Домашнее задание 3

Морозов Леонид, 519/2

18 октября 2022 г.

Задача 1. Прямоугольник задан вершинами с координатами $A(0;0)$, $B(u;0)$, $C(u;v)$, $D(0;v)$, где точка $(u;v)$ лежит в первой четверти на графике функции $y = -x^3 + 8$. Найти наибольшую возможную площадь прямоугольника.

Точка $(u;v)$ лежит в первой четверти $\Rightarrow u > 0, v > 0 \Rightarrow S = u * v$.
Точка $(u;v)$ лежит на графике функции $y = -x^3 + 8 \Rightarrow v = -u^3 + 8$.
$S(u) = u * v = u * (-u^3 + 8) = -u^4 + 8u \to max$. $S'(u) = -4(u^3 - 2) = 0 \Rightarrow u = \sqrt[3]{2} \Rightarrow v = -2 + 8 = 6 \Rightarrow S_{max} = 6\sqrt[3]{2}$.

Ответ: $S_{max} = 6\sqrt[3]{2}$

Задача 2. В эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, вписать прямоугольник максимальной площади так, чтобы стороны прямоугольника были параллельны осям эллипса.

$|u| \leq a, |v| \leq b$.
Пусть $u > 0, v > 0, (u;v) \Rightarrow S = 2u * 2v = 4uv, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{v^2}{b^2} = 1 - \frac{u^2}{a^2} \Rightarrow v = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - u^2} \Rightarrow S(u) = 4u * \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - u^2} = \frac{4b}{a}u\sqrt{a^2 - u^2}$
$S'(u) = \frac{4b}{a}(\sqrt{a^2 - u^2} + u\frac{-2u}{2\sqrt{a^2-u^2}}) = \frac{4b}{a} * \frac{a^2-2u^2}{\sqrt{a^2-u^2}} \Rightarrow u = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow v = \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{max} = 4uv = 2 * \frac{a}{\sqrt{2}} * \frac{b}{\sqrt{2}} = 2ab$

Ответ: Прямоугольник максимальной площади $S_{max} = 2ab$, вписанный в искомый эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, такой, что его стороны параллельны осям эллипса задаётся вершинами $A(-u;-v)$, $B(-u;v)$, $C(u;v)$, $D(u;-v)$, где $u = \frac{a}{\sqrt{2}}, v = \frac{b}{\sqrt{2}}$