

**3-AMALIY MASHGULOT. Munosabatlarning turlarini aniqlash.**  
**Refleksivlik. Simmetriklik. Tranzitivlik. Antisimmetriklik. Ekvivalent**  
**munosabatlarni aniqlashga doir misollar yechish**

**Reja:**

1. Munosabatlarning turlari bo'yicha tushunshalar
2. Mustaqil bajarish uchun masala va topshiriqlar
  - 2.1. Munosabatlarning turlarini aniqlashga doir topshiriqlar
  - 2.2. Ekvivalent munosabatlarni aniqlashga doir topshiriqlar

**1. Munosabatlarning turlari bo'yicha tushunshalar**

Binar munosabatlarda  $(x; y) \in P$  o'rniga  $x P y$  yozuv ham ishlatiladi.

**3.1-Ta'rif 1.** Agar  $X$  to'plamdagi ixtiyoriy  $x$  element to'g'risida  $u$  o'z-o'zi bilan  $P$  munosabatda deyish mumkin bo'lsa,  $X$  to'plamdagi munosabat **refleksiv munosabat** deyiladi va  $x P x$  ko'rinishida belgilanadi.

**3.2-Ta'rif.** Agar  $X$  to'plamdagi  $x$  elementning  $y$  element bilan  $P$  munosabatda bo'lishidan  $y$  elementning ham  $x$  element bilan  $P$  munosabatda bo'lishi kelib chiqsa,  $X$  to'plamdagi  $P$  munosabat **simmetrik munosabat** deyiladi va  $x P y \Rightarrow y P x$  ko'rinishida belgilanadi.

**3.3-Ta'rif .** Agar  $X$  to'plamdagi  $x$  elementning  $y$  element bilan  $P$  munosabatda bo'lishi va  $y$  elementning  $z$  element bilan  $P$  munosabatda bo'lishidan  $x$  elementning  $z$  element bilan  $P$  munosabatda bo'lishi kelib chiqsa,  $X$  to'plamdagi  $P$  munosabat **tranzitiv munosabat** deyiladi va  $x P y, y P z \Rightarrow x P z$  ko'rinishida belgilanadi.

**3.4-Ta'rif.** Agar  $X$  to'plamning turli  $x$  va  $y$  elementlari uchun  $x$  elementning  $y$  element bilan  $P$  munosabatda bo'lishidan  $y$  elementning  $x$  element bilan  $P$  munosabatda bo'lmasligi kelib chiqsa,  $X$  to'plamdagi  $P$  munosabat **antisimmetrik munosabat** deyiladi va  $x P y \Rightarrow y \bar{P} x$  ko'rinishida belgilanadi.

**3.5-Ta'rif.**  $P \subseteq A \times A$  binar munosabat ham refleksivlik, ham simmetriklik, ham tranzitivlik shartlarini qanoatlantirsa,  $P$  munosabatga **ekvivalentlik munosabati** deyiladi, ya'ni  $P$  uchun

$$1) \forall x \in A \text{ uchun } xPx;$$

$$2) xPy \Rightarrow yPx;$$

$$3) \forall (x, y) \in P, (y, z) \in P \text{ uchun } xPy \text{ va } yPz \text{ dan } xPz \text{ kelib chiqsa.}$$

**3.1-Misol.** 1) “=” munosabati ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

2) Qarindoshlik munosabati ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

3) “Sevgi” munosabati ekvivalent munosabat bo'la olmaydi.

**3.2-Misol.**  $A = \mathbb{Z}$  butun sonlar to'plami va unda aniqlangan  $P \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  munosabat shunday  $x-y$  larki, ular 3 ga bo'linadi.

a)  $x-x=0$  soni 3 ga bo'linadi.

b)  $x-y$  ifoda 3 ga bo'linsa,  $y-x=-(x-y)$  ham 3 ga bo'linadi.

c)  $x-y$  ifoda 3 ga bo'linsa va  $y-z$  ifoda 3 ga bo'linsa, u holda  $(x-y)+(y-z)=x-z$  ham 3 ga bo'linadi.

Demak,  $P \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \mid x-y:3 \text{ ga bo'linadi}\}$  munosabat ekvivalentlik munosabati bo'lar ekan.

**3.6-Ta'rif.**  $x \in A$  elementning **ekvivalentlik sinfi** deb,  $E(x) = \{y / x \sim y\}$  to'plamga aytiladi.

**3.7-Ta'rif.**  $A$  to'plam elementlarining  $E$  ekvivalentlik bo'yicha ekvivalent sinflar to'plami **faktor – to'plam** deyiladi va  $A/E = \{E(x) / x \in A\}$  kabi belgilanadi.

**3.3-Misol.** Agar  $\{(a;b), (c;d)\} \in Q$  to'plam elementlari uchun  $a+d=b+c$  tenglik bajarilsa, u holda  $Q$  munosabat  $N \times N$  to'plamda ekvivalentlik munosabati bo'lini ko'rsating.

**Yechilishi:**

1) *Refleksivlik*: agar  $A$  to'plamda  $Q$  refleksivlik munosabati bo'lsa, u holda  $\forall x \in Q, (x; x) \in Q$ . Bizning misolda  $A$  to'plam o'rnida  $N \times N$  to'plam va  $x$  element

o'rnida  $(x;y)$  juftlik. Bunda  $N \times N$  to'plamda  $Q$  munosabat refleksiv bo'ladi, agarda  $\forall (x;y) \in Q, \{(x;y), (x;y)\} \in Q$ . Ta'rifga ko'ra,  $Q: a+d=b+c$ , lekin  $a+b=b+a$ , demak,  $Q$  - refleksiv munosabat.

2) *Simmetriklik*: agar  $\{(a;b), (c;d)\} \in Q$  bo'lsa, u holda  $\{(c;d), (a;b)\} \in Q$ ,  $a+d=b+c$  bundan  $c+b=d+a$ . Demak,  $Q$  - simmetrik munosabat.

3) *Tranzitivlik*: agar  $\{(a;b), (c;d)\} \in Q, \{(c;d), (f;g)\} \in Q$  bo'lsa, u holda  $\{(a;b), (f;g)\} \in Q$  bo'ladi, chunki  $a+d=b+c$  va  $c+g=d+f$ . U holda  $(a+d)+(c+g)=(b+c)+(d+f) \Rightarrow a+d+c+g=b+c+d+f \Rightarrow a+g=b+f$ , ya'ni  $Q$  - tranzitiv munosabat.

Demak,  $Q$  munosabat ham refleksiv, ham simmetrik, ham tranzitiv bo'lganligi uchun ekvivalent munosabat bo'ladi.

**3.8-Ta'rif.** Har bir elementi  $A$  to'plamning faqat va faqat bitta qism to'plamiga tegishli bo'lgan kesishmaydigan qism to'plamlar majmuasi  $A$  to'plamning **bo'laklari** deyiladi.

**3.1-Teorema.**  $A/E$  faktor-to'plam  $A$  to'plamning bo'lagi bo'ladi. Va aksincha, agar  $R=\{A_i\}$  -  $A$  to'plamning biror bo'lagi bo'lsa, u holda bu bo'lakka biror  $i$  va  $A_i$  dan olingan  $x;y$  elementlar uchun  $xEy$  qoida bo'yicha  $E$  ekvivalentlik munosabatini topish mumkin.

### **Munosabatning aniqlanish, qiymatlar sohalari.**

#### **Munosabatlar maydoni.**

Biror  $A$  va  $B$  to'plamlar hamda unda aniqlangan  $P \subseteq A \times B$  munosabat berilgan bo'lsin.

**3.9-Ta'rif.**  $P$  -munosabatning **chap sohasi** yoki **aniqlanish sohasi**  $D_l$  deb,  $P$  -munosabatga tegishli juftliklar birinchi elementlaridan iborat to'plamga aytiladi va  $D_l = \{\exists x: (x,y) \in P\}$  kabi belgilanadi.  $l$ - “left”, ya'ni “chap” so'zidan olingan.

**3.10-Ta'rif.**  $P$  -munosabatning **o'ng sohasi** yoki **qiymatlar sohasi**  $D_r$  deb,  $P$  -munosabatga tegishli juftliklarning ikkinchi elementlar to'plamiga aytiladi va  $D_r = \{\exists y: (x,y) \in P\}$  kabi belgilanadi.  $r$ - “right”, ya'ni “o'ng” so'zidan olingan.

Geometrik ma'noda  $D_l$  -  $P$  munosabatning  $X$  to'plamga proyeksiyasi,  $D_r$  -  $P$  munosabatning  $Y$  to'plamdagi proyeksiyasi hisoblanadi.

**3.11-Ta'rif 3.** Aniqlanish va qiymatlar sohalarining birlashmasi  $D_l \cup D_r$  ga  $P$  munosabat maydoni deyiladi va  $F(P)$  kabi belgilanadi.

$P$  munosabatning chap va o'ng sohalaridagi bir xil qiymatga ega bo'lgan elementlari, ikkala tomonga ham tegishli deb hisoblanadi, xususan  $A^2$  dekart kvadrat uchun  $F(P) = A$  bo'ladi.

**3.12-Ta'rif.**  $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$  to'plamga  $R$  munosabatga **teskari munosabat** deyiladi.

**3.3-Misol.**  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  to'plamda binar munosabat

$$R = \{(x, y) : x, y \in A, x \text{ element } y \text{ ni bo'ladi va } x \leq 3\}$$

shart bilan aniqlangan bo'lsin. U holda

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6)\};$$

$$D_l = \{2, 3\};$$

$$D_r = \{2, 3, 4, 6, 8\};$$

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (3, 3), (6, 3)\}.$$

## 2. Mustaqil yechish uchun masalalar

### 2.1. Munosabatlarning turlarini aniqlashga doir topshiriqlar

$A = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  to'plamlarda quyidagicha munosabatlar berilgan:

$$R_1 \subseteq A \times B \quad \text{va} \quad R_2 \subseteq B \times B = B^2 \text{ bo'lsa,}$$

- 1)  $R_1, R_2$  munosabatlarni grafik ko'rinishda ifodalang;
- 2)  $R_1, R_2$  munosabatlarning aniqlanish va qiymatlar sohalarini toping;
- 3)  $R_1, R_2, R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_2^2, R_2 \cap R_2^{-1}$  - munosabatlarning matritsasini toping;
- 4)  $R_2$  munosabatni refleksivlik, simmetriklik, antisimmetriklik, tranzitivlik xossalriga tekshirilsin.

#### 2.1.1.

$$R_1 = \{ \langle a; 3 \rangle, \langle b; 1 \rangle, \langle b; 3 \rangle, \langle c; 2 \rangle, \langle c; 4 \rangle, \langle d; 3 \rangle, \langle e; 1 \rangle, \langle e; 2 \rangle, \langle e; 3 \rangle, \langle e; 4 \rangle \},$$

$$R_2 = \{ \langle 1; 4 \rangle, \langle 2; 1 \rangle, \langle 2; 2 \rangle, \langle 2; 3 \rangle, \langle 3; 2 \rangle, \langle 3; 3 \rangle, \langle 4; 1 \rangle, \langle 4; 3 \rangle \}.$$





2.1.24.

$$R_1 = \{ \langle a;1 \rangle, \langle a;3 \rangle, \langle b;2 \rangle, \langle b;4 \rangle, \langle c;1 \rangle, \langle c;3 \rangle, \langle c;4 \rangle, \langle d;4 \rangle, \langle e;3 \rangle, \langle e;4 \rangle \},$$

$$R_2 = \{ \langle 1;1 \rangle, \langle 2;1 \rangle, \langle 2;4 \rangle, \langle 3;1 \rangle, \langle 3;2 \rangle, \langle 3;3 \rangle, \langle 3;4 \rangle, \langle 4;4 \rangle \}.$$

2.1.25.

$$R_1 = \{ \langle a;3 \rangle, \langle b;1 \rangle, \langle b;3 \rangle, \langle c;2 \rangle, \langle c;4 \rangle, \langle d;3 \rangle, \langle e;1 \rangle, \langle e;2 \rangle, \langle e;3 \rangle, \langle e;4 \rangle \},$$

$$R_2 = \{ \langle 1;4 \rangle, \langle 2;1 \rangle, \langle 2;2 \rangle, \langle 2;3 \rangle, \langle 3;2 \rangle, \langle 3;3 \rangle, \langle 4;1 \rangle, \langle 4;3 \rangle \}.$$

2.1.26.

$$R_1 = \{ \langle b;1 \rangle, \langle b;4 \rangle, \langle c;1 \rangle, \langle c;2 \rangle, \langle c;4 \rangle, \langle d;4 \rangle, \langle e;1 \rangle, \langle e;2 \rangle, \langle e;3 \rangle, \langle e;4 \rangle \},$$

$$R_2 = \{ \langle 1;1 \rangle, \langle 1;2 \rangle, \langle 1;3 \rangle, \langle 2;1 \rangle, \langle 2;4 \rangle, \langle 3;1 \rangle, \langle 3;4 \rangle, \langle 4;4 \rangle \}.$$

2.1.27.

$$R_1 = \{ \langle b;1 \rangle, \langle b;2 \rangle, \langle b;3 \rangle, \langle b;4 \rangle, \langle c;2 \rangle, \langle c;4 \rangle, \langle d;2 \rangle, \langle d;4 \rangle, \langle e;2 \rangle, \langle e;4 \rangle \},$$

$$R_2 = \{ \langle 2;1 \rangle, \langle 2;2 \rangle, \langle 2;3 \rangle, \langle 2;4 \rangle, \langle 3;2 \rangle, \langle 3;4 \rangle, \langle 4;2 \rangle, \langle 4;4 \rangle \}.$$

## 2.2. Ekvivalentlik munosabatiga doir topshiriqlar

2.2.1. Birdan farqli natural sonlar to'plami dekart kvadratida aniqlangan  $R=\{(x,y):$

$x$  va  $y$  lar birdan farqli umumiy bo'luvchiga ega} munosabat ekvivalent munosabat bo'ladimi?

2.2.2.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida simmetrik bo'lgan, refleksiv, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

2.2.3.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida tranzitiv bo'lgan, refleksiv, simmetrik bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

2.2.4.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida refleksiv, simmetrik bo'lgan, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

2.2.5. K-kalit so'zlar, P- web sahifalar to'plami bo'lsin, R munosabat ushbu to'plamlar dekart ko'paytmasida aniqlangan bo'lsin.  $(x,y)$  juftlik R munosabatga tegishli bo'lsin, agar  $x$  kalit so'z  $y$  web-sahifada bo'lsa. R munosabat ekvivalent munosabat bo'ladimi?

2.2.6.  $A=\{1,2,3,4\}$  to'plam dekart kvadratida refleksiv bo'lgan, simmetrik, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

2.2.7.  $A=\{1,2,3,4\}$  to'plam dekart kvadratida refleksiv, simmetrik, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

2.2.8.  $A=\{1,2,3,4\}$  to'plam dekart kvadratida ekvivalent munosabatga misol keltiring va isbotlang.

- 2.2.9. Birdan farqli natural sonlar to'plami dekart kvadratida aniqlangan  $R=\{(x,y):$   
 $x$  va  $y$  lar birdan farqli umumiy bo'luvchiga ega} munosabat ekvivalent  
munosabat bo'ladimi?
- 2.2.10.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida simmetrik bo'lgan, refleksiv, tranzitiv  
bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
- 2.2.11.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida tranzitiv bo'lgan, refleksiv, simmetrik  
bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
- 2.2.12.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida refleksiv, simmetrik bo'lgan, tranzitiv  
bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
- 2.2.13. K-kalit so'zlar, P- web sahifalar to'plami bo'lsin, R munosabat ushbu  
to'plamlar dekart ko'paytmasida aniqlangan bo'lsin.  $(x,y)$  juftlik R  
munosabatga tegishli bo'lsin, agar  $x$  kalit so'z  $y$  web-sahifada bo'lsa. R  
munosabat ekvivalent munosabat bo'ladimi?
- 2.2.14.  $A=\{1,2,3,4\}$  to'plam dekart kvadratida refleksiv bo'lgan, simmetrik,  
tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
- 2.2.15.  $A=\{1,2,3,4\}$  to'plam dekart kvadratida refleksiv, simmetrik, tranzitiv  
bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
- 2.2.16.  $A=\{1,2,3,4\}$  to'plam dekart kvadratida ekvivalent munosabatga misol  
keltiring va isbotlang.
- 2.2.17. Birdan farqli natural sonlar to'plami dekart kvadratida aniqlangan  $R=\{(x,y):$   
 $x$  va  $y$  lar birdan farqli umumiy bo'luvchiga ega} munosabat ekvivalent  
munosabat bo'ladimi?
- 2.2.18.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida simmetrik bo'lgan, refleksiv, tranzitiv  
bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
- 2.2.19.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida tranzitiv bo'lgan, refleksiv, simmetrik  
bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
- 2.2.20.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida refleksiv, simmetrik bo'lgan, tranzitiv  
bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
- 2.2.21. K-kalit so'zlar, P- web sahifalar to'plami bo'lsin, R munosabat ushbu  
to'plamlar dekart ko'paytmasida aniqlangan bo'lsin.  $(x,y)$  juftlik R



munosabatga tegishli bo'lsin, agar  $x$  kalit so'z  $y$  web-sahifada bo'lsa.  $R$  munosabat ekvivalent munosabat bo'ladimi?

2.2.22.  $A=\{1,2,3,4\}$  to'plam dekart kvadratida refleksiv bo'lgan, simmetrik, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

2.2.23.  $A=\{1,2,3,4\}$  to'plam dekart kvadratida refleksiv, simmetrik, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

2.2.24.  $A=\{1,2,3,4\}$  to'plam dekart kvadratida ekvivalent munosabatga misol keltiring va isbotlang.

2.2.25. Birdan farqli natural sonlar to'plami dekart kvadratida aniqlangan  $R=\{(x,y): x \text{ va } y \text{ lar birdan farqli umumiy bo'luvchiga ega}\}$  munosabat ekvivalent munosabat bo'ladimi?

2.2.26.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida simmetrik bo'lgan, refleksiv, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

2.2.27.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida tranzitiv bo'lgan, refleksiv, simmetrik bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

2.2.28.  $A=\{a, b, c\}$  to'plam dekart kvadratida refleksiv, simmetrik bo'lgan, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

2.2.29.  $K$ -kalit so'zlar,  $P$ - web sahifalar to'plami bo'lsin,  $R$  munosabat ushbu to'plamlar dekart ko'paytmasida aniqlangan bo'lsin.  $(x,y)$  juftlik  $R$  munosabatga tegishli bo'lsin, agar  $x$  kalit so'z  $y$  web-sahifada bo'lsa.  $R$  munosabat ekvivalent munosabat bo'ladimi?

2.2.30.  $A=\{1,2,3,4\}$  to'plam dekart kvadratida refleksiv bo'lgan, simmetrik, tranzitiv bo'lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.