6-MA’RUZA. Kombinatorikaning asosiy qoidalari. Takroriy bo‘lmagan o‘rinlashtirish va guruhlashlar (4 soat).

REJA

1. Kombinatorikaning 1-qoidasi.
2. Kombinatorikaning 2-qoidasi.
3. Tartiblangan va tartiblanmagan tanlashlar.
4. Kombinatorika elementlari: O’rinlashtirish, o’rin almashtirish va guruhlashlar soni.
5. Guruhlash qoidalari. Misollar.
6. Nyuton binomi. Binomial koeffitsiyentlarning xossalari.

Kalit so’zlar: *Kombinatorikaning 1-qoidasi, kombinatorikaning 2-qoidasi, tartiblangan va tartiblanmagan tanlashlar, kombinatorika elementlari, o’rinlashtirish, o’rin almashtirish, guruhlashlar soni, guruhlash qoidalari, Nyuton binomi, binomial koeffitsiyentlar.*

6.1.Kombinatorikaning 1-qoidasi.

Kombinatorikaning 1-qoidasi: *Agar qandaydir **A** tanlashni **m** usul bilan, bu usullarning har biriga biror bir boshqa **B** tanlashni **n** usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, u holda **A va B** tanlashni (ko‘rsatilgan tartibda)* $m \times n$ *usulda amalga oshirish mumkin.*

6.2.Kombinatorikaning 2-qoidasi.

Kombinatorikaning 2-qoidasi: *Aytaylik birin-ketin **k** ta harakatni amalga oshirish talab qilngan bo‘lsin. Agar birinchi harakatni -* n_1 *usulda, ikkinchi harakatni -* n_2 *usulda, va hokazo **k** – harakatni -* n_k *usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, u holda barcha **k** ta harakatni*

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_k$$

usulda amalga oshirish mumkin bo‘ladi.

$p_1, p_2, ..., p_n$ – turli sodda sonlar, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ qandaydir natural sonlar bo‘lgan quyida berilgan son

$$m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$$

$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times .... \times (\alpha_n + 1)$ ta umumiy bo‘luvchiga ega;

6.3. Tartiblangan va tartiblanmagan tanlashlar.

1-usul. Tuziladigan son 4 xonali son bo‘lishi uchun birinchi raqami 1,2,3,4,5,6 olti xil bo‘lishga haqqi bor (0 bo‘lishga haqqi yo‘q, faraz qilaylik 5 chiqdi deylik), ikkinchi raqam ham olti xil bo‘lishga haqqi bor bular: 0 va 1,2,3,4,6 raqamlarning qaysidir biri (faraz qilaylik 2 chiqdi deylik), uchinchi raqam esa besh xil bo‘lishga haqqi bor, bular 0,1,3,4,6 raqamlarning qaysidir biri (faraz qilaylik 1 chiqdi deylik), to‘rtinchi raqam esa to‘rt xil bo‘lishga haqqi bor, bular 0,3,4,6. Kombinatorikaning ikkinchi asosiy qoidasiga ko‘ra barcha tanlanishlar soni har bir raqamni tanlashlar sonlarining ko‘paytmalariga teng. Shunday qilib yuqoridagi shartlarni bajaruvchi 4 xonali sonlar 6*6*5*4=720 ta bo‘ladi.

2-usul. Faraz qilaylik 4 ta g‘ildirak berilgan bo‘lib bu g‘ildiraklarning har biriga 0 dan 6 gacha bo‘lgan raqamlar yozilgan bo‘lsin. Birinchi g‘ildirakdan 0 raqamini o‘chiramiz, chunki birinchi g‘ildirakda 0 raqami chiqib qolsa tuzilgan son to‘rt xonali bo‘lmay qoladi. Shunda birinchi g‘ildirak olti xil bo‘ishga haqqi bor. Ikkinchi g‘ildirakda 0 raqami qo‘shiladi, lekin birinchi gildirakda tushgan qaysidir 0 dan farqli raqam o‘chirib qo‘yiladi. Uchinchi g‘ildirakdan esa birinchi va ikkinchi g‘ildirakda tushgan raqamlar o‘chiriladi, keyin aylantiramiz u holda uchinchi g‘ildirakda 5 xil imkoniyat qoladi. To‘rtinchi g‘ildirakdan birinchi, ikkinchi, uchinchi g‘ildirakda tushgan raqamlar o‘chiriladi, u holda to‘rti g‘ildirak aylantirilganda uning uchun 4 xil imkoniyat qoladi. Shunday qilib Kombinatorikaning ikkinchi asosiy qoidasiga ko‘ra raqamlari 0,1,2,3,4,5,6 raqamlardan iborat va turli xil raqamlardan iborat to‘rt xonali sonlar har bir g‘ildirakda chiqishi mumkin bo‘lgan imkoniyatlari ko‘paytmasiga teng. Shunday qilib yuqoridagi shartni bajaruvchi to‘rt xonali sonlar 6*6*5*4=720 ta bo‘ladi.

6.4.Kombinatorika elementlari: O’rinlashtirish, o’rin almashtirishva guruhlashlar soni.

Teorema. ***n*** ta elementdan iborat A to‘plam uchun Faqat elementlar tartibi bilan farq qiladigan turli tartiblashtirilgan turli to‘plamlar ushbu to‘plamninig ***o‘rin almashtirishi*** deyiladi va

$$P_n = n!$$

bo‘ladi.

Teorema. *n* ta elementdan iborat to‘plamning tartiblashtirilgan *k* – elementli to‘plam ostilari soni

$$A_n^k = k! * C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n*(n-1)*(n-2)*....*(n-(k-1))$$

ta bo‘ladi. *n* elementli to‘plamning tartiblashtirilgan *k*-elementli to‘plam ostilari *n* ta elementdan *k* tadan ***joylashtirish*** deyiladi.

n – elementli to‘plamning barcha *k* – elementli to‘plam ostilar soni

$$C_n^k = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$$

teng bo‘ladi.

n – elementli to‘plamning ixtiyoriy *k* – elementli to‘plam ostilari ***n – elementdan k tadan guruhlash*** deb nomlanadi. Ayrim hollarda guruhlash so‘zining o‘rniga ***kombinatsiya n elementdan k tadan*** termini ham ishlatiladi.

N ta elementdan iborat A to‘plamni *m* ta qism to‘plamlar yig‘indisi ko‘rinishida necha xil usulda yoyish mumkin degan savol qo‘yamiz.

$$A = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_m$$

Shunday bo‘lishi kerakki $N(B_1)=k_1$, $N(B_2)=k_2$, ... , $N(B_m)=k_m$ bo‘lib, k_1, k_2 ,..., k_m berilgan sonlar uchun

$$k_i \geq 0, \quad k_1 + k_2 + ... + k_m = n$$

shartlar bajariladi. $B_1, B_2, ..., B_m$ to‘plamlar umumiy elementlarga ega emas.

A to‘plamning k_1 elementli B_1 to‘plam ostisini $C_n^{k_1}$ usulda tanlash mumkin, n-k_1 qolgan elementlardan k_2 elementli B_2 to‘plam ostisini $C_{n-k_1}^{k_2}$ usulda tanlash mumkin va hokazo. Turli xil $B_1, B_2, ..., B_m$ to‘plamlarni tanlash usullari ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra

$$C_n^{k_1} * C_{n-k_1}^{k_2} * C_{n-k_1-k_2}^{k_3} * ... * C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-1}}^{k_m} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!*(n-k_1)!} * \frac{(n-k_1)!}{k_2!*(n-k_1-k_2)!} * \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!*(n-k_1-k_2-k_3)!} * .... * \frac{(n-k_1-k_2-....-k_{m-1})}{k_m!*(n-k_1-k_2-...-k_m)!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!*k_2!*...*k_m!}$$

Demak quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema. Aytaylik k_1, k_2 ,..., k_m - butun manfiymas sonlar bo‘lib, $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$ va A to‘plam n ta elementdan iborat bo‘lsin. A ni elementlari mos ravishda k_1, k_2 ,..., k_m ta bo‘lgan $B_1, B_2, ..., B_m$ m ta to‘plam ostilar yigindisi ko‘rinishida ifodalash usullari soni

$$C_n(k_1, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1!*k_2!*...*k_m!}$$

ta bo‘ladi.

$C_n(k_1, ..., k_m)$ sonlar ***polinomial koeffitsiyentlar*** deyiladi.

6.4. Guruhlash qoidalari. Misollar.

Ta’rif. Har bir elementi n ta xildan biri bolishi mumkin k ta elementli guruxlarga n ta elementdan k ta elementli takrorlanuvchi guruhlashlar deb aytiladi.

Teorema. N ta elementdan k ta elementli takrorlanuvchi guruhlashlar soni

$$f_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$$

ta bo‘ladi.

$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ ko‘rinishdagi tenglama butun manfiymas yechimlari soni ham f_n^k ta bo‘ladi.

6.6. Nyuton binomi. Binomial koeffitsiyentlarning xossalari.

Мактаб курсидан маълумки

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Бу формулаларни умумлаштириб $(a+b)^n$ кавсни кандай очиш мумкин деган савол туғулиши табиийдир. Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради:

Teorema (Binomial teorema) Quyidagi tenglik o‘rinli

$$(a+b)^n = C_n^0 * a^n * b^0 + C_n^1 * a^{n-1} * b^1 + \ldots + C_n^k * a^{n-k} * b^k + \ldots + C_n^n * a^0 * b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k * a^{n-k} * b^k$$

bu yerda C_n^k sonlarga ***binomial koeffitsiyentlar***, tenglamaga esa *Nyuton binomi* deyiladi. Ushbu nom tarixiy haqiqat emas, chunki Nyutondan oldin ushbu formulani Umar Xayyom (1046-1131), G‘iyos ad-Din Jamshid al-Koshi bilishgan. Nyutonning xizmati ushbu formulani butun bo‘lmagan ***n*** uchun umumlashtirgan.

Исботи. (a+b) йиғиндини кетма-кет n марта кўпайтирамиз. У холда хар бир хади $d_1, d_2, \ldots d_n$ кўринишига эга бўламиз, бунда d_i а ёки в га тенг, i=1,2.. Барча қўшилувчиларни $B_0, B_1, \ldots B_n$ бўлган (n+1) та гурухларга ажратамиз, B^k гурухда в кўпайтувчи к марта, а эса n-k марта учрайди. $B_к$ даги кўпайтувчилар сони $C^к_n$ га тенглиги тушунарли албатта. Хар B_k даги кўпайтирувчиларнинг хар бири $a^{n-к} в^к$ га тенг, бундай хадлар сони C_n^k га тенг , шу сабабли

$(a+b)^n=\sum C_n^k a^k b^{n-k}$ k=0

теорема исботланди. Биномиал коэффициентларнинг қуйидаги мухим хоссасини эслатиб ўтамиз

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} \quad (2)$$

Бу хосса 3-маърузада исботланган.

(2) тенглик биномиал коэффициентларни уч бурчакли жадвал кўринишида кетма-кет ёзиш мумкинлигини кўрсатади.

```
                1    1                          n=1
             1    2     1                       n=2
          1    3     3    1                     n=3
        1    4    6    4    1                   n=4
      1    5   10   10    5    1                n=5
    1    6   15   20   15    6    1             n=6
  1    7   21   35   35   21    7    1          n=7
.   .   .  .   .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
```

Бу жадвал Паскал учбурчаги деб аталади.

Паскал учбурчагининг n – сатридаги сонлар $(a+b)^n$ ёйилмасининг коэффициент 1 сонлардан бошқа хар бир коэффициент олдинги сатрда турган 2 та мос коэффициентлар йиғиндисига тенг.

Polinomial teorema. $\left(a_1 + a_2 + ... + a_k\right)^n$ ifoda, bo‘lishi mumkin bo‘lgan barcha quyidagi ko‘rinishdagi qo‘shiluvchilar yig‘indisidan iborat bo‘lib

$$\frac{n!}{r_1!*r_2!*...*r_k!}*a_1^{r_1}*a_2^{r_2}*...*a_k^{r_k}$$

Bu erda $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$, ya’ni

$$\left(a_1 + a_2 + ... + a_k\right)^n = \sum_{\substack{r_1 \geq 0,...,r_k \geq 0 \\ r_1 + r_2 + ... + r_k = n}} \frac{n!}{r_1!*r_2!*...*r_k!}*a_1^{r_1}*a_2^{r_2}*...*a_k^{r_k}$$

ga teng bo‘ladi.

k=2 бўлганда (3) тенглик қуйидаги кўринишга келади :

$$(a_1 + a_2)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r_1!(n-r)!} a_1^{n-r} \cdot a_2^r$$

Демак, хусусий холда Ньютон биноми формуласига эга бўламиз.

Mustaqil ishlash uchun masalalar:

2.2.0. 30 ta talabadan 20 tasi o‘g‘il bolalar, tavakkaliga jurnal nomeri bo‘yicha 5 talaba chaqirildi, ularning ichida ko‘pi bilan 3 tasi o‘g‘il bola bo‘ladigan qilib necha xil usulda tanlash mumkin?

2.2.1. Xonada ***n*** ta chiroq bor. ***k*** ta chiroqni yoqib xonani necha xil usulda yoritish mumkin? Xonani hammasi bo‘lib necha xil usulda yoritish mukin?

2.2.2 ***n*** ta nuqta berilgan, ularning ixtiyoriy 3 tasi bitta chiziqda yotmaydi. Ixtiyoriy ikkita nuqtani tutashtirib nechta chiziq o‘tqazish mumkin?

2.2.3. Har bir keyingi raqami oldingisidan katta bo‘lgan nechta 4 xonali sonni tuzish mumkin?

2.2.4. Har bir keyingi raqami oldingisidan kichik bo‘lgan nechta 4 xonali sonni tuzish mumkin?

2.2.5. Xalqaro komissiya 9 kishidan iborat. Komissiya materiallari seyfda saqlanadi. Kamida 6 kishi yig‘ilgandagina seyfni ochish imkoni bo‘lishi uchun, seyf nechta qulfdan iborat bo‘lishi kerak va ular uchun nechta kalit tayyorlash kerak va ularni komissiya a’zolari o‘rtasida qanday taqsimlash kerak?

Masala: Kitob javonida tasodifiy tartibbda 15 ta darslik terilgan bo‘lib, ularning 9 tasi o‘zbek tilida, 6 tasi rus tilida. Tavakkaliga 7 ta darslik olindi.

2.2.6. Olingan darsliklarning roppa-rosa 4 tasi o‘zbekcha, 3 tasi ruscha bo‘ladigan qilib necha xil usulda tanlab olish mumkin?

2.2.7. Olingan darsliklarning ko‘pchiligi o‘zbekcha bo‘ladigan qilib necha xil usulda tanlab olish mumkin?

2.2.8. Olingan darsliklarning kamchiligi o‘zbekcha bo‘ladigan qilib necha xil usulda tanlab olish mumkin?

2.2.9. Olingan darsliklarning ko‘pchiligi ruscha bo‘ladigan qilib necha xil usulda tanlab olish mumkin?

TESTLAR

1. 7 nafar o‘quvchi navbatga necha usul bilan turishi mumkin?
   A) 7! B) 7 C) 49 D) 14

2. Ba‘zi mamlakatlarning bayroqlari turli rangdagi 3 ta gorizontal yoki 3 ta vertikal „yo‘l“ lardan iborat. Oq, yashil, ko‘k rangli matolar yordamida shunday bayroqlardan
necha xilini tikish mumkin?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12

3. „BARNO“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

A) 120 B) 60 C) 30 D) 100

4. „KUNFU“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

A) 120 B) 60 C) 30 D) 100

5. „BARAKA“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

A) 120 B) 60 C) 30 D) 100

6. „MATEMATIKA“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

A) 14200 B) 15600 C) 151200 D) 10!

7. „NOZIMA“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

A) 120 B) 60 C) 720 D) 100

8. „LALAKU“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

A) 120 B) 60 C) 720 D) 180

9. „ALLA“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

A) 12 B) 6 C) 18 D) 24

10. „BARRA“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

A) 30 B) 60 C) 80 D) 120

11. „DAFTAR“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

A) 60 B) 360 C) 720 D) 120