

4-MA'RUZA. Munosabatlar. Binar munosabatlar va ularning matritsasi. Munosabatlar turlari. Ekvivalent munosabatlar(4 soat).

REJA

1. Munosabat tushunchasi. Unar munosabatlar.
2. Binar munosabatlar va ularning matritsasi.
3. Munosabatlar ustida amallar.Munosabatlar kompozitsiyasi.
4. Refleksivlik. Simmetriklik. Tranzitivlik. Antisimmetriklik.
5. Ekvivalent munosabatlar.
6. Faktor to'plam tushunchasi.

Kalit so'zlar: *Munosabat, unar munosabatlar, binar munosabatlar, kompozitsiya, refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik, antisimmetriklik, ekvivalent munosabatlar, faktor to'plam.*

4.1. Munosabat tushunchasi. Unar munosabatlar.

Turmushda ikki inson, aytaylik Barno va Nargizaning qarindoshligi haqida gapirganda shuni nazarda tutiladiki, shunday ikkita oila mavjud, Barno va Nargizaning shu oilalarga qandaydir aloqasi bor. Tartiblangan (Barno, Nargiza) juftligi boshqa tartiblangan kishilar juftligidan shunisi bilan farq qiladiki, ularning orasida opa-singillik yoki ona-qizlik, jiyanlik kabi munosabatlar bo'lishi mumkin.

Diskret matematikada ham dekart ko'paytmaning barcha tartiblangan juftliklari orasidan o'zaro qandaydir "qarindoshlik" munosabatlariga ega bo'lgan juftliklarni ajratib ko'rsatish mumkin. Ixtiyoriy ikki to'plamning elementlari orasidagi munosabatlar uchun binar munosabat tushunchasini kiritamiz. Bu tushuncha matematika kabi informatikada ham ko'p uchraydi. Bir nechta to'plam elementlari orasidagi munosabat ma'lumotlar jadvali shaklida beriladi. Ushbu bob tadbiqini ma'lumotlar bazasini boshqarish tizimini tasvirlashda ishlatiladigan n – ar munosabatlarda ko'rish mumkin.

Ta'rif . Agar $P \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ n o'rinli munosabatda $n=1$ bo'lsa, P munosabat A_1 to'plamning qism to'plami bo'ladi va **unar munosabat** (bir o'rinli munosabat) yoki **xossa** deyiladi

Ba'zan n -ar munosabat iborasi o'rniga **n o'rinli munosabat** iborasi qo'llaniladi. Agar munosabat bir o'rinli bo'lsa, u holda u **unar munosabat**, ikki o'rinli bo'lganda esa **binar munosabat** deb ataladi. Unar munosabat **xossa (xususiyat)** deb ham yuritiladi. Adabiyotda, ko'pincha, 3-ar munosabat **ternar munosabat** deb nomlanadi.

4.2.Binar munosabatlar va ularning matritsasi.

1. Binar munosabat. Diskret matematikada fundamental tushun chalardan biri bo'lgan **munosabat** tushunchasi predmetlar (narsalar) va tushunchalar orasidagi aloqani ifodalaydi. Quyidagi to'liqsiz gaplar munosabatlarga misol bo'la oladi. Odatda, munosabat tushunchasi to'plamlar nazariyasi nuqtai nazaridan turib o'rganiladi. Munosabat tushunchasiga aniqlik kiritish uchun **tartiblangan juftlik** tushunchasini o'rganamiz.

1- t a ' r i f . *M a'lum tartibda joylashgan ikki predmetdan tuzilga kortej*

tartiblangan juftlik deb ataladi. Odatda tartiblangan juftlik quyidagi xususiyatlarga ega deb faraz qilinadi:

1) ixtiyoriy x va y predmetlar uchun $\langle x, y \rangle$ kabi belgilanadigan muayyan obyekt mavjud bo'lib, har bir x va y predmetlarga yagona tartiblangan $\langle x, y \rangle$ juftlik mos keladi ($\langle x, y \rangle$ yozuv " x va y ning tartiblangan juftligi" deb o'qiladi);
 2) agar ikkita $\langle x, y \rangle$ va $\langle u, v \rangle$ tartiblangan juftlik uchun $x = u$ va $y = v$ bo'lsa, u holda $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ bo'ladi. $\langle x, y \rangle$ tartiblangan juftlik $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ko'rinishdagi to'plamdir, ya'ni u shunday ikki elementli to'plamki, uning bir elementi $\{x, y\}$ tartibsiz juftlikdan iborat, boshqa $\{x\}$ elementi esa, shu tartibsiz juftlikning qaysi hadi birinchi hisoblanishi kerakligini ko'rsatadi. Tartiblangan juftliklardan birgalikda **tartiblangan juftliklar to'plamini** tashkil etishadi.

2 - t a ' r i f . $\langle x, y \rangle$ **tartiblangan juftlikdagi x uning birinchi koordinatasi, y esa ikkinchi koordinatasi deb ataladi.** Tartiblangan juftliklar atamasi asosida **tartiblangan n -liklarni** aniqlash mumkin. x, y va z predmetlarning tartiblangan uchligi $\langle x, y, z \rangle$ quyidagi tartiblangan juftliklar shaklida aniqlanadi: $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle$. Xuddi shu kabi x, x_2, \dots, x_n predmetlarning tartiblangan n -ligi $\langle x, x_2, \dots, x_n \rangle$, ta'rifga asosan, $\langle x, x_2, \dots, x_n \rangle$ tarzda aniqlanadi. Matematik mantiqda **n -ar munosabat** tartiblangan n -liklar to'plami sifatida aniqlanadi.

4.3. Munosabatlar ustida amallar. Munosabatlar kompozitsiyasi.

A va B ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin, u holda $\langle x, y \rangle$ tartiblashtirilgan juftlik

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle, x \in A, y \in B \}$$

A va B to'plamlarning dekart ko'paytmasi deyiladi.

Agar $A=B$ bo'lsa, u holda $A \times A = A^2$ - dekart kvadrat deyiladi.

Agar A_1, A_2, \dots, A_n n ta to'plam tizimi berilgan bo'lsa, u holda ularning Dekart ko'paytmasi deb, tartiblashtirilgan $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ n taliklardan iborat to'plamga aytiladi.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n \}$$

Ta'rif 1. A_1, A_2, \dots, A_n to'plamlarda aniqlangan **n o'rinli munosabat** yoki **n o'rinli R -predikat** deb, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ dekart ko'paytmaning ixtiyoriy qism to'plamiga aytiladi. Boshqacha so'z bilan aytganda x_1, x_2, \dots, x_n elementlar ($x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$) **R** munosabat bilan boglangan deyiladi va $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kabi bylgilanadi, ya'ni $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

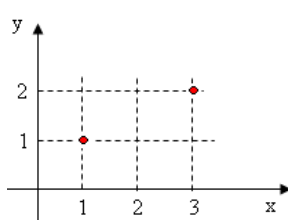
Ta'rif 2. Agar $n=1$ bo'lsa, **R** munosabat A_1 to'plamning qism to'plami bo'ladi va **unar munosabat** yoki **xossa** deyiladi.

Eng ko'p uchraydigan munosabat ikki o'rinli munosabat ($n=2$) hisoblanadi, bunday hollarda ikki o'rinli munosabat **binar munosabat** yoki **moslik** deyiladi.

Ta'rif 3. Dekart ko'paytmaning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan qism to'plamiga **munosabat** deyiladi.

R -munosabat bo'lsin, u holda $R \subset A \times B$ bo'ladi. $\langle x, y \rangle \in R$ yozuv o'rniga ko'pincha $x R y$ yozishadi va " x element y ga nisbatan R munosabatda" deb o'qiladi.

Misol 1. $A = \{1, 2, 3\}$ va $B = \{1, 2\}$ bo'lsin, u holda



$$A \times B = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$$

Munosabat $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$ ko'rinishda bo'lsin, bu munosabatga turlicha mazmun berish mumkin. Masalan 1) R ning elementlari biror bir egri chiziq oxirlari deyishimiz mumkin. 2) R munosabat bilan aniqlangan nuqtalar qizil rang bilan bo'yalgan. $x R y$: x va y qizil nuqtalar koordinatalari.

Turli tabiatli ob'yektlar o'zaro munosabatga kirishishlari mumkin.

Misol 2. A – to'plam elementlari kitob nashriyotlari nomlari bo'lsin.

B - to'plam elementlari ushbu kitoblarni sotadigan firmalar bo'lsin, u holda R -munosabatga nashriyot va firmalar o'rtasida tuzilgan shartnomalar to'plami deb, ma'no berish mumkin.

Ta'rif 4. $R \subset A^n$ munosabatga A to'plamdagi n o'rinli munosabat (predikat) deyiladi.

Ta'rif 5. Ixtiyoriy A to'plam uchun $id_A = \{ \langle x, x \rangle : x \in A \}$ munosabat ayniy munosabat deyiladi. $U_A = A^2 = A \times A$ munosabatga **universal munosabat** yoki **dekart kvadrat** deyiladi.

id_A ga diagonal, U_A ga to'liq munosabat ham deyishadi.

Ta'rif 6. R -munosabatning **chap sohasi** yoki **aniqlanish sohasi** D_l deb, R -munosabatga tegishli juftliklar birinchi elementlaridan iborat to'plamga aytiladi.

$$D_l = \{ \exists x : (x, y) \in R, y \in B \}$$

Ta'rif 7. R -munosabatning **o'ng sohasi** yoki **qiymatlar sohasi** D_r deb, R -munosabatga tegishli juftliklarning ikkinchi elementlar to'plamiga aytiladi.

$$D_r = \{ \exists y : (x, y) \in R, x \in A \}$$

Geometrik ma'noda D_l - R -munosabatning X to'plamga proyeksiyasi, D_r - R -munosabatning Y toplamdagi proyeksiyasi hisoblanadi.

Ta'rif 8. $D_l \cup D_r$ yigindiga **R -munosabat maydoni** deyiladi va **$F(R)$** kabi belgilanadi.

R -munosabatning chap va o'ng sohalaridagi bir xil qiymatga ega bo'lgan elementlari, ikkala tomonga ham tegishli deb hisoblanadi. Shuning uchun ham xususan A^2 dekart kvadrat uchun **$F(R) = A$** .

Ta'rif 9. $R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle : (x, y) \in R \}$ to'plamga R munosabatga **teskari munosabat** deyiladi.

Ta'rif 10. A to'plamning R munosabatga nisbatan **tasviri** deb, $R(A) = \{ y : (x, y) \in R, \text{biron bir } x \in A \}$ to'plamga aytiladi.

Ta'rif 11. A to'plamning R munosabatga nisbatan **asli** deb, $R^{-1}(A)$ to'plamga yoki A to'plamning R munosabatga nisbatan tasviriga aytiladi.

Misol 3. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ to'plamda

$$R = \{ \langle x, y \rangle : x, y \in A, x \text{ element } y \text{ ni boladi va } x \leq 3 \}$$

u holda $R = \{ \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle \}$

$D_l = \{2, 3\}$ - aniqlanish sohasi. $D_r = \{2, 3, 4, 6, 8\}$ - qiymatlar sohasi.

$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (3, 3), (6, 3)\}$ – R ga teskari munosabat.
 $R(A) = \{y : (x, y) \in R = \{(3, 3), (3, 6)\}\} = \{3, 6\}$ – A ning R ga nisbatan tasviri,
 $R^{-1}(A) = \{x : (x, y) \in R = \{(3, 3), (3, 6)\}\} = \{3\}$

Ta’rif 12. $R_1 \subset A \times B$ va $R_2 \subset B \times C$ binar munosabatlarning **kopaytmasi** yoki **kompozitsiyasi** deb,

$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) : x \in A, y \in C \text{ va } \exists z \in B \text{ topiladiki } (x, z) \in R_1 \text{ va } (z, y) \in R_2\}$ to’plamga aytiladi.

Teorema. Ixtiyoriy P, Q, R binar munosabatlar uchun quyidagi xossalar o’rinli.

$$1) (P^{-1})^{-1} = P \quad 2) (P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1} \quad 3) (P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$$

4.4. Refleksivlik. Simmetriklik. Tranzitivlik. Antisimmetriklik.

T a ’ r i f . X to’plamning ixtiyoriy x elementi uchun: agar $x p x$ bo’lsa, u holda p munosabat X to’plamdagi **refleksiv munosabat**; agar $x p y$ dan $y p x$ kelib chiqsa, u holda p munosabat **simmetrik munosabat**; agar $x p y$ va $y p z$ dan $x p z$ kelib chiqsa, u holda p munosabat **tranzitiv munosabat** deb ataladi.

- 1) refleksivlik sharti: $\forall x \in A$ uchun $x R x$,
- 2) simmetriklik sharti: $x R y \Rightarrow y R x$,
- 3) tranzitivlik sharti: agar $x R y$ va $y R z$ dan $x R z$ ekanligi kelib chiqsa, $\forall x, y, z \in R$ uchun.

Misol 4. 1) “=” munosabati ekvivalentlik munosabati bo’ladi.

Refleksivlik sharti : $x=x$

Simmetriklik sharti: $x=y \Rightarrow y=x$

Tranzitivlik sharti: $x=y, y=z \Rightarrow x=z$

2) Qarindoshlik munosabati ekvivalentlik munosabati bo’ladi.

Refleksivlik sharti: $x R x$ - o’zi-o’ziga qarindosh.

Simmetriklik sharti : $x R y \Rightarrow y R x$

Tranzitivlik sharti : $x R y, y R z \Rightarrow x R z$.

3) “Yaxshi ko’rish” munosabati ekvivalent emas.

Refleksivlik sharti : $x R x$ o’zini-o’zi yaxshi ko’radi.

Simmetriklik sharti : $x R y$ bo’lsa, $y R x$ bo’lishi shart emas.

Tranzitivlik sharti : $x R y, y R z$ ekanligidan $x R z$ kelib chiqmaydi.

4.5. Ekvivalent munosabatlar.

Muhim va juda ko’p uchraydigan munosabat turi bo’lib, **ekvivalentlik munosabati** hisoblanadi.

Ta’rif 5. Quyidagi uchta shartni bajaradigan har qanday R munosabat **ekvivalentlik munosabati** deyiladi:

- 1) refleksivlik sharti: $\forall x \in A$ uchun $x R x$,
- 2) simmetriklik sharti: $x R y \Rightarrow y R x$,
- 3) tranzitivlik sharti: agar $x R y$ va $y R z$ dan $x R z$ ekanligi kelib chiqsa, $\forall x, y, z \in R$ uchun.

Misol 4. 1) “=” munosabati ekvivalentlik munosabati bo’ladi.

Refleksivlik sharti : $x=x$

Simmetriklik sharti: $x=y \Rightarrow y=x$

Tranzitivlik sharti: $x=y, y=z \Rightarrow x=z$

2) Qarindoshlik munosabati ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

Refleksivlik sharti: $x R x$ - o'zi-o'ziga qarindosh.

Simmetriklik sharti : $x R y \Rightarrow y R x$

Tranzitivlik sharti : $x R y, y R z \Rightarrow x R z$.

3) "Yaxshi ko'rish" munosabati ekvivalent emas.

Refleksivlik sharti : $x R x$ o'zini-o'zi yaxshi ko'radi.

Simmetriklik sharti : $x R y$ bo'lsa, $y R x$ bo'lishi shart emas.

Tranzitivlik sharti : $x R y, y R z$ ekanligidan $x R z$ kelib chiqmaydi.

4.6. Faktor to'plam tushunchasi.

Agar $\theta \leq A^2$ ekvivalentlik munosabati uchun istalgan $n \in \omega$, ixtiyoriy n o'rinli $f \in \Sigma$ simvol uchun, ixtiyoriy $(a_1, a_2 \dots a_n)$ va $(b_1, b_2 \dots b_n) \in A^n$ majmualar uchun $a_1 \theta b_1, a_2 \theta b_2, \dots, a_n \theta b_n$ bajariladigan $f(a_1, a_2 \dots a_n) \theta f(b_1, b_2 \dots b_n)$ bajarilishidan kelib chiqsa, θ ekvivalent munosabatga $U = \langle A, \Sigma \rangle$ algebrada kongruensiya deb ataladi.

Bu barcha amallarni θ ekvivalentlik munosabati bilan moslanganligini bildiradi.

Masalan, qo'shish amali uchun quyidagicha ifodalanadi: Istalgan $x, y \in A$ elementlar uchun, ixtiyoriy $a \in \theta(x), b \in \theta(y)$, $a+b$ element $\theta(x+y)$ sinfga tegishli bo'ladi.

A to'plamning θ kongruensiyasi bo'yicha faktor to'plamini qaraymiz:

$$A/\theta = \{\theta(x)/x \in A\}$$

bu to'plamda Σ signaturali algebrani aniqlaymiz. A algebraning konstanti C ga $\theta(c)$ elementni mos qo'yamiz, bu element A/θ to'plamda constant simvol C ga mos keladi. Agar f n -o'rinli Σ dagi simvol bo'lsa, u holda A/θ to'plamda f funksiyani quyidagi qoida bo'yicha aniqlaymiz:

$$f(\theta(x_1), \theta(x_2), \dots, \theta(x_n)) = \theta(f(x_1, x_2 \dots x_n)).$$

Ixtiyoriy $x_1, x_2 \dots x_n \in A$ elementlar uchun bu ta'rifni korrektiligi ya'ni ekvivalentlik sinfidagi qaysi element olinganiga bog'liq emasligiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatdan ham, agar $\theta(x_i) = \theta(y_i), i = 1, 2 \dots n$, bo'lsa, u holda $x_i \theta y_i$ bo'ladi, bundan kongruentlik xossasiga ko'ra $f(x_1, x_2 \dots x_n) \theta f(y_1, y_2 \dots y_n)$, ya'ni $\theta(f(x_1, x_2 \dots x_n)) = \theta(f(y_1, y_2 \dots y_n))$ bajariladi.

Bunday hosil qilingan $U/\theta = \langle A/\theta, \Sigma \rangle$ algebraga U algebraning θ kongruensiya bo'yicha faktor algebrasi deb ataladi.

$x \in A$ elementga $\theta(x)$ sinfni mos qo'yuvchi $A \rightarrow A/\theta$ akslantirish U algebra va U/θ algebradagi epimorfizm bo'ladi. Bu epimorfizmga tabiiy gomomorfizm deb ataladi.

Agar $\varphi: U \rightarrow B$ gomomorfizm bo'lsa, u holda $\text{Ker } \varphi = \{(a, a') \mid \varphi(a')\}$ to'plam U algebrada kongruensiya bo'ladi, bu to'plamni φ gomomorfizmning yadrosi deb ataladi.

Algebraning gomomorf obrazi (aksi) gomomorfizm yadrosi bo'yicha faktor algebrasi izomorfliigi haqidagi teoremani keltiramiz.

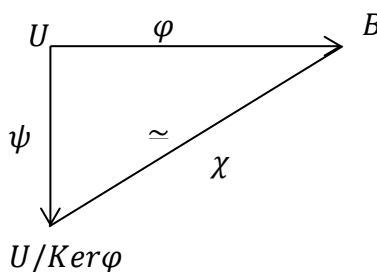
Teorema. (gomomorfizm haqidagi teorema) Agar $\varphi: U \rightarrow B$ epimorfizm va $\varphi: U \rightarrow U/\text{Ker}\varphi$ tabiiy gomomorfizm bo'lsa, u holda $\varphi_0\chi = \psi$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\varphi: U \rightarrow U/\text{Ker}\varphi$

izomorfizm mavjud bo'ladi.

Isboti. $a \in A$ uchun $\chi(b) = \psi(a)$ deb olamiz, bunda $b = \varphi(a)$. Agar $b = \varphi(a')$ bo'lsa, u holda $(a, a') \in \text{Ker}\varphi$, bundan $\psi(a) = \psi(a')$ tenglik kelib chiqadi, ya'ni χ akslantirish korrekt aniqlangan. $\varphi_0\chi = \psi$ tenglikning bajarilishi tushunarli, bundan uning syureksiya ekanligi kelib chiqadi. χ akslantirishning gomomorfizm bo'lishi to'g'ridan to'g'ri tekshiriladi. Agar $\chi(b) = \chi(b')$ bo'lsa, u holda $\psi(a) = \psi(a')$, bunda $b = \psi(a)$, $b' = \psi(a')$. Bundan

$$(a, a') \in \text{Ker}\varphi,$$

ya'ni $b=b'$ bo'ladi, bu esa χ akslantirishning o'zaro bir qiymatli ekanligini isbotlaydi. Signaturaning funksional ekanligi va χ^{-1} akslantirishning mavjudligidan χ ning izomorfizm ekanligi kelib chiqadi. Teoremada keltirilgan φ, ψ va χ akslantirishlar quyidagi diagrammada keltirilgan:



1-rasm

Nazorat savollari

1. Dekart ko'paytma ta'rifini keltiring? Misol keltiring?
2. n –o'rinli munosabat ta'rifini keltiring?
3. Munosabatlarning aniqlanish, qiymatlar sohasiga ta'rifini keltiring?
4. A to'plamning R munosabatga nisbatan **asli** deb nimaga aytiladi?
5. A to'plamning R munosabatga nisbatan **tasviri** deb nimaga aytiladi?
6. Munosabatlarning kompozitsiyasi va uning xossalari?
7. Refleksivlik sharti?
8. Simmetriklik sharti?
9. Tranzitivlik sharti?
10. Ekvivalent munosabat sharti?

TESTLAR

1. Qanday to'plam **BO'SH** to'plam deyiladi?
 - A) Faqat bitta NOL elementi bor to'plam
 - B) Birorta ham elementi bo'lmagan to'plam to'plami
 - C) Bo'sh to'plamdan Bitta elementi bor to'plamning qism to'plamiga
 - D) Birorta ham elementi bo'lmagan to'plam
 - E) NOL elementi bor to'plamning qism to'plami
2. A to'plam n ta elementdan iborat bo'lsa, uning barcha qism to'plamlaridan iborat to'plam nechta elementdan iborat bo'ladi?

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu munosabat xossalari to'liq ko'rsatilgan javob ko'rsatilsin.

- A) Simmetrik B) Refleksiv C) Ekvivalentlik D) Tranzitiv E) Refleksiv va Simmetrik

11. $A = \{ a, b, c, d, e \}$ to'plamning dekart kvadratida R munosabat quyidagi matrisa bilan berilgan

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Bu munosabat xossalari to'liq ko'rsatilgan javob ko'rsatilsin.

- A) Simmetrik B) Tranzitiv C) Refleksiv D) Refleksiv va Simmetrik E) Simmetrik va tranzitiv