3-MA’RUZA. Sanoqli va kontinual to‘plamlar. Tartiblangan to‘plamlar. Dekart ko‘paytma(2 soat).

REJA

1. Kordinal son. Sanoqli va kontinual to’plamlar.
2. Tartiblangan juftlik tushunchasi. Juftliklar tengligi.
3. Kortej tushunchasi. Kortej uzunligi.
4. To’plamlarning dekart ko’paytmasi.
5. To’plamlarning dekart ko’paytmasining xossalari.

Kalit so’zlar: *Kordinal son, sanoqli va kontinual to’plamlar, tartiblangan juftlik, juftliklar tengligi, kortej, kortej uzunligi, to’plamlarning dekart ko’paytmasi, dekart ko’paytmaning xossalari.*

3.1. Kordinal son. Sanoqli va kontinual to’plamlar.

Cheksiz to‘plamlar ikkiga bo‘linadi:

1) sanoqli to‘plamlar;
2) sanoqsiz to‘plamlar.

Ba’zi to’plamlar birmuncha ko’p ishlatilganligi bois o’zining nomi va belgilanishiga ega:

natural sonlar to‘plami $N = \{1,2,3,.......,n,...\}$,

butun sonlar to‘plami $Z = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,......\}$ va

ratsional sonlar to‘plamini $Q = \left\{\frac{m}{n}, m,n \in Z, n \neq 0\right\}$,

irratsional sonlar to’plamini $I = \{\sqrt[p]{m^q},\ p,q,m \in Z,\}$,

haqiqiy sonlar to’plamini $R = Q \cup I$ va

kompleks sonlar to’plamini C harflari bilan belgilashga kelishib olingan.

Ta’rif. Agar cheksiz to‘plam elementlarini natural sonlar qatori bilan raqamlab chiqish mumkin bo‘lsa, u holda bu to‘plam **sanoqli to‘plam** deyiladi, aks holda **sanoqsiz to’plam** bo`ladi.

Bo’sh to’plam chekli va sanoqli to’plam hisoblanadi va $\varnothing \neq \{0\}$.

Misol 8. a) butun sonlar to`plamini sanoqli,

b) irratsional sonlar to`plamini sanoqsiz deb qarash mumkin.

d) juft sonlar to’plami ham sanoqli to`plamga misol bo`la oladi.

Ta’rif . Chekli va sanoqli to‘plamlarga **diskret to‘plamlar** deyiladi.

m dan n gacha bo’lgan butun sonlar to’plami – diskret to’plam bo’lib, uni

$$\{k \in Z \mid m \le k \text{ va } k \le n\} = \{k \in Z \mid \text{for } k \text{ from } m \text{ to } n \text{ do yield } k \text{ end for}\}$$

ko’rinishida yozish mumkin.

Shunday to’plamlar borki, ularning barcha elementlari boshqa biror kattaroq to’plamga tegishli bo’ladi. Masalan, $K = \{0,2,4,.......,2n,...\}$ ning barcha elementlari $Z = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,......\}$ ning ichida yotibdi.

Ta’rif . Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamning ham elementi bo‘lsa, u holda A to‘plam B to‘plamning **qism to‘plami** yoki **to’plam ostisi** deyiladi va $A \subset B$, ba`zan **xos qism to`plam** deb ham yuritiladi.

Ø to‘plam va to’plamning o’zi **xosmas qism to`plam** deyiladi.

$\varnothing$ to‘plam ixtiyoriy to‘plamning xosmas qism to‘plami bo’ladi.

$N \subseteq Z,\ N \subseteq R,\ Z \subseteq R,$ bunga N , Z , R – mos ravishda natural, butun, haqiqiy sonlar to`plami.

Misol 9. A – barcha daraxtlar to’plami,

B – mevali daraxtlar to’plami bo’lsa, $B \subset A$ bo’ladi.

Teorema. Sanoqli to’plamning har qanday qism to’plami chekli yoki sanoqli bo’ladi.

Isboti: A - sanoqli to’plam va $B \subseteq A$ bo’lsin. Agar $B = \varnothing$ bo’lsa, u holda ta’rifga ko’ra u sanoqli bo’ladi. $B \neq \varnothing$ bo’lsin. Sanoqli to’plam ta’rifi ga ko’ra A to’plamning barcha elementlari raqamlangan, lekin to’plamning o’zi $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ cheksiz ketma-ketlik shaklida tasvirlanishi mumkin. Agar $B \subseteq A$ bo’lsa, u holda a_{n1} – element B to’plamning birinchi elementi, a_{n2} – ikkinchi elementi va hakozo deyish mumkin. Bunda 2 hol bo’ladi: bir qancha qadamdan keyin B to’plamning barcha elementlarini ajratib olish mumkin yoki B to’plamning elementlari $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...$ cheksiz ketma-ketlikdan iborat bo’ladi.

Birinchi holda B to’plam chekli, ikkinchi holda esa sanoqli bo’ladi.

Teorema isbotlandi.

3.2. Tartiblangan juftlik tushunchasi. Juftliklar tengligi.

Amaliyotda to`plam elementlarining biror tartibi bilan bog`liq masalalar ko’p uchraydi.

1) agarda to`plam elementlari $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ ketma-ketlikda joylashgan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ harfiy elementlardan iborat bo`lsa, “oldin” va “keyin” tushunchalarini farqlaymiz.

2) agarda to`plam elementlari $1<2<\ldots<7$ ketma-ketlikda joylashgan $(1,2,\ldots,7)$ sonlardan iborat bo`lsa, “kichik” va “katta” tushunchalaridan foydalanamiz.

3) agar to`plam va qism to`plamlar ustida fikr yuritsak, $\subseteq$ va $\subset$ belgilashlardan foydalanamiz.

Bularning barchasida to`plam elementlarini ma`lum bir tartibda joylashtirish mumkin, ya`ni tartib munosabati tushunchasi kiritiladi.

Ta`rif 1.** $X = \{(x;y)\}$ to‘plam **tartiblangan to‘plam** deyiladi, agarda to`plam elementlari uchun $x < y$ yoki $x = y$ yoki $x > y$ munosabatlari kiritilgan bo`lsa. $(x;y)$ juftlikka **tartiblangan juftlik deyiladi.

Bundan keyin tartiblangan to`plam elementlarini farqlash uchun oddiy qavs bilan belgilaymiz.

Teorema. Agar $(a;b) = (x;y)$ bo`lsa, u holda $a = x$, $b = y$.

Isboti: $(a;b) = (x;y)$ tenglikdan $\{\{a\};\{a;b\}\} = \{\{x\};\{x;y\}\}$ kelib chiqadi.

Bu yerda 2 ta holat bo`lishi mumkin:

1) $\{a\} = \{x\}$, $\{a;b\} = \{x;y\}$

yoki 2) $\{a\} = \{x;y\}$, $\{a;b\} = \{x\}$.

Birinchi holda $\{a\} = \{x\}$ tenglikdan $a = x$ ekanligi kelib chiqadi, ikkinchi tenglikdan esa $\{a;b\} = \{x;y\}$ bo`lib, $a = x$ va $b = y$ ekanligi kelib chiqadi.

Ikkinchi holda $\{a\} = \{x; y\}$ tenglikdan $a = x = y$ ekanligi kelib chiqadi, $\{a; b\} = \{x\}$ ekanligidan $x = a = b$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $a = x$ va $b = y$ bo`ladi.

Teorema isbotlandi.

Ta`rif 2. Quyidagi 3 ta xossani qanoatlantiruvchi tartib munosabatiga **qisman tartiblangan munosabat** deyiladi:

1) $x \le x$ (refleksivlik xossasi)
2) $x \le y$ va $y \le x \Rightarrow x = y$ (simmetriklik xossasi)
3) $x \le y$ va $y \le z \Rightarrow x \le z$ (tranzitivlik xossasi)

Har qanday to`plamni tartiblash mumkin, masalan, biror bir to`plam elementlarini ro`yhat qilib chiqib, ro`yhatdagi har bir elementni raqamlab chiqish yordamida tartiblash mumkin.

Ikkita va undan ortiq elementi bo`lgan to`plamni bir nechta usul bilan tartiblab chiqish mumkin. Tartiblangan to`plamlar elementlarining turlicha bo`lishi bilan yoki elementlarning joylashish tartibi turlicha bo`lishi bilan farqlanadi.

Misol 1. 1) Navbat kutib turgan odamlar to`plami;
2) so`zdagi harflar to`plami;
3) analitik geometriyada nuqtalarning koordinatalari.

Agar X tartiblangan to`plamda a<x<b bo`lsa, x element a va b elementlar orasida yotibdi deyiladi. a va b lar orasida yotgan barcha elementlardan iborat to`plamga $X$ tartiblangan to`plamning $(a;b)$ **intervali** deyiladi.

Agar $(a;b)$ intervalga uning oxirlarini, ya`ni a va b elementlar ham kiritilsa, **[a;b] segment** hosil bo`ladi.

Ushbu tushunchalarni sonlar o`qida tasvirlaydigan bo`lsak, bizga ma`lum bo`lgan sonlar ustida matematik analizning oraliq (interval) va kesma (segment) tushunchalariga kelamiz.

$(a;b)$ intervalga uning oxirlaridan bittasi kiritilsa, [a;b)= a$\cup$(a;b) va (a;b]= (a;b) $\cup$b yarim interval (yarim segment) hosil bo`ladi.

Tartiblangan to`plam bo`sh intervalni ham o`zida saqlaydi.

Misol 2. Tartiblangan to`plamda elementlari natural sonlar bo`lgan (n;n+1) ko`rinishdagi barcha oraliqlar bo`sh intervalga misol bo`la oladi.

Agar $(a;b)$ interval elementlaridan iborat to’plam bo`sh bo`lsa, u holda X tartiblangan to`plamning a va b elementlari **qo`shni** deyiladi.

Ta`rif 3. $y \in X$ elementni qisman tartib “$\le$” munosabatiga nisbatan **eng kichik element** deyiladi, agarda barcha $x \in X$ lar uchun $y \le x$ bajarilsa.

Biror bir tartiblangan to`plamda eng kichik element mavjud bo`lsa, u yagonadir.

Ta`rif 4. $y \in X$ elementni qisman tartib “$\le$” munosabatiga nisbatan **eng katta element** deyiladi, agarda barcha $x \in X$ lar uchun $x \le y$ bajarilsa.

Biror bir tartiblangan to`plamda eng katta element mavjud bo`lsa, u yagonadir.

Ta`rif 5.** Agar $\{X;\le\}$ qisman tartiblangan to`plam bo`lib, $A \subseteq X$ va istalgan $a \in A$ uchun a$\le$x bajarilsa, u holda $x \in X$ element A to`plamning **yuqori chegarasi deyiladi.

Ta`rif 6.** Agar $\{X;\leq\}$ qisman tartiblangan to`plam bo`lib, $A\subseteq X$ va istalgan $a\in A$ uchun x$\leq$a bajarilsa, u holda $x\in X$ element A to`plamning **quyi chegarasi deyiladi.

To`plam bir nechta yuqori chegaraga ega bo`lishi mumkin.

Ta`rif 7.** Agar $x\in A$ yuqori chegara bo`lib, barcha $y\in A$ yuqori chegaralar uchun x$\leq$y munosabat bajarilsa, $x\in X$ elementga A to`plamning **ehg kichik yuqori chegarasi yoki **supremum** deyiladi va **supA** kabi belgilanadi.

Ta`rif 8.** Agar $x\in A$ quyi chegara bo`lib, barcha $y\in A$ quyi chegaralar uchun $x\geq y$ munosabat bajarilsa, $x\in X$ elementga A to`plamning **ehg katta quyi chegarasi yoki **infimum** deyiladi va **infA** kabi belgilanadi.

3.3. Kortej tushunchasi. Kortej uzunligi.

Kortej tushunchasi. Matemetikada, jumladan, kombinatorika va graflar nazariyasida, to‘plam tushunchasi bilan bir qatorda kortej tushunchasi alohida o‘rin tutadi. Turli xossalarga ega bo‘lgan ob’yektlar bilan ish ko‘rilganda kortej tushunchasidan foydalanish qo`l keladi. Kortej tushunchasi yordamida kombinatorikaning ko‘plab tushunchalari tabiiy ravishda oson anglanadi. Kortej tushunchasini o‘rganishdan oldin to‘plamning elementlari takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz.

Ixtiyoriy $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamlarning ixtiyoriy biridan, masalan, A_{i_1} to‘plamdan qandaydir a_{i_1} elementni, A_{i_2} to‘plamdan esa qandaydir a_{i_2} elementni va hokazo, oxirgi A_{i_n} to‘plamdan qandaydir a_{i_n} elementni olamiz. Bu elementlarni ularning berilgan to‘plamlardan olinishi tartibida joylashtirib $< a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} >$ tuzilmaga ega bo‘lamiz. Bu tuzilmada har bir element o‘zining qat’iy joylashish o‘rniga ega. Shunday usul bilan boshqa tuzilmalarni ham hosil qilish mumkin. Bu tuzilmalarning har biri **elementar kortej** (qisqacha, **kortej**) deb ataladi.

Kortejni boshqa usullar yordamida ham tashkil qilish mumkin. Masalan, faqat bitta to‘plam elementlaridan (hattoki, bu to‘plam yagona elementli bo‘lsa ham) foydalanib, tarkibida elementlari ko‘p bo‘lgan kortej tuzish mumkin. Kortejlarni belgilashda, ko‘pincha, lotin yoki grek alifbosining bosh harflaridan foydalaniladi.

$A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlar ixtiyoriy bo‘lgani uchun bu to‘plamlar umumiy elementlarga ega bo‘lishi ehtimoldan holi emas. Demak, umuman olganda, $K = < a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} >$ kortej tarkibida **elementlarning takrorlanishi mumkin**. Berilgan K kortejga a element tegishliligi $a\in K$ yoki $K \ni a$ ko‘rinishda belgilanadi.

Ba’zi hollarda kortej iborasining o‘rniga **vektor** yoki, uning **uzunligini** e’tiborga olgan holda, **juftlik** (uzunligi ikkiga teng kortej), **uchlik**, **to‘rtlik** va hokazo n**-lik** (uzunligi n ga teng kortej) iboralari ham ishlatiladi.Uzunligi n bo‘lgan kortej n **o‘rinli kortej** deb ham ataladi. Kortejni tashkil etuvchi elementlar soni, ya’ni kortejning uzunligi shu **kortejning quvvati** deb ataladi. Berilgan K kortejning uzunligi (quvvati)$|K|$ko‘rinishda belgilanadi.

Kortej tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkinligidan, ularning kortejda tutgan **o‘rinlari** muhim hisoblanadi. Shuning uchun kortejning muayyan elementi nazarda tutilganda, uning o‘rnini aniqlovchi raqam hisobga olinishi kerak.

Uzunliklari teng bo‘lgan ikkita kortejning mos o‘rinlaridagi elementlari aynan bir xil bo‘lsagina bu **kortejlar teng** deb ataladi. Kortejni tashkil qiluvchi elementlar, uning **komponentalari** yoki **koordinatalari** deb ataladi. Ba’zan,kortejni tashkil qiluvchi elementlar uchun, qisqacha qilib, **kortejning elementlari** iborasi ham qo‘llaniladi.

Tabiiyki, uzunliklari teng bo‘lmagan kortejlar teng emas. Kortejlar teng bo‘lishi uchun ularning mos komponentalari o‘zaro bir xil bo‘lishi shart. Masalan, to‘rt komponentali $<1,\{a,b\},c,\{2,5,4\}>$ va $<1,\{b,a\},c,\{5,2,4\}>$ kortejlar o‘zaro tengdir, chunki ularning toq o‘rinlaridagi komponentalari aynan bir xil va juft o‘rinlarida turgan komponentalari esa to‘plamlar sifatida bir-biriga teng bo‘lgani uchun aynan bir xildir.

Ba’zi hollarda kortej iborasining o‘rniga **vektor** yoki, uning **uzunligini** e’tiborga olgan holda, **juftlik** (uzunligi ikkiga teng kortej), **uchlik**, **to‘rtlik** va hokazo n **-lik** (uzunligi n ga teng kortej) iboralari ham ishlatiladi.Uzunligi n bo‘lgan kortej n **o‘rinli kortej** deb ham ataladi. Kortejni tashkil etuvchi elementlar soni, ya’ni kortejning uzunligi shu **kortejning quvvati** deb ataladi. Berilgan K kortejning uzunligi (quvvati) $|K|$ ko‘rinishda belgilanadi.

Kortej tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkinligidan, ularning kortejda tutgan **o‘rinlari** muhim hisoblanadi. Shuning uchun kortejning muayyan elementi nazarda tutilganda, uning o‘rnini aniqlovchi raqam hisobga olinishi kerak.

Uzunliklari teng bo‘lgan ikkita kortejning mos o‘rinlaridagi elementlari aynan bir xil bo‘lsagina bu **kortejlar teng** deb ataladi. Kortejni tashkil qiluvchi elementlar, uning **komponentalari** yoki **koordinatalari** deb ataladi. Ba’zan,kortejni tashkil qiluvchi elementlar uchun, qisqacha qilib, **kortejning elementlari** iborasi ham qo‘llaniladi.

Tabiiyki, uzunliklari teng bo‘lmagan kortejlar teng emas. Kortejlar teng bo‘lishi uchun ularning mos komponentalari o‘zaro bir xil bo‘lishi shart. Masalan, to‘rt komponentali $<1,\{a,b\},c,\{2,5,4\}>$ va $<1,\{b,a\},c,\{5,2,4\}>$ kortejlar o‘zaro tengdir, chunki ularning toq o‘rinlaridagi komponentalari aynan bir xil va juft o‘rinlarida turgan komponentalari esa to‘plamlar sifatida bir-biriga teng bo‘lgani uchun aynan bir xildir

3.4. To’plamlarning dekart ko’paytmasi.

Turmushda ikki inson, aytaylik Barno va Nargizaning qarindoshligi haqida gapirganda shuni nazarda tutiladiki, shunday ikkita oila mavjud, Barno va Nargizaning shu oilalarga qandaydir aloqasi bor. Tartiblangan (Barno, Nargiza) juftligi boshqa tartiblangan kishilar juftligidan shunisi bilan farq qiladiki, ularning orasida opa-singillik yoki ona-qizlik, jiyanlik kabi munosabatlar bo’lishi mumkin.

Diskret matematikada ham dekart ko’paytmaning barcha tartiblangan juftliklari orasidan o’zaro qandaydir “qarindoshlik” munosabatlariga ega bo’lgan juftliklarni ajratib ko’rsatish mumkin. Ixtiyoriy ikki to’plamning elementlari orasidagi munosabatlar uchun binar munosabat tushunchasini kiritamiz. Bu tushuncha matematika kabi informatikada ham ko'p uchraydi. Bir nechta to'plam elementlari orasidagi munosabat ma'lumotlar jadvali shaklida beriladi. Ushbu bob tadbiqini ma'lumotlar bazasini boshqarish tizimini tasvirlashda ishlatiladigan *n* – ar munosabatlarda ko'rish mumkin.

To'plamlarning dekart ko'paytmasi

Ikkita - A va B to'plam berilgan bo'lib, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ bo'lsin. A to'plamga tegishli bo'lgan biror *a* elementni va B to'plamga tegishli bo'lgan biror *b* elementni olamiz.

Birinchi elementi a, ikkinchi elementi b bo'lgan ***tartiblangan juftlik*** *deb* $\{a,\{a,b\}\}$ *to'plamga aytamiz va* (a,b) *kabi belgilanadi.*

1.6-ta'rif. *Barcha* (a,b) *ko'rinishdagi tartiblangan juftliklardan tashkil topgan* $\{(a,b): a \in A, b \in B\}$ *to'plam* A *va* B *to'plamlarning* ***dekart (to'g'ri) ko'paytmasi*** *deyiladi va* $A \times B$ *kabi belgilanadi.*

Demak, $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$

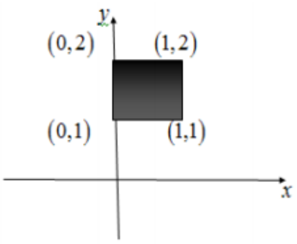
Masalan, $A = \{0,1\}$, $B = \{a,b\}$ to'plamlarning dekart ko'paytmasi $A \times B$ quyidagicha:

$A \times B = \{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b)\}$ bo'ladi. $B \times A$ esa ushbu

$B \times A = \{(a,0),(b,0),(a,1),(b,1)\}$ bo'ladi.

Demak, umuman aytganda, $A \times B \neq B \times A$ ekan.

Keyingi misol tariqasida A to'plam deb $[0,1]$ segment nuqtalaridan iborat $A = \{x \in R: 0 \leq x \leq 1\}$ to'plamni, B to'plam deb $[1,2]$ segment nuqtalaridan iborat $B = [y \in R: 1 \leq y \leq 2]$ to'plamni olaylik. Bu to'plamlarning dekart ko'paytmasi $A \times B = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ to'plam 5-chizmada tasvirlangan kvadrat nuqtalardan iborat to'plam bo'ladi:



5-chizma

Shuni ta'kidlash lozimki, ikki (a,b) va (c,d) juftliklar $a=s$, va $b=d$ bo'lgandagina teng deb qaraladi.

To'plamlarning dekart ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega. Faraz qilaylik, bizga A, B va C to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda

1.3.1. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

1.3.2. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bu xossalardan 1.3.1 ni isbotlaymiz.

Aytaylik, $x\in A\times(B\cap C)$ bo'lsin. Unda $x=(a,d)$ bo'lib,

$$a\in A,\ d\in B\cap C$$

bo'ladi.

$d\in B\cap C$,

bo'lishidan esa, $d\in B$, $d\in C$ ekanligini topamiz.

$$a\in A,\ d\in B;\ (a,d)\in A\times B$$

$$a\in A,\ d\in C;\ (a,d)\in A\times C$$

Demak,

$$(a,d)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

ya'ni

$$x\in(A\times B)\cap(A\times C) \qquad (4)$$

bo'ladi.

Endi $x\in(A\times B)\cap(A\times C)$ bo'lsin. Unda $x\in(A\times B)$, $x\in(A\times C)$ bo'ladi.

Ta'rifga binoan

$$x\in A\times B;\ x=(a,b)\ ;\ a\in A\ ,\ b\in B$$

$x\in A\times C;\ x=(a,c)\ ;\ a\in A,\ c\in C$ bo'ladi.

Ravshanki: $x=(a,b)=(a,c)\ ;\ b=c$

Demak, $a\in A\ ,\ b\in B\cap C\ ;\ (a,b)\in A\times(B\cap C)$

ya'ni

$$x\in A\times(B\cap C) \qquad (5)$$

bo'ladi.

(4) va (5) munosabatlardan

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

bo'lishi kelib chiqadi.

1.3.1-misol

$A=\{1,2,3\}$, $B\{3,4\}$ bo'lsa, $A\times B$ ni hisoblang.

Yechish: $A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),\ (2,4),\ (3,3),\ (3,4)\}$ bo'ladi.

1.3.1-misol

$A=\{1,2,3\}$, $B\{3,4\}$ bo‘lsa, $A\times B$ ni hisoblang.

Yechish: $A\times B=\{(1,3),\ (1,4),\ (2,3),\ \ (2,4),\ (3,3),\ \ (3,4)\}$ bo‘ladi.

1.3.2. -misol

A va B to‘plamlar U to‘plamning chekli qism to‘plamlari bo‘lsin. $n(A)$ va $n(B)$ lar esa, A va B to‘plam elementlar sonini belgilasin. U holda $n(A\setminus B)=n(A)\setminus n(A\cap B)$ ekanligini ko‘rsating.

Yechish: Ravshanki, $A\cap B=\emptyset$ bo‘lsa, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ bo‘ladi. $A\setminus B=C$ bo‘lsin. U holda, $A=C\cup(A\cap B)$ tenglik o‘rinli ekanligini ko‘rsatish qiyin emas. Bundan tashqarii, $C\cap(A\cap B)=\emptyset$ bo‘ladi. Shu sababli, $n(A)=n(C)+n(A\cap B)\Rightarrow n(C)=n(A)-n(A\cap B)$ kelib chiqadi. $C=A\setminus B$ sababli, $n(A\setminus B)=n(A)\setminus n(A\cap B)$ bo‘ladi.

Ta’rif 1. Ixtiyoriy A va B to‘plamlarning **dekart** yoki **to’g’ri ko`paytmasi** deb, birinchi elementi $A$ to`plamga, ikkinchi elementi B to`plamga tegishli bo`lgan $(x,\ y)$ tartiblashgan juftliklardan iborat to`plamga aytiladi va quyidagicha belgilanadi: $A\times B=\{(x,\ y),\ \ x\in A,\ y\in B\}$.

Bunda x va y lar $(x,\ y)$ juftlikning **koordinatalari** yoki **komponentlari** deyiladi, demak mos ravishda x juftlikning birinchi koordinatasi, y esa juftlikning ikkinchi koordinatasi deyiladi.

Misol 1. Dekart ko’paytmaga misol qilib to’g’ri burchakli dekart koordinata sistemasida nuqtalar to’plamini olish mumkin, ya’ni tekislikda har bir nuqta ikkita koordinataga ega: abssissa va ordinata.

Misol 2. $A=\{a_1,a_2\}$ va $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ to’plamlar berilgan bo‘lsin. U holda

$$A\times B=\{a_1,a_2\}\times\{b_1,b_2,b_3\}=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)\}$$

Ta’rif 2. $R=A\times B$ dekart ko`paytmaga **to`g`ri dekart ko`paytma,** $R^{-1}=B\times A$ ifodaga **teskari dekart ko`paytma** deyiladi.

3.5. To’plamlarning dekart ko’paytmasining xossalari.

1⁰. Dekart ko’paytma kommutativ emas:

$$A\times B\neq B\times A$$

2⁰. Dekart ko’paytma assotsiativ emas:

$$((A\times B)\times C)\neq(A\times(B\times C)).$$

Ta’rif 3. $P\subseteq A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ dekart ko’paytmaning ixtiyoriy bo’sh bo’lmagan P qism to`plamiga $A_1,A_2,\ldots,A_n$ to‘plamlar orasida aniqlangan n **o‘rinli munosabat** yoki n o‘rinli P **- predikat** deyiladi.

Agar $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in P$ bo`lsa, $P$ munosabat $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ elementlar uchun **rost munosabat** deyiladi va $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)=1$ bo`ladi, agar $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\notin P$ bo`lsa, P

munosabat **yolg`on munosabat** deyiladi va $P(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ yoki $\overline{P}(a_1, a_2, ..., a_n)$ kabi yoziladi.

Ta'rif 4. Agar $P \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ n o'rinli munosabatda n=1 bo`lsa, $P$ munosabat $A_1$ to'plamning qism to'plami bo'ladi va **unar munosabat** (bir o`rinli munosabat) yoki **xossa** deyiladi.

n=2 bo`lganda esa **binar munosabat (**ikki o'rinli munosabat) yoki **moslik** deyiladi.

Agar $P \subseteq A^2$ bo`lsa, $P$ ga $A$ to`plamning elementlari orasidagi munosabat deyiladi.

Misol 3. Unar munosabatlarga misollar keltiramiz:

1) $A_1 = Z$ butun sonlar to'plamidan iborat bo`lsin. $P(x) \subseteq Z$ unar munosabat *P(x)=1* shart bilan aniqlansin, bunda $x$ – juft son, u holda $P$ munosabat quyidagi ko`rinishda bo`ladi: *P={...;-4;-2;0;2;4;...}.*

2) $A_1 = R$ haqiqiy sonlar to`plamidan iborat, $P \subseteq R$ munosabat *P(x)=1* shart bilan aniqlansin, bunda $x$ – irratsional son bo`lsin, u holda P munosabat quyidagi ko`rinishlarda bo`ladi:

$$P(\sqrt{2}) = P(e) = P(\pi) = 1, \quad P(0) = P(1) = P\left(-\frac{1}{3}\right) = 0.$$

3) A_1 – barcha odamlar to`plami, $P(x) \subseteq A_1$ munosabatda x – erkak kishi bo`lsin. Javob: *P(x)*=1 bo`ladi.

4) A_1 – tekislikdagi barcha uchburchaklar to`plami bo`lsa, x – teng yomli uchburchaklar bo`lsin. Javob: *P(x)*=1 bo`ladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Chekli to'plam tartibi yoki quvvatiga ta'rif bering.
2. Ikkita to'plam yig'indisi uchun elementlar sonini topish formulasini keltiring.
3. Uchta va n ta to'plamlar yig'indisidagi elementlar sonini topish formulalarini keltiring.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Shahardagi 110 ta qandalotchilik sexlaridan 40 tasi A mahsulotni, 30 tasi B mahsulotni, 48 tasi C mahsulotni, 10 tasi A va B, 13 tasi B va C, 12 tasi A va C, 14 tasi faqat 2 xil mahsulot ishlab chiqarsa, ushbu mahsulotlarni ishlab chiqarmayatgan sexlar nechta?
2. 30 ta turistdan 19 tasi ingliz, 18 tasi nemis tilini biladi. Ulardan nechtasi faqat ingliz tilini biladi?
3. 42 turistdan 25 tasi ingliz, 28 tasi nemis tilini biladi. Ulardan nechtasi faqat nemis tilini, nechtasi faqat ingliz tilini, nechtasi ikkala tilni ham biladi?
4. Guruhda 40 talaba bolib, ulardan 25 tasi yigitlar, qolgani qizlar. Imtixonda ulardan 18 tasi "4", 22 tasi "5" baho olgan. Agar qizlardan 9 tasi "5" olgan bolsa, "4" olgan yigitlar nechta?
5. Guruhdagi talabalardan 17 tasi volleybol, 16 tasi futbol, 18 tasi tennis boyicha togaraklarga qatnashadi. Ulardan 5 tasi futbol va voleybol 7 tasi voleybol, tennis, 6 tasi futbol va tennis, 2 tasi esa 3 ta to'garakka ham qatnaydi. Guruhda nechta talaba bor?

6. Tumanda 32 ta fermer bolib, ular paxta, bugdoy va kartoshka yetishtirishadi. Ulardan 26 tasi paxta, bugdoy yetishtirishi ma’lum bolsa, faqat kartoshka yetishtiradigan fermer nechta?
7. Potokda 100 talabadan 61 tasi ingliz tilini, 48 tasi fransuz tilini, 56 kishi kishi nemis tilini o‘rganishadi. 24 kishi ingliz va fransuz, 36 kishi ingliz va nemis, 30 kishi fransuz va nemis tilini o‘rganishadi. Faqat 2 tadan til o‘rganadiganlar 24 kishi bo‘lsa, umuman til o‘rganmayatganlar nechta? Faqat bittadan til o‘rganayatganlar nechta? Uchchala tilni ham necha kishi o‘rganayapti?

TESTLAR

1. $A\cap\overline{A}$ ifoda quyidagi ifodalarning qaysi biriga teng?
A) A B) U C) $\overline{A}$ D) Ø E) U\A

2. $A\cup\varnothing$ ifoda quyidagi ifodalarning qaysi biriga teng?
A) U B) U\A C) $A\cap\overline{A}$ D) Ø E) A

3. $A\cap\varnothing$ ifoda quyidagi ifodalarning qaysi biriga teng?
A) A B) Ø C) U D) $A\cup\varnothing$ E) $A\cup\overline{A}$

4. $A\cap U$ ifoda quyidagi ifodalarning qaysi biriga teng?
A) U B) $\overline{A}$ C) $\overline{\varnothing}$ D) Ø E) A

5. $A\cup U$ ifoda quyidagi ifodalarning qaysi biriga teng?
A) A B) Ø C) $\overline{A}$ D) U E) $\overline{U}$

6. $\overline{U}$ ifoda quyidagi ifodalarning qaysi biriga teng?
A) U B) $\overline{\varnothing}$ C) $\overline{A}$ D) Ø E) A

7. $\overline{\varnothing}$ ifoda quyidagi ifodalarning qaysi biriga teng?
A) Ø B) U C) $\overline{U}$ D) $\overline{A}$ E) A

8. $A\backslash B$ ifoda quyidagi ifodalarning qaysi biriga teng?
A) $A\cup B$ B) $A\cap B$ C) $A\cup\overline{B}$ D) $\overline{A}\cap B$ E) $A\cap\overline{B}$

9. $\overline{A}$ ifoda quyidagi ifodalarning qaysi biriga teng?
A) Ø B) A C) $\overline{\varnothing}$ D) U E) $\overline{U}$

10. $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$ u holda quyidagi ifodalarning qaysi biri o‘rinli?
A) $A\cup B$ B) $A\cap B$ C) $B\subset A$ D) A=B E) $A\subset B$