

5. Algoritmos de Ordenação

Prof. Renato Tinós

Local: Depto. de Computação e Matemática
(FFCLRP/USP)

Principais Tópicos

- 5.1. Ordenação por Inserção
- 5.2. Ordenação por Seleção
- 5.3. Método da Bolha
- 5.4. Ordenação por Fusão
- 5.5. Heapsort
- 5.6. Quicksort
- 5.7. Considerações sobre o Problema de Ordenação
- 5.8. Ordenação em Tempo Linear

5. Algoritmos de Ordenação

- Ordenação é o processo de rearranjo de um conjunto de registros de acordo com um dado critério
 - Exemplo: elementos de um vetor ordenados em ordem crescente
- O objetivo da ordenação é facilitar a localização de objetos pertencentes ao conjunto
- É uma atividade bastante utilizada na elaboração de algoritmos mais complexos
- Exemplos
 - listas telefônicas
 - índices
 - dicionários
 - contas bancárias
 - itens em um almoxarifado

5. Algoritmos de Ordenação

- Notação
 - Assumindo-se que os elementos a serem ordenados estão em um vetor \mathbf{a} com N elementos, ou seja:
$$\mathbf{a} = [\ a(1) \ a(2) \dots a(N) \]$$
 - a ordenação consistirá em permutar tais elementos, levando ao vetor
$$\mathbf{a}_p = [\ a(k_1) \ a(k_2) \dots a(k_N) \]$$
 - de forma tal que, considerando a função f de ordenação, seja satisfeita a seguinte relação:
$$f(a(k_1)) \leq f(a(k_2)) \leq \dots \leq f(a(k_N))$$

5. Algoritmos de Ordenação

- Estabilidade x Instabilidade
 - Um método de ordenação é denominado **estável** se
 - a ordem relativa dos elementos que exibam a mesma chave permanecer inalterada ao longo de todo o processo de ordenação
 - Caso contrário, ele é denominado **instável**
 - Em geral, a estabilidade da ordenação é desejável
 - especialmente quando os elementos já estiverem ordenados em relação a uma ou mais chaves secundárias

5. Algoritmos de Ordenação

5. Algoritmos de Ordenação

- Os métodos de ordenação são classificados em dois grandes grupos
 - Ordenação interna
 - o conjunto de objetos cabe todo na memória principal
 - Ordenação externa
 - o conjunto de objetos é muito grande para a memória principal e, portanto, é armazenado na memória secundária

5. Algoritmos de Ordenação

- Notação

- O valor da função de ordenação para um dado objeto é armazenada como um componente explícito (campo) deste objeto
- Seu valor é denominado **chave**
- Em C, estruturas (*struct*) são particularmente interessantes para representar tais objetos

```
...
typedef struct {
    tipo chave;           // chave
    ...
} item ;                // demais informações
...
item a[N];
...
```

5. Algoritmos de Ordenação

5. Algoritmos de Ordenação

- Por simplicidade, considere que
 - O vetor de registros é um vetor de inteiros no qual os elementos são as chaves
 - ou seja, o tipo *item* é inteiro
 - N é uma constante que indica o número de elementos do vetor
- Assim, objetivo da ordenação se resume a ordenar os elementos (chaves) do vetor dado de acordo com o critério pré-estabelecido
 - Nos métodos aqui apresentados, será considerado que desejamos ordenar os elementos do vetor de forma crescente

5. Algoritmos de Ordenação

- Exemplos de métodos de ordenação

5.1. Ordenação por Inserção

 5.1.1. Inserção Direta

 5.1.2. Inserção Binária

5.2. Ordenação por Seleção

5.3. Método da Bolha

5.4. Ordenação por Fusão

5.5. Heapsort

5.6. Quicksort

5.7. Considerações sobre o Problema de
 Ordenação

5.8. Ordenação em Tempo Linear

5.1. Ordenação por Inserção

- Um dos métodos mais populares
 - Analogia com a ordenação de cartas executada por um jogador
- Utiliza duas seqüências
 - Seqüência fonte
 - Seqüência destino
- Dois Tipos
 - Ordenação direta
 - Ordenação binária

5.1.1. Inserção Direta

- Os elementos são conceitualmente divididos em
 - uma seqüência destino
 - $a[1], a[2], \dots, a[i-1]$
 - uma seqüência fonte
 - $a[i], a[i+1], \dots a[N]$
- Em cada passo, iniciando-se com $i = 2$ e incrementando-se i de uma unidade, o i -ésimo elemento da seqüência vai sendo retirado da seqüência fonte e inserido na posição apropriada (ordenada) da seqüência destino

5.1.1. Inserção Direta

- Algoritmo padrão

```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
    inserir  $x$  no local adequado da seqüência  $a[1] \dots a[i]$ 
fim para
...
```

5.1.1. Inserção Direta

- No processo de procurar o local apropriado para o elemento x , é conveniente utilizar, de modo alternado, operações de
 - comparação,
 - examinar x e compará-lo com o próximo elemento $a[j]$
 - movimentação
 - efetuar a inserção de x ou a movimentação do elemento $a[j]$ para a direita, prosseguindo-se, em seguida, para a esquerda

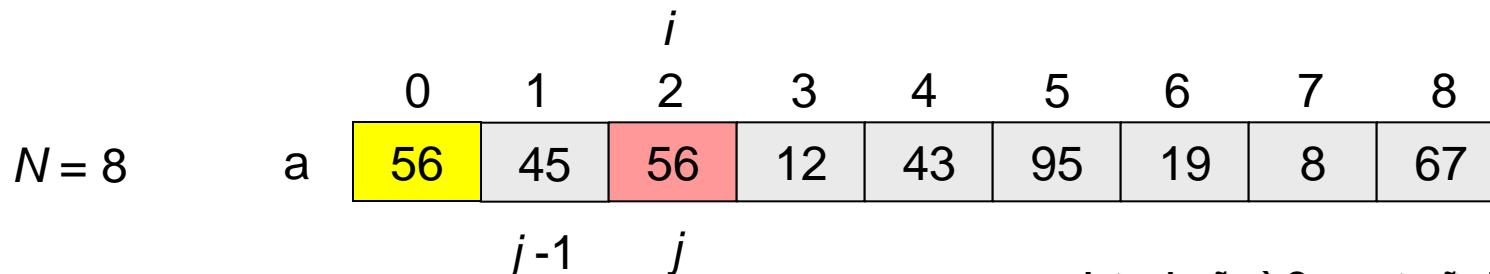
5.1.1. Inserção Direta

- Note que existem duas condições distintas que causam o término deste processo de análise:
 - Um elemento $a[j]$ é encontrado com uma chave de valor menor do que o da chave do elemento x
 - A extremidade esquerda do vetor a é atingida.
- O uso de um *loop* com duas condições de término é equivalente ao caso da técnica da sentinela vista nas aulas sobre busca em vetores
- Observe que esta técnica é facilmente aplicada neste caso colocando-se uma sentinela com valor de x em $a[0]$

5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

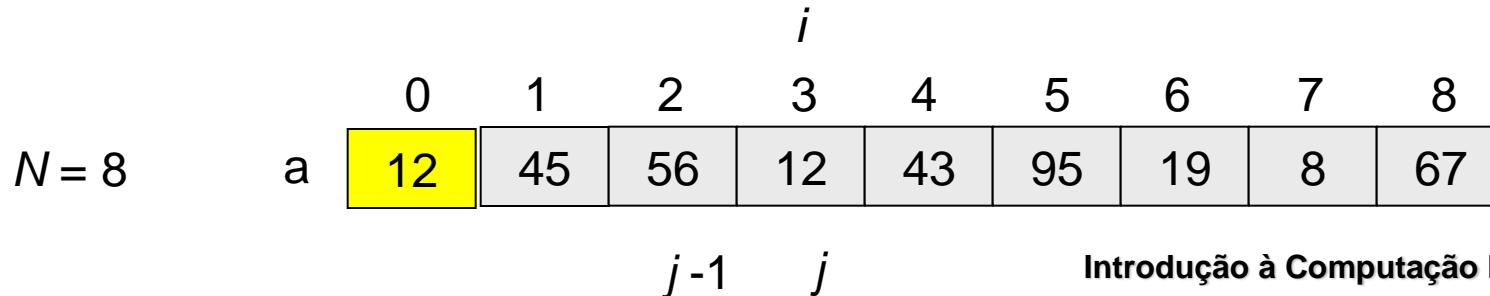
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

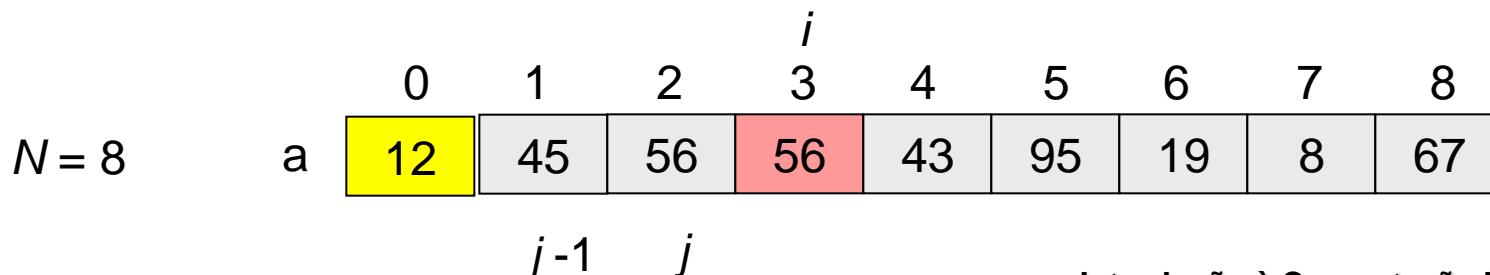
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

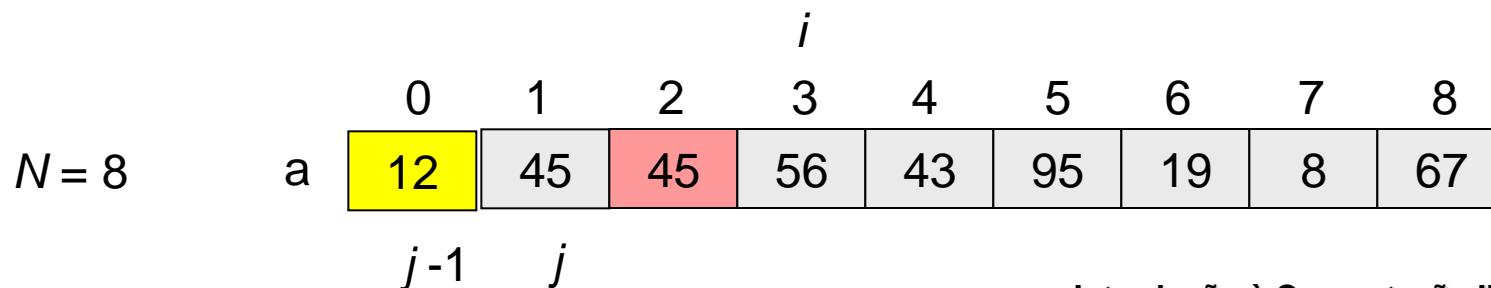
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

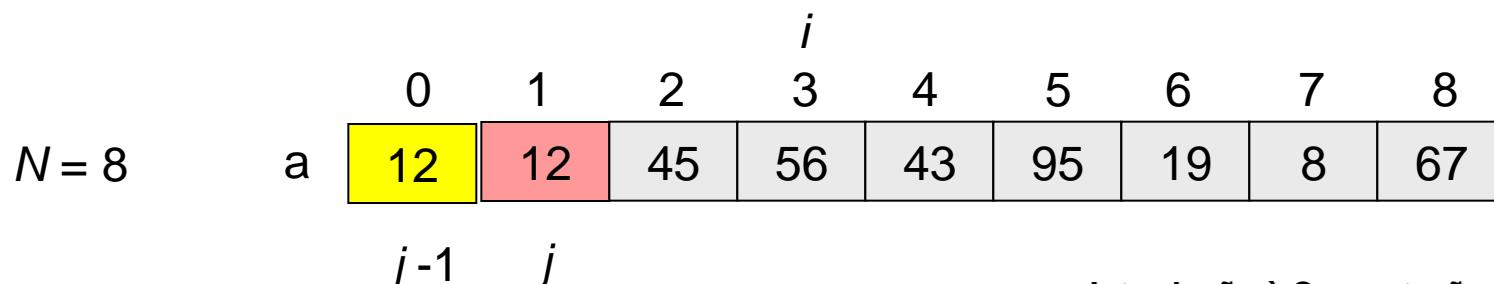
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

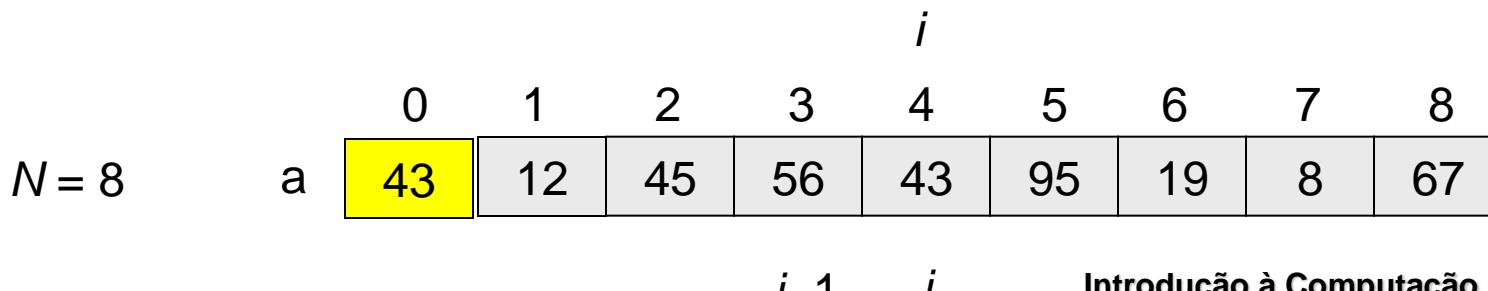
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

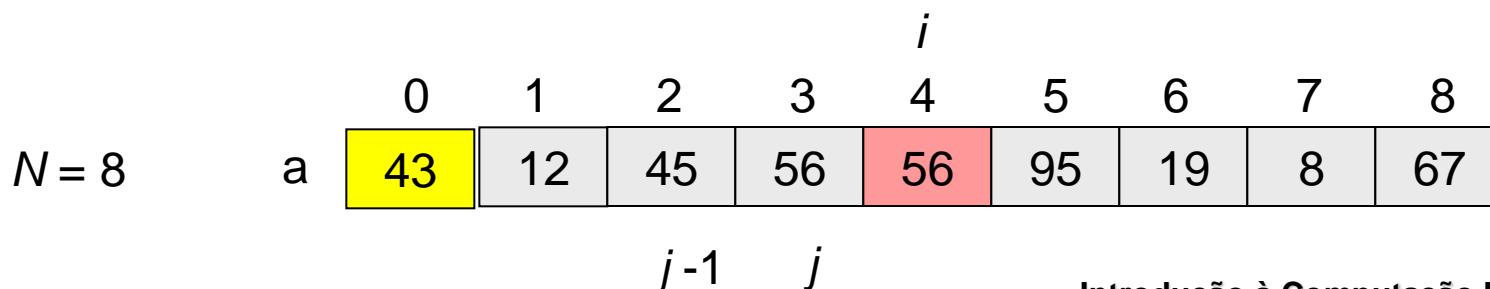
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

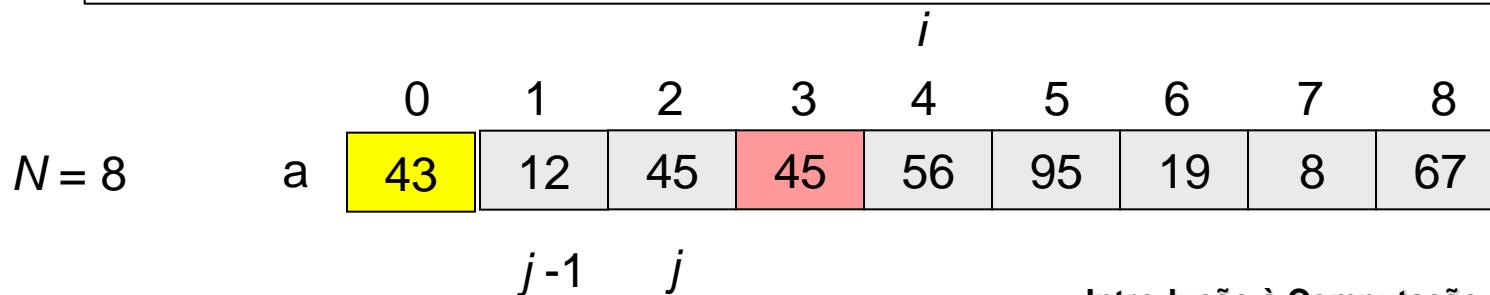
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

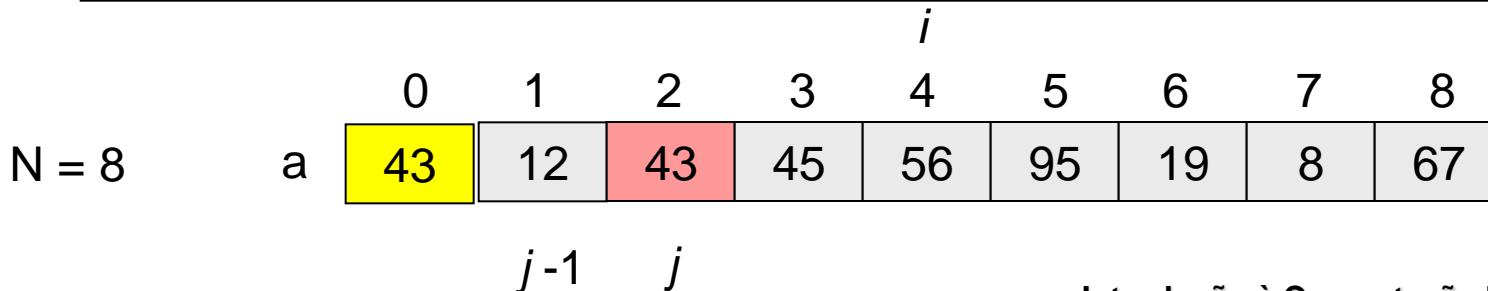
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

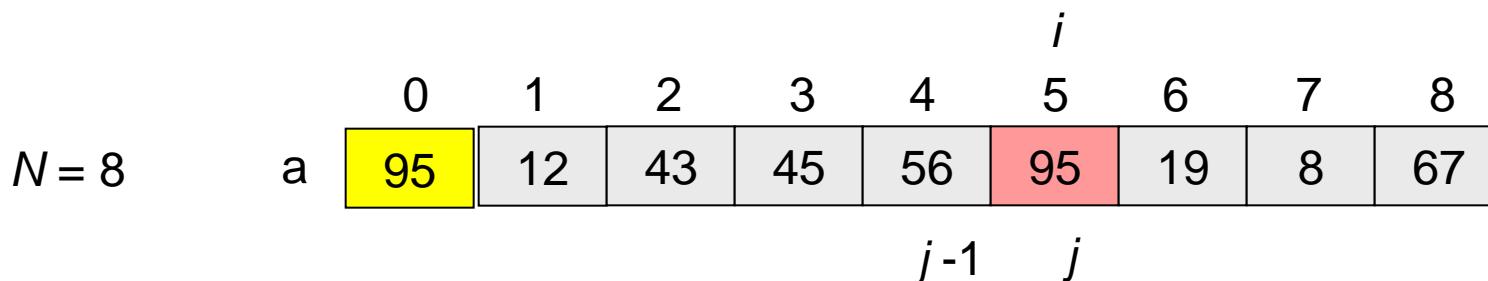
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

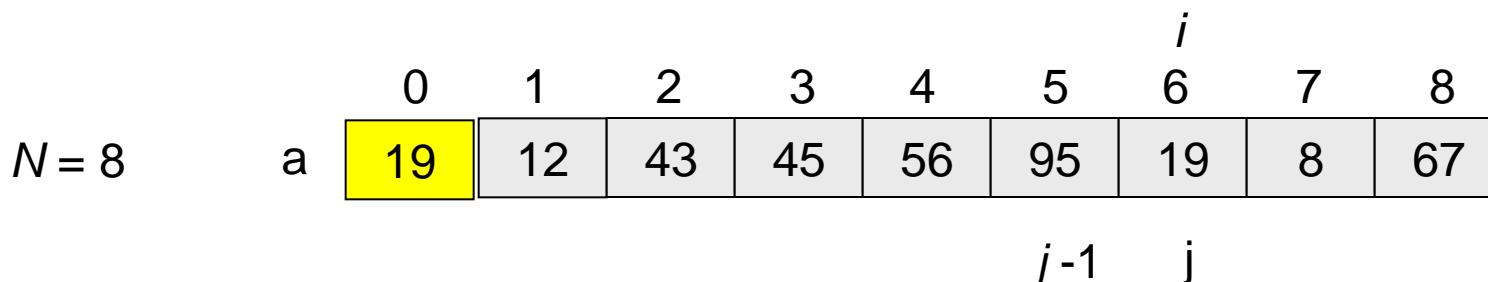
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```

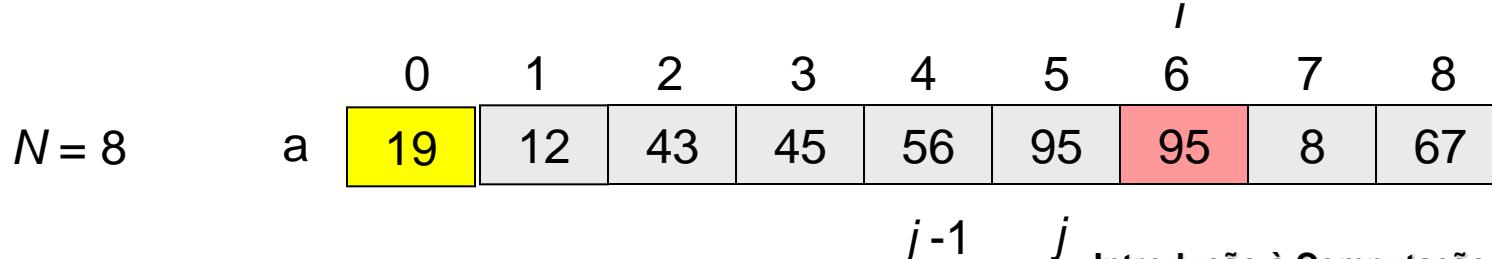


$N = 8$

5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

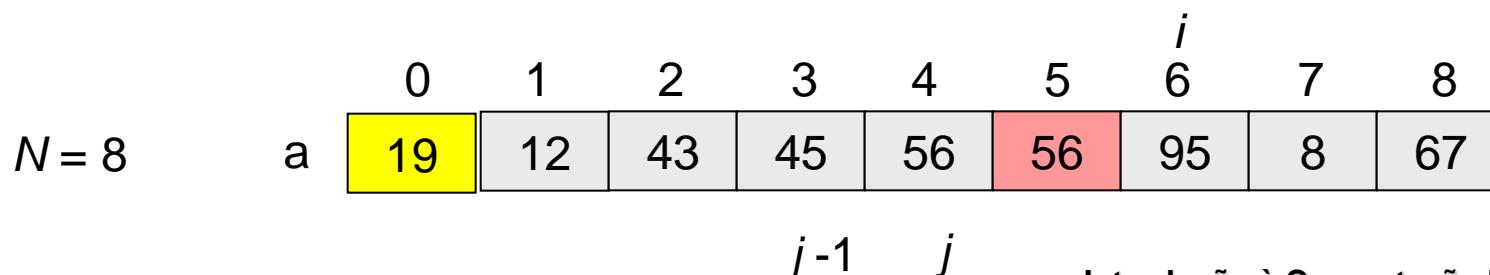
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

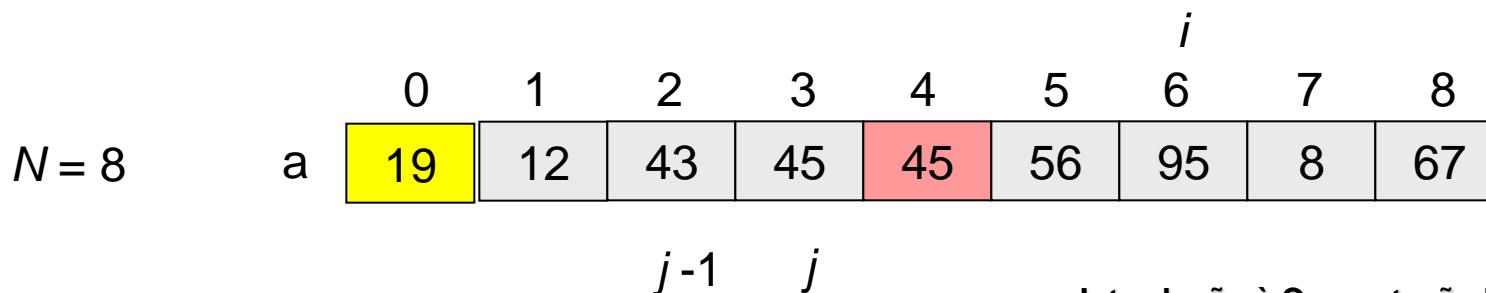
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

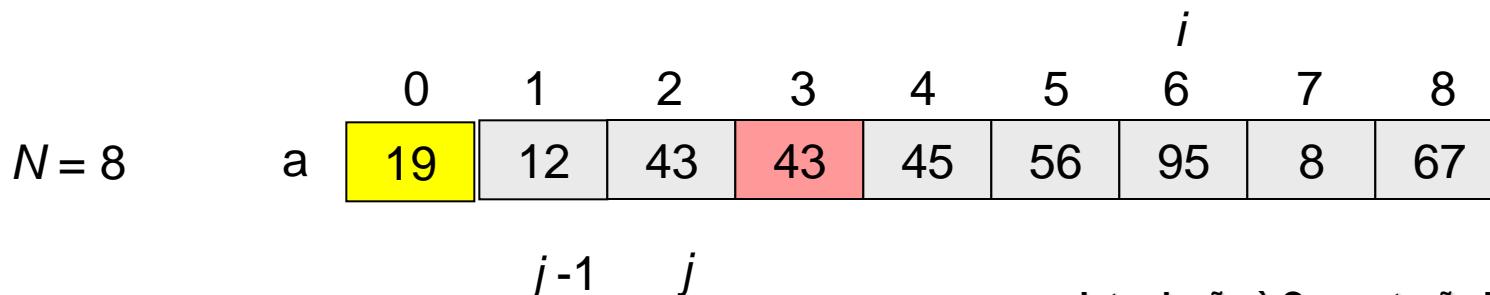
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

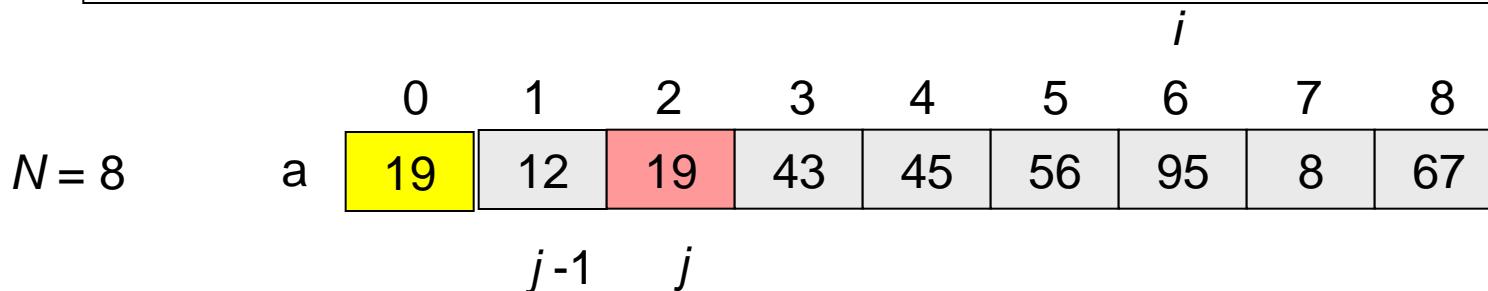
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

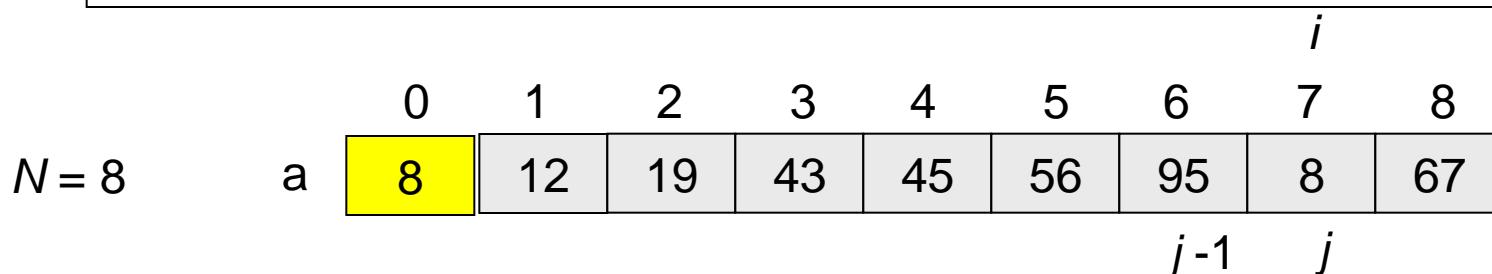
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```

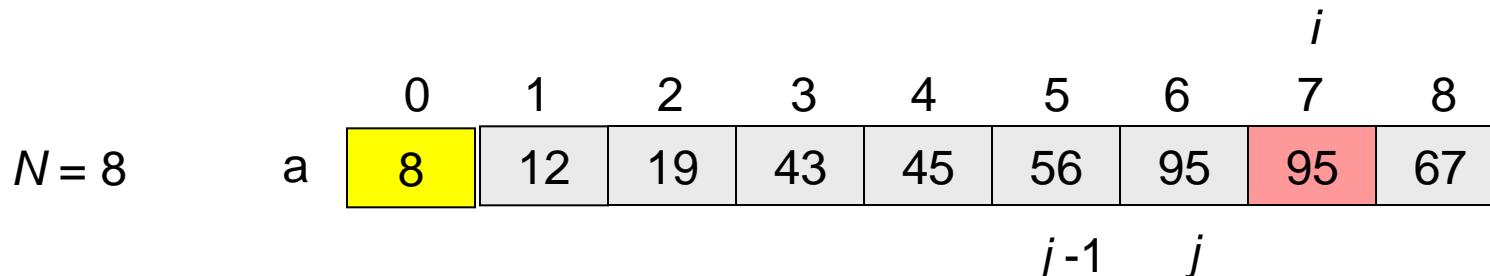


$N = 8$

5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

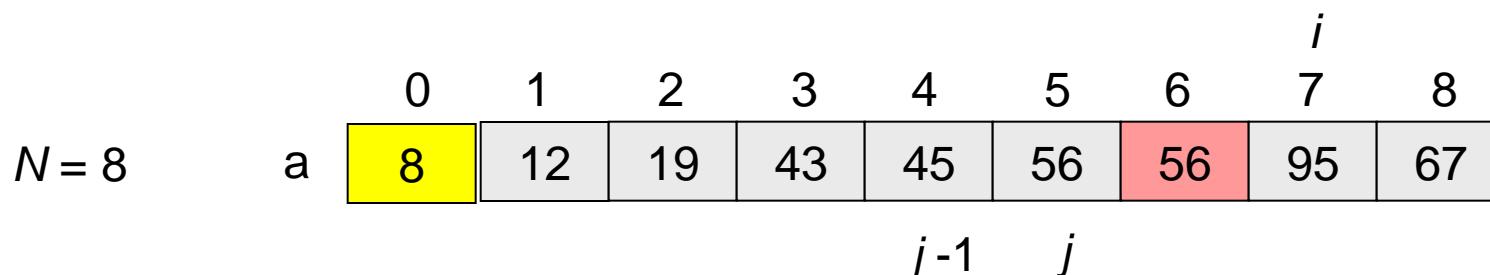
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

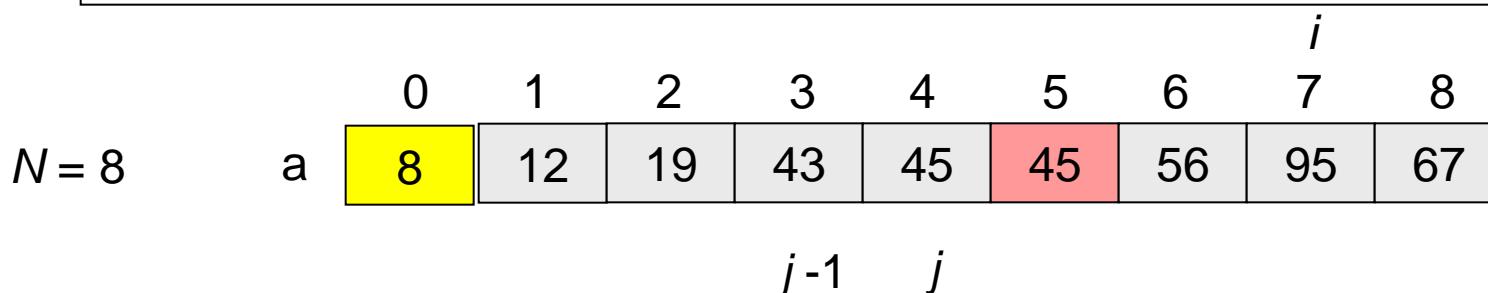
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

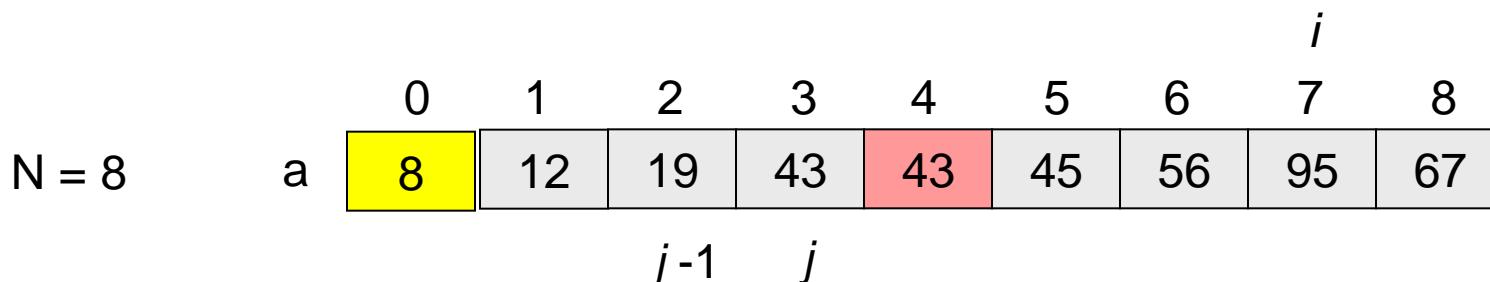
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

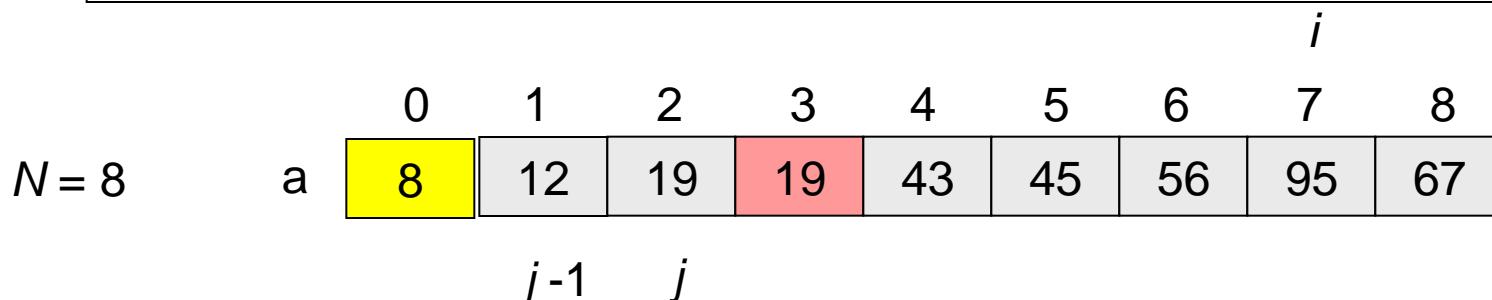
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

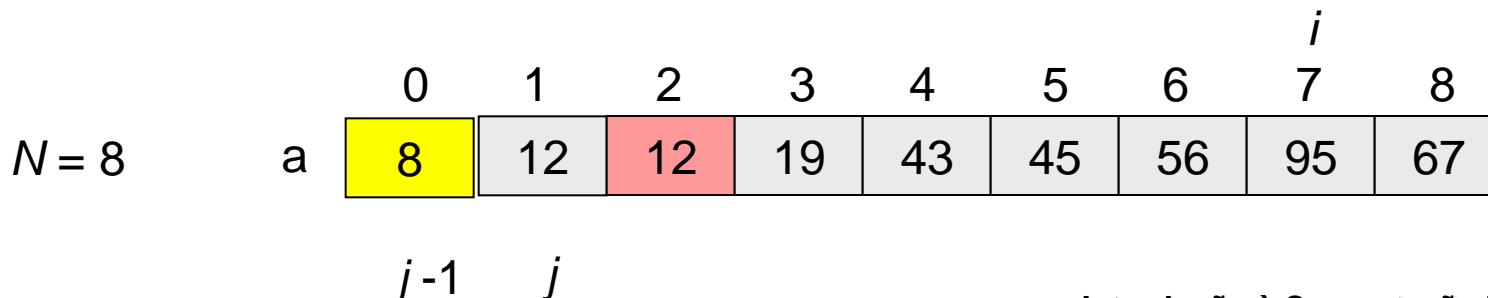
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

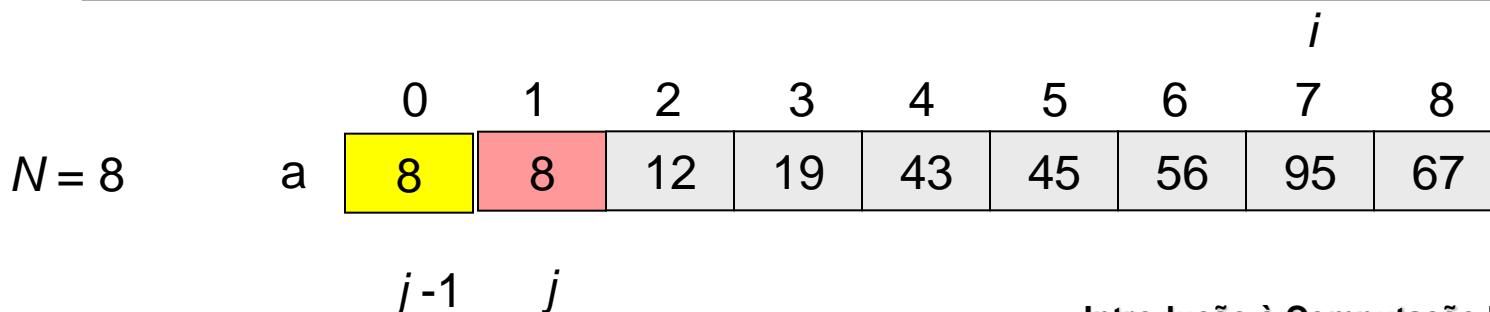
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

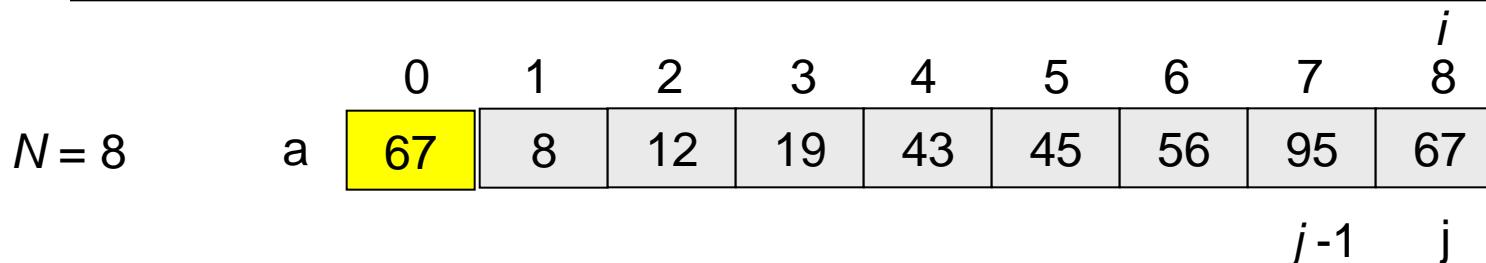
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

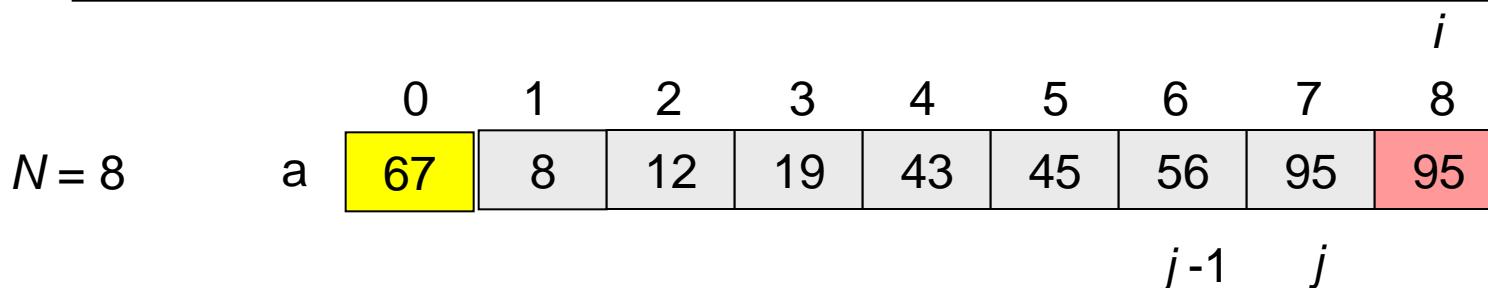
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

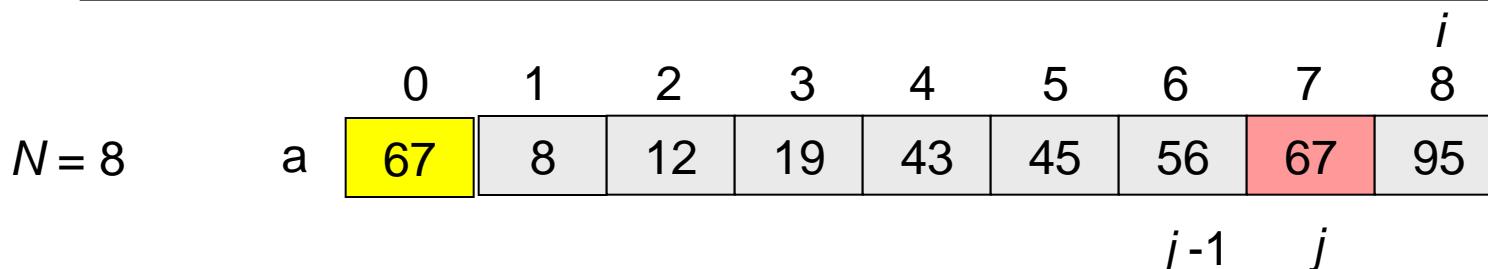
```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $a[0] \leftarrow x$ 
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto  $x < a[j-1]$ 
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[j] \leftarrow x$ 
fim para
...
```

$N = 8$	a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
		67	8	12	19	43	45	56	67	95

Vetor ordenado!

5.1.1. Inserção Direta

Exemplo 5.1.1.

Vetor inicial	45	56	12	43	95	19	8	67
i = 2	45	56	12	43	95	19	8	67
i = 3	12	45	56	43	95	19	8	67
i = 4	12	43	45	56	95	19	8	67
i = 5	12	43	45	56	95	19	8	67
i = 6	12	19	43	45	56	95	8	67
i = 7	8	12	19	43	45	56	95	67
i = 8	8	12	19	43	45	56	67	95

5.1.1. Inserção Direta

Insert-sort with Romanian folk dance



<https://www.youtube.com/watch?v=ROalU37913U>

5.1.1. Inserção Direta

ANÁLISE:

COMPARAÇÕES ENTRE CHAVES (C)

Devemos analisar somente as comparações que envolvem elementos (chaves) do vetor. Neste caso, é a linha:
enquanto ($x < a[j-1]$)

Chamando de C_i o número de comparações para cada i , temos que:

$$C = \text{soma}\{i=2 \text{ até } N\} (C_i)$$

CASO MÍNIMO: apenas uma comparação para cada valor de i . Ou seja, $C_i=1$, que ocorre quando o vetor estiver ordenado.

$$C_{\min} = \text{soma}\{i=2 \text{ até } N\} (1) = N-2+1=N-1 \text{ comparações.}$$

CASO MÁXIMO: neste caso, o alg. realizará comparações para todos os valores de j , ou seja, para cada i , a comparação é feita a partir de $j=i$ até o sentinel (j=1). Isto ocorre quando o vetor estiver em ordem decrescente. Assim:

$$\begin{aligned} C_{\max} &= \text{soma}\{i=2 \text{ até } N\} (\text{soma}\{j=1 \text{ até } i\}(1)) \\ C_{\max} &= \text{soma}\{i=2 \text{ até } N\} (i) = \text{soma}\{i=1 \text{ até } N\} (i) - 1 \\ C_{\max} &= N*(N+1)/2 - 1 = (N^2+N-2)/2 \text{ comparações.} \end{aligned}$$

Assim, o número de comparações entre chaves para o algoritmo é:

$$\begin{aligned} C_{\min} &\leq C \leq C_{\max} \\ N-1 &\leq C \leq (N^2+N-2)/2 \end{aligned}$$

MOVIMENTAÇÕES ENTRE REGISTROS (M)

Devemos analisar as atribuições que envolvem elementos do vetor (registros). Aqui, serão as linhas:

$$\begin{array}{ll} x <- a[i] & \text{linha 1} \\ a[0] <- x & \text{linha 2} \\ a[j] <- a[j-1] & \text{linha 3} \\ a[j] <- x & \text{linha 4} \end{array}$$

Repare que as linhas 1, 2 e 4 são repetidas 1 vez para cada i , enquanto que, para a linha 3, o número de movimentações é igual ao número de comparações menos 1 para cada valor de i . Ou seja, o número de movimentações para cada i é:

$$M_i = C_i - 1 + 3 = C_i + 2$$

Assim, número toda de movimentações é:

$$M = \text{soma}\{i=2 \text{ até } N\} (M_i) = \text{soma}\{i=2 \text{ até } N\} (C_i + 2)$$

CASO MÍNIMO: $C_i=1$

$$M_{\min} = \text{soma}\{i=2 \text{ até } N\} (1+2) = 3*(N-1) \text{ mov.}$$

CASO MÁXIMO: $C_i=i$

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \text{soma}\{i=2 \text{ até } N\} (i+2) \\ M_{\max} &= (N^2+5*N-6)/2 \text{ mov.} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} M_{\min} &\leq M \leq M_{\max} \\ 3*(N-1) &\leq M \leq (N^2+5*N-6)/2 \end{aligned}$$

5.1.1. Inserção Direta

• Análise

- O método é estável
- O número C_i de comparações das chaves no i -ésimo passo é de,
 - no máximo: $C_i = \sum_{j=1}^i 1 = i$
 - o pior caso ocorre se eles estiverem, inicialmente, em ordem reversa
 - no mínimo: $C_i = 1$
 - o número mínimo ocorre se os elementos já estiverem, inicialmente, ordenados
 - em média, admitindo-se que todas as configurações sejam igualmente prováveis: $C_i = \frac{i+1}{2}$
- O número M_i de movimentos de registros no i -ésimo passo é ($C_i - 1 + 3$)

5.1.1. Inserção Direta

```
...
para i ← 2 até i ← N
    x ← a[i]
    a[0] ← x
    j ← i
    enquanto x < a[j-1]
        a[j] ← a[j-1]
        j ← j - 1
    fim enquanto
    a[j] ← x
fim para
...
```

$$C_{\min} = \sum_{i=2}^N 1 = N - 1 = O(N)$$

$$C_{\text{méd}} = \sum_{i=2}^N \frac{i+1}{2} = \frac{N^2 + 3N - 4}{4} = O(N^2)$$

$$C_{\max} = \sum_{i=2}^N i = \frac{N^2 + N - 2}{2} = O(N^2)$$

$$M_{\min} = \sum_{i=2}^N 1 + 2 = 3(N-1) = O(N)$$

$$M_{\text{méd}} = \sum_{i=2}^N \frac{i+1}{2} + 2 = \frac{N^2 + 11N - 12}{4} = O(N^2)$$

$$M_{\max} = \sum_{i=2}^N i + 2 = \frac{N^2 + 5N - 6}{2} = O(N^2)$$

5.1.1. Inserção Direta

Exercício 5.1.1. Utilizando o algoritmo de inserção direta, obtenha o número de comparações e movimentações em cada passo para os seguintes vetores

- a) [45 56 12 43 95 19 8 67]
- b) [8 12 19 43 45 56 67 95]
- c) [95 67 56 45 43 19 12 8]
- d) [19 12 8 45 43 56 67 95]

5.1.1. Inserção Direta

Exercício 5.1.1. Solução

i	Ci	Mi	45	56	12	43	95	19	8	67
2	1	3	45	56	12	43	95	19	8	67
3	3	5	12	45	56	43	95	19	8	67
4	3	5	12	43	45	56	95	19	8	67
5	1	3	12	43	45	56	95	19	8	67
6	5	7	12	19	43	45	56	95	8	67
7	7	9	8	12	19	43	45	56	95	67
8	2	4	8	12	19	43	45	56	67	95
	22	36								

i	Ci	Mi	8	12	19	43	45	56	67	95
2	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
3	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
4	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
5	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
6	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
7	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
8	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
	7	21								

i	Ci	Mi	19	12	8	45	43	56	67	95
2	2	4	12	19	8	45	43	56	67	95
3	3	5	8	12	19	45	43	56	67	95
4	1	3	8	12	19	45	43	56	67	95
5	2	4	8	12	19	43	45	56	67	95
6	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
7	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
8	1	3	8	12	19	43	45	56	67	95
	11	25								

i	Ci	Mi	95	67	56	45	43	19	12	8
2	2	4	67	95	56	45	43	19	12	8
3	3	5	56	67	95	45	43	19	12	8
4	4	6	45	56	67	95	43	19	12	8
5	5	7	43	45	56	67	95	19	12	8
6	6	8	19	43	45	56	67	95	12	8
7	7	9	12	19	43	45	56	67	95	8
8	8	10	8	12	19	43	45	56	67	95
	35	49								

5.1.2. Inserção Binária

- O algoritmo de inserção direta pode ser aperfeiçoado observando-se que a seqüência destino $a[1], a[2], \dots, a[i-1]$, na qual deve ser inserido o elemento x , já está ordenada
- Assim, pode-se utilizar um método mais rápido para determinar o ponto correto de inserção
- A escolha óbvia é o método da busca binária, que divide a seqüência destino no seu ponto central, continuando a divisão até encontrar o ponto correto de inserção

5.1.2. Inserção Binária

...
para $i \leftarrow 2$ até $i \leftarrow N$

$x \leftarrow a[i]$

busca binária rápida

$L \leftarrow 1$

$R \leftarrow i$

enquanto ($L < R$)

$m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$

se ($a[m] \leq x$)

$L \leftarrow m + 1$

senão

$R \leftarrow m$

fim se

fim enquanto

$j \leftarrow i$

movimentação

enquanto ($j > R$)

$a[j] \leftarrow a[j-1]$

$j \leftarrow j - 1$

fim enquanto

$a[R] \leftarrow x$

fim para

...

Exemplo 5.1.2.

$N = 7$

m

i

1

2

3

4

5

6

7

a

45

56

12

43

95

19

8

L

R

$x = 56$

5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
     $x \leftarrow a[i]$   
     $L \leftarrow 1$   
     $R \leftarrow i$   
    enquanto ( $L < R$ )  
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
        se ( $a[m] \leq x$ )  
             $L \leftarrow m + 1$   
        senão  
             $R \leftarrow m$   
        fim se  
    fim enquanto  
 $j \leftarrow i$   
    enquanto ( $j > R$ )  
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
         $j \leftarrow j - 1$   
    fim enquanto  
 $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$

m	i							
1	2	3	4	5	6	7		
a	45	56	12	43	95	19	8	

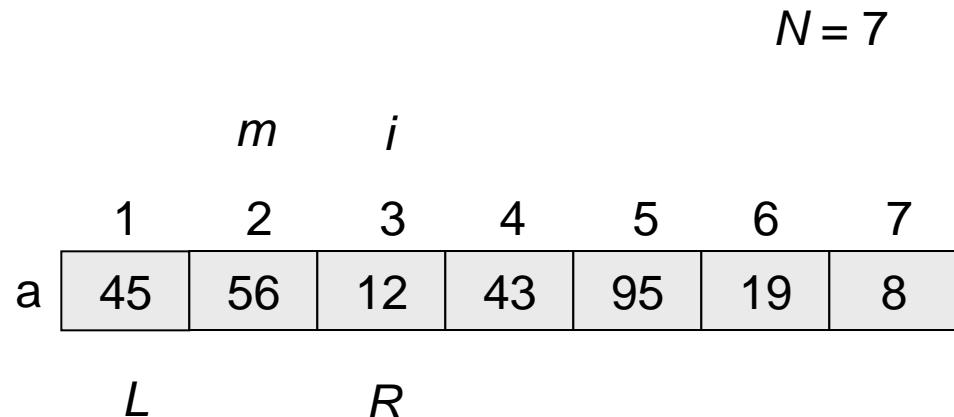
R

L

$x = 56$

5.1.2. Inserção Binária

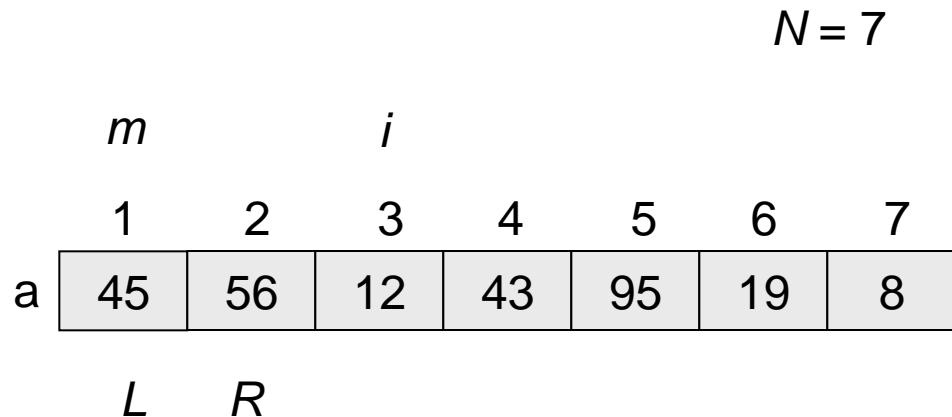
```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
     $x \leftarrow a[i]$   
     $L \leftarrow 1$   
     $R \leftarrow i$   
    enquanto ( $L < R$ )  
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
        se ( $a[m] \leq x$ )  
             $L \leftarrow m + 1$   
        senão  
             $R \leftarrow m$   
        fim se  
    fim enquanto  
     $j \leftarrow i$   
    enquanto ( $j > R$ )  
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
         $j \leftarrow j - 1$   
    fim enquanto  
     $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



$$x = 12$$

5.1.2. Inserção Binária

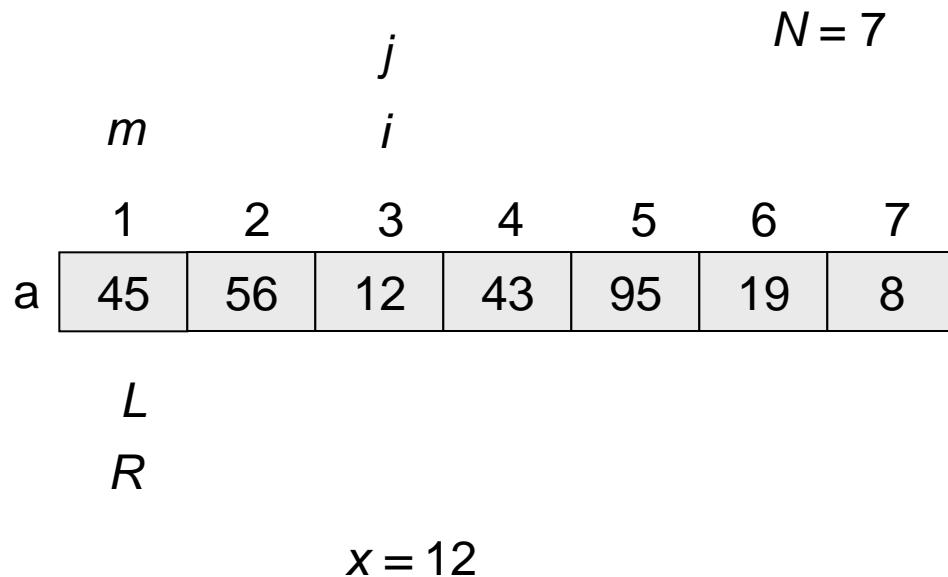
```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
     $x \leftarrow a[i]$   
     $L \leftarrow 1$   
     $R \leftarrow i$   
    enquanto ( $L < R$ )  
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
        se ( $a[m] \leq x$ )  
             $L \leftarrow m + 1$   
        senão  
             $R \leftarrow m$   
        fim se  
    fim enquanto  
     $j \leftarrow i$   
    enquanto ( $j > R$ )  
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
         $j \leftarrow j - 1$   
    fim enquanto  
     $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



$$x = 12$$

5.1.2. Inserção Binária

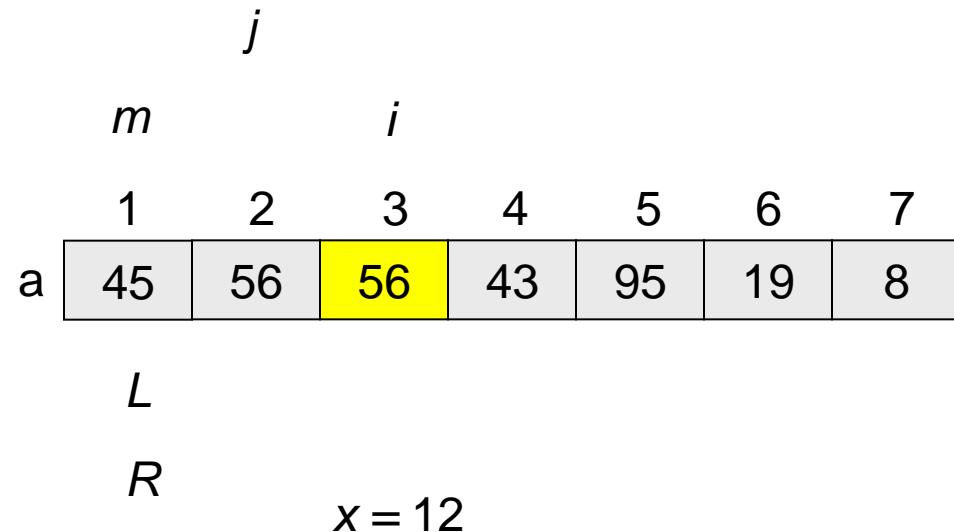
```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
     $x \leftarrow a[i]$   
     $L \leftarrow 1$   
     $R \leftarrow i$   
    enquanto ( $L < R$ )  
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
        se ( $a[m] \leq x$ )  
             $L \leftarrow m + 1$   
        senão  
             $R \leftarrow m$   
        fim se  
    fim enquanto  
 $j \leftarrow i$   
    enquanto ( $j > R$ )  
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
         $j \leftarrow j - 1$   
    fim enquanto  
 $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



5.1.2. Inserção Binária

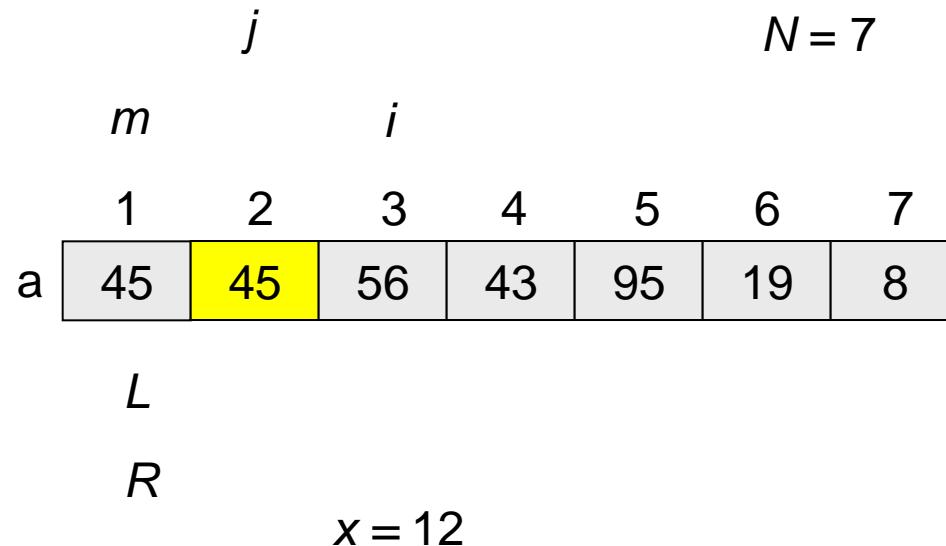
```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$



5.1.2. Inserção Binária

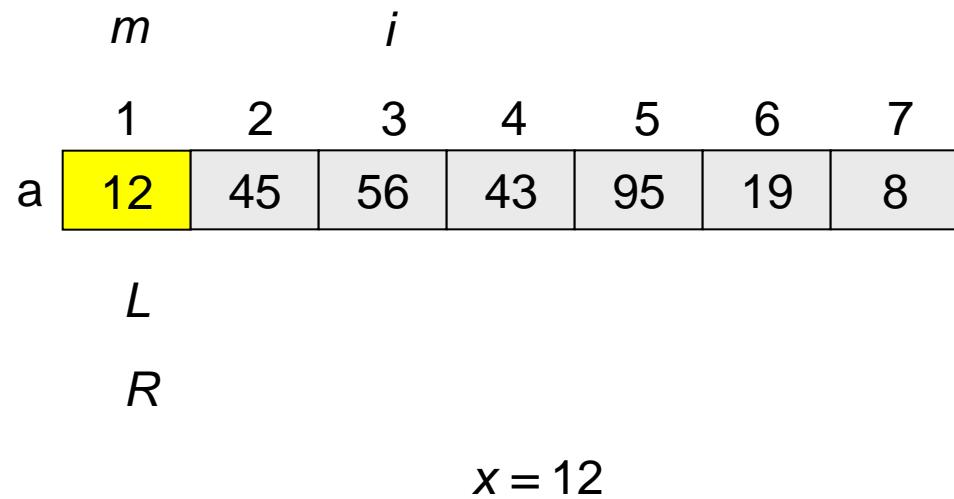
```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
     $x \leftarrow a[i]$   
     $L \leftarrow 1$   
     $R \leftarrow i$   
    enquanto ( $L < R$ )  
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
        se ( $a[m] \leq x$ )  
             $L \leftarrow m + 1$   
        senão  
             $R \leftarrow m$   
        fim se  
    fim enquanto  
 $j \leftarrow i$   
    enquanto ( $j > R$ )  
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
         $j \leftarrow j - 1$   
    fim enquanto  
 $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



5.1.2. Inserção Binária

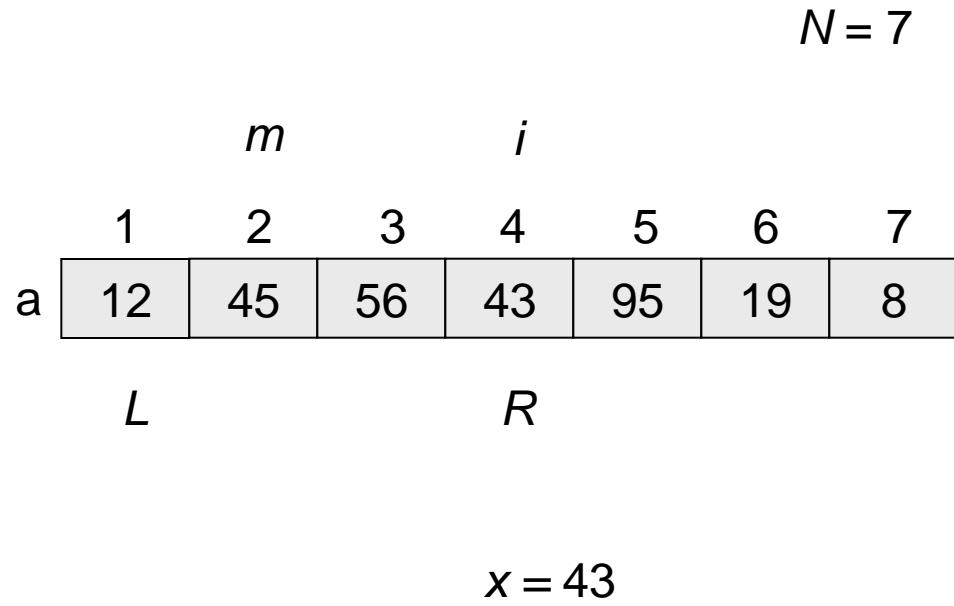
```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$



5.1.2. Inserção Binária

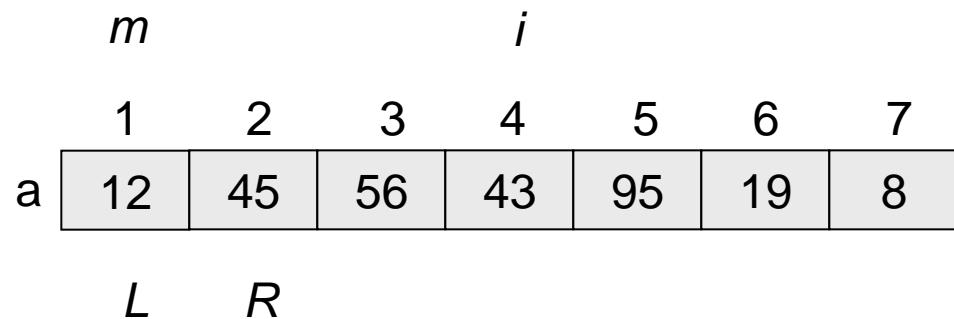
```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
     $x \leftarrow a[i]$   
     $L \leftarrow 1$   
     $R \leftarrow i$   
    enquanto ( $L < R$ )  
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
        se ( $a[m] \leq x$ )  
             $L \leftarrow m + 1$   
        senão  
             $R \leftarrow m$   
        fim se  
    fim enquanto  
     $j \leftarrow i$   
    enquanto ( $j > R$ )  
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
         $j \leftarrow j - 1$   
    fim enquanto  
     $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

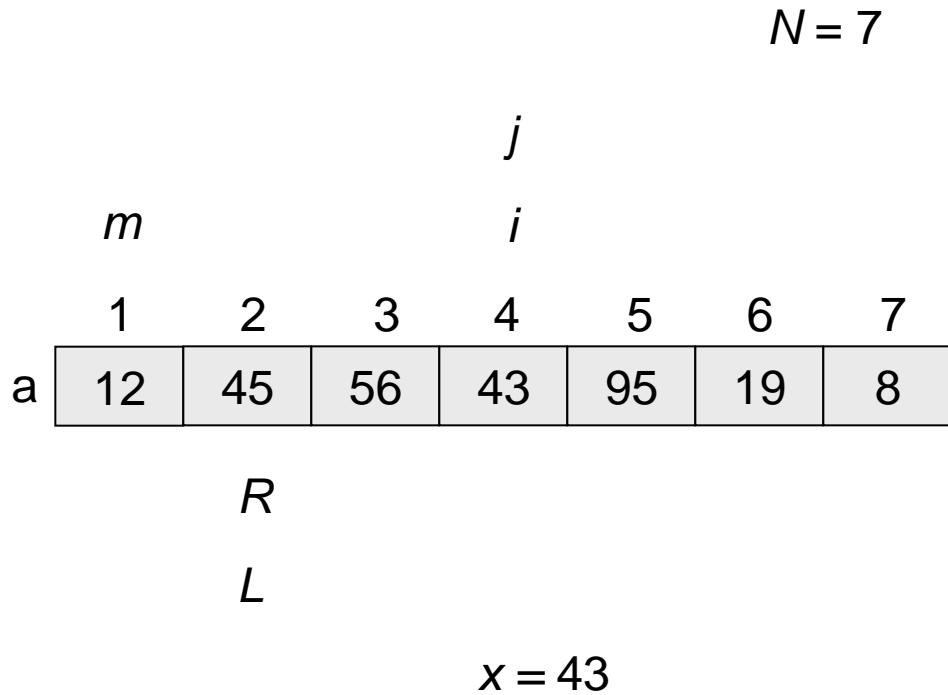
$N = 7$



$x = 43$

5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
     $x \leftarrow a[i]$   
     $L \leftarrow 1$   
     $R \leftarrow i$   
    enquanto ( $L < R$ )  
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
        se ( $a[m] \leq x$ )  
             $L \leftarrow m + 1$   
        senão  
             $R \leftarrow m$   
        fim se  
    fim enquanto  
 $j \leftarrow i$   
    enquanto ( $j > R$ )  
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
         $j \leftarrow j - 1$   
    fim enquanto  
 $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$

			j				
			m			i	
a	1	2	3	4	5	6	7
	12	45	56	56	95	19	8

R

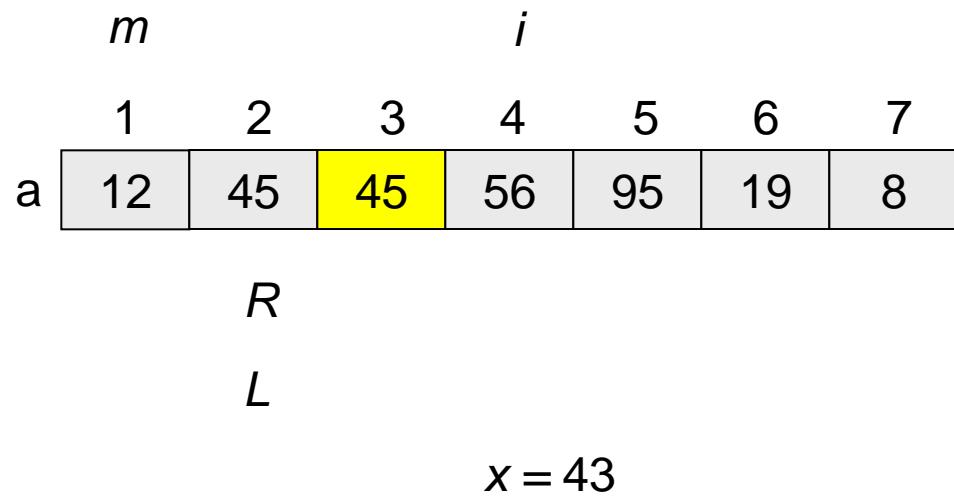
L

$x = 43$

5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$

	m		i								
a	1	2	3	4	5	6	7				
	12	43	45	56	95	19	8				

R

L

$x = 43$

5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$

		m		i			
a	1	2	3	4	5	6	7

L

R

$x = 95$

5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$

			m	i			
a	1	2	3	4	5	6	7

$L \quad R$

$$x = 95$$

5.1.2. Inserção Binária

...
para $i \leftarrow 2$ até $i \leftarrow N$

$x \leftarrow a[i]$

$L \leftarrow 1$

$R \leftarrow i$

enquanto ($L < R$)

$m \leftarrow \text{floor} ((L + R) / 2)$

se ($a[m] \leq x$)

$L \leftarrow m + 1$

senão

$R \leftarrow m$

fim se

fim enquanto

$j \leftarrow i$

enquanto ($j > R$)

$a[j] \leftarrow a[j-1]$

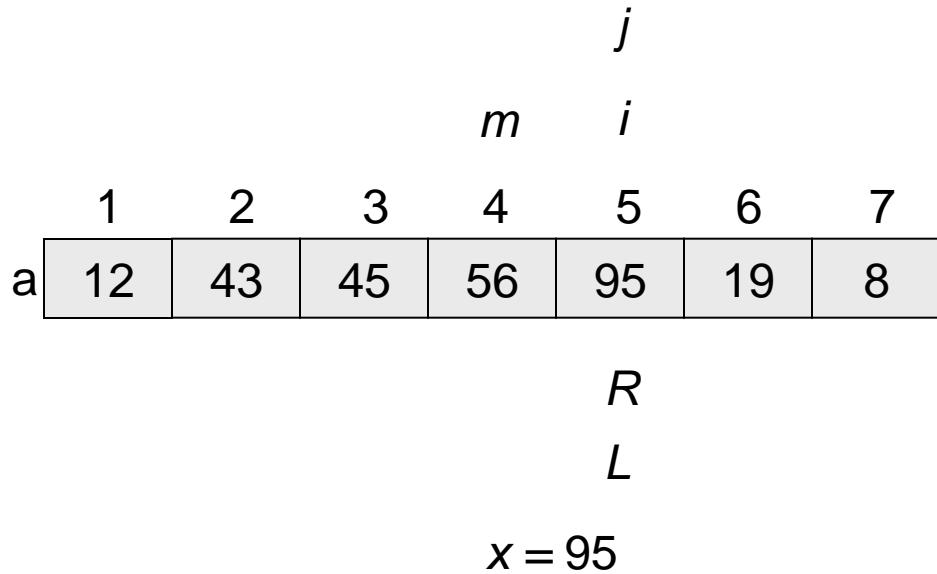
$j \leftarrow j - 1$

fim enquanto

$a[R] \leftarrow x$

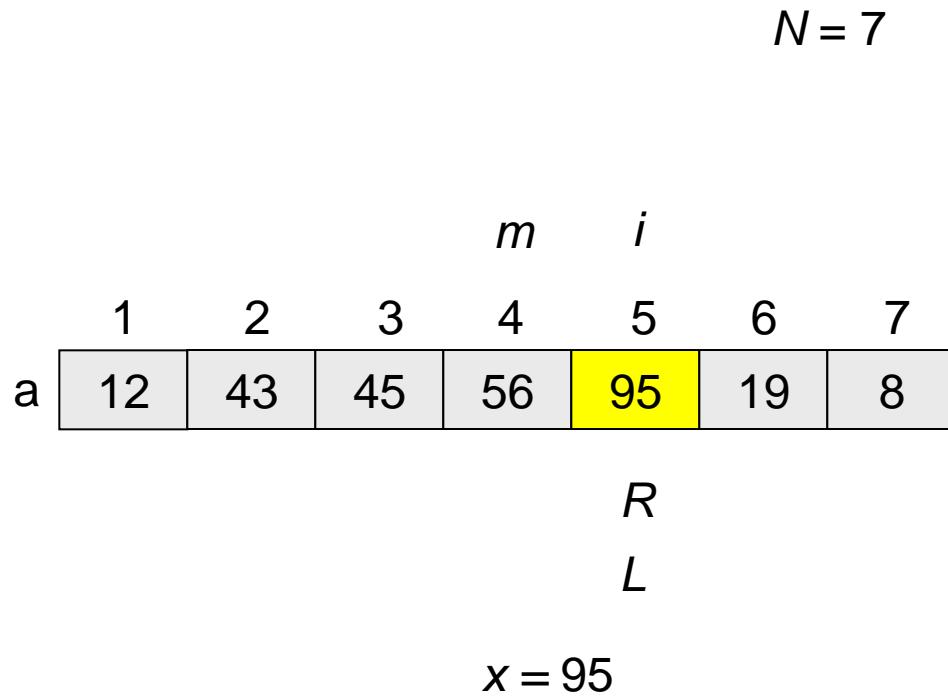
fim para

$N = 7$



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$

		m		i
		1	2	3
a	12	43	45	56

L

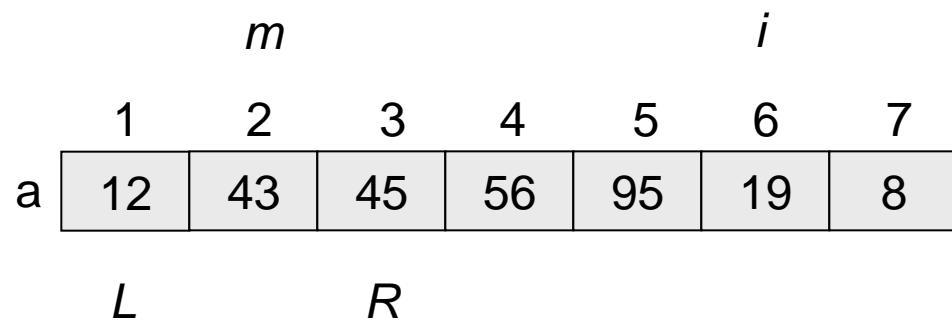
R

$x = 19$

5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

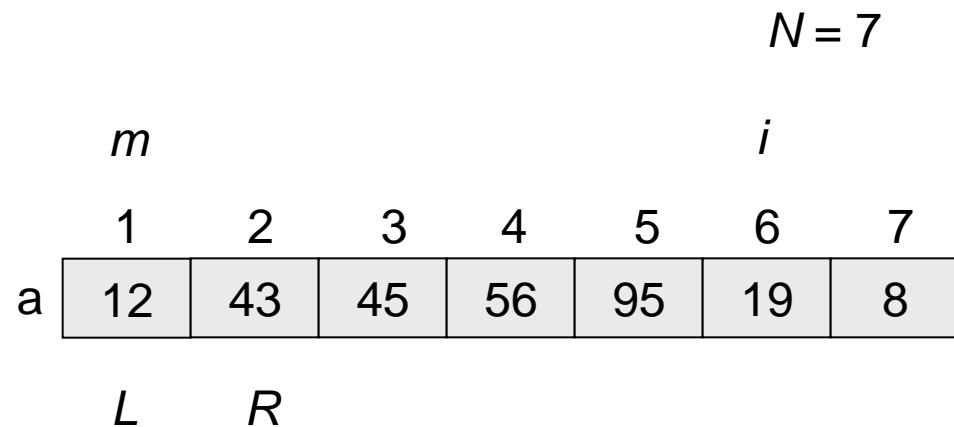
$N = 7$



$x = 19$

5.1.2. Inserção Binária

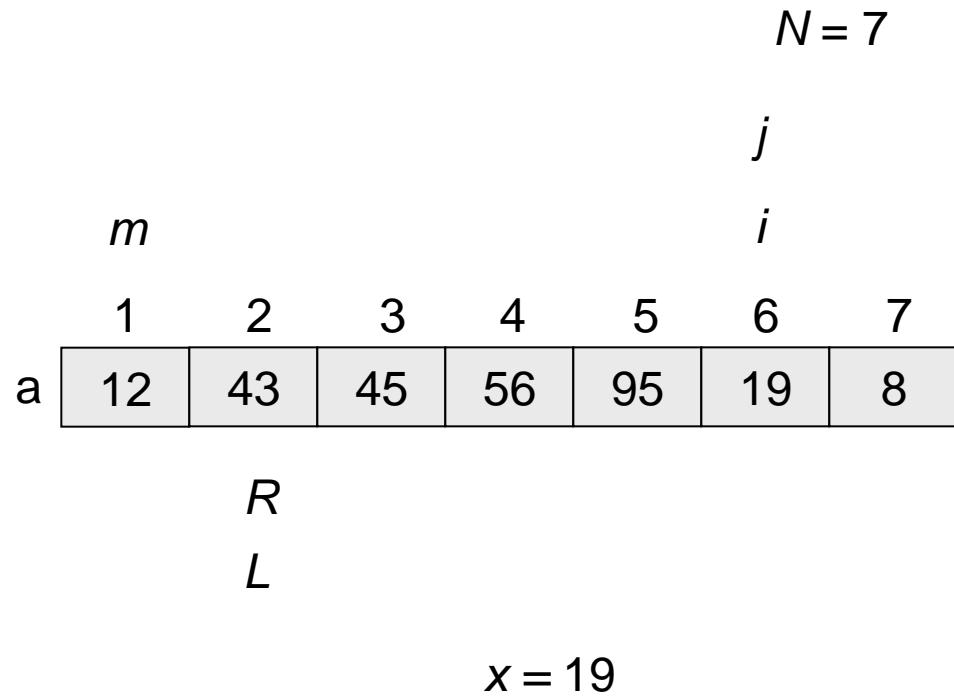
```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
     $x \leftarrow a[i]$   
     $L \leftarrow 1$   
     $R \leftarrow i$   
    enquanto ( $L < R$ )  
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
        se ( $a[m] \leq x$ )  
             $L \leftarrow m + 1$   
        senão  
             $R \leftarrow m$   
        fim se  
    fim enquanto  
 $j \leftarrow i$   
    enquanto ( $j > R$ )  
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
         $j \leftarrow j - 1$   
    fim enquanto  
 $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



$$x = 19$$

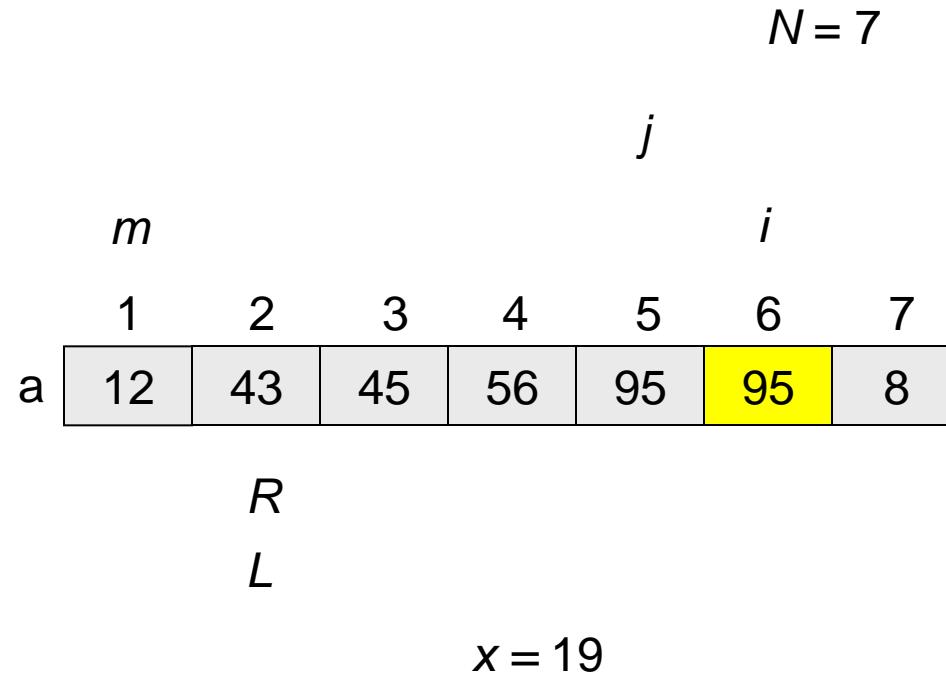
5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



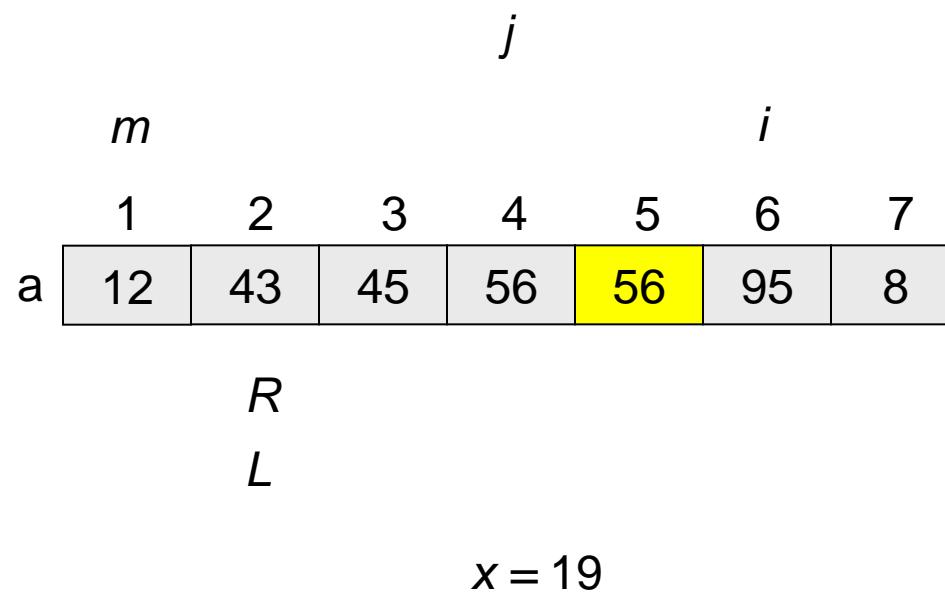
5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
     $x \leftarrow a[i]$   
     $L \leftarrow 1$   
     $R \leftarrow i$   
    enquanto ( $L < R$ )  
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
        se ( $a[m] \leq x$ )  
             $L \leftarrow m + 1$   
        senão  
             $R \leftarrow m$   
        fim se  
    fim enquanto  
 $j \leftarrow i$   
    enquanto ( $j > R$ )  
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
         $j \leftarrow j - 1$   
    fim enquanto  
 $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



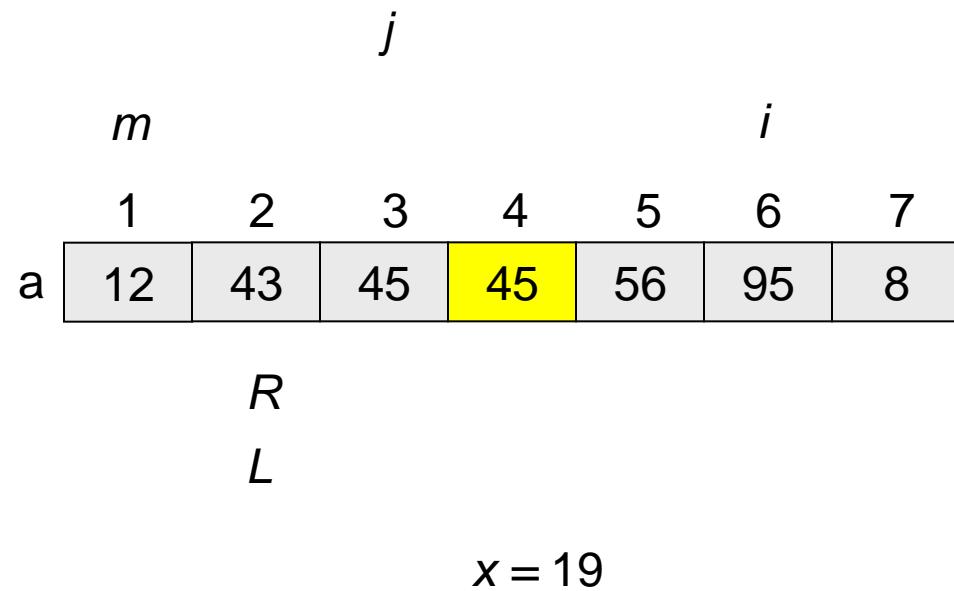
5.1.2. Inserção Binária

```
...
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$ 
     $x \leftarrow a[i]$ 
     $L \leftarrow 1$ 
     $R \leftarrow i$ 
    enquanto ( $L < R$ )
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$ 
        se ( $a[m] \leq x$ )
             $L \leftarrow m + 1$ 
        senão
             $R \leftarrow m$ 
        fim se
    fim enquanto
     $j \leftarrow i$ 
    enquanto ( $j > R$ )
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    fim enquanto
     $a[R] \leftarrow x$ 
fim para
...
```



5.1.2. Inserção Binária

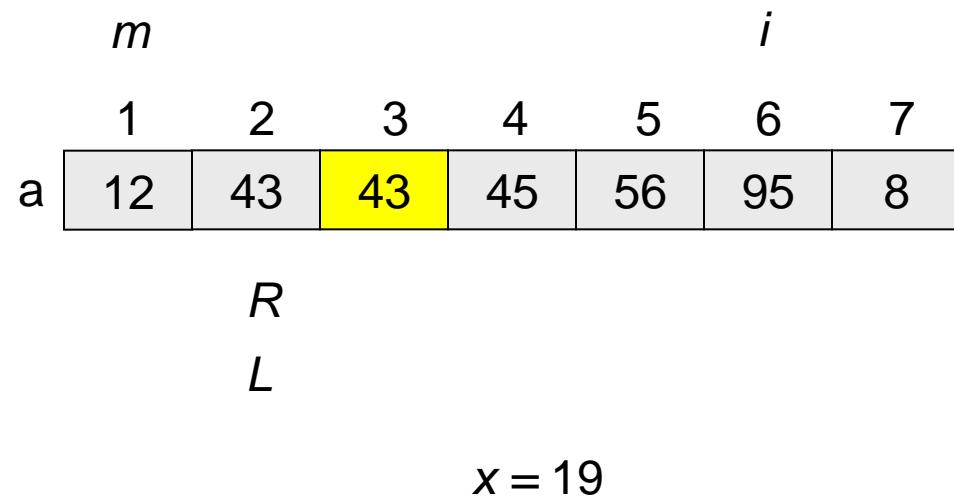
```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



5.1.2. Inserção Binária

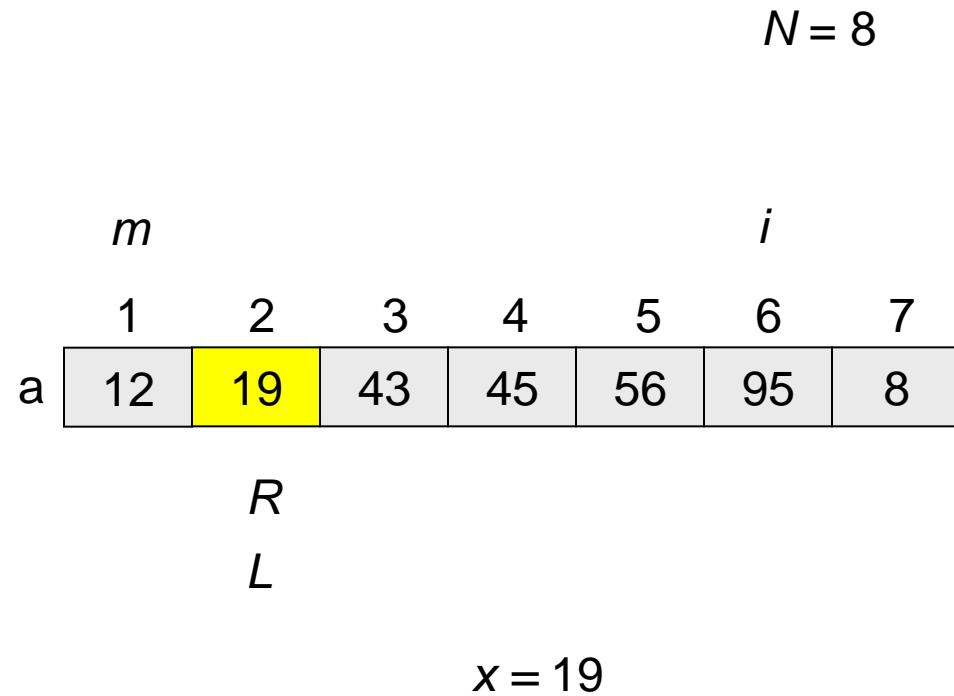
```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$

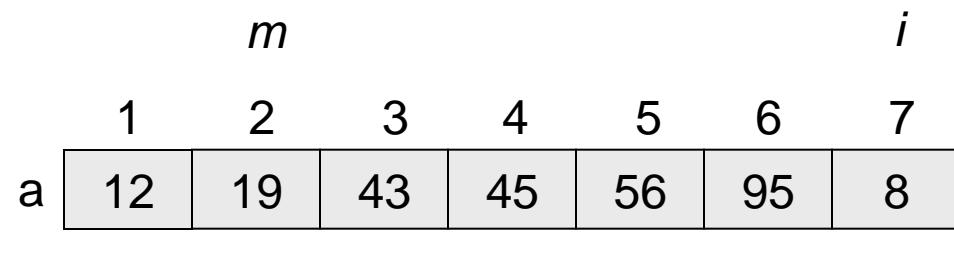
			m			i
a	1	2	3	4	5	6
	12	19	43	45	56	95
						8
			L			R

$x = 8$

5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$

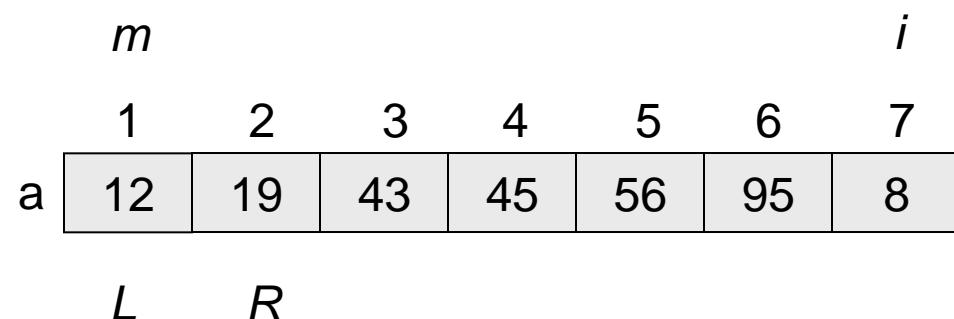


$x = 8$

5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
     $x \leftarrow a[i]$   
     $L \leftarrow 1$   
     $R \leftarrow i$   
    enquanto ( $L < R$ )  
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
        se ( $a[m] \leq x$ )  
             $L \leftarrow m + 1$   
        senão  
             $R \leftarrow m$   
        fim se  
    fim enquanto  
 $j \leftarrow i$   
    enquanto ( $j > R$ )  
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
         $j \leftarrow j - 1$   
    fim enquanto  
 $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

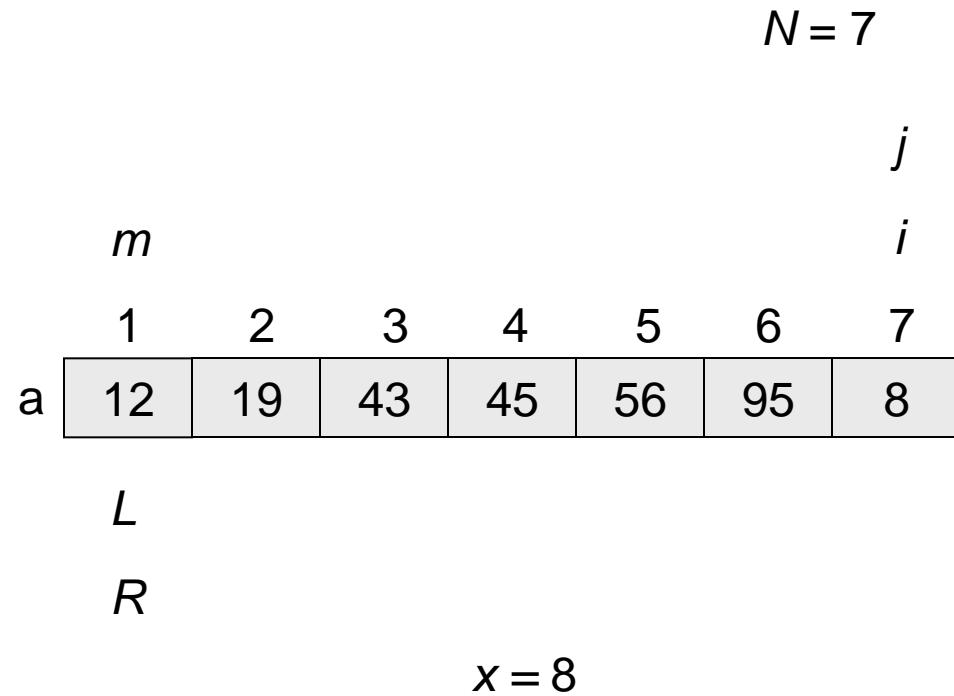
$N = 7$



$x = 8$

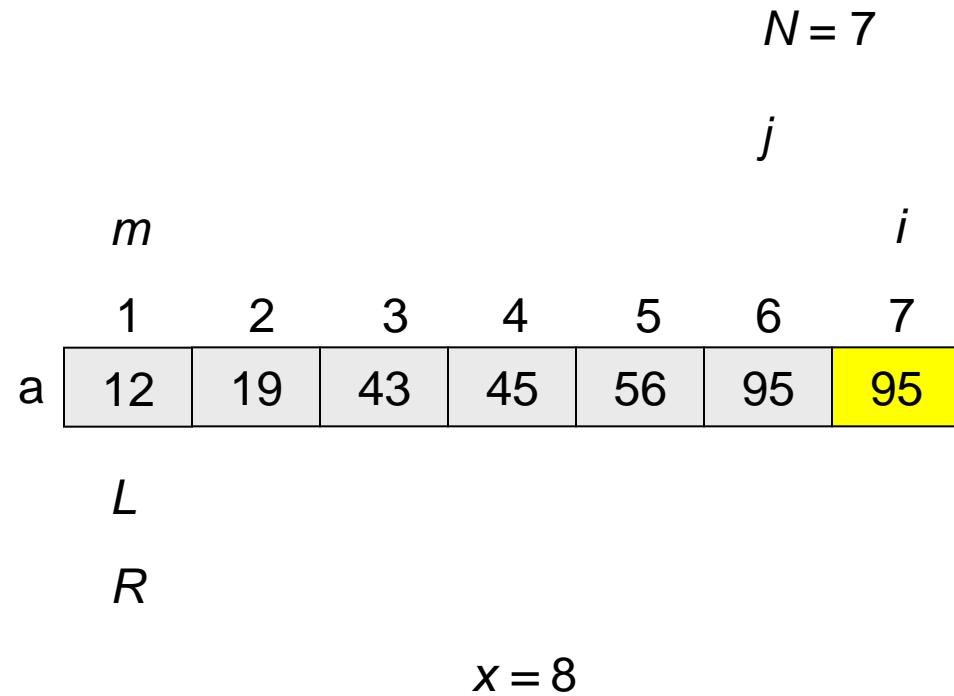
5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
     $x \leftarrow a[i]$   
     $L \leftarrow 1$   
     $R \leftarrow i$   
    enquanto ( $L < R$ )  
         $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
        se ( $a[m] \leq x$ )  
             $L \leftarrow m + 1$   
        senão  
             $R \leftarrow m$   
        fim se  
    fim enquanto  
 $j \leftarrow i$   
    enquanto ( $j > R$ )  
         $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
         $j \leftarrow j - 1$   
    fim enquanto  
 $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



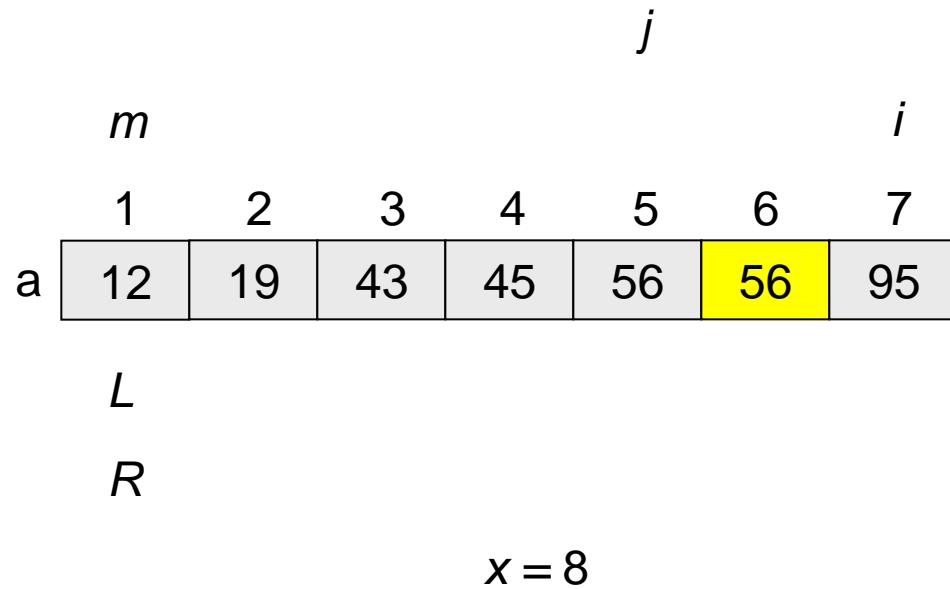
5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



5.1.2. Inserção Binária

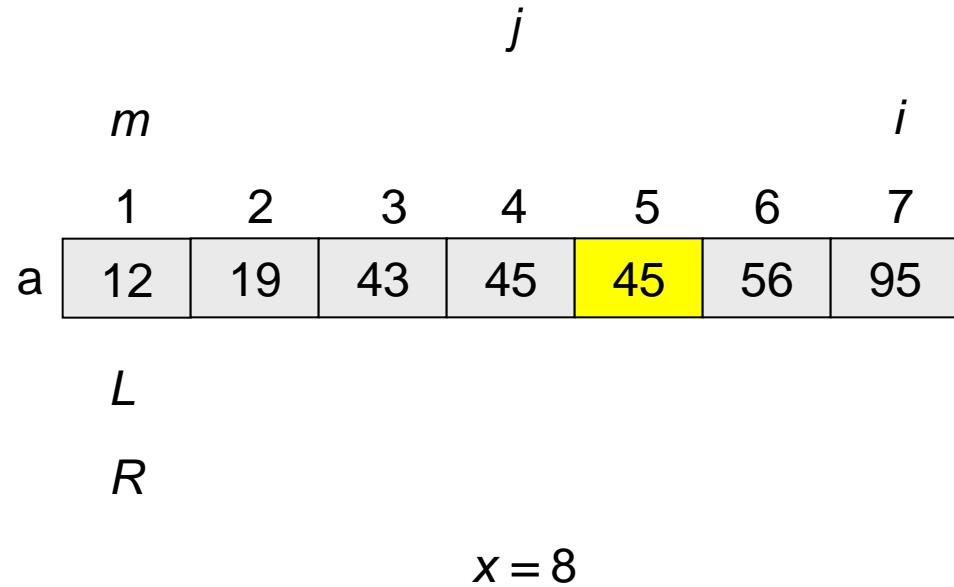
```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

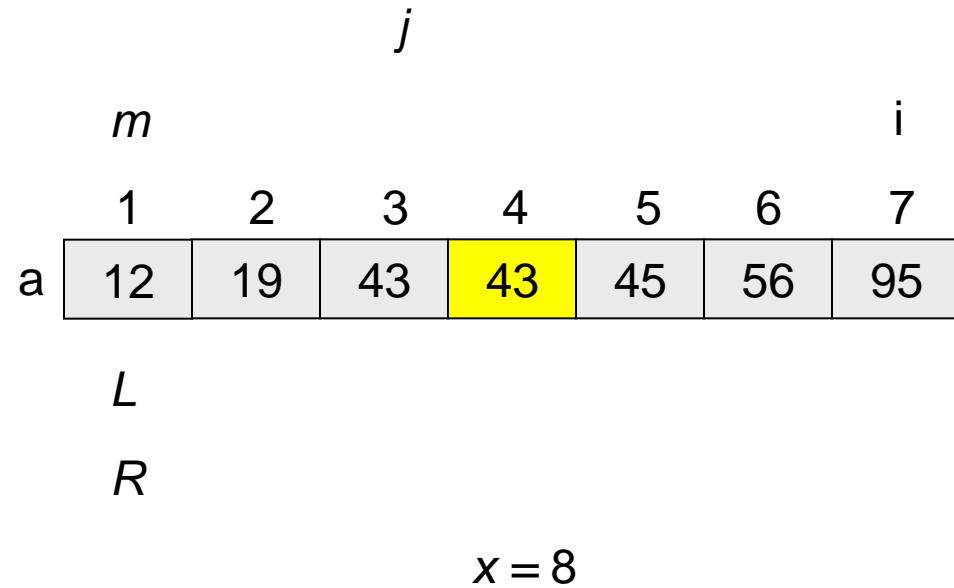
$N = 7$



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

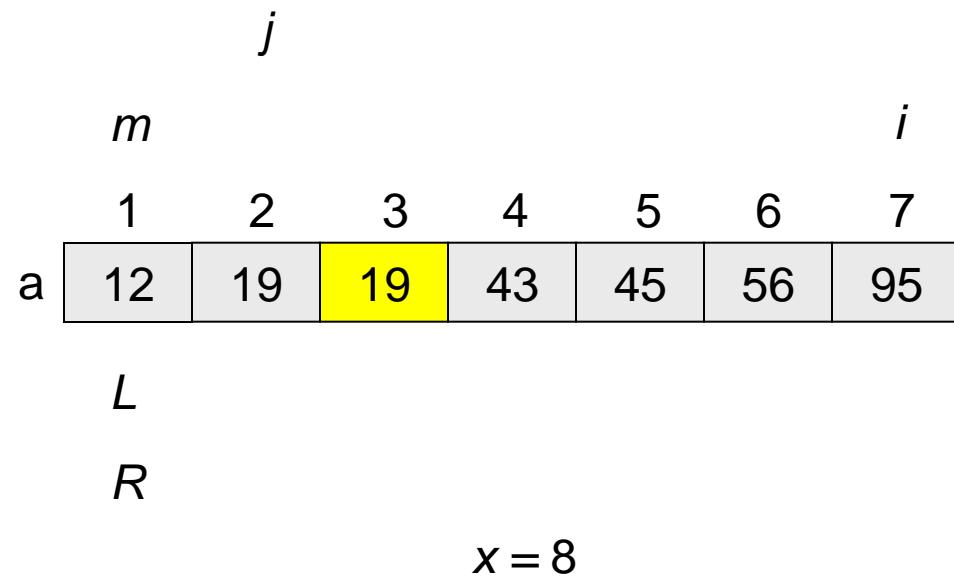
$N = 7$



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

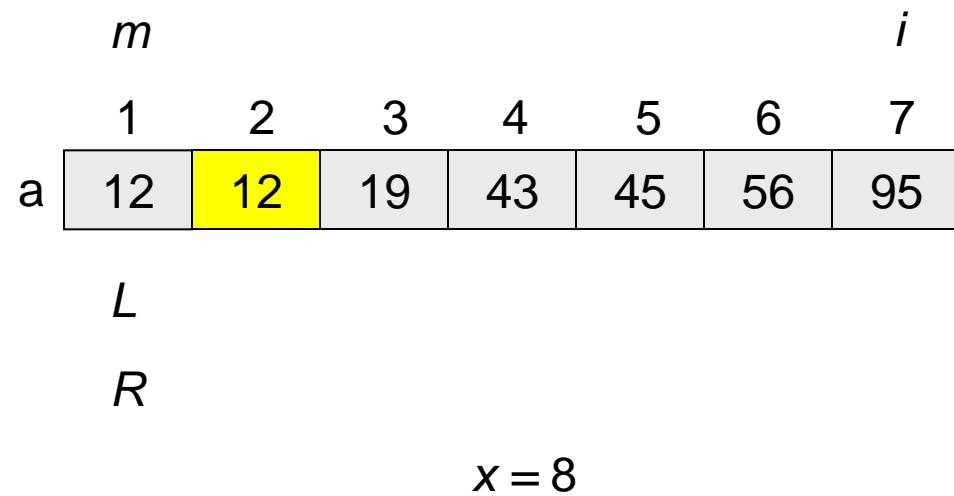
$N = 7$



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

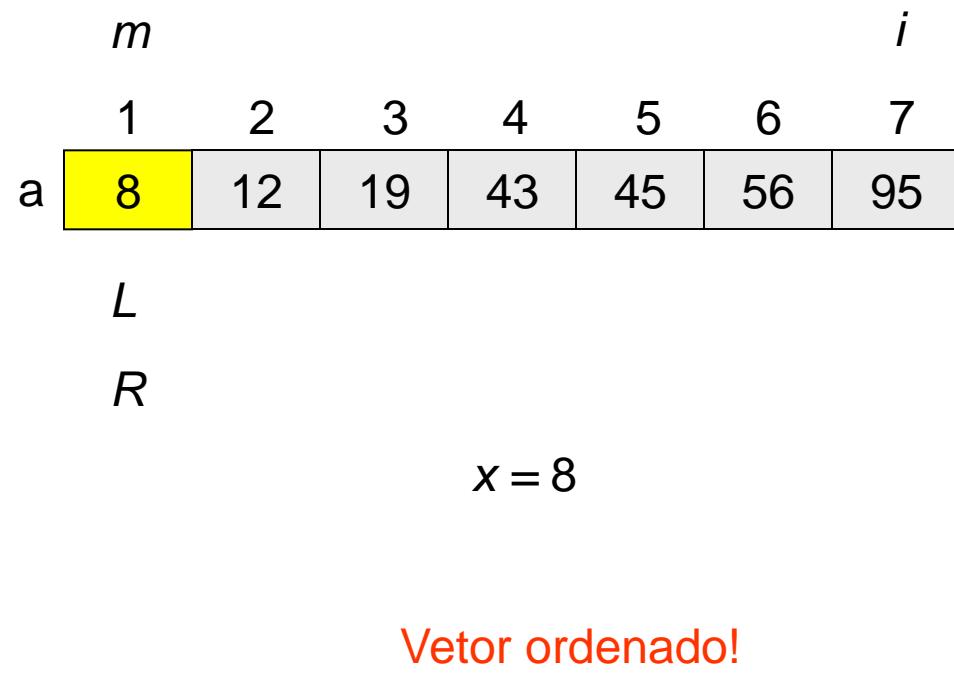
$N = 7$



5.1.2. Inserção Binária

```
...  
para  $i \leftarrow 2$  até  $i \leftarrow N$   
   $x \leftarrow a[i]$   
   $L \leftarrow 1$   
   $R \leftarrow i$   
  enquanto ( $L < R$ )  
     $m \leftarrow \text{floor}((L + R) / 2)$   
    se ( $a[m] \leq x$ )  
       $L \leftarrow m + 1$   
    senão  
       $R \leftarrow m$   
    fim se  
  fim enquanto  
   $j \leftarrow i$   
  enquanto ( $j > R$ )  
     $a[j] \leftarrow a[j-1]$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  fim enquanto  
   $a[R] \leftarrow x$   
fim para  
...
```

$N = 7$



5.1.2. Inserção Binária

ANÁLISE:

MOVIMENTAÇÕES

A análise é igual ao do método da Inserção Direta. Se contarmos as atribuições envolvendo vetores, faz uma a menos em cada iteração i (pois não usa a sentinelha).

COMPARAÇÕES:

O número de comparações é:

$$C = \sum_{i=2}^N (\lceil \log_2(i) \rceil)$$

Repare que o número de comparações para cada valor de i é determinado pelo número de comparações executada na busca binária em um vetor de tamanho i , ou seja, no pior caso C_i será $\lceil \log_2(i) \rceil$. Repare que pode existir uma pequena variação no número de comparações para cada iteração i devido ao truncamento do valor de m na busca binária.

Assim:

$$C = \sum_{i=2}^N (\lceil \log_2(i) \rceil) \text{ comparações}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=2}^N (\lceil \log_2(i) \rceil) = \lceil \log_2(2) \rceil + \lceil \log_2(3) \rceil + \dots + \lceil \log_2(N) \rceil \\ &\leq \lceil \log_2(N) \rceil + \lceil \log_2(N) \rceil + \dots + \lceil \log_2(N) \rceil \end{aligned}$$

Isto é:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=2}^N (\lceil \log_2(i) \rceil) \leq \sum_{i=2}^N (\lceil \log_2(N) \rceil) \\ C &\leq (N-1) * (\lceil \log_2(N) \rceil) \end{aligned}$$

ou seja, C é $O(N \log_2(N))$

5.1.2. Inserção Binária

- Análise

- A posição correta para a inserção é encontrada quando $L = R$
- Para cada intervalo de comprimento i , a operação de bissecção deverá ser aplicada $\text{ceil}(\log(i))$ vezes. Assim:

$$C = \sum_{i=2}^N \lceil \log_2(i) \rceil < N \log_2 N \Rightarrow O(N \log_2 N)$$

- O número de comparações é independente da ordem inicial dos elementos
- Entretanto, devido ao truncamento inerente à operação de divisão envolvida na bissecção do intervalo de busca, o número exato de comparações necessárias para a ordenação de i elementos pode ser até uma unidade maior que o esperado
- Essa diferença é tal que as posições de inserção próximas da extremidade superior do vetor são, em média, localizadas um pouco mais rapidamente do que as que estão no outro extremo, favorecendo casos em que os elementos originais estão em ordem

5.1.2. Inserção Binária

- Análise
 - A melhoria obtida é referente apenas ao número de comparações, mas não ao número de movimentações
 - Como, em geral, mover os elementos consome mais tempo do que comparar duas chaves, a melhoria obtida não é de modo algum drástica (da ordem de N^2)
 - Esse método mostra que uma “*melhoria óbvia*”, em geral, possui consequências menos drásticas do que se pode pensar à primeira vista

5.1.2. Inserção Binária

Exercício 5.1.2. Utilizando o algoritmo de inserção binária, obtenha o número de comparações e movimentações em cada passo para os seguintes vetores

- a) [45 56 12 43 95 19 8 67]
- b) [8 12 19 43 45 56 67 95]
- c) [95 67 56 45 43 19 12 8]
- d) [19 12 8 45 43 56 67 95]

5.1.2. Inserção Binária

Exercício 5.1.2. Solução

i	Ci	Mi	45	56	12	43	95	19	8	67
2	1	2	45	56	12	43	95	19	8	67
3	2	4	12	45	56	43	95	19	8	67
4	2	4	12	43	45	56	95	19	8	67
5	2	2	12	43	45	56	95	19	8	67
6	3	6	12	19	43	45	56	95	8	67
7	3	8	8	12	19	43	45	56	95	67
8	3	3	8	12	19	43	45	56	67	95
	16	29								

i	Ci	Mi	8	12	19	43	45	56	67	95
2	1	2	8	12	19	43	45	56	67	95
3	1	2	8	12	19	43	45	56	67	95
4	2	2	8	12	19	43	45	56	67	95
5	2	2	8	12	19	43	45	56	67	95
6	2	2	8	12	19	43	45	56	67	95
7	2	2	8	12	19	43	45	56	67	95
8	3	2	8	12	19	43	45	56	67	95
	13	14								

i	Ci	Mi	19	12	8	45	43	56	67	95
2	1	3	12	19	8	45	43	56	67	95
3	2	4	8	12	19	45	43	56	67	95
4	2	2	8	12	19	45	43	56	67	95
5	2	3	8	12	19	43	45	56	67	95
6	2	2	8	12	19	43	45	56	67	95
7	2	2	8	12	19	43	45	56	67	95
8	3	2	8	12	19	43	45	56	67	95
	14	18								

i	Ci	Mi	95	67	56	45	43	19	12	8
2	1	3	67	95	56	45	43	19	12	8
3	2	4	56	67	95	45	43	19	12	8
4	2	5	45	56	67	95	43	19	12	8
5	3	6	43	45	56	67	95	19	12	8
6	3	7	19	43	45	56	67	95	12	8
7	3	8	12	19	43	45	56	67	95	8
8	3	9	8	12	19	43	45	56	67	95
	17	42								