ГРАФЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

2.1 Графлар назарияси *фани* – чизиқлар ва нуқталардан тузилган баьзи бир геометрик конфигурациялар тўғрисидаги масалаларни ечишда ишлатилади. Бундай масалаларни ечишда, геометрик конфигурацияларда нуқталар бир –бири билан тўғри чизиқ ёки ёй билан бирлаштирилганми, буларнинг узунлиги қанча каби факторлар эътиборга олинмайди. Энг мухими шундаки, ҳар бир чизиқ қандайдир берилган иккита нуқтани бирлаштираяпти. Шундай қилиб, графнинг таърифини қуйидагича бериши мумкин.

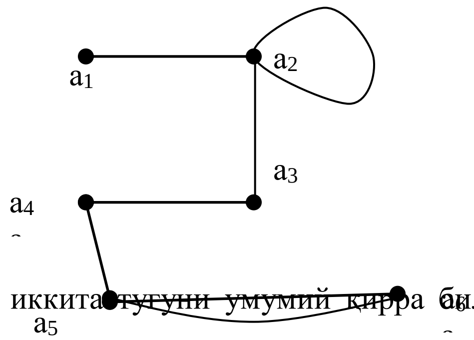
Таъриф. Тўплам $V=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ ва V тўпламдан олинган жуфтликлар $E=\{(a_{i1}, a_{j1}),\ldots,(a_{ik}, a_{jk})\}$ наборига Граф дейилади.

V тўпламдаги $a_1,\ldots,a_n$ лар қандайдир объектлар бўлиб Г графнинг учлари дейилади. Е тўпламдаги ҳар бир $(a_{i1}, a_{j1}),\ldots,(a_{ik}, a_{jk})$ жуфтлик Графнинг қирралари дейилади.

Агар (a_i, a_j) қирра берилган бўлса, у ҳолда a_i, ва a_j учлар бирлаштирилган дейилади.

Мисол. Агар $V=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7,\}$ва $E=\{(a_1,a_2)(a_2,a_2)(a_2,a_3)(a_3,a_4)(a_4,a_5)(a_5,a_6)(a_6,a_5)\}$ бўлсин, у ҳолда V ва Е тўплам Г графни ҳосил қилади.

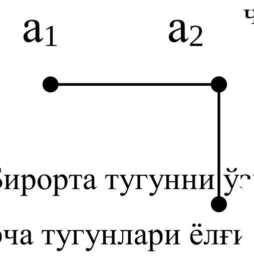
Графнинг учларини тугунлар, 2 та учини бирлаштирувчи чизиқни қирралар деб атаймиз.



Графнинг иккита тугуни умумий қирра билан ўзаро боғланган бœлса, улар қўшни тугунлар дейилади.

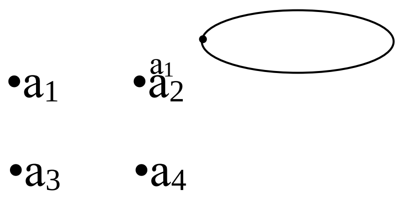
Агар Г нинг 2 та қирраси умумий тугунга эга бўлса, улар қўшма қирралар дейилади.

Мисол. $(a_1\ a_2)$ қирра $(a_2\ a_3)$ қиррага қўшма, чунки a_2 умумий тугунга эга.

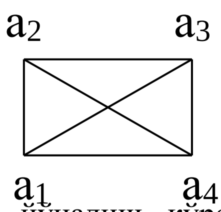


Бирорта тугунни ўзини - ўзига боғлайдиган қиррага сиртмоқ дейилади.

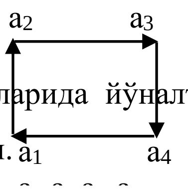
Барча тугунлари ёлғиз тугундан иборат граф ноль (бўш) граф дейилади.



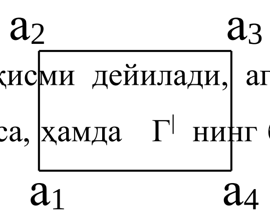
Агар Г графнинг барча тугунлари ўзаро боғланган бўлса, бундай граф тўлиқ граф дейилади.



Агар Г графнинг барча қирраларида йўналиш кўрсатилган бўлса, бундай граф йўналтириган граф дейилади.



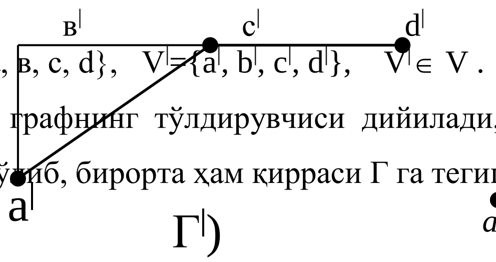
Агар Г графнинг қирраларида йўналтириш кўрсатилмаган бўлса, у ќолда граф йўналтирилмаган граф дейилади.

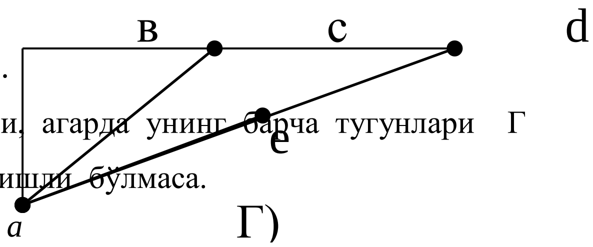


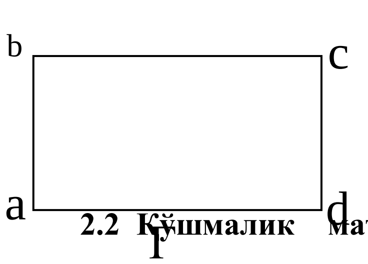
Г$^{|}$ граф Г графнинг қисми дейилади, агар Г$^{|}$ нинг тугунлари тўплами Г га тегишли бўлса, яъни $V^{|}\subseteq V$ бўлса, ҳамда Г$^{|}$ нинг барча қирралари Г нинг ҳам қирралар бўлса, яъни $E^{|}\subset E$

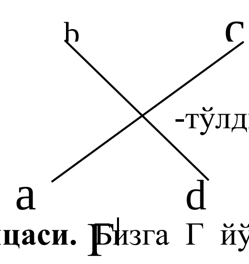
$V=\{a, в, c, d\}$, $V^{|}=\{a^{|}, b^{|}, c^{|}, d^{|}\}$, $V^{|}\in V$.

Г$^{/}$ Граф Г графнинг тўлдирувчиси дийилади, агарда унинг барча тугунлари Г графга тегишли бўлиб, бирорта ҳам қирраси Г га тегишли бўлмаса.

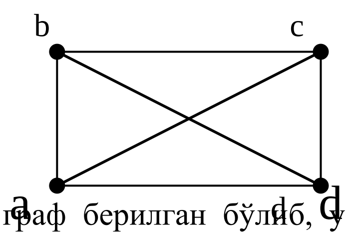








-тўлдирувчи граф.

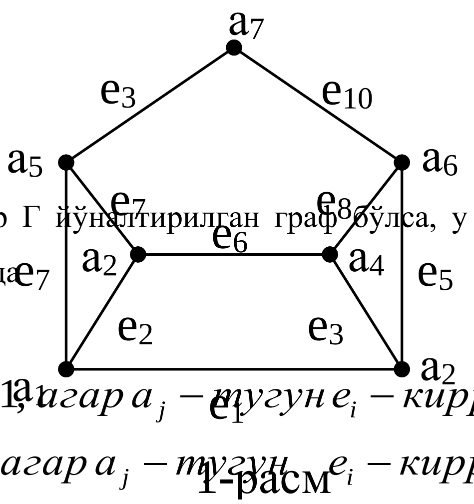


2.2 Қўшмалик матрицаси. Бизга Г йўналтирилмаган граф берилган бўлиб, V чекли бўлсин. Айтайлик $(a_1,\ldots,a_n)$, Г графнинг қирралари бўлсин. У ҳолда қўшмалик матрицаси $\|A_{ij}\|$, i=1,m, j=1, n m та қатор ва n та устундан иборат бўлади, A_{ij} матрицанинг устунларига Г нинг тугунлари, қаторларига Г нинг қирраларини мос қўямиз. У ҳолда

$$A_{ij}=\begin{cases}1, \text{агар } e_i \text{ кирра } a_j \text{ тугунга кушма булса.}\\ 0, \text{акс холда.}\end{cases}$$

šоидадан фойдаданиб šœшмалик матрицасини ќосил šиламиз. Мисол.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
e_1	1	1	0	0	0	0	0
e_2	1	0	1	0	0	0	0
e_3	0	1	0	1	0	0	0
e_4	1	0	0	0	1	0	0
e_5	0	1	0	0	0	1	0
e_6	0	0	1	1	0	0	0
e_7	0	0	1	0	1	0	0
e_8	0	0	0	1	0	1	0
e_9	0	0	0	0	1	0	1
e_{10}	0	0	0	0	0	1	1



1-расм

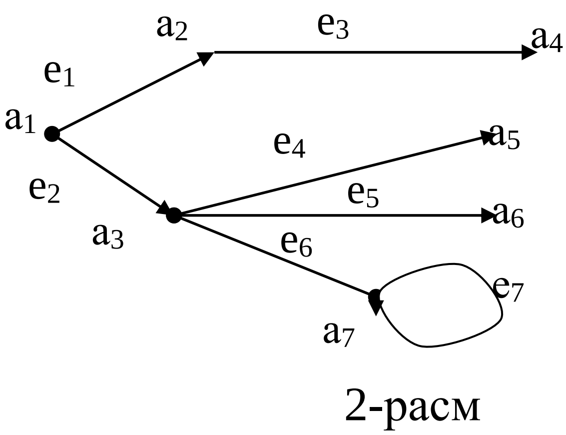
Агар Г йўналтирилган граф бўлса, у холда

$$A_{ij}=\begin{cases}-1, \text{агар } a_j - \text{тугун } e_i - \text{кирранин}\\ 1, \text{агар } a_j - \text{тугун } e_i - \text{кирранин}\\ 0, \text{агар } a_j - \text{тугун } e_i - \text{киррагаку}\\ 2, \text{агар } a_j - \text{тугун сиртмок булиб}\end{cases}$$

šоидадан фойдаданиб šœшмалик матрицасини ќосил šиламиз.

Мисол.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
e_1	-1	1	1	0	0	0	0
e_2	-1	0	0	0	0	0	0
e_3	0	-1	0	1	0	0	0
e_4	0	0	-1	0	1	0	0
e_5	0	0	-1	0	0	1	0
e_6	0	0	-1	1	0	0	1
e_7	0	0	0	0	0	0	2



2-расм

2.3 Қўшнилик матрицаси. Фараз қилайлик Г граф йўналтирилмаган бўлсин. Графнинг қўшнилик матрицасида A_{ij} нинг устунларига ҳам қаторларига ҳам графнинг тугунларини мос қўямиз. У холда

$$A_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ агар } a_i \text{ ва } a_j \text{ тугунлар кушни булса.} \\ 0, \text{ акс холда.} \end{cases}$$

šоидадан фойдаланиб šœшнилик матрицасини ќосил šиламиз.

Мисол. 1-расмда келтирилган йўналтирилмаган граф учун šœшнилик матрицаси šуйидагича бœлади.

	a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7
a_1	0 1 1 0 1 0 0
a_2	1 0 0 1 0 1 0
a_3	1 0 0 1 1 0 0
a_4	0 1 1 0 0 1 0
a_5	1 0 1 0 0 0 1
a_6	0 1 0 1 0 0 1
a_7	0 0 0 0 1 1 0

Г йўналтирилган граф бўлсин. У ҳолда қўшнилик матрицаси A_{ij} нинг устунларига ҳам сатрларига ҳам графнинг тугунларини мос қўямиз. Уҳолда

$$A_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ агар } a_i \text{ тугун } a_j \text{ тугунига богланган булса.} \\ 0, \text{ агар } a_i \text{ тугун } a_j \text{ тугунга кушни булмаса ва } a_i \text{ тугун } a_j \text{ тугунинг} \\ \text{ охири булса.} \end{cases}$$

šоидадан фойдаланиб šœшнилик матрицасини ќосил šиламиз.

Мисол. 2-расмда келтирилган йўналтирилган граф учун šœшнилик матрицаси šуйидагича бœлади.

	a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7
a_1	0 1 1 0 0 0 0
a_2	0 0 0 1 0 0 0
a_3	0 0 0 0 1 1 1
a_4	0 0 0 0 0 0 0
a_5	0 0 0 0 0 0 0
a_6	0 0 0 0 0 0 0
a_7	0 0 0 0 0 0 1

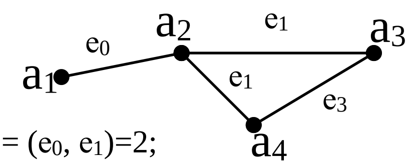
Теорема. Агар графда каррали қирралари ҳамда сиртмоқ мавжуд бўлмаса, n та тугунга эга бўлган ва боғлиқ компонентаси К га тенг бўлган графнинг қирралари сони энг кўпи билан аниšланади.

$$M=\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

Машрутнинг узунлиги деб, шу маршрутда мавжуд қўшни (e_{i-1}, e_i) қирралар сонига айтилади.

Графнинг ихтиёрий *а* ва ихтиёрий *в* тугунлари орасидаги масофа деб, шу тугунларни боғловчи энг кичик узунлика эга бўлган занжирга айтилади.

Мисол.



$d(a_1,a_3)=(e_0, e_1)=2;$

$d(a_1,a_4)=(e_0, e_2)=2;$

$d(a_1,a_4)=(e_0, e_1, e_3)=3$

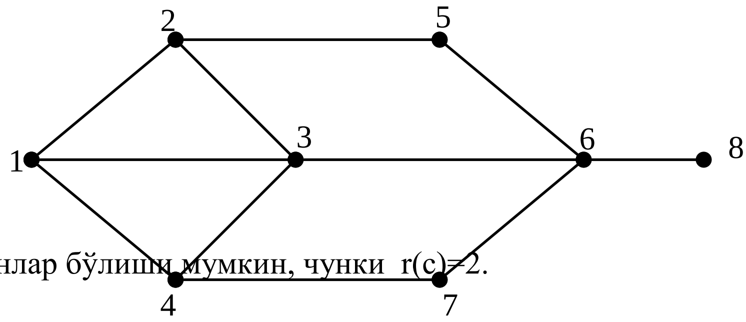
Графнинг диаметри деб, энг катта узунликка эга бўлган масофага айтилади.

$$d(\Gamma)=\max_{a,в\in V} d(a,в)$$

Мисол. $d(a_1,a_4)=(e_0, e_1, e_3)=3$.

с тугун Г графнинг фиксирланган тугуни бўлсин. х эса графнинг ихтиёрий тугуни бўлсин. с тугун учун максимал масофани ҳисоблаймиз. Қандайдир c_0 тугун учун бу максимал масофа бошқа тугунларга нисбатан минимал бўлса, уҳолда c_0 Г графнинг маркази дейилади ва c_0 учун аниқланган масофа Г графнинг радиуси дейилади.

$$R(c)=\min_{c,x\in v} d(c,x)$$



Бу мисолда марказ 3 ёки 6 тугунлар бўлиши мумкин, чунки r(c)=2.

2.4 Эйлер графи. Бизга йўналтирилмаган Г граф берилган бўлсин. Эйлер цикли шундай циклки, унда графнинг маълум бир тугунидан чиқиб, барча қирралардан фақат бир марта ўтиб, яна шу тугунга қайтиб келиши керак.

Графда Эйлер цикли мавжуд булиши учун:

а) Граф богланган бўлиши;

б) Графнинг барча тугунларининг локал даражалари жуфт бœлиши керак;

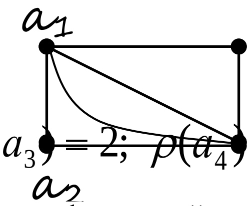
Графда Эйлер занжири мавжуд бœлиши учун:

а) Граф богланган бўлиши;

б) Графнинг 2 та тугуни(бошланиш ва охирги) локал даражалари тоš бœлиб, šолган барча тугунларининг локал даражалари жуфт бœлиши керак.

Агар Г йўналтирилмаган графда Эйлер цикли мавжуд бўлса, бундай графга Эйлер графи дейилади.

Мисол.



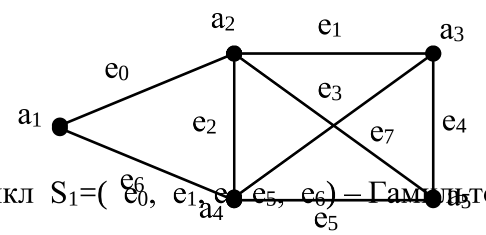
$$\rho(a_1) = 4;\ \rho(a_2) = 2;\ \rho(a_3) = 2;\ \rho(a_4) = 4;$$

2.5 Гамильтон графи. Агар графда оддий цикл мавжуд бўлиб, бу циклда графнинг барча тугунлари қатнашса, бундай цикл Гамильтон цикли дейилади.

Оддий занжир Гамилтон занжири дейилади, агар бундай графда тугунларнинг хаммаси иштирок этса. Тугун ва қирралар такрорланмаслиги керак.

Графда Гамильтон цикли мавжуд бўлса, бу граф Гамильтон графи дейилади.

Мисол.



Бу графда оддий цикл S_1=(e_0, e_1, e_4, e_5, e_6) – Гамильтон цикли, S_2=(e_0, e_1, e_7, e_6) - Гамильтон цикли эмас, чунки a_5 тугун қатнашмаяпти.

Топшириš вариантлари.

Šуйидаги келтирилган йуналтирилган ва йуналтирилмаган графлар учун:

1) Графни тœлдирувчисини топинг.

2) Графни кисм графини топинг.

3) Šœшмалик матрицани тузинг.

4) Šœшнилик матрицани тузинг.

5) Графни марказини топинг.

6) Графни диаметрини топинг.

7) Графни радиусини топинг.

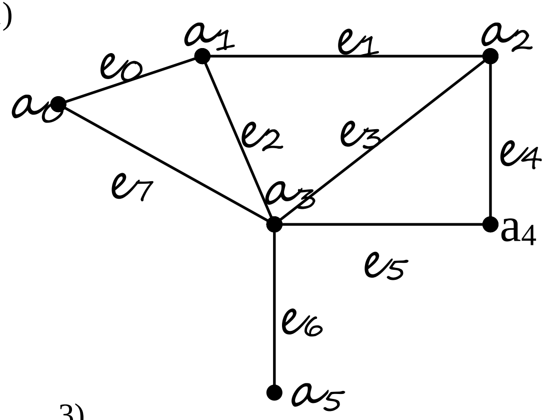
8) Графда Эйлер цикли мавжудлигини текширинг.

9) Графда Гамильтон цикли мавжудлигини текширинг.

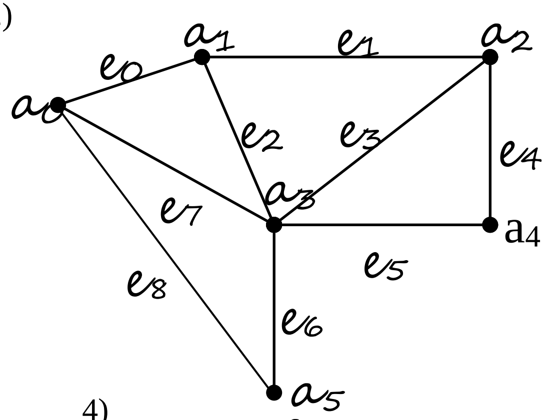
10) Графни цикломатик сонини топинг.

11) Графни šирралар сонини тугунларнинг локал даражалари ва šœшнилик матрицаси орšали анишланг.

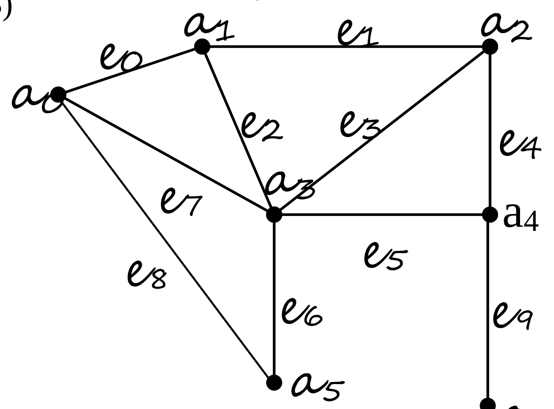
1)



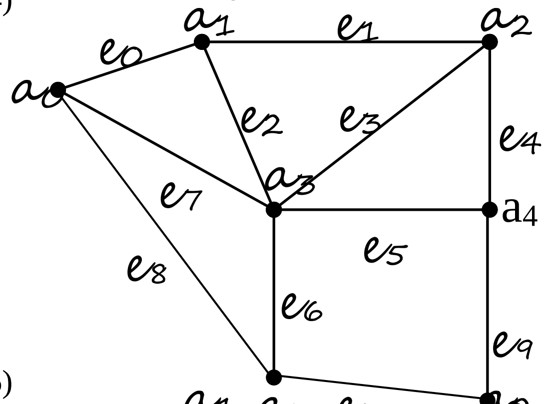
2)



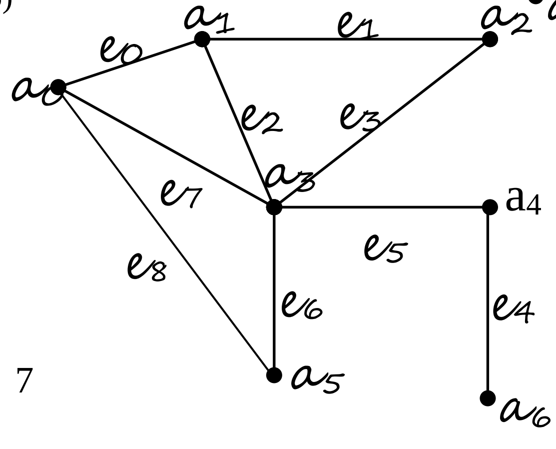
3)



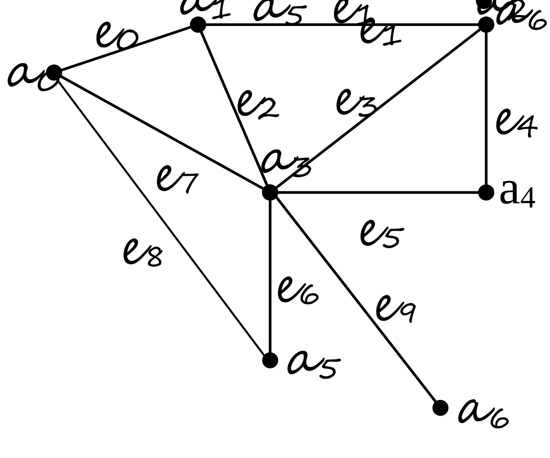
4)



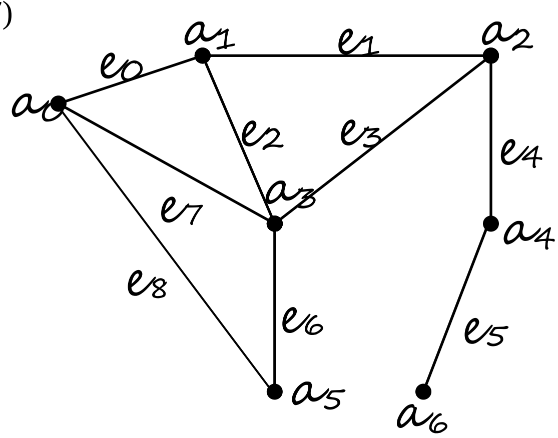
5)



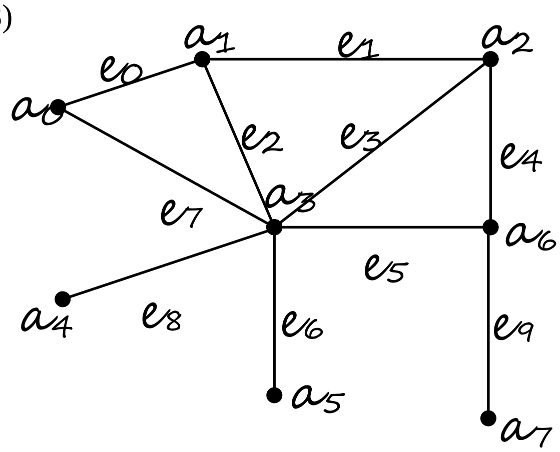
6)



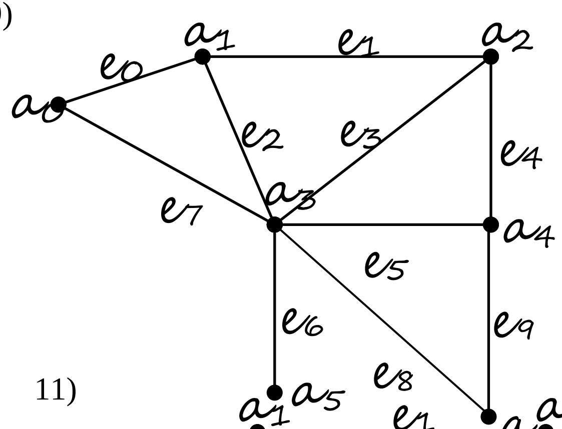
7)



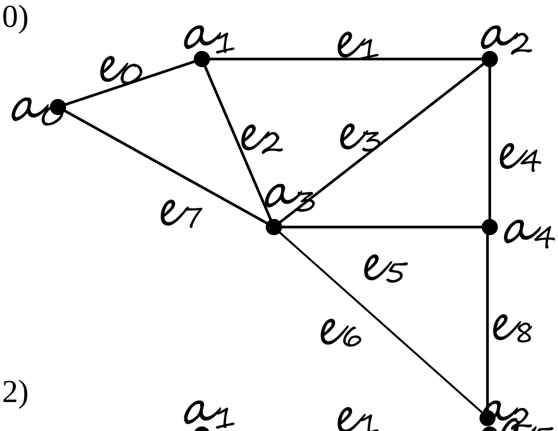
8)



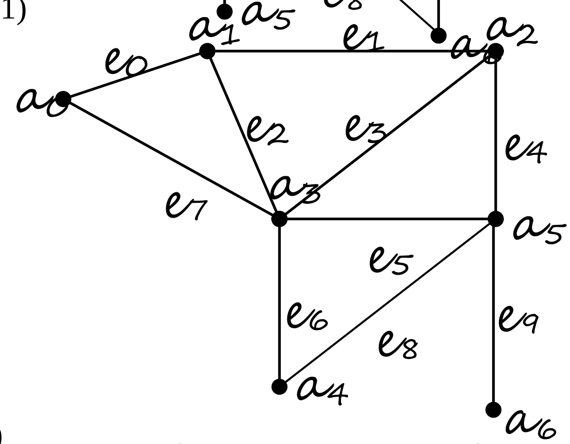
9)



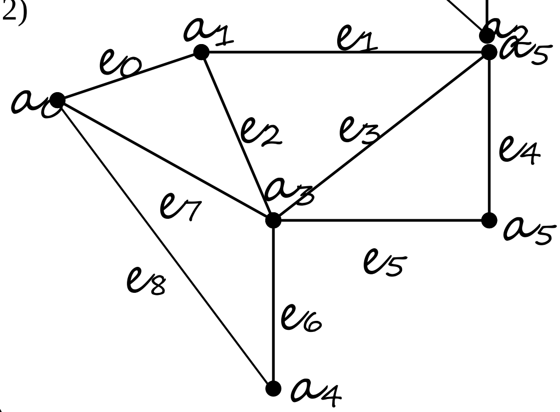
10)



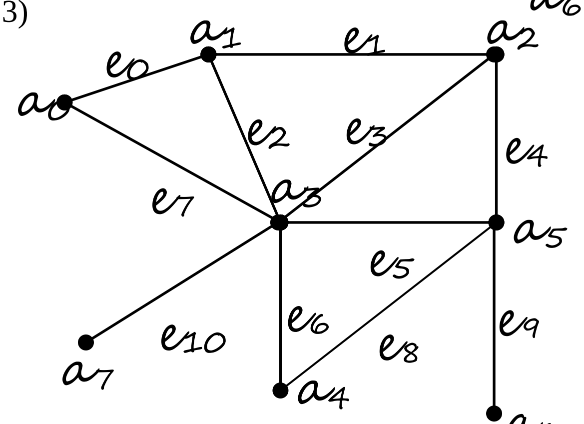
11)



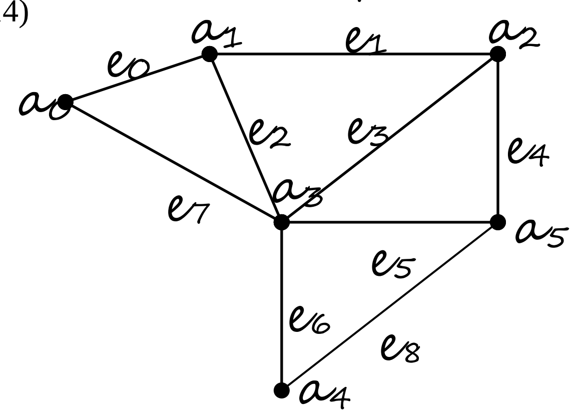
12)



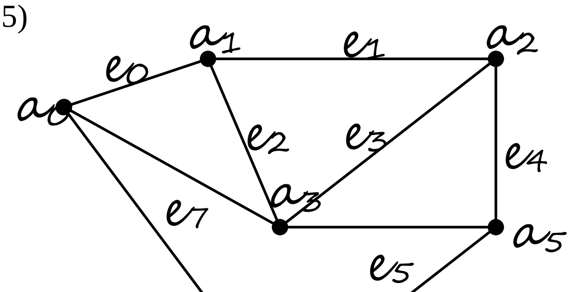
13)



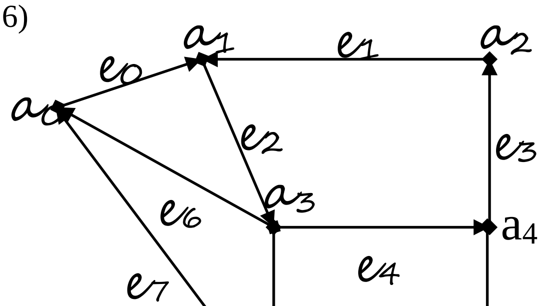
14)



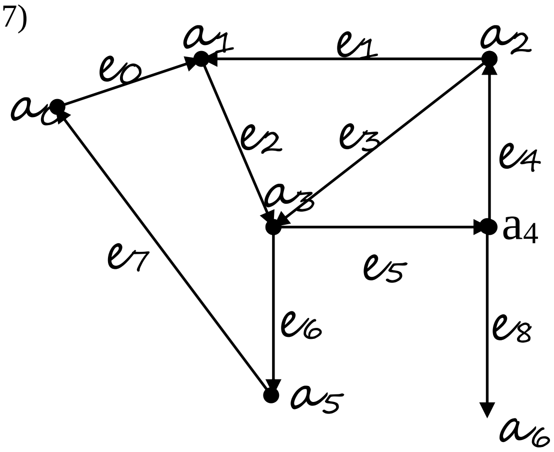
15)



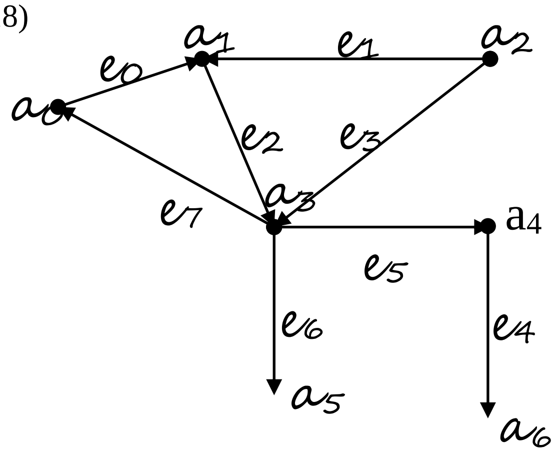
16)



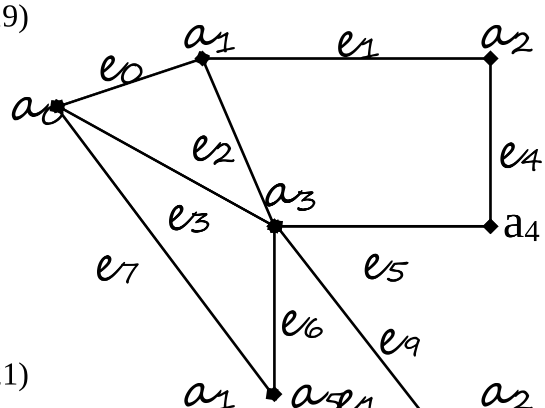
17)



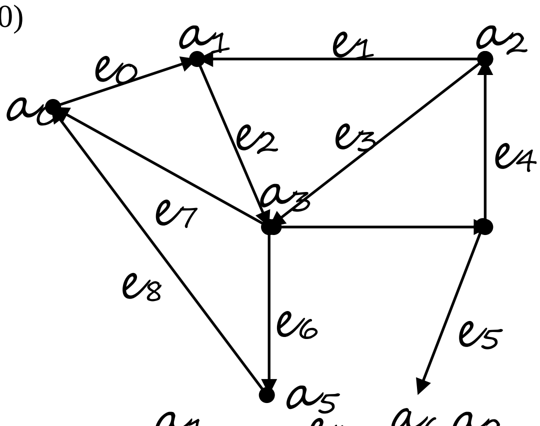
18)



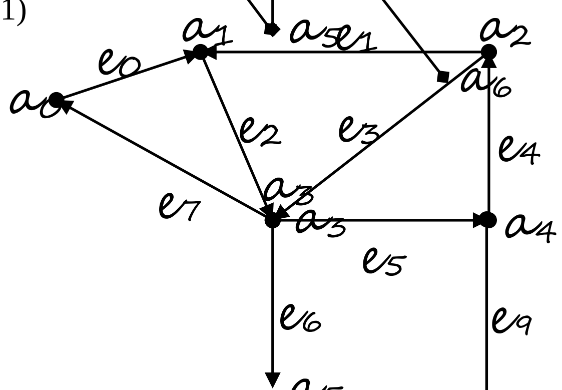
19)



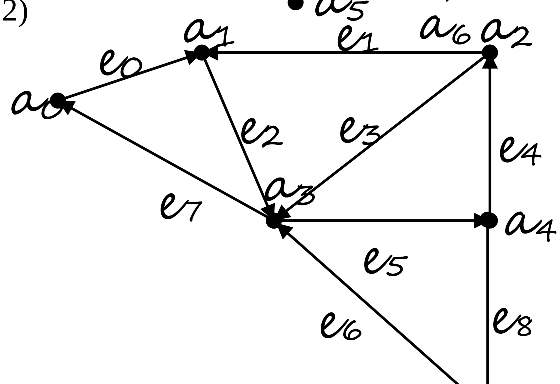
20)



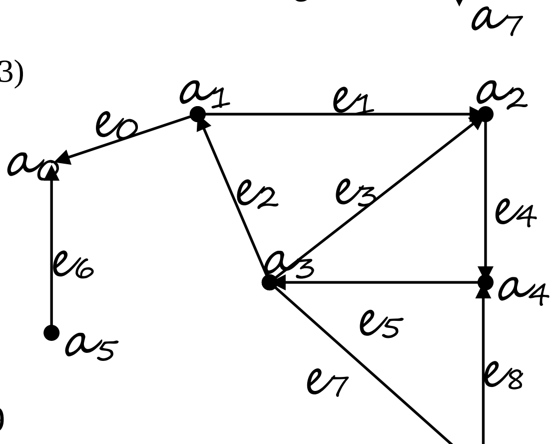
21)



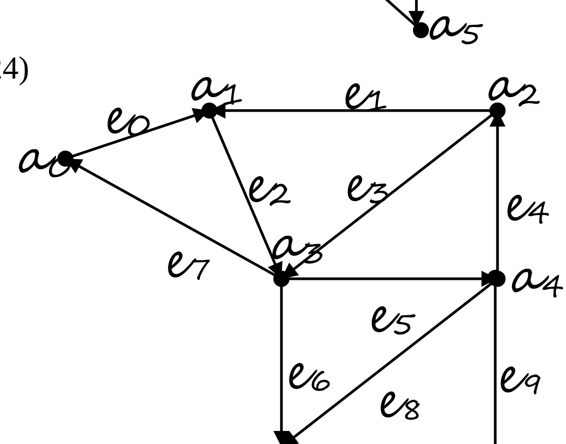
22)



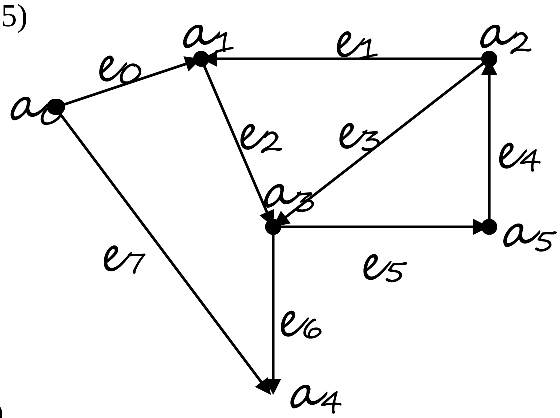
23)



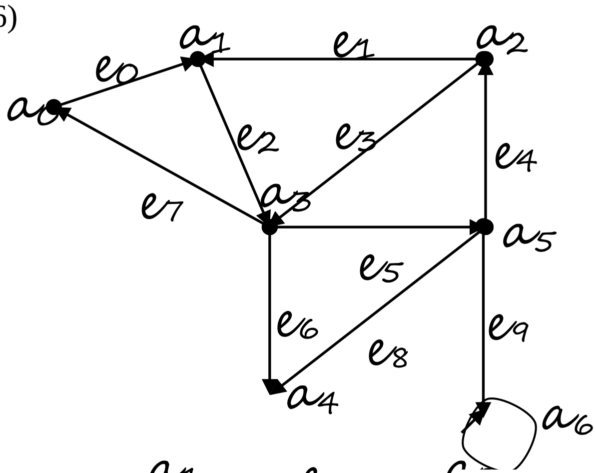
24)



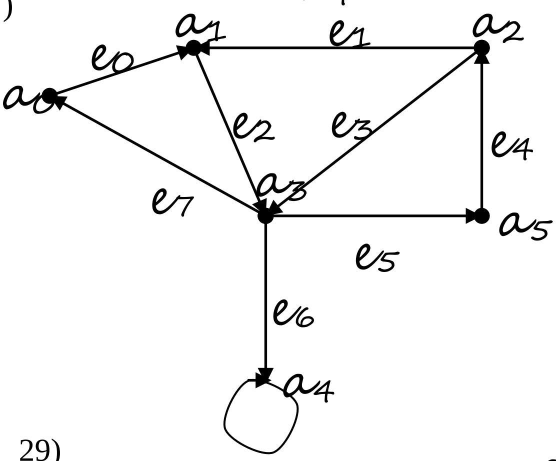
25)



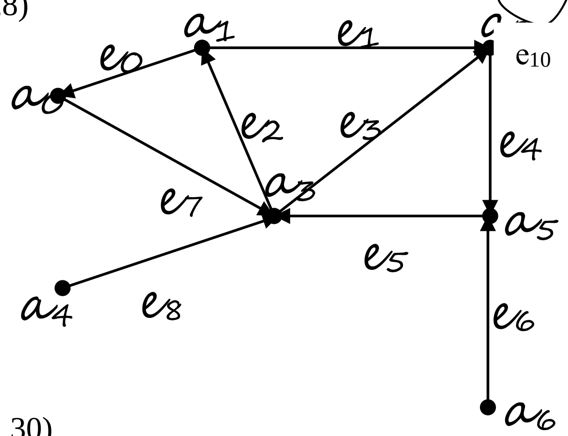
26)



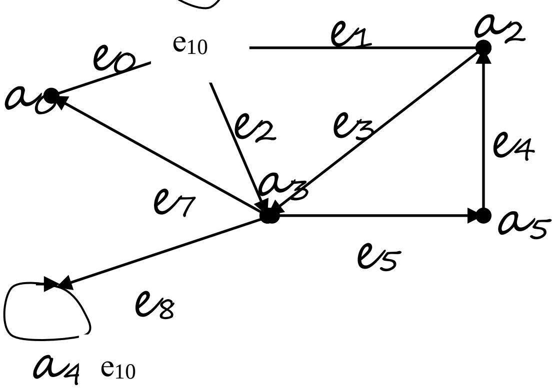
27)



28)



29)



30)