19-MA’RUZA. O‘rmon. Daraxtlar. Daraxtlarning xossalari. Ostov daraxti. Minimal ostov daraxti. Ildiz daraxti(2 soat).

REJA

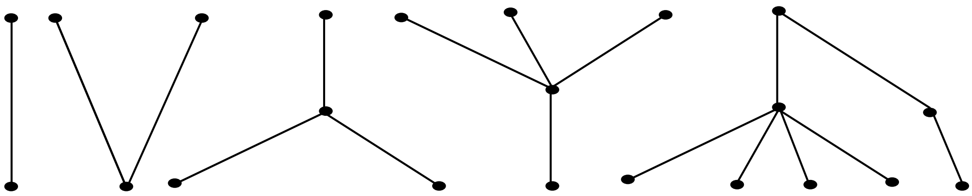
1. O’rmon. Daraxtlar. Daraxtlarning xossalari.
2. Daraxtlar haqidagi teoremalar.
3. Ostov daraxti. Graflarning siklomatik soni. Minimal ostov daraxti.
4. ILDIZ daraxti. Daraxtlarni kodlash.
5. Daraxtlarni Prufer usulida kodlash. Berilgan kod bo‘yicha daraxt qurish.

Kalit so’zlar: *O’rmon, daraxtlar, daraxtlarning xossalari, Ostov daraxti, graflarning siklomatik soni, minimal ostov daraxti, ildiz daraxti, daraxtlarni kodlash, daraxtlarni Prufer usulida kodlash, daraxt qurish.*

19.1.O’rmon. Daraxtlar. Daraxtlarning xossalari.

Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar. Siklga ega bo‘lmagan orientirlanmagan bog‘lamli graf **daraxt** deb ataladi[1]. Ta’rifga ko‘ra daraxt sirtmoqlar va karrali qirralarga ega emas. Siklga ega bo‘lmagan orientirlanmagan graf **o‘rmon** (**asiklik graf**) deb ataladi.

1- misol. 19.1- shaklda bog‘lamli komponentali soni beshga teng bo‘lgan graf tasvirlangan bo‘lib, u o‘rmondir. Bu grafdagi bog‘lamli komponentalarning har biri daraxtdir.



19.1- shakl

2- misol. 2- shaklda to‘rtta uchga ega bir-biriga izomorf bo‘lmagan barcha (ular bor-yog‘i ikkita) daraxtlarning geometrik ifodalanishi tasvirlangan.
Beshta uchga ega bir-biriga izomorf bo‘lmagan barcha daraxtlar uchta, oltita uchga ega bunday barcha daraxtlar esa oltita ekanligini ko‘rsatish qiyin emas.
Daraxt tushunchasiga boshqacha ham ta’rif berish mumkin. Umuman olganda,

19.2.Daraxtlar haqidagi teoremalar.

Daraxt tushunchasiga boshqacha ham ta’rif berish mumkin. Umuman olganda, $G\ (m,n)$ - graf uchun **daraxtlar haqidagi asosiy teorema** deb ataluvchi quyidagi teorema o‘rinlidir.

1- teorema. *Uchlari soni m va qirralari soni n bo‘lgan G graf uchun quyidagi tasdiqlar ekvivalentdir:*

1) G daraxtdir;

[1]**Orientirlangan daraxt tushunchasi ham bor.**

2)G asiklikdir va $n=m-1$;
3)G bog'lamlidir va $n=m-1$;
4)G bog'lamlidir va undan istalgan qirrani olib tashlash amalini qo'llash natijasida bog'lamli bo'lmagan graf hosil bo'ladi, ya'ni G ning har bir qirrasi ko'prikdir;
5)G grafninng o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtiriladi;
6)G asiklik bo'lib, uning qo'shni bo'lmagan ikkita uchini qirra bilan tutashtirish amalini qo'llash natijasida faqat bitta siklga ega bo'lgan graf hosil bo'ladi.

Isboti. Teoremaning 1) tasdig'idan uning 2) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G graf daraxt bo'lsin. Daraxtning ta'rifiga ko'ra, u asiklik bo'lishini ta'kidlab, m bo'yicha matematik induksiya usulini qo'llaymiz.

Matematik induksiya usulining bazasi: agar $m=1$ bo'lsa, u holda G daraxt faqat bitta uchdan tashkil topgan bo'ladi. Tabiiyki, agar bitta uchga ega bo'lgan grafda sikl bo'lmasa, u holda unda birorta ham qirra yo'q, ya'ni $n=0$. Demak, bu holda tasdiq to'g'ridir.

Induksion o'tish: G daraxt uchun $k \geq 2$ va $m=k$ bo'lganda 2) tasdiq o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz. Endi uchlari soni $m=k+1$ va qirralari soni n bo'lgan daraxtni qaraymiz. Bu daraxtning ixtiyoriy qirrasini (v_1, v_2) bilan belgilab, undan bu qirrani olib tashlasak, v_1 uchdan v_2 uchgacha marshruti (aniqrog'i, zanjiri) mavjud bo'lmagan grafni hosil qilamiz, chunki agar hosil bo'lgan grafda bunday zanjir bor bo'lsa edi, u holda G daraxtda sikl topilar edi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas. Hosil bo'lgan graf ikkita G_1 va G_2 bog'lamli komponentalardan iborat bo'lib, bu komponentalarning har biri daraxtdir. Yana shuni ham e'tiborga olish kerakki, G_1 va G_2 daraxtlarning har biridagi uchlar soni k dan oshmaydi.

Matematik induksiya usuliga ko'ra, bu daraxtlarning har birida qirralar soni uning uchlari sonidan bitta kam bo'lishini ta'kidlaymiz, ya'ni G_i graf (m_i, n_i) -graf bo'lsa, quyidagi tengliklar o'rinlidir: $n=n_1+n_2+1$, $k+1=m_1+m_2$ va $n_i=m_i-1$ ($i=1, 2$). Bu tengliklardan

$$n=n_1+n_2+1=m_1-1+m_2-1+1=(m_1+m_2)-1=(k+1)-1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $m=k+1$ bo'lganda ham $n=m-1$ tenglik o'rinlidir. Bu esa, matematik induksiya usuliga ko'ra, kerakli tasdiqning isbotlanganligini anglatadi.

Endi daraxtlar haqidagi asosiyteoremaning 2) tasdig'idan uning 3) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G graf asiklik, ya'ni u siklga ega bo'lmagan graf va $n=m-1$ bo'lsin. G grafning bog'lamli bo'lishini isbotlash kerak.

Agar G graf bog'lamli bo'lmasa, u holda uni har bir bog'lamli komponentasi siklsiz graf G_i (ya'ni, daraxt) bo'lgan qandaydir k ta ($k>1$) graflar diz'yunktiv birlashmasi sifatida $G=\bigcup_{i=1}^{k} G_i$ tenglik bilan ifodalash mumkin. Har bir $i=\overline{1,k}$ uchun G_i graf daraxt bo'lgani uchun, yuqorida isbotlagan tasdiqqa ko'ra, agar unda m_i ta uch va n_i ta qirra bo'lsa, u holda G_i asiklikdir va $n_i=m_i-1$ tenglik o'rinlidir.

Tushunarliki, $m=\sum_{i=1}^{k} m_i$ va $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$. Demak,

$$n=\sum_{i=1}^{k} n_i=\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)=\sum_{i=1}^{k} m_i-k=m-k,$$

ya'ni G graf uchlarining umumiy soni undagi qirralar umumiy sonidan k ta ortiqdir. Bu esa, $k>1$ bo'lgani uchun, $n=m-1$ tenglikka ziddir. Zarur tasdiq isbotlandi.

Teoremaning 3) tasdig'idan uning 4) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G – bog'lamli graf va $n=m-1$ bo'lsin. Avvalo k ta bog'lamlilik komponentalariga ega karrali qirralari bo'lmagan sirtmoqsiz (m,n) -graf uchun

$$m-k\le n\le\frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$$

munosabat o'rinli bo'lishini eslatamiz (ushbu bobning 4- paragrafidagi 7-teoremaga qarang).

$n=m-1$ bo'lgani sababli G bog'lamli grafdan istalgan qirra olib tashlansa, natijada m ta uch va $(m-2)$ ta qirralari bo'lgan graf hosil bo'ladiki, bunday graf $m-k\le n$ shartga binoan bog'lamli bo'la olmaydi. Kerakli tasdiq isbotlandi.

Daraxtlar haqidagi asosiy teoremaning 4) tasdig'idan uning 5) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G bog'lamli graf va uning har bir qirrasi ko'prik bo'lsin deb faraz qilib, bu grafninng o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtirilishi mumkinligini ko'rsatamiz. G bog'lamli graf bo'lgani uchun, uning istalgan ikkita uchi hech bo'lmasa bitta oddiy zanjir vositasida tutashtiriladi.

Agar qandaydir ikkita uch bittadan ko'p, masalan, ikkita turli oddiy zanjir vositasida tutashtirilishi imkoniyati bo'lsa, u holda bu uchlarning biridan zanjirlarning birortasi bo'ylab harakatlanib ikkinchi uchga, keyin bu uchdan ikkinchi zanjir bo'ylab harakatlanib dastlabki uchga qaytish imkoniyati bor bo'lar edi. Ya'ni qaralayotgan grafda sikl topilar edi.

Tabiiyki, tarkibida sikl mavjud bo'lgan grafning siklga tegishli istalgan bitta qirrasini olib tashlash uning bog'lamliligi xossasini o'zgartirmaydi, ya'ni bu holda grafning siklga tegishli istalgan qirrasi ko'prik bo'lmaydi. Bu esa qilingan farazga ziddir. Teoremaning 4) tasdig'idan uning 5) tasdig'i kelib chiqishi isbotlandi.

Endi teoremaning 5) tasdig'idan uning 6) tasdig'i kelib chiqishini ko'rsatamiz. Berilgan G grafninng o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi mumkin bo'lsin. Teskarisini, yaini G graf asiklik emas deb faraz qilamiz. Bu holda, G da sikl topiladi va undagi ixtiyoriy siklga tegishli istalgan turli ikkita uchni kamida ikkita oddiy zanjir vositasida tutashtirish imkoniyati bor. Bu esa G grafninng o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi shartiga ziddir.

G grafninng qo'shni bo'lmagan v_1 va v_2 uchlarini qirra bilan tutashtirish amalini qo'llash natijasida faqat bitta siklga ega bo'lgan graf hosil bo'lishini ko'rsatamiz. Shartga binoan qaralayotgan v_1 va v_2 uchlarni faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtirish mumkin. Oddiy zanjir ta'rifiga ko'ra esa bu zanjir tarkibida sikl yo'q. Shuning uchun v_1 va v_2 uchlarni G grafninng tarkibida bo'lmagan (v_1,v_2) qirra bilan tutashtirish, albatta, tarkibida sikl topiladigan va bu sikl yagona bo‘lgan grafni hosil qiladi. Teoremaning 5) tasdig‘idan uning 6) tasdig‘i kelib chiqishi ham isbotlandi.

Nihoyat, 1- teoremaning 6) tasdig‘idagi shartlar baja-rilsa, G grafning daraxt bo‘lishini, ya’ni teoremaning 1) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, asiklik G graf bog‘lamli bo‘lmasin. U holda, bu grafning ixtiyoriy bog‘lamli komponentasidagi ixtiyoriy uchni uning boshqa bog‘lamli komponentasidagi ixtiyoriy uch bilan qirra vositasida tutashtirish amalini qo‘llash natijasida tarkibida sikl bo‘lgan graf hosil bo‘lmaydi. Bu esa 6) tasdiqning ikkinchi qismiga ziddir.

1- natija. *Bittadan ko‘p uchga ega bo‘lgan istalgan daraxtda hech bo‘lmasa ikkita darajasi birga teng uchlar mavjud.*

Isboti. Haqiqatdan ham, agar $v_1, v_2, ..., v_m$ berilgan daraxtning uchlari bo‘lsa, “ko‘rishishlar” haqidagi lemmaga binoan $\sum_{i=1}^{m} \rho(v_i) = 2(m-1)$ tenglik o‘rinlidir. Daraxtning ta’rifiga ko‘ra, u bog‘lamlidir, shuning uchun $\rho(v_i) \geq 1$ ($i = \overline{1,m}$). Bundan yuqoridagi tenglik o‘rinli bo‘lishi uchun $\rho(v_1), \rho(v_2), ..., \rho(v_m)$ ketma-ketlikdagi hech bo‘lmaganda ikkita son birga teng bo‘lishi kelib chiqadi.

2- natija. *m ta uch va k ta bog‘lamli komponentali o‘rmondagi qirralar soni $(m-k)$ ga tengdir.*

Isboti. 1- teorema isbotining 2) tasdiqdan 3) tasdiq kelib chiqishiga bag‘ishlangan qismiga qarang.

2- teorema. *Istalgan daraxtning markazi uning bitta uchidan yoki ikkita qo‘shni uchlaridan iborat bo‘ladi.*

Isboti. Agar daraxt bitta uch yoki ikkita qo‘shni uch va ularni turashtiruvch qirradan tashkil topgan bo‘lsa, teorema tasdig‘i to‘g‘riligi oydindir.

G daraxt tarkibida ikkitadan ko‘p uch bor deb faraz qilamiz. G daraxtdagi darajalari birga teng barcha uchlarni (ya’ni, daraxtning barcha chetki uchlarini) bu uchlarga insident barcha qirralar (ya’ni, daraxtning barcha chetki qirralari) bilan birgalikda G daraxtdan olib tashlaymiz. Natijada uchlari va qirralari soni berilgan G daraxtdagi uchlar va qirralar sonidan kam bo‘lgan qandaydir G' daraxtni hosil qilamiz. G' daraxtdagi har bir uch ekssentrisiteti G daraxtdagi mos uch ekssentrisitetidan bitta kam bo‘lishi va bu daraxtlarning markazlari ustma-ust tushishi ravshandir.

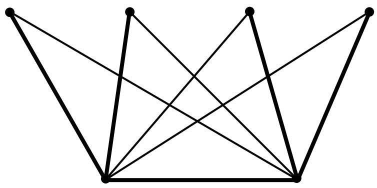
Berilgan graf chekli bo‘lgani uchun, yuqoridagi bayon etilgan jarayonni yetarlicha marta takrorlash natijasida bitta uch yoki ikkita qo‘shni uch va ularni turashtiruvch qirradan tashkil topgan qandaydir daraxtni hosil qilamiz.

Uchlari soni ma’lum, o‘zaro izomorf bo‘lmagan va qandaydir shartlarni qanoatlantiruvchi daraxtlar sonini aniqlash masalasi daraxtlarni o‘rganishda muhim masala hisoblanadi. Yuqorida 4, 5 va 6ta uchlarga ega o‘zaro izomorf bo‘lmagan daraxtlar mos ravishda 2, 3 va 6ta ekanligi ta’kidlangan edi. A. Keli uglerod atomlari soni berilgan va $C_n H_{2n+2}$ ko‘rinishdagi kimyoviy formula bilan ifodalanuvchi to‘yingan uglevodorodlar sonini topish masalasini har bir uchining

darajasi bir yoki to‘rt bo‘lgan daraxtlar sonini topish masalasiga keltirib hal qilgan. Quyidagi teorema Keli nomi bilan yuritiladi.
3- teorema (Keli). *Uchlari soni m bo‘lgan belgilangan daraxtlar soni m^{m-2} ga teng.*
Isboti o‘quvchiga havola qilinadi.

19.3. Ostov daraxti. Graflarning siklomatik soni. Minimal ostov daraxti.

Grafning siklomatik soni. Faraz qilaylik, G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan qandaydir bog‘lamli graf bo‘lsin. Bu gfafdan uning biror sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan graf bog‘lamli graf bo‘lishi ravshandir. Grafdan uning biror sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash amalini hosil bo‘lgan graflarga, imkoni boricha, ketma-ket qo‘llash natijasida G grafning barcha uchlarini bog‘lovchi graf – daraxtni hosil qilish mumkin. Bunday daraxt G **grafning sinch daraxti** (**sinchi**, **karkasi**, **qobirg‘asi**) deb ataladi.
Tabiiyki, bitta grafning bir necha sinch daraxtlari mavjud bo‘lishi mumkin.
2- misol. 3- shaklda tasvirlangan graf sinchlaridan birining qirralari berilgan grafning boshqa qirralariga qaraganda qalinroq chizichlar vositasida ifodalangan.

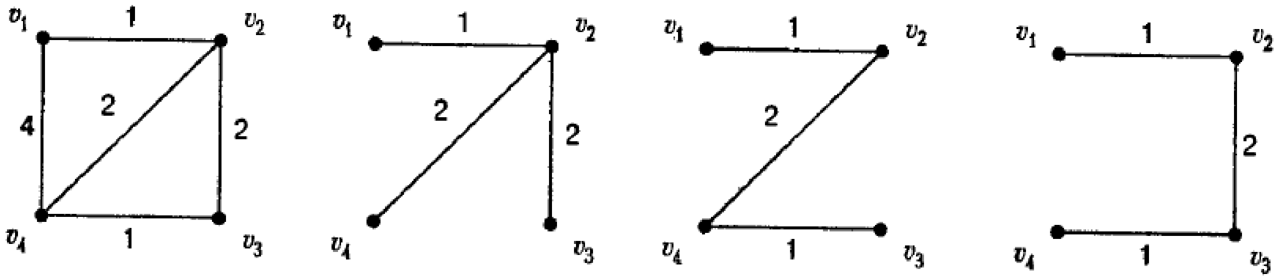

3- shakl

Endi G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan m ta uch, n ta qirra va k ta bog‘lamli komponentalardan tashkil topgan graf bo‘lsin. Agar yuqorida tavsiflangan usul yordamida G grafdan qirralarni ketma-ket olib tashlash amalini qo‘llash natijasida uning har bir komponentasi bog‘lamliligi buzilmasa, u holda berilgan G **grafning sinch o‘rmoni** deb ataluvchi grafni hosil qilish mumkin.
Berilgan G grafdan uning sinch o‘rmonini hosil qilish maqsadida olib tashlanishi kerak bo‘lgan qirralar soni $\lambda = \lambda(G)$ bu qirralarni olib tashlash tartibiga bog‘liq emasligi va $\lambda = n - m + k$ bo‘lishi ravshandir. Qaralayotgan G graf uchun $m - k \le n$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganligidan, $\lambda(G) \ge 0$ bo‘ladi. $\lambda(G)$ sonni G **grafning siklomatik soni** (**siklik rangi**) deb ataymiz.
Grafning siklomatik soni tushunchasi, qandaydir ma’noda, grafning bog‘lamlilik darajasini aniqlovchi vositadir. Ravshanki, daraxt uchun $\lambda = 0$ bo‘ladi (1- teoremaga qarang).
Grafning o‘rmon bo‘lishi uchun uning siklomatik soni nolga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir (2- natijaga qarang).
Grafning yagona siklga ega bo‘lishi uchun uning siklomatik soni birga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir. Qirralari soni uchlari sonidan kichik bo‘lmagan graf siklga egadir. Bu tasdiqlar ham 1- teoremaning natijalaridir.
3- misol. 3- shaklda tasvirlangan graf $(6,9)$ -graf bo‘lib, uning bog‘lamlilik komponentalari soni birga teng. Bu grafning siklomatik sonini aniqlasak, $\lambda = 9 - 6 + 1 = 4$ bo‘ladi. Olib tashlangan qirralar 3- shaklda ingichka chiziqlar bilan ifodalangan.

Ostov daraxti. Graf o`rmon bo`lishi uchun ununig siklomatik soni «nol» bo`lishi yetarli. Agar G –o`rmon, uning har bir komponentasidagi qirra soni, uchlar sonining kam birligi bilan bog`langan.Bu yerdan

M=n-k

Agar G- o`rmon bo`lmasa, birdan kam bo`lmagan qirrani olib tshlab, podgrafga G ega bo'`lamiz (m,n,k)-o`rmonli.Unda m>m1=n-k isbotlangan.
Keling G- bog`langan (n,m) graf.Agar G hech bo`lmaganda bitta sikldan iborat bo`lsa, graf G dan shu sikl qirrasini o`chiramiz. Grafligini saqlagan holda sikl sonini yagona qilib kamaytiramiz.Bunda vujudga kelgan podgraf Ostov daraxti deyiladi.N uchi bilan daraxt n-1 qirra tutsa, Ostov daraxtini olish uchun G dan m-n+1 qirrani o`chirish kerak.Ostov daraxtini birlashtirsak, Ostov o`rmonini beradi.
n-uch; k-komponenet; n-k=qirra ;
Ostovni olish uchun m-n+k
Agar S va T Ostov graflari bo`lsa
e- ixtiyoriy qirra Є S;
f- qirra Є T;
S-e+f- Ostovlikdir.



19.4. ILDIZ daraxti. Daraxtlarni kodlash.

Ta'rif. Agar G grafning *u* qirrasi kamida bitta siklga tegishli bo`lsa, *u* **siklik qirra**, aks holda **atsiklik qirra** deb ataladi.

G graf uchun

$$\lambda(G) = m(G) - n(G) + k(G)$$

Ifoda uning **siklomatik soni** deb ataladi, bu yerda $m(G)$ G grafning qirralar soni. $n(G)$- uchlari soni, $k(G)$- komponental soni.

Osongina ko`rish mumkinki,

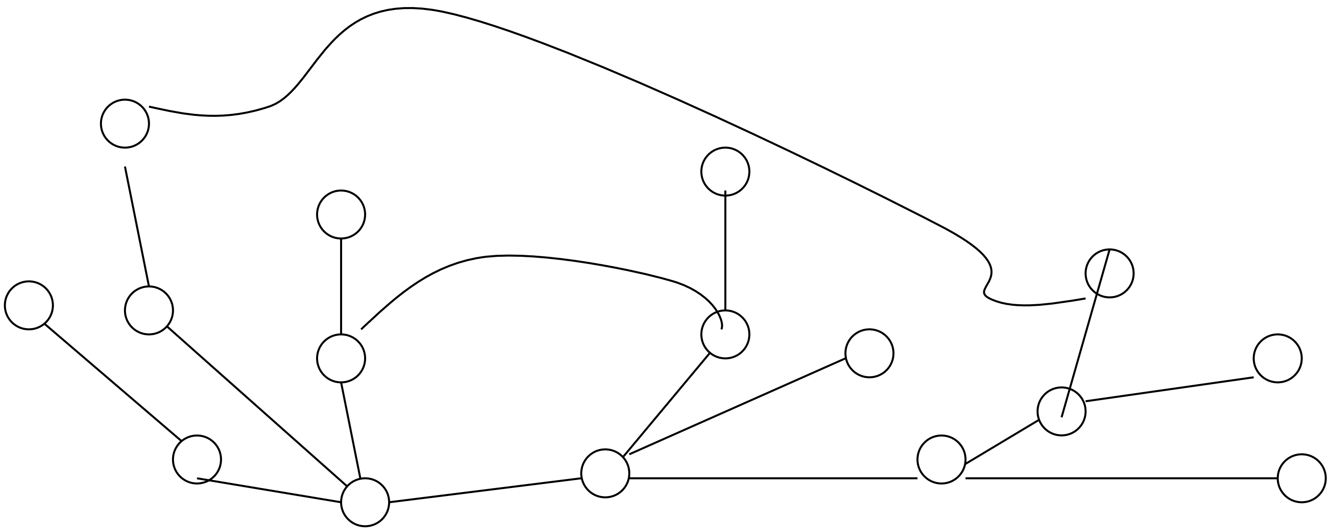
$$K(G\backslash u)=\begin{cases} K(G), \text{ agar u siklik qirra bo`lsa,} \\ K(G)+1, \text{ u atsiklik qirra bo`lsa;} \end{cases}$$

$$\lambda(G\backslash u)=\begin{cases} \lambda(G)-1, \text{ agar u siklik qirra bo`lsa,} \\ K(G), \text{ agar u atsiklik qirra bo`lsa.} \end{cases}$$

O`z-o`zidan ravshanki, $n(G\backslash u)=n(G)$, $m(G\backslash u)= \lambda(G)-1$, $\lambda(G)\geq 0$ va faqat sikllari bo`lmagan graf uchun $\lambda(G)=0$.

Ta'rif. Barcha qirralari atsiklik bo`lgan bog`liq graf **daraxt** deb ataladi. Bir necha daraxtlardan tashkil topgan bog`liqmas graf **o`rmon** deyiladi.

Daraxtning istalgan 2 uchi yagona zanjir bilan bog`langandir. Daraxtning istalgan $x_0$ uchini tanlab olib, uni **ildiz** yoki **nolinchi pog`onali uch** deb ataymiz. x_0 ga qo`shni bo`lgan barcha uchlarni birinchi pog`ona uchlari deymiz va hokazo.



Daraxtning bunday tasvirlanishidan kelib chiqadiki u chetki, faqat bitta qirraga intsident bo`lgan uchlarga ega. Masalan, 14 shaklda oxirgi pog`onadan uchlari.Bog`liq *G* grafning ketma-ket barcha siklik qirralarni olib tashlaymiz. Natijada hamma qirralar atsiklik bo`lgan bo`g`liq *N* grafni –daraxtni hosil qilamiz. Bu daraxt *G* **grafning asosi** deyiladi. *N* asosga nisbatan *G N* bo`lakning barcha qirralari **vatarlar** deb ataladi.

Teorema 1. Chekli bog`liq *G* graf daraxt bo`lishi uchun uning qirralari soni uchlari sonidan bittaga kam bo`lishi zarur va yetarli.

Teorema (*Keli*) 2. Uchlar soni tartiblangan *n* ta bo`lgan daraxtlar soni $n^{n-2}$ teng. (*n* ta elemenlardan n-2 tadan tuzilgan barcha takrorish o`rinlashtirishlar soni).

Teorema 3. Agar *G* graf daraxt bo`lsa, u holda uning qirralari soni *m* va uchlari soni *n* $m = n - 1$ munosabat bilan bog`langan.

Teorema 4. Quyidagi 4 ta shart teng kuchli:

- *G* graf daraxt hisoblanadi;
- Grafning qirralari soni *m* va uchlari soni *n* $m = n - 1$ munosabat bilan bog`langan;
- Grafning ixtiyoriy ikki uchi oddiy yo`l bilan bog`langan bo`lishi mumkin va bu yo`l yagonadir.
- *G* graf bog`langan va konturlarga ega emas.

19.5. Daraxtlarni Prufer usulida kodlash. Berilgan kod bo'yicha daraxt qurish.

Amaliyotda daraxt tuzilmasining asosiy ko'rinishilaridan biri ikkilik (binar) daraxtlar ko'p qo'llaniladi.

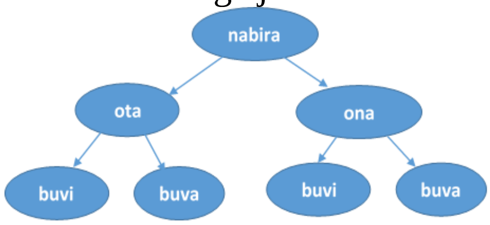
Ikkilik daraxt deb, har bir tugunda ko‘pi bilan ikkita avlod (o‘g‘il) bo‘lgan daraxtga aytiladi. Boshqacha qilib aytganda maksimal chiqish darajasi 2 ga teng bo‘lsa, ya’ni har bir tugundan ko‘pi bilan 2 ta shox chiqqan bo‘lsa, bunday daraxt ikkilik (binar) daraxt deyiladi.

Ikkilik daraxtni ham rekursiv aniqlash mumkin:

1) bo‘sh tuzilma ikkilik daraxt;

2) daraxt – bu ildiz va o‘ng va chap qismdaraxtlar deb ataluvchi avlodlardan tashkil topgan.

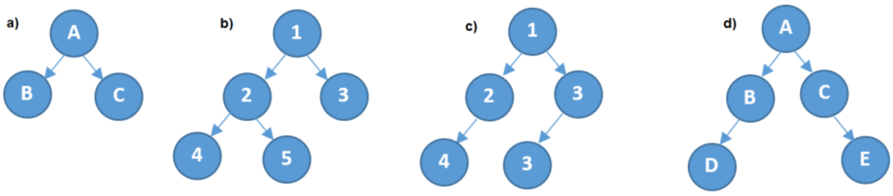
Ikkilik daraxtga misol sifatida biror bir shaxsning ajdodlari bo‘yicha shajarasini olish mumkin. Bunda ildizga ushbu shaxsning o‘zi joylashtiriladi, o‘ng va chap tugunlarga esa ota va onasi hamda ularning ajdodlari va h.k. (2-rasm).



2-rasm. Daraxtga msiol

Ikkilik daraxtlar dasturlashda yoki ma’lum bir jarayonlarning bajarilishida ikkita imkoniyatdan faqat bittasini qabul qilish zarur bo‘lganda qo‘llaniladi. Bundan keyin faqat ikkilik daraxtlar bilan ishlashga doir masalalarni ko‘rib chiqamiz.

Qat’iy ikkilik daraxt deb, har bir ichki tugunlarida bo‘sh bo‘lmagan qismdaraxtlari bo‘lgan daraxtga aytiladi. Bu shuni anglatadiki, qat’iy ikkilik daraxtda barcha ichki tugunlarida albatta o‘ng va chap qismdaraxt (tugun)lar bo‘lishi shart. Quyidagi rasmda a) va b) lar qat’iy ikkilik daraxt, c) va d) lar esa qat’iy emas.



3-rasm. Turli ko‘rinishdagi daraxt tuzilmalariga misol

To‘liq ikkilik daraxt deb, daraxtning barglari bir xil bosqichda joylashgan va barcha ichki tugunlar bo‘sh bo‘lmagan o‘ng va chap qismdarxatlarga ega bo‘lgan ikkilik daraxtga aytiladi. Yuqoridagi rasmlardan faqat a) rasmdagi daraxt to‘liq ikkilik daraxt deyiladi.

Daraxt tugunini tavsiflash. Daraxt tuguni, umuman olganda ixtiyoriy dinamik tuzilmalarning tugunlari ikki guruhdagi ma’lumotlardan tashkil topgan bo‘ladi: tugunning qiymati va ushbu tugun bilan bog‘langan boshqa tugunlar uchun ko‘rsatkich. Bular tuguning ma’lumot maydoni deb ataladi. Ikkilik daraxtlarda har bir tugun qiymat maydonidan tashqari yana ikkita o‘ng va chap qismdaraxtlarga ko‘rsatkichlar maydonidan tashkil topgan. Quyida tavsiflangan tuzilmada har bir tugunning qiymati butun sondan iborat:

struct Node {

int key; // ma’lumot maydoni (kalit)

*Node *left, *right; // o‘ng va chap ko‘rsatkichlar*

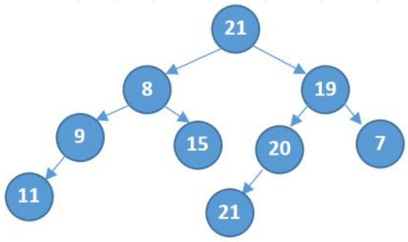
};

*typedef Node *PNode; // tugunga ko'rsatkich*

Minimal balandlikdagi daraxtlar. Faraz qilaylik, *n* ta son berilgan (*n* ning qiymati oldindan ma'lum). Ushbu sonlardan minimal balandlikdagi daraxt qurish talab etilgan bo'lsin. Bu masalani yechish algoritmi quyidagicha bo'ladi:

1. Bitta tugunni ildiz sifatida olib, unga ixtiyoriy birinchi sonni yozamiz;
2. Shunday usul bilan n1 = n/2 (butun bo'lish) tugunlardan biriga chap qism daraxtni quramiz;
3. Xuddi shunday usul bilan n2 = n-n1-1 tugunlardan biriga o'ng qism daraxtni quramiz.

Bunda, chap qismdaxatda nechta tugun bo'lsa, o'ng qism daraxtda ham shuncha tugun bo'lishi yoki farqlari 1 dan oshmasligiga e'tibor berishimiz zarur bo'ladi. Quyida berilgan sonli massiv elementlaridan foydalanib, yuqoridagi algoritm asosida daraxt quramiz: 21, 8, 9, 11, 15, 19, 20, 21, 7.



4-rasm.

Bu algoritmning dasturlash tilidagi ko'rinishini quyidagicha ishlab chiqamiz. Birinchi o'rinda bitta tugunni olib uni ildiz sifatida tavsiflash va unga massivda birinchi uchragan sonli qiymatni yozish kerak. Buning uchun tugun dinamik hosil qilinishi va unga mos xotira ajratilishi va unga sonli qiymatni yozamiz. Shundan so'ng ushbu tugunga mos ravishda o'ng va chap qismdaraxtlarni hosil qilish mumkin.

Asosiy dasturda esa, yangi daraxtning ildiziga ko'rsatkichni tavsiflash, massiv ma'lumotlarini e'lon qilish va qurilayotgan daraxtga ko'rsatkichni qaytaruvchi funksiyani chaqirish kerak bo'ladi. Ya'ni,

```
int data[] = {21, 8, 9, 11, 15, 19, 20, 21, 7};
PNode Tree; // daraxt ildiziga ko'rsatkich
n = sizeof(data) / sizeof(int) - 1;// massiv o'lchami
Tree = MakeTree (data, 0, n); //tartibi 0 dan boshlanuvchi n ta elementni olish
```

MakeTree funksiyasining o'zi uchta parametrni qabul qiladi: ma'lumotlar massivi, birinchi element tartibi va yangi daraxtdagi elementlar soni. Bu funksiya yangi daraxtga (PNode turidagi) ko'rsatkichni qaytaradi.

```
PNode MakeTree (int data[], int from, int n) {
PNode Tree;
int n1, n2;
if (n == 0 ) return NULL; // rekursiyani cheklash
Tree = new Node; // tugun uchun xotira ajartish
Tree->key = data[from]; // ma'lumot (qiymat) ni yozish
n1 = n/2; // qismdaraxtlar o'lchami
n2 = n - n1 - 1;
```

Tree->left=MakeTree(data, from+1, n1);
Tree->right=MakeTree(data,from+1+n1,n2);
return Tree;
}

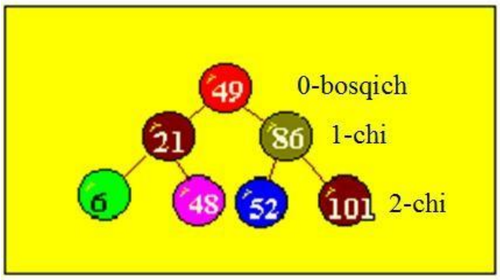
Dasturning ajratib ko‘rsatilgan satrlari rekursiv chaqiruvni bildiradi. Chap qismdaraxtda from+1 tartibidan boshlanuvchi n1 ta element, o‘ng qismdaraxtda esa from+1+nl dan boshlanuvchi n2 ta element joylashadi.

Binar daraxtlarni qurish. Binar daraxtda har bir tugun-elementdan ko‘pi bilan 2 ta shox chiqadi. Daraxtlarni xotirada tasvirlashda uning ildizini ko‘rsatuvchi ko‘rsatkich berilishi kerak. Daraxtlarni kompyuter xotirasida tasvirlanishiga ko‘ra har bir element (binar daraxt tuguni) to‘rtta maydonga ega yozuv shaklida bo‘ladi, ya’ni kalit maydon, informatsion maydon, ushbu elementni o‘ngida va chapida joylashgan elementlarning xotiradagi adreslari saqlanadigan maydonlar.

Shuni esda tutish lozimki, daraxt hosil qilinayotganda, otaga nisbatan chap tomondagi o‘g‘il qiymati kichik kalitga, o‘ng tomondagi o‘g‘il esa katta qiymatli kalitga ega bo‘ladi. Har safar daraxtga yangi element kelib qo‘shilayotganda u avvalambor daraxt ildizi bilan solishtiriladi. Agar element ildiz kalit qiymatidan kichik bo‘lsa, uning chap shoxiga, aks holda o‘ng shoxiga o‘tiladi. Agar o‘tib ketilgan shoxda tugun mavjud bo‘lsa, ushbu tugun bilan ham solishtirish amalga oshiriladi, aks holda, ya’ni u shoxda tugun mavjud bo‘lmasa, bu element shu tugunga joylashtiriladi.

Masalan, daraxt tugunlari quyidagi qiymatlarga ega 6, 21, 48, 49, 52, 86, 101.

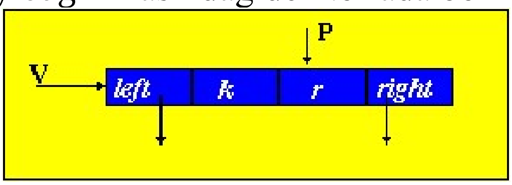
U holda binar daraxt ko‘rinishi quyidagi 4.1-rasmdagidek bo‘ladi:



8.2-rasm. Binar daraxt ko‘rinishi

Natijada, o‘ng va chap qism daraxtlari bir xil bosqichli tartiblangan binar daraxt hosil qildik. Agar daraxtning o‘ng va chap qism daraxtlari bosqichlarining farqi birdan kichik bo‘lsa, bunday daraxt ideal muvozanatlangan daraxt deyiladi. Yuqorida hosil qilgan binar daraxtimiz ideal muvozanatlangan daraxtga misol bo‘ladi. Daraxtni muvozanatlash algoritmini sal keyinroq ko‘rib chiqamiz. Undan oldin binar daraxtni yaratish algoritmini o‘rganamiz.

Binar daraxt yaratish funksiyasi. Binar daraxtni hosil qilish uchun kompyuter xotirasida elementlar quyidagi 2-rasmdagidek toifada bo‘lishi lozim.



8.3-rasm. Binar daraxt elementining tuzilishi *p* – yangi element ko‘rsatkichi *next, last* – ishchi ko‘rsatkichlar, ya’ni joriy elementdan keyingi va oldingi elementlar ko‘rsatkichlari *r=rec* – element haqidagi birorta ma’lumot yoziladigan maydon *k=key* – elementning unikal kalit maydoni *left=NULL* – joriy elementning chap tomonida joylashgan element adresi *right=NULL* – joriy elementning o‘ng tomonida joylashgan element adresi.

Dastlab yangi element hosil qilinayotganda bu ikkala maydonning qiymati 0 ga teng bo‘ladi.

tree – daraxt ildizi ko‘rsatkichi *n* – daraxtdagi elementlar soni

Boshida birinchi kalit qiymat va yozuv maydoni ma’lumotlari kiritiladi, element hosil qilinadi va u daraxt ildiziga joylashadi, ya’ni tree ga o‘zlashtiriladi. Har bir hosil qilingan yangi elementning left va right maydonlari qiymati 0 ga tenglashtiriladi. Chunki bu element daraxtga terminal tugun sifatida joylashtiriladi, hali uning farzand tugunlari mavjud emas. Qolgan elementlar ham shu kabi hosil qilinib, kerakli joyga joylashtiriladi.

Ya’ni kalit qiymati ildiz kalit qiymatidan kichik bo‘lgan elementlar chap shoxga, katta elementlar o‘ng tomonga joylashtiriladi. Bunda agar yangi element birorta elementning u yoki bu tomoniga joylashishi kerak bo‘lsa, mos ravishda left yoki right maydonlarga yangi element adresi yozib qo‘yiladi.

Binar daraxtni hosil qilishda har bir element yuqorida ko‘rsatilgan toifada bo‘lishi kerak. Lekin hozir biz o‘zlashtirish osonroq va tushunarli bo‘lishi uchun key va rec maydonlarni bitta qilib info maydon deb ishlatamiz.

left	**info**	**right**

8.4-rasm. Binar daraxt elementining tuzilishi

Ushbu toifada element hosil qilish uchun oldin bu toifani yaratib olishimiz kerak. Uni turli usullar bilan amalga oshirish mumkin. Masalan, ***node*** nomli yangi toifa yaratamiz:

```
class node{
public:
int info;
node *left;
node *right; };
```

Endi yuqoridagi belgilashlarda keltirilgan ko‘rsatkichlarni shu toifada yaratib olamiz.

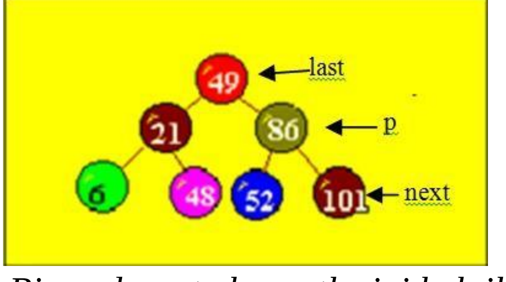
```
node *tree=NULL;
node *next=NULL;
int n,key;
cout<<"n=";
cin>>n;
```

Nechta element (n) kiritilishini aniqlab oldik va endi har bir element qiymatini kiritib, binar daraxt tuzishni boshlaymiz.

```
    for(int i=0;i<n;i++){
    node *p=new node;
 node *last=new node;
cin>>key;
```

```
p->info=key;   p->left=NULL;
 p->right=NULL;
      if(i==0){ tree=p; next=tree;sontinue;}
 next=tree;
     while(1){
 last=next;
if(p->info<next->info) next=next->left;
else next=next->right;
 if(next==NULL) break;  }
     if(p->info<last->info) last->left=p; else last->right=p;
     }
```

Bu yerda *p* hali aytganimizdek, kiritilgan kalitga mos hosil qilingan yangi element ko‘rsatkichi, *next* yangi element joylashishi kerak bo‘lgan joyga olib boradigan shox adresi ko‘rsatkichi, ya’ni u har doim *p* dan bitta qadam oldinda yuradi, *last* esa ko‘rilayotgan element kimning avlodi ekanligini bildiradi, ya’ni u har doim *p* dan bir qadam orqada yuradi (4-rasm).



8.5-rasm. Binar daraxt elementlarini belgilash

Shunday qilib binar daraxtini ham yaratib oldik. Endigi masala uni ekranda tasvirlash kerak, ya’ni u ko‘rikdan o‘tkaziladi yoki vizuallashtirsa ham bo‘ladi.

Ikkilik daraxtlarning quyidagi turlari mavjud:

- to'liq (kengaytirilgan) ikkilik daraxt - har bir tugun, barglardan tashqari, 2 ta tugunga ega;
- ideal ikkilik daraxt - barcha barglar bir xil balandlikda joylashgan to'liq ikkilik daraxt;
- muvozanatli ikkilik daraxt - bu ikkilik daraxt bo'lib, unda har bir tugun uchun 2 ta pastki daraxtning balandligi 1 dan ko'p bo'lmagan farq qiladi. Bunday daraxtning chuqurligi ikkilik logarifm jurnali (n) sifatida hisoblanadi, bu erda n - tugunlarning umumiy soni ;
- degenerativ daraxt - har bir tugunda faqat bitta tugun bo'lgan daraxt, aslida u bog'langan ro'yxatdir;

TESTLAR

1. Графда Эйлер цикли мавжуд бўлиши учун:

A. Граф богланган бўлиши ва барча тугунларининг локал даражалари жуфт бўлиши керак;

B. Графнинг 2 та тугуни(бошланиш ва охирги) локал даражалари тоқ бўлиб, қолган барча тугунларининг локал даражалари жуфт бўлиши керак.

C. Графнинг барча тугунларининг локал даражалари тоқ бўлиши керак;

D. Граф богланмаган бўлиши керак

2. Graf uchlarining lokal darajasi deb nimaga aytiladi?
A. Berilgan uchga tutashgan qirralari soni
B. Grafdagi uchlarining soni
C. Tuguni bor uchlarining soni
D. Bunday tushuncha yo’q
3. Graflar izomorf bo’lishi uchun zaruriy shartlar to’liq ifodalansin
A. Uchlari va qirralari soni teng bo’lishi kerak
B. Uchlari soni teng bo’lishi kerak
C. Qirralari soni teng bo’lishi kerak
D. Uchlari va qirralari soni teng bo’lib ular orasida biyektiv akslantirish mavjud bo’lishi kerak
4. Ориентирланган граф деб қандай графга айтилади?
A. Хар бир қирраси маълум бир йўналишга эга бўлган графга
B. Граф хар бир учига кирувчи ва чиқувчи қирралари бўлган графга
C. Хар бир учидан бошқа учларига туташтируфчи маршрут бўлган графга
D. Қирралари орасида йўқолган қирралари бўлган графга
5. Qism graf deb nimaga aytiladi?
A. G grafning o’zaro bog’langan qirralari ixtiyoriy ketma-ketlik
B. {A} to’plam graf uchlari V ning qismi bo’lsa G grafning shkala uchi xam A ga tegishli bo’lgan qirralaridan iborat qismi
C. Grafda qism graf bo’lmaydi
D. G grafning qiralaridan istalgan qismi qism graf bo’ladi
6. Qanaqa ko`rinishdagi ko`phad Jegalkin ko`phadi deb ataladi-?
A. $\sum x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k} + a$ ko‘rinishdagi ko‘phad Jegalkin ko‘phadi deb ataladi
B. $\sum x_{i_1} - x_{i_2} ... - x_{i_k} + a$ ko‘rinishdagi ko‘phad Jegalkin ko‘phadi deb ataladi
C. $\sum x_{i_1} + x_{i_2} ... - x_{i_k} + a$ ko‘rinishdagi ko‘phad Jegalkin ko‘phadi deb ataladi
D. $\sum \sum x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k} + a$ ko‘rinishdagi ko‘phad Jegalkin ko‘phadi deb ataladi
7. Nomonoton funksiya deb nimaga aytiladi-?
A. Agar $\alpha \prec \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) > f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.
B. Agar $\alpha \succ \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) > f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.
C. Agar $\alpha \prec \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) \geq f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.
D. Agar $\alpha \prec \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) < f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.
8. Superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb nimaga aytiladi?
A. Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan funksiya ham shu sistemaning elementi bo‘lsa, u holda bunday sistema superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb ataladi.
B. Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan funksiya ham shu sistemaning elementi bo‘lmasa, u holda bunday sistema superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb ataladi.

C. Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan funksiya ham shu sistemaning elementi bo‘lmasa, u holda bunday sistema superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb ataladi.
D. Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinf deb ataladi.
9. Funksional yopiq sinf bu-?
A. Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinf deb ataladi.
B. Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday funksiyalar sistemasi funksional ochiq sinf deb ataladi.
C. mantiq algebrasining bo‘sh sinfdan hamma funksiyalari
D. to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf funksional yopiq sinf deb ataladi.
10. Xususiy funksional yopiq sinf deb nimaga aytiladi?
A. Bo‘sh sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari
B. to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf xususiy funksional yopiq sinf deb ataladi.
C. Bo‘sh bo`lmagan sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari
D. to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf xususiy funksional yopiq sinf deb ataladi.
11. Maksimal funksional yopiq sinf bu-?
A. O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfidan (P_2 dan) farq qiluvchi funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf maksimal funksional yopiq sinf deb ataladi.
B. O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining bir funksiyasi sinfidan (P_2 dan) farq qiluvchi funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf maksimal funksional yopiq sinf deb ataladi.
C. O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfidan (P_2 dan) farq qilmaydigan funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf maksimal funksional yopiq sinf deb ataladi.
D. O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining bir funksiyasi sinfidan (P_2 dan) farq qilmaydigan funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf maksimal funksional yopiq sinf deb ataladi.
12. Ekvivalent funksional elementlar deb nimaga aytiladi?
A. Faqatgina kirishlarning raqamlanish tartibi va soxta kirishlari bilan farq qiladigan funksional elementlar ekvivalent funksional elementlar deb ataladi.
B. Faqatgina kirishlarning soxta kirishlari bilan farq qiladigan funksional elementlar ekvivalent funksional elementlar deb ataladi.
C. Faqatgina kirishlarning raqamlanishi farq qiladigan funksional elementlar ekvivalent funksional elementlar deb ataladi.
D. Faqatgina kirishlarning raqamlanish tartibi va soxta kirishlari bilan farq qilmaydigan funksional elementlar ekvivalent funksional elementlar deb ataladi.