

5. Algoritmos de Ordenação

Prof. Renato Tinós

Local: Depto. de Computação e Matemática
(FFCLRP/USP)

Principais Tópicos

5.1. Ordenação por Inserção

5.2. Ordenação por Seleção

5.3. Método da Bolha

5.4. Ordenação por Fusão

5.5. Heapsort

5.6. Quicksort

5.7. Considerações sobre o Problema de Ordenação

5.8. Ordenação em Tempo Linear

5.2. Ordenação por Seleção

- É um dos algoritmos mais simples de ordenação
- O princípio de funcionamento é o seguinte

1. Selecionar o elemento que apresenta a chave de menor valor;
2. Trocá-lo com o primeiro elemento do vetor;
3. Repetir estas operações, envolvendo agora apenas os $N-1$ elementos restantes, depois os $N-2$ elementos, etc., até restar um só elemento, o maior deles.

5.2. Ordenação por Seleção

1. Selecionar o elemento que apresenta a chave de menor valor;
2. Trocá-lo com o primeiro elemento do vetor;
3. Repetir estas operações, envolvendo agora apenas os $N-1$ elementos restantes, depois os $N-2$ elementos, etc., até restar um só elemento, o maior deles.

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N-1$   
     $\text{indice\_menor} \leftarrow$  (o índice do menor elemento do vetor  
         $\mathbf{a} = \{ a[i] \ a[i+1] \ a[i+2] \ \dots \ a[N] \}$  )  
    trocar  $a[i]$  com  $a[\text{indice\_menor}]$   
fim para  
...
```

5.2. Ordenação por Seleção

Exemplo 5.2.1.

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N-1$   
     $indice\_menor \leftarrow$  (índice do menor elemento do vetor  
         $a = \{ a[i] \ a[i+1] \ a[i+2] \ \dots \ a[N] \}$  )  
    trocar  $a[i]$  com  $a[indice\_menor]$   
fim para  
...
```

vetor inicial	45	56	12	43	95	19	8	67
$i = 1$	8	56	12	43	95	19	45	67
$i = 2$	8	12	56	43	95	19	45	67
$i = 3$	8	12	19	43	95	56	45	67
$i = 4$	8	12	19	43	95	56	45	67
$i = 5$	8	12	19	43	45	56	95	67
$i = 6$	8	12	19	43	45	56	95	67
$i = 7$	8	12	19	43	45	56	67	95

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $\text{indice\_menor} \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se ( $a[j] < a[\text{indice\_menor}]$ )  
             $\text{indice\_menor} \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[\text{indice\_menor}]$   
     $a[\text{indice\_menor}] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

acha o índice do menor elemento entre $a[i]$ e $a[N-1]$

troca $a[i]$ com $a[\text{indice_menor}]$

$N = 8$

	i							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	45	56	12	43	95	19	8	67

indice_menor


5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se (  $a[j] < a[indice\_menor]$  )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 8$

	i							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	56	12	43	95	19	45	67

$indice_menor$



5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se (  $a[j] < a[indice\_menor]$  )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 8$

	i							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	56	12	43	95	19	45	67

$indice_menor$

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se (  $a[j] < a[indice\_menor]$  )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

N = 8

	i							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	56	43	95	19	45	67

indice_menor

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se (  $a[j] < a[indice\_menor]$  )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 8$

	i							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	56	43	95	19	45	67

indice_menor

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se ( $a[j] < a[indice\_menor]$ )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

N = 8

			i					
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	19	43	95	56	45	67

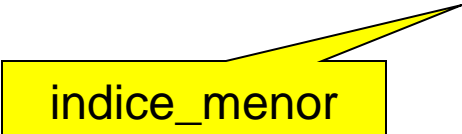
indice_menor

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se (  $a[j] < a[indice\_menor]$  )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 8$

				i				
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	19	43	95	56	45	67



indice_menor

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se (  $a[j] < a[indice\_menor]$  )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

N = 8

			i					
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	19	43	95	56	45	67

indice_menor

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se (  $a[j] < a[indice\_menor]$  )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 8$

				i				
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	19	43	95	56	45	67

indice_menor

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se (  $a[j] < a[indice\_menor]$  )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

N = 8

				i				
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	19	43	45	56	95	67

indice_menor

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se ( $a[j] < a[indice\_menor]$ )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 8$

					i			
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	19	43	45	56	95	67

indice_menor

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se ( $a[j] < a[indice\_menor]$ )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 8$

					i			
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	19	43	45	56	95	67

indice_menor

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se (  $a[j] < a[indice\_menor]$  )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 8$

							i	
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	19	43	45	56	95	67

indice_menor

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se ( $a[j] < a[indice\_menor]$ )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 8$

						i		
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	19	43	45	56	67	95

indice_menor

5.2. Ordenação por Seleção

```
...  
para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leftarrow N - 1$   
     $indice\_menor \leftarrow i$   
    para  $j \leftarrow i + 1$  até  $j \leftarrow N$   
        se ( $a[j] < a[indice\_menor]$ )  
             $indice\_menor \leftarrow j$   
        fim se  
    fim para  
     $x \leftarrow a[i]$   
     $a[i] \leftarrow a[indice\_menor]$   
     $a[indice\_menor] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

N = 8

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	12	19	43	45	56	67	95

Vetor ordenado

5.2. Ordenação por Seleção

```

...
para i ← 1 até i ← N - 1
    indice_menor ← i
    para j ← i + 1 até j ← N
        se ( a[j] < a[indice_menor] )
            indice_menor ← j
        fim se
    fim para
    x ← a[i]
    a[i] ← a[indice_menor]
    a[indice_menor] ← x
fim para
...

```

ANÁLISE

Os números de comparações e movimentações não dependem da ordem. Ou seja, os números são sempre iguais (não tem caso mínimo e máximo)

MOVIMENTAÇÕES

$M = \text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(M_i)$
 $M = \text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(3)$
 $M = 3 \cdot (N-1)$ movimentações

COMPARAÇÕES

$C = \text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(C_i)$

sendo C_i o número de comparações para cada iteração i .

$C = \text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(\text{soma}\{j=i+1 \text{ até } N\}(1))$

$C = \text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(N-(i+1)+1)$

$C = \text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(N-i)$

$C = \text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(N) - \text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(i)$

$C = N \cdot (N-1) - (N-1) \cdot N/2$

$C = (N-1) \cdot N/2 = (N^2 - N)/2$ comparações

$\text{soma}\{i\}(N-i) = \text{soma}\{i\}(N) - \text{soma}\{i\}(i)$

$\text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(N) = N \cdot \text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(1) = N \cdot (N-1)$

$\text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(i)$

fazendo $n = N-1$

$\text{soma}\{i=1 \text{ até } n\}(i) = n \cdot (n+1)/2$

$\text{soma}\{i=1 \text{ até } N-1\}(i) = (N-1) \cdot (N-1+1)/2 = (N-1) \cdot (N)/2$

5.2. Ordenação por Seleção

- Análise

$$C = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N 1 = \sum_{i=1}^{N-1} (N - i) = \frac{N^2 - N}{2} = O(N^2)$$

$$M = \sum_{i=1}^{N-1} 3 = 3(N - 1) = O(N)$$

- Os números C (comparações entre chaves) e M (movimentações de registros) independem da ordem do vetor
 - Assim, esse método apresenta comportamento menos natural que o da inserção direta
 - O método da inserção direta realiza mais operações para vetores “mais desordenados”
- A grande vantagem é o pequeno número de movimentações entre registros

5.2. Ordenação por Seleção

Exercício 5.2.1. Utilizando ordenação por seleção, obtenha o número de comparações e movimentações em cada passo para os seguintes vetores

a) [45 56 12 43 95 19 8 67]

b) [8 12 19 43 45 56 67 95]

c) [95 67 56 45 43 19 12 8]

d) [19 12 8 45 43 56 67 95]

5.2. Ordenação por Seleção

Exercício 5.2.1. Solução

i	Ci	Mi	8	12	19	43	45	56	67	95
1	7	3	8	12	19	43	45	56	67	95
2	6	3	8	12	19	43	45	56	67	95
3	5	3	8	12	19	43	45	56	67	95
4	4	3	8	12	19	43	45	56	67	95
5	3	3	8	12	19	43	45	56	67	95
6	2	3	8	12	19	43	45	56	67	95
7	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
	28	21								

i	Ci	Mi	8	12	19	43	45	56	67	95
1	7	3	8	12	19	43	45	56	67	95
2	6	3	8	12	19	43	45	56	67	95
3	5	3	8	12	19	43	45	56	67	95
4	4	3	8	12	19	43	45	56	67	95
5	3	3	8	12	19	43	45	56	67	95
6	2	3	8	12	19	43	45	56	67	95
7	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
	28	21								

i	Ci	Mi	95	67	56	45	43	19	12	8
1	7	3	8	67	56	45	43	19	12	95
2	6	3	8	12	56	45	43	19	67	95
3	5	3	8	12	19	45	43	56	67	95
4	4	3	8	12	19	43	45	56	67	95
5	3	3	8	12	19	43	45	56	67	95
6	2	3	8	12	19	43	45	56	67	95
7	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
	28	21								

i	Ci	Mi	19	12	8	45	43	56	67	95
1	7	3	8	12	19	45	43	56	67	95
2	6	3	8	12	19	45	43	56	67	95
3	5	3	8	12	19	45	43	56	67	95
4	4	3	8	12	19	43	45	56	67	95
5	3	3	8	12	19	43	45	56	67	95
6	2	3	8	12	19	43	45	56	67	95
7	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
	28	21								

- **Agradecimentos**

- Parte do material desta apresentação foi obtida através de slides da disciplina de Introdução à Computação II ministrada pelo Prof. José Augusto Baranauskas