Морозов Леонид 519/2

№1.

$M\xi = 300$

Оценить а) $P(\xi > 400)$ б) $P(\xi \le 500)$

Воспользуемся неравенством Маркова при $f(x) = x$:

$$P(\xi \ge a) \le \frac{M\xi}{a}$$

а) $P(\xi \ge 400) \le \frac{300}{400} = 0{,}75$

$$P(\xi > 400) + P(\xi = 400) = P(\xi \ge 400) \le 0{,}75 \Rightarrow \underline{P(\xi > 400)} \le 0{,}75 - P(\xi = 400) < \underline{0{,}75}$$

б) $P(\xi \ge 500) \le \frac{300}{500} = 0{,}6 \Rightarrow P(\xi < 500) = 1 - P(\xi \ge 500) \ge 0{,}4$

$$P(\xi \le 500) = P(\xi < 500) + P(\xi = 500) \ge 0{,}4 \Rightarrow \underline{P(\xi < 500)} \ge 0{,}4 + P(\xi = 500) > \underline{0{,}4}$$

Ответ: а) $P(\xi > 400) < 0{,}75$ б) $P(\xi \le 500) > 0{,}4$

№2.

$n = 1600$, $p = 0{,}3$, $P(|\xi - M\xi| < 50) = ?$

Неравенство Чебышёва: $P(\xi \ge a) \le \frac{E(\xi^2)}{a^2}$

$$\exists\, \eta = |\xi - M\xi| \Rightarrow P(\eta \ge a) \le \frac{E(\eta^2)}{a^2}$$

$\Downarrow a = 50$

т.к. $\xi \sim Bin(n, p)$

$$P(|\xi - M\xi| \ge 50) \le \frac{E((\xi - M\xi)^2)}{2500} = \frac{D(\xi)}{2500} = \frac{np(1-p)}{2500} = \frac{1600 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}{2500} = 0{,}1344$$

$\Downarrow$

$$P(|\xi - M\xi| < 50) = 1 - P(|\xi - M\xi| \ge 50) \ge 0{,}8656$$

Ответ: $P(|\xi - M\xi| < 50) \ge 0{,}8656$

№3.

$9, 5, 7, 7, 4, 10$ – выборка $\Rightarrow n = 6$, $\overline{X} = \frac{9+5+7+7+4+10}{6} = 7$

$D = 1 \Rightarrow \sigma = \sqrt{D} = 1$

выбор. среднее

$$P\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01$$

$x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}995} \approx 2{,}57$ – $1-\frac{\alpha}{2}$ -квантиль стандартного нормального распределения

$\Downarrow$

Доверительный интервал: $7 - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 2{,}57 \le \mu \le 7 + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 2{,}57$

$\Downarrow$

$7 - 1{,}05 \le \mu \le 7 + 1{,}05 \Rightarrow 5{,}95 \le \mu \le 8{,}05$

Ответ: доверительный интервал для мат. ожидания: $5{,}95 \le \mu \le 8{,}05$

№4.

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Найти: ОМП $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$

$$p(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(X) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \to \max$$

функц. правдоподобия

$$\ln(L(X)) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln(L(X))}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} 2(X_i-\mu)(-1) = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma^2} = \frac{n\overline{X} - n\mu}{\sigma^2} \Rightarrow \underline{\hat{\mu} = \overline{X}}$$

$$\frac{\partial \ln(L(X))}{\partial \sigma} = -n \cdot \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n\sigma^2}{\sigma^3} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2}{n}}$$

Проверим, что точка $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ не является седловой точкой:

Для этого проверим знаки $\frac{\partial^2(\ln(L(X)))}{\partial \mu^2}(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ и $\frac{\partial^2(\ln(L(X)))}{\partial \sigma^2}(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$

$$\frac{\partial^2(\ln(L(X)))}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0 \quad \forall (\mu, \sigma)$$

$$\frac{\partial^2(\ln(L(X)))}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \left.\frac{n\sigma^2 - 3\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^4}\right|_{\hat{\sigma}=\hat{\sigma}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - 3\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^4} = -\frac{2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^4} < 0$$

$\Downarrow$ т.к. производные по μ и σ одного знака и отрицательны в $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$

точка $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ будет точкой максимума функции правдоподобия, но не её седловой точкой

<u>Ответ:</u> $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}}$