13-MA’RUZA. Mantiqiy to‘rlar. Mantiqiy to‘rlarini minimallashtirish usullari. Karno kartalari (2 soat).

REJA

1. Mantiqiy to‘rlar.
2. Mantiq to’rlari minimallashtirish usullari.
3. Ikkilik mantiqiy amallariga mos sxemalar tuzish.
4. Karno kartalari.

Kalit so’zlar: *Mantiqiy to‘rlar,minimallashtirish usullari, ikkilik mantiqiy amallar, sxemalar, Karno kartalari*.

13.1.Mantiqiy to‘rlar.

13.2.Mantiq to’rlari minimallashtirish usullari.

Mukammal diz’yunktiv normal shakllarni minimallashtirishda Bul ifodalarida bir-biriga qo’shni hadlarni topish va bu hadlarni birlashtirish katta mehnat talab qiladi. Bu esa soddalashtirishda analitik usulning kamchiligi hisoblanadi.

Amaliyotda mantiq funktsiyalarini minimallashtirish uchun mantiqiy o’zgaruvchilar soni kamroq bo’lsa, jadval usuli birmuncha qulay hisoblanadi. Jadval usulining ustunligi:

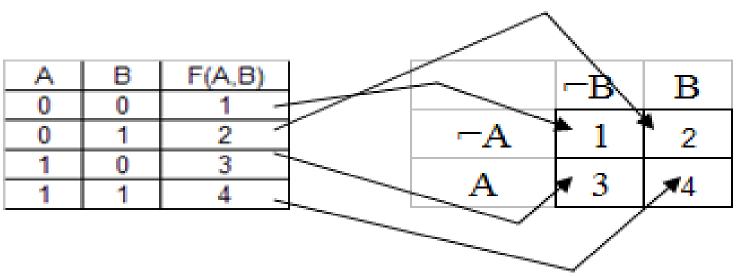
1) birlashtiriladigan hadlarni izlash oson;
2) topilgan hadlarni birlashtirish oson;
3) funktsiyaning barcha minimal shakllarini topish mumkin.

Jadval usullari quyidagilar: Karno kartalari, Veych, Venn diagrammalari, yechimlar daraxti hisoblanadi. Ushbu mavzuda biz Karno kartalari metodi bilan tanishamiz.

1953 yil Moris Karno Bul ifodalarini soddalashtirish va grafik tasvirlash tizimini ishlab chiqqanligi haqida maqola e’lon qildi. Hozirda bu metod Karno kartalari metodi deb yuritiladi. Karno kartalarining quyidagi turlarini ko’rib chiqamiz:

13.3. Ikkilik mantiqiy amallariga mos sxemalar tuzish.

Aytaylik, Bul ifodasi ikkita mulohaza o’zgaruvchisidan tashkil topgan bo’lsin va quyidagi rostlik jadvali bilan berilgan bo’lsin. U holda ikki o‘zgaruvchili Karno kartasi quyidagicha bo’ladi:



Agar F(A,B) formula MDNSh da berilgan bo’lsa, u holda
№1 o’ringa ¬A&¬B
№2 o’ringa ¬A&B
№3 o’ringa A&¬B
№4 o’ringa A&B
hadlar mos kelib, shunday hadlar F(A,B) formulada mavjud bo’lsa, Karno kartasida bu hadlarga mos o’rinlarga 1, qolgan o’rinlarga 0 raqami yoziladi.

Ikki o‘zgaruvchili Karno kartasi to’ldirilgandan keyin 2 ning darajalaricha birlarni o’z ichiga oladigan (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, …) konturlar chiziladi. Bu konturlar gorizontaliga yoki vertikaliga bir-biriga qo’shni bo’lgan birlarni o’z ichiga olishi kerak. Konturga olish jarayoni barcha birlar kontur ichida ichida qolguncha davom ettiriladi va konturlar iloji boricha maksimal ikkining darajalaricha birlarni o’z ichiga olishi kerak.Konturga olish jarayoni tugagandan keyin har bir kontur ichida qatnashgan bir-biriga teskari bo’lgan fikr o’zgaruvchilari tushirib qoldiriladi va har bir konturda qolgan o’zgaruvchilarning diz’yunktsiyasi olinadi. Hosil bo’lgan ifoda Karno kartasi bo’yicha minimallashgan ifoda bo’lib, undan ortiq minimallashtirish mumkin emas.

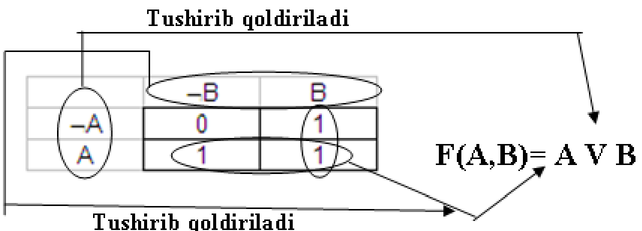
Misol 1. Quyidagi rostlik jadvali bilan berilgan ifodani soddalashtiring:

A	B	F(A,B)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

	¬B	B
¬A	1	0
A	1	1

Ifodaning to’liq ko’rinishi: F(A,B)=¬A&¬B∨A&¬B∨A&B minimal ko’rinishi esa: F(A,B)= A∨¬B

Misol2.   (A,B)=¬A&B∨A&¬B∨A&B formulaga mos Karno kartasi quyidagi ko’rinishni oladi, ya’ni karta MDNSh bo’yicha tuziladi:



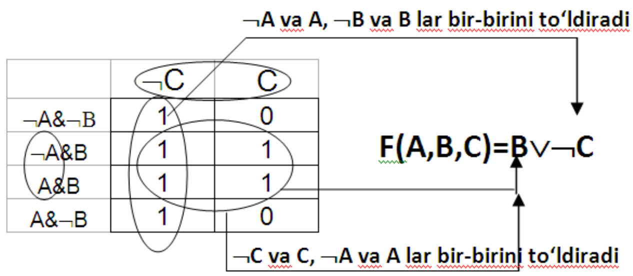
Yuqorida keltirilgan sxemaga muvofiq gorizontaliga, vertikaliga bir-biriga qo‘shni bo‘lgan birlar konturlarga birlashtiriladi. Har bir konturda qatnashgan bir-birini to‘ldiruvchi o‘zgaruvchilar tushirib qoldiriladi, har bir konturdan qolgan o‘zgaruvchilarning diz’yunksiyasi olinadi. Natijada formula quyidagi ko‘rinishni oladi: F(A, B)= A∨B.

	¬B	B
¬A	0	1
A	1	1

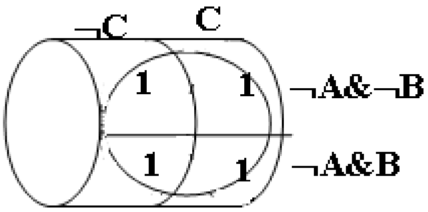
13.4.Karno kartalari.

Aytaylik, Bul ifodasi uchta mulohaza o’zgaruvchisidan tashkil topgan bo’lsin va quyidagi rostlik jadvali bilan berilgan bo’lsin. U holda

uch o‘zgaruvchili Karno kartasi quyidagicha bo’ladi: Uch o‘zgaruvchili Karno kartalarida ham ikki o‘zgaruvchili Karno kartalaridagidek gorizontaliga, vertikaliga bir-biriga qo‘shni bo‘lgan birlar konturlarga birlashtiriladi. Har bir kontur iloji boricha ko‘proq ikkini darajalaricha birlarni (2^1, 2^2, 2^3,…) o‘z ichiga olishi va kontur olish jarayoni barcha birlar kontur ichida qolguncha davom ettirilishi lozim. Har bir kontur soddalashtirilgan Bul ifodasining yangi a’zosini bildiradi. Har bir konturda qatnashgan bir-birini to‘ldiruvchi o‘zgaruvchilar tushirib qoldiriladi, har bir konturdan qolgan o‘zgaruvchilarning diz’yunksiyasi olinadi. Bundan tashqari uch o‘zgaruvchili Karno kartalarida 1- va 4-qatorlar bir-biriga



qo‘shni hisoblanadi, chunki karta gorizontaliga o‘ralganda 1- va 4- qatorlar bir-biriga qo‘shni bo‘lib qoladi.



F(A,B,C) formula quyidagicha rostlik jadvali bilan berilgan bo‘lsin:

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

	¬C	C
¬A&¬B	1	0
¬A&B	1	1
A&B	1	1
A&¬B	1	0

To‘rt o‘zgaruvchili Karno kartalari. To‘rt o‘zgaruvchili Karno kartalarida ikki va uch o’zgaruvchili Karno kartalaridagi usullar qo‘llaniladi. Faqatgina to‘rt o‘zgaruvchili Karno kartalarida birinchi va to‘r tinchi ustunlar, birinchi va to‘rtinchi qatorlar bir-biriga qo‘shni hisoblanadi, chunki ular mos ravishda vertikal yoki gorizontal silindrlarga o‘ralsa, ushbu ustunlar yoki qatorlar bir-biriga qo‘shni bo‘lib qoladi. To‘rt o‘zgaruvchili Karno kartalarining to‘rtta burchagi ham bir-biriga qo‘shni hisoblanadi, chunki karta “sferaga” o‘ralsa, to‘rtta burchak bir-biriga qo‘shniga aylanadi.

	¬C&¬D	¬C&D	C&D	C&¬D
¬A&¬B	1	0	0	1
¬A&B	1	1	1	1
A&B	1	1	1	1
A&¬B	1	0	0	1

Masalan, F(0,0,0,1)=F(0,0,1,1)=F(1,0,0,1)=F(1,0,1,1)=0

Karno kartasi bo‘yicha formulaning soddalashgan ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi: F(A,B,C)= B∨¬D.

Misol. Rostlik jadvali quyidagicha bo`lgan formula uchun minimizatsiyalash masalasini qaraymiz:

A	*B*	*C*	*D*	*a* (*A*, *B*, *C*, *D*)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0

1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Bu jadvalga mos funksiya uchun mukammal diz'yunktiv normal shaklni quyidagicha tuzamiz:

$$a(A, B, C, D) = \neg A \wedge B \wedge C \wedge D \vee A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \vee A \wedge B \wedge \neg C \wedge D \vee$$

$$\vee A \wedge B \wedge C \wedge \neg D \vee A \wedge B \wedge C \wedge D.$$

Bu formulani Karno kartasidan foydalanib soddalashtiramiz:

	$\neg C \wedge \neg D$	$\neg C \wedge D$	$C \wedge D$	$C \wedge \neg D$
$\neg A \wedge \neg B$	0	0	0	0
$\neg A \wedge B$	0	0	1	0
$A \wedge B$	0	1	1	1
$A \wedge \neg B$	0	0	1	0

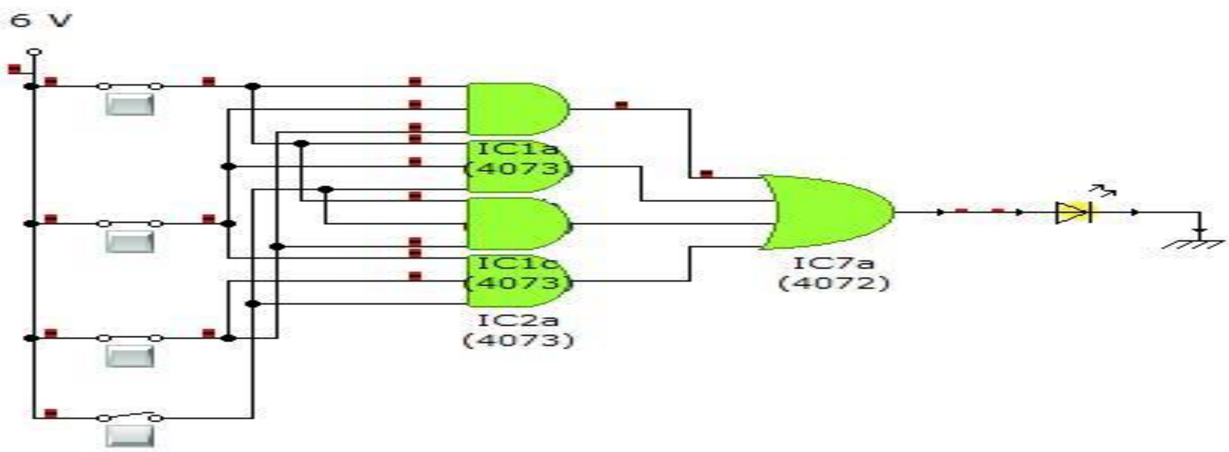
Karno kartasidan ko`rinib turibdiki, funksiyaning ko`rinishi

$$a(A, B, C, D) = A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge D \vee B \wedge C \wedge D \vee A \wedge C \wedge D$$

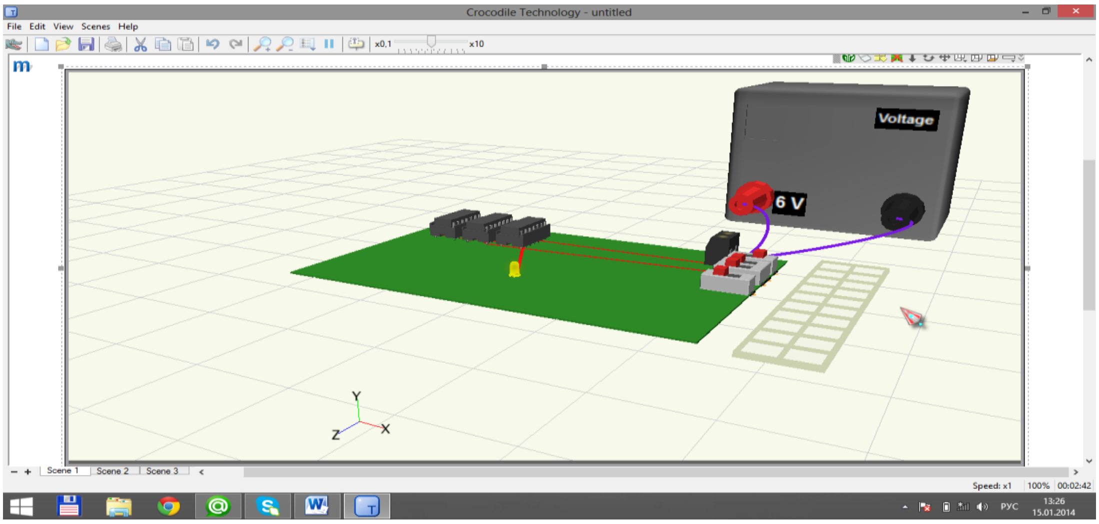
shaklda bo`ladi:

Ushbu formulaga mos sxemaning ***Crocodile*** **dasturiy ta'minoti** yordamida ishlab chiqilgan ko`rinishini keltiramiz:

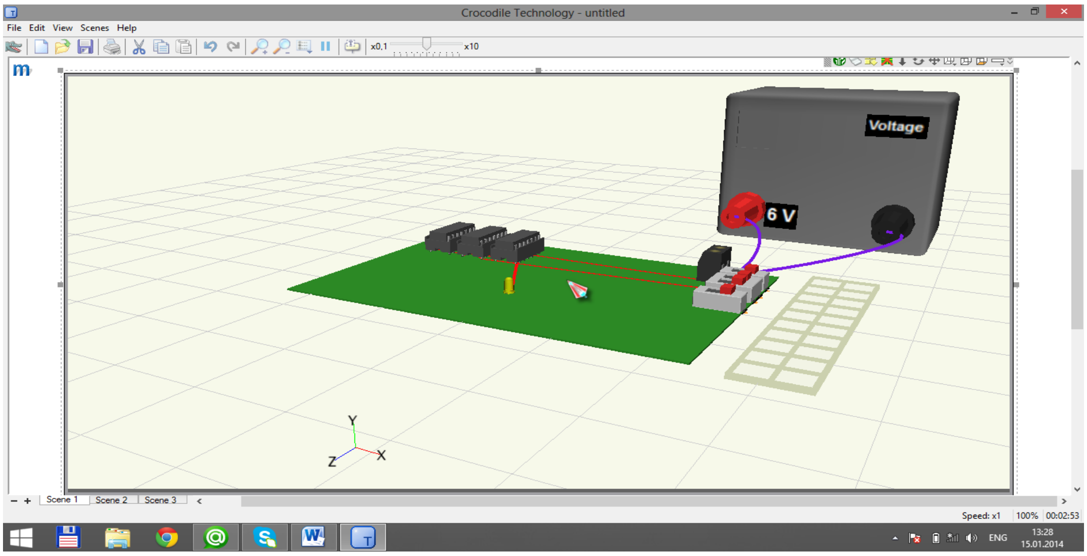
Sxemaning fizik ko`rinishi quyidagicha bo`ladi:



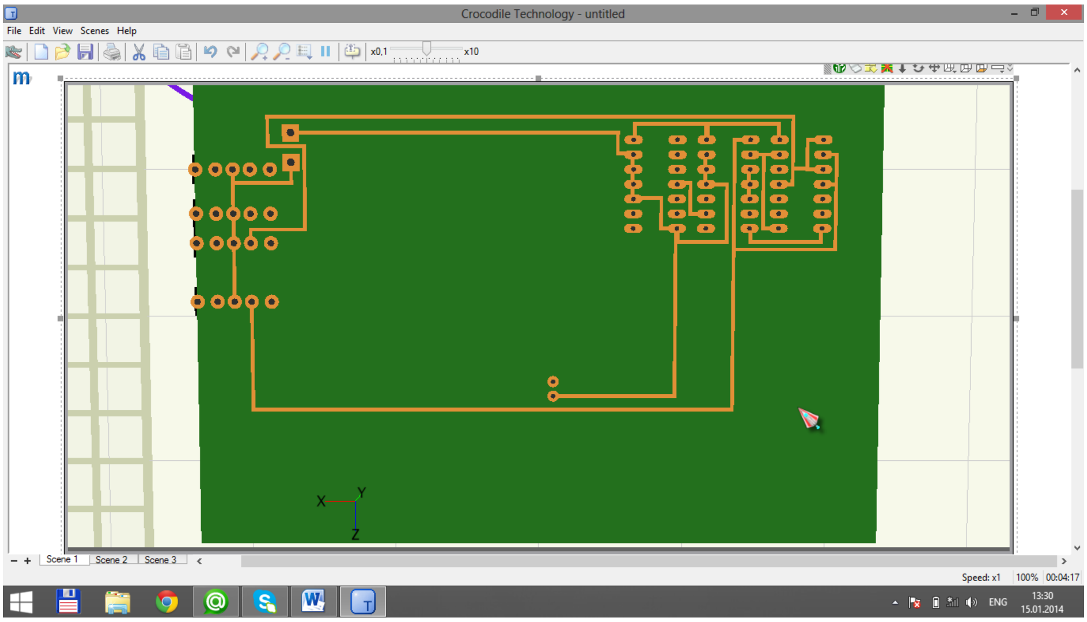
Ulanish amalga oshgan holatning, ya'ni yoqiq holatning tasviri quyidagicha bo`ladi:



Ulanish amalga oshmagan holatning, ya’ni o`chiq holatning tasviri quyidagicha bo`ladi:



Plataning orqa tomonidan sxemani ko’rinishi quyidagicha bo`ladi:



Nazorat savollari:

1. Minimallashtirishda jadval usulining afzalligi nimada?
2. Ikki o‘zgaruvchili Karno kartasida minimallashtirish usulini tushuntiring.
3. Uch o‘zgaruvchili Karno kartasi mohiyati nimadan iborat?
4. To’rt o‘zgaruvchili Karno kartasida minimallashtirish qanday amalgam oshiriladi?
5. O’zgaruvchilar soni 4 tadan oshib ketsa, nima uchun Karno kartasi samarasiz bo’ladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

a) Quyida keltirilgan misollar uchun Karno kartalarini tuzib, minimallashtiring va soddalashgan formulaga mos rele-kontakt sxemasi chizing:

1. F(1,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
2. F(0,1,0)=F(0,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
3. F(0,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
4. F(0,1,0)=F(0,1,1)=F(1,1,1)=F(1,0,1)=1
5. F(0,1,1)=F(1,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,1)=1
6. F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,0)=F(1,1,0)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
7. F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,1)=F(1,1,0)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
8. F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(1,1,0)=F(1,1,1)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1

b) Quyida keltirilgan misollar uchun yechimlar daraxtini tuzing va soddalashtiring:

1. F(0,0,0)=F(0,1,0)=F(0,1,1)=F(1,1,0)= F(1,1,1)=F(1,0,0)=1
2. F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,1)= F(1,1,0)=F(1,0,0)=1
3. F(0,1,0)=F(0,0,1)=F(0,1,0)=F(1,1,0)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
4. F(0,1,1)=F(0,0,1)=F(0,1,0)=F(1,1,0)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
5. F(0,1,0)=F(0,0,1)=F(1,1,0)=F(1,1,1)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
6. F(0,1,1)=F(1,1,1)=0
7. F(0,1,0)=F(1,1,0)=0
8. F(0,0,1)=F(1,0,1)=0

9. F(0,0,0)=F(1,0,0)=0
10. F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,0)=1
11. F(1,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
12. F(0,1,0)=F(0,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
13. F(0,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=0
14. F(0,1,0)=F(0,1,1)=F(1,1,1)=F(1,0,1)=1
15. F(0,1,1)=F(1,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,1)=0

TESTLAR

1. Графда Эйлер цикли мавжуд бўлиши учун:

A. Граф богланган бўлиши ва барча тугунларининг локал даражалари жуфт бўлиши керак;

B. Графнинг 2 та тугуни(бошланиш ва охирги) локал даражалари тоқ бўлиб, қолган барча тугунларининг локал даражалари жуфт бўлиши керак.

C. Графнинг барча тугунларининг локал даражалари тоқ бўлиши керак;

D. Граф богланмаган бўлиши керак

2. Graf uchlarining lokal darajasi deb nimaga aytiladi?

A. Berilgan uchga tutashgan qirralari soni

B. Grafdagi uchlarining soni

C. Tuguni bor uchlarining soni

D. Bunday tushuncha yo’q

3. Graflar izomorf bo’lishi uchun zaruriy shartlar to’liq ifodalansin

A. Uchlari va qirralari soni teng bo’lishi kerak

B. Uchlari soni teng bo’lishi kerak

C. Qirralari soni teng bo’lishi kerak

D. Uchlari va qirralari soni teng bo’lib ular orasida biyektiv akslantirish mavjud bo’lishi kerak

4. Ориентирланган граф деб қандай графга айтилади?

A. Хар бир қирраси маълум бир йўналишга эга бўлган графга

B. Граф хар бир учига кирувчи ва чиқувчи қирралари бўлган графга

C. Хар бир учидан бошқа учларига туташтируфчи маршрут бўлган графга

D. Қирралари орасида йўқолган қирралари бўлган графга

5. Qism graf deb nimaga aytiladi?

A. G grafning o’zaro bog’langan qirralari ixtiyoriy ketma-ketlik

B. {A} to’plam graf uchlari V ning qismi bo’lsa G grafning shkala uchi xam A ga tegishli bo’lgan qirralaridan iborat qismi

C. Grafda qism graf bo’lmaydi

D. G grafning qiralaridan istalgan qismi qism graf bo’ladi

6. Qanaqa ko`rinishdagi ko`phad Jegalkin ko`phadi deb ataladi-?

A. $\sum x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} + a$ ko‘rinishdagi ko‘phad Jegalkin ko‘phadi deb ataladi

B. $\sum x_{i_1} - x_{i_2} \dots - x_{i_k} + a$ ko‘rinishdagi ko‘phad Jegalkin ko‘phadi deb ataladi

C. $\sum x_{i_1} + x_{i_2} \dots - x_{i_k} + a$ ko‘rinishdagi ko‘phad Jegalkin ko‘phadi deb ataladi

D. $\sum\sum x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} + a$ ko‘rinishdagi ko‘phad Jegalkin ko‘phadi deb ataladi

7. Nomonoton funksiya deb nimaga aytiladi-?

A. Agar $\alpha \prec \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) > f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.

B. Agar $\alpha \succ \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) > f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.

C. Agar $\alpha \prec \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) \geq f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.

D. Agar $\alpha \prec \beta$ munosabatdan $f(\alpha_1,...,\alpha_n) < f(\beta_1,...,\beta_n)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb ataladi.

8. Superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb nimaga aytiladi?

A. Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan funksiya ham shu sistemaning elementi bo‘lsa, u holda bunday sistema superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb ataladi.

B. Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan funksiya ham shu sistemaning elementi bo‘lmasa, u holda bunday sistema superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb ataladi.

C. Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan funksiya ham shu sistemaning elementi bo‘lmasa, u holda bunday sistema superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb ataladi.

D. Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinf deb ataladi.

9. Funksional yopiq sinf bu-?

A. Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinf deb ataladi.

B. Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday funksiyalar sistemasi funksional ochiq sinf deb ataladi.

C. mantiq algebrasining bo‘sh sinfdan hamma funksiyalari

D. to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf funksional yopiq sinf deb ataladi.

10. Xususiy funksional yopiq sinf deb nimaga aytiladi?

A. Bo‘sh sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari

B. to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf xususiy funksional yopiq sinf deb ataladi.

C. Bo‘sh bo`lmagan sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari

D. to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf xususiy funksional yopiq sinf deb ataladi.

11. Maksimal funksional yopiq sinf bu-?

A. O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfidan (P_2 dan) farq qiluvchi funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf maksimal funksional yopiq sinf deb ataladi.

B. O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining bir funksiyasi sinfidan (P_2 dan) farq qiluvchi funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf maksimal funksional yopiq sinf deb ataladi.

C. O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfidan (P_2 dan) farq qilmaydigan funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf maksimal funksional yopiq sinf deb ataladi.

D. O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining bir funksiyasi sinfidan (P_2 dan) farq qilmaydigan funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf maksimal funksional yopiq sinf deb ataladi.