10-MA’RUZA. Mantiq qonunlari. Mantiq funksiyalari uchun rostlik jadvalini tuzish(2 soat).

REJA

1. Mantiq qonunlari.
2. Mantiq funksiyalari uchun rostlik jadvalini tuzish.
3. Rostlik jadvali bo‘yicha mantiq funksiyalarining ko‘rinishini tiklash

Kalit so’zlar: *Mantiq qonunlari, mantiq funksiyalari, rostlik jadvali, mantiq funksiyalari, funksiyalarini tiklash.*

10.1.Mantiq qonunlari.

Bizga biror α, β, γ mantiqiy formulalar berilgan bo’lsin. Ushbu formulalar uchun quyidagi mantiq qonunlari har doim o’rinli bo’ladi:

1. Ikkilangan rad etish qonuni: $\neg\neg\alpha\equiv\alpha$
2. Kon`yunktsiya va diz`yunktsiya amallarining idempotentlik qonuni:

$$\alpha\&\alpha\equiv\alpha,$$
$$\alpha\lor\alpha\equiv\alpha$$

3. Kon`yunktsiya va diz`yunktsiya amallarining kommutativlik qonuni:

$$\alpha\&\beta\equiv\beta\&\alpha,$$
$$\alpha\lor\beta=\beta\lor\alpha$$

4. Kon`yunktsiya va diz`yunktsiya amallarining assotsiativlik qonuni:

$$\alpha\&(\beta\&\gamma)\equiv(\alpha\&\beta)\&\gamma,$$
$$\alpha\lor(\beta\lor\gamma)=(\alpha\lor\beta)\lor\gamma)$$

5. Kon`yunktsiya va diz`yunktsiya amallarining bir-biriga nisbatan distributivlik qonuni:

$$\alpha\&(\beta\lor\gamma)\equiv(\alpha\&\beta)\lor(\alpha\&\gamma)\ ,$$
$$\alpha\lor(\beta\&\gamma)\equiv(\alpha\lor\beta)\&(\alpha\lor\gamma)$$

6. Yutilish qonunlari: $\alpha\&(\alpha\lor\beta)\equiv\alpha,$

$$\alpha\lor(\alpha\&\beta)\equiv\alpha$$

7. De Morgan qonunlari: $\neg(\alpha\lor\beta)\equiv\neg\alpha\ \&\ \neg\beta$

A	B	¬ (A∨B)	¬ A & ¬B
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

$$\neg(\alpha\&\beta)\equiv\neg\alpha\lor\neg\beta$$

A	B	¬ (A&B)	¬ A∨ ¬B
0	0	1	1
0	1	1	1

1	0	1	1
1	1	0	0

8. Tavtologiya qonuni: $\alpha \vee \neg\alpha \equiv 1$
9. Ziddiyat qonuni: $\alpha \,\&\, \neg\alpha \equiv 0$
10. 0 va 1 qonunlari: $\alpha \& 1 \equiv \alpha,\quad \alpha \& 0 \equiv 0$

    $\alpha \vee 1 \equiv 1,\quad \alpha \vee 0 \equiv \alpha$

    $\neg 1 \equiv 0,\quad \neg 0 \equiv 1$

11. Kontrpozitsiya qonuni: $\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$

12. Implikatsiyadan qutilish qonuni: $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$

13. Ekvivalentlikdan qutilish qonuni:

$$\alpha \sim \beta \equiv (\alpha \to \beta) \& (\beta \to \alpha) \equiv \alpha \& \beta \vee \neg\alpha \& \neg\beta$$

14. Implikatsiya xossalari: $0 \to \alpha \equiv 1,\quad 1 \to \alpha \equiv \alpha,$

    $\alpha \to 1 \equiv 1,\quad \alpha \to 0 \equiv \neg\alpha.$

Mantiq qonunlarini isbotlash uchun ularning rostlik jadvallarini tuzish yetarli.

10.2. Mantiq funksiyalari uchun rostlik jadvalini tuzish.

Misol 1. $\alpha(A,B,C) = (A \vee B) \leftrightarrow \left(C \to \overline{A}\right)$

formulaning rostlik jadvalini tuzish uchun amallarni bajarish ketma-ketligidan foydalanamiz:

$$\alpha(0,0,0) = (0 \vee 0) \leftrightarrow \left(0 \to \bar{0}\right) = 0 \leftrightarrow (0 \to 1) = 0 \leftrightarrow 1 = 0;$$
$$\alpha(0,0,1) = (0 \vee 0) \leftrightarrow \left(1 \to \bar{0}\right) = 0 \leftrightarrow (1 \to 1) = 0 \leftrightarrow 1 = 0;$$
$$\alpha(0,1,0) = (0 \vee 1) \leftrightarrow \left(0 \to \bar{0}\right) = 1 \leftrightarrow (0 \to 1) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$\alpha(0,1,1) = (0 \vee 1) \leftrightarrow \left(1 \to \bar{0}\right) = 1 \leftrightarrow (1 \to 1) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$\alpha(1,0,0) = (1 \vee 0) \leftrightarrow \left(0 \to \bar{1}\right) = 1 \leftrightarrow (0 \to 0) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$\alpha(1,0,1) = (1 \vee 0) \leftrightarrow \left(1 \to \bar{1}\right) = 1 \leftrightarrow (1 \to 0) = 1 \leftrightarrow 0 = 0;$$
$$\alpha(1,1,0) = (1 \vee 1) \leftrightarrow \left(0 \to \bar{1}\right) = 1 \leftrightarrow (0 \to 0) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$\alpha(1,1,1) = (1 \vee 1) \leftrightarrow \left(1 \to \bar{1}\right) = 1 \leftrightarrow (1 \to 0) = 1 \leftrightarrow 0 = 0.$$

Rostlik jadvalini tuzamiz:

A	**B**	**C**	**A∨B**	**⌐A**	**C→⌐A**	**α (A,B,C)= (A∨B)~(C→⌐A)**
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1

1	1	1	1	0	0	0

A	B	C	**α=α(A,B,C)**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Misol 2. α(A, B, C)= ⌐(A&B)→(A∨B~C)
formulaning rostlik jadvalini topish uchun amallarni bajarilish ketma-ketligi: 1) qavs ichidagi amal bajariladi, 2) ⌐, 3) &, 4) ∨ , 5) ~ va 6) → amallari birin-ketin bajariladi va formulaning rostlik jadvali tuziladi.

A	B	C	A&B	⌐ (A&B)	A∨B	A∨B~C	α(A, B, C)= ⌐(A&B)→(A∨B~C)
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1

10.3.Rostlik jadvali bo‘yicha mantiq funksiyalarining ko‘rinishini tiklash

Biz shu paytgacha berilgan formula uchun rostlik jadvallarini tuzishni qarab chiqdik. Savol tug’iladi: Aksincha, rostlik jadvali berilgan bo‘lsa, mantiq funksiyasini tiklash mumkinmi?

Aytaylik, bizga A, B, C mulohaza o’zgaruvchilariga bo‘liq bo‘lgan α=α(A,B,C) formula berilgan bo‘lsin.

Ushbu rostlik jadvaliga ega bo‘lgan cheksiz ko‘p teng kuchli formulalar mavjud. Ulardan ikkitasini, ya`ni rostlik jadvalidagi birlar qatori bo’yicha va rostlik jadvalidagi nollar qatori bo’yicha mantiq funksiyasi ko‘rinishini tiklashni ko‘rib chiqamiz,

1) **Rostlik jadvalida α=α(A,B,C) formula 1 ga teng bo‘lgan qator raqamlarini yozib chiqamiz.**

2-qator 3-qator 6-qator 8-qator

Har bir qatorning mantiqiy imkoniyatlaridagina 1 ga teng bo‘lgan, boshqa imkoniyatlarda esa 0 ga teng bo‘lgan formulalarni yozib chiqamiz. Buning uchun 1 ga teng bo‘lgan qatordagi mulohazalar qiymatlarini rostga aylantirib, mantiq qonunlariga asosan mulohazalar kon’yunksiyalarini olish kerak.

2-qator uchun: ⌐A&⌐B&C; 3- qator uchun: ⌐A&B&⌐C;
6-qator uchun: A&⌐B&C; 8-qator uchun: A&B&C
bo‘ladi. Agar 2-,3-,6-,8-qatorlar bo‘yicha olingan formulalar diz’yunksiyalari olinsa, hosil bo‘lgan formula izlanayotgan formula bo‘ladi:

α=α(A,B,C)=⌐A&⌐B&C∨⌐A&B&⌐C∨A&⌐B&C∨A&B&C (1)

2) **Rostlik jadvalida α=α(A,B,C) formula 0 ga teng bo‘lgan qator nomerlarini yozib chiqamiz:** 1-qator
4-qator 5-qator 7-qator

Har bir qator mantiqiy imkoniyatlaridagina 0 ga teng bo‘lgan, boshqa imkoniyatlarda esa 1 ga teng bo‘lgan formulalarni yozib chiqamiz. Buning uchun 0 ga teng bo‘lgan qatordagi fikr o‘zgaruvchilari qiymatlarini 0(yolg‘on) ga aylantirib, fikr o‘zgaruvchilari diz’yumksiyasini olish lozim. U holda

1-qator uchun: A∨B∨C; 4-qator uchun: A∨⌐B∨⌐C;
5-qator uchun: ⌐A∨B∨C; 7-qator uchun: ⌐A∨⌐B∨C bo‘ladi.

Agar qatorlar bo‘yicha olingan formulalar kon’yunksiyasi olinsa, hosil bo‘lgan formula izlanayotgan formula bo‘ladi.

α=α(A,B,C)=(A∨B∨C)&(A∨⌐B∨⌐C)&(⌐A∨B∨C)&(⌐A∨⌐B∨C) (2)

(1) - MDNSh va (2) - MKNShlar teng kuchli, chunki ularning rostlik jadvallari bir xil. Shuning uchun ham ulardan qaysi birini tuzish kamroq vaqt talab qilsa, shu ko’rinishini tiklash maqsadga muvofiq.

Rostlik jadvali berilgan ixtiyoriy formulani yuqoridagi uslubda qurish mumkin.

Teorema 1. Har bir ayniy yolg‘on bo‘lmagan formula yagona mukammal diz’yunktiv normal shaklga ega.

Teorema 2. Har bir tavtologiya bo‘lmagan formula yagona mukammal kon’yunktiv normal shaklga ega.

Nazorat uchun savollar:

1. Ikkilangan rad etish qonunini keltiring va isbotlang.
2. & va ∨ amallarining idempotentligi qonunini keltiring va isbotlang.
3. & va ∨ amallarining kommutativligi qonunini keltiring va isbotlang.
4. & va ∨ amallarining assosiativligi qonunini keltiring va isbotlang.
5. & va ∨ amallarining bir-biriga nisbatan distributivlik qonunlarini keltiring va isbotlang.
6. Yutilish qonunlarini keltiring va isbotlang.

7. De Morgan qonunlarini keltiring va isbotlang.
8. $\alpha \vee \neg \alpha \equiv 1$ ekanligini isbotlang.
9. Qarama-qarshilik qonunini keltiring va isbotlang.
10. Tavtologiya va qarama-qarshilik qonunlarini isbotlang.
11. Kontrpozitsiya qonunini keltiring va isbotlang.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

Quyidagi mantiq funksiyalari uchun rostlik jadvallarini tuzing:

1. $\alpha(A,B,C)= \neg A\&B\vee\neg(A\vee C)$
2. $\alpha(A,B,C)=C\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$
3. $\alpha(A,B,C)=A\&B\rightarrow\neg(A\vee\neg B)$
4. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\&\neg C)\sim(\neg A\vee B)$
5. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\vee\neg C)\sim B$
6. $\alpha(A,B,C)=(A\rightarrow B)\rightarrow\neg C$
7. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\rightarrow\neg B)\&(B\rightarrow C)$
8. $\alpha(A,B,C)=A\&(B\rightarrow C)\vee\neg B$
9. $\alpha(A,B,C)=\neg(A\&B\vee C)$
10. $\alpha(A,B,C)=(A\sim B)\&(\neg B\sim\neg C)$
11. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\rightarrow\neg C)\sim B$
12. $\alpha(A,B,C)=(\neg B\vee\neg C)\rightarrow(A\vee C)$
13. $\alpha(A,B,C)=A\rightarrow(\neg B\vee\neg C)$
14. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\rightarrow B)\&(\neg B\rightarrow A)\&\neg C$

TESTLAR

1. Predikat qanday qismlarga bo`linadi-?
A. subyekt va predikat qismlarga bo`linadi.
B. Obyekt va predikat qismlarga bo`linadi
C. Natija va predikat qismlarga bo`linadi
D. Subyekt va obyekt qismlarga bo`linadi
2. Subyekt bu-?
A. mulohazada biror narsa haqida nimadir tasdiqlaydi
B. Hodisa
C. predikat
D. Obyekt
3. Predikat bu-?
A. subyektni tasdiqlash
B. Obyektni tasdiqlash
C. Natijani tasdiqlash
D. Obyekt haqidagi mulohaza
4. Bir joyli (bir o‘rinli) predikatning ta’rifi-?
A. M to‘plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to‘plamdan qiymat qabul qiluvchi bir argumentli $P(x)$ funksiya bir joyli (bir o‘rinli) predikat deb ataladi.
B. M to‘plamda aniqlangan va $\{1\}$ to‘plamdan qiymat qabul qiluvchi bir argumentli $P(x)$ funksiya bir joyli (bir o‘rinli) predikat deb ataladi.
C. M to‘plamda aniqlangan va $\{0\}$ to‘plamdan qiymat qabul qiluvchi bir argumentli $P(x)$ funksiya bir joyli (bir o‘rinli) predikat deb ataladi.

D. M to‘plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to‘plamdan qiymat qabul qiluvchi ikki argumentli $P(x, y)$ funksiya bir joyli (bir o‘rinli) predikat deb ataladi.

5. Ikki joyli predikat ta’rifi-?

A. $M = M_1 \times M_2$ to‘plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to‘plamdan qiymat oluvchi ikki argumentli $P(x, y)$ funksiya ikki joyli predikat deb ataladi.

B. $M = M_1$ to‘plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to‘plamdan qiymat oluvchi ikki argumentli $P(x, y)$ funksiya ikki joyli predikat deb ataladi.

C. $M = M_1 \times M_2$ to‘plamda aniqlangan va $\{1\}$ to‘plamdan qiymat oluvchi ikki argumentli $P(x, y)$ funksiya ikki joyli predikat deb ataladi.

D. $M = M_1 \times M_2$ to‘plamda aniqlangan va $\{0\}$ to‘plamdan qiymat oluvchi ikki argumentli $P(x, y)$ funksiya ikki joyli predikat deb ataladi.

6. Predikatlarning kon’yunksiyasi deb nimaga aytiladi-?

A. Berilgan M to‘plamdaaniqlangan $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlarningkon’yunksiyasideb, faqatvafaqat $x \in M$ qiymatlardaaniqlanganhamda $P(x)$ va $Q(x)$ larbirvaqtdachinqiymatqabulqilgandaginachinqiymatqabulqilib, qolganbarchahollardayolg‘onqiymatqabulqiluvchiyangipredikatgaaytiladi

B. Berilgan M to‘plamdaaniqlangan $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlarningkon’yunksiyasideb, faqatvafaqat $x \in M$ qiymatlardaaniqlanganhamda $P(x)$ birvaqtdayolg`onqiymatqabulqilgandaginachinqiymatqabulqilib, qolganbarchahollardayolg‘onqiymatqabulqiluvchiyangipredikatgaaytiladi

C. Agar hamma $x \in M$ qiymatlarda $P(x)$ predikat chin qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat va $x \in M$ ning barcha qiymatlarida $P(x)$ predikat yolg‘on qiymat qabul qilganda chin qiymat qabul qiluvchi predikatga $P(x)$ aytiladi.

D. Faqat va faqatgina $x \in M$ lar uchun bir vaqtda $P(x)$ chin qiymat va $Q(x)$ yolg‘on qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat qabul qilib, qolgan hamma hollarda chin qiymat qabul qiladigan $P(x) \to Q(x)$ predikat $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlarning konyuksiyasi deb ataladi.

7. Predikatning inkori deb nimaga aytiladi.

A. Agarhamma $x \in M$ qiymatlarda $P(x)$ predikatchinqiymatqabulqilgandayolg‘onqiymatva $x \in M$ ningbarchaqiymatlarida $P(x)$ predikatyolg‘onqiymatqabulqilgandachinqiymatqabulqiluvchipredikatga $P(x)$ predikatninginkoridebataladi

B. Agarhamma $x \in M$ qiymatlarda $P(x)$ predikatchinqiymatqabulqilgandachinqiymatva $x \in M$ ningbarchaqiymatlarida $P(x)$ predikatchinqiymatqabulqilgandachinqiymatqabulqiluvchipredikatga $P(x)$ predikatninginkoridebataladi

C. Berilgan M to‘plamda aniqlangan $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlarning inkori deb, faqat va faqat $x \in M$ qiymatlarda aniqlangan hamda $P(x)$ va $Q(x)$ lar bir vaqtda chin qiymat qabul qilgandagina chin qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda yolg‘on qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi

D. Berilgan M to‘plamda aniqlangan $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlarning inkori deb, faqat va faqat $x \in M$ qiymatlarda aniqlangan hamda $P(x)$ va $Q(x)$ lar bir vaqtda chin qiymat qabul qilgandagina chin qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda yolg‘on qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi

8. Predikatlarning implikasiyasi deb nimaga aytiladi.

A. Faqatvafaqatgina $x \in M$ laruchunbirvaqtda $P(x)$ chinqiymatva $Q(x)$ yolg'onqiymatqabulqilgandayolg'onqiymatqabulqilib, qolganhammahollardachinqiymatqabulqiladigan $P(x) \to Q(x)$ predikat $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlarningimplikasiyasidebataladi.

B. Faqatvafaqatgina $x \in M$ laruchunbirvaqtda $P(x)$ chinqiymatva $Q(x)$ yolg'onqiymatqabulqilgandachinqiymatqabulqilib, qolganhammahollardachinqiymatqabulqiladigan $P(x) \to Q(x)$ predikat $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlarningimplikasiyasidebataladi.

C. Berilgan M to'plamda aniqlangan $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlarning implikasiyasi deb, faqat va faqat $x \in M$ qiymatlarda aniqlangan hamda $P(x)$ va $Q(x)$ lar bir vaqtda chin qiymat qabul qilgandagina chin qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda yolg'on qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi

D. Agar hamma $x \in M$ qiymatlarda $P(x)$ predikat chin qiymat qabul qilganda yolg'on qiymat va $x \in M$ ning barcha qiymatlarida $P(x)$ predikat yolg'on qiymat qabul qilganda chin qiymat qabul qiluvchi predikatga $P(x)$ predikatning implikasiyasi deb ataladi

9. $\overline{\forall x A(x)}$. Predikatga teng kuchli predikatni aniqlang.

A. $\exists x \overline{A(x)}$

B. $\exists x \overline{\overline{A(x)}}$

C. $x \overline{A(x)}$

D. $\exists x A(x)$

10. $\overline{\exists x A(x)}$. Predikatga teng kuchli predikatni aniqlang.

A. $\forall x \overline{A(x)}$

B. $\exists x \overline{A(x)}$

C. $x \overline{A(x)}$

D. $\exists x A(x)$

11. $\forall x A(x)$. Predikatga teng kuchli predikatni aniqlang.

A. $\overline{\exists x \overline{A(x)}}$

B. $\exists x \overline{A(x)}$

C. $\exists x \overline{\overline{A(x)}}$

D. $x \overline{A(x)}$

12. $\exists x A(x)$. Predikatga teng kuchli predikatni aniqlang.

A. $\overline{\forall x \overline{A(x)}}$

B. $\forall x \overline{A(x)}$

C. $\forall x \overline{\overline{A(x)}}$

D. $\exists x \overline{A(x)}$

13. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$. Predikatga teng kuchli predikatni aniqlang.

A. $\forall x [A(x) \wedge B(x)]$

B. $\forall x [\overline{A(x) \wedge B(x)}]$

C. $\forall x [A(x) \vee B(x)]$

D. $\forall x [\overline{A(x) \vee B(x)}]$

14. $C \wedge \forall x B(x)$. Predikatga teng kuchli predikatni aniqlang.

A. $\forall x[C \wedge B(x)]$

B. $C \vee \forall x B(x)$

C. $\forall x[\overline{C \wedge B(x)}]$

D. $\forall x[\overline{C \vee B(x)}]$