Основные типы распределений

Морозов Леонид, 519/2

Ноябрь 2022

Пусть X - случайная величина. Рассмотрим основные возможные типы её распределений.

1 Непрерывное равномерное распределение

Непрерывное равномерное распределение - распределение случайной вещественной величины, принимающей значения, принадлежащие некоторому промежутку конечной длины с одинаковыми вероятностями.

1.1 Параметры распределения

$a, b \in (-\infty, \infty)$, $a < b$,
a - коэффициент сдвига, $b - a$ - коэффициент масштаба

1.2 Плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

1.3 Функция распределения

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

1.4 Числовые характеристики

$M(X) = \frac{a+b}{2}$ - математическое ожидание
$D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$ - дисперсия

2 Дискретное равномерное распределение

Дискретное равномерное распределение - распределение случайной величины, принимающей конечное число n значений с равными вероятностями.

2.1 Параметры распределения

$a, b \in Z$, $a < b$,
a - коэффициент сдвига, $b - a$ - коэффициент масштаба
$n = b - a + 1$ - число возможных значений

2.2 Функция вероятности

$$p(k) = P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & k \in [a, b] \\ 0 & k \notin [a, b] \end{cases}$$

2.3 Функция распределения

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \begin{cases} 0 & k < a \\ \frac{k-a+1}{n} & k \in [a, b) \\ 1 & k \geq b \end{cases}$$

2.4 Числовые характеристики

$M(X) = \frac{a+b}{2}$ - математическое ожидание
$D(X) = \frac{n^2-1}{12}$ - дисперсия

3 Биномиальное распределение

Биномиальное распределение - распределение количества «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких, что вероятность «успеха» в каждом из них постоянна и равна p.

3.1 Параметры распределения

$n > 0$ - число испытаний
$p \in [0, 1]$ - вероятность успеха

3.2 Функция вероятности

$$p(k) = P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

3.3 Функция распределения

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, y \in R$$

3.4 Числовые характеристики

$M(X) = np$ - математическое ожидание
$D(X) = np(1-p)$ - дисперсия

4 Распределение Пуассона

Распределение Пуассона - распределение случайной величины, представляющей собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга.

4.1 Параметры распределения

$\lambda \in (0, \infty)$ - математическое ожидание и дисперсия

4.2 Функция вероятности

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где k - количество событий

4.3 Функция распределения

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \frac{\Gamma(\lfloor k+1 \rfloor, \lambda)}{k!},$$

где $\Gamma(s, x) = \int\limits_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$

4.4 Числовые характеристики

$M(X) = \lambda$ - математическое ожидание
$D(X) = \lambda$ - дисперсия

5 Нормальное распределение

5.1 Параметры распределения

$\mu \in R$ - коэффициент сдвига
$\sigma > 0, \sigma \in R$ - коэффициент масштаба

5.2 Плотность распределения

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

5.3 Функция распределения

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right],$$

где $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$ - функция ошибок Гаусса

5.4 Числовые характеристики

$M(X) = \mu$ - математическое ожидание
$D(X) = \sigma^2$ - дисперсия

6 Экспоненциальное распределение

Экспоненциальное (или показательное) распределение — распределение, моделирующее время между двумя последовательными свершениями одного и того же события.

6.1 Параметры распределения

$\lambda > 0$ - интенсивность или обратный коэффициент масштаба

6.2 Плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

6.3 Функция распределения

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

6.4 Числовые характеристики

$M(X) = \lambda^{-1}$ - математическое ожидание
$D(X) = \lambda^{-2}$ - дисперсия