Teoría de las Finanzas

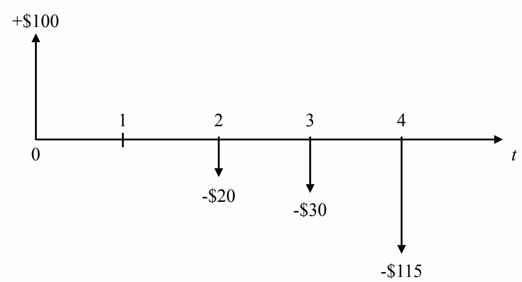
La tasa de interés

Alejandro Mosiño
Universidad de Guanajuato
v.2014

Diagramas de Flujo

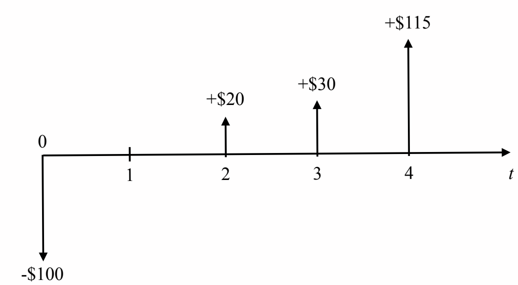
¿Qué es un diagrama de flujo? (1/3)

Deseamos visualizar de una manera simple una operación financiera. Por ejemplo, un préstamo de \$100 en $t=0$:



¿Qué es un diagrama de flujo? (2/3)

El mismo flujo de dinero pero visto desde el punto de vista de la persona quien hace el préstamo :



¿Qué es un diagrama de flujo? (3/3)

Por supuesto, los mismos flujos de dinero pueden representarse en forma vectorial. En el caso de quien solicita el préstamo :

$$\{+\$100, 0, -\$20, -\$30, -\$115\}.$$

Y para quien lo otorga :

$$\{-\$100, 0, +\$20, +\$30, +\$115\}.$$

Operaciones de dos flujos

Operaciones de dos flujos: El diagrama de flujo (1/2)

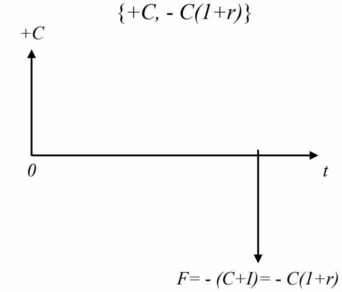
Consideremos una operación financiera que comienza en $t=0$ y termina en $t=1$. Sea:

Variable	Definición
C	Capital en $t=0$.
F	Flujo de dinero en $t=1$
I	Intereses en $t=1$
r	Tasa de interés vigente

Operaciones de dos flujos: El diagrama de flujo (2/2)

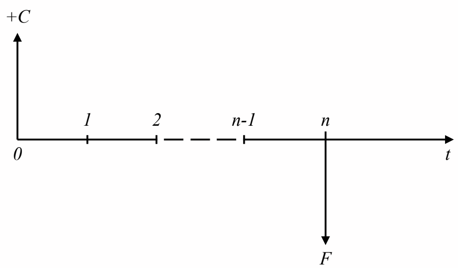
Por ejemplo, para la persona quien solicita el préstamo tendríamos:

$\{+C, -C(1+r)\}$



Dos flujos, n periodos

En caso de tener n periodos entre los dos flujos de esta operación, tendríamos el siguiente diagrama:



¿Cuánto vale F?

Cálculo de los intereses: los intereses simples (1/4)

Analicemos el flujo desde el punto de vista de quien solicita el préstamo y supongamos que todos los intereses se pagan en $t=n$. Si los intereses son simples tenemos:

$$I=C\,r\,n$$

Entonces:

$$F = -\,C\,(1 + nr)$$

Cálculo de los intereses: los intereses simples (2/4)

¿Qué pasa si n no es un número entero? En este caso:

$$I=C\,r\,T$$

$$F= -\,C\,(1 + Tr),$$

donde $T<1$ es la duración del préstamo. ¿Cómo se determina T?

Cálculo de los intereses: los intereses simples (3/4)

Tenemos algunas posibilidades para la determinación de T. Por ejemplo:

- Convención *exacta / exacta*: $$T = \frac{N_j}{N_a}$$
- Convención *exacta / 360*: $$T = \frac{N_j}{360}$$

donde N_j es la duración de la operación expresada en días y N_a es el número exacto de días en el año.

Cálculo de los intereses: los intereses simples (4/4)

Ejemplo

Consideremos un préstamo por C=\$1,000 con vencimiento de 6 meses. El préstamo se otorga el 1 de enero y vence el 1 de julio del mismo año (no bisiesto). La tasa de interés anual es de r=5%.

- Calcula los intereses a pagar considerando las convenciones *exacta / exacta* y *exacta / 360.*
- Considera ahora la convención *30 / 360.* Interpreta esta convención y calcula los intereses a pagar para nuestro ejemplo.

Cálculo de los intereses: los intereses compuestos (1/2)

El principio es simple: los intereses generados al final de cada periodo son reinvertidos, por lo que estos, por sí mismos, generan intereses en el siguiente periodo.

Si la operación dura (no. periodos)	**Flujo de dinero**
1	$\{C, - C(1+r)\}$
2	$\{C, 0, - C(1+r)(1+r)\}$
…	…
n	$\{C, 0, \ldots, 0, - C(1+r)^n\}$

Cálculo de los intereses: los intereses compuestos (2/2)

Como antes, si el número de periodos no es entero:

$$F = C\,(1+r)^T,$$

donde T depende de la convención que se utilice.

El valor futuro

El valor futuro es la cantidad (capital más intereses) obtenida al final de la operación. Para un capital C, una duración T, y una tasa de interés r:

$$F = C\,(1+rT)$$

si r es proporcional (intereses simples), y:

$$F = C\,(1+r)^T$$

si r es actuarial (intereses compuestos).

El valor presente

Usando la fórmula anterior podemos calcular el valor presente:

$$C = \frac{F}{1 + rT}$$

si r es proporcional (intereses simples), y:

$$C = \frac{F}{(1 + r)^T}$$

si r es actuarial (intereses compuestos).

La tasa de rendimiento

También podemos calcular la tasa de rendimiento de una inversión. La tasa de rendimiento (o de rentabilidad) es la tasa de interés que permite obtener F cuando el capital es C y la duración de la inversión es T:

$$r_p = \frac{F - C}{CT}$$

$$r_{act} = \left(\frac{F}{C}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

donde r_p es una tasa proporcional y r_{act} una tasa actuarial.

Tasa simple vs. Tasa compuesta (1/2)

¿Qué tasa es superior, la tasa de interés simple o la tasa de interés compuesta?

Proposición

Si las tasas son positivas, entonces:

$$C(1 + rT) < C(1 + r)^T \Longleftrightarrow T > 1.$$

Si $T = 1$ las dos tasas son iguales.

Tasa simple vs. Tasa compuesta (2/2)

Ejemplo

- Demuestra gráficamente la proposición anterior.
- Considera ahora una inversión de $\$100$ a una tasa del 10%. Calcula el valor futuro de la inversión — usando tasas simples y tasas compuestas — si el préstamo tiene una duración de dos años.
- Considera la misma inversión del punto anterior, pero ahora supongamos que la inversión tiene una duración de 9 meses (273 días de un año no bisiesto).

Tasas equivalentes (1/2)

También podemos calcular la tasa proporcional equivalente a la tasa actuarial (o la tasa actuarial equivalente a la tasa proporcional). Para T periodos tenemos:

$$F = C\,(1 + r_p\,T)$$

$$F = C\,(1 + r_{\text{act}})^T.$$

Las tasas r_p y r_{act} son equivalentes si:

$$C\,(1 + r_p\,T) = C\,(1 + r_{\text{act}})^T.$$

Tasas equivalentes (2/2)

Ejemplo

Considera una inversión de $100 a una tasa proporcional de 10% y una duración de 2 años. Calcula la tasa de interés actuarial equivalente.

Tasa de interés continua (1/2)

Consideremos nuevamente un capital C y una tasa de interés r. Supongamos que la tasa de interés es compuesta. En este caso, F evoluciona de acuerdo a:

No. periodos	F
1	$(1+r)C$
2	$(1+r)^2C$
...	...
T	$(1+r)^TC$

Tasa de interés continua (2/2)

Si los intereses se acumulan más frecuentemente, por ejemplo m veces en el año, entonces:

$$F = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}$$

¿Qué pasa si $m \to \infty$? En este caso:

$$F = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT} = e^{rT} C$$

Fórmulas de equivalencia (1/4)

En general, podemos calcular la tasa base-x equivalente a una tasa base-y. Por ejemplo, sea r_c una tasa continua y r_a una tasa actuarial. Entonces:

$$e^{r_C T} = (1 + r_{act})^T$$

Por lo tanto, la tasa continua equivalente a la tasa actuarial es:

$$r_c = \ln(1 + r_{act})$$

independientemente de la duración T de la operación.

Fórmulas de equivalencia (2/4)

Ejemplo

Calcula lo siguiente:

- La tasa de interés actuarial equivalente a una tasa de interés continua del 5%.
- La tasa de interés proporcional a 365 días equivalente a una tasa de interés proporcional a 360 días del 5%.
- La tasa de interés continua equivalente a una tasa de interés actuarial del 5%.

Fórmulas de equivalencia (3/4)

También podemos comparar operaciones con periodos de referencia diferentes. En este caso *anualizamos* la tasa de referencia. Sea m el número de periodos en el año, r_m la tasa del periodo, y r_a la tasa anualizada correspondiente:

$$r_a = m r_m$$

si r_m es proporcional, y:

$$r_a = (1 + r_m)^m - 1$$

si r_m es actuarial.

Fórmulas de equivalencia (4/4)

Ejemplo

Calcula lo siguiente:

- La tasa de interés actuarial anual equivalente a una tasa de interés actuarial mensual del 1%.
- La tasa de interés actuarial semestral equivalente a una tasa de interés actuarial anual del 10.25%.
- La tasa de interés trimestral proporcional a una tasa de interés proporcional anual del 5.2%.

Operaciones de varios flujos

Operaciones de varios flujos

Consideremos una operación que resulta en los flujos:

$$F_0,\ F_{t_1},\ F_{t_2,\ldots},\ F_{t_n},$$

en los instantes $0,\ t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n$. respectivamente. Por simplicidad, denotemos estos flujos como:

$$\{F_\theta\}_{\theta=0,t_1,t_2,\ldots,t_n}$$

La actualización (1/3)

Del análisis de la sección precedente, podemos deducir que una inversión de $F_n/(1+r)^n$ resulta en un flujo de F_n luego de n periodos. Alternativamente, podemos disponer inmediatamente de $F_n/(1+r)^n$ y pagar F_n luego de n periodos.

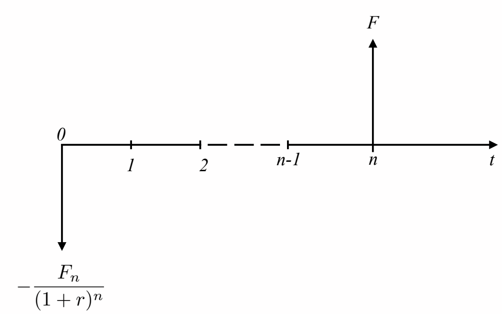
La cantidad:

$$\frac{F_n}{(1+r)^n}$$

se conoce como *valor presente* o *actualizado* del flujo F_n

La actualización (2/3)

Una inversión de $F_n/(1+r)^n$:



$$\left\{-\frac{F_n}{(1+r)^n}, F_n\right\}$$

La actualización (3/3)

El valor en n de un peso invertido (o prestado) hoy es de:

$$\frac{1}{(1+r)^n}$$

Esta cantidad se conoce como factor de actualización. La tasa (que es, en principio, igual a la tasa de interés) se conoce como tasa de actualización.

Valor presente de una secuencia de flujos

Consideremos ahora la secuencia $\underline{\mathrm{F}} = \{F_\theta\}_{\theta=0,t_1,t_2,\ldots,t_n}$:

$$VP_{\underline{\mathrm{F}}}(r) = F_0 + \sum_{\theta=t_1}^{t_n} \frac{F_\theta}{(1+r)^\theta}$$

El valor presente representa el monto que hay que invertir para tener derecho a obtener los flujos presentes y futuros generados por $\underline{\mathrm{F}}$. Si F_0 es del signo opuesto a F_{ti}, para todo $t_i>0$, decimos que tenemos una secuencia estándar.

Valor presente neto: caso particular (1/2)

Si los flujos de la secuencia $\underline{\mathrm{F}}$ son idénticos e igualmente espaciados en el tiempo, $\{F_0, F, F, \ldots, F\}$:

$$VP_{\underline{\mathrm{F}}}(r) = F_0 + F\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^t} = F_0 + \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}F$$

Valor presente neto: caso particular (2/2)

Ejemplo

Sea una inversión inicial de $*1,200*$ que paga $*360*$ anuales durante *10* años. Calcula el valor presente de esta inversión si la tasa de interés es del *10*%.

Valor presente neto: tasa proporcional o continua (1/2)

La actualización puede calcularse ya sea usando una tasa proporcional, r_p, o una tasa continua, r_c. Por ejemplo, el valor presente de $\$1$ es:

$$\frac{1}{1+r_pT} \quad \text{o} \quad e^{-r_cT}$$

En este último caso, los flujos son igualmente representados en tiempo continuo:

$$VP_{\underline{\mathrm{F}}}(r) = \int_0^T F(t)e^{-r_ct}dt$$

Valor presente neto: tasa proporcional o continua (2/2)

Ejemplo

Sea una inversión que resulta en un flujo continuo de $\$10$ por unidad de tiempo durante los próximos 5 años. La tasa de interés anual (discreta) es de r=*10%*. Calcula el valor presente de esta operación.

Tasa actuarial, tasa de interés y tasa interna de retorno

Consideremos la secuencia $\underline{\mathrm{F}} = \{F_\theta\}_{\theta=0,t_1,t_2,\ldots,t_n}$ tal que:

$$VP_{\underline{\mathrm{F}}}(r^*) = F_0 + \sum_{\theta=t_1}^{t_n} \frac{F_\theta}{(1+r^*)^\theta} = 0$$

La tasa r^* es una tasa actuarial. Cuando la secuencia $\underline{\mathrm{F}}$ se refiere a una inversión, la tasa se conoce como tasa interna de retorno. Cuando $\underline{\mathrm{F}}$ se refiere a un financiamiento, la tasa actuarial es la tasa de interés.

Cálculo de la tasa actuarial (1/3)

En el caso particular en que $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son enteros, entonces para calcular r^* debemos resolver:

$$0 = VP_{\underline{\mathrm{F}}}(r^*) = F_0 + \sum_{i=1}^{n} F_i x^i.$$

Este es un polinomio con n raíces reales o complejas. En ocasiones no hay ninguna raíz real y en ocasiones tenemos varias.

Cálculo de la tasa actuarial (2/3)

Proposición

Normalmente necesitaremos el caso de un flujo estándar, la tasa actuarial existe y es única dentro del intervalo $[-1,+\infty[$.

Cálculo de la tasa actuarial (3/3)

Normalmente necesitaremos de una solución numérica (e.g. usando el método de Newton) para encontrar la tasa actuarial. Sin embargo, los cálculos se simplifican en los siguientes casos:

Tipo de flujo	Secuencia
Flujos constantes	$\{-x, y, y, \ldots, y\}$
Dos flujos	$\{-x, y\}$
In fine	$\{-x, y, y, \ldots, y+x\}$
Renta perpetua	$\{-x, y, y, \ldots\}$

El apalancamiento (1/5)

Ejemplo

- Una empresa adquiere una fábrica por $\$24$ millones.
- La producción anual de esta empresa genera una ganancia de $\$3$ millones anuales por 10 años.
- Después de 10 años la fábrica se vende por $\$24$ millones.

Flujos (empresa)	Tasa interna de retorno
$\underline{I}=\{-24, 3, 3, \ldots, 24+3\}$	$r_i = 12.5\%$

El apalancamiento (2/5)

Ejemplo (cont'd)

Supongamos que la inversión es financiada con fondos propios: los $\$24$ millones vienen de los bolsillos de los accionistas de la empresa.

Flujos (accionistas)	Rendimiento (accionistas)
$\underline{A}=\{-24, 3, 3, \ldots, 24+3\}=\underline{I}$	$r_a = 12.5\% = r_i$

El apalancamiento (3/5)

Ejemplo (cont'd)

Supongamos ahora una parte de la inversión es financiada con fondos propios y otra parte mediante un préstamo. Supongamos que el préstamo es por $\$8$ millones a 10 años y que la tasa de interés (*in fine*) es de 10%.

- Encuentra el flujo de dinero, $\underline{\mathrm{E}}$, generado por el préstamo.
- Supongamos que la empresa puede deducir de impuestos el 34% de los intereses. Encuentra el flujo de dinero (ahorros) generado por la deducción de impuestos.

El apalancamiento (4/5)

Ejemplo (cont'd)

- Encuentra el nuevo flujo de dinero de los accionistas, $\underline{\mathrm{A}}$.
- Encuentra la nueva tasa actuarial de los accionistas, r_a.
- Muestra que tu resultado puede encontrarse mediante la fórmula:

$$r_i = e\,(1 - \mu)\,r_d + (1 - e)\,r_a$$

donde e es la proporción del proyecto financiada con deuda, μ es la tasa de impuesto, y r_d es el costo de la deuda antes de impuestos.

El apalancamiento (5/5)

Proposición (El apalancamiento financiero)

1. La tasa de rentabilidad de los fondos propios aumenta con el porcentaje del proyecto financiado con endeudamiento, e, si y solamente si:

$$r_i > (1 - \mu)\,r_d$$

2. Cuando r_i es aleatoria, r_a es aleatoria y entonces:

- $\mathrm{E}(r_a)$ crece con $e \Longleftrightarrow \mathrm{E}(r_i) > (1-\mu)\,\mathrm{E}(r_d)$.
- La varianza de r_a crece con el endeudamiento, e.

Flujos nominales vs. Flujos reales

Hasta ahora hemos considerado flujos de dinero nominales. Supongamos ahora que la tasa de inflación futura es π. Entonces:

- $\$F_1$ en un periodo compran lo mismo que $\$f_1=F_1/(1+\pi)$ hoy.
- $\$F_2$ en dos periodos compran lo mismo que $\$f_2=F_2/(1+\pi)^2$ hoy.
- …
- $\$F_n$ en n periodos compran lo mismo que $\$f_n=F_n/(1+\pi)^n$ hoy.

La nueva secuencia $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es una secuencia en términos reales.

Tasa nominal vs. Tasa real

Igual que ajustamos los flujos nominales para obtener los flujos reales, podemos ajustar la tasa nominal para obtener una tasa real. Una inversión de $1 por un periodo a una tasa (nominal), r, se caracteriza por la secuencia *nominal*: $\{-1, 1+r\}$

Una inversión de $1 por un periodo a una tasa (nominal), r, se caracteriza por la secuencia *real*:

$$\left\{-1, \frac{1+r}{1+\pi}\right\}$$

La rentabilidad real de esta inversión es, entonces:

$$1+k = \frac{1+r}{1+\pi}$$

Tasa nominal vs. Tasa real

Finalmente, si tenemos un flujo nominal $\{F_1, F_2, ..., F_n,\}$ el valor presente se calcula:

$$VP_{\underline{\mathrm{F}}}(r) = f_0 + \frac{f_1}{1+k} + \cdots + \frac{f_n}{(1+k)^n} = VP_{\underline{\mathrm{f}}}(k)$$

Es decir, el valor presente de $\{F_1, F_2, ..., F_n,\}$ a tasa nominal, es igual al valor presente de $\{f_1, f_2, ..., f_n,\}$ a tasa real.