22-MA’RUZA. Eng qisqa yo’lni topish algoritmlari (2 soat).

REJA

1. Qidiruv algoritmlar.
2. Eng qisqa yo’lni topish.
3. Deykstra algoritmi.
4. Ford algoritmi.
5. Floyd algoritmi

Kalit so’zlar *Qidiruv algoritmlar, eng qisqa yo’lni topish, Deykstra algoritmi, Ford algoritmi, Floyd algoritmi.*

22.1.Qidiruv algoritmlar.

Minimal uzuznlikka ega yo‘l haqidagi masalani hal etish usullari orasida Deykstra tomonidan taklif etilgan algoritm ko‘p qo‘llaniladi. Quyida grafning 1 belgili uchidan chiqib (bu uchni manba deb qabul qilamiz) grafdagi ixtiyoriy k uchgacha (bu uchni oxirgi uch deb hisoblaymiz) eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni topish imkonini beruvchi **Deykstra algoritmi** keltirilgan.

Teorema (D. Kyonig). *Grafning ikki bo‘lakli bo‘lishi uchun uning tarkibida uzunligi toq son bilan ifodala-nuvchi sikl bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi.

Berilgan $G = (V, U)$ grafning ikki bo‘lakliligini aniqlashning sodda usuli bor. Bu usul **ko‘ndalangiga izlash** deb ataluvchi soddagina izlash g‘oyasiga asoslangan.

Ko‘ndalangiga izlash usuliga ko‘ra grafning uchlari $0,1,2,3,...$ raqamlar bilan quydagi qoida bo‘yicha belgilanadi. Dastlab grafning ixtiyoriy uchi 0 raqami bilan belgilab olinadi. Shu 0 belgili uchga qo‘shni barcha uchlarga 1 belgisi qo‘yiladi. Endi 1 belgili har bir uchga qo‘shni uchlarni aniqlab, ular orasidagi belgisi yo‘q uchlarga 2 belgisini qo‘aymiz. Keyin 2 belgisiga ega barcha uchlarni aniqlab, ular uchun ham yuqoridagiga o‘xshash ish yuritamiz. Bu jarayonni mumkin bo‘lgan qadar davom ettiramiz. Tushunarliki, agar G graf bog‘lamli bo‘lsa, u holda ko‘ndalangiga izlash usuli grafning barcha uchlarini raqamlab chiqish imkonini beradi.

Bog‘lamli graf uchlarini belgilash jarayoni tugagandan so‘ng, uning uchlari to‘plami V ni ikkita V_j va V_q to‘plamga quyidagicha ajratamiz: juft raqamli uchlarni V_j to‘plamga, qolgan uchlarni esa V_q to‘plamga kiritamiz (0 raqamli uch V_j to‘plamga kiritiladi). G grafning ikkala uchi ham V_j to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini U_j bilan, uning ikkala uchi ham V_q to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini esa U_q bilan belgilaymiz. Agar U_j va U_q kortejlar bo‘sh bo‘lsa, u holda berilgan G graf ikki bo‘laklidir, aks holda u ikki bo‘lakli emas.

22.2. Eng qisqa yo’lni topish.

Minimal uzuznlikka ega yo‘l haqidagi masalani hal etish usullari orasida Deykstra tomonidan taklif etilgan algoritm ko‘p qo‘llaniladi. Quyida grafning 1 belgili uchidan chiqib (bu uchni manba deb qabul qilamiz) grafdagi ixtiyoriy k

uchgacha (bu uchni oxirgi uch deb hisoblaymiz) eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni topish imkonini beruvchi **Deykstra algoritmi** keltirilgan.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1 = 0$ qiymatni mos qo‘yib, bu uchni dastlab $R = \varnothing$ deb qabul qilingan R to‘plamga kiritamiz: $R = \{1\}$. $\overline{R} = V \setminus R$ deb olamiz.

Umumiy qadam. Boshlang‘ich uchi R to‘plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha yoylar to‘plami $(R,\overline{R})$ bo‘lsin. Har bir $(i,j) \in (R,\overline{R})$ yoy uchun $h_{ij} = \varepsilon_i + c_{ij}$ miqdorni aniqlaymiz, bu yerda ε_i deb $i \in R$ uchga mos qo‘yilgan qiymat (grafning 1 belgili uchidan chiqib i belgili uchigacha eng qisqa yo‘l uzunligi) belgilangan.

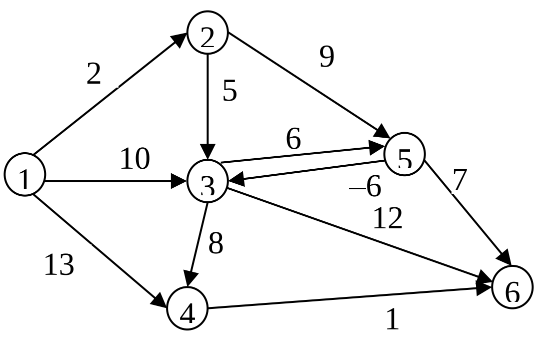
$\varepsilon_j = \min\limits_{(i,j)\in(R,\overline{R})} h_{ij}$ qiymatni aniqlaymiz. $(R,\overline{R})$ to‘plamning oxirgi tenglikda minimum qiymat beruvchi barcha elementlarini, ya’ni (i, j) yoylarni ajratamiz. Ajratilgan yoylarning har biridagi $j \in \overline{R}$ belgili uchga ε_j qiymatni mos qo‘yamiz. ε_j qiymat mos qo‘yilgan barcha j uchlarni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib R to‘plamga kiritamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha (i, j) yoylar uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz. Tekshirilayotgan tengsizlik o‘rinli bo‘lmagan (ja’ni $\varepsilon_{j_*} > \varepsilon_i + c_{ij_*}$ bo‘lgan) barcha j_* belgili uchlarning har biriga mos qo‘yilgan eski ε_{j_*} qiymat o‘rniga yangi $\varepsilon_i + c_{ij_*}$ qiymatni mos qo‘yamiz va (i, j_*) yoyni ajratamiz. Bunda eski ε_{j_*} qiymat aniqlangan paytda ajratilgan yoyni ajratilmagan deb hisoblaymiz.

Uchlarga qiymat mos qo‘yish jarayonini oxirgi (k belgili) uchga qiymat mos qo‘yilguncha davom ettiramiz. Grafning 1 belgili uchidan (manbadan) chiqib uning ixtiyoriy k uchigacha (oxirgi uchigacha) eng qisqa yo‘luzunligi ε_k bo‘ladi.

Oxirgi qadam. Grafning oxirgi uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda uning 1 belgili uchiga kelguncha harakatlanib, natijada grafdagi 1 belgili uchdan ixtiyoriy k uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo‘l(lar)ni topamiz.

2- m i s o l . 2- shaklda tasvirlangan orgrafda oltita uch ($V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) va o‘n bitta yoy bo‘lib, har bir yoy uzunligi uning yoniga yozilgan. Ko‘rinib turibdiki, berilgan



2- shakl

grafda manfiy uzunlikka ega $(5,3)$ yoy ham bor. Isbotlash mumkinki, bu grafda umumiy uzunligi manfiy bo‘lgan sikl mavjud emas.

Yuqorida bayon qilingan Deykstra algoritmini berilgan grafga qo‘llab, eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni topish bilan shug‘ullanamiz.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1 = 0$ qiymatni mos qo‘yamiz va $R = \{1\}$ to‘plamga ega bo‘lamiz. Shuning uchun, $\overline{R} = V \setminus R = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ bo‘ladi.

Umumiy qadam. 1- iteratsiya. $R = \{1\}$ va $\overline{R} = \{2,3,4,5,6\}$ bo‘lgani uchun boshlang‘ich uchi R to‘plamga tegishli, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plam elementi bo‘lgan barcha yoylar to‘plami $(R, \overline{R}) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ ga ega bo‘lamiz. $(R, \overline{R})$ to‘plamga tegishli bo‘lgan har bir yoy uchun h_{ij} ning qiymatlarini topamiz:

$(1, 2)$ yoy uchun $h_{12} = \varepsilon_1 + c_{12} = 0 + 2 = 2$;

$(1, 3)$ yoy uchun $h_{13} = \varepsilon_1 + c_{13} = 0 + 10 = 10$;

$(1, 4)$ yoy uchun $h_{14} = \varepsilon_1 + c_{14} = 0 + 13 = 13$.

Bu h_{12}, h_{13} va h_{14} miqdorlar orasida eng kichigi h_{12} bo‘lgani uchun $(1, 2)$ yoyni ajratamiz (3- shaklda bu yoy qalin chiziq bilan belgilangan) va 2 belgili uchga $\varepsilon_2 = 2$ qiymatni mos qo‘yamiz. Algoritmga ko‘ra 2 uchni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib, R to‘plamga kiritamiz. Natijada[1] $R = \{1, 2\}$ va $\overline{R} = \{3, 4, 5, 6\}$ to‘plamlarga ega bo‘lamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan bitta $(1, 2)$ yoy bo‘lgani uchun faqat bitta $\varepsilon_1 + c_{12} \geq \varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishini tekshirish kifoya. Bu tengsizlik $0 + 2 \geq 2$ ko‘rinishdagi to‘g‘ri munosabatdan iborat bo‘lgani uchun 2- iteratsiyaga o‘tamiz.

2- iteratsiya. $(R, \overline{R}) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,5)\}$ bo‘lgani sababli $h_{13} = 10$, $h_{14} = 13$, $h_{23} = 7$ va $h_{25} = 11$ qiymatlarni va $\min\{h_{13}, h_{14}, h_{23}, h_{25}\} = h_{23} = 7$ ekanligini aniqlaymiz. Bu yerda eng kichik qiymat $(2, 3)$ yoyga mos keladi. Shuning uchun, $(2, 3)$ yoyni ajratamiz va $\varepsilon_3 = 7$ qiymatni 3 belgili uchga mos qo‘yamiz. 3 belgili uchni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib, R to‘plamga kiritgandan so‘ng $R = \{1, 2, 3\}$ va $\overline{R} = \{4, 5, 6\}$ to‘plamlar hosil bo‘ladi.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan uchta $(1, 2)$, $(1, 3)$ va $(2, 3)$ yoylardan birinchisi uchun $\varepsilon_1 + c_{12} \geq \varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishi 1- iteratsiyada tekshirilganligi va ε_1, ε_2 qiymatlarning o‘zgarmaganligi sababli faqat ikkinchi va uchinchi yoylarga mos $\varepsilon_1 + c_{13} \geq \varepsilon_3$ va $\varepsilon_2 + c_{23} \geq \varepsilon_3$ munosabatlarni tekshirish kifoya. Bu munosabatlar $0 + 10 \geq 7$ va $2 + 5 \geq 7$ ko‘rinishda bajariladi. Shuning uchun 3- iteratsiyaga o‘tamiz.

3- iteratsiya. Boshlang‘ich uchi $R = \{1, 2, 3\}$ to‘plamga tegishli, oxiri esa $\overline{R} = \{4, 5, 6\}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan yoylar to‘rtta: $(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$ va $(3, 5)$. Shu yoylarga mos h_{ij} ning qiymatlari $h_{14} = 13$, $h_{25} = 11$, $h_{34} = 15$, $h_{35} = 13$ va, shuning uchun, $\min\{h_{14}, h_{25}, h_{34}, h_{35}\} = h_{25} = 11$ bo‘ladi. Demak, bu iteratsiyada $(2, 5)$ yoyni

---

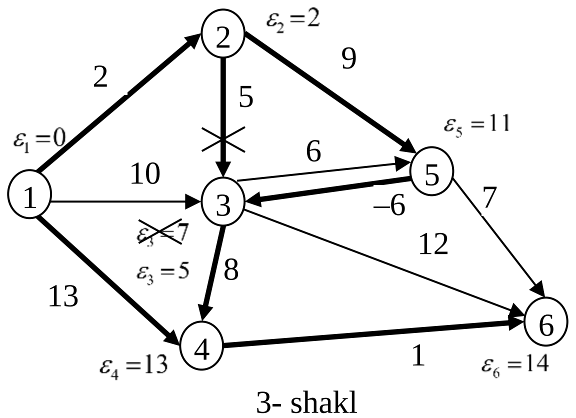
[1]Yozuvning ixchamligi nuqtai nazardanbu yerda va bundan keyin hosil bo‘lgan to‘plamlar uchun R va $\overline{R}$ belgilar qoldiriladi.

ajratamiz va $\varepsilon_5 = 11$ deb olamiz. Endi, algoritmga ko‘ra, $R = \{1, 2, 3, 5\}$ va $\overline{R} = \{4, 6\}$ to‘plamlarni hosil qilamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan yoylar oltita: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$. Bu yoylarning har biri uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshirishimiz kerak. Lekin, 1- va 2- iteratsiyalarda $(1, 2)$, $(2, 3)$ va $(1, 3)$ yoylar uchun bu ish bajarilganligi sababli tekshirishni tarkibida 5 belgili uch qatnashgan $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$ yoylar uchun amalga oshirib, quyidagilarga ega bo‘lamiz: $(2, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_2 + c_{25} \geq \varepsilon_5$ munosabat to‘g‘ri ($2 + 9 \geq 11$), $(3, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_3 + c_{35} \geq \varepsilon_5$ munosabat to‘g‘ri ($7 + 6 \geq 11$), lekin $(5, 3)$ yoy uchun $\varepsilon_5 + c_{53} \geq \varepsilon_3$ munosabat noto‘g‘ri ($11 + (-6) = 5 < 7$). Oxirgi munosabatni hisobga olib, algoritmga ko‘ra $\varepsilon_3 = 7$ o‘rniga $\varepsilon_3 = 5$ deb olamiz va $(5, 3)$ yoyni ajratilgan deb, ilgari ajratilgan $(2, 3)$ yoyni esa ajratilmagan deb hisoblaymiz (3- shaklda $\varepsilon_3 = 7$ yozuvning va $(2, 3)$ yoyning qalin chiziq’i ustiga ajratilganlikni inkor qiluvchi $\times$ belgisi qo‘yilgan).

4- iteratsiya. $R = \{1, 2, 3, 5\}$, $\overline{R} = \{4, 6\}$ bo‘lgani uchun $(R, \overline{R}) = \{(1, 4), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$ va $h_{14} = 13$, $h_{34} = 13$, $h_{36} = 17$, $h_{56} = 18$ hamda $\min\{h_{14}, h_{34}, h_{36}, h_{56}\} = h_{14} = h_{34} = 13$ bo‘ladi. Demak, $(1, 4)$ va $(3, 4)$ yoylarni ajratamiz hamda 4 belgili uchga $\varepsilon_4 = 13$ qiymatni mos qo‘yamiz. Natijada $R = \{1, 2, 3, 5, 4\}$, $\overline{R} = \{6\}$ to‘plamlarga ega bo‘lamiz.

$\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ munosabatning to‘g‘riligi $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$ va $(3, 4)$ yoylar uchun tekshirilib ko‘rilganda, uning barcha yoylar uchun bajarilishi ma’lum



3- shakl

bo‘ladi.

5- iteratsiya. Endi $(R, \overline{R}) = \{(3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$ bo‘lgani uchun $h_{36} = 17$, $h_{46} = 14$, $h_{56} = 18$ va $\min\{h_{36}, h_{46}, h_{56}\} = h_{46} = 14$ bo‘ladi. Bu yerda minimum $(4, 6)$ yoyda erishilgani uchun uni ajratib, orgrafning oxirgi 6 belgili uchiga $\varepsilon_6 = 14$ qiymatni mos qo‘yamiz.

Oxirgi qadam. Berilgan orgrafda 1 belgili uchdan 6 belgili uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo‘l(lar)ni topish maqsadida, algoritmga asosan, grafning oxirgi 6 belgili uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda harakatlanib, uning 1 belgili uchiga kelishimiz kerak. 6 belgili uchga kiruvchi uchta yoydan faqat bittasi ($(4,\,6)$ yoy) ajratilgan bo‘lgani uchun $(4,\,6)$ yoy yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda harakat qilib, 6 belgili uchdan 4 belgili uchga kelamiz. 4 belgili uchga kiruvchi ikkala ($(1,\,4)$ va $(3,\,4)$) yoylar ham ajratilgan bo‘lgani uchun biz tuzmoqchi bo‘lgan eng qisqa uzunlikka ega yo‘l yagona emas.

Agar harakatni $(1,\,4)$ yoy yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 1 belgili uchga kelib, eng qisqa uzunlikka ega yo‘llardan biri bo‘lgan $\mu_1 = (1,\,4,\,6)$ marshrutni topamiz.

Agarda harakatni $(3,\,4)$ yoy yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 3 belgili uchga kelamiz. 3 belgili uchga kiruvchi ikkita yoydan faqat bittasi ($(5,\,3)$ yoy) ajratilgan bo‘lgani uchun 3 belgili uchdan 5 belgili uchga kelamiz. Shu usulda davom etsak, oldin 2 belgili, keyin esa 1 belgili uchga o‘tib mumkin bo‘lgan eng qisqa uzunlikka ega bo‘lgan yo‘llardan ikkinchisini, ya’ni $\mu_2 = (1,\,2,\,5,\,3,\,4,\,6)$ marshrutni aniqlaymiz.

Shunday qilib, 2- shaklda tasvirlangan grafda eng qisqa uzunlikka ega μ_1 va μ_2 yo‘llar borligini aniqladik. Bu yo‘llarning har biri minimal $\varepsilon_6 = 14$ uzunlikka ega.

22.3. Deykstra algoritmi.

Minimal uzuznlikka ega yo‘l haqidagi masalani hal etish usullari orasida Deykstra tomonidan taklif etilgan algoritm ko‘p qo‘llaniladi. Quyida grafning 1 belgili uchidan chiqib (bu uchni manba deb qabul qilamiz) grafdagi ixtiyoriy k uchgacha (bu uchni oxirgi uch deb hisoblaymiz) eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni topish imkonini beruvchi **Deykstra algoritmi** keltirilgan.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1 = 0$ qiymatni mos qo‘yib, bu uchni dastlab $R = \varnothing$ deb qabul qilingan R to‘plamga kiritamiz: $R = \{1\}$. $\overline{R} = V \setminus R$ deb olamiz.

Umumiy qadam. Boshlang‘ich uchi R to‘plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha yoylar to‘plami $(R,\overline{R})$ bo‘lsin. Har bir $(i,j) \in (R,\overline{R})$ yoy uchun $h_{ij} = \varepsilon_i + c_{ij}$ miqdorni aniqlaymiz, bu yerda ε_i deb $i \in R$ uchga mos qo‘yilgan qiymat (grafning 1 belgili uchidan chiqib i belgili uchigacha eng qisqa yo‘l uzunligi) belgilangan.

$\varepsilon_j = \min\limits_{(i,j)\in(R,\overline{R})} h_{ij}$ qiymatni aniqlaymiz. $(R,\overline{R})$ to‘plamning oxirgi tenglikda minimum qiymat beruvchi barcha elementlarini, ya’ni $(i,\,j)$ yoylarni ajratamiz. Ajratilgan yoylarning har biridagi $j \in \overline{R}$ belgili uchga ε_j qiymatni mos qo‘yamiz. ε_j qiymat mos qo‘yilgan barcha j uchlarni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib R to‘plamga kiritamiz.

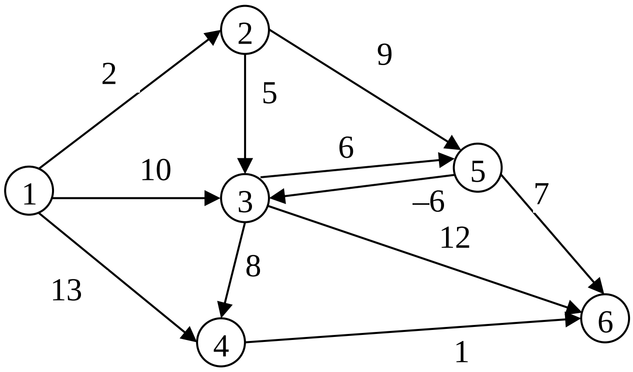
Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha $(i,\,j)$ yoylar uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz. Tekshirilayotgan tengsizlik o‘rinli bo‘lmagan (ja’ni $\varepsilon_{j_*} > \varepsilon_i + c_{ij_*}$ bo‘lgan) barcha j_* belgili uchlarning har biriga mos qo‘yilgan eski ε_{j_*} qiymat o‘rniga yangi $\varepsilon_i + c_{ij_*}$ qiymatni mos qo‘yamiz va $(i,\,j_*)$

yoyni ajratamiz. Bunda eski ε_{j_*} qiymat aniqlangan paytda ajratilgan yoyni ajratilmagan deb hisoblaymiz.

Uchlarga qiymat mos qo‘yish jarayonini oxirgi (k belgili) uchga qiymat mos qo‘yilguncha davom ettiramiz. Grafning 1 belgili uchidan (manbadan) chiqib uning ixtiyoriy k uchigacha (oxirgi uchigacha) eng qisqa yo‘luzunligi ε_k bo‘ladi.

Oxirgi qadam. Grafning oxirgi uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda uning 1 belgili uchiga kelguncha harakatlanib, natijada grafdagi 1 belgili uchdan ixtiyoriy k uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo‘l(lar)ni topamiz.

2- misol. 2- shaklda tasvirlangan orgrafda oltita uch ($V=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$) va o‘n bitta yoy bo‘lib, har bir yoy uzunligi uning yoniga yozilgan. Ko‘rinib turibdiki, berilgan



2- shakl

grafda manfiy uzunlikka ega $(5{,}3)$ yoy ham bor. Isbotlash mumkinki, bu grafda umumiy uzunligi manfiy bo‘lgan sikl mavjud emas.

Yuqorida bayon qilingan Deykstra algoritmini berilgan grafga qo‘llab, eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni topish bilan shug‘ullanamiz.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1=0$ qiymatni mos qo‘yamiz va $R=\{1\}$ to‘plamga ega bo‘lamiz. Shuning uchun, $\overline{R}=V\setminus R=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ bo‘ladi.

Umumiy qadam. 1- iteratsiya. $R=\{1\}$ va $\overline{R}=\{2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$ bo‘lgani uchun boshlang‘ich uchi R to‘plamga tegishli, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plam elementi bo‘lgan barcha yoylar to‘plami $(R,\overline{R})=\{(1,\ 2),(1,\ 3),(1,\ 4)\}$ga ega bo‘lamiz. $(R,\overline{R})$ to‘plamga tegishli bo‘lgan har bir yoy uchun h_{ij} ning qiymatlarini topamiz:

$(1,\ 2)$ yoy uchun $h_{12}=\varepsilon_1+c_{12}=0+2=2$;

$(1,\ 3)$ yoy uchun $h_{13}=\varepsilon_1+c_{13}=0+10=10$;

$(1,\ 4)$ yoy uchun $h_{14}=\varepsilon_1+c_{14}=0+13=13$.

Bu h_{12}, h_{13} va h_{14} miqdorlar orasida eng kichigi h_{12} bo‘lgani uchun $(1,\ 2)$ yoyni ajratamiz (3- shaklda bu yoy qalin chiziq bilan belgilangan) va 2 belgili uchga $\varepsilon_2=2$ qiymatni mos qo‘yamiz. Algoritmga ko‘ra 2 uchni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib, R to‘plamga kiritamiz. Natijada[2] $R=\{1,\ 2\}$ va $\overline{R}=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ to‘plamlarga ega bo‘lamiz.

---

[2]**Yozuvning ixchamligi nuqtai nazardanbu yerda va bundan keyin hosil bo‘lgan to‘plamlar uchun R va $\overline{R}$ belgilar qoldiriladi.**

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan bitta $(1, 2)$ yoy bo‘lgani uchun faqat bitta $\varepsilon_1 + c_{12} \geq \varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishini tekshirish kifoya. Bu tengsizlik $0+2 \geq 2$ ko‘rinishdagi to‘g‘ri munosabatdan iborat bo‘lgani uchun 2- iteratsiyaga o‘tamiz.

2- iteratsiya. $(R,\overline{R}) = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,5)\}$ bo‘lgani sababli $h_{13} = 10$, $h_{14} = 13$, $h_{23} = 7$ va $h_{25} = 11$ qiymatlarni va $\min\{h_{13}, h_{14}, h_{23}, h_{25}\} = h_{23} = 7$ ekanligini aniqlaymiz. Bu yerda eng kichik qiymat $(2, 3)$ yoyga mos keladi. Shuning uchun, $(2, 3)$ yoyni ajratamiz va $\varepsilon_3 = 7$ qiymatni 3 belgili uchga mos qo‘yamiz. 3 belgili uchni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib, R to‘plamga kiritgandan so‘ng $R = \{1, 2, 3\}$ va $\overline{R} = \{4, 5, 6\}$ to‘plamlar hosil bo‘ladi.

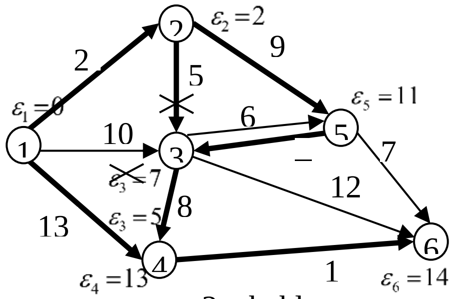
Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan uchta $(1, 2)$, $(1, 3)$ va $(2, 3)$ yoylardan birinchisi uchun $\varepsilon_1 + c_{12} \geq \varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishi 1- iteratsiyada tekshirilganligi va ε_1, ε_2 qiymatlarning o‘zgarmaganligi sababli faqat ikkinchi va uchinchi yoylarga mos $\varepsilon_1 + c_{13} \geq \varepsilon_3$ va $\varepsilon_2 + c_{23} \geq \varepsilon_3$ munosabatlarni tekshirish kifoya. Bu munosabatlar $0+10 \geq 7$ va $2+5 \geq 7$ ko‘rinishda bajariladi. Shuning uchun 3- iteratsiyaga o‘tamiz.

3- iteratsiya. Boshlang‘ich uchi $R = \{1, 2, 3\}$ to‘plamga tegishli, oxiri esa $\overline{R} = \{4, 5, 6\}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan yoylar to‘rtta: $(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$ va $(3, 5)$. Shu yoylarga mos h_{ij} ning qiymatlari $h_{14} = 13$, $h_{25} = 11$, $h_{34} = 15$, $h_{35} = 13$ va, shuning uchun, $\min\{h_{14}, h_{25}, h_{34}, h_{35}\} = h_{25} = 11$ bo‘ladi. Demak, bu iteratsiyada $(2, 5)$ yoyni ajratamiz va $\varepsilon_5 = 11$ deb olamiz. Endi, algoritmga ko‘ra, $R = \{1, 2, 3, 5\}$ va $\overline{R} = \{4, 6\}$ to‘plamlarni hosil qilamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan yoylar oltita: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$. Bu yoylarning har biri uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshirishimiz kerak. Lekin, 1- va 2- iteratsiyalarda $(1, 2)$, $(2, 3)$ va $(1, 3)$ yoylar uchun bu ish bajarilganligi sababli tekshirishni tarkibida 5 belgili uch qatnashgan $(2, 5)$, $(3, 5)$ va $(5, 3)$ yoylar uchun amalga oshirib, quyidagilarga ega bo‘lamiz: $(2, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_2 + c_{25} \geq \varepsilon_5$ munosabat to‘g‘ri ($2+9 \geq 11$), $(3, 5)$ yoy uchun $\varepsilon_3 + c_{35} \geq \varepsilon_5$ munosabat to‘g‘ri ($7+6 \geq 11$), lekin $(5, 3)$ yoy uchun $\varepsilon_5 + c_{53} \geq \varepsilon_3$ munosabat noto‘g‘ri ($11+(-6) = 5 < 7$). Oxirgi munosabatni hisobga olib, algoritmga ko‘ra $\varepsilon_3 = 7$ o‘rniga $\varepsilon_3 = 5$ deb olamiz va $(5, 3)$ yoyni ajratilgan deb, ilgari ajratilgan $(2, 3)$ yoyni esa ajratilmagan deb hisoblaymiz (3- shaklda $\varepsilon_3 = 7$ yozuvning va $(2, 3)$ yoyning qalin chiziq’i ustiga ajratilganlikni inkor qiluvchi $\times$ belgisi qo‘yilgan).

4- iteratsiya. $R = \{1, 2, 3, 5\}$, $\overline{R} = \{4, 6\}$ bo‘lgani uchun $(R,\overline{R}) = \{(1, 4),(3, 4),(3, 6),(5, 6)\}$ va $h_{14} = 13$, $h_{34} = 13$, $h_{36} = 17$, $h_{56} = 18$ hamda $\min\{h_{14}, h_{34}, h_{36}, h_{56}\} = h_{14} = h_{34} = 13$ bo‘ladi. Demak, $(1, 4)$ va $(3, 4)$ yoylarni ajratamiz hamda 4 belgili uchga $\varepsilon_4 = 13$ qiymatni mos qo‘yamiz. Natijada $R = \{1, 2, 3, 5, 4\}$, $\overline{R} = \{6\}$ to‘plamlarga ega bo‘lamiz.

$\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ munosabatning to‘g‘riligi $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$ va $(3, 4)$ yoylar uchun tekshirilib ko‘rilganda, uning barcha yoylar uchun bajarilishi ma’lum



3- shakl

bo‘ladi.

5- iteratsiya. Endi $(R, \overline{R}) = \{(3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$ bo‘lgani uchun $h_{36} = 17$, $h_{46} = 14$, $h_{56} = 18$ va $\min\{h_{36}, h_{46}, h_{56}\} = h_{46} = 14$ bo‘ladi. Bu yerda minimum $(4, 6)$ yoyda erishilgani uchun uni ajratib, orgrafning oxirgi 6 belgili uchiga $\varepsilon_6 = 14$ qiymatni mos qo‘yamiz.

Oxirgi qadam. Berilgan orgrafda 1 belgili uchdan 6 belgili uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo‘l(lar)ni topish maqsadida, algoritmga asosan, grafning oxirgi 6 belgili uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda harakatlanib, uning 1 belgili uchiga kelishimiz kerak. 6 belgili uchga kiruvchi uchta yoydan faqat bittasi ($(4, 6)$ yoy) ajratilgan bo‘lgani uchun $(4, 6)$ yoy yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda harakat qilib, 6 belgili uchdan 4 belgili uchga kelamiz. 4 belgili uchga kiruvchi ikkala ($(1, 4)$ va $(3, 4)$) yoylar ham ajratilgan bo‘lgani uchun biz tuzmoqchi bo‘lgan eng qisqa uzunlikka ega yo‘l yagona emas.

Agar harakatni $(1, 4)$ yoy yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 1 belgili uchga kelib, eng qisqa uzunlikka ega yo‘llardan biri bo‘lgan $\mu_1 = (1, 4, 6)$ marshrutni topamiz.

Agarda harakatni $(3, 4)$ yoy yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 3 belgili uchga kelamiz. 3 belgili uchga kiruvchi ikkita yoydan faqat bittasi ($(5, 3)$ yoy) ajratilgan bo‘lgani uchun 3 belgili uchdan 5 belgili uchga kelamiz. Shu usulda davom etsak, oldin 2 belgili, keyin esa 1 belgili uchga o‘tib mumkin bo‘lgan eng qisqa uzunlikka ega bo‘lgan yo‘llardan ikkinchisini, ya’ni $\mu_2 = (1, 2, 5, 3, 4, 6)$ marshrutni aniqlaymiz.

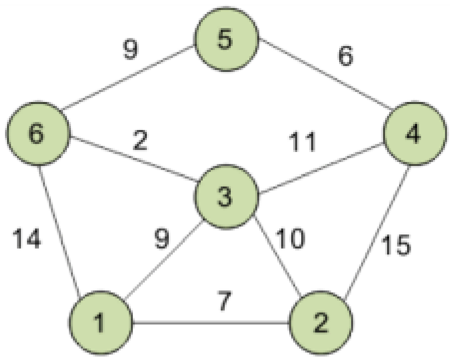
Shunday qilib, 2- shaklda tasvirlangan grafda eng qisqa uzunlikka ega μ_1 va μ_2 yo‘llar borligini aniqladik. Bu yo‘llarning har biri minimal $\varepsilon_6 = 14$ uzunlikka ega.

22.4. Ford algoritmi.

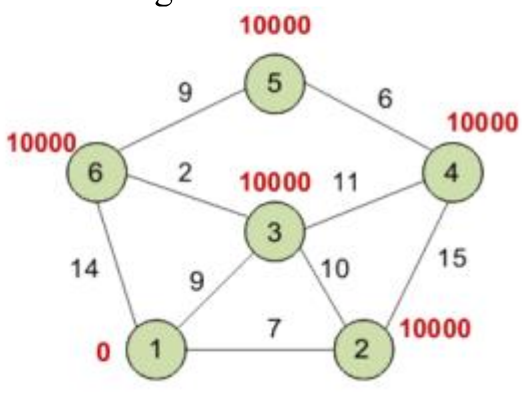
Muammoning turli xil formulalari mavjudligi sababli, grafda eng qisqa yo‘lni topish muammosini hal qilishning eng mashhur algoritmlari mavjud:

Dijkstraning algoritmi. Grafning uchidan boshqalarigacha eng qisqa yo‘lni topadi. Algoritm faqat salbiy og‘irliksiz chizmalar uchun ishlaydi.

Bellman-Ford algoritmi. Vaznli grafda grafning bir uchidan boshqa barcha qismlariga eng qisqa yo‘llarni topadi. Qirralarning og‘irligi salbiy bo‘lishi mumkin.
A * qidirish algoritmi. Grafdagi eng yaxshi mos kelish uchun qidirish algoritmidan foydalanib, bitta tugundan (boshlang‘ich) boshqasiga (maqsadli, yakuniy) eng kam xarajatni topadi.
Deykstri algoritmi. Eng qisqa yo‘lni topish misolini ko‘rib chiqing. Shaharni bog‘laydigan yo‘llar tarmog‘i berilgan. Ba'zi yo‘llar bir tomonlama. Shahar markazidan mintaqadagi har bir shaharga olib boradigan eng qisqa yo‘llarni toping. Ushbu muammoni hal qilish uchun siz Deykstri algoritmidan foydalanishingiz mumkin - 1959 yilda Gollandiyalik olim E. Dijkstroy tomonidan ixtiro qilingan graflardagi 221 algoritm. Grafning uchidan boshqalarigacha bo‘lgan eng qisqa masofani topadi. Faqat salbiy og‘irlikka ega chizmalar uchun ishlaydi.
Aytaylik, siz birinchi cho‘qqidan qolgan barcha masofalarga eng qisqa masofani topmoqchisiz. Doira uchlarini, chiziqlar esa ularning orasidagi yo‘llarni (Grafning chetlarini) ko‘rsatadi. Doiralarda vertikallarning raqamlari, qirralarning tepasida ularning og‘irligi - yo‘l uzunligi ko‘rsatilgan. Qiymat har bir verteks yonida qizil rang bilan belgilanadi - bu tugundan 1 verteksgacha bo‘lgan eng qisqa yo‘lning uzunligi.

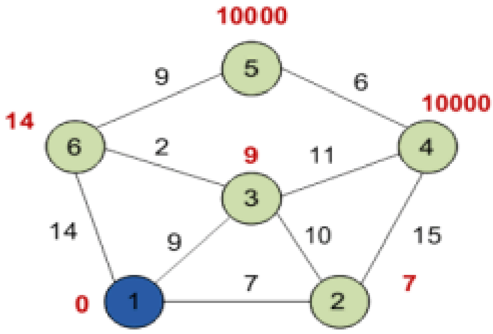


1-tugunning qiymati 0 ga teng, qolgan uchlari etiketkalari esa erishib bo‘lmaydigan ko‘p sonli
(ideal holda cheksizlik). Bu 1-tugundan boshqa cho‘qqilargacha bo‘lgan masofalar hali noma'lum
ekanligidan dalolat beradi. Grafning barcha uchlari ko‘rinmas deb belgilangan.

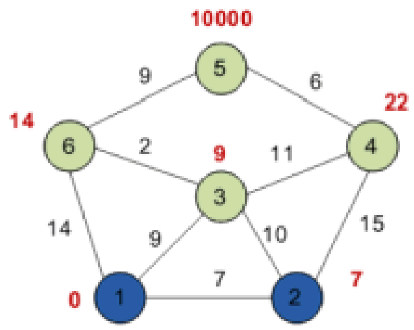


Birinchi qadam. Minimal qiymat 1-tugun. Uning qo‘shnilari 2, 3 va 6-sonli vertikalardir. Biz tugun qo‘shnilarini navbatma-navbat aylanib chiqamiz.

1-tugunning birinchi qo‘shnisi 2-tugundir, chunki unga boradigan yo‘lning uzunligi minimaldir. 1-tugun orqali o‘tadigan yo‘lning uzunligi 1-verteksgacha bo‘lgan eng qisqa masofaning yig‘indisiga, uning qiymati qiymatiga va 1-dan 2-gacha bo‘lgan chekkaning uzunligiga, ya'ni 0 + 7 = 7 ga teng, bu hozirgi tugun 2 (10000) qiymatidan kamroqdir. Shunday qilib, 2-chi tugunning yangi qiymati 7 ga teng. 222

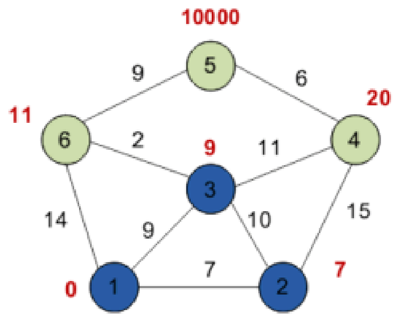


Xuddi shunday, biz boshqa barcha qo‘shnilar uchun yo‘l uzunligini topamiz (3 va 6-vertikal chiziqlar).
1-tugunning barcha qo‘shnilari tekshirilgan. Hozirgi eng yuqori cho‘qqigacha bo‘lgan masofa 1 yakuniy hisoblanadi va qayta ko‘rib chiqilmaydi. Top 1 tashrif buyurilgan deb belgilanadi.
Ikkinchi qadam. Algoritmning 1-bosqichi takrorlanadi. Yana biz kutilmagan cho‘qqilarning "eng yaqinini" topamiz. Bu 7-qiymat bilan 2-tugun.
Yana, biz tanlangan tugunning qo‘shnilarining qiymatlarini kamaytirishga harakat qilamiz, ular orqali 2-chi tugun orqali o‘tishga harakat qilamiz. 2 cho‘qqilarining qo‘shnilari 1, 3 va 4 cho‘qqilari. Top 1 allaqachon tashrif buyurilgan. 2-tugunning keyingi qo‘shnisi 3-tugundir, chunki u uchiga minimal tashrif buyurilgan deb belgilangan. Agar siz unga 2 ga kirsangiz, u holda bu yo‘lning uzunligi 17 ga teng bo‘ladi (7 + 10 = 17). Ammo uchinchi uchlikning hozirgi qiymati 9
va 9 <17 dir, shuning uchun qiymat o‘zgarmaydi.

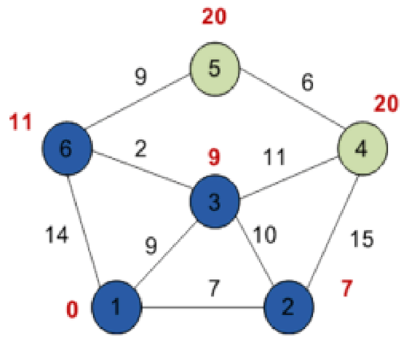


2-tugunning yana bir qo‘shnisi - 4-sonli tugun. Agar siz uni 2-chi tomondan o‘tsangiz, bu yo‘lning
uzunligi 22 ga teng bo‘ladi (7 + 15 = 22). 22 <10000 dan boshlab, to‘rtburchakning tegini 22 ga

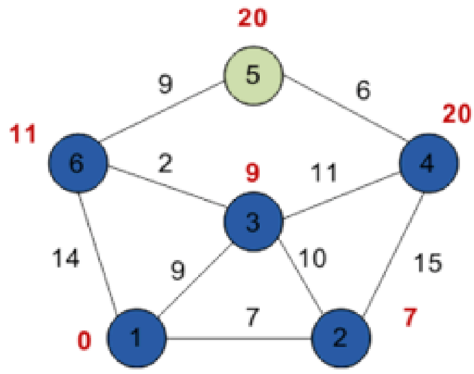
teng qilib qo‘ying, 2 tugunning barcha qo‘shnilari ko‘rib chiqilgan, tashrif buyurilgan deb
belgilang.
Uchinchi qadam. Algoritm bosqichini 3-sonli tugunni tanlab takrorlaymiz. "Qayta ishlash"
dan so‘ng quyidagi natijalarga erishamiz.



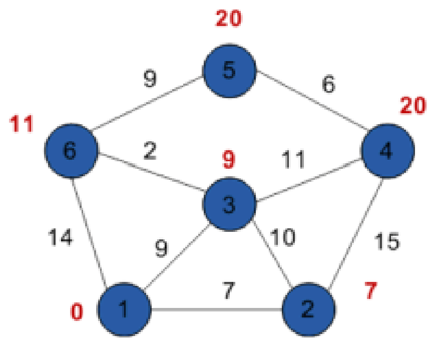
To‘rtinchi qadam



Beshinchi qadam



Oltinchi qadam



Shunday qilib, 1-verteksdan 5-chi tugungacha eng qisqa yo‘l 1 - 3 - 6 - 5 vertikallari orqali
o‘tadigan yo‘l bo‘ladi , chunki bu holda biz 20 ga teng bo‘lgan eng kam vaznga ega bo‘lamiz. Biz har bir verteks uchun yo‘l uzunligini bilamiz va endi oxirlarini oxirigacha ko‘rib chiqamiz. Biz oxirgi tugunni (bu holda 5- tugun) ko‘rib chiqamiz va u bilan bog‘langan barcha vertikallar uchun biz oxirgi tugunning uzunligidan tegishli qirraning og‘irligini olib tashlash orqali yo‘l uzunligini topamiz.
Shunday qilib, 5- tugunning uzunligi 20 ga teng .
Bu 6 va 4 vertikal chiziqlar bilan bog‘liq . 6 tugun uchun biz vazni 20 - 9 = 11 (mos keladi) olamiz . 4- tugun uchun biz vazni 20 - 6 = 14 (mos kelmadi) olamiz Agar natijada biz tugunning uzunligi bilan mos keladigan qiymatni olsak (bu holda, 6-sonli tugun), unda oxirgi tepaga o‘tish amalga oshirildi. Biz ushbu cho‘qqini kerakli yo‘lda belgilaymiz.
Keyinchalik, biz 6 tugunni urgan tomonni aniqlaymiz . Shunday qilib, biz boshlanishiga qadar. Agar bunday aylanma yo‘l natijasida, bir necha bosqichda bir nechta vertikallarning qiymatlari bir-biriga to‘g‘ri kelsa, siz ulardan istalganini olishingiz mumkin - bir necha yo‘l uzunligi bir xil bo‘ladi.
Dijkstra algoritmini amalga oshirish. Graf og‘irliklarini saqlash uchun kvadrat matritsa ishlatiladi. Qator va ustun sarlavhalarida grafaning uchlari joylashgan. Graf yoylarining og‘irliklari jadvalning ichki kameralariga joylashtirilgan. Grafda ko‘chadan yo‘q, shuning uchun matritsaning asosiy diagonali nol qiymatlarni o‘z ichiga oladi.

	1	2	3	4	5	6
1	0	7	9	0	0	14
2	7	0	10	15	0	0
3	9	10	0	11	0	2
4	0	15	11	0	6	0
5	0	0	0	6	0	9
6	14	0	2	0	9	0

22.5. Floyd algoritmi

Floyd - Worshell algoritmi. Og‘irlikdagi yo‘naltirilgan grafning barcha uchlari orasidagi eng qisqa yo‘llarni topadi.

Jonson algoritmi og‘irlikdagi yo‘naltirilgan grafning barcha juft uchlari orasidagi eng qisqa yo‘llarni topadi.

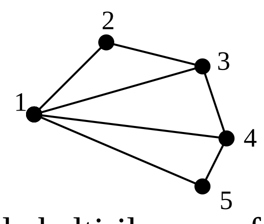
Li algoritmi (to‘lqin algoritmi). Kenglik birinchi izlash usuliga asoslangan. Minimal miqdordagi oraliq uchlari (qirralari) ni o‘z ichiga olgan s va t Grafning kesimlari (s t ga to‘g‘ri kelmaydi) orasidagi yo‘lni topadi. asosiy dastur - iz elektr tarmog‘i billur chiplari va bosilgan elektron platalar . Shuningdek, strategik o‘yinlarda xaritada eng qisqa masofani topish uchun foydalaniladi.

Nazorat uchun savollar:

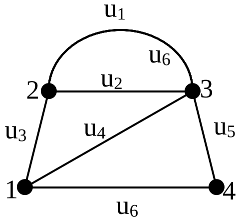
1. Siklik qirra nima?
2. Atsiklik qirra nima?
3. Siklomatik sonni formula orqali ifodalang.
4. Qanday graf daraxt deb ataladi?
5. Pog`ona uchlari deb nimaga aytiladi?
6. Grafning asosi deb nimaga aytiladi?
7. Chekli grafda qirralar va uchlar soni orasidagi munosabatni keltiring.
8. Keli teoremasini ayting.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Chizmada keltirilgan grafning xromatik sonini toping:



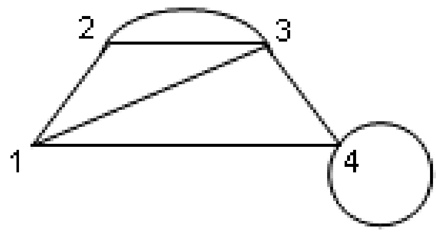
2. Chizmada keltirilgan grafning xromatik sonini toping:



3. Berilgan qo`shnilik matritsasiga ko`ra grafning tasvirini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Berilgan qo`shnilik matritsasiga ko`ra grafning tasvirini toping:



TESTLAR

1. Графда Эйлер цикли мавжуд бўлиши учун:
A. Граф богланган бўлиши ва барча тугунларининг локал даражалари жуфт бўлиши керак;
B. Графнинг 2 та тугуни(бошланиш ва охирги) локал даражалари тоқ бўлиб, қолган барча тугунларининг локал даражалари жуфт бўлиши керак.
C. Графнинг барча тугунларининг локал даражалари тоқ бўлиши керак;
D. Граф богланмаган бўлиши керак
2. Graf uchlarining lokal darajasi deb nimaga aytiladi?
A. Berilgan uchga tutashgan qirralari soni
B. Grafdagi uchlarining soni
C. Tuguni bor uchlarining soni
D. Bunday tushuncha yo’q
3. Graflar izomorf bo’lishi uchun zaruriy shartlar to’liq ifodalansin
A. Uchlari va qirralari soni teng bo’lishi kerak
B. Uchlari soni teng bo’lishi kerak
C. Qirralari soni teng bo’lishi kerak
D. Uchlari va qirralari soni teng bo’lib ular orasida biyektiv akslantirish mavjud bo’lishi kerak
4. Ориентирланган граф деб қандай графга айтилади?
A. Хар бир қирраси маълум бир йўналишга эга бўлган графга
B. Граф хар бир учига кирувчи ва чиқувчи қирралари бўлган графга
C. Хар бир учидан бошқа учларига туташтируфчи маршрут бўлган графга

D. Қирралари орасида йўқолган қирралари бўлган графга
5. Qism graf deb nimaga aytiladi?
A. G grafning o'zaro bog'langan qirralari ixtiyoriy ketma-ketlik
B. {A} to'plam graf uchlari V ning qismi bo'lsa G grafning shkala uchi xam A ga tegishli bo'lgan qirralaridan iborat qismi
C. Grafda qism graf bo'lmaydi
D. G grafning qiralaridan istalgan qismi qism graf bo'ladi
6. Qanaqa ko`rinishdagi ko`phad Jegalkin ko`phadi deb ataladi-?
A. $\sum x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k} + a$ ko'rinishdagi ko'phad Jegalkin ko'phadi deb ataladi
B. $\sum x_{i_1} - x_{i_2} ... - x_{i_k} + a$ ko'rinishdagi ko'phad Jegalkin ko'phadi deb ataladi
C. $\sum x_{i_1} + x_{i_2} ... - x_{i_k} + a$ ko'rinishdagi ko'phad Jegalkin ko'phadi deb ataladi
D. $\sum \sum x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k} + a$ ko'rinishdagi ko'phad Jegalkin ko'phadi deb ataladi
7. Nomonoton funksiya deb nimaga aytiladi-?
A. Agar $\alpha \prec \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) > f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.
B. Agar $\alpha \succ \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) > f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.
C. Agar $\alpha \prec \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) \geq f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.
D. Agar $\alpha \prec \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) < f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.
8. Superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb nimaga aytiladi?
A. Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo'lgan funksiya ham shu sistemaning elementi bo'lsa, u holda bunday sistema superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb ataladi.
B. Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo'lgan funksiya ham shu sistemaning elementi bo'lmasa, u holda bunday sistema superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb ataladi.
C. Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo'lgan funksiya ham shu sistemaning elementi bo'lmasa, u holda bunday sistema superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb ataladi.
D. Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo'lgan har qanday funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinf deb ataladi.
9. Funksional yopiq sinf bu-?
A. Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo'lgan har qanday funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinf deb ataladi.
B. Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo'lgan har qanday funksiyalar sistemasi funksional ochiq sinf deb ataladi.
C. mantiq algebrasining bo'sh sinfdan hamma funksiyalari
D. to'plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf funksional yopiq sinf deb ataladi.
10. Xususiy funksional yopiq sinf deb nimaga aytiladi?
A. Bo'sh sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari

B. to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf xususiy funksional yopiq sinf deb ataladi.
C. Bo‘sh bo`lmagan sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari
D. to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf xususiy funksional yopiq sinf deb ataladi.