

**Практический минимум по курсу  
«Линейная алгебра и Аналитическая геометрия»**

1. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$  и  $C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -8 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ .

Найти матрицу  $X$ , если  $2A - X = 4B + 5C$ .

2. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Найти те из произведений  $AB$ ,  $BA$ ,  $BX$ ,  $XB$ ,  $B^T BX$ ,  $AY$ ,  $A^T AY$ , которые существуют.

3. Вычислить определитель:

а)  $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 2 & -4 & -8 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 27 \\ -9 & 3 & 0 \\ 15 & 6 & -3 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}$ ;

г)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ .

4. Найти обратную матрицу для матрицы  $A$ , если она существует:

а)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ ; в)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

5. Решить систему линейных уравнений: 1) методом Крамера; 2) матричным методом; 3) методом Гаусса:

а)  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

6. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора  $\overline{AB}$ , если  $A(4, -5, 2)$ ,  $B(2, -3, 1)$ .

7. Найти координаты вектора  $\vec{a}$ , если его длина равна 2 и он образует с осями  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  углы  $135^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $60^\circ$  соответственно.

8. Даны точки  $A(1, -1, 0)$ ,  $B(5, 3, -7)$ ,  $C(8, -1, -1)$ ,  $D(1, 2, 3)$ . Найти:

а) скалярное произведение  $(\vec{AB}, \vec{AC})$ ; б) косинус угла между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ ; в) векторное произведение  $[\vec{AB}, \vec{AC}]$ ; г) смешанное произведение  $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ .

9. Доказать, что точки  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(0; 1; 5)$ ,  $C(-1; 2; 1)$  и  $D(2; 1; 3)$  лежат в одной плоскости.

10. Даны вершины тетраэдра  $A(0; 0; 2)$ ,  $B(3; 0; 5)$ ,  $C(1; 1; 0)$ ,  $D(4; 1; 2)$ . Найти его объем и длину высоты, опущенной из вершины  $D$ .

11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-3; 4)$ , и перпендикулярной прямой: а)  $x - 2y + 5 = 0$ ; б)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$ ; в)  $x = 2$ ; г)  $y = -1$ ; д)  $x = 3 + t$ ,  $y = 4 - 7t$ .

12. Установить взаимное расположение двух данных прямых на плоскости (совпадают, параллельны, пересекаются); в случае пересечения найти общую точку прямых и косинус угла между ними:

а)  $2x + 3y = 0$  и  $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - t; \end{cases}$  б)  $x + 2y = 15$  и  $\begin{cases} x = 5 + 4t, \\ y = -2 - 2t; \end{cases}$   
в)  $3x + 4y - 20 = 0$  и  $\begin{cases} x = 4 - 8t, \\ y = 2 + 6t; \end{cases}$  г)  $x - 5y + 9 = 0$  и  $x + y - 3 = 0$ .

13. Составить общее уравнение плоскости:

а) проходящей через точку  $A(1, -1, 2)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n}(2, 3, 1)$ ; б) проходящей через точку  $M_0(2; -1; -1)$  параллельно векторам  $\vec{a} = (4; 2; 1)$  и  $\vec{b} = (-5; 1; 2)$ ; в) проходящей через точки  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(0; 1; 5)$  и  $C(-1; 2; 1)$ .

14. Установить взаимное расположение двух данных плоскостей (пересекаются, параллельны, совпадают):

а)  $x - y + 3z + 1 = 0$  и  $2x - y + 5z - 2 = 0$ ; б)  $x - 2y + z + 4 = 0$  и  $-2x + 4y - 2z - 8 = 0$ .

**15.** Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки  $M_1(1; 2; 3)$  и  $M_2(2; 4; 7)$ .

**16.** Установить взаимное расположение прямых в пространстве:

а)  $x = -t, y = -4 - 5t, z = 3 + 3t$  и  $\begin{cases} 4x + y + 3z - 5 = 0, \\ 7x - 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$

б)  $x = -3t, y = 2 + 3t, z = 1$  и  $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{13} = \frac{z-1}{10}$ .

в)  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$  и  $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

**17.** Определить тип данной кривой на плоскости, сделать схематический чертеж:

а)  $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$ ;      б)  $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$ ;

в)  $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ .

**18.** Найти ранг матрицы:

а)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ ;      б)  $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

**19.** Найти общее решение однородной системы линейных уравнений:

а)  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 9x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$       б)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$

**20.** Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений, если она совместна:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1. \end{cases}$$