3 Мустакил иш. Bul funksiyalari uchun diz’yunktiv va kon’yunktiv normal shakllar (DNSh, KNSh). Mukammal diz’yunktiv va mukammal kon’yunktiv normal shakllar (MDNSh, MKNSh)

Reja:

1. Bul funksiyalari uchun normal shakllar(DNSh, KNSh, MDNSh, MKNSh).
2. Mustaqilbajarishuchun masalavatopshiriqlar
   2.1. FormulalarniKNShvaDNShko‘rinishga keltiring
   2.2. FormulalarniMKNShvaMDNShko‘rinishga keltiring

1. Formulalarning normal shakllari

Mulohazalar algebrasida funksiya tushunchasi. Oddiy algebradagi funksiya tushunchasiga o‘xshash, mulohazalar algebrasida ham **funksiya** tushunchasi kiritilishi mumkin.

Ma’lumki, oddiy algebrada funksiyaning qiymatlari turli usullar vositasida, masalan, jadval yordamida berilishi mumkin. Mulohazalar algebrasida ko‘pchilik tushunchalarni ifodalashda Chinlik jadvallari qulay vosita hisoblanadi. Chinlik jadvallarida faqat ikkita o‘zgarmas (0 va 1) ishtirok etadi. Shu tufayli $E_2 = \{0,1\}$ deb belgilaymiz.

10.1-ta’rif. n ta Bulo‘zgaruvchisiga bog‘liq bo‘lgan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga Bul funksiyasi deyiladi. Bul funksiyalarining aniqlanish va qiymatlari sohasi $\{0, 1\}$ to‘plamdan iboratdir.

Istalgan Bul funksiyasini chinlik jadvali orqali berish mumkin, bunda o‘zgaruvchilarning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to’plamiga mos mantiqiy qiymat beriladi.

O‘zgaruvchilarning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to’plamida aynan bir xil qiymat qabul qiluvchi ikkita Bul funksiyasi teng kuchli funksiyalar deb ataladi.

Bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan Bul funksiyalarini chinlik jadvalini quramiz (10.1-jadval):

10.1-jadval

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq to‘rtta funksiya mavjud.

$f_1(x)$ va $f_4(x)$ mos ravishda 0 va 1 ga teng bo‘lgan o‘zgarmaslar deb ataladi.

$f_2(x)$ funksiyaayniyfunksiyadeyiladi:

$$f_2(x) = x.$$

$f_3(x)$ funksiya x o‘zgaruvchiga teskari qiymatlarni qabul qiladi va x ning inkori deb ataladi, $\overline{x}$ ko‘rinishda belgilanadi:

$$f_3(x) = \overline{x}.$$

Ikkita o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan $f_i(x_1;x_2) = f_i$, $i = 1$, …, 16 Bul funksiyalarini chinlik jadvalini quramiz (6.2-jadval):

10.2-jadval

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki ikkita o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan funksiyalar soni 16 ta, n o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan funksiyalar soni 2^{2^n} taga teng bo‘ladi.

10.2-jadvaldan ko'rinibturibdiki, ikkitao'zgaruvchiggabog’liqfunktsiyalarbittao'zgaruvchigabog'liqbo'lganfunktsiyalarnio'zichigaoladi.

$f_1 = 0$ va $f_{16} = 1$ funksiyalar mos ravishda 0 va 1 o‘zgarmaslarni beradi.

f_4, f_6, f_{11}, f_{13} funksiyalar bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq: $f_4 = x_1$, $f_6 = x_2$ – *o‘zgaruvchini o‘zini qiymatiga teng,* $f_{11} = \overline{x_2}$, $f_{13} = \overline{x_1}$ – *o‘zgaruvchilarning inkorlariga teng*.

Qolgan funksiyalarning ko‘rinishlarini yozib chiqamiz:

$f_2 = x_1 \wedge x_2$ – *konyunksiya,*

$f_8 = x_1 \vee x_2$ – *dizyunksiya,*

$f_{10} = x_1 \leftrightarrow x_2$ – *ekvivalensiya,*

$f_7 = x_1 \oplus x_2$ – *ikki modul bo‘yicha qo‘shish yoki Jegalkin amali,*

$f_{12} = x_2 \to x_1$ – *konversiya,*

$f_{14} = x_1 \to x_2$ –*implikatsiya,*

$f_{15} = x_1 \mid x_2$ –*Sheffershtrixi,*

$f_9 = x_1 \downarrow x_2$ –*Pirsstrelkasi,*

f_3 va f_5 funksiyalar implikatsiya va konversiyaga teskari hisoblanadi.

Bir va ikki o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan bul funksiyalari elementar funksiyalar hisoblanadi.

To‘plamlar ustida bajariluvchi amallar xossalari va Bul funksiyalarining xossalari orasida bog‘lanish mavjud:

1. Birlashma va kesishmaning idempotentligi:

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A,$$

xususiy xolda

$$A \cup Ø = A, \quad A \cap Ø = Ø, \quad A \cup U = U, \quad A \cap U = A.$$

Dizyunksiya vakonyunksiyaning idempotentligi:

$$x \vee x = x, \qquad x \wedge x = x,$$

xususiy holda

$$x \vee 0 = x, \quad x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1, \quad x \wedge 1 = x.$$

2. Birlashma va kesishmaning kommutativligi:

$$A \cup B = B \cup A, \; A \cap B = B \cap A.$$

Dizyunksiya vakonyunksiyaning kommutativligi*:*

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x.$$

Kommutativlik ikki modul bo‘yicha qo‘shish, Pirs strelkasi va SHeffer shtrixi amallariga ham xos xususiyatdir. O‘zgaruvchilarning o‘rni almashishi funksiyaning qiymatiga ta’sir qilmaydi.

3. Birlashma va kesishmaning assotsiativligi:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

*Dizyunksiya vakonyunksiya*assotsiativligi*:*

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

Assotsiativlik *dizyunksiya vakonyunksiyaning* bajarilish tartibi farqlanmasligini bildiradi, ikki modul bo‘yicha qo‘shish amali ham assotsiativlik qoidasiga bo‘ysunadi .

4. Birlashmaning kesishmaga nisbatan distrubutivligi va aksincha:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Dizyunksiyaningkonyunksiyaga nisbatan distrubutivligi va aksincha*:*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

5. Birlashma va kesishmaning yutilishi:

$$(A \cap B) \cup A = A, \qquad (A \cup B) \cap A = A.$$

Dizyunksiya vakonyunksiyaning yutilishi:

$$(x \wedge y) \vee y = y, \quad (x \vee y) \wedge y = y.$$

Yutilish qonunlari Bul funksiyalarini soddalashtirish imkonini beradi.

6. Involyutivlik (ikki karrali to‘ldiruvchini aniqlash):

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Ikki karrali inkor qoidasi:

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

7. deMorgan qonuni:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}, \qquad \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}.$$

de Morgan qonunlari dizyunksiyavakonyunksiya orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi.

8. To‘ldiruvchi qonuni:

$$A \cup \overline{A} = U, \qquad A \cap \overline{A} = Ø.$$

Tavtologiyayoki uchinchisi istesno qonuni:

$$x \vee \overline{x} = 1.$$

Muvofiqlik qonuni:

$$x \wedge \overline{x} = 0.$$

Bul funksiyalari ustida bajariladigan amallar tartibi: eng kuchli amal – inkor, undan keyinkonyunksiya, so‘ngra – dizyunksiya, so‘ngra – implikatsiya, so‘ngra – ekvivalensiya. Qolgan amallarning bajarilish tartibi qavslar bilan ajratib ko‘rsatiladi. Konyunksiya amali algebraik ko‘paytma ko‘rinishida ham ifodalanishi mumkin. Masalan de Morgana qonunlarini quyidagicha ifodalash ham mumkin: $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$.

Matematik mantiqning 1–8 va boshqa to‘plamlar nazariyasiga bog‘liq qonunlarni quyidagi usullarda isbotlash mumkin:

– *tengliklarning ikkala tomoni uchunEylera–Vennadiagrammalarini tasvirlab ularning tengligini ko‘rsatish;*

– *chinlik jadvali yordamida;*

– *Quyidagi sxema bo‘yicha formal mulohaza yuritish bilan*.

Aytaylik to‘plamlar nazariyasi bo‘yicha $M = N$, bu erda M va N – qandaydir to‘plamlar.

Isbotningbirinchiqismi, agar biron-bir element M to'plamgategishlibo'lsa, u to'plamga N ham tegishliekanliginiko'rsatishdir. Bu $M \subset N$ munosabatningto'g'riliginiisbotlaydi.

Isbotningikkinchiqismida, agar biron-bir element N to'plamgategishlibo'lsa, u to'plamga M ham tegishliekanliginiko'rsatishkerak. Bu esa $N \subset M$ munosabatningto'g'riliginiisbotlaydiva $M = N$ ekanligi kelib chiqadi.

10.1-misol. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \to \overline{x_3} \vee x_1 \mid (\overline{x_2} \wedge \overline{x_1})$ Funksiyanichilikjadvalinituzingvaikkilik son ko’rinishigakeltiring.

Yechimi. Dastlabamallarnibajarilishtartibinianiqlabolamiz:

$$f_1 = x_1 \oplus x_2, \quad f_2 = \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}, \quad f_3 = x_1 \mid f_2, \quad f_4 = \overline{x_3} \vee f_3, \quad f_5 = f_1 \to f_4$$

.

Chinlikjadvalinihosilqilinganqismfunksiyalartartibidahisoblabto’ldiramiz:

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

Berilganfunksiyaningikkilik son ko’rinishidagiifodasi: $F = 11111111$.

10.2-misol. Berilgan $f(x_1,x_2)=\overline{x_1}\to(x_1\to x_2)$ funksiyaningtavtolagiyaekanliginiisbotlang.

Yechimi. Funksiyaningikkiliksonifodasi $F=1111$ekanliginiisbotlashlozim. Chinlikjadvalinituzamiz:

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$x_1\to x_2$	$\overline{x_1}\to(x_1\to x_2)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

10.3-misol. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\wedge(x_1\vee x_3)\wedge(x_2\vee x_3)$ va $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_3)$funksiyalarningo’zarotengliginianiqlang.

Yechimi. Ikkalafunksiyaning ham chinlikjadvalinituzamiz, agargaularningikkilik son ifodasiaynanmosbo’lsademakfunksiyalartengligiisbotlanadi.

x_1	x_2	x_3	$x_1\vee x_3$	$x_2\vee x_3$	$x_1\wedge(x_1\vee x_3)$	$x_1\wedge(x_1\vee x_3)\wedge(x_2\vee x_3)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

x_1	x_2	x_3	$x_1\wedge x_2$	$x_1\wedge x_3$	$(x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_3)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Natijada $F_1=00000111$, $F_2=00000111$qiymatlargaegabo’lamiz. Demakfunksiyalarimiztengkuchli.

10.2-t a ' r i f . Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$funksiyauchun $f(0,0,...,0)\equiv 1$bo‘lsa, uholdau**0 saqlovchifunksiya**, $f(1,1,...,1)\equiv 1$bo‘lgandaesa**1 saqlovchifunksiya**debataladi.

“0 saqlovchifunksiya” iborasio‘rnida “yolg‘onqiymatsaqlovchifunksiya”, “1 saqlovchifunksiya” iborasio‘rnidaesa “chinqiymatsaqlovchifunksiya” iborasiqo‘llanilishihammumkin. $n$ta argumentli 0 saqlovchi funksiyalar soni ga, 1 saqlovchi funksiyalarning soni ham ga teng bo‘lishini isbotlash qiyin emas.

Funksiyalar teng kuchliligi. Mulohazalar algebrasida teng kuchli formulalar tushunchasi kiritilgan edi. Bu yerda ham n argumentli funksiyalar teng kuchliligi tushunchasini kiritish mumkin.

10.3-t a ' r i f . f va g funksiyalar mulohazalar algebrasining funksiyalari, $x_1,x_2,...,x_n$ o‘zgaruvchilar esa ularning hech bo‘lmaganda bittasining argumentlari bo‘lsin. Agar $x_1,x_2,...,x_n$ argumentlarning barcha qiymatlar satrlari uchun f va g funksiyalarning mos qiymatlari bir xil bo‘lsa, u holda f va g funksiyalar **teng kuchli funksiyalar** deb ataladi.

Agar berilgan funksiyalar teng kuchli bo‘lmasa, u holda ular **teng kuchlimas funksiyalar** deb yuritiladi.

Berilgan f va g funksiyalarning teng kuchliligi $f\equiv g$ shaklda yoziladi. Agar f va g funksiyalar teng kuchlimas funksiyalar bo‘lsa, u holda $f\not\equiv g$ yozuvdan foydalaniladi.

10.4-t a ' r i f . Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning qandaydir x_i argumenti uchun

$$f(x_1,x_2,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)\equiv f(x_1,x_2,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)$$

sahart qolgan $x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$ argumentlarning mumkin bo‘gan ixtiyoriy qiymatlarida bajarilsa, u holda x_i uning **soxta argumenti,** $x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$ argumentlarning mumkin bo‘gan qiymatlaridan hech bo‘lmasa bittasi uchun

$$f(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)\not\equiv f(x_1,x_2,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)$$

shart bajarilganda esa x_i uning **muhim argumenti** deb ataladi.

10.1-m i s o l . Berilgan $f(x,y)\equiv x\vee(xy)$ funksiya uchun y soxta argumentdir, chunki $f(x,0)\equiv f(x,1)$ shart x argumentning ixtiyoriy (0 yoki 1) qiymatida bajariladi. Lekin, x o‘zgaruvchi $f(x,y)$ funksiyaning muhim argumentidir, chunki $f(0,y)\equiv 0 \not\equiv f(1,y)\equiv 1$ shart y o‘zgaruvchining barcha (0 va 1) qiymatlarida o‘rinlidir.

Mulohazalar algebrasida o‘rinli bo‘lgan qonun va qoidalariga asoslanib, funksiyaning qiymatini o‘zgartirmasdan, uning argumentlari safiga istalgancha soxta argumentlarni kiritish va bu safdan istalgancha soxta argumentlarni olib tashlash mumkin.

Funksiyalar superpozitsiyasi. Endi formula tushunchasini funksiyalar superpozitsiyasi tushunchasi bilan bog‘liq holda o‘rganamiz.

$\phi_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}), \phi_2(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}), ..., \phi_m(x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mk_m})$

mulohazalar algebrasi funksiyalarining chekli sistemasi bo‘lsin.

10.5-ta’rif. Quyidagi ikki usulning biri vositasida hosil qilinadigan ψ funksiyaga Φ sistemadagi $\phi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalarning **elementar superpozitsiyasi** yoki **bir rangli superpozitsiyasi** deb ataladi:

a) biror $\phi_j \in \Phi$ funksiyaning x_{ji} argumentini qayta nomlash usuli, ya’ni

$,\phi_j(x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{ji-1}, y, x_{ji+1}, ..., x_{jk_j}),$

bu yerda y o‘zgaruvchi, o‘zgaruvchilarning birortasi bilan mos tushishi mumkin;

b) biror $\varphi_j \in \Phi$ funksiyaning biror x_{ji} argumenti o‘rniga boshqa

$\phi_m(x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mk}) \in \Phi$ funksiyani qo‘yish usuli, ya’ni

$\phi_j(x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{ji-1}, \phi_m(x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mk}), x_{ji+1}, ..., x_{jk_j})$

10.5-ta’rifda keltirilgan usullardan birortasini berilgan Φ sistema funksiyalariga qo‘llash natijasida hosil qilingan yangi funksiyalar $\Phi^{(1)}$ sistemasini**bir rangli superpozitsiyalar sinfi** deb, $\Phi^{(1)}$ sinfi funksiyalariga qo‘llash natijasida hosil qilingan funksiyalar $\Phi^{(2)}$ sistemasini **ikki rangli superpozitsiyalari sinfi** deb, va, hokazo, k **rangli superpozitsiyalar** $\Phi^{(n)}$ **sinfi** deb ataluvchi sinflarni hosil qilamiz.

Umuman olganda, $\Phi^{(k+1)} = (\Phi^n)^{(1)}$.

10.1-izoh.10.5-ta’rifning a) qismiga asosan bir xil Chinlik jadvaliga ega bo‘lib, lekin o‘zgaruvchilarning belgilanishi bilan farq qiladigan funksiyalar bir-birining superpozitsiyasi bo‘ladi.

10.2-izoh. 6.5-ta’rifning a) qismiga asosan biror x_{ji} o‘zgaruvchini shu funksiyaning boshqa x_{ji} $(i \neq k)$ o‘zgaruvchisi bilan qayta nomlasak, natijada o‘zgaruvchilari soni kam funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu holda x_{ji} va x_{ji} o‘zgaruvchilar **aynan tenglashtirildi** deb aytamiz. Masalan, $x \vee y$ va $x \vee \overline{y}$ funksiyalardagi y ni x bilan qayta nomlasak, u vaqtda $x \vee x = x$ va $x \wedge \overline{x} = 0$ funksiyalarni hosil qilamiz.

10.3-izoh. 6.5-ta’rifning a) qismiga asosan agar $\Phi \subset \Phi^{(1)}$ bo‘lsa, u holda $\Phi^{(r)} = \Phi^{(r+1)}$ va, umuman, $r \leq s$ bo‘lganda $\Phi^{(r)} = \Phi^{(s)}$ bo‘ladi.

10.6-ta’rif. x, $\overline{x}$, xy, $x \vee y$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$ *asosiy elementar funksiyalarning superpozitsiyasi vositasida hosil qilingan ifoda* ***formula*** *deb ataladi.*

10.4-misol. $(x \leftrightarrow y)(x \to y) \vee (x \downarrow y)$ funksiya 0 konstantani saqlashini aniqlaymiz.

Yechimi. $(x \leftrightarrow y)(x \to y) \vee (x \downarrow y)$=$1 \wedge 1 \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$;

Chunki,

$(x \leftrightarrow y)$=$(0 \leftrightarrow 0)$=1;

$(x \to y) = (0 \to 0) = 1$;

$(x \downarrow y) = (0 \downarrow 0) = 1$.

Shunday qilib, funksiya $(x \leftrightarrow y)(x \to y) \vee (x \downarrow y) \notin T_0$, ya'ni 0 saqlamaydi.

10.5-misol. $(x \leftrightarrow y)(x \to y) \vee (x \downarrow y)$ funksiya 1 saqlashini aniqlaymiz.

Yechimi. $(x \leftrightarrow y)(x \to y) \vee (x \downarrow y)$=$1 \wedge 1 \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$;

Chunki, $(x \leftrightarrow y)$=$(1 \leftrightarrow 1) = 1$;

$(x \to y) = (1 \to 1) = 1$;

$(x \downarrow y) = (1 \downarrow 1) = 0$.

Shunday qilib, funksiya $(x \to y)(x \to y) \vee (x \downarrow y) \in T_1$, ya'ni 0 konstantani saqlaydi.

Teng kuchli almashtirishlar bajarib, mulohazalar algebrasining formulalarini har xil ko'rinishlarda yozish mumkin. Masalan, $\overline{A}$ →VS formulani $A \vee BC$ yoki $(A \vee B)$ $(A \vee C)$ ko'rinishlarda yoza olamiz.

Mantiq algebrasining kontakt va rele-kontaktli sxemalar, diskret texnikadagi tatbiqlarida va matematik mantiqning boshqa masalalarida formulalarning normal shakllari katta ahamiyatga ega.

Quyidagibelgilashnikiritamiz:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & агар \quad \sigma = ч, \\ \overline{x}, & агар \quad \sigma = ё. \end{cases}$$

σ^{σ} = chekanligianiq.

10.6-ta'rif.

$$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} \qquad (2.1)$$

ko'rinishdagiformulagaelementarkon'yunksiya deb aytamiz. Bu yerda $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ ixtiyoriyqiymatlarsatriva x_i o'zgaruvchilarorasidabirxillaribo'lishimumkin.

10.7-ta'rif.

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n} \qquad (2.2)$$

ko‘rinishdagiformulagaelementardiz’yunksiya deb aytamiz. Bu yerda ham $\sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ixtiyoriyqiymatlarsatriva x_i o‘zgaruvchilarorasidabirxillaribo‘lishimumkin.

10.8-t a ’ r i f . Elementardiz’yunksiyalarningkon’yunksiyasigaformulaningkon’yunktiv normal shakli (KNSh) vaelementarkon’yunksiyalarningdiz’yunksiyasigaformulaningdiz’yunktiv normal shakli (DNSh) deb aytiladi.

KNShga $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z)$ formula vaDNShga $xy \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}z$ formula misolbo‘laoladi.

10.1-Teorema. Elementarmulohazalarningharbir P formulasigatengkuchlikon’yunktiv normal shakldagi Q formula mavjud.

Bu teoremaniisbotlashdaushbutengkuchliliklardanfoydalanamiz:

1. $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$; 2. $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$; 3. $A \to B = \bar{A} \vee B$;

4. $\overline{A \to B} = A \wedge \bar{B}$; 5. $A \leftrightarrow B = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$;

6. $\overline{A \leftrightarrow B} = (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B)$.

10.2- Teorema. P formula doimo chin bo‘lishiuchununingKNShdagiharbirelementardiz’yunktivhadidakamidabittaelementarmulohazabilanbirgabumulohazaninginkori ham mavjudbo‘lishizarurvayetarli.

10.6-Misol. 1. $P = x \wedge \bar{x} \to y \wedge \bar{y} = \overline{x \wedge \bar{x}} \vee \overline{y \wedge \bar{y}} = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y$.

$P = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y$ - aynanchindir.

2. $\overline{x \wedge \bar{x}} \wedge (y \wedge \bar{y} \to z) = (\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y) \vee z = P(\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y \vee z)$ - aynan chin formuladir.

Diz’yunktiv normal shakl. Eslatibo‘tamizki, elementarkon’yunksiyalarningdiz’yunksiyasigaformulaningdiz’yunktiv normal shakli (DNSh) deb aytiladi.

10.3-Teorema. Elementarmulohazalarningistalgan P formulasiniDNShgakeltirishmumkin.

10.4-Teorema. P formula aynanyolg’onbo‘lishiuchun, uningdiz’yunktiv normal shaklidagiharbirelementarkon’yunksiyaifodasidakamidabittaelementarmulohazabilanbirgabumulohazaninginkori ham mavjudbo‘lishizarurvayetarli.

10.7.-Misol. $P = \overline{\overline{(\bar{x} \wedge x)} \to \overline{\bar{y} \wedge y}} = \overline{(\bar{x} \wedge x)} \vee \overline{\bar{y} \wedge y} = (\bar{\bar{x}} \vee \bar{x}) \vee \bar{\bar{y}} \vee \bar{y} = (x \vee \bar{x}) \vee (y \vee \bar{y})$

$\overline{P} = (x \vee \bar{x}) \vee (y \vee \bar{y})$ - aynan chin.

$P = (\bar{x} \wedge x) \wedge (\bar{y} \wedge y)$ - aynanyolg'on.

Mukammalkon'yunktivvadiz'yunktiv normal shakllar. MantiqalgebrasiningbittaformulasiuchunbirnechtaDNSh (KNSh) mavjudbo'lishimumkin. Masalan, $(x \vee y)\,(x \vee z)$ formulaniquyidagi $x \vee yz$, $x \vee xy \vee xz$ DNShlargakeltirishmumkin. Bulardistributivlikvaidempotentlikqonunlariniqo'llashnatijasidahosilqilingan.

Formulalarnibirqiymatliravishda normal shakldatasvirlashuchuntakomildiz'yunktiv normal shaklvatakomilkon'yunktiv normal shakl (TDNShvaTKNSh) deb ataluvchiko'rinishlariishlatiladi.

n ta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementarmulohazalarning

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n} \quad (2.4)$$

elementardiz'yunksiyalariva

$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{\sigma_n} \quad (2.5)$$

elementarkon'yunksiyalariberilganbo'lsin.

10.9- Ta'rif. (2.4) elementardiz'yunksiya ((2.5) elementarkon'yunksiya) to'g'rielementardiz'yunksiya (elementarkon'yunksiya) deb aytiladi, shundavafaqatshundagina, qachonki (2.4)ning ((2.5)ning) ifodasidaharbirelementarmulohaza $x_i$birmartaqatnashganbo'lsa.

Masalan, $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ va $\overline{x_1} \vee x_4 \vee x_6$ elementardiz'yunksiyalarva $x_1\ x_2\ x_3$ va $x_1\ \overline{x_3}\ x_6$ elementarkon'yunksiyalarmosravishdato'g'rielementardiz'yunksiyalarvaelementar kon'yunksiyalar deb aytiladi.

10.10- Ta'rif (2.4) elementardiz'yunksiya ((2.5) elementarkon'yunksiya) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mulohazalarganisbatanto'liqelementardiz'yunksiya (elementarkon'yunksiya) deb aytiladi, qachonkiularningifodasida $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mulohazalarningharbittasibir martaginaqatnashganbo'lsa.

Masalan, $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$ va $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$ elementardiz'yunksiyalarva $\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}$, $x_1 x_2\ \overline{x_3}$ elementarkn'yunksiyalar $x_1,\ x_2,\ x_3$

mulohazalarganisbatanto‘liqelementardiz’yunksiyalarvaelementarkon’yunksiyalar bo‘ladi.

10.11- Ta’rif. Diz’yunktiv normal shakl (kon’yunktiv normal shakl) TDNSh (TKNSh) deb aytiladi, agar DNSh (KNSh) ifodasidabirxilelementarkon’yunksiyalar (elementardiz’yunksiyalar) bo‘lmasavahammaelementarkon’yunksiyalar (elementardiz’yunksiyalar) to‘g’rivato‘liqbo‘lsa.

Masalan, $xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$ DNSh x, y, z mulohazalarganisbatanTDNShbo‘ladi. $(x \vee y)\,(x \vee \bar{y})\,(\bar{x} \vee y)$ KNSh x, y mulohazalarganisbatanTKNShbo‘ladi.

AsosiymantiqiyamallarningTDNShvaTKNShko‘rinishlariquyidagichabo‘ladi: a) MDNSh: $\bar{x} = \bar{x}$; $xy = xy$; $x \vee y = xy \vee \bar{x}\,y \vee x\,\bar{y}$; $x \to y = xy \vee \bar{x}\,y \vee \bar{x}\,\bar{y}$; $x \to y = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$.

b) TKNSh: $\bar{x} = \bar{x}$; $xy = (\bar{x} \vee y)\,(x \vee \bar{y})\,(x \vee y)$;
$x \vee y = x \vee y$; $x \to y = \bar{x} \vee y$; $x \to y = (\bar{x} \vee y)\,(x \vee \bar{y})$.

10.5- Teorema. *n ta elementarmulohazaningaynan chin formulasidanfarqliharbir A formulanitakomil kon’yunktiv normal shaklga (TKNSh) keltirishmumkin.*

10.8-Misol. 1. $A = (\bar{x} \to x) \wedge (y \to \bar{y}) \vee (z \leftrightarrow u)$ formula quyidagiTKNShgaegabo‘ladi.

$$A = (x \vee \bar{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \bar{u}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee u) \wedge (\bar{y} \vee z \vee \bar{u})$$

2. $A = (\overline{x \vee z}) \wedge (x \to y) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$

$A = [\bar{x} \vee (y \wedge \bar{y}) \vee (z \wedge \bar{z})] \wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee \bar{z}] \wedge$

$\wedge (\bar{x} \vee y \vee (z \wedge \bar{z}))] = [(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge$

$(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})] \wedge [(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge$

$\wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})] \wedge [(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})]$

$A = (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge$

$\wedge \quad \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$

3. $A = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee t)$

$A=[z\vee y\vee(z\wedge\bar{z})\vee(t\wedge\bar{t})]\wedge[(x\wedge\bar{x})\vee y\vee z\vee(t\wedge\bar{t})]\wedge$

$\wedge[(x\wedge\bar{x})\vee(y\wedge\bar{y})\vee z\vee t)=[(x\vee y\vee z\vee t)\wedge(x\vee y\vee\bar{z}\vee t)\wedge$

$\wedge(x\vee y\vee z\vee\bar{t})\wedge(x\vee y\vee\bar{z}\vee\bar{t})]\wedge[(x\vee y\vee z\vee t)\wedge$

$(\bar{x}\vee y\vee z\vee t)\wedge(x\vee y\vee z\vee\bar{t})\wedge(\bar{x}\vee y\vee z\vee\bar{t})]\wedge$

$\wedge[(x\vee y\vee z\vee t)\wedge x\vee\bar{y}\vee z\vee t)\wedge(\bar{x}\vee y\vee z\vee t)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z\vee t)]$

n mulohazalimukammalkon’yunktiv normal shakl

$$\wedge\left(x_1^1\vee x_2^1\vee\ldots\vee x_n^1\right)$$

ifodasida $\wedge$ o‘rniga $\vee$ nivaaksincha, $\vee$ o‘rniga $\wedge$ niqo‘yganimizda

$$\vee\left(x_1^1\wedge x_2^1\wedge\ldots\wedge x_n^1\right)$$

biz n mulohazalimukammaldiz’yunktiv normal shaklgaegabo‘lamiz.

Mukammaldiz’yunktiv normal shaklningharbir $x_1^1\wedge x_2^1\wedge\ldots\wedge x_n^1$ hadi**kon’yunktivkonstituent** deb ataladi.

10.6-Teorema. n *ta elementarmulohazalarningaynanyolg’onformulasidanfarqliharbir* A *formulasinimukammaldiz’yunktiv normal shaklgakeltirishmumkin.*

10.9-Misol. $A=[(\bar{x}\to x)\wedge(y\to\bar{y})]\vee(z\leftrightarrow u)$

$A=(x\vee\bar{z}\vee u)\wedge(x\vee z\vee\bar{u})\wedge(\bar{y}\vee\bar{z}\vee u)\wedge(\bar{y}\vee z\vee\bar{u})\wedge$

$\wedge(x\vee\bar{z}\vee u)\vee(y\wedge\bar{y})=(x\vee\bar{z}\vee u\vee y)\wedge(x\vee\bar{z}\vee u\vee\bar{y})$

TOPShIRIQ VARIANTLARI.

QuyidagiformulalarniDNSh,KNSh, MKNShvaMDNShko‘rinishga keltiring.

2.1.2. $((p\to q)\&(q\to r))\to(p\to r)$

2.1.3. $\overline{(x\to z)\to((y\to z)\to(x\vee y\to z))}$

2.1.4. $(p_1\to p_2)\to((p_1\vee p)\to(p_2\vee p))$

2.1.5. $\overline{(p_1\to p_2)\to((p_1\wedge p)\to(p_2\wedge p))}$

2.1.6. $((p\to q)\&(q\to r))\to(p\to r)$

2.1.7. $(x\to y)\&(y\to z)\to(z\to x)$

2.1.8. $(x\vee\bar{y}\to(z\to y\vee\bar{y}\vee x))\&(x\vee\overline{x\to(x\to x))}\to y$

2.1.9. $\overline{\overline{\overline{x\vee y}\to\overline{x\& y}}}$

2.1.10. $\overline{p_1}\to(p_1\to p_2)$

2.1.11. $\overline{p_1 \to (p_2 \to p_1)}$

2.1.12. $\overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} \vee (x \to y) \cdot x$

2.1.13. $\overline{(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))}$

2.1.14. $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \vee p) \to (p_2 \vee p))$

2.1.15. $(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))$

2.1.16. $(x \to y) \& (y \to z) \to (x \to z)$

2.1.17. $((p \to q) \& (q \to r)) \to (p \to r)$

2.1.18. $(x \to y) \& (y \to z) \to (z \to x)$

2.1.19. $(x \vee \overline{y} \to (z \to y \vee \overline{y} \vee x)) \& (x \vee \overline{x \to (x \to x)}) \to y$

2.1.20. $((p \wedge q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \to p)$

2.1.21. $((p \to q) \& (q \to r)) \to (p \to r)$

2.1.22. $\overline{(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \wedge p) \to (p_2 \wedge p))}$

2.1.23. $(x \leftrightarrow y) \& (x \vee y)$

2.1.24. $(x \to y) \& (y \to z) \to (z \to x)$

2.1.25. $(x \& \overline{x \& \overline{x} \to y \& \overline{y}} \to z) \vee x \vee (y \& z) \vee (y \& z)$

2.1.26. $(x \& (y \vee z \to y \vee z)) \vee (y \& x \& \overline{y}) \vee x \vee (y \& \overline{x \& \overline{x}})$

2.1.27. $((p \wedge q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \to p)$

2.1.28. $((p \to q) \& (q \to r)) \to (p \to r)$

2.1.29. $\overline{(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))}$

2.1.30. $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \vee p) \to (p_2 \vee p))$

2.2. QuyidagiformulalarniMKNShvaMDNShko‘rinishga keltiring.

2.2.1. $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \overline{x}}) \vee y \wedge \overline{z}$;

2.2.2. $(x \wedge (y \vee z \to y \vee z)) \vee (y \wedge x \wedge \overline{y}) \vee x \vee (y \wedge \overline{x \wedge \overline{x}})$;

2.2.3. $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \overline{x}}) \vee y \wedge \overline{z}$;

2.2.4. $(\overline{xy} \to \overline{x}) \wedge (\overline{xy \to \overline{y}})$;

2.2.5. $(\overline{a} \to c) \to ((\overline{\overline{b} \to \overline{a}})$;

2.2.6. $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \overline{x}}) \vee y \wedge \overline{z}$

2.2.7. $(\overline{a} \to c) \to ((\overline{\overline{b} \to \overline{a}})$;

2.2.8. $\overline{(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \wedge p) \to (p_2 \wedge p))}$.

2.2.9. $(ab \to bc) \to ((a \to b) \to (c \to b))$;

2.2.10. $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \overline{x}}) \vee y \wedge \overline{z}$

2.2.11. $(\overline{xy} \to \overline{x}) \wedge (\overline{xy \to \overline{y}})$;

2.2.12. $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \overline{x}}) \vee y \wedge \overline{z}$;

2.2.13. $(\overline{a} \to c) \to ((\overline{\overline{b} \to \overline{a}})$;

2.2.14. $\overline{(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \wedge p) \to (p_2 \wedge p))}$.

2.2.15. $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \overline{x}}) \vee y \wedge \overline{z}$;

2.2.16. $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \overline{x}}) \vee y \wedge \overline{z}$;

2.2.17. $(\overline{a} \to c) \to ((\overline{\overline{b} \to \overline{a}})$;

2.2.18. $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \overline{x}}) \vee y \wedge \overline{z}$;

2.2.19. $\overline{(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \wedge p) \to (p_2 \wedge p))}$;

2.2.20. $f_1 = ((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y)(x \vee z))$.

2.2.21.) $A(x, y, z) = (00100101)$

2.2.22. $A(x, y, z) = (01111000)$

2.2.23. $((x + y) \downarrow (x \to y)) \to z$

2.2.24. $(x \vee y \vee z) + (x \to (y \downarrow \overline{z}))$

2.2.25. $((x \to y) \to (x + \overline{y})) \to z$

2.2.26. $((x \mid y) \downarrow \overline{z}) \to (x + y\overline{z})$

2.2.27. $(x \to (y + \overline{z})) \leftrightarrow (x \downarrow z)$

2.2.28. $(x + y + z) \leftrightarrow (x \vee y\overline{z})$

2.2.29. $\left(x \leftrightarrow \left(y \vee z\right)\right) + \left(y \leftrightarrow xz\right)$

2.2.30. $\left(x \vee \left(y + \bar{z}\right)\right) \leftrightarrow \left(y \downarrow \bar{z}\right)$