9-MA’RUZA. Predikatlar. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari. Formulalar. Formulalarning tengkuchliligi(2 soat).

REJA

1. Predikatlar.
2. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari.
3. Bul funktsiyalari.
4. Formulalar. Formulalarning tengkuchliligi

Kalit so’zlar: *Predikatlar, umumiylik va mavjudlik kvantorlari, Bul funktsiyalari, formulalar,formulalarning tengkuchliligi.*

9.1.Predikatlar.

Bizga natural sonlar to’plami N berilgan bo’lsin.

x element N to’plamning ixtiyoriy elementi bo’lsin. U holda quyidagi jumlalar

A(x)={x soni 7 ga bo’linadi};

B(x)={x>10};

C(x)={x tub son};

D(x)={$(x-5)^2$<10}

darak gaplar bo’lganligi uchun mulohaza hisoblanadi, lekin ularning rost yoki yolg’onligi haqida hech narsa ayta olmaymiz.

Ta’rif. Rost yoki yolg’onligi noma`lum bo’lgan mulohazalar **aniqmas mulohazalar** yoki **predikatlar** deyiladi.

Yuqoridagi misollarda x ning o’rniga turli qiymatlarni qo’ysak, turlicha mulohazalar hosil bo’ladi, ya’ni

A(5)={7 soni 7 ga bo’linadi} =1;

A(13)={10 soni 7 ga bo’linadi}=0

9.2. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari.

Natural sonlar to’plamida berilgan biror P(x) predikatni olaylik.

Agar P(x) predikat bo’lsa, u holda **(∀x)P(x)** – yozuv N to’plamda ixtiyoriy x uchun P(x) mulohaza o’rinli degan ma`noni bildiradi. Bu mulohaza rost bo’ladi, qachonki x ning ixtiyoriy qiymatida P(x) o’rinli bo’lsa. Agarda x ning bittagina qiymatida o’rinli bo’lmasa, P(x) mulohaza yolg’on bo’ladi. ∀ - belgi **umumiylik kvantori** deyiladi.

Misol 1. A(x)={4^x+1 soni tub son} mulohazani ixtiyoriy x uchun tekshirib ko’ramiz:

A(1)={4^1+1=5 soni tub son}=1;

A(2)={4^2+1=17 soni tub son}=1;

A(3)={4^3+1=257 soni tub son} =1;

A(4)={4^4+1=65537 soni tub son} =1;

A(5)={4^5+1=4294967296+1= 4294967297 soni tub son} =0,

demak, x=5 da bu mulohaza yolg’on bo’ladi.

Shuning uchun ham (∀x)A(x) mulohaza yolg’on mulohaza hisoblanadi.

Misol 2. (∀x)B(x)={x^2-x soni 2 ga bo’linadi} mulohazani ixtiyoriy x uchun tekshirib ko’ramiz:

B(1), B(2), B(3), … larda mulohaza o'rinli, lekin bu usul bilan barcha sonlarni tekshirib chiqishning iloji yo'q, shuning uchun mulohazahi rostligini quyidagicha isbotlash mumkin:

$x^2-x=x(x-1)$ ketma-ket kelgan 2 ta sonning ko'paytmasida bittasi albatta juft son bo'ladi, demak bu ko'paytma har doim 2 ga bo'linadi.

Bundan $(\forall x)B(x)$ mulohazaning rostligi kelib chiqadi.

Agar P(x) predikat bo'lsa, u holda **$(\exists x)P(x)$** – yozuv N to'plamda shunday x element topiladiki, uning uchun P(x) mulohaza o'rinli degan ma`noni bildiradi. Bu mulohaza rost bo'ladi, qachonki x ning kamida bitta qiymatida P(x) o'rinli bo'lsa. ∃ - belgi **mavjudlik kvantori** deyiladi.

Yuqoridagi misollarda $(\exists x)A(x)$ mulohaza ham, $(\exists x)B(x)$ mulihaza ham chin bo'ladi.

Umumiylik va mavjudlik kvantorlari uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1^0. $\neg(\forall x)P(x)= (\exists x)\neg P(x)$

2^0. $\neg(\exists x)P(x)= (\forall x)\neg P(x)$

3^0. $(\forall x)[P(x)\&D(x)]= (\forall x) P(x) \& (\forall x) D(x)$

4^0. $(\exists x)[P(x)\& D(x)] \Rightarrow (\exists x) P(x) \& (\exists x) D(x)$

5^0. $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)D(x) \Rightarrow (\forall x)[P(x) \vee D(x)]$

6^0. $(\exists x)[P(x) \vee D(x)] \Rightarrow (\exists x) P(x) \vee (\exists x) D(x)$

9.3. Bul funktsiyalari.

Ta'rif. Agar o'zgaruvchining shunday $a_1, a_2,...,a_{i-1},a_i,...,a_n$ qiymatlar majmuasi mavjud bo'lib, $f(a_1, a_2,...,a_{i-1},1,a_i,...,a_n)=f(a_1, a_2,...,a_{i-1},0,a_i,...,a_n)$ munosabat bajarilsa, u vaqtda x_i o'zgaruvchiga $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning ahamiyatsiz (sohta) o'zgaruvchisi, agar $f(a_1, a_2,...,a_{i-1},1,a_i,...,a_n)\neq f(a_1, a_2,...,a_{i-1},0,a_i,...,a_n)$ munosabat bajarilsa, u vaqtda x_i o'zgaruvchiga $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning ahamiyatli (sohta emas) o'zgaruvchisi deb ataladi.

Misol. $f(x,y) = x\vee(x\wedge y)$ funksiyada y o'zgaruvchi sohta bo'ladi. Haqiqatdan,

$$x = 1, y = 0\ da f(1,0) = 1\vee(1\wedge 0) = 1$$
$$x = 1, y = 1\ da f(1,1) = 1\vee(1\wedge 1) = 1$$
$$ya'ni f(1,0) = f(1,1)$$

Misol. f_1,f_2 va f_3 funksiyalar quyidagi chinlik jadvali orqali berilgan bo'lsin:

x	y	f_1	f_2	f_3
1	1	0	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

Ko'rinib turibdiki, f_1 funksiya uchun x o'zgaruvchi ahamiyatli o'zgaruvchi, y esa ahamiyatsiz, f_2 uchun ikkala o'zgaruvchi ham ahamiyatsiz, f_3 uchun ikkala o'zgaruvchi ham ahamiyatli.

$\Phi=\{f_1,f_2,...,f_n\}$ Bul funksiyalar to'plami berilgan bo'lsin.

Ta'rifФ to'plam ustida aniqlangan formula deb, $F(\Phi)=f(t_1,t_2,...,t_n)$ ifodaga aytiladi, bu yerda f∊Ф va t_iФ ustidagi yoki o'zgaruvchi, yoki formula.

Ф to'plam bazis, f tashqi funksiya, t_i lar esa qism formulalar deyiladi. Har qanday F formulaga bir qiymatli biror f Bul funksiyasi mos keladi. Bu holda F formula f funksiyani ifodalaydi deyiladi va f=funcF ko'rinishida belgilanadi.

Bazis funksiyalarini chinlik jadvalini bilgan holda, bu formula ifodalaydigan funksiyaning chinlik jadvalini hisoblashimiz mumkin.

Misol. $\Phi = \{\wedge, \rightarrow\}$ $vaF = (x\wedge y) \rightarrow x$

x	y	$x\wedge y$	$F = (x\wedge y) \rightarrow x$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

F formulaga mos keluvchi f funksiyani Ф dan olingan funksiyalarning superpozitsiyasi, f funksiyani Ф dan hosil qilinish jarayonini superpozitsiya amali deb ataymiz.

$\big((x_1\wedge x_2)\vee x_1\big) \rightarrow x_3$ formula berilgan bo'lsin. $\big((x_1\wedge x_2)\vee x_1\big) \rightarrow x_3$ formula uchta qadamda ko'riladi. Haqiqatdan, biz quyidagi uchta qism formulalarga ega bo'lamiz:

$$(x_1\wedge x_2), \big((x_1\wedge x_2)\vee x_1\big), \ \ ((x_1\wedge x_2)\vee x_1) \rightarrow x_3$$

x_1	x_2	x_3	$x_1\wedge x_2$	$(x_1\wedge x_2)\vee x_1$	$((x_1\wedge x_2)\vee x_1) \rightarrow x_3$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1

Biz yuqorida ko'rdikki, Ф to'plamdan hosil qilingan har bir formulaga mantiq algebrasining formulasi mos keladi, biroq har xil formulalarga teng funksiyalar mos kelishi mumkin.

Ta'rif Bitta Bul funksiyasini ifodalovchi formulalar ekvivalent deyiladi, ya'ni

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow funcF_1 = funcF_2$$

Teorema. Ixtiyoriy f,g,h Bul funksiyalar uchun quyidagi ekvivalentliklar o'rinli:

1. $\bar{\bar{f}} = f$
2. Konyunksiya, dizyunksiya va ikki modul bo'yicha qo'shishning idempotentligi:

$$f\wedge f = f, \qquad f\vee f = f, \qquad f\oplus f = f$$

3. Konyunksiya, dizyunksiyava ikki modul bo'yicha qo'shishning kommunikativligi:

$$f\wedge g = g\wedge f,\quad f\vee g = g\vee f,\quad f\oplus g = g\oplus f$$

4. Konyunksiya, dizyunksiya va ikki modul bo'yicha qo'shishning assotsiativligi:

$$f\wedge(g\wedge h) = (f\wedge g)\wedge h,\ \ f\vee(g\vee h) = (f\vee g)\vee h,\ \ f\oplus(g\oplus h) = (f\oplus g)\oplus h$$

Distributivlik qonunlari:

$$f\wedge(g\wedge h) = (f\wedge g)\vee(f\wedge h),\ \ f\vee(g\wedge h) = (f\vee g)\wedge(f\vee h),$$
$$(f\wedge g)\oplus(f\wedge h)$$

5. Yutish qonuni:

$$f\wedge(f\vee g) = g,\ \ f\vee(f\wedge g) = f$$

6. De Morgan qonuni:
7. $\overline{f\vee g} = \bar{f}\wedge\bar{g},\ \ \overline{f\wedge g} = \bar{f}\vee\bar{g},$
8. $f\vee\bar{f} = 1,\ f\wedge\bar{f} = 0$
9. $f\rightarrow g = \bar{g}\rightarrow\bar{f}$
10. Implikatsiyani yo'qotish qonuni:

$$f\leftrightarrow g = \bar{f}\vee g$$

11. Ekvivalentlikni yo'qotish qoidasi:

$$f\leftrightarrow g = (f\rightarrow g)\wedge(g\rightarrow f)$$

12. $\bar{f} = f|f = f\downarrow f = f\oplus 1$
13. $f|g = \overline{(f\wedge g)},\quad f\downarrow g = \overline{f\vee g}$
14. $f\vee g = (f|f)|(g|g),\ f\wedge g = (f\downarrow f)\downarrow(g\downarrow g),\ \ f\rightarrow g = f|(g|g)$
15. $f\oplus g = \overline{f\leftrightarrow g}$

Ta'rif. $f(x_1,x_2,...,x_n)\epsilon P_n$ bul funksiya bo'lsin, unda $f^*(x_1,x_2,\dots,x_n) = \overline{f^*(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n})}$ funksiya, f bul funksiyaga ikkilamchi bo'lgan funksiya deyiladi.

Bu ta'rifdan bevosita, ixtiyoriy f bul funksiyasi uchun $f^{**}=f$ ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatdan,

$f^{**} = (f^*)^* = (\overline{f^*(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n})})^* = \overline{\overline{f^*(\overline{\overline{x_1}},\overline{\overline{x_2}},\dots,\overline{\overline{x_n}})}} = f(x_1,x_2,\dots,x_n) = f.$

Misol. a)$f = x\vee g,\ f^* = ?\quad b) g = x, g^* = ?\quad c) h = \bar{x}, h^* = ?$

Yechish.

$$a) f^* = \overline{\bar{x}\vee\bar{g}} = \bar{\bar{x}}\wedge\bar{\bar{g}} = x\wedge g;$$
$$b) g^* = \overline{(\bar{x})} = x = g,\qquad g^* = g$$
$$c) h^* = \overline{(\bar{\bar{x}})} = \bar{x} = h$$

Ta'rif. Agar $f^*=f$ bo'lsa, f funksiya o'z-o'ziga ikkilamchi deyiladi.

Yuqoridagi misoldan ko'rinadiki, inkor va aynan funksiya o'z-o'ziga ikkilamchi, dizyunksiya funksiya o'z-o'ziga ikkilamchi emas.

Teorema. Agar $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ bul funksiya $f(f_1(x_1,x_2,...,x_n),f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_n(x_1,x_2,...,x_n))$ formula ko'rinishida ifodalangan bo'lsa, bu yerda $f_1,f_2,...,f_n$ lar bul funksiyalar, unda $f^*(f^*_1(x_1,x_2,...,x_n),f^*_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f^*_n(x_1,x_2,...,x_n))$ formula $\varphi^*(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyani ifodalaydi.

Isbot. $\varphi^*(x_1,x_2,\dots,x_n) = \bar{\varphi}(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n}) =$
$func\bar{f}\big(f_1(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n}),\dots,f_n(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n})\big) =$
$func\bar{f}\left(\bar{\bar{f_1}}(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n}),\dots\bar{\bar{f_n}}(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n})\right) =$

$func\bar{f}\left(\overline{f_1^*}(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n}),\dots\overline{f_n^*}(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n})\right)=$
$funcf^*\left(f_1^*(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n}),\dots f_n^*(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n})\right)$Teorema isbotlandi.

Keyingi teorema "ikkilamchi prinsipli" deb nomlanadi va matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi. Bunda induksiya o'tishlar yuqoridagi isbotlangan teorema asosida amalga oshiriladi.

Teorema. (Ikkilamchi prinsipli)
$\Phi=\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ va $\Phi^*=\{f_1^*,f_2^*,\dots,f_m^*\}$ - bazislar bo'lsin. U holda, agar F formula Φ bazisda f funksiyani ifodalasa, unda F formuladan f_i ni uni ikkilamchi f_i^* funksiyaga almashtirish natijasida hosil qilingan F* formula Φ bazisda f* funksiyani ifodalaydi, ya'ni

$$f=func[\Phi]u\Rightarrow f^*=funcF^*[\Phi^*], bu\ yerda\ F^*[\Phi^*]=F[\Phi]\{f_i^*|f_i\}_{i=1}^m$$

9.4. Formulalar. Formulalarning tengkuchliligi

Ta'rif 1. To'g'ri tuzilgan murakkab mulohazaga **formula** deyiladi. Formulalar grek harflari bilan belgilanadi: α, β, γ, δ, ….

Agar A_1, A_2, …, A_n mulohazalar α formulada qatnashadigan barcha mulohazalar bo'lsa, $\alpha=\alpha(A_1, A_2, \dots, A_n)$ kabi belgilanadi.

Misol 1. a) $\alpha(A)=\neg A$;
b) $\beta(A, B, C)=A\&B\rightarrow C$;
c) $\gamma(A, B)=A\&B \vee \neg A\&\neg B)$

bunda A, B, C, … sodda mulohazalar **argument** yoki **mantiqiy o'zgaruvchilar**, α, β, γ, … formulalar esa **funktsiya** deb ham yuritiladi.

Formulaning to'g'ri tuzilgan bo'lishida qavslarning o'rni juda muhim. Mantiqda ham xuddi algebra va arifmetikadagi singari qavslar amallar tartibini belgilab beradi.

Formulalarda qavslarni kamaytirish maqsadida amallarning bajarilish tartibi quyidagicha kelishib olingan. Agar formulada qavslar bo`lmasa,

birinchi inkor amali - ¬,
ikkinchi kon`yunktsiya - &,
uchinchi bo'lib diz`yunktsiya - ∨,
undan so'ng implikatsiya - → va
oxirida ekvivalentlik - ~ amali bajariladi.

Agar mulohazada bir xil amal qatnashgan bo`lsa, u holda ularni tartibi bilan ketma-ket bajariladi: $A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow D=\left(\left(\left(A\rightarrow B\right)\rightarrow C\right)\rightarrow D\right)$.

Tashqi qavslar qo`yilmaydi. Shuning uchun ham $A\rightarrow B$ mulohazani $A\leftrightarrow(B\wedge C)$ ko`rinishda yozish mumkin.

Kon`yunktsiya amali diz`yunktsiyaga qaraganda kuchliroq bog`lovchi hisoblanadi, ya`ni $A\vee B\wedge C=A\vee(B\wedge C)$.

Diz`yunktsiya implikatsiyaga qaraganda kuchliroq bog`laydi, shuning uchun ham quyidagi tenglik o`rinli:

$$A\wedge B\vee C\rightarrow D=\left(\left(A\wedge B\right)\vee C\right)\rightarrow D.$$

Implikatsiya ekvivalentlikka qaraganda kuchliroq, ya`ni

$$A\leftrightarrow B\rightarrow C=A\leftrightarrow(B\rightarrow C).$$

Misol 3. $A \to \overline{B \vee C} \leftrightarrow C \leftrightarrow \overline{A} \vee B \to C \cdot \overline{A} \vee B \to A =$

$$= A \to \overline{B \vee C} \leftrightarrow \overline{A} \vee B \to \left(\left(C \cdot \overline{A}\right) \vee B\right) \to A =$$

$$= A \to \overline{B \vee C} \leftrightarrow \left(\overline{A} \vee B\right) \to \left(\left(C \cdot \overline{A}\right) \vee B\right) \to A =$$

$$= \left(A \to \overline{B \vee C}\right) \leftrightarrow \left(\left(\overline{A} \vee B\right) \to \left(\left(C \cdot \overline{A}\right) \vee B\right)\right) \to A =$$

$$= \left(\left(A \to \overline{B \vee C}\right) \leftrightarrow \left(\left(\overline{A} \vee B\right) \to \left(\left(C \cdot \overline{A}\right) \vee B\right)\right) \to A\right).$$

Ta'rif 2. Argumenti va funksiya qiymati 0 yoki 1 qiymatni qabul qiluvchi n ta o'zgaruvchi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ga bog'liq bo'lgan har qanday $\alpha = \alpha(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ funksiya **Bul funksiyasi** deyiladi.

Ta'rif 3. $\alpha(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ formulaning **mantiqiy imkoniyati** deb, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o'zgaruvchilarning bo'lishi mumkin bo'lgan barcha rosrlik qiymarlariga aytiladi.

Ta'rif 4. α formulaning barcha mantiqiy imkoniyatlarini o'z ichiga olgan jadvalga α formulaning **mantiqiy imkoniyatlari jadvali** deyiladi.

Teorema 1. n ta o`zgaruvchi qatnashgan formulaning 0 va 1 qiymatlarni qabul qiluvchi mumkin bo`lgan manrtiqiy imkoniyatlari soni 2^n ga teng.

Isboti: Ushbu sonni I_n ko`rinishida belgilab va $I_n = 2^n$ ekanligini isbotlaymiz.

Aytaylik, n=1 bo`lsin. Bir o`zgaruvchili 0 va 1 qiymatlarni qabul qiluvchi formulaning barcha mumkin bo`lgan manrtiqiy imkoniyatlari soni 2 ta, ya`ni 0 va 1. Bundan $I_1 = 2^1$ kelib chiqadi.

Matematik induktsiya qonunidan foydalanib, n=2, n=3 da, … , n=k da to`g`ri deb faraz qilib, n=k+1 da to`g`riligini, ya`ni $I_{k+1} = 2^{k+1}$ tenglik to`g`riligini isbotlaymiz.

Haqiqatan, qandaydir k elementli formula $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ qiymatlarni qabul qilsin. U holda bu qiymatlarga 0 va 1 ni kiritish bilan 2 ta k+1 uzunlikdagi qiymatlarni qabul qilish mumkin, ya'ni $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, 0)$ va $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, 1)$.

Demak, k+1 ta elementdan iborat formulaning mantiqiy imkoniyatlari soni *k* elementli formula mantiqiy imkoniyatlaridan 2 marta ko`p, ya`ni $I_{k+1} = 2 \cdot I_k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Teorema isbotlandi.

Ta'rif 5. Agar α va β formulalar uchun umumiy bo'lgan mantiqiy imkoniyatlarda α va β bir xil qiymat qabul qilsa, u holda α va β formulalar **teng kuchli** deyiladi va **α≡β** kabi belgilanadi.

Boshqacha aytganda, agarda formulalarning rostlik jadvallari mos bo'lsa, ular teng kuchli bo`ladi.

Ta'rif 6. Agar barcha mantiqiy imkoniyatlarda α formula faqat 1 ga teng qiymat qabul qilsa, α formula **ayniy haqiqat** yoki **tavtologiya** deyiladi va α≡1 yoki |=α kabi belgilanadi.

n ta o`zgaruvchi qatnashgan formulaning mumkin bo`lgan barcha mantiqiy imkoniyatlarini yozish uchun qabul qilingan tartib mavjud. Bu ketma-ketlik

(0,0,..,0,0) dan boshlanadi. Har bir keyingi qatorda ikkilik sanoq sistemasida oldingi qatordagi qiymatlarga 1 ni qo`shamiz va nihoyat hamma qiymatlar 1 lardan iborat bo`lganda ishni tugatamiz: (1,1,..,1,1).

Ikkilik sanoq sistemasida qo`shish qoidasini eslatib o`tamiz:

$$0+0=0,$$
$$0+1=1+0=1,$$
$$1+1=10.$$

Agar o’zgaruvchilar soni 3 ta yoki 4 ta bo’lsa, u holda mos ravishda 8 ta yoki 16 ta qator hosil bo’ladi: n=3 bo`lsa n=4 bo`lsa

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

A	B	C	D
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Misol 2. $\alpha(A, B) = \neg(A\&B) \to (\neg A \lor \neg B)$ formulaning tavtologiya bo’lish yoki bo’lmasligini rostlik jadvalini tuzib tekshirib ko’rish mumkin:

A	**B**	$\neg(A\&B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \lor \neg B$	$\alpha(A, B) = \neg(A\&B) \to (\neg A \lor \neg B)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1

Teorema 2. Agar α va $\alpha \to \beta$ formulalar tavtologiya bo’lsa, u holda β ham tavtologiya bo’ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilish yo’li bilan isbotlaymiz, ya`ni β tavtologiya bo’lmasin, u holda β ning barcha qiymatlari 0 bo’ladi. Lekin α tavtologiya bo’lgani uchun har doim 1 qiymat qabul qiladi. Bundan $\alpha \to \beta = 0$ ekenligi kelib chiqadi, bu esa $\alpha \to \beta$ tavtologiya degan teorema shartiga zid. Biz qarama – qarshilikka duch keldik. Demak, β tavtologiya bo'lar ekan. Teorema isbotlandi.

Ta'rif 7. Agar barcha mantiqiy imkoniyatlarda α formula faqat 0 ga teng qiymat qabul qilsa, α formula **ayniy yolg'on** yoki **ziddiyat** deyiladi va α≡0 kabi belgilanadi.

Misol 3. α(A)= ⌐A~A formulaning ziddiyat ekanligini rostlik jadvalini tuzib tekshirib ko'ramiz:

A	⌐A	α(A)= ⌐A~A
0	1	0
1	0	0

Nazorat uchun savollar:

1. Predikat deb nimaga aytiladi?
2. Mavjudlik kvantorini tushuntiring.
3. Umumiylik kvantorini qanday tushutirish mumkin?
4. Umumiylik va mavjudlik kvantorlarining xossalarini aytib bering.
5. Qanday shart bajarilsa formulalar teng kuchli bo'ladi?
6. Qanday shart bajarilganda formulaga tavtologiya deyiladi?
7. Qanday shart bajarilganda formulaga ziddiyat deyiladi?
8. Rostlik jadvali ta'rifini keltiring.
9. Agar α va α→ β formulalar tavtologiya bo'lsa, u holda β ham tavtologiya bo'lishini isbotlang.
10. Tavtologiyaga misol keltiring.
11. Ziddiyatga misol keltiring.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. P(x)={$x^2+1=0$, x-haqiqiy son} bo'lsa, (∃x)P(x) predikatni so'z bilan ifodalang va rostligini tekshiring.

2. P(y)={$y^2=25$, y - butun son} mulohaza uchun (∃y)P(y) ni ifodalang va rostligini tekshiring.