МУСТАҚИЛ ИШЛАРНИ БАЖАРИШ ҚОИДАЛАРИ

1. Талабалар ҳар бўлимга оид барча топшириқларни қўйидаги тартибда бажаришади:

   Ҳар бир талаба ўз гуруҳ журналидаги рақамига мос келадиган топшириқни бажаради. Масалан, 1- амалий ишдаги 1)-топшириқни гуруҳ журналида фамилияси 1-ўринда турган талаба, 2)- топшириқни гуруҳ журналида фамилияси 2-ўринда турган талаба, 3)- топшириқни гуруҳ журналида фамилияси 3-ўринда турган талаба бажаради ва ҳоказо шу тартибда барча талабалар ўз топшириқларини бажаришади. Агар амалий ишдаги топшириқлар талабалар сонидан кам бўлса, навбатдаги талаба яна 1)-топшириқдан бошлайди. Агар мисол битта топшириқдан иборат бўлса, уни ҳамма талабалар бажаришади.
2. Ҳар бир топшириқни ечилиш йўли тўлиқ кўрсатилган бўлиши, қайси формула ёки теоремаларга асосланганлиги тўлиқ ёритилган ҳолда бажарилади.
3. Мустақил амалий ишларда талабанинг аниқ исми, шарифи, курси ва гуруҳи кўрсатилган алоҳида дафтарда бажарилади ва амалиёт ўқитувчисига кўрсатилган муддатларда топширилади. Лозим бўлган ҳолларда ўқитувчи талабадан баъзи мисолларнинг ишланиш йўлини оғзаки сўраши мумкин.
4. Ҳар бир талаба ўз рақамига тўғри келадиган битта мавзу буйича реферат тайёрлаб, уни комиссияда ҳимоя қилиши керак.

4-МАВЗУ. ФУНКЦИЯЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ТЎЛИҚЛИГИНИ АНИҚЛАШ

1.1 Функционал ёпик синфлар. Мантик алгебрасининг $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ функциялар системаси берилган булсин.

1-таъриф. *Агар мантик алгебрасининг исталган функциясини* $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *системадаги функциялар суперпозицияси оркали ифодалаш мумкин булса, у холда Ф га тулик функциялар системаси деб айтилади.*

Исталган функцияни МКНШ ёки МДНШ куринишида ифодалаш мумкинлигидан $\{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ функциялар системасининг туликлиги келиб чикади. $\{xy, x+y, 1\}$ функциялар системаси хам тулик булади, чунки исталган функцияни Жегалкин купхади куринишига келтириш мумкин.

Куйидаги функциялар системасининг туликлигини исботланг:

а) $xy, \bar{x}$; б) $x \vee y, \bar{x}$; в) $xy, x+y, 1$;

г) $\overline{x \vee y}$; д) $\overline{x\,y}$; и) $x+y, x \vee y, 1$;

ж) $x+y+z, xy, 0, 1$; з) $x \to y, \bar{x}$; е) $x \to y, 0$.

Исбот. а). $x \vee y = \overline{\bar{x}\bar{y}}$, яъни дизъюнкция амалини конъюнкция ва инкор амаллари оркали ифодалаш мумкин. Демак, $\{xy, \bar{x}\}$ функциялар системаси тулик булади.

б). $xy = \overline{\overline{x\,y}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ эканлиги маълум. Демак, исталган мантикий функцияни дизъюнкция ва инкор амаллари оркали ифодаласа булади. Шунинг учун $\{x \vee y, \bar{x}\}$ функциялар системаси туликдир.

в). Ихтиёрий мантик алгебрасининг функциясини ягона Жегалкин купхади куринишига келтириш мумкинлигидан $\{xy, x+y, 1\}$ функциялар системасининг туликлиги келиб чикади.

г) ва д). Мантик алгебрасидаги исталган функцияни $\psi(x, y) = \overline{x\,y}$ ва $\varphi(x, y) = \overline{x \vee y}$ Шеффер функциялари оркали ифодалаш мумкин. Хакикатан хам, $\bar{x} = \varphi(x, x)$

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\varphi(x, y)} = \varphi(\varphi(x, y), \varphi(x, y))$$

ва

$$xy = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\varphi(x, x), \varphi(y, y))$$

асосий мантикий амалларни Шеффер функцияси оркали ифодалаш мумкин. Демак, $\{\overline{x\,y}\}$ ва $\{\overline{x \vee y}\}$ функциялар системаси тулик булади.

и). $x \vee y = xy + x + y$ булганлиги учун $x \vee y + (x + y) = xy$ булади. $\{xy, x+y, 1\}$ тулик система эканлиги в) пунктида исбот килинган эди, демак, $\{x+y, x \vee y, 1\}$ система туликдир.

Худди шундай бошка функциялар системасининг тулikли-гини исбот килиш мумкин.

1-теорема. *Агар* $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *функциялар системаси тулик булса, у холда унга иккитарафлама булган* $\Phi^* = \{\varphi_1^*, ..., \varphi_n^*\}$ *функциялар системаси хам тулик булади.*

Исбот. Φ^* системанинг туликлигини исботлаш учун исталган $f(x_1, ..., x_n)$ функцияни Φ^* системасидаги функциялар суперпозицияси оркали ифодалаш мумкинлигини курсатишимиз керак. Бунинг учун аввал f^* функцияни $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ системасидаги функциялар оркали ифодалаймиз (Φ система тулик булганлиги учун бу процедурани бажариш мумкин). Кейин иккитарафлама конунга асосан иккитарафлама функциялар суперпозицияси оркали f функцияни хосил киламиз.

Мисол. Куйидаги функциялар системасининг тўлиқ эмаслигини исботлайлик:

а) $\bar{x}$, 1; б) $xy,\ x\vee y$; в) $x+y,\ \bar{x}$;

г) $xy\vee yz\vee xz,\ \bar{x}$; д) $xy\vee yz\vee xz,\ 0,\ 1$.

а). $\bar{x}=x+1$ га тенг. Демак, $\{\bar{x},1\}$ системасидаги функциялар бир аргументли функциялар булади. Бизга маълумки, бир аргументли функцияларнинг суперпозицияси натижасида хосил килинган функция яна бир аргументли функция булади. Натижада, бу системадаги функциялар оркали куп аргументли функцияларни ифодалаб булмайди. Шунинг учун $\{\bar{x},1\}$ тулик система эмас.

б). $\{xy,\ x\vee y\}$ системасидаги функцияларнинг иккаласи хам монотондир. Монотон функцияларнинг суперпозицияси оркали хосил килинган функция яна монотон булишини исбот килган эдик. Демак, бу иккала функциянинг суперпозицияси оркали монотон булмаган функцияларни ифодалаш мумкин эмас ва натижада, $\{xy,\ x\vee y\}$ система туликмас система булади.

в). $\{x+y,\ \bar{x}\}$ системасидаги функциялар чизикли функциялардир. Шунинг учун бу функциялар оркали чизиклимас функцияларни ифодалаб булмайди. Демак, $\{x+y,\ \bar{x}\}$ функциялар системаси тулик эмас.

г). $\{xy\vee yz\vee xz,\ \bar{x}\}$ системасидаги функциялар уз-узига иккитарафлама функциялардир. Бу функцияларнинг суперпозициясидан хосил килинган хар кандай функция хам уз-узига иккитарафлама функция булади.

Демак, $\{xy\vee yz\vee xz,\ \bar{x}\}$ функциялар системаси тулик эмас.

д). $\{xy\vee yz\vee xz,\ 0,\ 1\}$ системадаги функцияларнинг хаммаси монотон функциялар булади. Монотон эмас функциялар бу системадаги функциялар оркали ифодаланмайди. Демак, $\{xy\vee yz\vee xz,\ 0,\ 1\}$ система тулик эмас.

Шундай килиб, юкорида келтирилган масала ечимининг анализидан куйидаги хулоса келиб чикади.

Берилган Φ функциялар системасининг тулик эмаслигини исботлаш учун системадаги функцияларнинг шундай умумий хусусиятини топиш керакки, бу хусусият функциялар суперпозицияси натижасида саклансин.

Хакикатан хам, у вактда бундай хусусиятга эга булмаган функцияни Φ системадаги функциялар суперпозицияси оркали хосил килиб булмайди.

Функцияларнинг бу маълум хусусиятларини текшириш учун одатда функционал ёпик синфлар тушунчасидан фойдаланадилар.

2-таъриф. *Агар A системадаги функциялар суперпозициясидан хосил булган функция яна шу системанинг элементи булса, у холда бундай системага суперпозицияга нисбатан ёпик система деб айтилади.*

3-таъриф. *Суперпозицияга нисбатан ёпик булган хар кандай мантик алгебрасининг функциялар системасига функционал ёпик синф деб айтилади.*

Равшанки, маълум бир хил хусусиятга эга булган функциялар системаси функционал ёпик синфни ташкил этади ва, аксинча, маълум функционал ёпик синфга кирувчи функциялар бир хил хусусиятга эга булган функциялардир. Куйидаги функциялар системаси функционал ёпик синфларга мисол була олади:

а) бир аргументли функциялар;

б) хамма мантик алгебрасининг функциялари;

в) L - чизикли функциялар;

г) S - уз-узига иккитарафлама функциялар;

д) M - монотон функциялар;

е) P_0 - нуль кийматни сакловчи функциялар;

ж) P_1 - бир кийматни сакловчи функциялар.

4-таъриф. *Буш синфдан ва мантик алгебрасининг хамма функциялари тупламидан фарк килувчи функционал ёпик синфга хусусий функционал ёпик синф деб айтилади.*

Шундай килиб, функциялар системасининг туликлиги учун бу системада хар кандай хусусий функционал ёпик синфга кирмовчи функция топилиши етарли ва зарурдир.

5-таъриф. *Уз-узидан ва мантик алгебрасининг хамма функциялари синфи* (P_2) *дан фарк килувчи функционал ёпик синфларга кирмовчи хусусий функционал ёпик синфга максимал функционал ёпик синф деб айтилади.*

Мантик алгебрасида хаммаси булиб бешта максимал функционал ёпик синф мавжуд:

P_0 - ноль сакловчи функциялар синфи, P_1 - бир сакловчи функциялар синфи, S - уз-узига иккитарафлама функциялар синфи, L - чизикли функциялар синфи.

1.2 Пост теоремаси. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *функциялар системасининг туликлиги учун бу системада* P_0, P_1, M, S, L *максимал функционал ёпик синфларнинг хар бирига кирмовчи камида битта функция мавжуд булиши етарли ва зарур (яъни* $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *шунда ва факат шундагина тулик система буладики, качонки у* P_0, P_1, M, S, L *максимал функционал ёпик синфларнинг бирортасининг хам кисм туплами булмаса).*

Исбот. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ тулик система булсин, яъни $[\Phi]=P_2$. Фараз киламизки, Φ максимал функционал ёпик синфларнинг бирортаси. У вактда F нинг ёпиклигини хисобга олиб, $P_2[\Phi]\subseteq[F]=F$ ни ёзиш мумкин, яъни $F=P_2$. Аммо бундай булиши мумкин эмас. Демак, $\Phi\subseteq F$ муносабат бажарилмайди.

Теореманинг етарлилигининг исботини укувчиларга хавола этамиз.

Натижа. Мантик алгебрасидаги хар кандай функционал ёпик синф P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпик синфларнинг бирортасининг кисм туплами булади.

Амалда бирорта $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ системанинг тулик ёки тулик эмаслигини аниклаш учун Пост жадвалидан фойдаланадилар. Пост жадвали куйидаги куринишда булади:

	P_0	P_1	S	L	M
φ_1					
φ_2					
...	...	...	...	...	...
φ_{n-1}					
φ_n					

Жадвалнинг хоналарига уша сатрдаги функция функционал ёпик синфларнинг элементи булса “+” ишора, булмаса “-” ишораси куйилади.

$\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ система тулик функциялар системаси булиши учун, теоремага асосан, жадвалнинг хар бир устунида камида битта “-” ишораси булиши етарли ва зарур.

$\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ функциялар системаси тулик булмаслиги учун P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпик синфларнинг бирортасининг кисм туплами булиши, яъни Пост жадвалининг бирор устуни тулик “+” ишораларидан иборат булиши керак.

Функциялар системасининг туликлиги тушунчаси билан синфнинг (тупламнинг) **ёпиги** тушунчаси узаро богланган.

6-таъриф. *A билан P_2 (n аргументли мантик алгебрасининг хамма функцияларини уз ичига олган) тупламнинг бирор кисм тупламини белгилаймиз. A туплам функцияларнинг суперпозициясидан хосил этилган хамма буль функциялари туплами (A туплам функциялари оркали ифодаланган хамма буль функциялари туплам)га A тупламнинг **ёпиги** деб айтилади ва [A] каби белгиланади.*

Мисол. 1. $A=P_2$ булсин, у холда [A]= P_2.

2. $A=\{1, x_1+x_2\}$ булсин, у вактда A тупламнинг ёпиги хамма L - чизикли функциялар тупламидан иборат булади.

Туплам ёпиги куйидаги хоссаларга эга:

1. [A] $\supseteq$ A;
2. [[A]] = [A];
3. агар $A_1\subseteq A_2$ булса, у холда [A_1] $\subseteq$ [A_2] булади;
4. [$A_1 \cup A_2$] $\supseteq$ [A_1] $\cup$ [A_2].

7-таъриф. *Агар [A]= A булса, у холда A туплам (синф)га функционал ёпик синф деб айтилади.*

Мисол. 1. $A=P_2$ синфи ёпик синф булади.

2. $A=\{1, x_1+x_2\}$ синфи ёпик синф булмайди.

3. L - синфи ёпик синф булади.

Осонгина куриш мумкинки, хар кандай [A] синф ёпик синф булади. Бу хол купгина функционал ёпик синфларни топишга ёрдам беради.

Туплам ёпиги ва ёпик синф тилида функциялар системасининг туликлиги хакидаги таъриф (аввалги таърифга эквивалент булган таъриф) ни бериш мумкин.

8-таъриф. *Агар [A]= P_2 булса, у холда A функция-лар системаси тулик деб айтилади.*

Мисол. Куйидаги функциялар системаларининг тулик эмаслигини Пост жадвали оркали исбот килайлик:

а) $\Phi_1=\{0, xy, x+y+z\}$; б) $\Phi_2=\{1, xy, x=y+z\}$;

в) $\Phi_3=\{\bar{x}y\vee\bar{x}z\vee\bar{y}z\}$; г) $\Phi_4=\{0, 1, x+y\}$;

д) $\Phi_5=\{0, 1, xy\}$

		P_0	P_1	S	L	M
а)	0	+	-	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	-
б)	1	-	+	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	-
в)	$\bar{x}y\vee\bar{x}z\vee\bar{y}z$	-	-	+	-	-

г)	0	+	-	-	+	+
	1	-	+	-	+	+
	$x+y$	+	-	-	+	-
д)	0	+	-	-	+	+
	1	-	+	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+

Жадвалдан куриниб турибдики, юкорида келтирилган хамма функциялар системаси тулик эмас, чунки хар бир система учун жадвалда битта устун факатгина “+” ишораларидан иборат. Шуни таъкидлашимиз керакки, хар бир система учун бу устунлар хар хил. Демак, Пост теоремаси шартидан P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпик синфларнинг бироратасини хам олиб ташлаш мумкин эмас. Бу хулосадан уз навбатида P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпик синфларнинг бироратаси иккинчисининг кисм туплами була олмаслиги келиб чикади.

1.3 Берилган мисол ёрдамида амалий кўрсатмалар.

Ф=$\{x \vee y, x \to y, \bar{x}, 1\}$ функциялар синфининг тўлиšлигини Пост жадвали ёрдамида текширинг.

1-кадам. Пост жадвали орšали берилган функциялар синфини тўлиšлигини текшириш учун, системадаги барча функцияларнинг чинлик жадвалини тузамиз

x	y	$x \vee y$	$x \to y$	$\bar{x}$	1
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1

2- кадам. Берилган функцияларнинг P_0 , P_1, L, S, M функционал ёпиš синфларга тегишлилигини юšоридаги чинлик жадвалидан аниšлаймиз.Функциямиз P_0 –ноль саšловчи функциялар синфига кириши учун аргументларнинг барчаси бир ваštда ёлђон šиймат šабул šилганда функция ќам ёлђон šиймат šабул šилиши керак. Чинлик жадвалидан кўриниб турибдики фаšат $x \vee y$ функция ноль саšловчи, šолган функцияларимиз ноль саšловчи эмас. Пост жадвалида мос устунни тўлдирамиз.

	P_0	P_1	L	S	M
$x \vee y$	+				
$x \to y$	-				
$\bar{x}$	-				
1	-				

3- кадам. Функция P_1 –бир саšловчи функциялар синфига кириши учун аргументларнинг барчаси бир ваštда чин šиймат šабул šилганда функция ќам чин šиймат šабул šилиши керак. Чинлик жадвалидан кўриниб турибдики фаšат $\bar{x}$ функция бир саšловчи эмас, šолган функцияларнинг барчаси бир саšловчи. Пост жадвалида мос устунни тўлдирамиз.

	P_0	P_1	L	S	M
$x \vee y$	+	+			
$x \to y$	-	+			

$\bar{x}$	-	-			
1	-	+			

4- кадам Энди системадаги функцияларни L- чизиšли функциялар синфига тегишли ёки тегишли эмаслигини текширамиз. Бунинг учун функцияларнинг Жегалкин кўпќади кўринишини хосил šиламиз. Кўпќадда кўпайтириш амали иштирок этмаса, бундай функция чизиšли бўлади

$$x \vee y = xy + x + y,$$

$$x \to y = \bar{x} \vee y = \bar{x}y + \bar{x} + y = (x+1)y + x + 1 + y = xy + y + x + 1 + y = xy + x + 1$$

$$\bar{x} = x + 1$$

$$1 = 1$$

Кўриниб турибдики $x \vee y$ ва $x \to y$ функциялар чизиšли эмас, $\bar{x}$ ва 1 чизикли. Пост жадвалида мос устунни тўлдирамиз

	P_0	P_1	L	S	M
$x \vee y$	+	+	-		
$x \to y$	-	+	-		
$\bar{x}$	-	-	+		
1	-	+	+		

5- кадам. Чинлик жадвали ёрдамида функцияларнинг S-ўз –ўзига šўшма функциялар синфига киришини текширамиз. Буни 3 хил усулда амалга ошириш мумкин

1-усул. Чинлик жадвалида функцияларни šийматлари сатрини чизиš билан ўртасидан ажратиб, шу чизиššа нисбатан šийматларнинг симметриклигини текширамиз

x	y	$x \vee y$	$x \to y$	$\bar{x}$	1
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1

2- усул. Чинлик жадвалида функция кийматлирини тескари œгириб, (кушмалик принципига кœра) инкорларини олганда функциянинг чинлик киймати билан мос тушса, бу функция œз-œзига šœшма бœлади

3-усул. $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ функцияга šœшма $f^*(x_1, x_2, \dots x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n)$ функцияни топиш учун функциянинг барча œзгарувчиларини ва функцияни инкорини топиш керак. Агар $f(x_1, x_2, \dots x_n) = f^*(x_1, x_2, \dots x_n)$ бœлса, функция œз-œзига иккитарафлама ёки œз-œзига šœшма функция дейилади

$f = x \vee y$ $\quad f^* = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}} = x \wedge y,$ $\quad f \neq f^*$ демак бу функция œз-œзига šœшма эмас.

$f = x \to y$ $\quad f^* = \overline{\bar{x} \to \bar{y}} = \bar{x} \wedge \bar{\bar{y}} = \bar{x} \wedge y,$ $\quad f \neq f^*$ демак бу функция œз-œзига šœшма эмас.

$f = \bar{x}$ $\quad f^* = \bar{\bar{\bar{x}}} = \bar{x}$ бу холда, $f = f^*$ бу функция œз-œзига šœшма функция бœлади.

1 га šœшма функция 0 бœлади

	P_0	P_1	L	S	M

$x \vee y$	+	+	-	-	
$x \to y$	-	+	-	-	
$\bar{x}$	-	-	+	+	
1	-	+	+	-	

6- кадам. Функциялар системасидаги функцияларни монотонлигини текширамиз. Функция монотон бœлиши учун барча $\alpha_i < \alpha_j$ ларда $f(\alpha_i) \le f(\alpha_j)$ шарт бажарилиши керак. Чинлик жадвалидан кœриниб турибдики $x \vee y$ монотон, $x \to y$ номонотон, $\bar{x}$ номонотон, 1 монотон бœлади.

	P_0	P_1	L	S	M
$x \vee y$	+	+	-	-	+
$x \to y$	-	+	-	-	-
$\bar{x}$	-	-	+	+	-
1	-	+	+	-	+

Пост жадвалнинг барча устунларида камида биттадан «-» ишора šатнашган, яъни максимал функционол синфларга кирмайдиган камида биттадан функция мавжуд. Демак кœрилган функциялар системаси тœлиš.

Топширик вариантлари

1. Агар $\Phi = \{\varphi_1,..., \varphi_n\}$ ва $F = \{f_1,..., f_n\}$ функционал ёпик синфлар булса, у холда $\Phi \cap F$ ва $\Phi^* = \{\varphi_1^*,..., \varphi_n^*\}$ лар хам функционал ёпик синфлар ва $\Phi \cup F$ ни функционал ёпик синф булмаслигини исботланг.

2. Куйидаги максимал функционал ёпик P_0, P_1, S, L, M синфларнинг бирортаси иккинчисининг кисм тœплами бœлмаслигини исботланг.

3. Хар кандай шахсий функционал ёпик синф P_0, P_1, S, L, M максимал функционал ёпик синфларнинг бирортасининг кисм тœплами эканлигини исботланг.

4. Šуйидаги функциялар синфининг тўлиšлигини Пост жадвали ёрдамида текширинг.

1. Ф={ $x \wedge y, x \to y, \bar{x}, x \oplus y$ }

2. $F=\{x\to y,\ x\leftrightarrow y,\bar{x},1\}$

3. $F=\{x\vee y,\ x\leftrightarrow y,\bar{x},0\}$

4. $F=\{\bar{x}\to y,\ xy\leftrightarrow \bar{x}\bar{y},\bar{x},1\}$

5. $F=\{xy\wedge z\to xy,\ xy\oplus y,\ 1\}$

6. $F=\{xy\to xy,\ xyz\oplus y\bar{z},\bar{x}\leftrightarrow \bar{x}y\}$

7. $F=\{x\to \bar{y},\ \bar{x}\leftrightarrow y,\bar{\bar{x}},1\}$

8. $F=\{x\vee y,\ x\leftrightarrow y,\bar{x},0\}$

9. $F=\{\bar{x}\to y,\ xy\leftrightarrow \bar{x}\bar{y},\bar{x}\vee z,0\}$

10. $F=\{xy\wedge z\to xy,\ xy\oplus y,\ x\downarrow y\}$

11. $F=\{xy\to xy,\ xz\oplus y\bar{z},\bar{x}\vee \bar{x}y\}$

12. $F=\{x\oplus yz,\ xz\leftrightarrow y\bar{z},\bar{x}\vee y,1\}$

13. $F=\{x\vee y\downarrow z,\ x\oplus y, yz\vee \bar{x},0\}$

14. $F=\{x\vee yz,\ x\oplus z\oplus y\bar{z},\bar{x}\vee \bar{y}z\}$

15. $F=\{x\oplus y,\ xz\leftrightarrow yu,\bar{x},1\}$

16. $F=\{xz\vee yz,\ xy\oplus xz\oplus yz,\bar{x},0\}$

17. $F=\{\bar{x}y\to x\bar{y},\ xy\leftrightarrow \bar{x}\bar{y},x,1\}$

18. $F=\{\bar{x}\bar{y}\wedge z\to xy,\ xy\oplus y,\ 1\}$

19. $F=\{xy\to xy,\ x\oplus y\oplus z\oplus y\bar{z},\bar{x}\leftrightarrow \bar{x}y\}$

20. $F=\{x\to \bar{y},\ \bar{x}yz\leftrightarrow xy,\bar{\bar{x}},1\}$

21. $F=\{x\vee y\to xy,\ xz\leftrightarrow y,\bar{x},0\}$

22. $F=\{\bar{x}\to xy,\ xy\leftrightarrow \bar{x}\bar{y},\bar{x}\vee yz,0\}$

23. $F=\{xy\wedge z\to xy,\ x\oplus y\oplus y,\ x\downarrow y\}$

24. $F=\{x\to x,\ xz\oplus y\bar{z},\bar{x}\vee \bar{x}y\}$

25. $F=\{x\oplus y\bar{z},\ \bar{x}z\leftrightarrow y\bar{z},\bar{x}\vee xy,1\}$

26. $F=\{x\vee yz,\ x\oplus y,yz\vee \bar{x},0\}$

27. $F=\{x\mid \bar{z}\vee y\mid z,\ x\oplus z\oplus y\bar{z},\bar{x}\vee \bar{y}z\}$

28. $F=\{x\oplus yz,\ xz\leftrightarrow yu,\bar{x}\mid y,1\}$

29. $F=\{x\mid z\vee y\mid z,\ x\oplus z\oplus y,\bar{x},0\}$

30. $F=\{\bar{x}yz\to x\bar{y}z,\ xy\vee z\leftrightarrow \bar{x}\bar{y},x,1\}$