Wechselwirkung von Elektronen mit Materie – Simulation mit der Monte-Carlo-Methode

Torsten Hehl

Physikalisches Institut Tübingen

19.12.2024

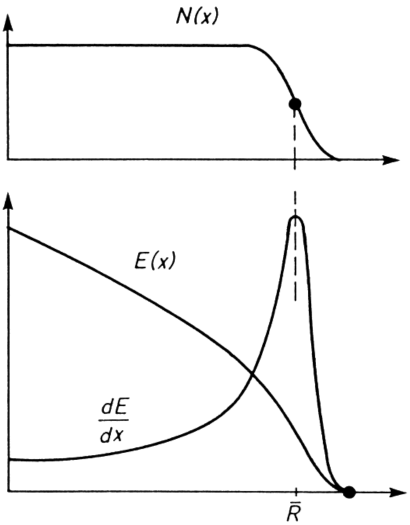
Ionisierende Strahlung

- direkt ionisierend: geladene Teilchen
  - leichte geladene Teilchen:
    e (β^-), β^+
  - schwere geladene Teilchen:
    p, *d*, α, SI, ...
- indirekt ionisierend: neutrale Teilchen
  γ, n, Röntgenstrahlung

Modellierung wichtig für:

- Abschirmungsberechnungen
- Detektorentwicklung
- Strahlentherapie

Kaum Richtungsänderungen

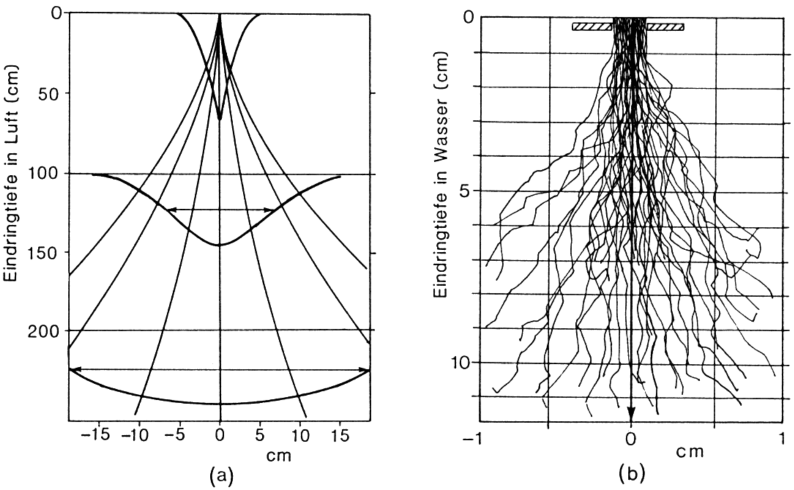


Bethe-Bloch-Formel

$$-\frac{dE_k}{dx} = \mathrm{const.} \cdot \frac{NZz^2}{v^2} \cdot \ln \frac{2 m_e v^2}{\bar{I}}$$

N	Atomdichte im Absorber
Z	Ordnungszahl des Absorbers
z	Ladung des gebremsten Teilchens
v	Teilchengeschwindigkeit
m_e	Masse des Elektrons
$\bar{I}$	mittlere Ionisierungsarbeit pro Stoß

Bremsung schwerer geladener Teilchen:



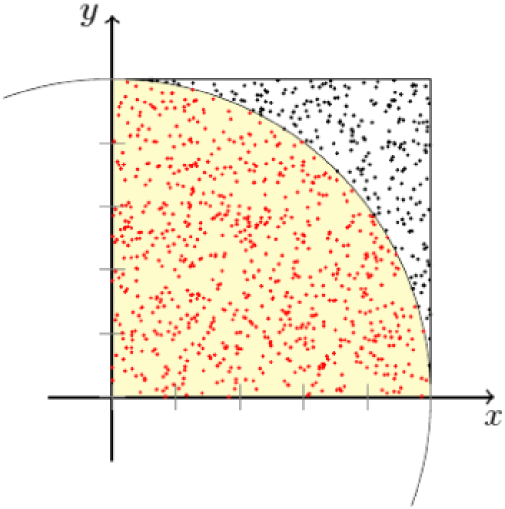
Elektronenstrahlbündel in Luft (links) und Wasser (rechts)

Ulam & Metropolis 1946:

Berechnung von gewichteten Mittelwerten bzw. Integralen bei hohen Dimensionen und/oder komplizierten Grenzen, Anwendungen:

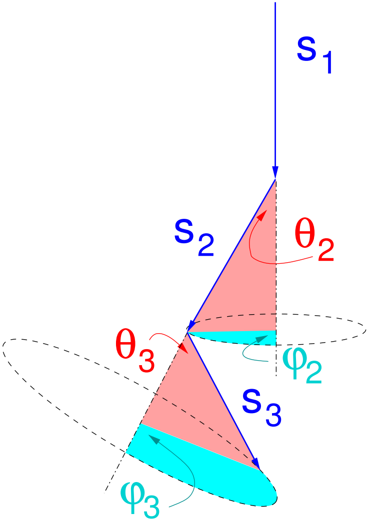
- Nachbildung komplexer Prozesse (Physik, Biologie, Wirtschaft)
- Alternative zur analytischen Berechnung von Integralen
- Ermittlung der Verteilungseigenschaften von Zufallsvariablen

π aus Monte-Carlo



Programmablauf:

- Für jedes Elektron
  1. Berechne freie Wegstrecke s (Würfeln e-Funktion)
  2. Berechne neuen Ort
  3. Berechne Streuwinkel θ (Würfeln nach Mott)
  4. Berechne Streuwinkel ϕ (Würfeln isotrop)
  5. Berechne Energieverlust
  6. Protokolliere T,x,y,z
  7. Falls $T \leq T_{\min}$ Abbruch der Bahn
- nächstes Elektron



Gleichverteilung $p(x)$

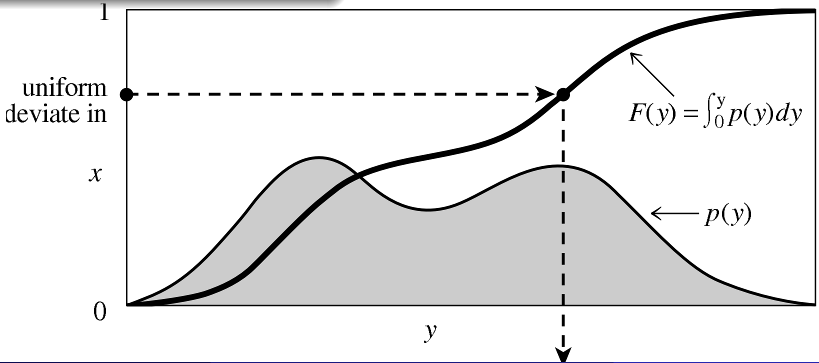
$$p(x)dx = \begin{cases} dx & 0 < x < 1 \\ 0 & x \leq 0, x \geq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

Transformation $y(x)$

$$|p(y)dy| = |p(x)dx| \quad \text{oder} \quad p(y) = p(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$y(x) = F^{-1}(x) \quad mit \quad F(y) = \int_{-\infty}^{y} p(y')dy'$$



Würfeln der Verteilungen:

- Gleichverteilung: $\phi = x \cdot 2\pi$
- Transformation: $p(s) = e^{-n\sigma d} \rightarrow s = \ln x/(n\sigma d)$
- numerische Transformation des Mott-Querschnitts (ROOT oder Python)

Visualisierung (mit ROOT/OpenGL oder Matplotlib):

- Einlesen der generierten Trajektorien
- Darstellen in 3D-Grafik (beliebig drehbar!)
- Vergleich mit Baum

Rutherford-Streuung

Streuung an Kernladung:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \frac{\text{const.}}{T^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Mott-Streuung

Modifikation durch Elektronenspin:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Continuous slowing down approximation

Energieverlust durch Streuung an vielen Atomen (CSDA):

$$-\left(\frac{dT}{dx}\right)_c = \text{const.} \cdot \frac{Z\rho}{\beta^2 A} \left[\ln \frac{T(T+mc^2)^2\beta^2}{2I^2mc^2} - (2\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2)\ln 2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}(1 - \sqrt{1-\beta^2})^2 + (1-\beta^2)\right]$$

Reichweite ergibt sich durch Integration über dieses Bremsvermögen (stopping power)

Konvention

$\hbar = c = 1$
T kinetische Energie
$E = T + m$ Gesamtenergie
p Viererimpuls
$\vec{p}$ Dreierimpuls, $P = |\vec{p}|$

Møllerstreuung

Streuung an Hüllenelektronen

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{Moe}} = \frac{r_e^2}{4}\left(\frac{m_e c}{p}\right)^2 \cdot \frac{(3+\cos\theta)^2}{\sin^4\theta}$$

Simple Annahmen: In bestimmtem Verhältnis Mott- oder Møllerstreuung wählen
jeweils Streuwinkel würfeln, relativistisch in Laborsystem transformieren
Energieverlust der Elektronen hängt von Streuwinkel ab:

Kleine Ablenkwinkel

$\Theta < 0.2$: kein Energieübertrag
Näherung durch Bethe-Formel,

$$\frac{dT}{dx} = \mathrm{const.} \cdot \frac{1}{T}$$

geradlinige Propagation (CSDA)

Grosse Ablenkwinkel

$\Theta \geq 0.2$: Energieübertrag

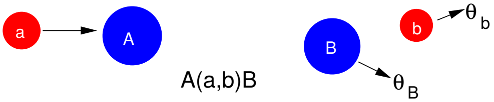
Ablenkwinkel Θ_1^* aus CMS

Transformation ins Laborsystem

Berechnungen der Energien und Winkel

im System des ruhenden Targets:

Vor dem Stoß: Nach dem Stoß:



Hier: a/b ist Projektil (Elektron 1), A/B Target (Elektron 2 bzw. Kern)

Gegeben:

Streuwinkel Θ_1^* im Schwerpunktsystem

Streuwinkel im Targetsystem:

$$\tan\Theta_b \equiv \tan\Theta_1 = \frac{\sin\Theta_1^*}{\gamma(1+\cos\Theta_1^*)}$$

$$\tan\Theta_B \equiv \tan\Theta_2 = \frac{\sin\Theta_1^*}{\gamma(1-\cos\Theta_1^*)}$$

mit Lorentz-Faktor des CMS:

$$\gamma = \frac{E_a + m_A}{\sqrt{m_a^2 + m_A^2 + 2E_a m_A}}$$

d.h. $\gamma \approx 1$ für $m_A >> E_a$

Impulse und Energien im Targetsystem:

$$P_{1/2} = \frac{2m_e(E_a + m_e)P_a\cos\Theta_{1/2}}{(E_a + m_e)^2 - P_a^2\cos^2\Theta_{1/2}}$$

$$T_{1/2} = \sqrt{P_{1/2}^2 + m_e^2} - m_e$$

Bei Mott-Streuung ändert sich in guter Näherung nur die Richtung des Elektrons, Impulsbetrag und Energie bleiben erhalten.