

## 2 Numerische Hydrodynamik: Stoßrohr

Christoph Schäfer & Wilhelm Kley, Version 2023-11-06

### 2.1 Einführung

In diesem Versuch wird eine Methode zur Lösung der ein-dimensionalen Hydrodynamik-Gleichungen vorgestellt, welche von den Teilnehmern implementiert und getestet werden soll.

Dabei handelt es sich um ein partielles Differentialgleichungssystem mit zeitlichen und räumlichen Ableitungen. Aufgrund der Nichtlinearitäten in den Euler-Gleichungen kommt es zu einem Aufsteilen von Wellenfronten und zu Diskontinuitäten (Stoßwellen). Die numerische von solchen Lösungen verlangt eine besondere Behandlung dieser nicht-linearen Terme in den Gleichungen.

In diesem Versuch soll ein Stoßrohrs, das heißt ein physikalischer Vorgang mit einer diskontinuierlichen Anfangsbedingung (Riemann-Problem) untersucht werden. Dabei entstehen verschiedene hydrodynamische Wellen (Verdünnungswelle, Stoßwelle), welche durch die Numerik richtig wiedergegeben werden sollten.

Als Testproblem soll zunächst in Aufgabe 1 die lineare Transportgleichung untersucht werden, daraufhin in Aufgabe 2 das eindimensionale (1D) Stoßrohr.

### 2.2 Gleichungen

#### 2.2.1 Lineare Advektion

Als einfacheres Test-System für die numerische Hydrodynamik wird oft die lineare Advektionsgleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + a \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

verwendet, wobei  $a$  eine Konstante und  $\psi(x, t)$  eine beliebige Transportgröße ist. Diese Gleichung dient als Modell für die Dichteadvektion. Die Transportgeschwindigkeit (in die positive  $x$ -Richtung) ist hier  $a$ .

Mit der Anfangsbedingung

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) \quad (2.2)$$

hat die skalare Gleichung (2.1) als Lösung

$$\psi(x, t) = \psi_0(x - at). \quad (2.3)$$

Die Anfangsbedingungen werden also mit der konstanten Geschwindigkeit  $a$  nach rechts für  $a > 0$  und nach links für  $a < 0$  transportiert,  $a$  ist also die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle.

### 2.2.2 Euler-Gleichungen

Die Entwicklung eines ein-dimensionalen idealen Gases in Zeit  $t$  und Raum  $x$  wird durch die Euler-Gleichungen beschrieben

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \epsilon u}{\partial x} = -p \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Dabei bezeichnet  $\rho$  die Dichte,  $u$  die Geschwindigkeit,  $p$  den Druck und  $\epsilon$  die innere spezifische Energie (Energie/Masse). Die Terme auf der linken Seite werden auch Transport- bzw. Advektionsterme genannt. Auf der rechten Seite stehen die durch den Druck verursachte Kraft und Arbeit. Die Zustandsgleichung zwischen  $p$ ,  $\rho$  und  $\epsilon$  lautet für ein ideales Gas

$$p = (\gamma - 1)\rho\epsilon \quad (2.7)$$

wobei  $\gamma$  der (konstante) Adiabatenindex ist.

## 2.3 Numerische Lösung

Zur Integration der linearen Advektionsgleichung und der Euler-Gleichungen verwenden wir ein Finites Differenzenschema, bei dem die partiellen Differentialgleichungen (PDG) in ein System finiter Differenzengleichungen (FDG) umgewandelt werden.

### 2.3.1 Operator-Splitting

Zur Lösung der Euler-Gleichungen (2.4-2.6) verwendet man oft das sog. Operator-Splitting. Sei ein Differentialgleichungssystem gegeben durch

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = L_1(\mathbf{A}) + L_2(\mathbf{A}). \quad (2.8)$$

Hierbei bezeichnen die Größen  $L_i(\mathbf{A})$ ,  $i = 1, 2$  einzelne (auch Differential-)Operatoren angewandt auf die Größen  $\mathbf{A}$ . In den obigen Euler-Gleichungen sieht dies z.B. folgendermaßen aus

$L_1$  : Advektion

$L_2$  : Druck, bzw. ext. Kräfte

Zur Lösung eines Systems dieser Art wird nun der Integrationsschritt in einzelne Unterschritte unterteilt, indem die einzelnen Terme  $L_i(\mathbf{A})$  auf der rechten Seite nacheinander abgearbeitet werden, oder anders formuliert: Die einzelnen Operatoren werden gesplittet. Das Gleichungssystem

(2.8) wird also in der folgenden Reihenfolge zeitlich integriert

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^1 &= \mathbf{A}^n + \Delta t L_1(\mathbf{A}^n) \\ \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}^1 + \Delta t L_2(\mathbf{A}^1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dabei wird in den einzelnen Schritten auf der rechten Seite jeweils der letzte aktuelle Wert der Größe  $\mathbf{A}$  benutzt.

### 2.3.2 Diskretisierung und Staggered Grid

Der gesamte aktive Rechenbereich, innerhalb dessen die Lösung berechnet werden soll, erstreckt sich  $x_{min}$  bis  $x_{max}$ . Dieser wird mit einem festen räumlichen Gitter gleichmäßig überdeckt. Hier betrachten wir nur äquidistante Gitter für welche die einzelnen Gitterabstände  $\Delta x$  konstant sind. Bei einer Gesamtzahl von  $N$  Gitterzellen (innerhalb des Intervalls  $[x_{min}, x_{max}]$ ) gilt also

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{N}. \quad (2.10)$$

Die (partiellen) räumlichen Ableitungen der Euler-Gleichungen (2.4-2.6) werden nun auf diesem ortsfesten Gitter diskretisiert.

Hierbei wird ein sog. staggered grid (versetztes Gitter) eingeführt, bei dem die Geschwindigkeit  $u$  an den Zellrändern, aber Dichte  $\rho$ , Energie  $\epsilon$  und der Druck  $p$  in den Zellmitten definiert sind (Abb. 2.1). Bei einem solchen Gitter sind typischerweise skalare Größen wie Dichte, Druck und Temperatur in den Zellmitten und vektorielle Größen wie Geschwindigkeiten, Impulse oder Flussgrößen an den Rändern (siehe Abb. 2.1) definiert. Dem liegt die Annahme zugrunde, dass Vektoren im allgemeinen Ableitungen von Skalaren sind, und somit durch die unterschiedliche Position bei der Differenzenbildung automatisch richtig zentriert sind. Tensoren sind wiederum Ableitungen von Vektoren und liegen dazwischen.

Innerhalb eines Volumens (der  $j$ -ten Gitterzelle) bezeichnen die entsprechenden Werte  $\rho_j, \epsilon_j$  jeweils die Mittelwerte der Größen über die Zelle. Um die einzelnen Gitterpunkte zu unterscheiden, führen wir zwei unabhängige Gitter (numerisch Felder oder Arrays), eins an den Rändern (z.B. das  $A$ -Gitter,  $x_i^a$ ) und das andere in den Mitten (hier  $B$ -Gitter,  $x_i^b$ ) ein. Eine solche Definition ist insbesondere vorteilhaft, wenn die Gitterabstände variabel sind. Sie wird in diesem Versuch numerisch nicht unbedingt benötigt, dient aber zur Klarheit bei den folgenden Ausführungen. Die Bezeichnungen und Lage der Gitter-Koordinaten sind der Abb. (2.1) zu entnehmen.

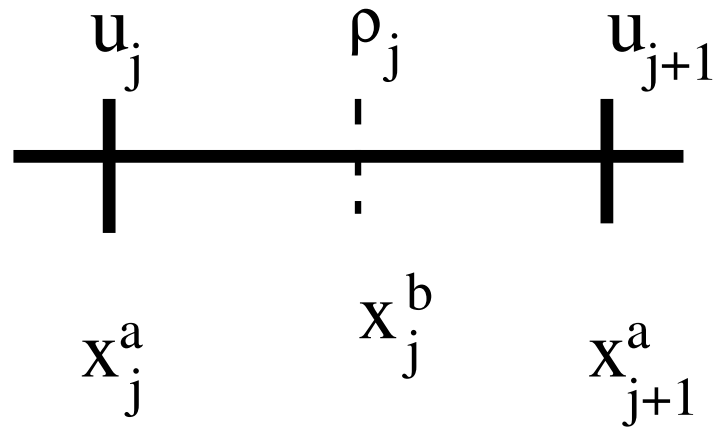
### 2.3.3 Lösungsverfahren

Wir bezeichnen mit  $f_j^n$  den Wert einer Größe  $f$  am Gitterpunkt  $x_j$  zum Zeitpunkt  $t^n$ , dem  $n$ -ten Zeitschritt

$$f_j^n = f(x_j, t^n)$$

wobei  $x_j = x_j^b$  falls  $f$  die Dichte  $\rho$  oder den Druck  $p$  bezeichnet, oder  $x_j = x_j^a$  falls  $f$  die Geschwindigkeit  $u$  bezeichnet (siehe Abb. 2.1).

Bei der Definition des Gitters und der Lokalisierung der Gitterpunkte  $x_j$  sollte jeweils zur einfachen Berücksichtigung der Randbedingungen sog. Geister-Zellen mit berücksichtigt werden. Diese liegen formal außerhalb des eigentlichen Rechenbereichs  $[x_{min}, x_{max}]$  und dienen nur zur Vereinfachung bei der numerischen Implementierung der Randbedingungen. Die Zahl der



**Abbildung 2.1:** Struktur eines staggered grids, bei dem die Variablen an verschiedenen Gitterpunkten definiert sind. Dargestellt ist die  $j$ -te Gitterzelle, deren Mitte sich am Punkt  $x_j^b$  befindet (gestrichelte Linie). Die Randpunkte der  $j$ -ten Zellen werden entsprechend mit  $x_j^a$  (links) und  $x_{j+1}^a$  (rechts) bezeichnet (dicke vertikale Linien). Skalare Größen (Dichte  $\rho$ , Druck  $p$  und Energie  $\epsilon$ ) befinden sich an den Zellmitten (an den Punkten  $x_j^b$ ) und vektorielle Größen (hier die Geschwindigkeit  $u$  und z.B. der Massenfluss,  $F^m$ ) an den Rändern (an den Punkten  $x_j^a$ ).

benötigten Geister-Zellen auf beiden Seiten hängt von der numerischen Ordnung des Verfahrens ab.

- Hinweis: Hier verwenden wir eine Methode, die von zweiter Ordnung im Raum ist, weswegen zwei Geister-Gitterzellen an jedem Rand benötigt werden, siehe dazu die Abb. 2.2 weiter unten. Sei der erste Rand-Gitterpunkt (zu  $x = x_{min}$ ) mit  $x_2^a$  bezeichnet, dann sollte das Gitter generell mit  $x_0^a$  und  $x_0^b$  beginnen. Analog am rechten Rand: das Gitter endet formal mit dem Wert  $x_{N+2}^a = x_{max}$ , es ist aber hilfreich jeweils mit einem um zwei höheren Wert zu enden (siehe Abb. 2.2).

Die Lösung wird nun nach dem Prinzip des Operator-Splitting in zwei Unterschritten durchgeführt. Zuerst der Transport (Advektion) der einzelnen Größen, daran anschließend die Kräfte.

#### a) Advektionsschritt

Hier wird das folgende Gleichungssystem gelöst

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}^n + \Delta t L_1(\mathbf{A}^n) \quad (2.11)$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial \rho u}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} &= -\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} &= -\frac{\partial(\rho \epsilon u)}{\partial x} \end{aligned}$$

Dies ist ein Gleichungssystem in expliziter Erhaltungsform

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

wobei für die Vektoren  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  und  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  gilt:  $\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho \epsilon)$  und  $\mathbf{f} = (\rho u, \rho u u, \rho \epsilon u)$ . Wir betrachten jetzt die drei Gleichungen im einzelnen

*Dichte*

Die diskretisierte Gleichung wird zunächst allgemein in Erhaltungsform geschrieben. Für die Zelle  $j$  folgt

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^m - F_j^m) \quad \text{für } j = 2, N+1 \quad (2.13)$$

wobei nun die  $F_j^m = f_1(x_j^a)$  die Massenflüsse über die jeweiligen Grenzen der Zellen bei  $x_j^a$  bezeichnen. Der Index  $m$  ist hier also kein zeitlicher, oder räumlicher Index, sondern bezeichnet hier den Massenfluss.

Dieser Massenfluss durch eine Punkt  $x_j^a$  ist gegeben durch die Massendichte  $\rho$  multipliziert mit der Geschwindigkeit  $u$ . Wir schreiben

$$F_j^m = \rho_j^{adv} u_j^n \quad \text{für } j = 2, N+2. \quad (2.14)$$

Hier ist  $u_j^n$  schon die richtige Transportgeschwindigkeit am Punkt  $x_j^a$  und  $\rho_j^{adv}$  bezeichnet die zugehörige Dichte. Aus Stabilitätsgründen kann für  $\rho_j^{adv}$  nicht einfach der Mittelwert  $(\rho_{j-1} + \rho_j)/2$  benutzt werden. Wir verwenden eine Erweiterung des Upwind-Verfahrens und schreiben

$$\rho_j^{adv} = \begin{cases} \rho_{j-1}^n + \frac{1}{2} \left( 1 - u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \Delta \rho_{j-1} & \text{für } u_j^n > 0 \\ \rho_j^n - \frac{1}{2} \left( 1 + u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \Delta \rho_j & \text{für } u_j^n \leq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Falls alle  $\Delta \rho_j$  verschwinden, ist dies das klassische Upwind-Verfahren (von erster Ordnung in  $\Delta x$ ), d.h. es wird jeweils die stromaufwärtige Dichte genommen. Die Erweiterung folgt aus einer Taylor-Entwicklung der Dichten, jeweils an den Zellgrenzen ausgewertet. Für die undividierte Differenz  $\Delta \rho_j$  verwenden wir ein geometrisches Mittel (van Leer, 1972)

$$\Delta \rho_j = \begin{cases} 2 \frac{(\rho_{j+1}^n - \rho_j^n)(\rho_j^n - \rho_{j-1}^n)}{(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n)} & \text{falls } (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n)(\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Diese Formulierung vermeidet Oszillationen und verhindert somit auch eine unphysikalische Entleerung der einzelnen Zellen. Zur Vermeidung einer Division durch Null kann in Gl. (2.16) im Nenner eine sehr kleine Größe addiert werden. Die neue Dichte  $\rho^1$  nach diesem Advektionsschritt ist gleich derjenigen zum neuen Zeitschrittlevel  $t^{n+1}$ , und die  $\rho_j^{n+1}$  können somit für jeden Gitterpunkt aus Gl. (2.13) berechnet werden.

**Impuls**

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} \quad (2.17)$$

Hier schreiben wir

$$(\rho u)_j^1 = (\rho u)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_j^I - F_{j-1}^I) \quad \text{für } j = 3, N+1 \quad (2.18)$$

Die unterschiedliche Lage der Impulszelle (an  $x_j^a$ ) zentriert bewirkt die leicht geänderte Indizierung im Vergleich zur obigen Formel bei der Dichte.  $F_j^I$  bezeichnet z.B. den Impulsfluss durch den Punkt  $x_j^b$ , den rechten Rand einer Impulszelle. Der obere Index bei  $u_j^1$  deutet hier an, dass noch nicht der Wert zum neuen Zeitschritt berechnet wurde, sondern gemäß unseres Operator-Splittings erst der Zwischenwert nach der Advektion. Wir schreiben

$$F_j^I = \frac{1}{2} (F_j^m + F_{j+1}^m) u_j^{adv} \quad \text{für } j = 2, N+1. \quad (2.19)$$

Hierbei wurde angenommen, dass aus physikalischen Gründen Impulstransport nur bei Anwesenheit eines Massenflusses stattfinden kann. Dieser wird mit der zugehörigen Geschwindigkeit  $u_j^{adv}$  multipliziert. Für diese wird jetzt wieder ein Upwind-Ansatz gemacht

$$u_j^{adv} = \begin{cases} u_j^n + \frac{1}{2} \left( 1 - \bar{u}_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \Delta u_j & \text{für } \bar{u}_j > 0 \\ u_{j+1}^n - \frac{1}{2} \left( 1 + \bar{u}_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \Delta u_{j+1} & \text{für } \bar{u}_j \leq 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Hier bezeichnet  $\bar{u}_j$  die an den Gitterpunkt  $x_j^b$ , dem Mittelpunkt der Zelle  $j$  dort wo die Dichten liegen, gemittelten Wert der Geschwindigkeit, siehe Abb. 2.1.

$$\bar{u}_j = \frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}) \quad (2.21)$$

Für die Steigungen gilt wieder

$$\Delta u_j = \begin{cases} 2 \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)(u_j^n - u_{j-1}^n)}{(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)} & \text{falls } (u_{j+1}^n - u_j^n)(u_j^n - u_{j-1}^n) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.22)$$

Die neue Geschwindigkeit  $u_j^1$  kann jetzt berechnet werden zu

$$u_j^1 = \left[ u_j^n \bar{\rho}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_j^I - F_{j-1}^I) \right] / \bar{\rho}_j^{n+1} \quad (2.23)$$

Hier bezeichnet  $\bar{\rho}$  die an die Zellränder gemittelte Dichten, siehe wiederum Abb. 2.1.

$$\bar{\rho}_j = \frac{1}{2} (\rho_{j-1} + \rho_j) \quad (2.24)$$

Also liegt  $\bar{\rho}_j$  am Gitterpunkt  $x_j^a$ , aber  $\bar{u}_j$  am Gitterpunkt  $x_j^b$ . Für die Impulsdichte am Punkt  $x_j^a$  gilt also  $(\bar{\rho}_j u_j)$ . Beachte jeweils die korrekten Zeitschrittleve bei den  $\bar{\rho}_j$ .

### Energie

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u \epsilon)}{\partial x} \quad (2.25)$$

Nun ist

$$(\rho \epsilon)_j^1 = (\rho \epsilon)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^e - F_j^e) \quad \text{für } j = 2, N+1 \quad (2.26)$$

## 2.3. NUMERISCHE LÖSUNG

wobei jetzt der Energiefluss  $F^e$  an den Massenfluss gekoppelt ist

$$F_j^e = F_j^m \epsilon_j^{adv} \quad (2.27)$$

Die transportierte Energie wird genau wie die Dichte berechnet (diese liegen beide in der Zellenmitte)

$$\epsilon_j^{adv} = \begin{cases} \epsilon_{j-1}^n + \frac{1}{2} \left( 1 - u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \Delta \epsilon_{j-1} & \text{für } u_j > 0 \\ \epsilon_j^n - \frac{1}{2} \left( 1 + u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \Delta \epsilon_j & \text{für } u_j \leq 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

mit

$$\Delta \epsilon_j = \begin{cases} 2 \frac{(\epsilon_{j+1}^n - \epsilon_j^n)(\epsilon_j^n - \epsilon_{j-1}^n)}{(\epsilon_{j+1}^n - \epsilon_{j-1}^n)} & \text{falls } (\epsilon_{j+1}^n - \epsilon_j^n)(\epsilon_j^n - \epsilon_{j-1}^n) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.29)$$

In Analogie zum Impuls wird die neue Energie  $\epsilon^1$  berechnet nach

$$\epsilon_j^1 = \left[ \epsilon_j^n \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^e - F_j^e) \right] / \rho_j^{n+1} \quad (2.30)$$

Man beachte den korrekten Wert von  $\rho_j$  am alten und neuen Zeitschritt. Damit ist der Advektionsschritt abgeschlossen und das System ist vollständig zum zeitlichen Zwischenwert bekannt

$$\left. \begin{matrix} \rho^n \\ u^n \\ \epsilon^n \end{matrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} \rho^1 = \rho^{n+1} \\ u^1 \\ \epsilon^1 \end{matrix} \right. \quad (2.31)$$

Da bei der Kontinuitätsgleichung keine weiteren Quellterme vorhanden sind, ist hier schon der neue Zeitschritt  $n + 1$  erreicht. Bei der Geschwindigkeit und der Energie fehlen noch die Kräfte, bzw. die Druckarbeit.

### b) Kräfte, Druckarbeit

Hier wird das folgende Gleichungssystem gelöst

$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^1 + \Delta t L_2(\mathbf{A}^1) \quad (2.32)$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} &= -p \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt die beiden Gleichungen im einzelnen

*Impuls*

## 2.3. NUMERISCHE LÖSUNG

Da die Dichte schon zum neuen Zeitschritt bekannt ist, braucht sie hier nicht mehr integriert werden. Also wird

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.33)$$

Hier schreiben wir

$$u_j^{n+1} = u_j^1 - \Delta t \frac{1}{\bar{\rho}_j^{n+1}} \frac{(p_j^1 - p_{j-1}^1)}{\Delta x} \quad \text{für } j = 3, N+1 \quad (2.34)$$

Durch die verschobenen Positionen der Variablen ( $p_j = p(x_j^b)$ ) ist die Druckableitung automatisch zentriert und somit von zweiter Ordnung in  $\Delta x$ . Dies ist ein weiterer Vorteil des staggered grids. Auf der rechten Seite werden hier die aktuellen Werte nach der Advektion benutzt. Der Druck  $p$  ist für ein ideales Gas gegeben durch

$$p = (\gamma - 1)\rho\epsilon \quad (2.35)$$

wobei  $\gamma$  der Adiabatenindex ist. Alle Größen  $p, \rho, \epsilon$  sind Skalare und somit an den gleichen Punkten, den Zellmitten definiert ( $x_j^b$ ), also ist (ohne weitere räumliche Mittelung)

$$p_j = (\gamma - 1)\rho_j\epsilon_j, \quad (2.36)$$

wobei der Zeitindex jeweils bei allen Größen der selbe ist. Die an die Position der Geschwindigkeiten ( $x_j^a$ ) gemittelte Dichte  $\bar{\rho}_j$  auf der rechten Seite ist wiederum durch Gl. (2.24) gegeben.

*Energie*

Jetzt wird die folgende Gleichung betrachtet

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.37)$$

In Indexform

$$\epsilon_j^{n+1} = \epsilon_j^1 - \Delta t \frac{p_j^1}{\rho_j^{n+1}} \frac{(u_{j+1}^1 - u_j^1)}{\Delta x} \quad \text{für } j = 2, N+1 \quad (2.38)$$

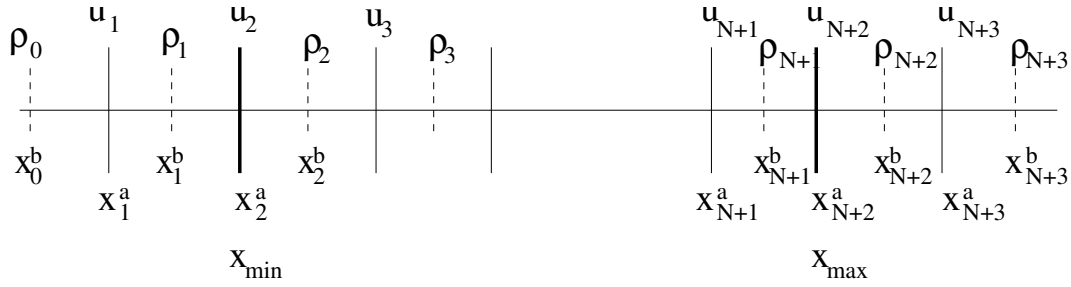
Die Druckarbeit auf der rechten Seite ist wiederum automatisch richtig zentriert.

### Randbedingungen

Zur Formulierung der Randbedingung betrachten wir die Abb. (2.2). Der Gesamtbereich  $[x_{min}, x_{max}]$  wird mit  $N$  Gitterzellen gleichmäßig überdeckt. Dabei liegt das  $A$  – Gitter an den Rändern der einzelnen Gitterzellen. Die Ränder des gesamten aktiven Rechenbereichs,  $x_{min}$  und  $x_{max}$ , werden jeweils mit  $x_2^a$  und  $x_{N+2}^a$  bezeichnet. Jenseits der physikalischen Grenzen  $[x_{min}, x_{max}]$  werden noch Geister-Zellen definiert (Abb. 2.2), die eine einfache Implementierung der Randbedingungen erlauben. Die Lage der Energiewerte ist hierbei die gleiche wie diejenige der Dichten, an den Punkten  $x_j^b$ .



## 2.4. LITERATUR



**Abbildung 2.2:** Globale Gitterdefinition. Die Ränder des aktiven Rechenbereichs liegen bei  $x_2^a = x_{min}$  und  $x_{N+2}^a = x_{max}$ , d.h. der Rechenbereich ist mit  $N$  Gitterzellen überdeckt worden. Die Position der Variablen  $u_j$  (Zellränder) und  $\rho_j$  (Zellmitten) sind angegeben. Jenseits des eigentlichen Rechenbereichs befinden sich noch zusätzliche Geister-Zellen, z.B. die Zellen 0 und 1 mit den Mittelpunkten bei  $x_0^b, x_1^b$  vor  $x_{min}$  und die Zellen  $N+2$  und  $N+3$  mit den Mittelpunkten  $x_{N+2}^b, x_{N+3}^b$  hinter  $x_{max}$ . Die Variablen  $\epsilon_i$  und  $p_i$  sind identisch zu den  $\rho_i$  positioniert.

Bei festen Wänden, wie im zweiten Versuchsteil (dem Shock-tube), verwendet man **reflektierende Randbedingungen** und belegt die Geister-Zellen folgendermaßen.

$$\begin{array}{llll}
 u_2 & = & 0 & \rho_1 & = & \rho_2 & \epsilon_1 & = & \epsilon_2 \\
 u_1 & = & -u_3 & \rho_0 & = & \rho_3 & \epsilon_0 & = & \epsilon_3 \\
 u_{N+2} & = & 0 & \rho_{N+2} & = & \rho_{N+1} & \epsilon_{N+2} & = & \epsilon_{N+1} \\
 u_{N+3} & = & -u_{N+1} & \rho_{N+3} & = & \rho_N & \epsilon_{N+3} & = & \epsilon_N
 \end{array} \tag{2.39}$$

Diese Randbedingungen werden nach jedem Teilschritt (Advektion, Kräfte) gesetzt.

## 2.4 Literatur

- 1) Hawley J.F., Wilson J.R. & Smarr L.L., A numerical study of nonspherical black hole accretion. II - Finite differencing and code calibration  
The Astrophysical Journal Supplement, 55, 211 (1984)
- 2) Stone J.M. & Norman M.L., ZEUS-2D: A Radiation Hydrodynamics Code... I. The Hydrodynamic Algorithms and Tests  
The Astrophysical Journal Supplement, 80, 753-790 (1992)
- 3) Kley, W. Numerische Hydrodynamik Vorlesungsskript, (2004)  
<http://www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~kley/lehre/numhydro/index.html>

## 2.5 Aufgaben

### Aufgabe 1: Lineare Advektion

Diese erste Aufgabe ist als Test-Problem für die Lösung der vollständigen Hydrodynamik gedacht.

## 2.5. AUFGABEN

1. Verifizieren Sie, dass die Gleichung (2.3) eine Lösung der skalaren Transportgleichung (2.1) ist.
2. Schreiben Sie ein Programm zur Lösung der linearen Advektionsgleichung (2.1). Beachten Sie, dass die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik (2.4) für konstante Geschwindigkeit  $u$  zu dieser Gleichung äquivalent ist. D.h. verwenden Sie zur Lösung das oben für die Dichteadvektion angegebene Verfahren, siehe Gl. (2.13-2.16).
3. Testen Sie das Programm am folgenden Beispiel (Rechteckimpuls):  
Sei die positive Transportgeschwindigkeit  $u = a = 1$ . Der Rechenbereich sei  $[-1, 1]$ . Die Randbedingungen seien periodisch, d.h.  $\psi(-1, t) = \psi(1, t)$  für alle Zeiten  $t$ . Die Anfangsbedingung zur Zeit  $t = 0$ ,  $\psi(x, t = 0)$  sei gegeben durch

$$\psi(x, t = 0) = \begin{cases} 1.0 & \text{für } |x| \leq \frac{1}{3} \\ 0.0 & \text{für } \frac{1}{3} < |x| \leq 1 \end{cases}$$

Die Zeitschrittgröße kann über die Courantzahl  $\sigma$  berechnet werden

$$\sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.8.$$

- Berechnen Sie jeweils mit  $\sigma = 0.8$  die Lösung zu  $\psi(x, t = 4)$  mit 40 Gitterpunkten und  $\psi(x, t = 400)$  mit 400 Gitterpunkten. Geben Sie jeweils die benötigte Rechenzeit des Programms an.
- Vergleichen Sie die erhaltenen numerischen Ergebnisse jeweils mit der analytischen Lösung.
- Beschreiben Sie die Unterschiede zwischen dem reinen Upwindverfahren ( $\Delta\psi_j = 0$ ) und der erweiterten Modellierung nach Gl. (2.15).
- Testen Sie für das Upwindverfahren, was passiert wenn Sie den Zeitschritt  $\Delta t$  erhöhen, auch über die Stabilitätsgrenze ( $\sigma = 1.0$ ) hinaus.

Die Position der Variablen  $\psi_i$  im Gitter entspricht derjenigen von  $\rho_i$ . Dementsprechend können die **periodischen Randbedingungen** (d.h.  $x_{min} \equiv x_{max}$ ) hier folgendermaßen implementiert werden, siehe Abb. 2.2

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \psi_N \\ \psi_1 &= \psi_{N+1} \\ \psi_{N+2} &= \psi_2 \\ \psi_{N+3} &= \psi_3 \end{aligned} \tag{2.40}$$

### Aufgabe 2: Stoßwelle

Hier sollen die vollen 1D Euler-Gleichungen für ein Stoßrohrproblem gelöst werden.

- Schreiben Sie ein Programm zur Lösung der Euler-Gleichungen (2.4-2.6) mittels des oben beschriebenen Verfahrens.
- Berechnen Sie damit die Lösung des folgenden Stosswellen (Shock-Tube) Problems, bei dem der Anfangszustand durch zwei konstante Bereiche gegeben ist

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_l & x \leq x_0 \\ \mathbf{u}_r & x > x_0, \end{cases}$$

## 2.5. AUFGABEN

wobei  $\mathbf{u}_{r,l} = (\rho_{r,l}, u_{r,l}, \epsilon_{r,l})$  die konstanten Anfangsbedingungen auf der rechten und linken Seite von  $x = x_0$  bedeuten.

- Berechnen Sie die Lösung speziell für die Werte:  
 $p_l = 1.0, \rho_l = 1.0, \epsilon_l = 2.5, u_l = 0, \text{ für } x \leq 0.5$   
 $p_r = 0.1, \rho_r = 0.125, \epsilon_r = 2.0, u_r = 0, \text{ für } x > 0.5$   
- der Rechenbereich sei  $x_{\min} = 0.0, x_{\max} = 1.0$   
- die anfängliche Unstetigkeit liegt bei  $x_0 = 0.5$   
Beachten Sie, dass gemäß Gl. (2.7)  $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$  gilt, und für die Temperatur  $T$  folgt

$$T = \epsilon(\gamma - 1)$$

Für den Adiabatenexponent gilt  $\gamma = 1.4$ .

- Verwenden Sie einen konstanten Zeitschritt  $\Delta t = 0.001$ , und 100 Gitterzellen ( $\Delta x = 0.01$ ). Begründen Sie, warum hier der konstante Zeitschritt ( $10^{-3}$ ) ausreichend ist. Wie groß ist die Courant-Zahl hier? (Hier muss auch die Schallgeschwindigkeit  $c_s = \sqrt{\gamma P / \rho}$  mit berücksichtigt werden.)
- Plotten Sie die numerische (und analytische Lösung) zur Zeit  $t = .228$ , d.h. nach 228 Zeitschritten. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

### Hinweise:

Ein Datensatz zur analytischen Lösung mit der Ihre Lösung verglichen werden kann, einfache Skripte zum Plotten und eine vertiefende Darstellung zum Stoßrohr finden Sie unter der Web-Site zum Praktikum:

<https://www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~schaefer/teach/cp/hydro/>.