

# Teoría de las Finanzas

Opciones Europeas

Alejandro Mosiño  
Universidad de Guanajuato  
v.2014

## ¿Qué son las opciones?

## Definición de opción

Una opción es un instrumento financiero que otorga al comprador el *derecho* y al vendedor la *obligación* de realizar una transacción a un precio determinado y en una fecha determinada. Contrario a los forwards y futuros, en las opciones:

- El propietario de la opción no está obligado a ejercerla
- Existe un costo inicial por adquirir la opción. Este costo se conoce como *prima*.

## Opciones call y opciones put

Tenemos dos tipos de opciones: opciones de compra (*calls*) y opciones de venta (*puts*)

**Opciones call.** Dan el derecho mas no la obligación de *comprar* un activo subyacente a un precio  $K$ .

**Opciones put.** Dan el derecho mas no la obligación de *vender* un activo subyacente a un precio  $K$ .

El precio  $K$  se conoce como precio de ejercicio o *strike*. Este se fija dentro del contrato en  $t=0$ .

# Opciones europeas y opciones americanas

Las opciones (call o put) pueden ser europeas o americanas.

**Opciones europeas.** Decimos que la opción es europea si esta puede ejercerse solo hasta la fecha de vencimiento (o fecha de ejercicio) del contrato,  $T$ .

**Opciones americanas.** Decimos que la opción es americana si el propietario tiene la opción de ejercerla en cualquier momento dentro del intervalo  $[0, T]$ .

En este capítulo nos centraremos en las opciones europeas.

## Opciones Europeas

### El payoff de una opción europea para el propietario

Sea  $S_t$  el precio spot del activo subyacente en  $t \geq 0$ . El problema del propietario de una opción europea es:

$$\vartheta_T^c = \max \{S_T - K, 0\} = C(S_T), \text{ opción call}$$

$$\vartheta_T^p = \max \{K - S_T, 0\} = P(S_T), \text{ opción put}$$

donde  $\vartheta_T^{c,p}$  es el *payoff* en el periodo  $T$ .

### El payoff de una opción europea para el emisor

Dado que una opción es un juego de suma cero entre el comprador y el vendedor (emisor), la posición (corta) de este último es:

$$-\vartheta_T^c = -C(S_T), \text{ opción call}$$

$$-\vartheta_T^p = -P(S_T), \text{ opción put}$$

# El valor de una opción europea

Estamos interesados en calcular el valor de mercado de la opción en  $t=0$ , y en  $t \leq T$ . Como veremos más adelante, el valor de la opción puede calcularse como:

$$O_t = VI(t) + VT(t)$$

donde  $VI(t)$  es el *valor intrínseco* (el valor de la opción en  $T$ ) y  $VT(t)$  es el *valor temporal* (en  $t$ ) de la opción.

# La paridad call-put, caso estándar (1/5)

Consideremos:

- Un call y un put europeos suscritos sobre el mismo activo subyacente de precio  $S$ , la misma fecha de vencimiento,  $T$ , y con el mismo precio de ejercicio,  $K$ .
- Suponemos que el activo subyacente no paga dividendos (caso estándar).
- Suponemos que existe un mercado de deuda en el cual se comercian bonos zero-cupón con vencimiento en  $T$  y valor de amortización  $K$ . La tasa  $r = r_{T,t}(t)$  es la tasa actuarial de estos bonos.

# La paridad call-put, caso estándar (2/5)

Ahora consideremos los portafolios  $A$  y  $B$ :

- El portafolio  $A$  está compuesto del activo subyacente y de una opción put.
- El portafolio  $B$  está compuesto de bonos zero-cupón con valor nominal  $K$  y de una opción call.

**Ejercicio.** Muestra que, en  $T$ , el valor de ambos portafolios es idéntico.

# La paridad call-put, caso estándar (3/5)

## Ejercicio

Muestra que, si no existen oportunidades de arbitraje, el valor de los portafolios  $A$  y  $B$  también debe ser el mismo para todo  $t \leq T$  y por lo tanto:

$$P_t + S_t = \frac{K}{(1+r)^{T-t}} + C_t$$

## La paridad call-put, caso estándar (4/5)

### Proposición

En ausencia de oportunidades de arbitraje, las primas de un call y de un put de las mismas características están relacionadas por:

$$C_t - P_t = S_t - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

O en tiempo continuo:

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

## La paridad call-put, caso estándar (5/5)

### Corolario

El valor en  $t$  de un call europeo con vencimiento en  $T$  y precio de ejercicio  $K$  obedece:

$$C_t \geq 0$$
$$C_t \geq S_t - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

Y un put:

$$P_t \geq 0$$
$$C_t \geq \frac{K}{(1+r)^{T-t}} - S_t$$

## El valor de una opción cuando $S_t \geq 0$ (1/4)

Supongamos que  $S_t=0$  para algún  $t$ . En este caso, el principio de no arbitraje implica que todos los valores futuros del activo subyacente también son cero.

**Demostración** (Tarea).

## El valor de una opción cuando $S_t \geq 0$ (2/4)

Lo anterior implica que  $S_T=0$  y, por lo tanto,  $S_T=0$ . En este caso:

- El *payoff* de una opción call es también cero.
- El *payoff* de una opción put es  $K$ . Entonces:

$$P_t = \frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

## El valor de una opción cuando $S_t \geq 0$ (3/4)

También tenemos:

$$\lim_{S_t \rightarrow \infty} P(S_t) = 0$$

Esto es porque:

$$\mathbb{P}(S_T < K | S_t) \rightarrow 0$$

cuando  $S_t \rightarrow \infty$ .

## El valor de una opción cuando $S_t \geq 0$ (4/4)

De la paridad call-put tenemos que, cuando  $S_t \rightarrow \infty$ , el valor en el tiempo para un call es estrictamente positivo dado que:

$$C(S) \geq S_t - \frac{K}{(1+r)^{T-t}} > S_t - K$$

En cambio para un put:

$$P(S) \geq \frac{K}{(1+r)^{T-t}} - S_t < K - S_t$$

## Cuando el activo subyacente paga dividendos

### Proposición

Consideremos una opción call y una opción put europeas con el mismo precio de ejercicio  $K$  y la misma fecha de vencimiento  $T$ . Ambas se suscriben sobre el mismo activo subyacente, el cual distribuye dividendos en  $\tau \in [t, T]$ . Sea  $D^*$  el valor presente en  $t$  de este dividendo. En ausencia de oportunidades de arbitraje, la relación de paridad call-put es ahora:

$$C(S) - P_t = (S_t - D^*) - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

**Demostración** (Tarea).

## Paridad call-put cuando el subyacente es un contrato forward (1/2)

Consideremos un contrato forward con vencimiento en  $T'$  y valor de  $F_t$  en  $t$ . Consideremos, además, opciones europeas con vencimiento en  $T \leq T'$ . Sin entrar en detalles, una opción europea suscrita sobre un contrato forward tiene como *payoff*:

$$\max\{F_t - K, 0\}, \text{ opción call}$$

$$\max\{K - F_t, 0\}, \text{ opción put}$$

## Paridad call-put cuando el subyacente es un contrato forward (2/2)

### Proposición

Consideremos una opción call y una opción put europeas con el mismo precio de ejercicio  $K$  y la misma fecha de vencimiento  $T$ . Ambas se suscriben sobre el mismo contrato forward con valor de  $F_t$  en  $t$  y vencimiento en  $T \leq T'$ . En ausencia de oportunidades de arbitraje, la relación de paridad call-put es ahora:

$$C_t - P_t = \frac{F_t - K}{(1+r)^{T-t}}$$

**Demostración** (Tarea).

## Modelo de evaluación de opciones

Un periodo, dos estados de la naturaleza

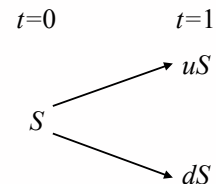
## Planteamiento del modelo (1/4)

Consideremos:

- Un mercado en donde se comercia un activo con riesgo (una acción)
- Un mercado de deuda cuya tasa de interés es  $r$
- El valor de la acción en  $t=0$  es  $S$
- En  $t=1$  la acción puede tomar 2 valores:  $uS$  y  $dS$ ,  $u > d$
- Los parámetros  $u$  y  $d$  pueden interpretarse como rendimientos brutos.

## Planteamiento del modelo (2/4)

Podemos dibujar la evolución del precio de la acción:



## Planteamiento del modelo (3/4)

### Ejercicio

Muestra que, en ausencia de oportunidades de arbitraje:  $d < 1+r < u$ .

## Planteamiento del modelo (4/4)

Consideremos una opción suscrita sobre la acción que acabamos de describir. Por ejemplo, sea una opción call con precio de ejercicio  $K$  y vencimiento en  $t=1$ . En este caso:

$$C_1^u = \max(uS - K, 0), \text{ si ocurre } u$$

$$C_1^d = \max(dS - K, 0), \text{ si ocurre } d$$

Nuestro interés es mostrar que el payoff de este call puede replicarse mediante un portafolio constituido por la acción y el activo sin riesgo.

## Estrategia de cobertura

Llamamos *estrategia de cobertura* (o de duplicación) a una posición adoptada (en  $t=0$ ) por el vendedor que le permite replicar el *payoff* de la opción. ¿Cómo elegimos un portafolio de cobertura?

## Portafolio de cobertura (1/5)

En el vendedor de la opción puede invertir en los dos activos de base. Sea la cantidad de acciones compradas ( $\alpha > 0$ ) o vendidas ( $\alpha < 0$ ), y  $\beta$  el monto invertido en el mercado de deuda ( $\beta > 0$  si se otorga un préstamo y  $\beta < 0$  si se solicita). El conjunto de portafolios admisibles es:

$$V_0 = \alpha S + \beta$$

Naturalmente, en  $t=1$ :

$$V_1^u = \alpha uS + \beta(1+r), \text{ si ocurre } u$$

$$V_1^d = \alpha dS + \beta(1+r), \text{ si ocurre } d$$

## Portafolio de cobertura (2/5)

Ahora podemos elegir los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  de tal forma que el valor del portafolio en sea igual al valor de la opción:

$$\alpha uS + \beta(1+r) = C_1^u$$

$$\alpha dS + \beta(1+r) = C_1^d$$

La solución es:

$$\alpha^* = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS - dS}$$

$$\beta^* = \frac{C_1^u - \alpha^* uS}{1+r}$$

En la práctica,  $\alpha^*$  se conoce como cociente (o ratio) de cobertura.

## Portafolio de cobertura (3/5)

Una vez que conocemos  $\alpha^*$  y  $\beta^*$  podemos calcular la inversión requerida para adquirir el portafolio de cobertura:

$$V_0 = \frac{1}{1+r} \left( C_1^u \frac{(1+r) - d}{u - d} + C_1^d \frac{u - (1+r)}{u - d} \right)$$

## Portafolio de cobertura (4/5)

En ausencia de oportunidades de arbitraje, el portafolio de cobertura y la opción deben tener, en  $t=0$ , el mismo valor. Entonces:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \left( C_1^u \frac{(1+r) - d}{u - d} + C_1^d \frac{u - (1+r)}{u - d} \right)$$

$$P_0 = \frac{1}{1+r} \left( P_1^u \frac{(1+r) - d}{u - d} + P_1^d \frac{u - (1+r)}{u - d} \right)$$

## Portafolio de cobertura (5/5)

### Ejercicio

Considera un paraguas cuyo valor hoy es de \$100. Mañana el precio del paraguas puede aumentar en 10% si llueve o disminuir en 10% si no llueve. Suponemos que la tasa de interés en el mercado de deuda es cero. ¿Cuál es el precio de un call suscrito sobre el paraguas si suponemos que el precio de ejercicio es de \$100 y la fecha de vencimiento es en un periodo?



## Neutralidad al riesgo (1/4)

Definimos:

$$q := \frac{(1+r) - d}{u - d}$$

Evidentemente:

$$1 - q = \frac{u - (1+r)}{u - d}$$

Dado que  $d < 1+r < u$  en ausencia de oportunidades de arbitraje, resulta claro que  $q \in (0, 1)$ . Entonces  $q$  puede interpretarse como una probabilidad.

## Neutralidad al riesgo (2/4)

Sea  $q$  la probabilidad del evento  $u$ . Entonces el valor esperado del *payoff* de un call es:

$$\mathbb{E}^q(C_1) = qC_1^u + (1-q)C_1^d$$

y el de un put:

$$\mathbb{E}^q(P_1) = qP_1^u + (1-q)P_1^d$$

## Neutralidad al riesgo (3/4)

### Proposición

El valor de una opción puede expresarse como el valor esperado actualizado de su *payoff*. Este valor esperado se calcula usando la probabilidad *neutral al riesgo*. Entonces:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^q(C_1)$$

y:

$$P_0 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^q(P_1)$$

## Neutralidad al riesgo (4/4)

### Proposición

Si la probabilidad es neutral al riesgo, todos los activos del mercado (acción, opción, activo sin riesgo) tienen la misma rentabilidad esperada,  $r$ .

### Demostración. (Tarea)

## La prima de riesgo (1/4)

Ahora, en lugar de utilizar la probabilidad neutral al riesgo utilizamos la *probabilidad histórica*,  $p$ . Consideremos una acción con precio  $S_t$  y calculemos su rendimiento esperado:

$$m_s = \mathbb{E}^p \left( \frac{S_1 - S_0}{S_0} \right) = pu + (1 - p)d - 1$$

Calculamos la varianza del rendimiento de la acción y su desviación estándar:

$$v_s = \mathbb{E}^p [(R - m_s)]^2 = p(1 - p)(u - d)^2; \quad \sigma_s = \sqrt{v_s}$$

## La prima de riesgo (2/4)

Decimos que hay un exceso de rendimiento cuando  $m_s > r$ . La diferencia se interpreta como una *prima de riesgo*,  $m_s - r$ . Esta prima es positiva si y solo si  $p > q$ . El riesgo de  $S$  se mide calculando su desviación estándar. Entonces, podemos imaginar que:

$$m_s - r = \lambda \sigma_s$$

donde  $\lambda$  se interpreta como el precio de mercado de una unidad de riesgo.

## La prima de riesgo (3/4)

### Proposición

En ausencia de oportunidades de arbitraje, la prima de riesgo de una opción puede calcularse como:

$$m_c - r = \lambda \sigma_c, \text{ para un call}$$

$$m_p - r = \lambda \sigma_p, \text{ para un put}$$

**Demostración** (Tarea).

## La prima de riesgo (4/4)

- Notemos que la prima de riesgo del put es negativa. El riesgo se reduce siempre y cuando  $\Delta P$  y  $\Delta S$  sean de signo contrario.
- Podemos mostrar que el precio del riesgo es proporcional a la diferencia entre la probabilidad histórica y la probabilidad neutral al riesgo. Es decir:

$$\lambda = \frac{p - q}{\sqrt{p(1 - p)}} \Rightarrow q = p - \lambda \sqrt{p(1 - p)}$$

- El término  $\lambda(p(1-p))^{0.5}$  es el factor de ajuste (o deflactor), el cual es proporcional al precio del riesgo.

# El modelo de Cox-Ross-Rubinstein

$n$  periodos, dos estados de la naturaleza

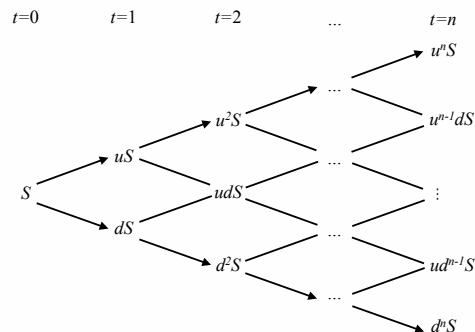
## Generalización del modelo de un periodo (1/3)

Mantenemos todos los supuestos de la sección anterior, pero ahora:

- Tenemos  $n$  periodos
- El valor de la acción en  $t=0$  es  $S_0$
- En periodos subsecuentes la acción puede tomar dos valores:  $uS_{t-1}$  y  $dS_{t-1}$ , con  $u>d$  y  $t=1,2,\dots,n$ .

## Generalización del modelo de un periodo (2/3)

La evolución del precio de la acción se ve ahora:



## Generalización del modelo de un periodo (3/3)

Notemos que el número de nodos entre 0 y  $n$  es:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

y que el número de valores terminales diferentes en  $t=n$  es  $n+1$ . De igual forma, la evolución del valor del activo sin riesgo es:

$$1 \rightarrow (1+r) \rightarrow (1+r)^2 \rightarrow \dots \rightarrow (1+r)^n$$

donde  $r$  es la tasa actuarial del periodo.

## Neutralidad al riesgo (1/5)

Supongamos que, en cada periodo, la probabilidad del estado  $u$  es  $q$  y la probabilidad del estado  $d$  es  $(1-q)$ . Del modelo de un periodo tenemos:

$$q = \frac{(1+r) - d}{u - d}; \quad 1 - q = \frac{u - (1+r)}{u - d}$$

Estas probabilidades no dependen de  $S$ . Más bien afectan uniformemente al conjunto de módulos de un periodo de duración que conforman el árbol.

## Neutralidad al riesgo (2/5)

Suponemos además que los eventos  $u$  y  $d$  son independientes entre periodos. Como resultado, los valores  $S_{i+1}/S_i$  son idéntica e independientemente distribuidos. Bajo estas condiciones, deseamos mostrar que los valores presentes (a la tasa  $r$ ) de los dos activos en el mercado (la acción y el activo sin riesgo) siguen procesos martingala.

## Neutralidad al riesgo (3/5)

### Definición

- Llamamos un proceso adaptado a  $S$ ,  $(M_i)_{i=0, \dots, M}$ , a toda la familia de variables aleatorias para las cuales el valor de la  $i$ -ésima  $M_i$  se revela una vez conocida la  $i$ -ésima realización  $S_i$  del precio de la acción.
- Un proceso  $(M_i)_{i=0, \dots, M}$  adaptado a  $S$  es una martingala si, para todo  $i$ :

$$\mathbb{E}[M_{i+1}|S_i] = M_i \quad \forall i = 0, \dots, n$$

## Neutralidad al riesgo (4/5)

### Ejercicio

Muestra que la propiedad:

$$\mathbb{E}[M_{i+1}|S_i] = M_i \quad \forall i = 0, \dots, n$$

es equivalente a:

$$\mathbb{E}[M_j|S_i] = M_i \quad \forall j = i + 1, \dots, n$$

# Neutralidad al riesgo (5/5)

## Proposición

El proceso

$$M_i = \frac{S_i}{(1+r)^i}; \quad i = 0, \dots, n,$$

es una martingala bajo la propiedad neutral al riesgo ( $q$ ). Lo mismo para el valor presente del activo sin riesgo.

**Demostración** (Tarea).

# Etapas para evaluar una opción en el modelo CRR

Al igual que en el modelo de un solo periodo, evaluamos una opción mediante las tres etapas siguientes:

- Buscamos una estrategia de cobertura (duplicación)
- Igualamos el valor de la prima de la opción con el costo de usar el portafolio de cobertura
- Interpretamos la prima como el valor esperado (neutral al riesgo) de los flujos futuros actualizados.

# Portafolio dinámico (1/2)

## Definición

Un *portafolio dinámico* es un proceso  $(\alpha_i, \beta_i)_{i=0, \dots, n-1}$  adaptado a  $S$  que especifica en cada fecha  $i$  la composición del portafolio ( $\alpha_i$  acciones y  $\beta_i$  unidades del activo sin riesgo).

# Portafolio dinámico (2/2)

Dado que en fecha  $i$  un activo sin riesgo vale  $(1+r)^i$ , el valor del portafolio en esa fecha es:

$$V_i = \alpha_i S_i + \beta_i (1+r)^i$$

Al final del periodo de inversión, en fecha  $n$ , tenemos un portafolio cuyo valor es:

$$V_n = \alpha_{n-1} S_n + \beta_{n-1} (1+r)^n$$

## Portafolio dinámico autofinanciado (1/5)

### Definición

Un portafolio dinámico es *autofinanciado* si en  $i=1, \dots, n-1$  el cambio de composición del portafolio no se traduce en ningún retiro neto de fondos. Como en  $i$  pasamos de la composición  $(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1})$  a la composición  $(\alpha_i, \beta_i)$ , la condición de autofinanciamiento es:

$$\alpha_{i-1}S_i + \beta_{i-1}(1+r)^i = \alpha_i S_i + \beta_i(1+r)^i$$

## Portafolio dinámico autofinanciado (2/5)

Para entender el significado de la definición anterior, considera un inversionista que en fecha 0 elige el portafolio  $(\alpha_0, \beta_0)$ . El valor de este portafolio es:

$$V_0 = \alpha_0 S_0 + \beta_0$$

En el periodo 1, justo antes de recomponer el portafolio, el valor de este es:

$$V_1^- = \alpha_0 S_1 + \beta_0(1+r)$$

## Portafolio dinámico autofinanciado (3/5)

En el periodo 1, el inversionista elige recomponer el portafolio mediante la venta o compra de acciones y del activo sin riesgo. El valor del portafolio cambia a:

$$V_1^+ = \alpha_1 S_1 + \beta_1(1+r)$$

Esta operación es autofinanciada si:

$$V_1^- = V_1^+$$

## Portafolio dinámico autofinanciado (4/5)

Notemos que, de manera general, la variación en el valor de un portafolio (autofinanciado o no) es:

$$\Delta V = V_{i+1} - V_i$$

O bien:

$$\Delta V = (\alpha_{i+1} - \alpha_i)S_{i+1} + (\beta_{i+1} - \beta_i)(1+r)^{i+1} + \alpha_i(S_{i+1} - S_i) + \beta_i r(1+r)^i$$

## Portafolio dinámico autofinanciado (5/5)

La primera línea de la ecuación anterior representa los depósitos o retiros del inversionista. La segunda línea representa las ganancias generadas por los movimientos del mercado. Sólo estas últimas son atribuidas a la calidad de la gestión del portafolio y son, de hecho, las únicas que intervienen en el cálculo de la rentabilidad del portafolio. Obviamente, para un portafolio autofinanciado:

$$\Delta V = \alpha_t \Delta S + \beta_{it}(1+r)^i$$

## La estrategia de cobertura (1/6)

Usaremos la notación siguiente:

$\leq$

- El nodo del árbol situado en fecha  $i$  y que corresponde a  $j$  ramas arriba sin importar su orden entre 0 e  $i$  se denota por  $(i,j)$
- A cada nodo  $(i,j)$  del árbol la opción tiene un valor  $C_{i,j}$
- $\phi_{i,j}$  es el valor del *payoff* de la opción en el estado de la naturaleza  $j$ , es decir en el nodo  $(n,j)$ .

## La estrategia de cobertura (2/6)

En el nodo  $(n,j)$  tenemos:

$$S_{n,j} = S_0 u^j d^{n-j}$$

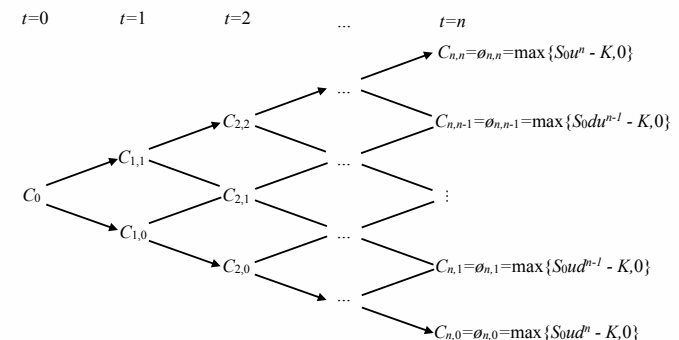
$$\phi_{n,j} = C_{n,j} = \max \{S_0 u^j d^{n-j} - K, 0\} \text{ para un call}$$

$$\phi_{n,j} = P_{n,j} = \max \{K - S_0 u^j d^{n-j}, 0\} \text{ para un put.}$$

En cada subperiodo  $(i,i+1)$  construimos un portafolio de cobertura: el valor  $V_i^-$  de este portafolio en  $i$  constituye la inversión inicial del periodo  $(i,i+1)$  de tal forma que  $V_i^+ = V_i^-$ .

## La estrategia de cobertura (3/6)

Tenemos:



## La estrategia de cobertura (4/6)

### Proposición

Sea  $C_i$  el precio en  $i$  de una opción europea con vencimiento en  $n$ . Bajo la probabilidad neutral al riesgo,  $q$ , el proceso que representa el valor presente de este precio es una martingala, es decir:

$$\frac{C_i}{(1+r)^i} = \mathbb{E}^q \left[ \frac{C_j}{(1+r)^j} | \mathcal{F}_i \right] \quad \forall j > i$$

y en particular

$$C_0 = \mathbb{E}^q \left[ \frac{C_n}{(1+r)^n} \right]$$

**Demostración** (Tarea).

## La estrategia de cobertura (5/6)

La proposición anterior implica que, en cada etapa dentro del árbol, el valor de la prima es igual al valor esperado actualizado de su valor en el siguiente periodo.

## La estrategia de cobertura (6/6)

### Ejemplo

Considera un árbol de dos periodos, para el cual  $u=1.05$  y  $d=0.95$ . Suponemos que la tasa de interés del activo sin riesgo es de 1% y que la acción tiene un valor inicial de  $S_0=\$100$ . Considera además un call con vencimiento en dos periodos suscrito sobre la acción que acabamos de describir. Si el precio de vencimiento de esta opción es  $K=\$95$ , ¿cuál es la prima de esta opción?

## El valor de la opción (1/3)

Para resumir, el valor del árbol puede llenarse recursivamente, calculando en cada nodo  $(i,j)$ :

$$C_{ij} = \frac{qC_{i+1,j+1} + (1-q)C_{i+1,j}}{1+r}$$

Obviamente comenzamos en  $i=n-1$  y vamos hacia atrás hasta llegar a  $i=0$ . Sin embargo, una fórmula directa para calcular el valor de la opción se calcula como en la siguiente proposición.



## El valor de la opción (2/3)

### Proposición

La probabilidad neutral al riesgo del evento  $\{S_n = S_0 u^j d^{n-j}\}$  dado que  $S_0$  es conocido es:

$$\mathbb{P}^q \{S_n = S_0 u^j d^{n-j} | S_0\} = \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j}$$

## El valor de la opción (3/3)

### Proposición (cont'd)

Por lo tanto:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} \max(S_0 u^j d^{n-j} - K; 0)$$

$$P_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} \max(K - S_0 u^j d^{n-j}; 0)$$

**Demostración** (Tarea).

## El modelo de Black-Scholes

Modelo en tiempo continuo

## Hipótesis del modelo (1/3)

Consideremos ahora:

- Un mercado abierto en tiempo continuo en el cual no existen costos de transacción
- Existen dos activos de base: acciones y deuda
- La tasa de interés en el mercado de deuda es  $r$ , la cual se acumula en forma continua
- El valor de la acción en el periodo  $t$  es  $S_t$ . Esta acción no distribuye dividendos y su valor inicial  $S_0$  es conocido.

## Hipótesis del modelo (2/3)

- El precio de la acción evoluciona de acuerdo a:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

donde la tendencia,  $\mu$ , y la volatilidad de la acción,  $\sigma$ , son constantes. El proceso  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar.

- Sea  $\beta_t$  el valor del activo sin riesgo en  $t$ . Entonces, \$1 en  $t=0$  vale:

$$\frac{d\beta_t}{\beta_t} = r dt$$

## Hipótesis del modelo (3/3)

Las dos ecuaciones diferenciales anteriores tienen solución analítica:

$$S_T = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma W_T}$$
$$\beta_T = e^{rT}$$

- Finalmente, suponemos que existen opciones europeas negociables en tiempo continuo. Estas se suscriben sobre el activo riesgoso (acción).

## Estrategia dinámica autofinanciada (1/2)

Deseamos encontrar una estrategia dinámica autofinanciada que replique el *payoff* de la opción. Sea  $\pi_t$  el valor del portafolio en  $t$ , y  $\delta_t$  la cantidad de la acción dentro del portafolio. En este caso, el monto del activo sin riesgo dentro del portafolio se calcula:

$$\pi_t - \delta_t S_t$$

## Estrategia dinámica autofinanciada (2/2)

Entonces, la evolución de la riqueza,  $\pi_t$ , entre  $t$  y  $t+dt$  sin considerar cambios en la composición del portafolio es:

$$d\pi_t = (\pi_t - \delta_t S_t) r dt + \delta_t dS_t$$

Esta última ecuación representa, además, el valor del portafolio en una estrategia autofinanciada. Obviamente, para resolver esta ecuación diferencial, necesitamos conocer  $\{\delta_t\}_{t \geq 0}$  y  $\pi_0$ .

## Evaluación de la opción (1/8)

### ¿Cómo encontramos el precio de la opción?

Buscamos dentro del conjunto de estrategias autofinanciadas todas aquellas que repliquen el *payoff* de la opción (un call, por ejemplo). Los valores de estas estrategias se expresan como una función determinística de  $S_t$  y de  $t$ :  $\pi(t, S_t)$ .

## Evaluación de la opción (2/8)

Elegimos *a priori* una función  $\pi(\dots)$  lo suficientemente regular que nos permita aplicar la regla de Itô:

$$d\pi(t, S_t) = \frac{\partial \pi}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial \pi}{\partial S}(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}(t, S_t)dS_t^2$$

Tenemos que:  $dS_t^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$ . Entonces:

$$d\pi(t, S_t) = \left( \frac{\partial \pi}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial \pi}{\partial S}(t, S_t) dS_t$$

## Evaluación de la opción (3/8)

Para que la ecuación  $\pi(t, S_t)$  represente en todo  $t$  el valor de un portafolio autofinanciado, necesitamos que  $d\pi(t, S_t)$  satisfaga:

$$\begin{aligned} \delta_t &= \frac{\partial \pi}{\partial S}(t, S_t) \\ (\pi(t, S_t) - \delta_t S_t) r &= \frac{\partial \pi}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 \end{aligned}$$

## Evaluación de la opción (4/8)

Entonces:

$$\frac{\partial \pi}{\partial t}(t, S_t) + \frac{\partial \pi}{\partial S}(t, S_t) r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2$$

Esta es la famosa ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

## Evaluación de la opción (5/8)

Para que el valor del portafolio autofinanciado replique el valor de la opción, debe ser que:

$$\pi(T, S_T) = \vartheta_T(T, S_T)$$

Entonces:

$\pi(t, S_t) = C(t, S_t)$  si  $\vartheta_T(T, S_T)$  es el *payoff* de un call

$\pi(t, S_t) = P(t, S_t)$  si  $\vartheta_T(T, S_T)$  es el *payoff* de un call

## Evaluación de la opción (6/8)

### Proposición

El valor de un call europeo —solución a la ecuación diferencial parcial de B-S sujeto a su condición frontera— es:

$$C(t, S_t) = S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

y  $\mathcal{N}(u)$  es la función de densidad normal estándar.

## Evaluación de la opción (7/8)

### Proposición (cont'd)

El valor de un put europeo es:

$$P(t, S_t) = K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1)$$

**Ejercicio.** Muestra que el valor de un put también puede encontrarse usando la paridad call-put.

## Evaluación de la opción (8/8)

### Ejercicio

Calcula la prima de un call y un put europeos suscritos sobre una acción que vale \$500. El precio de ejercicio de ambos es de \$520 y su vencimiento es en 90 días. La tasa de interés anual (discreta) es de 5% para operaciones a tres meses y la volatilidad se estima en 5.547% usando datos semanales. Suponemos que hay 52 semanas en el año y usamos el hecho de que la volatilidad crece con la raíz cuadrada del periodo para el que está definida.