Métodos Cuantitativos II

Modelos Autorregresivos con Medias Móviles

Alejandro Mosiño - *Universidad de Guanajuato*

v. 2026.02.09

PDF

Introducción

Estacionariedad (1/2)

Recordemos que una serie de tiempo, y_t, es estacionaria si:

1. Su media es constante:

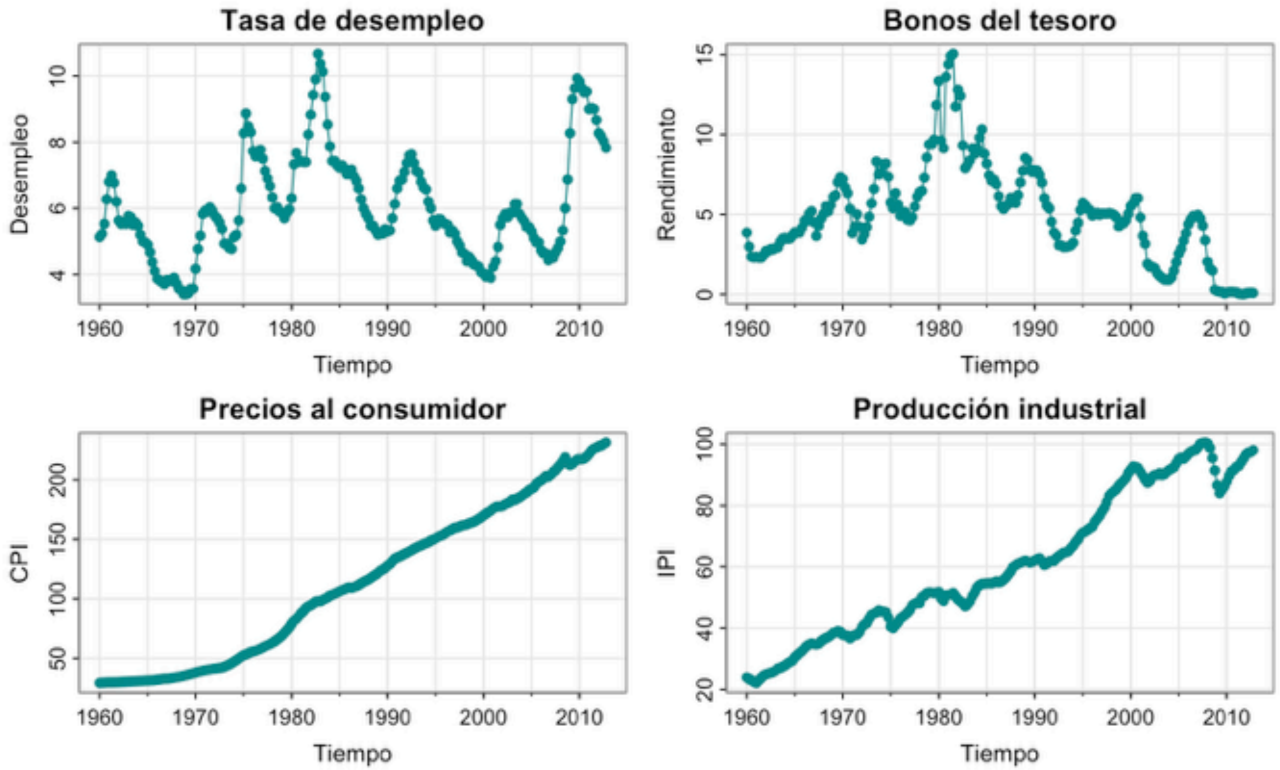
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(y_t) &= \mu_{y_t} \\ &= \mu\end{aligned}$$

2. Su función de autocovarianza, $Cov(y_t, y_{t-h})$, es tal que:

$$\begin{aligned}Cov(y_t, y_{t-h}) &= \gamma_y(h) \\ &= \gamma(h);\ \forall\ h \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Estacionariedad (2/2)

¿Cuáles de estas series de tiempo parecen estacionarias?



Modelos estacionarios

Para modelar series de tiempo estacionarias usamos modelos **Autorregresivos con Promedios Móviles (ARMA)**. Estos combinan:

- *Parte autorregresiva, AR*: La serie se modela como una combinación lineal de sus valores pasados.

- *Parte de medias móviles, MA*: La serie se modela en función de sus errores pasados.

Los modelos ARMA nos permiten capturar la **parte cíclica** de una serie de tiempo, es decir, las fluctuaciones que ocurren alrededor de una media constante.

Modelos AR

Formalmente, un modelo **AR(p)** se define como:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \\
&= \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

Donde:

- ϕ_i son los coeficientes autorregresivos, $i = 1, \ldots, p$.
- ε_t es un ruido blanco.

Modelos MA

Un modelo **MA(q)** se define como:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \\
&= \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}
\end{aligned}
$$

Donde:

- θ_j son los coeficientes de promedios móviles, $j = 1, \ldots, q$.
- ε_t es un ruido blanco.

Modelos ARMA

Un modelo **ARMA(p,q)** combina los modelos AR($\boldsymbol{p}$) y MA($\boldsymbol{p}$):

$$
\begin{aligned}
y_t &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t \\
&+ \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, un modelo ARMA(1,1):

$$
y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}
$$

El operador de rezagos

El operador de rezagos

El **operador de rezagos**, L o B, es un *operador lineal* tal que, aplicado a una serie de tiempo, y_t :

$$Ly_t = y_{t-1}$$

Naturalmente:

$$\begin{aligned} L^2 y_t &= L(Ly_t) \\ &= Ly_{t-1} \\ &= y_{t-2} \end{aligned}$$

En general:

$$L^i y_t = y_{t-i}$$

El operador de rezagos y los modelos ARMA (1/2)

Un modelo ARMA(p, q) puede reescribirse en términos del operador de rezagos. En particular:

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \\ &\quad + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \end{aligned}$$

puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 L y_t + \phi_2 L^2 y_t + \cdots + \phi_p L^p y_t + \varepsilon_t \\ &\quad + \theta_1 L \varepsilon_t + \theta_2 L^2 \varepsilon_t + \cdots + \theta_q L^q \varepsilon_t \end{aligned}$$

El operador de rezagos y los modelos ARMA (2/2)

Un modelo ARMA(p, q) puede reescribirse en términos del operador de rezagos:

$$\Phi(L)y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

Donde:

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \phi_3 L^3 - \cdots - \phi_p L^p$$
$$\Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \theta_3 L^3 + \cdots + \theta_q L^q$$

Estacionariedad e Invertibilidad (1/2)

Usando la notación en términos del operador de rezagos, es posible demostrar que un proceso ARMA(p, q) es:

1. **Estacionario** si las raíces de $\Phi(L) = 0$ están *fuera* del círculo unitario ($|L| > 1$).
2. **Invertible** si las raíces de $\Theta(L) = 0$ están *fuera* del círculo unitario ($|L| > 1$).

Nota

- Un proceso AR estacionario puede reescribirse como un MA(∞).
- Un proceso MA invertible puede reescribirse como un AR(∞).

Estas condiciones garantizan que el modelo tenga una representación estable y única.

Estacionariedad e Invertibilidad (2/2)

Aunque en la práctica no trabajamos explícitamente con representaciones AR(∞) o MA(∞), su existencia es fundamental porque permite:

- Calcular momentos poblacionales (medidas de dependencia serial).
- Construir funciones impulso–respuesta.
- Derivar la *función de autocorrelación parcial*.

Descomposición de Wold y medidas de dependencia serial

Descomposición de Wold (1/3)

Consideremos un modelo ARMA(p,q):

$$\Phi(L)y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Deseamos calcular la funciones promedio, de autocovarianza y de autocorrelación. Para esto, conviene expresar el proceso en su representación MA(∞). Luego, hacemos uso de la **descomposición de Wold**.

Descomposición de Wold (2/3)

Sea $\{y_t\}$ un proceso débilmente estacionario con media cero y varianza finita. Entonces existe una representación única:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}, \qquad \psi_0 = 1, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty.$$

donde ε_t es un ruido blanco.

Descomposición de Wold (3/3)

Entonces, si y_t es una serie estacionaria:

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu.$$

Y:

$$\gamma_y(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}.$$

Descomposición de Wold: MA(1)

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Este proceso cumple naturalmente con la representación de Wold, con:

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = \theta_1.$$

Descomposición de Wold: AR(1)

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Si $|\phi_1| < 1$, el proceso tiene representación MA(∞):

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i}.$$

Entonces, en este caso:

$$\psi_i = \phi_1^i.$$

Descomposición de Wold: Ejercicio

Usando la descomposición de Wold, muestra que, para un proceso MA(1):

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta_1^2)\sigma^2 & h = 0 \\ \theta_1\sigma^2 & |h| = 1 \\ 0 & |h| > 1 \end{cases} \qquad \rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & |h| = 1 \\ 0 & |h| > 1 \end{cases}$$

Y muestra que, para un proceso AR(1) con $|\phi_1| < 1$:

$$\gamma(h) = \phi_1^{|h|}\frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}, \qquad \rho(h) = \phi_1^{|h|}.$$

Función de autocorrelación (FAC): identificación empírica

A nivel empírico, la función de autocorrelación (FAC) permite identificar patrones iniciales en la dinámica de la serie. En particular:

Modelo	Patrón FAC
AR(p)	Decae gradualmente
MA(q)	Se corta después del rezago q
ARMA(p,q)	Decae gradualmente

La FAC permite detectar la presencia de memoria en la serie y orientar la especificación del modelo.

La función de impulso respuesta

Función de Impulso-Respuesta (1/2)

La **Función de Impulso-Respuesta (IRF)**:

- Muestra cómo un choque en el término de error, ε_t, afecta a una serie de tiempo, y_t, en periodos futuros.
- Permite analizar la *dinámica temporal* de un proceso y la persistencia de los efectos de un shock.

Función de Impulso-Respuesta (2/2)

Si el proceso admite representación MA(∞):

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

entonces la IRF es simplemente:

$$IRF(j) = \psi_j.$$

Esta nos indica el efecto que tiene un shock (*normalizado a una unidad*) en el periodo s-ésimo, ε_s, sobre la variable y_t.

Función de Impulso-Respuesta: MA(1)

Consideremos un proceso MA(1):

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

En este caso, la FIR:

Periodo	$s-2$	$s-1$	s	$s+1$	$s+2$	$s+3$	$\dots$
ε_t	0	0	1	0	0	0	$\dots$
y_t	0	0	1	θ_1	0	0	$\dots$

Función de Impulso-Respuesta: AR(1)

Para calcular la FIR de un proceso AR(1), primero tenemos que invertirlo. Como hemos visto antes, un proceso AR(1) puede invertirse en un proceso MA(∞) en tanto el coeficiente $|\phi_1| < 1$:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i}$$

Entonces, la FIR es:

Periodo	$s-2$	$s-1$	s	$s+1$	$s+2$	$s+3$	$\dots$
ε_t	0	0	1	0	0	0	$\dots$
y_t	0	0	1	ϕ_1	ϕ_1^2	ϕ_1^3	$\dots$

Función de Impulso-Respuesta: Ejemplo (1/2)

Ejercicio

Considera el proceso AR(2):

$$y_t = 0.6y_{t-1} + 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$$

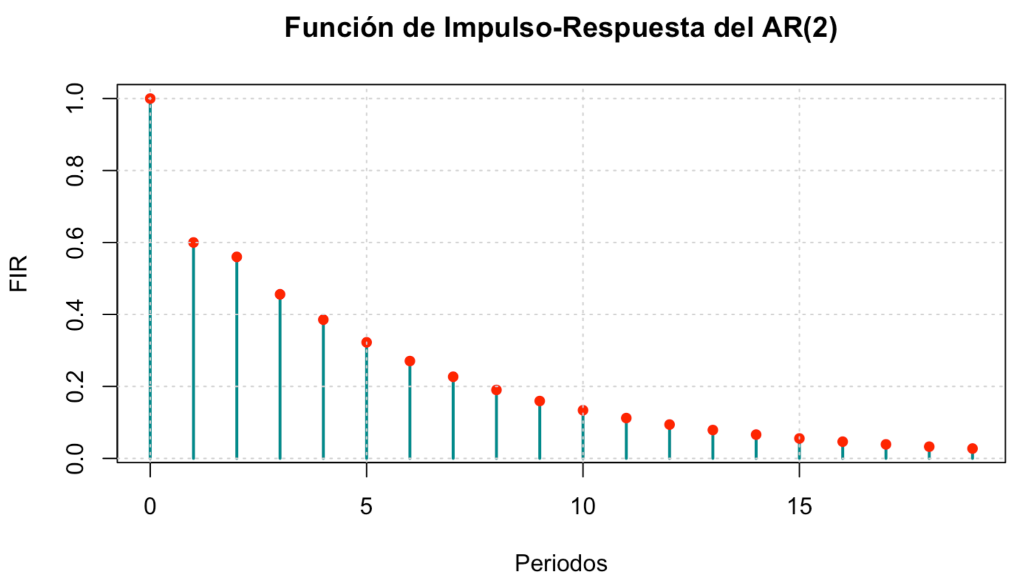
1. Muestra que la FIR es:

Periodo	$s-2$	$s-1$	s	$s+1$	$s+2$	$s+3$	$\dots$
ε_t	0	0	1	0	0	0	$\dots$
y_t	0	0	1	0.6	0.516	0.4579	$\dots$

Función de Impulso-Respuesta: Ejemplo (2/2)

Ejercicio

2. Grafica la FIR de este proceso. Muestra que esta es:



Función de autocorrelación parcial

La función de autocorrelación parcial (1/3)

Considera un proceso AR(p):

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &\sim WN(0, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

Este puede reescribirse como:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + 0 \cdot y_{t-p-1} + 0 \cdot y_{t-p-2} + 0 \cdot y_{t-p-m} + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &\sim WN(0, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

La función de autocorrelación parcial (2/3)

Lo anterior indica que, *si nuestro proceso es realmente un AR(p)* todos los coeficientes:

$$\phi_{p+1} = \phi_{p+2} = \cdots = \phi_{p+m} = 0$$

En palabras: 1) la FACP es distinta de cero hasta el rezago p; 2) para rezagos mayores, la FACP es cero.

Esta observación da origen a la definición de **función de autocorrelación parcial**.

La función de autocorrelación parcial (3/3)

La función de autocorrelación parcial (FACP), no es más que la secuencia de coeficientes ϕ_{kk} del sistema:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi_{11} y_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\
y_t &= \phi_{21} y_{t-1} + \phi_{22} y_{t-2} + \varepsilon_{2t} \\
y_t &= \phi_{31} y_{t-1} + \phi_{32} y_{t-2} + \phi_{33} y_{t-3} + \varepsilon_{3t} \\
&\vdots \\
y_t &= \phi_{k1} y_{t-1} + \phi_{k2} y_{t-2} + \cdots + \phi_{kk} y_{t-k} + \varepsilon_{kt}
\end{aligned}
$$

La FACP mide la correlación entre y_t y y_{t-k} eliminando el efecto de los rezagos intermedios. Esto es, mide la correlación "directa" entre dos observaciones separadas por k periodos.

La función de autocorrelación parcial: Ejemplo

Se puede demostrar, por ejemplo que, para un proceso AR(2), la función de autocorrelación parcial es:

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}\end{aligned}$$

La función de autocorrelación parcial: identificación empírica

Al igual que la FAC, la función de autocorrelación parcial permite identificar patrones iniciales en la dinámica de la serie. En este caso tenemos:

Modelo	Patrón FACP
AR(p)	Se corta después del rezago p
MA(q)	Decae gradualmente
ARMA(p,q)	Decae gradualmente

Identificación del orden de un ARMA(p,q)

Identificación del orden de un ARMA(p,q) (1/8)

En ausencia de parámetros,usamos las observaciones $\{y_t\}_{t=1}^{T}$ para encontrar:

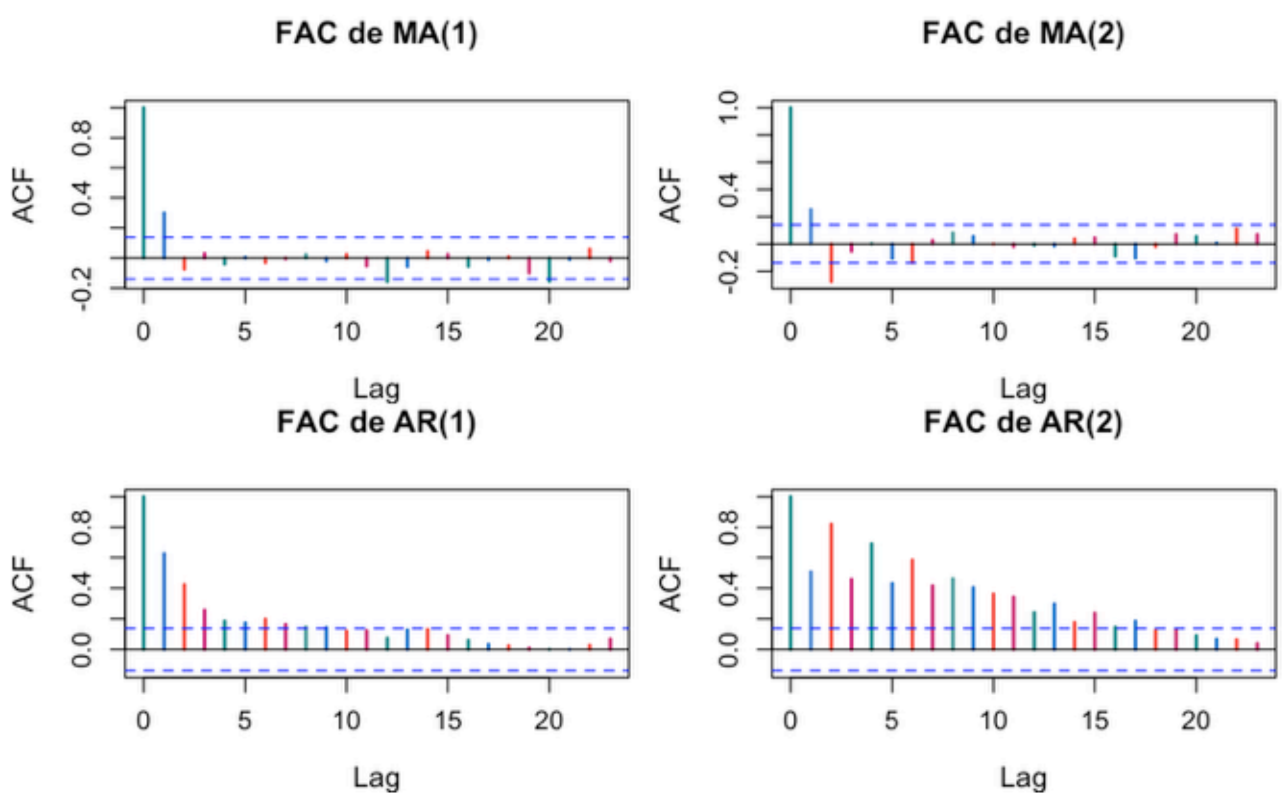
- Promedio muestral
- Autocovarianza muestral
- Autocorrelación muestral
- Autocorrelación parcial

Para identificar el orden de un ARMA($\boldsymbol{p}$,$\boldsymbol{q}$), *comparamos el comportamiento de las medidas de dependencia serial muestrales con el comportamiento teórico* para diferentes valores de $\boldsymbol{p}$ y de $\boldsymbol{q}$.

Identificación del orden de un ARMA(p,q) (2/8)

Regla 1

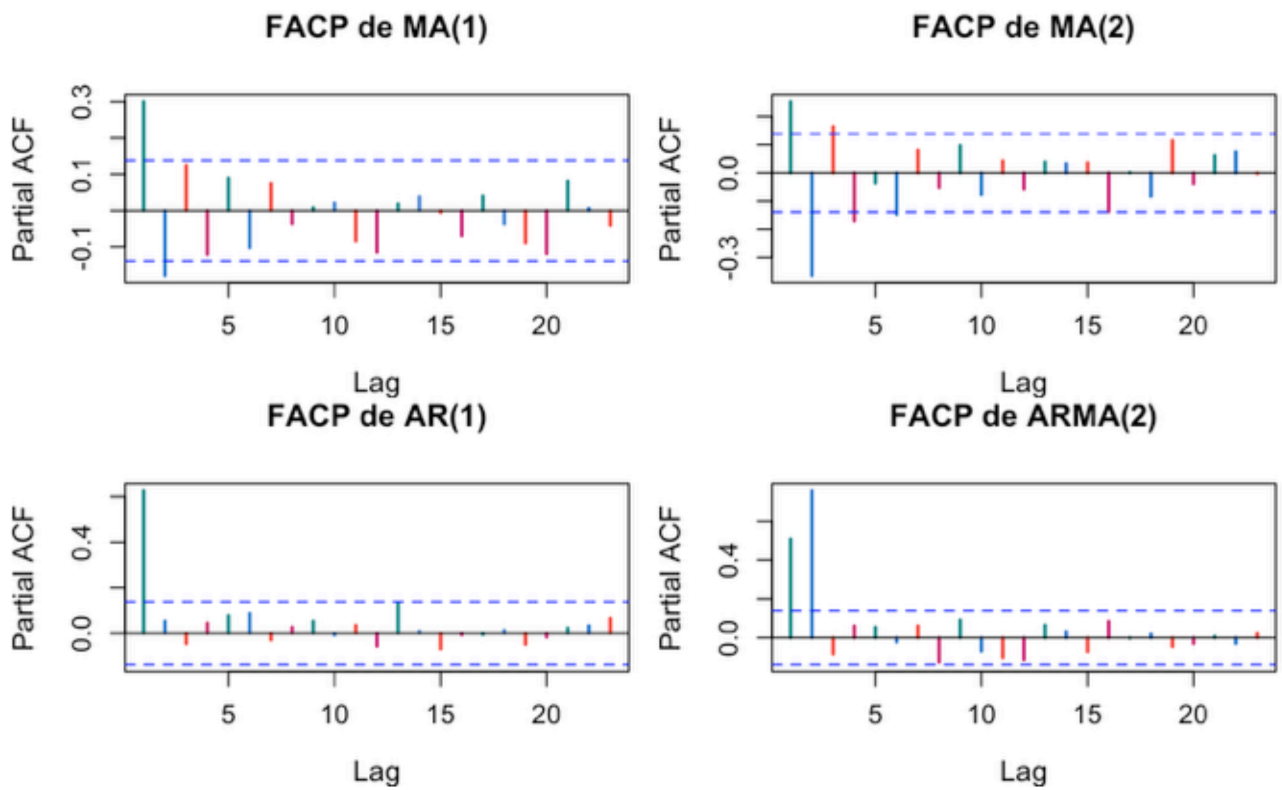
La *función de autocorrelación* puede ayudarnos a saber si el modelo adecuado es un AR/ARMA o un MA. Si el modelo es un MA, la función de autocorrelación nos indica su orden.



Identificación del orden de un ARMA(p,q) (3/8)

Regla 2

Si el modelo resulta ser un AR(p), la *función de autocorrelación parcial* nos indicará su orden.



Si la FACP presenta corte abrupto, tenemos evidencia de componente AR(p).

Identificación del orden de un ARMA(p,q) (4/8)

Regla 3

Los residuales del modelo seleccionado deben comportarse (estadísticamente) como un ruido blanco.

Identificación del orden de un ARMA(p,q) (5/8)

Para saber si el residual de un proceso se comporta (estadísticamente) como un ruido blanco, usamos el **estadístico Q** de *Ljung-Box*:

$$Q_{LB} = T(T+2)\sum_{h=1}^{m} \frac{\rho_h^2}{T-h}$$

Probamos la hipótesis nula:

$$\begin{aligned} H_0 &: \varepsilon_t \sim WN \\ H_1 &: \varepsilon_t \nsim WN \end{aligned}$$

Si la hipótesis nula es correcta, se puede demostrar que:

$$Q_{LB} \sim \chi_m^2;\ m \approx \sqrt{T}$$

Identificación del orden de un ARMA(p,q) (6/8)

Regla 4

Si tenemos más de un modelo, podemos seleccionar el mejor usando la función de verosimilitud. En general, el modelo con un *valor más alto* para la función de (log) verosimilitud es el mejor.

Esto también nos ayuda a elegir el orden de un proceso ARMA($\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$) cuando $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son simultáneamente diferentes de cero.

Identificación del orden de un ARMA(p,q) (7/8)

Alternativamente, podemos elegir el modelo comparando:

- Los valores del **criterio de información de Akaike** (AIC):

$$AIC = \mathbb{E}[-2\mathcal{L}(\cdot)] = T\ln(s^2) + 2k$$

- Los valores del **criterio de información de Schwartz** (SIC o BIC):

$$BIC = T\ln(s^2) + k\ln(T)$$

En general, buscamos el modelo que tenga el *menor valor posible* para estos criterios.

Identificación del orden de un ARMA(p,q) (8/8)

Regla 5

Si el AIC y el BIC seleccionan modelos diferentes, tomar en cuenta que:

- *AIC es eficiente*: selecciona el modelo que tenga el error de predicción más pequeño.
- *BIC es consistente*: selecciona el modelo correcto con probabilidad 1 si T es grande.

Estimación de un ARMA(p,q)

Nota

Una vez que hemos identificado el orden del proceso, podemos estimar este usando el **método de máxima verosimilitud**.

Pronósticos

Pronósticos usando ARMA(p,q)

Una vez que hemos estimado los coeficientes de un proceso ARMA(p,q), podemos utilizar el modelo para realizar pronósticos.

Sea y_T el último valor disponible de y_t. Entonces, el mejor pronóstico para h periodos hacia el futuro de y_t, $\hat{y}_{T+h|T}$, $h = 1, 2, \ldots$, es la **proyección lineal óptima**:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+h|T} &= \mathbb{E}(y_{T+h} \mid \Omega_T), \\ \Omega_T &= \{y_T, y_{T-1}, y_{T-2}, \ldots\} \end{aligned}$$

la cual, *en el caso de normalidad*, coincide con el valor esperado condicional.

Pronósticos usando ARMA(p,q): Ejemplo

Ejemplo

Consideremos un proceso AR(1):

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \; |\phi_1| < 1 \\
\varepsilon_t &\sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

En este caso tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(y_{T+1} \mid \Omega_T) &= \phi_0 + \phi_1 y_T, \\
\mathbb{E}(y_{T+2} \mid \Omega_T) &= \phi_0(1 + \phi_1) + \phi_1^2 y_T, \\
\mathbb{E}(y_{T+3} \mid \Omega_T) &= \phi_0(1 + \phi_1 + \phi_1^2) + \phi_1^3 y_T, \\
&\vdots \\
\mathbb{E}(y_{T+h} \mid \Omega_T) &= \phi_0 \sum_{j=0}^{h-1} \phi_1^j + \phi_1^h y_T \\
&= \mu(1 - \phi_1^h) + \phi_1^h y_T
\end{aligned}
$$

Pronósticos usando ARMA(p,q) (3/3)

Ejemplo (cont'd)

Nota que, para un proceso AR(1), si consideramos un horizonte más largo:

$$\lim_{h \to \infty} \mathbb{E}(y_{T+h} \mid \Omega_T) = \mu,$$

donde:

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}.$$

Esto es, $\mathbb{E}(y_{T+h})$ *converge a la media no condicional* de y_t .

Varianza del pronóstico (1/2)

Por supuesto, la calidad del pronóstico y_{T+h} depende crucialmente de la **varianza del error del pronóstico**, $\mathbb{V}ar\left[y_{T+h} - \mathbb{E}(y_{T+h} \mid \Omega_T)\right]$.

Ejemplo

Consideremos un proceso AR(1). La varianza del error de pronóstico de y_t para h periodos hacia el futuro es:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[y_{T+h} - \mathbb{E}(y_{T+h} \mid \Omega_T)\right] &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \phi_1^{2j} \\
&= \sigma^2 \frac{1 - \phi_1^{2h}}{1 - \phi_1^2}
\end{aligned}
$$

Varianza del pronóstico (2/2)

Nota que, conforme h crece, tenemos que la varianza del pronóstico *converge a la varianza no condicional* de y_t :

$$\lim_{h \to \infty} \mathbb{V}ar\left[y_{T+h} - \mathbb{E}(y_{T+h} \mid \Omega_T)\right] = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}.$$

Pronósticos, caso general

Recordemos que, si un proceso ARMA(p, q) es estacionario e invertible, existe una representación MA(∞) de la forma:

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \, \varepsilon_{t-i}, \qquad \psi_0 = 1.$$

En este caso:

$$\mathbb{V}ar\Big[y_{T+h} - \mathbb{E}(y_{T+h} \mid \Omega_T)\Big] = \sigma^2 \sum_{i=0}^{h-1} \psi_i^2$$
$$\lim_{h \to \infty} \mathbb{E}(y_{T+h} \mid \Omega_T) = \mu \, .$$

Intervalos de predicción

Si $\varepsilon_t \sim iid\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, un intervalo de confianza de $100(1-\alpha)\%$ para y_{T+h} se calcula como:

$$\widehat{y}_{T+h|T} \ \pm \ z_{1-\alpha/2} \sqrt{\mathbb{V}ar\Big[y_{T+h} - \mathbb{E}(y_{T+h} \mid \Omega_T)\Big]}.$$

Por ejemplo, si $\alpha = 0.05$, $z_{1-\alpha/2} = 1.96$. Entonces:

$$\widehat{y}_{T+h|T} \ \pm \ 1.96 \sqrt{\mathbb{V}ar\Big[y_{T+h} - \mathbb{E}(y_{T+h} \mid \Omega_T)\Big]}.$$

Estimación y pronósticos: Ejemplo

En el siguiente ejemplo usamos un índice para el empleo en Canadá que va desde el primer trimestre de 1962 al cuarto trimestre de 1992. Usamos un modelo AR(2) para pronosticar los cuatro trimestres de 1993 y 1994.