Computational Physics Praktikum: Numerische Hydrodynamik

Christoph Schäfer & Wilhelm Kley
Institut für Astronomie & Astrophysik
& Kepler Center for Astro and Particle Physics Tübingen

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Hydrodynamische Gleichungen

Die Euler-Gleichungen der Hydrodynamik lauten in Erhaltungsform

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 && (1) \\
\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= -\nabla p + \rho \mathbf{k} && (2) \\
\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \epsilon \mathbf{u}) &= -p \nabla \cdot \mathbf{u} && (3)
\end{aligned}
$$

$\mathbf{u}$: Geschwindigkeit, $\mathbf{k}$: äußere Kräfte, ϵ innere spezifische Energie
Die Gleichungen beschreiben die Erhaltung der Masse, Impuls und Energie.

Vervollständigung durch Zustandsgleichung:

$$
p = (\gamma - 1)\, \rho \epsilon \qquad (4)
$$

Forme damit die Energie-Gleichung (3) in eine Gl. für den Druck um

$$
\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{u}) = -(\gamma - 1) p \, \nabla \cdot \mathbf{u} \qquad (5)
$$

Entwickle die Divergenzen auf der linken Seite und benutze für die Impuls- und Energiegleichung die Kontinuitätgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} & (6) \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{k} & (7) \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)p &= -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} & (8) \end{aligned}$$

Da alle Größen Funktionen von Ort $(\mathbf{r})$ und Zeit (t) sind, z.B. $\rho(\mathbf{r}, t)$, kann für die linke Seite die totale Zeitableitung geschrieben werden.
z.B. für die Dichte

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (9)$$

der Operator

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (10)$$

heißt substantielle Zeitableitung (entspricht der totalen Zeitableitung, d/dt)

Lagrange-Formulierung

Benutze die substantielle Ableitung

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{u} \tag{11}$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{k} \tag{12}$$

$$\frac{Dp}{Dt} = -\gamma p\nabla\cdot\mathbf{u} \tag{13}$$

Beschreibt zeitliche Änderung der Größen in einem mit der Strömung mitbewegten System = Lagrange-Formulierung

Die Lagrangeformulierung kann z.B. gut bei radialen Stern-Oszillationen verwendet werden.
Ist 1D Problem. Hier durch mitbewegte Masseschalen

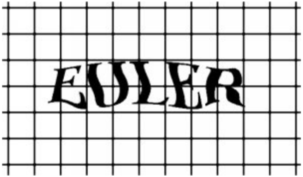
Bei Euler-Formulierung (auf Gitter): orstfest !

Problemstellung

Betrachte die volle Entwicklung der zeitabhängigen hydrodynamischen Gleichungen. Die nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen der Hydrodynamik werden numerisch gelöst: Kontinuum $\Rightarrow$ Diskretisierung

Numerische Hydrodynamik: Lösungsverfahren

Gitter-Methoden (Euler)



festes Gitter
- Strömung durch Gitter

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p$$

Methoden:

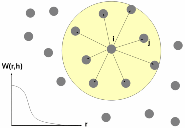
- Finite Differenzen
  keine Erhaltungseigenschaften
- Control Volume
  Erhaltungseigenschaften
- Riemann-Löser
  Welleneigenschaften
- Problem: Diskontinuitäten

Teilchen-Methoden (Lagrange)

bewegtes Gitter/Teilchen
- Strömung bewegt Gitter

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p$$

Bekannte Methode:
Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH



'ausgeschmierte Teilchen'
Gut für freie Ränder, Eigengraviation

betrachte: 1D Eulergleichungen

Beschreiben Erhaltung von: Masse, Impuls und Energie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{15}$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \epsilon u}{\partial x} = -p\frac{\partial u}{\partial x} \tag{16}$$

ρ: Dichte
u: Geschwindigkeit
p: Druck
ϵ: innere spezifische Energie (Energie/Masse)

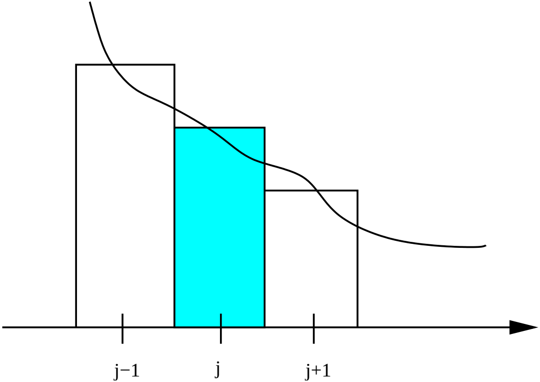
Mit Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1)\rho\epsilon \tag{17}$$

γ: Adiabatenexponent

Partielle Dgl. in Raum und Zeit.

$\rightarrow$ Brauche Diskretisierung in Raum und Zeit.



Betrachte Funktion: $\psi(x,t)$

Diskretisierung im Raum

Überdeckung mit Gitter

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{N}$$

ψ_j^n Zellmittelwert von $\psi(x,t)$ am Gitterpunkt x_j zum Zeitpunkt t^n

$$\psi_j^n = \psi(x_j, t^n) \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} \psi(x, n\Delta t) dx$$

ψ_j^n ist stückweise konstant. j räumlicher Index, n Zeitschritt.

Betrachte allg. Gleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{L}(\psi(x,t)) \tag{18}$$

mit einem (räumlichen) Differentialoperator $\mathcal{L}$.
Typische Diskretisierung (1. Ordnung in der Zeit), z.Zt.: $t = t^n = n\Delta t$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \approx \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} = \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} = L(\psi^n) \tag{19}$$

Jetzt am Ort, dem Gitterpunkt x_j mit Umformung

$$\psi_j^{n+1} = \psi_j^n + \Delta t L(\psi_k^n) \tag{20}$$

$L(\psi_k^n)$: diskretisierter Differentialoperator $\mathcal{L}$ (hier explizit)
- k in $L(\psi_k)$: Satz von räumlichen Indizes:
- typisch bei 2. Ordnung: $k \in \{j-2, j-1, j, j+1, j+2\}$
  (brauche Information von links und rechts, 5 Punkt 'Stencil')

Operator-Splitting

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathcal{L}_1(\mathbf{A}) + \mathcal{L}_2(\mathbf{A}) \tag{21}$$

$\mathcal{L}_i(\mathbf{A}), i = 1, 2$ einzelne (Differential-)Operatoren
angewandt auf die Größen $\mathbf{A} = (\rho, u, \epsilon)$.
Hier bei 1D idealer Hydrodynamik

$$\mathcal{L}_1 : \text{Advektion}$$

$$\mathcal{L}_2 : \text{Druck, bzw. ext. Kräfte}$$

Zur Lösung in einzelne Unterschritte unterteilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^1 &= \mathbf{A}^n + \Delta t L_1(\mathbf{A}^n) \\ \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}^1 + \Delta t L_2(\mathbf{A}^1) \end{aligned} \tag{22}$$

L_i ist Differenzenoperator zu $\mathcal{L}_i$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial \rho u}{\partial x} \\
\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} &= -\frac{\partial (\rho u u)}{\partial x} \\
\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} &= -\frac{\partial (\rho \epsilon u)}{\partial x}
\end{aligned}
$$

In expliziter Erhaltungsform

$$
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \tag{23}
$$

Für $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ und $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ gilt:

$\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho \epsilon)$ und $\mathbf{f} = (\rho\, u, \rho u u, \rho \epsilon u)$.

Dieser Schritt ergibt: $\rho^n \to \rho^1 = \rho^{n+1}, \quad u^n \to u^1, \quad \epsilon^n \to \epsilon^1$

Impulsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{24}$$

$$u_j^{n+1} = u_j - \Delta t \, \frac{1}{\bar{\rho}_j^{n+1}} \, \frac{\left(p_j - p_{j-1}\right)}{\Delta x} \qquad \text{für} \qquad j = 2, N \tag{25}$$

Energiegleichung

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{26}$$

$$\epsilon_j^{n+1} = \epsilon_j - \Delta t \, \frac{p_j}{\rho_j^{n+1}} \, \frac{\left(u_{j+1} - u_j\right)}{\Delta x} \qquad \text{für} \qquad j = 1, N \tag{27}$$

auf der rechten Seite werden jeweils die momentanen Werte für u, ϵ und p eingesetzt, also hier u^1, p^1, ϵ^1.

Dieser Schritt ergibt: $\quad u^1 \to u^{n+1}, \quad \epsilon^1 \to \epsilon^{n+1}$

Modellgleichung für Advektion

Kontinuitätsgleichung lautete

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \tag{28}$$

Hier ist $F^m = \rho u$ der Massenfluss

Geht mit $\rho \to \psi$ und $u \to a = const.$ über in die Lineare Advektionsgleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + a \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0\,. \tag{29}$$

Bei konstantem a ist die Lösung eine nach rechts laufende Welle

$$\text{mit} \quad \psi(x, t = 0) = f(x) \quad \text{wird} \quad \psi(x, t) = f(x - at)$$

Hierbei ist $f(x)$ die Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$, welche durch Advektion mit konstanter Geschwindigkeit a verschoben wird.

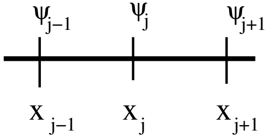
Die Numerik sollte diese Eigenschaft bestmöglichst erhalten.

Numerische Hydrodynamik: Lineare Advektion

FTCS: *Forward Time Centered Space* Algorithmus

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + a \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{30}$$

Spezifiziere Gitter :



und schreibe

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_j^n = \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} \tag{31}$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_j^n = \frac{\psi_{j+1}^{n} - \psi_{j-1}^n}{2\,\Delta x} \tag{32}$$

es folgt

$$\psi_j^{n+1} = \psi_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\left(\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n\right) \tag{33}$$

Methode sieht gut motiviert aus: ist aber Instabil für alle Δt !

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial a \psi}{\partial x} = 0 \qquad (34)$$

oder

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + a \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad (35)$$

a: Konstante (Geschwindigkeit) > 0
$\psi(x,t)$ beliebige Transportgröße

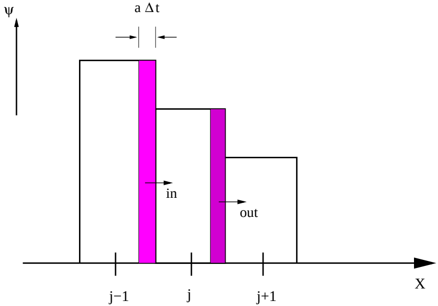
Änderung von ψ in Zelle j

$$\psi_j^{n+1} \Delta x = \psi_j^n \Delta x + \Delta t (F_{in} - F_{out}) \qquad (36)$$

Der Fluss F_{in} ist für konstante ψ_j

$$F_{in} = a\,\psi_{j-1}^n \qquad (37)$$
$$F_{out} = a\,\psi_j^n \qquad (38)$$

Upwind-Methode
Information kommt von Strom-aufwärts



Violette Bereiche werden in Nachbarzelle transportiert.

Erweiterung für nicht konstante Zustände

$$F_{in} = a\,\psi_I\left(x_{j-1/2} - \frac{a\Delta t}{2}\right) \qquad (39)$$

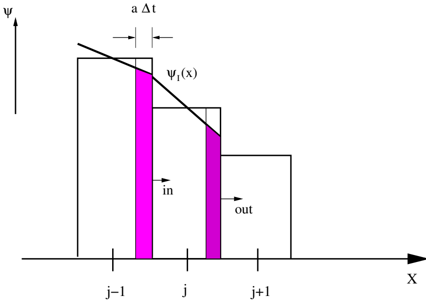
$\psi_I(x)$ Interpolationspolynom.

Hier lineare Interpolation (Gerade)
Damit

$$\underbrace{\underbrace{F_{in} = a\left[\psi^n_{j-1}\right.}_{\text{1st Order}} \left.+\frac{1}{2}(1-\sigma)\Delta\psi_{j-1}\right]}_{\text{2nd Order}} \qquad (40)$$

mit $\sigma \equiv a\Delta t/\Delta x$

$$\Delta\psi_j \approx \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x_j} \Delta x$$



$$\psi_I(x) = \psi^n_j + \frac{x - x_j}{\Delta x}\Delta\psi_j \quad (41)$$

$\Delta\psi_j$ undividierte Differenz, approximiert Ableitung

Zweite Ordnung Upwind

$\psi_I(x)$ wird jeweils in der Mitte der violetten Bereiche ausgewertet.

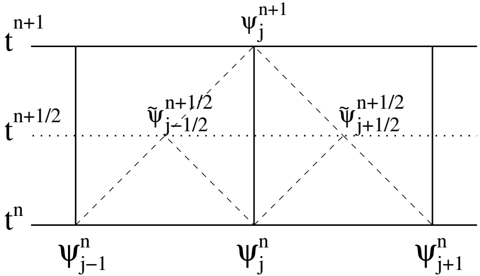
Verschiedene Methoden:

a) $\Delta\psi_j = 0$ *Upwind, 1st Order*, stückweise konstant
b) $\Delta\psi_j = \frac{1}{2}\left(\psi_{j+1} - \psi_{j-1}\right)$ *Fromm*, zentrierte Ableitung
c) $\Delta\psi_j = \psi_j - \psi_{j-1}$ *Beam-Warming*, Upwind Steigung
d) $\Delta\psi_j = \psi_{j+1} - \psi_j$ *Lax-Wendroff*, Downwind Steigung

Meist 2nd Order Upwind (van Leer Schema) Geometric Mean
(erhält die Monotonizität)

$$\Delta\psi_j = \begin{cases} 2\frac{(\psi_{j+1}-\psi_j)(\psi_j-\psi_{j-1})}{(\psi_{j+1}-\psi_{j-1})} & \text{falls} \quad (\psi_{j+1} - \psi_j)(\psi_j - \psi_{j-1}) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{42}$$

Die Ableitungen werden jeweils zum entsprechenden Zeitschrittlevel bzw. Zwischenschritt berechnet.



Schematischer Überblick über das Verfahren

verwendet räumlich und zeitlich zentrierte Differenzen

Dadurch zweite Ordnung in Raum und Zeit

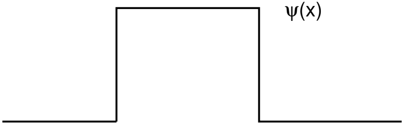
Durch zwei Schritte:

Prädiktor-Schritt (z.Zt. $t^{n+1/2}$)

$$\tilde{\psi}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(\psi_j^n + \psi_{j+1}^n\right) - \frac{\sigma}{2}\left(\psi_{j+1}^n - \psi_j^n\right) \tag{43}$$

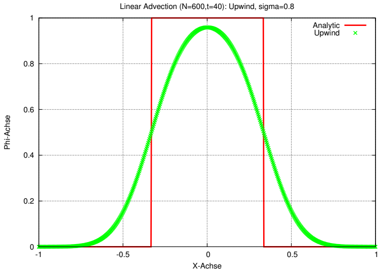
Dann *Korrektor-Schritt* (auf Zt. t^{n+1})

$$\psi_j^{n+1} = \psi_j^n - \sigma\left(\tilde{\psi}_{j+1/2}^{n+1/2} - \tilde{\psi}_{j-1/2}^{n+1/2}\right) \tag{44}$$

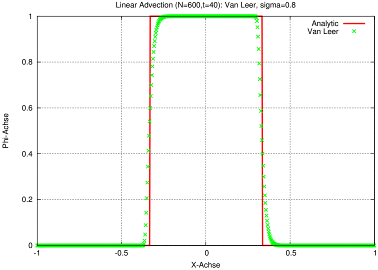


Rechteckfunktion:
Breite 0.6 im Intervall $[-1, 1]$
Geschwindigkeit $a = 1$, bis $t = 40$
periodische Randbedingung
$\sigma = a\Delta t/\Delta x = 0.8$ - (Courantzahl)

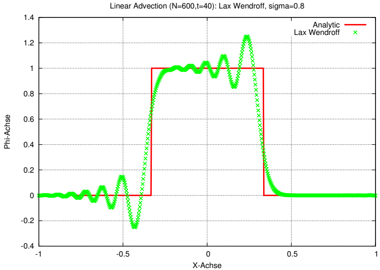
Upwind - (Diffusiv)



Van Leer



Lax-Wendroff - (Dispersiv)



Setze für Lösung eine Fourier-Reihe ein (von Neumann 1940/50er)
Betrachte vereinfachend eine Komponente, untersuche deren Wachstum

$$\psi_j^n = V^n \, e^{i\theta j} \tag{45}$$

mit der Definition von θ über die Gittergröße Δx und der Gesamtlänge L

$$\theta = \frac{2\pi\Delta x}{L} \tag{46}$$

Betrachte jetzt Upwind Verfahren mit $\sigma = a\Delta t/\Delta x$

$$\psi_j^{n+1} - \psi_j^n + \sigma(\psi_j^n - \psi_{j-1}^n) = 0 \tag{47}$$

Einsetzen von Gleichung (45)

$$V^{n+1} e^{i\theta j} = V^n e^{i\theta j} + \sigma V^n \left[e^{i\theta(j-1)} - e^{i\theta j} \right]$$

Teilen durch V^n und $e^{i\theta j}$ liefert

$$\frac{V^{n+1}}{V^n} = 1 + \sigma \left(e^{-i\theta} - 1 \right) \tag{48}$$

Für das Betragsquadrat erhält man

$$\begin{aligned} \lambda(\theta) \equiv \left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right|^2 &= \left[1 + \sigma\left(e^{-i\theta} - 1\right)\right] \left[1 + \sigma\left(e^{i\theta} - 1\right)\right] \\ &= 1 + \sigma\left(e^{-i\theta} + e^{i\theta} - 2\right) - \sigma^2\left(e^{-i\theta} + e^{i\theta} - 2\right) \\ &= 1 + \sigma(1 - \sigma)(2\cos\theta - 2) \\ &= 1 - 4\sigma(1 - \sigma)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \tag{49}$$

Ein Verfahren ist stabil, falls der Betrag des *Verstärkungsfaktors* $\lambda(\theta)$ kleiner als eins ist. Das Upwind-Verfahren ist also stabil für $0 < \sigma < 1$, dann ist $|\lambda(\theta)| < 1$. Umgeschrieben

$$\Delta t < f_{\mathsf{CFL}} \frac{\Delta x}{a} \tag{50}$$

mit dem Courant-Faktor $f_{\mathsf{CFL}} < 1$. Üblich ist $f_{\mathsf{CFL}} = 0.5$. (in 1D auch größer)

Satz: *Courant-Friedrich-Levy*

Es existiert kein *explizites*, konsistentes, stabiles finites Differenzenschema, welches bedingungslos stabil ist (d.h. für alle Δt).

Modifizierte Gleichung I

Betrachte Upwind Verfahren mit $\sigma = a\Delta t/\Delta x$

$$\psi_j^{n+1} - \psi_j^n + \sigma(\psi_j^n - \psi_{j-1}^n) = 0 \tag{51}$$

Ersetze Differenzen durch Ableitungen, d.h. Taylor-Entwicklung (bis 2. Ordnung)

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta x - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Delta x^2\right) + \mathcal{O}(\Delta t\Delta x^2) = 0 \tag{52}$$

Teile durch Δt, ersetze σ

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + a\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\Delta t - a\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Delta x\right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) = 0 \tag{53}$$

Benutze Wellengleichung $\psi_{tt} = a^2\psi_{xx} \Rightarrow$ modifizierte Gleichung (Index M)

$$\frac{\partial\psi_M}{\partial t} + a\frac{\partial\psi_M}{\partial x} = \frac{1}{2}a\Delta x\,(1-\sigma)\,\frac{\partial^2\psi_M}{\partial x^2} \tag{54}$$

D.h. die FDG addiert einen diffusiven Term zur ursprünglichen PDG mit Diffusions-Koeffizienten

$$D = \frac{1}{2} a \Delta x \, (1 - \sigma) \tag{55}$$

Bem: Nur für $D > 0$ ist dies eine Diffusionsgleichung, woraus $\sigma < 1$ für die Stabilität folgt (**Hirt**-Methode). Für Upwind-Methode ist $D > 0 \Rightarrow$ Diffusion.

Lax-Wendroff liefert

$$\frac{\partial \psi_M}{\partial t} + a \frac{\partial \psi_M}{\partial x} = \frac{\Delta t^2 a}{\sigma} \left(\sigma^2 - 1\right) \frac{\partial^3 \psi_M}{\partial x^3} \tag{56}$$

Die Gleichung hat also die Form

$$\psi_t + a\psi_x = \mu \psi_{xxx} \tag{57}$$

$$\mu = \frac{\Delta t^2 a}{\sigma} \left(\sigma^2 - 1\right) \tag{58}$$

Dies verursacht Dispersion. Hier: Wellen zu langsam $(\mu < 0)$
$\Rightarrow$ Oszillationen hinter Diskontinuität (vgl. Rechteckfunktion)

Aus obiger Analyse folgt, dass die Zeitschrittgröße Δt limitiert sein muss für eine stabile numerische Entwicklung.
Bei der linearen Advektion (mit der Geschwindigkeit a) gilt

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{a} \tag{59}$$

Im allgemeinen Fall geht die Schallgeschwindigkeit (c_s) ein, und es ergibt sich die Courant-Friedrich-Lewy-Bedingung

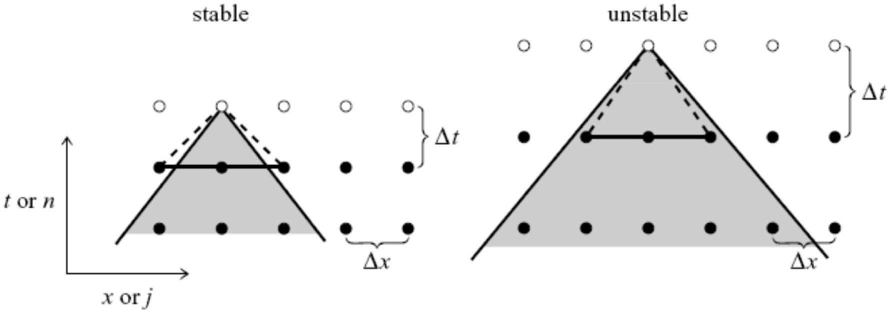
$$\Delta t < \frac{\Delta x}{c_s + |\mathbf{u}|} \tag{60}$$

Anschaulich heißt dies, dass sich die Information in einem Zeitschritt nicht über eine Gitterzelle hinweg ausbreiten darf. Man schreibt üblicherweise

$$\Delta t = f_C \frac{\Delta x}{c_s + |\mathbf{u}|} \tag{61}$$

mit dem Courant-Faktor f_C. Typisch ist: $f_C \sim 0.5$.
Nur bei impliziten Verfahren gibt es (theoretisch) keine Beschränkung von Δt.

Zeitschrittgröße graphisch

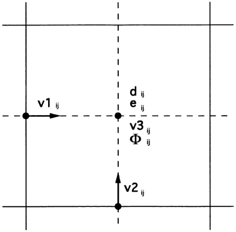


Der numerische Abhängigkeitsbereich (gestrichelter Bereich) muss größer als der physikalische (grauer Bereich) sein ($\Delta x/\Delta t > a$).

Die gesamte Information des physikalischen 'Schallkegels' muss berücksichtigt werden.

Numerische Hydrodynamik: Multi-dimensional

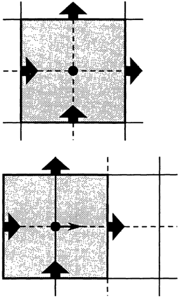
Gitterdefinition (in 2D, staggered):
Skalare in Zellzentren
(hier: $\rho, \epsilon, p, v_3, \psi$)
Vektoren an Interfaces
(hier: v_1, v_2)



Flüsse über Zellränder:

Oben: Masseflüsse

Unten: X-Impuls (Gitter verschoben)



aus: *ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I* in *The Astrophysical Journal Suppl.*, von Jim Stone und Mike Norman, 1992.

Benutze Operator-Splitting und Directional Splitting: Die x und y Richtung werden nacheinander abgehandelt. Erst x-scans, dann y-scans.

Numerische Hydrodynamik: Zusammenfassung

Numerische Methoden sollten Erhaltungseigenschaften wiedergeben.
Gleichungen in Erhaltungsform schreiben

Numerische Methoden sollten Welleneigenschaften wiedergeben.
Shock-Capturing Methoden, Riemann-Löser

Numerische Methoden müssen Diskontinuitäten unter Kontrolle halten.
Brauche dazu Diffusion ($\Rightarrow$ Stabilität)
entweder explizit (künstliche Viskosität) oder intrinsisch (durch Verfahren)

Numerische Methoden sollten genau sein
mind. 2. Ordnung in Zeit und Raum

Frei verfügbare Codes:

`ZEUS:` `http://www.astro.princeton.edu/~jstone/zeus.html`
klassischer Upwind-Code, zweiter Ordnung, staggered grid, RMHD

`ATHENA:` `https://trac.princeton.edu/Athena/`
Nachfolger von ZEUS: Riemann Löser, zentriertes Gitter, MHD

`NIRVANA:` `http://nirvana-code.aip.de/`
3D, AMR, Finite Volume Code, MHD

`PLUTO:` `http://plutocode.ph.unito.it/`
3D, relativistisch, Riemann-Löser/Finite Volume, MHD

Betrachte eindimensionale Gleichungen (Bewegung in x-Richtung):

Aus Eulergleichungen: Mit $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$ und Trennen der Ableitungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial\rho u}{\partial t} + \frac{\partial\rho u u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial\rho\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial\rho\epsilon u}{\partial x} &= -p\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Als Vektorgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A}\,\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \tag{62}$$

mit

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix} \tag{63}$$

Gleichungen sind nichtlinear und gekoppelt.
Versuche Entkopplung: $\Rightarrow$ Diagonalisierung von $\mathbf{A}$

Eigenwerte (EW)

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} u-\lambda & \rho & 0 \\ 0 & u-\lambda & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u-\lambda \end{vmatrix} = (u-\lambda) \begin{vmatrix} u-\lambda & 1/\rho \\ \gamma p & u-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (u-\lambda)\ \left[(u-\lambda)^2 - \gamma p/\rho\right] = 0 \tag{64}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= u \\ \lambda_\pm &= u \pm c_s \end{aligned} \tag{65}$$

mit der Schallgeschwindigkeit

$$c_s^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \tag{66}$$

Die Eigenwerte geben charakteristische Geschwindigkeiten,
mit denen sich die Information ausbreitet.
Setzt sich aus Fluid- (u) und Schallgeschwindigkeit (c_s) zusammen
3 reelle Eigenwerte $\Rightarrow$ **A** diagonalisierbar

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda \tag{67}$$

Q setzt sich aus Eigenvektoren zu EW (λ_i, $i = 0, +, -$) zusammen, Λ ist Diagonalmatrix.

Für $\mathbf{Q}$ folgt

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\frac{\rho}{c_s} & -\frac{1}{2}\frac{\rho}{c_s} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\rho c_s & -\frac{1}{2}\rho c_s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c_s^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho c_s} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c_s} \end{pmatrix}$$

Hatten

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \tag{68}$$

und

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda$$

Definiere:

$$d\mathbf{v} \equiv \mathbf{Q}^{-1} d\mathbf{W} \qquad \text{also} \qquad d\mathbf{W} = \mathbf{Q}\, d\mathbf{v} \tag{69}$$

Multipliziere Gl. (68) mit $\mathbf{Q}^{-1}$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0 \tag{70}$$

$v = (v_0, v_+, v_-)$ sind charakteristische Variable: $\quad v_i = \text{const.}$ auf Kurven

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i$$

aus den Definitionen

$$d\nu_0 = d\rho - \frac{1}{c_s^2}\, dp \tag{71}$$

$$\frac{\partial \nu_0}{\partial t} + \lambda_0 \frac{\partial \nu_0}{\partial x} = 0 \qquad \text{mit} \qquad \lambda_0 = u \tag{72}$$

was ist $d\nu_0$?
Aus Thermodynamik (1. Hauptsatz für spezifische Größen)

$$T ds = d\epsilon + p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) = d\epsilon - \frac{p}{\rho^2}\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{73}$$

mit $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$, $\epsilon = c_\nu T$, $\gamma = c_p / c_\nu$ folgt

$$ds = -\frac{c_p}{\rho} \left[d\rho - \frac{dp}{c_s^2} \right] = -\frac{c_p}{\rho}\, d\nu_0 \tag{74}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \tag{75}$$

d.h. s ist const. entlang Stromlinien, also

$$\frac{ds}{dt} = 0 \tag{76}$$

Für weitere Variablen

$$\frac{\partial v_\pm}{\partial t} + (u \pm c_s)\,\frac{\partial v_\pm}{\partial x} = 0 \tag{77}$$

mit

$$dv_\pm = du \pm \frac{1}{\rho c_s}\,dp \tag{78}$$

folgt

$$v_\pm = u \pm \int \frac{dp}{\rho c_s}\,. \tag{79}$$

Sei Entropie überall konstant (d.h. $p = K\rho^\gamma$)

$$\Longrightarrow \quad v_\pm = u \pm \frac{2c_s}{\gamma - 1} \tag{80}$$

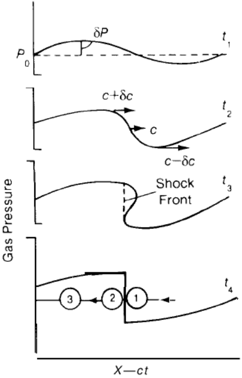
Riemann-Invarianten: $v_\pm = \mathrm{const.}$ auf Kurven

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c_s$$

Linearisierung der Euler-Gleichungen führt auf Wellengleichung für Störung:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} \qquad (81)$$

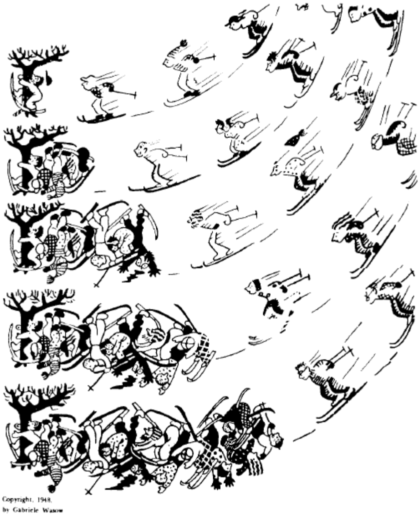
aber: c_s nicht konstant $\Rightarrow$ Aufsteilen



$\Rightarrow$ Diskontinuitäten

$\equiv$ Sprung: Über- Unterschall

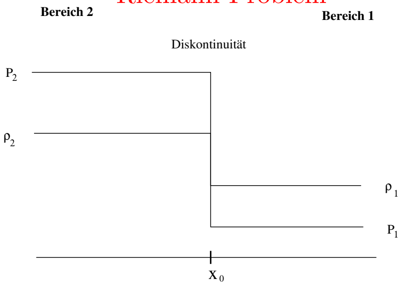
Bspl. für (rücklaufende) Stoßwelle



Beispiele: Stoßrohr - Shocktube

Anfangsdiskontiuität in einem Rohr am Ort x_0 (eindimensional)

Riemann-Problem



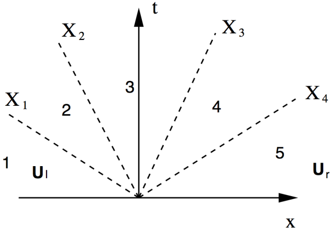
Sprung in Druck (p) und Dichte (ρ)

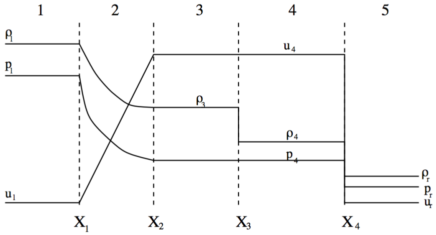
es entwickelt sich:

- eine Stoßwelle nach rechts (X_4)
  (mit Überschall $u_{sh} > c_s$)
- eine Kontaktdiskontinuität

Dichtesprung (entlang X_3)

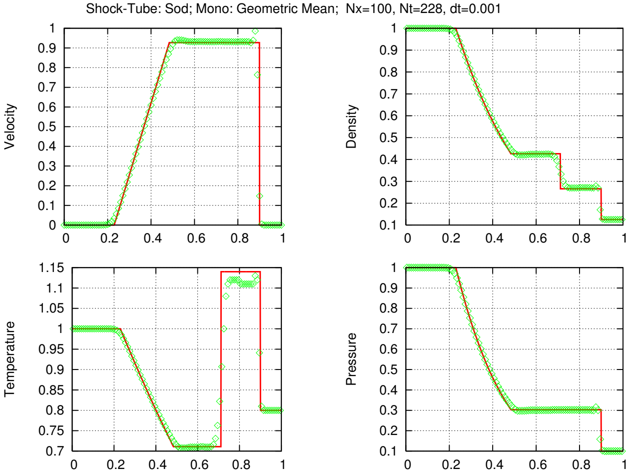
- eine Verdünnungswelle
  (zwischen X_1 und X_2)





Sod-Shocktube

Standard Testproblem für numerische Hydrodynamik, $x \in [0, 1]$ mit
$X_0 = 0.5$, $\gamma = 1.4$
$\rho_1 = 1.0, p_1 = 1.0, \epsilon_1 = 2.5, T_1 = 1$ und $\rho_2 = 0.1, p_2 = 0.125, \epsilon_2 = 2.0, T_2 = 0.8$
Hier Lösung mit van Leer Verfahren (z.Zt. $t = 0.228$ nach 228 Zeitschritten:)

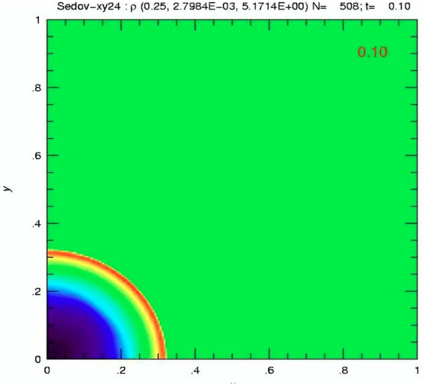


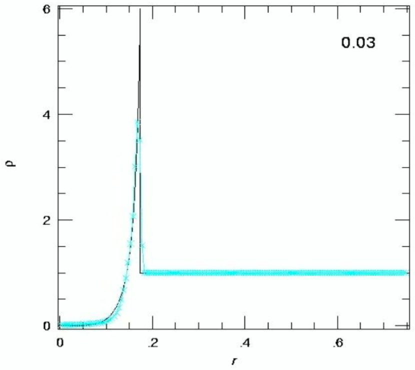
Rot: Exakt
Grün: Numerik

Lösung ist: selbstähnlich gehen durch Streckung auseinander hervor.

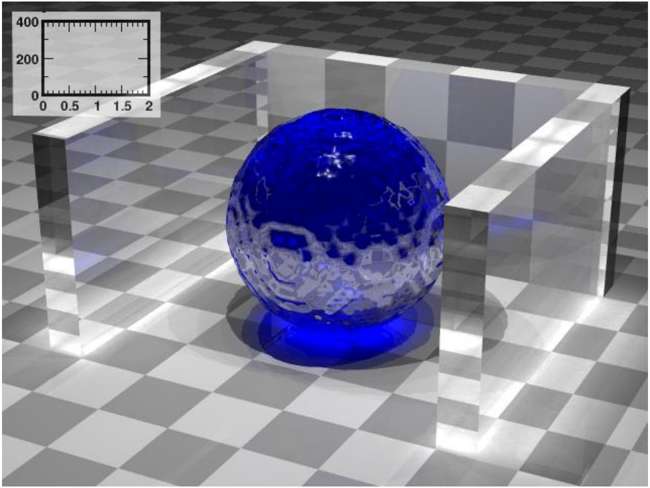
Als Beispiel für Bombenexplosionen (Sedov & Taylor, 1950er), analytische Lösung (Sedov)
Grundproblem für Supernovae-Ausbrüche, z.B. Abschätzung der Remnant-Größe

Standard Testproblem mehr-dimensionale Hydrodynamik für $x, y \in [0, 1] \times [0, 1]$
Energie-Input am Ursprung, $E = 1$, in $\rho = 1$, $\gamma = 1.4$, 200×200 Gitterpunkte
Hier Lösung mit van Leer Verfahren (löse für totale Energie-Variable). Dargestellt: Dichte

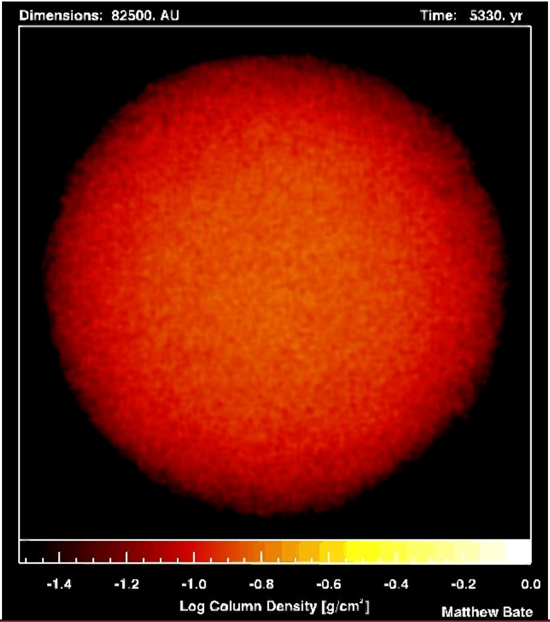




Wasserkugel (R=30cm), Wanne (1x1 m, 60cm hoch) Incl. Oberflächenspannung, Zeit in Sekunden (TU-München, 2002)



(Website)



Molekulare Wolke

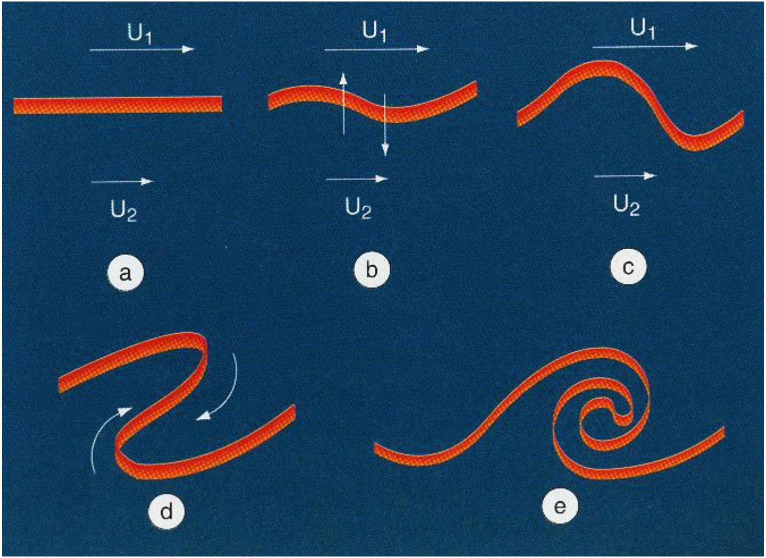
Masse:
50 $M_\odot$

Durchmesser:
1.2 LJ = 76,000 AE

Temperatur:
10 K

(M. Bate, 2002)

Kelvin-Helmholtz Instabilität: Prinzip



Die KHI ist eine Scherinstabilität. Sprung in Tangential-Geschwindigkeit.

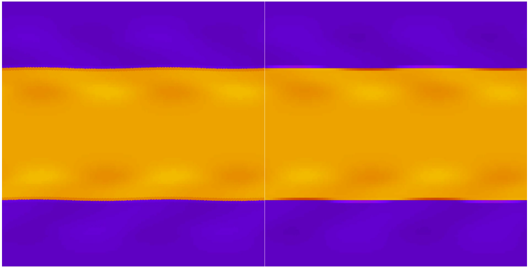
KH-Instabilität: In Atmosphäre

(Boulder (NCAR), USA)

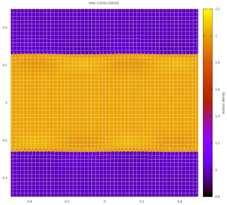
KH-Instabilität: Simulation

Direkter Vergleich: Bewegtes < – > Festes Gitter

Links: Gitter bewegt (Voronoi-Tesselation)
Rechts: festes quadratisches Gitter (Euler)



mit Gitterbewegung



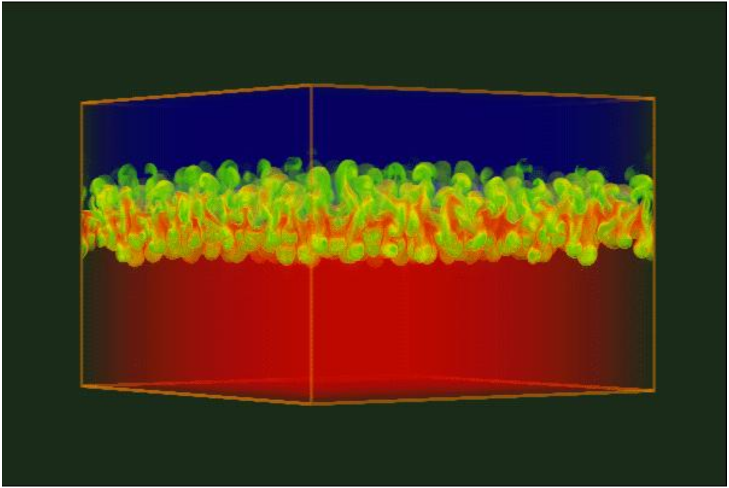
(Kevin Schaal, Tübingen)

Youtube channel

Rayleigh-Taylor Instabilität

PPM Code, 128 Knoten, ASCI Blue-Pacific ID System at LLNL

512^3 Gitterpunkte (LLNL, 1999)

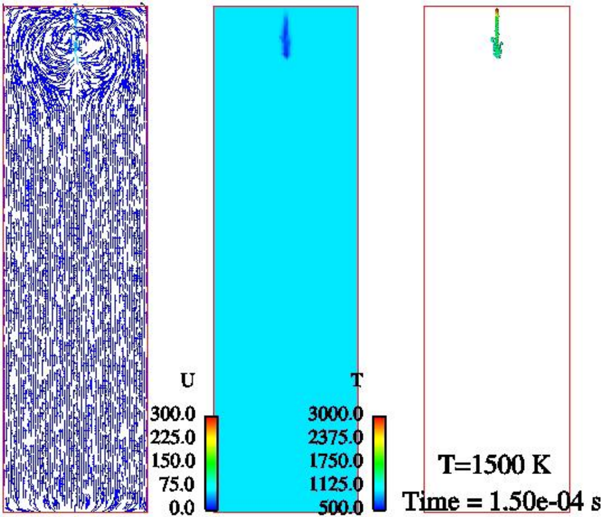


(Web-Link)

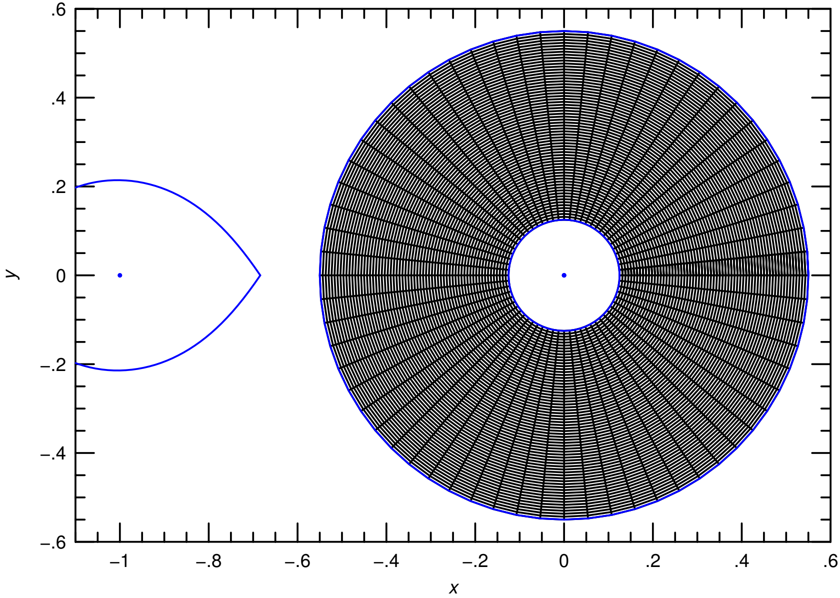
Diesel Injektion

Finite Volumen Methode (FOAM)

Geschwindigkeit, Temperatur, Teilchen (+Isofläche) (Nabla Ltd, 2004)



 Kataklysmische Variable: Gitter



RH2D Code, Mono-Verfahren

512^2 Gitterpunkte, Massenverhältnis: $q = m_2/m_1 = 0.15$