

제 2 교시

수학 영역(가형)

홀수형

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (5, -6)$ 에 대하여 벡터 $\vec{a} - \vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\ln(1+3x)}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \, dx$ 의 값은? [2점]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

4. 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이고

$$P(B^C) = \frac{1}{3}, \quad P(A|B) = \frac{1}{2}$$

일 때, $P(A)P(B)$ 의 값은? (단, B^C 은 B 의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

5. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해
일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우의
수는? [3점]

① 115 ② 120 ③ 125 ④ 130 ⑤ 135

6. 함수 $f(x) = x^3 + x + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,
 $g'(1)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

7. 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 4의 눈이 한 번만 나올
확률은? [3점]

① $\frac{25}{72}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{29}{72}$

8. 좌표공간의 두 점 $A(1, a, -6)$, $B(-3, 2, b)$ 에 대하여 선분 AB를 3:2로 외분하는 점이 x 축 위에 있을 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

9. $\int_1^e \ln \frac{x}{e} dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}-1$ ② $2-e$ ③ $\frac{1}{e}-2$ ④ $1-e$ ⑤ $\frac{1}{2}-e$

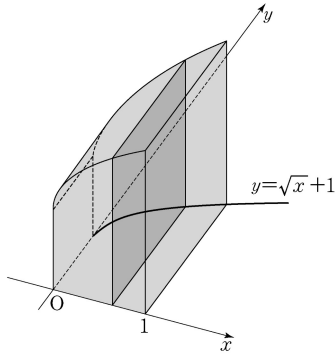
10. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t>0)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = t - \frac{2}{t}, \quad y = 2t + \frac{1}{t}$$

이다. 시간 $t=1$ 에서 점 P의 속력은? [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

11. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x} + 1$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



- ① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

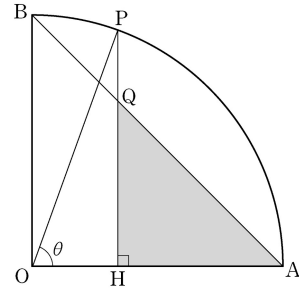
12. 좌표공간에서 평면 $2x+2y-z+5=0$ 과 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

13. 정규분포 $N(0, 4^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \bar{X} , 정규분포 $N(3, 2^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \bar{Y} 라 하자.
 $P(\bar{X} \geq 1) = P(\bar{Y} \leq a)$ 를 만족시키는 상수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{19}{8}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{21}{8}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{23}{8}$

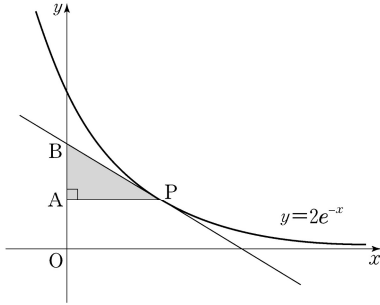
14. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 호 AB 위의 점 P 에서 선분 OA 에 내린 수선의 발을 H , 선분 PH 와 선분 AB 의 교점을 Q 라 하자. $\angle POH = \theta$ 일 때, 삼각형 AQH 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.
 $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

15. 곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $P(t, 2e^{-t})$ ($t>0$)에서 y 축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t 의 값은? [4점]

- ① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ e



16. 좌표공간에서 원점에 대한 세 점 A, B, C의 위치벡터를 차례로 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라 할 때, 이들 벡터 사이의 내적을 표로 나타내면 다음과 같다.

\cdot	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}
\vec{a}	2	1	$-\sqrt{2}$
\vec{b}	1	2	0
\vec{c}	$-\sqrt{2}$	0	2

예를 들어, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -\sqrt{2}$ 이다. 세 점 A, B, C에 대하여 두 점 사이의 거리의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

- ① $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{BC}$
 ② $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$
 ③ $\overline{AC} < \overline{AB} < \overline{BC}$
 ④ $\overline{BC} < \overline{AB} < \overline{AC}$
 ⑤ $\overline{BC} < \overline{AC} < \overline{AB}$

17. 좌표평면 위의 한 점 (x, y) 에서 세 점 $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x+1, y+1)$ 중 한 점으로 이동하는 것을 점프라 하자.
점프를 반복하여 점 $(0, 0)$ 에서 점 $(4, 3)$ 까지 이동하는 모든 경우 중에서, 임의로 한 경우를 선택할 때 나오는 점프의 횟수를 확률변수 X 라 하자. 다음은 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 를 구하는 과정이다. (단, 각 경우가 선택되는 확률은 동일하다.)

점프를 반복하여 점 $(0, 0)$ 에서 점 $(4, 3)$ 까지 이동하는 모든 경우의 수를 N 이라 하자. 확률변수 X 가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k 라 하면 $k = \boxed{\text{(가)}}$ 이고, 가장 큰 값을 $k+3$ 이다.

$$P(X=k) = \frac{1}{N} \times \frac{4!}{3!} = \frac{4}{N}$$

$$P(X=k+1) = \frac{1}{N} \times \frac{5!}{2!2!} = \frac{30}{N}$$

$$P(X=k+2) = \frac{1}{N} \times \boxed{\text{(나)}}$$

$$P(X=k+3) = \frac{1}{N} \times \frac{7!}{3!4!} = \frac{35}{N}$$

이고

$$\sum_{i=k}^{k+3} P(X=i) = 1$$

이므로 $N = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

따라서 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 는 다음과 같다.

$$E(X) = \sum_{i=k}^{k+3} \{i \times P(X=i)\} = \frac{257}{43}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c 라 할 때, $a+b+c$ 의 값은? [4점]

- ① 190 ② 193 ③ 196 ④ 199 ⑤ 202

18. 확률변수 X 는 평균이 m , 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} & f(10) > f(20) \\ \text{(나)} & f(4) < f(22) \end{aligned}$$

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

m 이 자연수일 때, $P(17 \leq X \leq 18)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

- ① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062 ④ 0.078 ⑤ 0.097

19. 두 양수 k, p 에 대하여 점 $A(-k, 0)$ 에서 포물선 $y^2 = 4px$ 에 그은 두 접선이 y 축과 만나는 두 점을 각각 F, F' , 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 할 때, $\angle PAQ = \frac{\pi}{3}$ 이다.

두 점 F, F' 을 초점으로 하고 두 점 P, Q 를 지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3}+12$ 일 때, $k+p$ 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

20. 함수 $f(x) = e^{-x} \int_0^x \sin(t^2) dt$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

- ㄱ. $f(\sqrt{\pi}) > 0$
 ㄴ. $f'(a) > 0$ 을 만족시키는 a 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.
 ㄷ. $f'(b) = 0$ 을 만족시키는 b 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 증가하는 연속함수 $f(x)$ 가

$$\int_0^1 f(x) dx = 2, \int_0^1 |f(x)| dx = 2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$ 가

$$F(x) = \int_0^x |f(t)| dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$ 의 값은? [4점]

- ① $4 - \sqrt{2}$ ② $2 + \sqrt{2}$ ③ $5 - \sqrt{2}$
 ④ $1 + 2\sqrt{2}$ ⑤ $2 + 2\sqrt{2}$

단답형

22. ${}_4\text{H}_2$ 의 값을 구하시오. [3점]

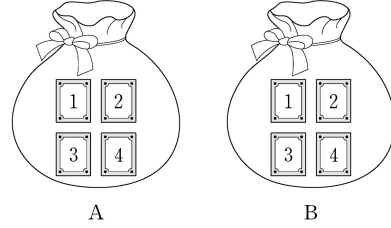
23. 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} \geq 4$ 를 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에서 평면 $x+8y-4z+k=0$ 이

구 $x^2+y^2+z^2+2y-3=0$ 에 접하도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합을 구하시오. [3점]

26. 두 주머니 A와 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 각각 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서 각자 임의로 두 장의 카드를 꺼내어 가진다. 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



25. $0 < x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\cos^2 x - \sin x = 1$ 의 모든 실근의

합은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

27. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) $a+b+c=7$
(나) $2^a \times 4^b$ 은 8의 배수이다.

28. 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$ 이고 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c>0$)인 쌍곡선이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 쌍곡선 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{PF'}=30$,
 $16 \leq \overline{PF} \leq 20$ 이다.
(나) x 좌표가 양수인 꼭짓점 A 에 대하여 선분 AF 의 길이는 자연수이다.

이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오. [4점]

29. 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 \overrightarrow{OQ} 와 \overrightarrow{OP} 가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$ 의 최댓값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

30. $x > a$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 -1 인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a 는 상수이다.)

- (가) $x > a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$ 이다.
 (나) 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 에서 동일한 극댓값 M 을 갖는다. (단, $M > 0$)
 (다) 함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$ 일 때, M 의 최솟값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.