

# Teoría de las Finanzas

Introducción a la teoría de portafolios

Alejandro Mosiño  
Universidad de Guanajuato  
v.2014

## Introducción

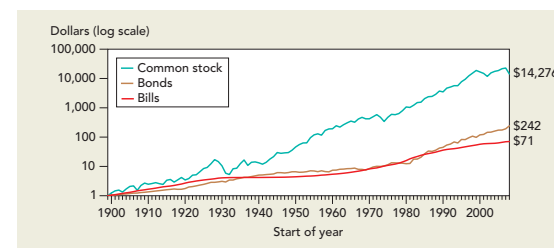
## Introducción (1/4)

Para comprender el significado de la palabra riesgo, consideremos el estudio de Dimson, Marsh y Stauton (2008), en el cual se miden los resultados históricos de tres portafolios de inversión en Estados Unidos:

- Un portafolio de letras del tesoro
- Un portafolio de obligaciones del Estado de Estados Unidos
- Un portafolio de acciones ordinarias.

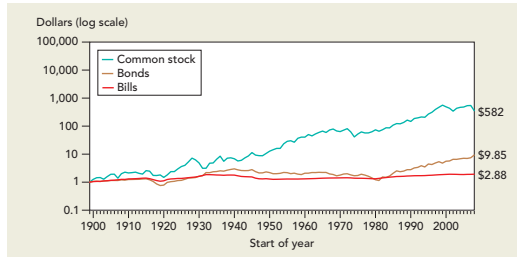
## Introducción (2/4)

¿Cómo podría haber crecido tu dinero si hubieras invertido un dólar a inicios del año 1900 (y hasta el final del año 2008)?



## Introducción (3/4)

¿Y si consideramos la inflación?



## Introducción (4/4)

También podemos calcular el promedio del rendimiento anual:

	Tasa de rendimiento anual promedio		
	Nominal	Real	Prima de riesgo
Letras del tesoro	4.0	1.1	0.0
Obligaciones del gobierno	5.5	2.6	1.5
Acciones	11.1	8.0	7.1

## Rendimiento promedio y costo del capital

## Promedio aritmético vs. Rendimiento compuesto (1/3)

Las rentabilidades medias que se muestran en la tabla anterior son medias aritméticas. ¿Qué pasa si calculamos el rendimiento compuesto? Por ejemplo, para las acciones tenemos:

$$(1+r_c)109 = \$14,276 \Rightarrow r_c = 9.2\%$$

El rendimiento promedio compuesto es más pequeño que el rendimiento promedio aritmético. ¿Cuál deberíamos usar?

## Promedio aritmético vs. Rendimiento compuesto (2/3)

### Ejercicio

El precio de una acción de la compañía X es de \$100. Existen las mismas posibilidades de que el precio de la acción al final del año sea \$90, \$110 o \$130. Suponemos que la empresa X no paga dividendos.

- Muestra que la rentabilidad esperada es del 10%.
- Consideremos la rentabilidad de las acciones de X a lo largo de varios años. Calcula la media aritmética de las rentabilidades si la rentabilidad fuera de -10% en un tercio de los años, +10% en otro tercio y +30% en los años restantes.

## Promedio aritmético vs. Rendimiento compuesto (3/3)

### Ejercicio (cont'd)

- La media aritmética de las rentabilidades puede interpretarse como el costo de oportunidad del capital. ¿Porqué?
- Calcula la media de la rentabilidad compuesta anual de las acciones de X. Muestra que esta es más pequeña que el costo de oportunidad del capital. ¿Porqué los inversionistas no estarían dispuestos a invertir a esta tasa?

## Estimación del costo de oportunidad del capital

Supongamos que existe un proyecto de inversión que tiene el mismo riesgo que el índice bursátil S&P (portafolio de mercado). Entonces, usaremos el rendimiento del mercado,  $r_m$ , para descontar los flujos de caja esperados del proyecto. Pero... ¿cuánto vale  $r_m$ ?

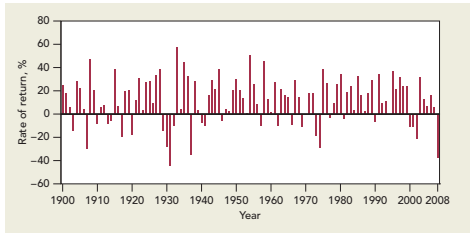
- Podríamos suponer que en el futuro los rendimientos serán igual que en el pasado. Por ejemplo, para las acciones, el rendimiento futuro podría estimarse en 11.1%.
- Podríamos tomar el tipo de interés de las Letras del Tesoro,  $r_f$ , y añadir un 7.1%.

¿Cuál procedimiento te parece más sensato?

## El riesgo de un portafolio

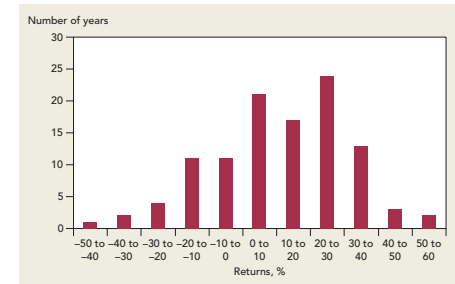
# El riesgo de un portafolio (1/2)

El rendimiento de un portafolio es muy variable, por lo que no es posible calcular con exactitud la prima de riesgo.



# El riesgo de un portafolio (2/2)

Los rendimientos históricos también pueden representarse mediante un histograma:



# Varianza y desviación estándar (1/2)

Para medir la dispersión, podemos utilizar la varianza y la desviación estándar:

$$\text{var}(\tilde{r}_m) = \sigma^2 = \mathbb{E}(\tilde{r}_m - r_m)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (\tilde{r}_{m,t} - r_m)^2$$

$$\text{Des.Est.}(\tilde{r}_m) = \sigma = \sqrt{\text{var}(\tilde{r}_m)}$$

donde  $\tilde{r}_m$  es la rentabilidad realizada y  $r_m$  la rentabilidad esperada.

# Varianza y desviación estándar (2/2)

## Ejercicio

Comenzamos invirtiendo \$100. Se lanzan dos monedas al aire: por cada cara que saques consigues la inversión inicial más un 20%, y por cada cruz que saques recuperas la inversión inicial menos un 10%.

- Calcula la rentabilidad esperada de esta inversión
- Calcula la varianza y la desviación estándar de esta inversión
- Pensemos en un segundo juego en que cada cara supone una ganancia de un 35% y cada cruz una pérdida de un 25%. ¿Cuál juego es más arriesgado? ¿Porqué?

# Varianza y desviación estándar en los E.U.

Naturalmente, no es posible calcular las probabilidades para cualquier portafolio de acciones. Resulta razonable observar primero las variabilidades en el pasado:

Portafolio	$\sigma$	$\sigma^2$
Letras del tesoro	2.8	7.7
Obligaciones del gobierno	8.3	69.3
Acciones	20.2	406.4

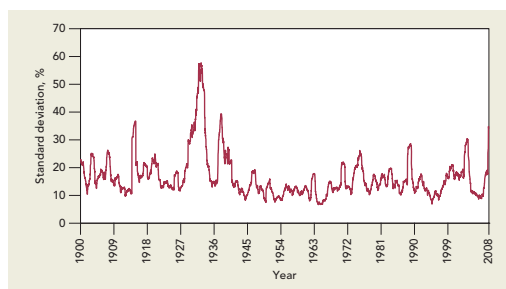
# Varianza y desviación estándar en diferentes países

También podemos comparar la desviación estándar en diferentes países para todo el periodo considerado:



# Varianza y desviación estándar a través del tiempo

Por supuesto, no hay ninguna razón por la que la variabilidad del mercado deba ser la misma durante más de un siglo:



# Diversificación

# Medidas de variabilidad para acciones específicas

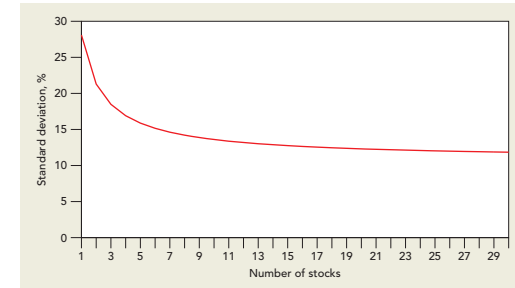
También podemos calcular la varianza y la desviación estándar para acciones específicas. Por ejemplo (para el periodo 2004-2008):

Acción	$\sigma$	Acción	$\sigma$
Amazon	50.9	Boeing	23.7
Ford	47.2	Disney	19.6
Newmont	36.1	Exxon Mobil	19.1
Dell	30.9	Campell Soup	15.8
Starbucks	30.3	Johnson & Johnson	12.5

**Nota.** Desviación estándar del portafolio de mercado 3%.

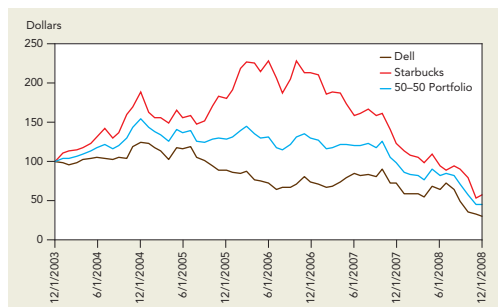
## Diversificación (1/2)

Si la cartera de mercado está formada por acciones individuales, ¿porqué su variabilidad no refleja la variabilidad promedio de sus componentes? Esto se debe a la *diversificación*.



## Diversificación (2/2)

La diversificación funciona porque los cambios en el precio de las acciones están imperfectamente correlacionados:



## Riesgo de un portafolio con dos acciones (1/4)

Para observar cómo la diversificación reduce el riesgo, supongamos que:

- Inviertes 60% de tu portafolio en Campbell y el restante 40% en Boeing
- Se espera que el próximo año el rendimiento de Campbell Soup sea de 3.1% y el de Boeing de 9.5%.
- Podemos mostrar que el rendimiento esperado de este portafolio es de 5.7%.

## Riesgo de un portafolio con dos acciones (2/4)

Tenemos primero que calcular las varianzas y covarianzas de las acciones como en la siguiente tabla:

	Acción 1	Acción 2
Acción 1	$x_1^2 \sigma_1^2$	$x_1 x_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$
Acción 2	$x_1 x_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$	$x_2^2 \sigma_2^2$

Aquí,  $\sigma_i$  ( $i=1,2$ ) es la desviación estándar de la acción  $i$ ,  $x_i$  es la cantidad invertida en el activo  $i$ , y  $\rho_{12}$  es el coeficiente de correlación entre las acciones 1 y 2.

## Riesgo de un portafolio con dos acciones (3/4)

Una vez completadas las cuatro casillas de la tabla anterior, simplemente sumamos las entradas para obtener la varianza del portafolio:

$$\text{Varianza del portafolio} = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$$

La desviación estándar es, por supuesto, la raíz cuadrada de la varianza.

## Riesgo de un portafolio con dos acciones (4/4)

### Ejercicio

Supón que el coeficiente de correlación de Campbell y Boeing es  $\rho_{12}=1$ . Muestra que la desviación estándar del portafolio sería de alrededor del 40% del camino entre la desviación estándar de las dos acciones.

- ¿Qué pasa si el coeficiente de correlación es 0.18?
- ¿Qué pasa si el coeficiente de correlación es -1?

## Riesgo de un portafolio con $N$ acciones

El procedimiento que acabamos de realizar puede extenderse para calcular el riesgo de un portafolio con  $N$  activos. En este caso, la varianza se calcula como:

$$\text{Varianza del portafolio} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$$

donde:

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}(\tilde{r}_i - r_i)(\tilde{r}_j - r_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

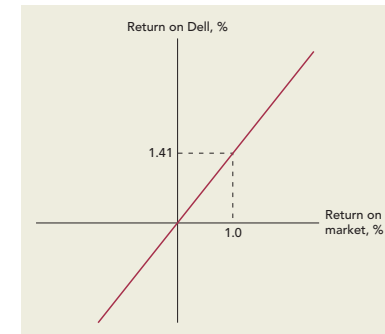
## Efecto de cada acción sobre el riesgo del portafolio (1/2)

Para conocer la contribución de cada título individual al riesgo de un portafolio, necesitamos medir su beta ( $\beta$ ):

Acción	$\beta$	Acción	$\beta$
Amazon	2.16	Disney	0.96
Ford	1.75	Newmont	0.63
Dell	1.41	Exxon Mobil	0.55
Starbucks	1.16	Johnson & Johnson	0.50
Boeing	1.14	Campbell Soup	0.30

## Efecto de cada acción sobre el riesgo del portafolio (2/2)

Por ejemplo, para las acciones de Dell tenemos:



## ¿Cómo se mide el beta? (1/2)

Para medir el beta usamos la fórmula:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

donde  $\sigma_{im}$  es la covarianza entre la rentabilidad de la acción  $i$  y la rentabilidad del mercado, y  $\sigma_m^2$  es la varianza de la rentabilidad del mercado.

## ¿Cómo se mide el beta? (2/2)

### Ejercicio

Considera los rendimientos de la acción X y del mercado:

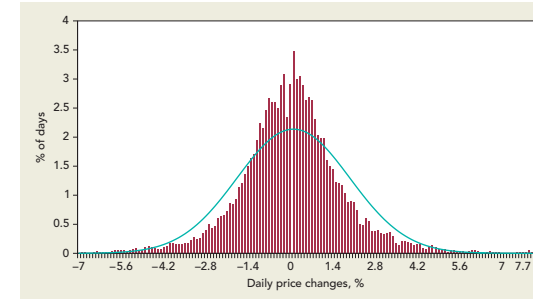
Mes	Rendimiento Mercado	Rendimiento de X
1	-8%	-11%
2	4%	8%
3	12%	19%
4	-6%	-13%
5	2%	3%
6	8%	6%

- Calcula los rendimientos promedio de la acción X y del mercado. Comenta.
- Calcula el beta de la acción X.

# Distribución de los rendimientos

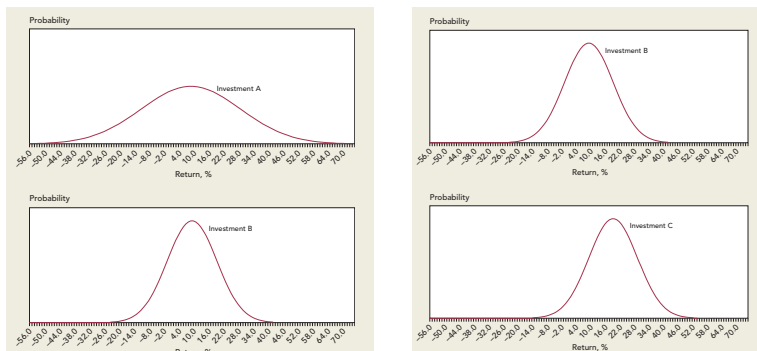
## Distribución de los rendimientos (1/2)

Las tasas de rendimiento históricas de casi todas las acciones se ajustan mucho a una distribución normal. Por ejemplo, consideremos el histograma de los rendimientos diarios de las acciones de IBM:



## Distribución de los rendimientos (2/2)

Las distribuciones normales pueden definirse completamente por dos parámetros: la media o rentabilidad esperada y la varianza o desviación estándar.



## Portafolios de acciones

## Portafolios de acciones (1/4)

Supongamos que estás dudando entre invertir en acciones de Campbell y Boeing. Hemos calculado que:

- La tasa de rendimiento de Campbell es de 3.1%, y la tasa de rendimiento de Boeing es de 9.5%.
- La desviación estándar de los rendimientos de Campbell es de 15.8%, y la desviación estándar de los rendimientos de Boeing es de 23.7%.

¿Qué pasa si invertimos una parte de nuestro dinero en Campbell y la otra parte en Boeing?

## Portafolios de acciones (2/4)

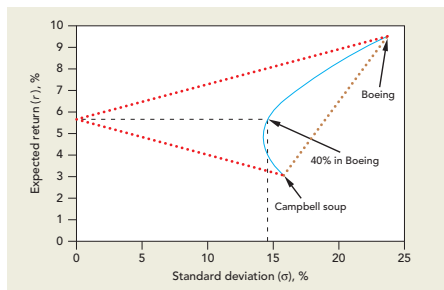
### Ejercicio

Si invertimos 60% de nuestro dinero en Campbell y 40% en Boeing, muestra que:

- La tasa de rendimiento del portafolio es 5.78%
- Dado que el coeficiente de correlación entre estas dos acciones es de 0.18, la desviación estándar del portafolio es de 14.6%
- ¿Qué pasaría si el coeficiente de correlación fuera 1? ¿Y si fuera -1? Comenta.

## Portafolios de acciones (3/4)

Consideremos la rentabilidad esperada y el riesgo que se podría alcanzar con diferentes combinaciones de las dos acciones:



## Portafolios de acciones (4/4)

### Ejercicio

Supongamos que el coeficiente de correlación entre los rendimientos de Campbell y Boeing es de 0.18. Usa el software de tu preferencia para calcular la rentabilidad esperada y el riesgo que se podría alcanzar con diferentes combinaciones de las dos acciones.

## Portafolios de más de dos acciones (1/4)

El rendimiento esperado de un portafolio con  $N$  acciones se calcula como:

$$\mathbb{E}(r_p) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(r_i) x_i = \mathbb{E}(\mathbf{r})^T \mathbf{x}$$

Sea  $\Omega$  la matriz de varianzas -covarianzas. Entonces, la varianza de un portafolio con  $N$  acciones se calcula como:

$$\text{Var}_p = \sum_{i=1}^N x_i^2 \text{Var}_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j = \mathbf{x}^T \Omega \mathbf{x}$$

## Portafolios de más de dos acciones (2/4)

La covarianza y la correlación de dos portafolios  $x$  e  $y$  cualesquiera se calculan como:

$$\text{Cov}_{x,y} = \mathbf{x}^T \Omega \mathbf{y}$$

$$\text{Cor}_{x,y} = \frac{\text{Cov}_{x,y}}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}}$$

## Portafolios de más de dos acciones (3/4)

### Ejercicio

Considera 4 activos con los siguientes rendimientos esperados y matriz de varianzas-covarianzas:

Matriz de varianzas-covarianzas				E(r)
0.1	0.01	0.03	0.05	6%
0.01	0.3	0.06	-0.04	8%
0.03	0.06	0.4	0.02	10%
0.05	-0.04	0.02	0.5	15%

Usa el software de tu preferencia para calcular el rendimiento esperado, la desviación estándar y la covarianza de los portafolios:

Portafolio x	0.2	0.3	0.4	0.1
Portafolio y	0.2	0.1	0.1	0.6

## Portafolios de más de dos acciones (4/4)

### Ejercicio

Supongamos que invertimos una parte de nuestro dinero en el portafolio  $x$  y otra parte en el portafolio  $y$ . Calcula y gráfica las diferentes combinaciones de rendimientos esperados y de desviaciones estándar que podríamos obtener.

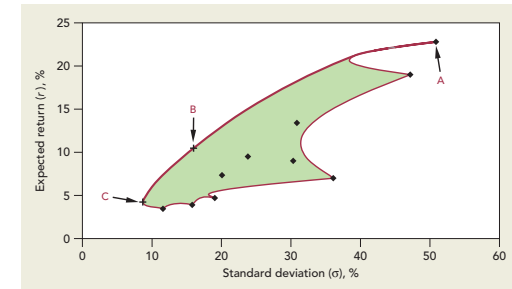
## Portafolios eficientes, ¿qué son? (1/4)

Para mostrar qué es un portafolio eficiente, considera los portafolios A, B y C:

	$E(r)$	$\sigma$	A	B	C
Amazon	22.8	50.9	100	10.9	
Ford	19	47.2		11	
Dell	13.4	30.9		10.3	
Starbucks	9	30.3		10.7	3.6
Boeing	9.5	23.7		10.5	
Disney	7.7	19.6		11.2	
Newmont	7	36.1		9.9	10.2
Exxon Mobil	4.7	19.1		9.7	18.4
Johnson &	3.8	12.5		7.4	33.9
Campell Soup	3.1	15.8		8.4	33.9
Rendimiento esperado del portafolio			22.8	10.5	4.2
Desviación estándar del portafolio			50.9	16	8.8

## Portafolios eficientes, ¿qué son? (2/4)

Podemos combinar la inversión de activos individuales para obtener una selección más amplia de rentabilidades esperadas y riesgos:



## Portafolios eficientes, ¿qué son? (3/4)

En la figura anterior observamos:

- Los portafolios A, B y C se encuentran sobre la línea de trazo grueso. Estos son los portafolios eficientes
- La línea delimitada por los portafolios eficientes (A, B y C) se conocen como frontera eficiente
- El rendimiento y la desviación estándar de cada activo individual se encuentran bajo la frontera eficiente.

## Portafolios eficientes, ¿qué son? (4/4)

### Ejercicio

Muestra que los portafolios x e y del ejercicio anterior no son eficientes.

## ¿Cómo encontramos la frontera eficiente? (1/4)

Para encontrar la frontera eficiente resolvemos el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \min \{ \text{Var}_p = \mathbf{x}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{x} \} \\ \text{s.a. } \mathbb{E}(r_p) = \bar{\mu}; \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1 \end{aligned}$$

## ¿Cómo encontramos la frontera eficiente? (2/4)

Definamos el vector unidad de dimensión  $N$ :  $\mathbf{u} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T$ . Podemos mostrar que la frontera eficiente está determinada por:

$$\text{Var}_p = \frac{A\bar{\mu}^2 - 2\bar{\mu}B + C}{D}$$

$$A = \mathbf{u}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{u}$$

$$B = \mathbf{u}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{r}$$

$$C = \mathbf{r}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{r}$$

$$D = AC - B^2$$

## ¿Cómo encontramos la frontera eficiente? (3/4)

### Ejercicio

Calcula la frontera eficiente para los activos del ejercicio anterior. Usa la varianza como medida de riesgo.

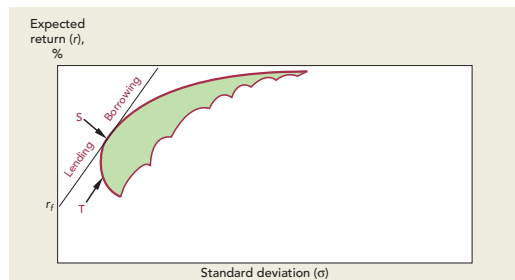
## ¿Cómo encontramos la frontera eficiente? (4/4)

### Notas

- Para elegir un portafolio eficiente, basta con fijar el valor deseado para el rendimiento esperado promedio ( $\bar{\mu}$ ).
- El vértice de la frontera eficiente (el portafolio con el menor riesgo) es el punto con coordenadas:  $(1/A, B/A)$ .

## La posibilidad de prestar y pedir prestado (1/4)

Supongamos que nos es posible prestar o pedir prestado dinero al tipo de interés libre de riesgo:  $r_f$ .



## La posibilidad de prestar y pedir prestado (2/4)

- Si invertimos parte del dinero en Letras del Tesoro (presta dinero) e invertimos el resto en un portafolio de acciones,  $S$ , podremos obtener cualquier combinación de rendimiento esperado y riesgo a lo largo de la línea recta que une  $r_f$  con  $S$ .
- Dado que el endeudamiento no es más que un préstamo negativo, se podrá extender el rango de posibilidades a la derecha de  $S$  al pedir fondos al tipo de interés libre de riesgo e invirtiéndolos, conjuntamente con el dinero inicial, en el portafolio  $S$ .

## La posibilidad de prestar y pedir prestado (3/4)

### Ejercicio

Supongamos que el portafolio  $S$  tiene una rentabilidad esperada del 15% y una desviación estándar del 16% y las Letras del Tesoro una tasa de interés del 5% libre de riesgo.

- Calcula el rendimiento esperado y la desviación estándar si inviertes 50% en Letras del Tesoro y 50% en el portafolio  $S$ .
- Supongamos que pides prestado a la tasa de interés de las Letras del Tesoro en una cantidad igual a tu riqueza inicial. Tu deseo es invertir todo en el portafolio  $S$ . Es decir, tienes el doble de tu dinero invertido en  $S$ , pero tendrás que pagar los intereses del préstamo. Calcula el rendimiento esperado y la desviación estándar de esta inversión.

## La posibilidad de prestar y pedir prestado (4/4)

El plan de inversión cuando existe la posibilidad de prestar y pedir prestado puede resumirse como:

- Encontrar el mejor portafolio eficiente,  $S$  en nuestro ejemplo. Esto se hace comenzando por el eje vertical en  $r_f$  y dibujando la línea más inclinada posible que toque con la frontera eficiente.
- Combinar  $S$  con deuda o un préstamo para obtener la exposición al riesgo que se ajuste a los gustos particulares del inversionista.

## Cálculo del mejor portafolio eficiente

El rendimiento y la desviación estándar del mejor portafolio eficiente,  $S$ , cuando la tasa de interés libre de riesgo es  $r_f$ , se encuentra:

$$r_S = \frac{C - r_f B}{B - r_f A}$$
$$\sigma_S = \sqrt{\frac{r_s - r_f}{B - r_f A}}$$

## ¿Cuánto invertimos en cada activo? (1/2)

Es importante conocer, no solamente la ubicación del portafolio de mercado en el diagrama riesgo vs. rendimiento, sino que además nos interesa conocer el conjunto de inversión que lo definen:

$$\mathbf{x}_s = \frac{\sigma_s^2 \Omega^{-1} (\mathbf{r} - r_p \mathbf{u})}{r_s - r_f}$$

## ¿Cuánto invertimos en cada activo? (2/2)

### Ejercicio

- Calcula la frontera eficiente para los activos del ejercicio anterior. En esta ocasión usa la desviación estándar como medida de riesgo.
- Suponemos que el portafolio libre de riesgo tiene un rendimiento del 10.2%. Calcula el mejor portafolio eficiente.
- Calcula los pesos asociados al mejor portafolio eficiente.