

# Das Riemann-Problem

Das zu lösende Gleichungssystem besteht aus den eindimensionalen hydrodynamischen Gleichungen ohne Viskosität und externe Kräfte, den Euler-Gleichungen. Beschränkung auf eine Dimension ( $x$ ) liefert das Gleichungssystem

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (0.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (0.2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e u}{\partial x} = -p \frac{\partial u}{\partial x} \quad (0.3)$$

mit

$$p = (\gamma - 1)e. \quad (0.4)$$

Bezeichnungen:  $\rho$  = Massendichte,  $u$  = Geschwindigkeit,  $p$  = Druck,  $e$  = innere Energiedichte. Der Zustand des Gases sei durch den Vektor  $\mathbf{U} = (\rho, u, e)$  gegeben. Von einem *Riemann-Problem* spricht man, wenn zu Beginn ( $t = 0$ ) ein Zustand mit zwei voneinander getrennten, konstanten Bereichen vorliegt.

Die anfängliche Unstetigkeit liege bei  $x = 0$ , also ist

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_l & x \leq 0 \\ \mathbf{U}_r & x > 0 \end{cases} \quad (0.5)$$

wobei  $\mathbf{U}_{r,l} = (\rho_{r,l}, u_{r,l}, e_{r,l})$  die konstanten Anfangsbedingungen auf der rechten und linken Seite von  $x = 0$  bedeuten. Der Spezialfall  $u_{r,l}(x, 0) = 0$ , der hier behandelt wird heißt *Stoßrohr* bzw. in englisch *Shock-Tube*.

Bei einem Variablenwechsel  $x' \rightarrow Lx, t' \rightarrow Lt$  mit  $L > 0$  bleibt die Form der Eulergleichungen (0.1-0.3) erhalten, so daß

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{U}\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{L}\right) = \mathbf{U}\left(\frac{x}{t}, 1\right), \quad \text{für } t > 0 \text{ gilt.}$$

Also ist die Lösung des Riemann-Problems konstant entlang Geraden, die vom Ursprung ausgehen, es gehört zu den eindimensionalen Ähnlichkeitsströmungen (z.B. Landau & Lifshitz, 1987).

Da sich Störungen nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten, liegt weit entfernt vom Ursprung noch die anfängliche Konfiguration vor. Sei nun die Anfangsverteilung so, daß  $\rho_l, p_l > \rho_r, p_r$  gelte, dann entwickelt sich das System in den Zustand gemäß Abb. 1. Dabei bedeuten  $U_r, U_l$  die ursprünglichen Zustände,  $X_4$  bezeichnet die Lage der *Shock-front*,  $X_3$  die *Kontaktdiskontinuität*, und  $X_2, X_1$  den rechten ( $X_2$ ) bzw. linken ( $X_1$ ) Rand der *Verdünnungswelle*.

Mit Hilfe der Methode der Charakteristiken und den Erhaltungsbedingungen an der Shock-front können die Werte der physikalischen Größen in den einzelnen Gebieten eindeutig berechnet werden (z.B. Chorin & Marsden, 1979; Sod, 1978). Der Lösungsweg wird im folgenden kurz skizziert.

Seien mit  $u_4, p_4$  Postshock-Geschwindigkeit und -druck im Gebiet 4 bezeichnet. Über die Shockfront bei  $X_4$  können  $p_4$  und  $u_4$  analytisch mit dem rechten Ausgangszustand  $p_r$

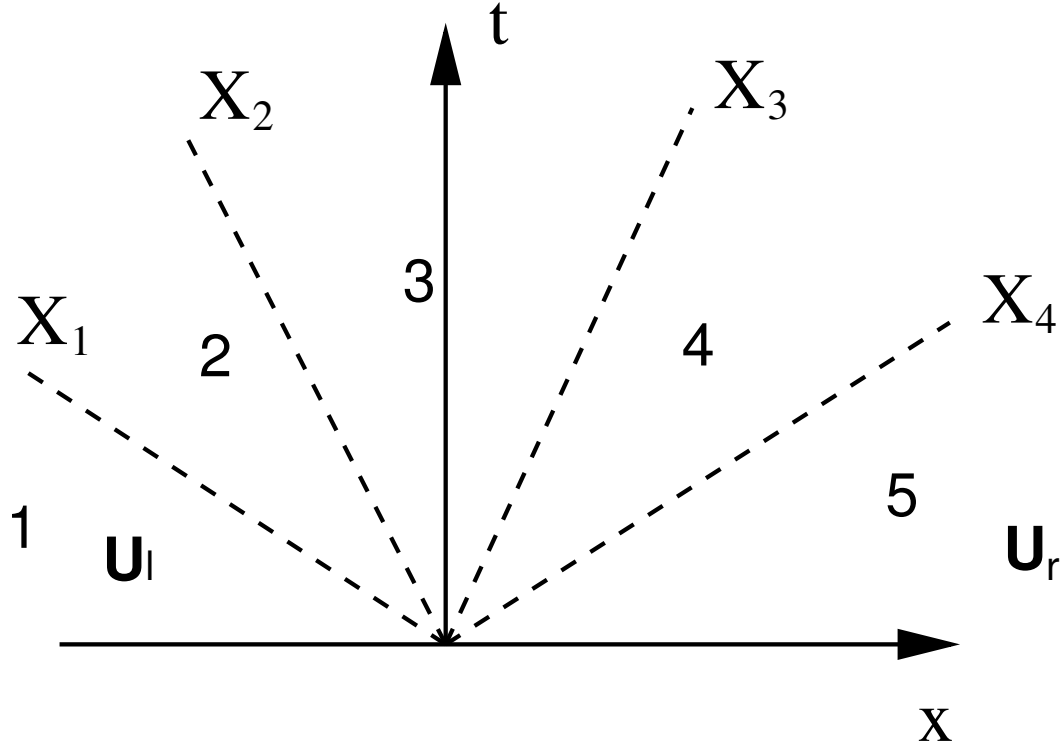


Abbildung 1: Die unterschiedlichen Bereiche des Skocktubes

und  $u_r$  verknüpft werden. Und zwar gelten an der Shockfront aus Erhaltungsgründen die folgenden Sprungbedingungen (für einen **mit** der Front mitbewegten Beobachter):

$$\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1 \quad (0.6)$$

$$\rho_0 u_0^2 + p_0 = \rho_1 u_1^2 + p_1 \quad (0.7)$$

$$(e_0 + p_0)u_0 = (e_1 + p_1)u_1 \quad (0.8)$$

wobei die Indizes (0, 1) die beiden Seiten der Shockfront bezeichnen. Diese Gleichungen (0.6-0.8) sind die *Rankine-Hugoniot'schen* Sprungbedingungen.

Durch algebraische Umformungen erhält man die sog. *Hugoniot-Gleichung*

$$\epsilon_1 - \epsilon_0 + \frac{1}{2}(p_1 + p_0)(\tau_1 - \tau_0) = 0 \quad (0.9)$$

mit dem spezifischen Volumen  $\tau = 1/\rho$  und der spezifischen *totalen* Energie  $\epsilon = e/\rho + u^2/2$ . Sei nun  $M$  definiert als

$$M = \frac{p_r - p_4}{u_r - u_4} \quad (0.10)$$

was äquivalent ist mit

$$M = \rho_0 u_0 = \rho_1 u_1. \quad (0.11)$$

$M$  gibt also den Massenstrom durch die Shockfront an. Mit Hilfe von (0.6, 0.7) folgt dann

$$M^2 = \frac{p_r - p_4}{\tau_4 - \tau_r},$$

wobei  $\tau_{4(r)}$  das spezifische Volumen hinter(vor) der Shockfront ist. Benutzt man nun die Definition von  $M$  (0.10) und die Hugoniot-Gleichung (0.9), dann erhält man

$$u_4 = u_r + (p_4 - p_r) \{ \rho_r [(\gamma + 1)p_4 + (\gamma - 1)p_r] / 2 \}^{-1/2} \quad (0.12)$$

Diese Gleichung beschreibt durch  $u_4 = u_4(p_4)$  bei bekannten  $u_r, p_r$  alle möglichen Postshock-zustände.

Zur eindeutigen Bestimmung von  $p_4$  und  $u_4$  benötigen wir noch eine zusätzliche Gleichung. Diese gewinnen wir durch die Verknüpfung mit  $p_l$  und  $u_l$  über die linke Verdünnungswelle. Die Charakteristiken der Eulergleichungen (0.1-0.3) lauten

$$C_{\pm} : \frac{dx}{dt} = u \pm c. \quad (0.13)$$

Auf ihnen sind die Riemann-Invarianten

$$\Gamma_{\pm} = u \pm \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho \quad (0.14)$$

jeweils konstant. In diesen Gleichungen bedeutet  $c = (dp/d\rho)^{1/2}$  die Schallgeschwindigkeit. In der Verdünnungswelle sind die  $C_-$ -Charakteristiken Geraden durch den Ursprung. Also gilt in der Welle

$$\frac{x}{t} = u - c \quad (0.15)$$

Wegen des angrenzenden konstanten Bereichs  $\mathbf{U}_l$  ist die Verdünnungswelle eine  $\Gamma_+$ -einfache Welle (*simple wave*). Das heißt, daß auch  $\Gamma_+$  auf  $C_-$  konstant ist (vgl. Chorin & Marsden, 1979). Mit der Definition von  $c$  folgt

$$\Gamma_+ = u + 2c(\gamma - 1) = \text{const. auf } C_- \quad (0.16)$$

Wegen der adiabatischen Verknüpfung von  $\mathbf{U}_l$  und dem Gebiet 3 über die Verdünnungswelle gilt  $c = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ , und die Dichte in der Welle ist

$$\rho = \rho_i (p/p_i)^{1/\gamma}, \quad (0.17)$$

hierbei bezeichnen ( $i = 1, 2, 3$ ) die Bereiche der Verdünnungswelle und angrenzenden Bereiche. Für den Druck innerhalb der Verdünnungswelle gilt dann

$$p = p_i [1 - \frac{1}{2} u (\gamma - 1) / c_i]^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (0.18)$$

wobei  $u_l = 0$  gesetzt wurde.

An der Kontaktdiskontinuität springt nur die Dichte und es gilt  $u_4 = u_3$  und  $p_4 = p_3$  (vgl. Abb. 1). Also haben wir mit (0.12) und (0.18) 2 Gleichungen für die 2 Unbekannten  $p_4, u_4$ . Diese werden *iterativ* gelöst. Jetzt können aus den bekannten Größen  $p_4, u_4$  und damit  $M$  die restlichen leicht berechnet werden.

Wenn  $u_s$  die Shockgeschwindigkeit ist, dann gilt für den Dichtesprung an der Shockfront  $u_s[\rho] = [\rho u]$ . Mit  $[f]$  wird der Sprung der Variablen  $f$  durch den Shock bezeichnet. Mit der Definition von  $M$  (0.10) erhält man  $u_s$  aus

$$u_s = \frac{M}{\rho_r} + u_r. \quad (0.19)$$

Die Postshockdichte  $\rho_4$  ist dann gegeben durch

$$\rho_4 = -\frac{M}{u_4 - u_s} \quad (0.20)$$

und im Gebiet 3 gilt

$$\rho_3 = \rho_r \left( \frac{p_4}{p_r} \right)^{1/\gamma} \quad \text{Adiabate.} \quad (0.21)$$

Für die Geschwindigkeit innerhalb der Verdünnungswelle erhält man mit (0.15) und (0.19)

$$u_2 = \frac{2}{\gamma + 1} [c_r + x/t + u_r(\gamma - 1)/2] \quad (0.22)$$

für  $u_l - c_l \leq x/t \leq u_4 - c_4$ . Der Druck  $p_2$  und die Dichte  $\rho_2$  in der Verdünnungswelle folgen dann mit (0.17) und (0.18). Damit sind alle Parameter in den einzelnen Bereichen bestimmt.

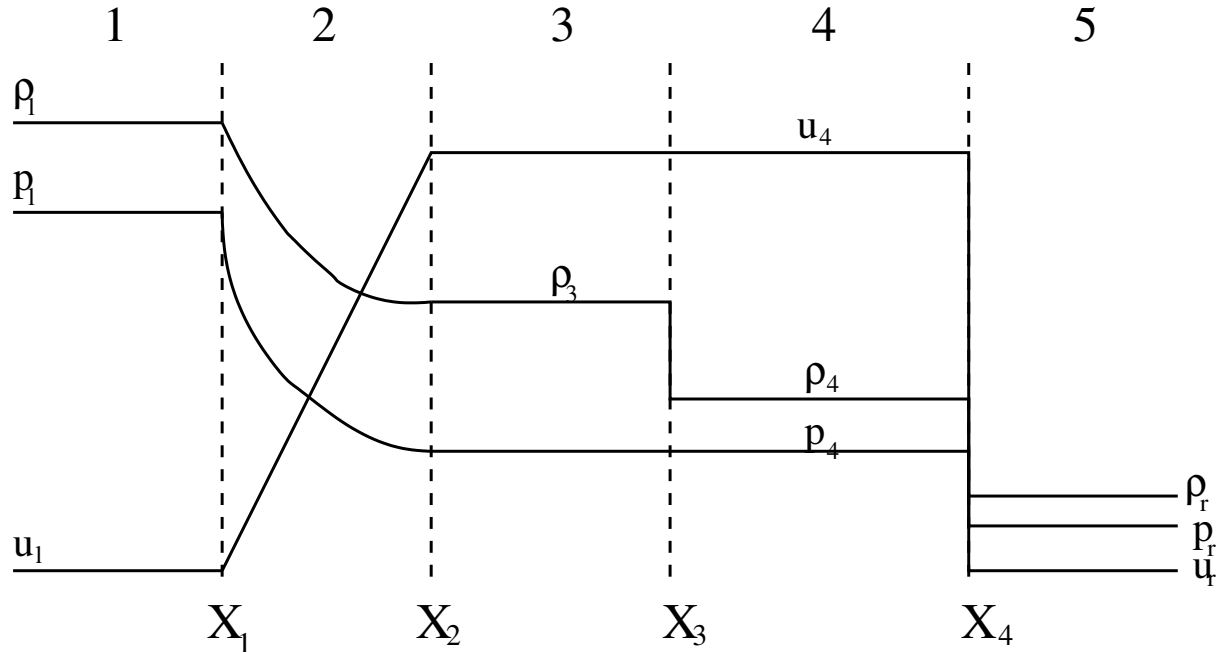


Abbildung 2: Schematische Darstellung des Verlaufs der physikalische Größen beim Shock-tube Problem.

Für die Positionen der Grenzen gilt

$$\begin{aligned} X_1 &= (u_r - c_r) t \\ X_2 &= (u_4 - c_4) t \\ X_3 &= u_4 t \\ X_4 &= u_s t \end{aligned} \quad (0.23)$$

Die Kontaktdiskontinuität bewegt sich mit der Strömung mit. Graphisch zusammengestellt erhält man den in Abb. 2 dargestellten Zustand.

## 0.1 Ein Beispiel Sod Shocktube

Als Testproblem für numerische Rechnungen wird oft das von Sod (1978) in seinem Vergleich verschiedener Differenzenverfahren angegebene verwendet. Wir betrachten in abgeschlossenes Rohr der Länge 1, in dem sich durch eine Wand getrennt ein Gas ( $\gamma = 1.4$ ) mit unterschiedlichen Parametern (Dichte und Druck) rechts und links der Wand befindet. Im sog. Sod-Shocktube liegt die anfängliche Unstetigkeit bei  $x = 0.5$ .  $\mathbf{U}(x, 0)$  lautet:

$$p_l = 1.0, \rho_l = 1.0, \quad e_l = 2.5, u_l = 0, \quad \text{für } x \leq 0.5$$

$$p_r = 0.1, \rho_r = 0.125, \quad e_r = 2.0, u_r = 0, \quad \text{für } x > 0.5$$

wobei die Größen in normierten Einheiten gegeben sind.

Zur Zeit  $t = 0$  denken wir uns die Trennwand, welche die 2 konstanten Zustände ( $\mathbf{U}_r, \mathbf{U}_l$  voneinander trennt, bei Seite gezogen. Das ursprünglich in Ruhe gewesene Gas entwickelt aus der Diskontinuität eine nach rechts laufende Shockfront und eine nach links laufende Verdünnungswelle mit dazwischenliegender Kontaktdiskontinuität (Abb. 2).

Mit diesen Anfangsbedingungen erhält man die folgenden analytischen Werte für die konstanten Bereiche 3 und 4

$$u_3 = u_4 = .927 \quad (0.24)$$

$$p_3 = p_4 = .303 \quad (0.25)$$

$$\rho_4 = .266 \quad (0.26)$$

$$\rho_3 = .426 \quad (0.27)$$

Die Geschwindigkeiten der Grenzflächen -  $X_i$  bewege sich mit  $V_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) - sind dann (vgl. (0.23):

$$V_1 = u_l - c_l = -1.183$$

$$V_2 = u_4 - c_4 = -.071$$

$$V_3 = u_4 = .927$$

$$V_4 = u_s = 1.752$$

Der Shock erreicht etwa bei  $t \approx 0.28$  den rechten Rand  $x = 1$  und wird dort reflektiert.

## Literatur

- [chorin] Chorin, A.J. & Marsden, J.E., 1979, *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Springer Verlag.
- [landau] Landau, L.O. & Lifshitz, E.M., 1987, *Fluid Mechanics*, 2nd Edition, Pergamon Press.
- [sod] Sod, G.A., 1978, Journal of Computational Physics, **27**, 1.