[0;\infty)$ biyektiv akslantirish bo’ladi.

Keltirilgan misollardan ko’rinadiki, $f:A\to B_x$ akslantirishlarda nafaqat f amalning tuzilishi, balki A va B to’plamlarning ham tuzilishi muhim rol o’ynaydi..

4.8-Ta’rif. 1) $f:A\to B$ – biyeкtiv akslantirish bo’lsin. f akslantirishga **teskari akslantirish** f^{-1} deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi akslantirishga aytiladi:

a) $D_l(f^{-1})=D_r(f)=B$;

b) $D_r(f^{-1})=D_l(f)=A$;

v) ixtiyoriy $x\in A$ uchun $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

2) $Id_A: A \longleftrightarrow A$ akslantirish quyidagicha aniqlanadi;

a) $D_l(Id_A) = D_r(Id_A) = A$;

b) ixtiyoriy $x \in A$ uchun $Id_A(x) = x$.

Id_A ga A da **birlik akslantirish** yoki **ayniy akslantirish** deyiladi.

4.9-Misol. $f_i: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad i = 1, 2, 3,$ funktsiyalarni qaraylik.

1) $f_1(x) = e^x$ funktsiya in'yektiv, lekin syur'yektiv emas.

2) $f_2(x) = x\sin x$ funktsiya in'yektiv emas, lekin syur'yektiv.

3) $f_3(x) = 2x - 1$ funktsiya ham in'yektiv, ham sur'yektiv, demak biyektiv bo'ladi.

2. Mustaqil bajarish uchun masala va topshiriqlar

2.1. Akslantirishlar. Inyektiv, suryektiv, biyektiv funksiyalarga doir topshiriqlar

A={1,2,3,4}, B={*a,b,c,d*} to'plamlar dekart ko'paytmasida aniqlangan quyidagicha R munosabatlar funksiya bo'ladimi? Agar bo'lsa in'yektiv, syur'yektiv, biyektiv funksiya bo'ladimi?

2.1.1.	R={(1,a),(2,b),(3,a),(4,d)}	**2.1.15**	R={(3,b),(2,a),(1,c),(4,d)}
2.1.2.	R={(1,a),(2,c),(3,b),(3,d)}	**2.1.16**	R={(4,c),(3,b),(3,a),(4,d)}
2.1.3.	R={(2,a),(1,b),(2,c),(4,d)}	**2.1.17**	R={(4,a),(1,b),(2,a),(3,c)}
2.1.4.	R={(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)}	**2.1.18**	R={(3,b),(2,c),(1,a),(4,d)}
2.1.5.	R={(2,a),(1,b),(3,d),(4,c)}	**2.1.19**	R={(2,a),(3,b),(4,b),(3,a)}
2.1.6.	R={(1,b),(2,c),(3,c),(4,d)}	**2.1.20**	R={(1,a),(2,b),(3,a),(4,d)}
2.1.7.	R={(4,a),(3,b),(2,a),(3,c)}	**2.1.21**	R={(4,c),(2,a),(3,a),(3,d)}
2.1.8.	R={(3,a),(1,b),(2,a),(4,d)}	**2.1.22**	R={(3,a),(1,b),(2,c)}
2.1.9.	R={(1,a),(4,b),(2,d),(3,c)}	**2.1.23**	R={(2,a),(1,b),(4,c),(3,d)}
2.1.10.	R={(4,d),(1,b),(2,c),(3,a)}	**2.1.24**	R={(4,b),(1,c),(2,d),(3,c)}
2.1.11.	R={(1,a),(2,b),(3,c),(4,b)}	**2.1.25**	R={(2,a),(1,b),(3,c),(4,d)}
2.1.12.	R={(3,a),(4,b),(2,d),(3,c)}	**2.1.26**	R={(2,b),(3,a),(4,c),(1,d)}
2.1.13.	R={(4,b),(3,a),(2,c),(3,d)}	**2.1.27**	R={(4,c),(2,b),(3,a),(1,d)}
2.1.14.	R={(4,a),(1,b),(2,d),(3,c)}	**2.1.28**	R={(3,a),(2,b),(4,a),(1,c)}

2.1.29 R={(4,a),(1,b),(2,c),(3,d)}

2.1. Akslantirishlar. Inyektiv, suryektiv, biyektiv funksiyalarga doir topshiriq(na'muna)

A={1,2,3,4}, B={a,b,c,d} to'plamlar dekart ko'paytmasida aniqlangan quyidagicha R munosabatlar funksiya bo'ladimi? Agar bo'lsa in'yektiv, syur'yektiv, biyektiv funksiya bo'ladimi?

2.1.0. R={(1,a),(1,b),(2,a),(3,d)}

2.1. Topshiriqni bajarish bo'yicha na'muna

2.1.0. A={1,2,3,4}, B={a,b,c,d} to'plamlar dekart ko'paytmasida aniqlangan R={(1,a),(1,b),(2,a),(3,d)} munosabat funksiya bo'ladimi? Agar bo'lsa in'yektiv, syur'yektiv, biyektiv funksiya bo'ladimi?

R$\subset$AxB munosabat funksiya bo'ladi, agar quyidagicha 2 ta shart bajarilsa:

1) $D_l(R) = A$, $D_r(f) \subseteq \mathrm{B}$,

2) $(x, \mathrm{y}_1) \in R$, $(x, \mathrm{y}_2) \in R$ ekanligidan $y_1 = y_2$ ekanligi kelib chiqsa

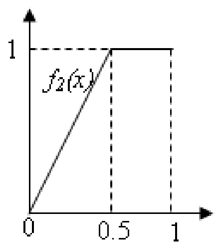
R munosabatga A to'plamdan B to'plamga **funktsiya** yoki **akslantirish** bo'ladi, shunga ko'ra :

1) D_l(R)={1,2,3}$\subset$A, D_r(R)={a,b,d}$\subset$B;

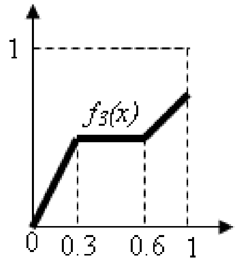
2) (1,a)$\in$R, (1,b)$\in$R ekanligidan a=b ekanligi kelib chiqishi lozim edi, lekin $a \neq b$, chunki to'plamda bitta element faqat bir marta qatnashadi, B to'plamda esa ushbu elementlar alohida-alohida berilgan. Demak R munosabat funksiya bo'la olmaydi.

2.2. Funksiya turlarini aniklashga doir topshiriqlar

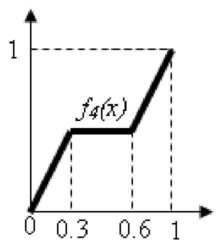
Quyidagicha aniqlangan $f_i(x)$:[0;+1]→[0;+1] funksiyalar in'yektiv bo'ladimi? Syur'yektiv bo'ladimi? Biyektiv bo'ladimi? Javoblaringizni isbotlang?



2.2.1.

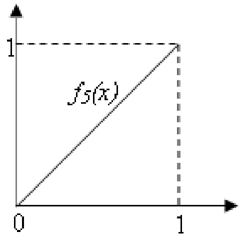


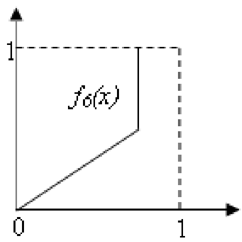
2.2.1.



2.2.3.

2.2.4. **2.2.5.**





2.2.6. (-∞;+∞)x(-∞;+∞) dekart ko‘paytmada aniqlangan in‘yektiv ham, syur’yektiv ham bo‘lmagan funksiyaga misol keltiring va isbotlang?

2.2.7. (-∞;+∞)x(-∞;+∞) dekart ko‘paytmada aniqlangan in‘yektiv bo‘lgan, syur’yektiv bo‘lmagan funksiyaga misol keltiring va isbotlang?

2.2.8. (-∞;+∞)x(-∞;+∞) dekart ko‘paytmada aniqlangan in‘yektiv bo‘lmagan, syur’yektiv bo‘lgan funksiyaga misol keltiring va isbotlang?

2.2.9. (-∞;+∞)x(-∞;+∞) dekart ko‘paytmada aniqlangan in‘yektiv ham, syur’yektiv ham bo‘lgan funksiyaga misol keltiring va isbotlang?

Quyidagicha aniqlangan $f_i(x)$:(-∞;+∞)→(-∞;+∞) funksiyalar in‘yektivlik, syur’yektivlik, biyektivlikka tekshirilsin:

2.2.10. $f_1(x)=x^2$ **2.2.11.** $f_2(x)=lnx$ **2.2.12.** $f_3(x)=x*sinx$

2.2.13. $f_4(x)=tgx$ **2.2.14.** $f_5(x)=2x+1$ **2.2.15**. $f_6(x)=sinx$

2.2.16. $f_7(x)=cosx$ **2.2.17.** $f_8(x)=ctgx$ **2.2.18**. $f_9(x)=a^x$

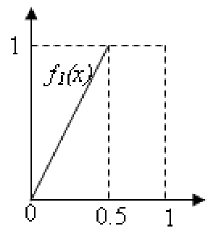
2.2.19. $f_{10}(x)=log_a x$ **2.2.20.** $f_{11}(x)=2*x+1$ **2.2.21.** $f_{12}(x)=x^3$

2.2.22. $f_{13}(x)=1/x$ **2.2.23.** $f_{14}(x)=1/(x+1)$ **2.2.24.** $f_{15}(x)=x^3-4x$

2.2. Funksiya turlarini aniklashga doir topshiriq(na’muna)

Quyidagicha aniqlangan $f_i(x)$:[0;+1]→[0;+1] funksiyalar in‘yektiv bo‘ladimi? Syur‘yektiv bo‘ladimi? Biyektiv bo‘ladimi? Javoblaringizni isbotlang?

2.2.0.



2.2. Topshiriqni bajarish bo’yicha na’muna

2.2.0. Topshiriqda grafik ko‘rinishda berilgan $f_1(x) \subset [0;1]x[0;1]=AxB$ munosabatni funksiyaga tekshiramiz:

1) $D_l(f_1)=[0;0.5] \subset A$, $D_r(f_1)=[0;1]=B$

2) $(x, y_1) \in R$, $(x, y_2) \in R$ ekanligidan $y_1 = y_2$ ekanligi kelib chiqadi, ya’ni bitta ***x*** qiymatga turli xil ***y*** lar mos qo‘yilmagan. Demak ***f₁(x)*** qisman funksiya bo‘ladi.

$\forall x_1, x_2 \in D_l(f_1)$ uchun $x_1 \neq x_2$ ekanligidan $f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$ kelib chiqqanligi, ya’ni turlicha ***x*** lar uchun turli xil ***y*** lar mos kelganligi uchu bunday funksiya in‘yektiv funksiya bo‘ladi.

$D_r(f_1)=[0;1]=B$ funksiyaning qiymatlar sohasi B to‘plamga teng bo‘lgani uchun $f_1(x)$ funksiya syur’yektiv funksiya bo‘ladi.

$f_1(x)$ in’yektiv emas, syur‘yektiv funksiya bo‘lgani uchun biyektiv funksiya bo‘lmaydi.

2.3.Funksiyalar kompozitsiyasiga doir topshiriqlar

Quyida keltirilgan *f*, *g*: R→R funksiyalar uchun *f*g*, *g*f* kompozitsiyalar aniqlansin?

2.3.1. $f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1-x & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{agar } x \geq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 2*x & \text{agar } x < 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

2.3.2. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x \geq 1 \text{ bo'lsa,} \\ x & \text{agar } x < 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{agar } x < 2 \text{ bo'lsa,} \\ 4-x & \text{agar } x \geq 2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

2.3.3. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ e^{-x+1} & \text{agar } x > 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 2x+1 & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

2.3.4. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{agar } x < -1 \text{ bo'lsa,} \\ -x^2+1 & \text{agar } x \geq -1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

2.3.5. $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{agar } x \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ -x+2 & \text{agar } x > 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{agar } x < -1 \text{ bo'lsa,} \\ \sin x & \text{agar } x \geq -1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

2.3.6. $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ x^2+1 & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{agar } x < 1 \text{ bo'lsa,} \\ -(x-1)^2+1 & \text{agar } x \geq 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

2.3.7. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x+1 & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{agar } x < -2 \text{ bo'lsa,} \\ x+2 & \text{agar } x \geq -2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

2.3.8. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{agar } x\le 0 \text{ bo'lsa,}\\ -x^2+1 & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\sin x & \text{agar } x<\dfrac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,}\\ -x+\pi & \text{agar } x\ge\dfrac{\pi}{2} \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.9. $f(x)=\begin{cases}-|x|, & \text{agar } x\le 1 \text{ bo'lsa,}\\ x-2 & \text{agar } x>1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa,}\\ -|x-1|+1 & \text{agar } x\ge 0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.10. $f(x)=\begin{cases}|x|, & \text{agar } x\le 1 \text{ bo'lsa,}\\ -x+2 & \text{agar } x>1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x+2 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,}\\ x^2 & \text{agar } x\ge -1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.11. $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{agar } x\le 0 \text{ bo'lsa,}\\ \ln(x+1) & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x+2 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,}\\ x^2 & \text{agar } x\ge -1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.12. $f(x)=\begin{cases}|x+1|, & \text{agar } x\le 0 \text{ bo'lsa,}\\ |x-1| & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{agar } x<1 \text{ bo'lsa,}\\ -(x-1)^2+1 & \text{agar } x\ge 1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.13. $f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{agar } x\ge 0 \text{ bo'lsa,}\\ 1-x & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}|x| & \text{agar } x<2 \text{ bo'lsa,}\\ 4-x & \text{agar } x\ge 2 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.14. $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{agar } x\ge 1 \text{ bo'lsa,}\\ x & \text{agar } x<1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\cos x & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa,}\\ 2x+1 & \text{agar } x\ge 0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.15. $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{agar } x\le 1 \text{ bo'lsa,}\\ e^{-x+1} & \text{agar } x>1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,}\\ -x^2+1 & \text{agar } x\ge -1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.16. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{agar } x\le 0 \text{ bo'lsa,}\\ -x & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,}\\ \sin x & \text{agar } x\ge -1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.17. $f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{agar } x\le 1 \text{ bo'lsa,}\\ -x+2 & \text{agar } x>1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-x-2 & \text{agar } x<-2 \text{ bo'lsa,}\\ x+2 & \text{agar } x\ge -2 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.18. $f(x)=\begin{cases}3x+1, & \text{agar } x\le 0 \text{ bo'lsa,}\\ x^2+1 & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,}\\ \sin x & \text{agar } x\ge -1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.19. $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{agar } x\le 0 \text{ bo'lsa,}\\ -x+1 & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\sin x & \text{agar } x<\dfrac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,}\\ -x+\pi & \text{agar } x\ge\dfrac{\pi}{2} \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.20. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{agar } x\le 0 \text{ bo'lsa,}\\ -x^2+1 & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x+2 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,}\\ x^2 & \text{agar } x\ge -1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.21. $f(x)=\begin{cases}-|x|, & \text{agar } x\le 1 \text{ bo'lsa,}\\ x-2 & \text{agar } x>1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x+2 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,}\\ x^2 & \text{agar } x\ge -1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.22. $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{agar } x\le 0 \text{ bo'lsa,}\\ \ln(x+1) & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{agar } x<1 \text{ bo'lsa,}\\ -(x-1)^2+1 & \text{agar } x\ge 1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.23. $f(x)=\begin{cases}|x+1|, & \text{agar } x\le 0 \text{ bo'lsa,}\\ |x-1| & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}|x| & \text{agar } x<2 \text{ bo'lsa,}\\ 4-x & \text{agar } x\ge 2 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.24. $f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{agar } x\ge 0 \text{ bo'lsa,}\\ 1-x & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,}\\ -x^2+1 & \text{agar } x\ge -1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3.25. $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{agar } x\ge 1 \text{ bo'lsa,}\\ x & \text{agar } x<1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,}\\ -x^2+1 & \text{agar } x\ge -1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3. Funksiyalar kompozitsiyasiga doir topshiriq (namuna)

Quyida keltirilgan *f, g*: R→R funksiyalar uchun *f*g, g*f* kompozitsiyalar aniqlansin?

2.3.0. $f(x)=\begin{cases}x^3 & agar\ |x|>1 bo'lsa\\ -x & \text{agar } |x|\le 1 \text{ bo'lsa}\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}x & \text{agar } x>8 \text{ bo'lsa ,}\\ 2-x & \text{agar } |x|\le 8 \text{ bo'lsa,}\\ 2+x & \text{agar } x<-8 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

2.3. Topshiriqni bajarish bo'yicha na'muna

2.3.0. 1) Kompozitsiya – akslantirishlarni birin-ketin qo'llashdir. *g*f* kompozitsiyada birinchi bo'lib ***f*** akslantirish, ikkinchi ***g*** akslantirish ta'sir qiladi. Shuning uchun ham ***f*** akslantirish aniqlanish sohasini qanday sohaga akslantirishini, ya'ni ***f(X)*** to'plamni aniq tasavvur qilish lozim. Nafaqat hosil bo'lgan to'plam, balki ***f*** ning aniqlanish sohasi ham ***g*** ning berilishiga qarab qismlarga bo'linadi.

f ning berilishini modul belgisini olib tashlab yozib olamiz:

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{agar } x>1;\\ -x, & \text{agar } -1\le x\le 1\\ x^3, & \text{agar } x<-1.\end{cases}$$

1. agar $x\in(1,+\infty)$ bo'lsa, u holda f akslantirish x^3 qoida bo'yicha ta'sir qilib, $(1,+\infty)$ oraliqni $(1,+\infty)$ oraliqqa akslantiradi. Hosil bo'lgan to'plamda esa g akslantirish yuqori va o'rta qator bilan aniqlanadi, Qachon qaysi qator ta'sir qilishini aniqlash uchun boshlang'ich to'plamni x=2 nuqta bilan ikkita to'plam ostiga ajratamiz: $(1,+\infty)=(1,2]\cup(2,+\infty)$
   f((1, 2])=(1,8] ushbu oraliqda esa ***g(x)=2-x***, ***f***$((2,+\infty))=(8,+\infty)$ usbu oraliqda esa ***g(x)=x.*** Shunday qilib,
   $$(g*f)(x)=\begin{cases}x^3, & \text{agar } x\in(2,+\infty) \text{ bo'lsa;}\\ 2-x^3 & \text{agar } x\in(1,2]\end{cases}$$
2. Agar $x\in[-1,+1]$ bo'lsa, u holda f([-1,+1])=[-1,+1] ushbu to'plam esa to'laligicha g ning o'rta qator aniqlanishiga tushadi. Demak,
   $$(g*f)(x)=2-(-x)=2+x, \quad \text{agar } x\in[-1,+1] \text{ bo'lsa.}$$
3. Agar $x\in(-\infty,-1)$ bo'lsa, u holda $f((-\infty,-1))=(-\infty,-1)$ ushbu to'plamda esa g akslantirish o'rta va quyi qatorlar bilan aniqlanadi, shuning uchun boshlang'ich to'plamni ikki qismga ajratamiz: $(-\infty,-1)=(-\infty,-2)\cup[-2,-1)$. Ushbu bo'laklarning har birini alohida ko'rib chiqamiz:

f((-∞,-2))=(- ∞,-8) ushbu oraliqda esa g(x)=2+x kabi aniqlanadi. Demak,

$$(g * f)(x) = 2 + x^3, \quad \text{agar } x \in (-\infty,-2) \text{ bo'lsa.}$$

f([-2,-1))=[-8,-1) ushbu oraliqda esa g(x)=2-x kabi aniqlanadi. Demak,

$$(g * f)(x) = 2 - x^3, \quad \text{agar } x \in [-2,-1) \text{ bo'lsa.}$$

Shunday qilib oxirgi natija quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$(g * f)(x) = \begin{cases} x^3, & \text{agar } x \in (2,+\infty) \\ 2 - x^3, & \text{agar } x \in [-2,-1) \cup (1,2] \\ 2 + x, & \text{agar } x \in [-1,+1] \text{ bo'lsa,} \\ 2 + x^3, & \text{agar } x \in (-\infty,-2) \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

f*g kompozitsiya ham shunga o‘xshash prinsipda amalga oshiriladi.