



Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos

Introdução à Física Computacional

Projeto 5

Lucas C. A. Mendonça 11795871

São Carlos
2025

Contents

Contents	1	
1	Introdução	2
2	Resultados e Discussões	2
2.1	Tarefa A - Tratamento Geral	2
2.1.1	Investigação da ocorrência de pontos fixos	2
2.1.2	Quais são os limites de valores para r ?	3
2.1.3	Comportamento observado para pontos próximos aos fixos	3
2.2	Tarefa B - Rumo ao Caos	7
2.2.1	Calculando os valores x_1 e x_2 para o comportamento oscilatório . .	7
2.2.2	Valores de duplicação de período e constante de Feigenbaum	8
2.3	Tarefa C: O Caos	10
2.3.1	Para $0 < r < 1$	11
2.3.2	Para $1 < r < 3$	11
2.3.3	Para $r > 3$	11
3	Conclusão	13

1 Introdução

No seguinte relatório tratamos de uma análise do comportamento da série temporal não linear caracterizada pela equação logística.

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i)$$

Neste analisamos os diversos comportamentos apresentados para os diferentes valores de parâmetros possíveis. Trabalharemos desde os valores do parâmetro r para os quais x converge para valores fixos, até os valores de r para os quais x apresenta comportamento caótico determinístico.

2 Resultados e Discussões

2.1 Tarefa A - Tratamento Geral

2.1.1 Investigação da ocorrência de pontos fixos

Para que um ponto seja fixo, ele precisa cumprir a seguinte condição:

$$f(x) = x$$

Dessa forma, manipulando a equação logística obtemos a seguinte relação para o ponto fixo:

$$x = rx(1 - x)$$

$$\boxed{x = \frac{r - 1}{r}} \quad (1)$$

Evolução temporal de $x(i)$ no mapa logístico

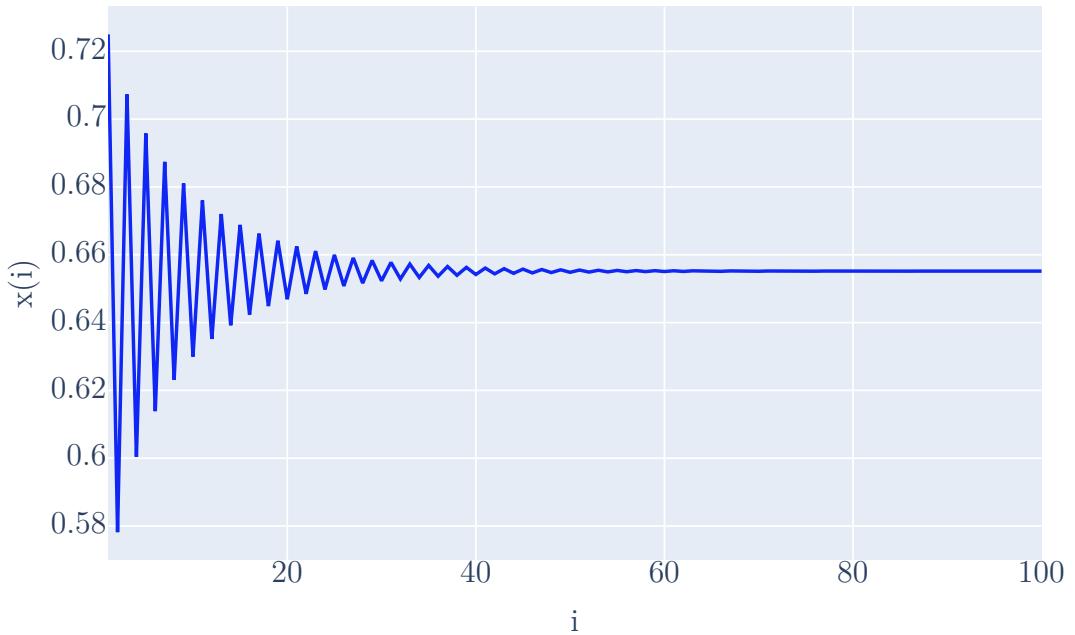


Figure 1: Evolução temporal de x para $x_0 = 0.1$ e $r = 2.9$ com o ponto fixo em $x = 0.655$

2.1.2 Quais são os limites de valores para r ?

A resposta simples e rápida seria que, para um r maior que 4, x escaparia do intervalo $[0,1]$, e, para r negativo, x se tornaria negativo, algo que não faz sentido dentro do contexto de crescimento populacional. No entanto, há ainda o seguinte argumento matemático:

Para $0 \leq x_i \leq 1$, derivamos a equação logística e a igualamos a zero a fim de obter seu valor máximo (dada sua natureza de parábola com concavidade para baixo).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x_i - x_i^2) &= 1 - 2x_i = 0 \\ x_{max} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} rx_{max}(1 - x_{max}) &\leq 1 \\ \frac{r}{4} \leq 1 &\implies r \leq 4 \end{aligned}$$

2.1.3 Comportamento observado para pontos próximos aos fixos

Expandindo a equação logística em série de Taylor perto do ponto fixo obtém-se:

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)$$

$$f(x) - f(x^*) = f'(x^*)(x - x^*)$$

Diremos que $x = x^* + e$ e, portanto, a diferença $x - x^* = e_n$ e $f(x) - f(x^*) = e_{n+1}$, onde e_n representa a distância entre as órbitas. Assim,

$$e_{n+1} = f'(x^*)e_n$$

Logo, é possível identificar que quando $|f'(x^*)| < 0$ a distância entre as órbitas diminui até convergir para zero no infinito e, portanto, x converge para x^* . Podemos separar em casos mais específicos:

Para $0 < r < 1$, $|f'(x^*)| < 0$ é um atrator e x tenderá a zero.

Para $r > 1$ substituimos o valor de $x^* = \frac{1-r}{r}$ na derivada, obtendo

$$f'(x^*) = 2 - r$$

Assim, em $1 < r < 2$, temos $0 < f'(x^*) < 1$, atraindo x para x^* .

Já em $2 < r < 3$, temos $-1 < f'(x^*) < 0$, atraindo, também, x para x^* .

Por fim, com $3 < r < 4$ obtemos $|f'(x^*)| > 1$ e, portanto repulsa x de x^* , afastando as órbitas.

A seguir temos os exemplos para alguns atratores:

Mapa Logístico

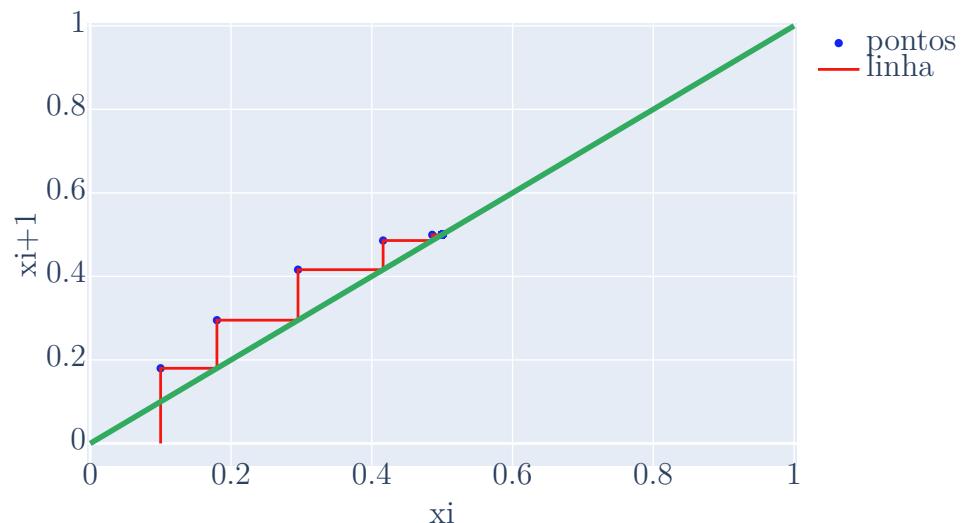


Figure 2: Mapa logístico atrativo para $x_0 = 0.2$ e $r = 2$ e x tendendo a 0.5

Mapa Logístico

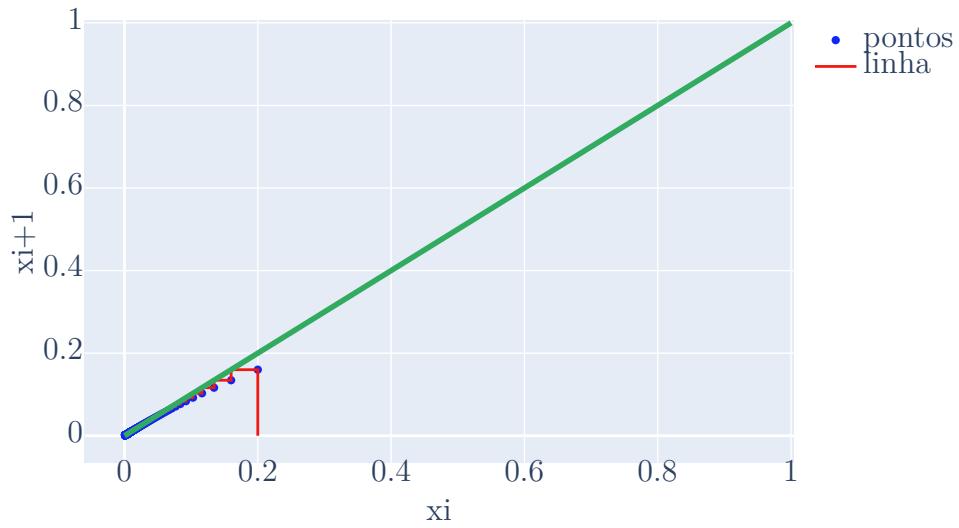


Figure 3: Mapa logístico atrativo para $x_0 = 0.2$ e $r = 1$ e x tendendo a 0

Evolução temporal de $x(i)$ no mapa logístico

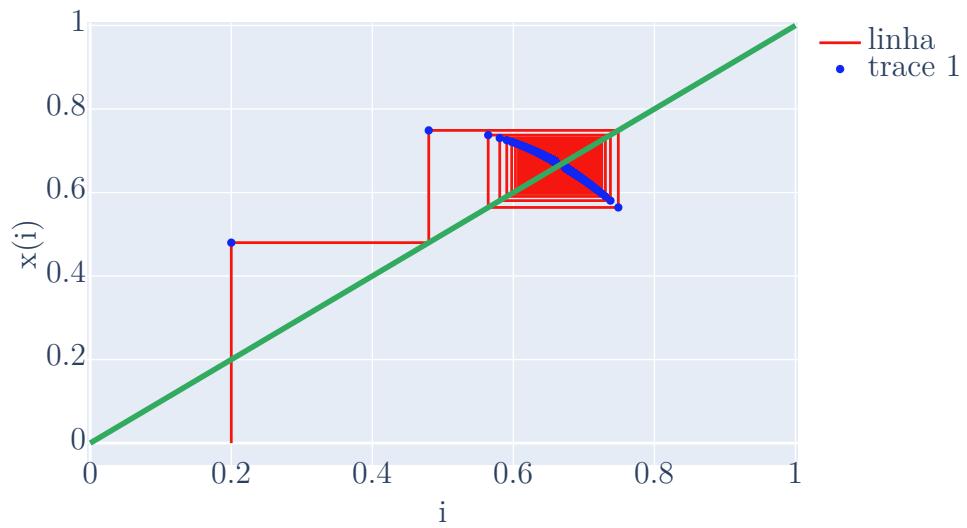
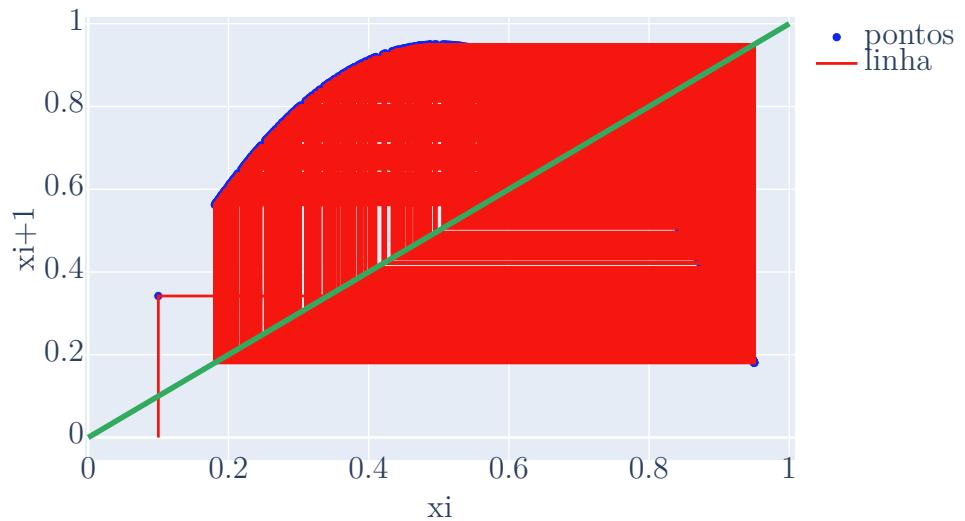


Figure 4: Mapa logístico atrativo para $x_0 = 0.2$, $r = 3$ e x tendendo a 0.66...

Checando por meio da equação (1) podemos ver que, de fato, convergem para os valores esperados de acordo com o r .

Para $r > 3$ podemos observar momentos em que o x se estabiliza entre valores de maneira periódica e outros onde exibe comportamento caótico. A seguir constam alguns exemplos:

Mapa Logístico



Mapa Logístico

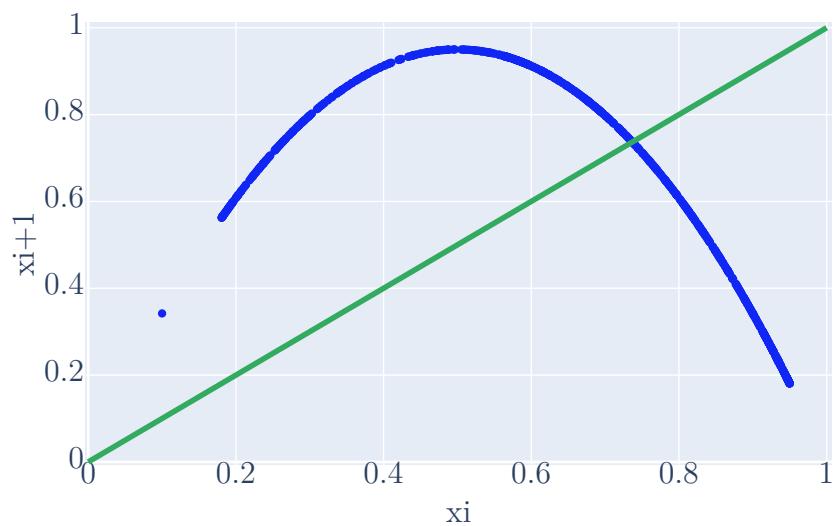


Figure 5: Mapa logístico caótico para $x_0 = 0.1$ e $r = 3.8$

Mapa Logístico

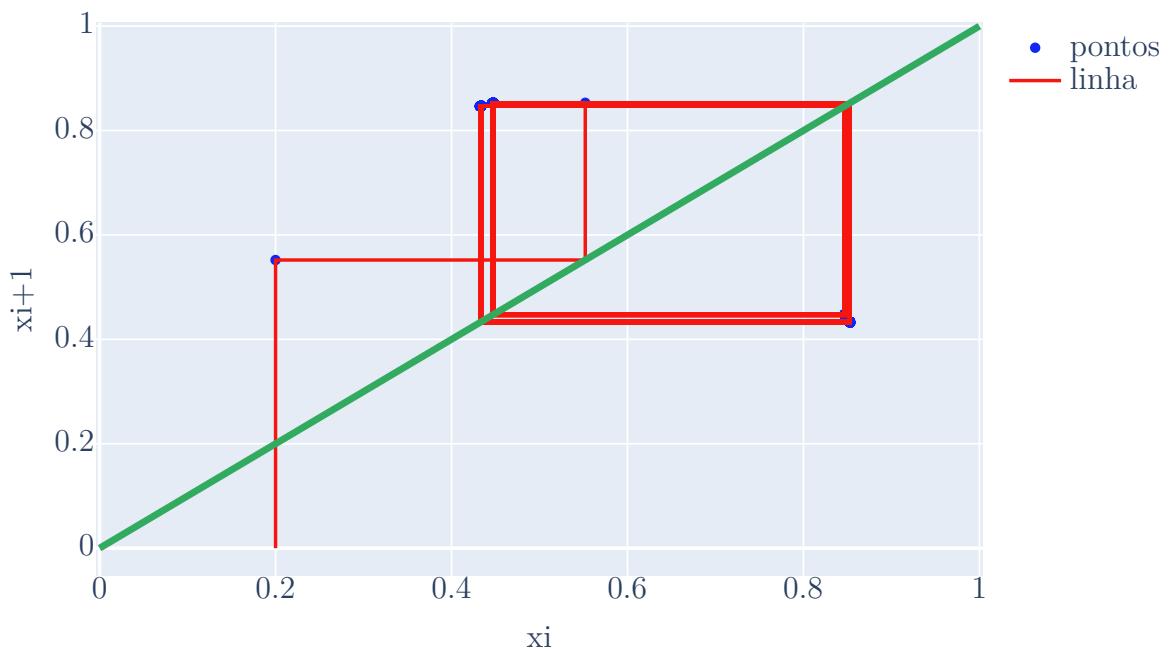


Figure 6: Mapa logístico periódico para $x_0 = 0.1$ e $r = 3.45$

2.2 Tarefa B - Rumo ao Caos

2.2.1 Calculando os valores x1 e x2 para o comportamento oscilatório

Para calcular os valores de x_1 e x_2 quando o mapa logístico adquire comportamento oscilatório, basta resolver a aplicação dele em si mesmo.

$$\begin{aligned}
 f(f(x)) &= x \\
 r^2x(1-x)(1-rx+rx^2) &= x \\
 x &= \frac{(r+1) \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}
 \end{aligned}$$

2.2.2 Valores de duplicação de período e constante de Feigenbaum

Table 1: Valores de r nos quais ocorrem duplicações de período sucessivas.

Transição	Período	Valor de r
r_1	$1 \rightarrow 2$	2.0
r_2	$2 \rightarrow 4$	3.0
r_3	$4 \rightarrow 8$	3.4495
r_4	$8 \rightarrow 16$	3.5441
r_5	$16 \rightarrow 32$	3.5644
r_6	$32 \rightarrow 64$	3.5688
r_7	$64 \rightarrow 128$	3.5697
r_8	$128 \rightarrow 256$	3.5699
\vdots	\vdots	\vdots

Seguem algumas imagens para r's periódicos duplicados sucessivamente:

Mapa Logístico

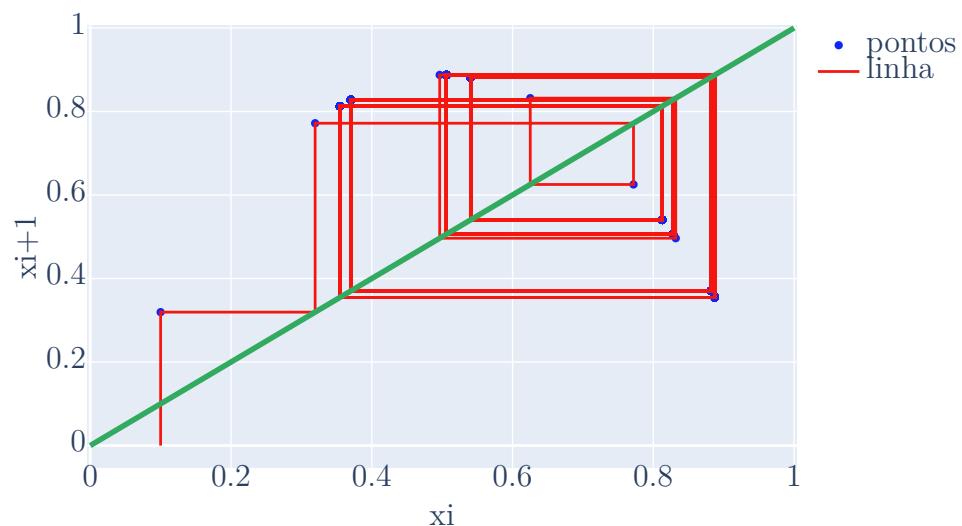


Figure 7: Mapa logístico periódico para $x_0 = 0.1$ e $r = 3.55$

Mapa Logístico

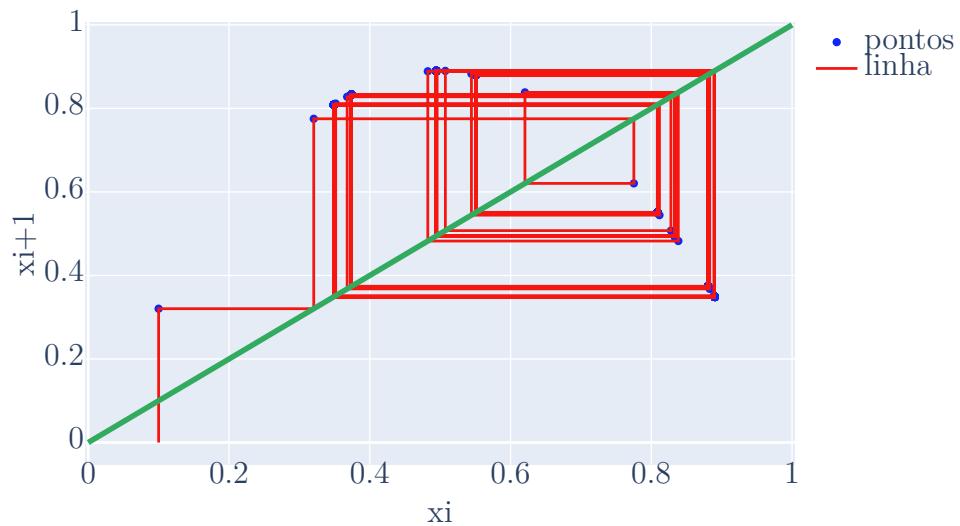


Figure 8: Mapa logístico periódico para $x_0 = 0.1$ e $r = 3.56$

Mapa Logístico

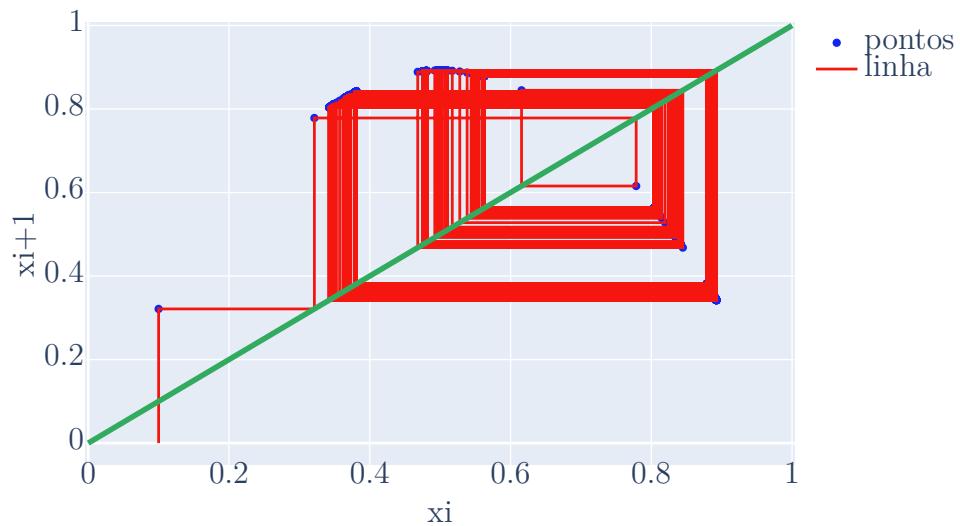


Figure 9: Mapa logístico periódico para $x_0 = 0.1$ e $r = 3.57$

A partir dos valores obtidos, conseguimos os seguintes valores para a constante de Feigenbaum:

Table 2: Cálculo aproximado da constante de Feigenbaum δ usando duplicações de período.

n	r_{n-1}	r_n	$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$
2	2.0000	3.0000	2.224
3	3.0000	3.4495	4.754
4	3.4495	3.5441	4.661
5	3.5441	3.5644	4.614
6	3.5644	3.5688	4.889
7	3.5688	3.5697	4.500

Ignorando o valor 2.224 que não está em $r > 3$ e calculando a média e desvio padrão, obtemos o seguinte valor:

$$\bar{\delta} = 4.6836 \pm 0.2$$

Comparando com o valor da literatura $\delta = 4.669201609\dots$, observa-se uma diferença na ordem de 10^{-2} que é próxima mas difere devido às poucas casas decimais trabalhadas.

A partir da média obtida para a constante de Feigenbaum, estimamos o valor de r em que as duplicações de período tendem ao infinito (dando início ao caos) usando a seguinte derivação da relação da constante de Feigenbaum:

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$$

tende a um valor constante. Isso implica que

$$r_{n+1} - r_n \approx \frac{1}{\delta}(r_n - r_{n-1})$$

no qual os intervalos diminuem geometricamente com razão $1/\delta$. Consequentemente os valores r_n aproximam-se de r_∞ com

$$r_\infty - r_n \propto \delta^{-n}$$

Eliminando a constante de proporcionalidade e usando dois termos consecutivos, obtém-se a seguinte estimativa:

$$r_\infty \approx r_n + (r_n - r_{n-1}) \bar{\delta}$$

Assim, utilizando os últimos valores da Tabela, $r_7 = 3.5697$ e $r_8 = 3.5699$, obtemos

$$r_\infty \approx r_8 + (r_8 - r_7) \bar{\delta}$$

Obtemos a estimativa

$$r_\infty \approx 3.571$$

Novamente, difere do valor da literatura $r_\infty = 3.569945672\dots$.

2.3 Tarefa C: O Caos

Para calcular o expoente de Lyapunov analiticamente utilizamos a seguinte fórmula:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |f'(x_n)|, \quad f(x) = r x(1-x)$$

Na qual substituimos a derivada da função, obtendo a seguinte relação com x_n e r

$$f'(x) = r(1-2x), \quad \lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |r(1-2x_n)|$$

2.3.1 Para $0 < r < 1$

Para esse caso o ponto fixo é zero, logo a equação do expoente fica

$$f'(0) = r(1 - 2 \cdot 0) = r \implies \lambda = \ln|r|$$

Portanto, dado aqui o r se encontra entre 0 e 1, o expoente será negativo.

2.3.2 Para $1 < r < 3$

Utilizando a fórmula (1) deduzida anteriormente para calcular x^* , podemos analisar o que acontece com o expoente de Lyapunov a partir da seguinte relação

$$\lambda(r) = \ln|2-r|.$$

Desse modo, a partir de $1 < r < 3$ temos

$$|2-r| < 1 \implies \lambda < 0$$

2.3.3 Para $r > 3$

Aqui, o caos reina, mas há janelas de estabilidade para alguns r 's. No caso do caos, $\lambda > 0$, mas nas janelas de estabilidade ele volta a ter valor negativo.

No código o expoente de Lyapunov foi calculado numéricamente de duas formas. A primeira foi por meio da fórmula previamente mencionada. A segunda foi calculando a inclinação da melhor reta encontrada (pelo método dos mínimos quadrados) para a linearização dos primeiros pontos da distância d entre as órbitas antes da saturação.

A saturação nada mais é do que o momento em que a distância entre as órbitas para de crescer uma vez que estão limitadas ao intervalo de $[0, 1]$. Quando a distância tenta ultrapassar a máxima $d_{max} = 1$ ela volta a cair e perde-se o comportamento exponencial. Há uma forma de tratar isso com renormalizações (algoritmo de Benettin) de acordo com o crescimento dos valores de x de modo que o comportamento exponencial seja mantido.

Os seguintes resultados foram obtidos numericamente para o expoente de Lyapunov:

Table 3: Exponente de Lyapunov para $x_0 = 0.1$ e $\varepsilon = 10^{-5}$, com $n = 1000$, $d_{\text{sat}} = 0.15$.

r	λ (fórmula)	λ (mínimos quadrados)
2,5	-0,693147	-0,136196
2,8	-0,223144	-0,413339
2,9	-0,105361	-0,709234
3,0	-0,003605	-0,004041
3,6	0,181581	0,207888
3,7	0,357093	0,303981
3,8	0,443584	0,442924
3,9	0,499339	0,526803

A seguir estão gráficos ilustrativos do comportamento exponencial da distância d entre as órbitas para r caótico e sua normalização para $\log(d)$:

Distância das órbitas em função da iteração

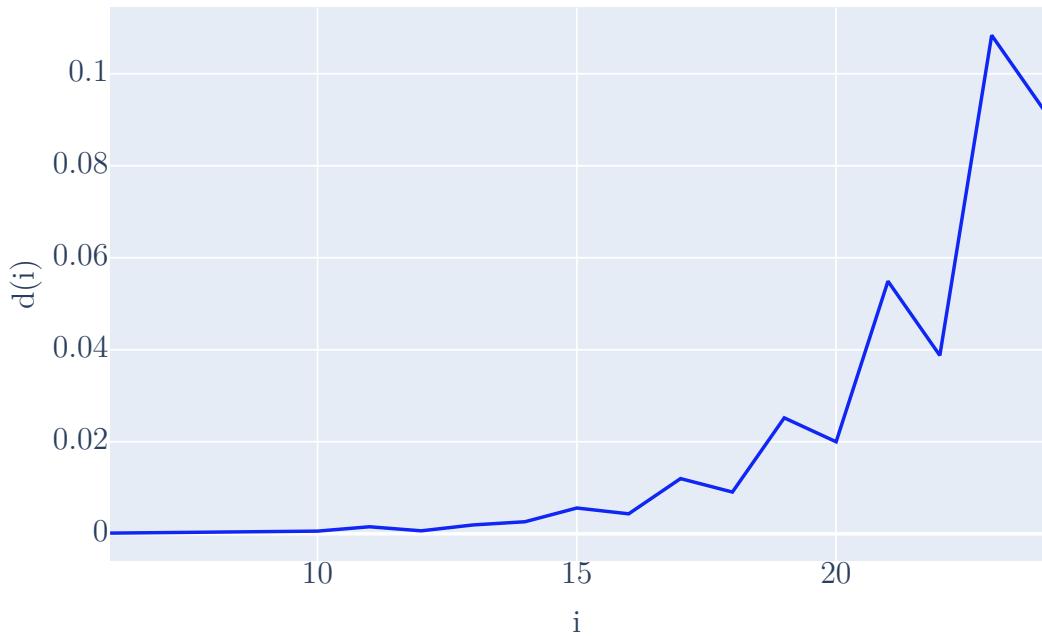


Figure 10: Comportamento da distância das órbitas para $x_0 = 0.1$, $r = 3.67$ e $\epsilon = 10^{-5}$

$\log(d)$ vs i



Figure 11: Linearização do gráfico de $d(i)$ vs i com $x_0 = 0.1$ e $r = 3.67$ e $\epsilon = 10^{-5}$

3 Conclusão

O estudo numérico do mapa logístico permitiu observar a transição entre regimes simples e caóticos. A análise dos pontos fixos, das duplicações de período e do expoente de Lyapunov mostrou que pequenas variações no parâmetro r modificam drasticamente a evolução temporal de x_i . Os resultados reproduziram os comportamentos esperados: a estabilidade do ponto fixo para $r < 3$, o surgimento de órbitas de período 2^n e a divergência exponencial para $\lambda > 0$ na região caótica. Dessa forma, confirmamos a estrutura típica de sistemas não lineares unidimensionais e o papel do expoente de Lyapunov para quantificar a sensibilidade às condições iniciais.