Глава IV. Методы решения уравнений вращения Местной системы звезд

4.1 Подготовка данных

Для решения задачи нахождения параметров вращения МСЗ необходим массовый каталог собственных движений. Решать уравнения МСЗ непосредственно по индивидуальным собственным движениям нельзя по двум причинам:

1. нам необходимо знать *разности* $\mu_l \cos b$ и *суммы* μ_b в противоположных симметричных точках небесной сферы, что приводит к трудностям при составлении пар звезд;
2. решение системы из десятков (и даже сотен) тысяч нелинейных уравнений создает известные вычислительные трудности даже при использовании современных компьютеров.

Кроме того случайные ошибки и пекулярную составляющую в собственных движениях можно уменьшить соответствующим осреднением по площадкам.

В виду этих обстоятельств мы разделяем небесную сферу на несколько симметричных относительно галактического экватора зон, а эти широтные зоны, в свою очередь, разбиваем на площадки равных размеров по долготе. Таким образом, на небесной сфере образуется сетка из площадок, по которым мы осуществим осреднение собственных движений.

Представим алгоритм, который применялся при подготовке исходных данных:

1. отбор звезды по какому-либо признаку: спектральный класс, модуль собственного движения и т.п.; в случае каталога Hipparcos: расстояние, участок диаграммы Герцшпрунга-Рессела
2. если это необходимо, осуществлялся перевод собственных движений $\mu \cos\delta$ и μ' в систему выбранного каталога
3. перевод экваториальных собственных движений звезд в галактические, используя следующие соотношения:

$$\mu_l \cos b = \mu \cos\delta \cos\varphi + \mu' \sin\varphi, \tag{4.1}$$

$$\mu_b = -\mu \cos\delta \sin\varphi + \mu' \cos\varphi, \tag{4.2}$$

где φ – параллактический угол, определяемый формулами

$\sin\varphi = \sin i \cos(l - L)/\cos\delta$,

$\cos\varphi = (\cos b \cos i - \sin b \sin i \sin(l - L))/\cos\delta$,

i = 62°.87 – наклон галактического экватора (на эпоху J2000.0),

L□= 32°.93 – долгота пересечения галактического экватора небесным.

4. перевод экваториальных координат в галактические.
5. определение площадки, в которую попадает звезда. Координаты центра i-ой площадки в j-ой зоне определяются выражениями

$$l_i = \frac{180^\circ}{n} + \frac{360^\circ}{n}(i-1), \qquad i=1,2,...,n \,, \tag{4.3}$$

$$b_j = 90^\circ - \frac{90^\circ}{m} - \frac{180^\circ}{m}(j-1), \qquad j=1,2,...,m \,. \tag{4.4}$$

Здесь m – число широтных зон ($m/2$ – число зон в одном полушарии), n – число площадок в зоне. Индексы площадки для звезды находятся по формулам:

$$i = \left[\frac{l}{360^\circ} n\right] + 1 \,, \tag{4.5}$$

$$j = \left[\frac{90^\circ - b}{180^\circ} m\right] + 1 \,, \tag{4.6}$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

6. осреднение по всем площадкам $\mu_l \cos b$ и μ_b с учетом числа звезд, попавших в площадку.

Результатом работы этого алгоритма являются две таблицы размером $m \times n$, содержащие средние значения $\mu_l \cos b$ и μ_b для каждой площадки, а также таблица числа звезд, попавших в площадку.

Для нашей задачи, как уже было сказано, требуется знание не самих галактических собственных движений, а их сумм «Север+Юг» для μ_b и разностей «Север–Юг» для $\mu_l \cos b$. Такие таблицы размером $\frac{m}{2} \times n$ легко получить из предыдущих по элементарным формулам:

$$\delta\mu_l \cos b = (\mu_l \cos b)_{\mathrm{N}} - (\mu_l \cos b)_{\mathrm{S}} \,, \tag{4.7}$$

$$\delta\mu_b = (\delta\mu_b)_{\mathrm{N}} + (\delta\mu_b)_{\mathrm{S}} \,. \tag{4.8}$$

Каждой клетке этих таблиц может быть приписано весовое значение, равное сумме числа звезд, попавших в северную и южную площадку:

$$w = (n)_{\mathrm{N}} + (n)_{\mathrm{S}} \,. \tag{4.9}$$

Для решения уравнения (4.16) по $\delta\mu_b$ необходимо знать параллактическую компоненту движения Солнца $Z_\odot$. Ее мы можем определить, решая уравнения Эри-Ковальского:

$$X_\odot \sin l - Y_\odot \cos l = \mu_l \cos b \,, \tag{4.10}$$

$$X_\odot \sin b \cos l + Y_\odot \sin b \sin l - Z_\odot \cos b = \mu_b \tag{4.11}$$

на материале тех же таблиц. Определение параметров движения Солнца можно производить независимо от определения параметров галактического вращения, поскольку функции при неизвестных в уравнениях (4.10) и (4.11) ортогональны функциям вращения МСЗ.

4.2 Методы решения

Решение уравнений вращения МСЗ – трудная задача, поскольку они нелинейны по отношению к определяемым параметрам, и их непосредственно нельзя решать традиционным методом наименьших квадратов.

Впервые решение уравнений вращения МСЗ было выполнено Р.Б. Шацовой (1950). Однако в силу ограниченности вычислительных средств того времени ею был применен искусственный метод решения, который позволил решить только первое уравнение и не позволил решить второе. Опишем кратко суть метода на примере уравнения (3.15). Представим его в узких зонах галактической широты в виде отрезков ряда Фурье:

$$\mu_l \cos b = \sum_{k=1}^{3} A_i \cos kl + B_i \sin kl \,. \tag{4.12}$$

В этой формуле коэффициенты Фурье A_i и B_i являются нелинейными функциями от параметров МСЗ. Для восстановления параметров необходимо было решить нелинейную систему уравнений, а предложенный Р.Б. Шацовой метод оказался неустойчивым к действию случайных ошибок. Второй недостаток такого подхода заключался в игнорировании зависимости функций от широты, что резко снижает использование наблюдательной информации. В методе Р.Б. Шацовой производилось лишь сравнение определяемых параметров, полученных по разным широтным зонам. Как оказалось, неустойчивость метода (т.е. когда малые изменения A_i и B_i приводят к большим изменениям в параметрах МСЗ) может изменить даже знаки параметров МСЗ.

Мы используем более строгий в математическом смысле метод решения уравнений вращения.

Уравнения (3.15) и (3.16) могут быть представлены в виде

$$y = f(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \tag{4.13}$$

где y – либо $\delta\mu_l \cos b$, либо $\delta\mu_b$;

$\mathbf{x}$ – вектор неизвестных: $l_0, b_0, n_0, \omega_0, \omega'_0\langle r\rangle, \omega''_0\langle r^2\rangle$;

$\mathbf{t}$ – вектор координат северной площадки: l, b;

f – нелинейная функция как от компонент $\mathbf{x}$, так и от компонент $\mathbf{t}$.

Непосредственно использовать способ наименьших квадратов для решения нелинейного уравнения (4.13) невозможно, поэтому мы воспользуемся методом линеаризации, суть которого изложена ниже.

Предположим, что нам известно из каких-либо предварительных соображений начальное приближение для $\mathbf{x}$, которое мы обозначим через $\mathbf{x}_0$. Тогда можно вычислить

$$y_0 = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}) \tag{4.14}$$

для всех точек $\mathbf{t}$ и получить, пользуясь разложением в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка, выражение

$$\Delta y = y - y_0 \approx \sum_j \Delta x_j \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0}. \tag{4.15}$$

Избыточная система уравнений,

$$\mathbf{A}\,\Delta\mathbf{x} = \mathbf{Y}, \tag{4.16}$$

порождаемая уравнением (4.15), является линейной относительно неизвестных поправок Δx_j к компонентам вектора $\mathbf{x}$ и может быть решена методом наименьших квадратов. Элементы матрицы этой системы имеют вид:

$$\mathbf{A}_{ij} = \left.\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{t}_i)}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0} \qquad \begin{aligned} i &= 1,2,\dots m, \\ j &= 1,2,\dots 6, \end{aligned} \tag{4.17}$$

где $\mathbf{t}_i = (l_i, b_i)$ координаты центра i-ой северной площадки. Значения частных производных можно получить численно по симметричной формуле:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + \Delta_j, \ldots, x_{n,} \mathbf{t}_i) - f(x_1, x_2, \ldots, x_j - \Delta_j, \ldots, x_{n,} \mathbf{t}_i)}{2\Delta_j}. \tag{4.18}$$

Элементы столбца свободных членов записываются следующим образом:

$$\mathbf{Y}_i = y_i - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_i); \tag{4.19}$$

здесь y_i – средние значения $\delta\mu_l \cos b$ или $\delta\mu_b$ для i-ой площадки. Каждому уравнению может быть приписан вес в соответствии с формулой (4.9).

Получив поправки Δx_j по каждому уравнению либо по обоим уравнениям совместно, прибавим их к компонентам $\mathbf{x}_0$ и найдем следующее приближение $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}. \tag{4.20}$$

Будем повторять это процесс до тех пор, пока не будет удовлетворяться условие

$$\left|\Delta x_j\right| < \varepsilon_j, \tag{4.21}$$

где ε_j – требуемая точность определения j-ой компоненты $\mathbf{x}$. Эмпирически мы нашли, что лучше всего выбирать ε_j на уровне получаемых среднеквадратичных погрешностей Δx_j. Что касается величин Δ_j в формуле (4.18), то они были назначены равными половине ε_j:

$$\Delta_j = \frac{1}{2}\varepsilon_j, \tag{4.22}$$

для того чтобы значения функции f на правом и левом конце промежутка $\left[x_j - \Delta_j, x_j + \Delta_j\right]$ вычислялись в точках, отстоящих друг от друга не менее, чем на величину среднеквадратичной ошибки Δx_j.

4.3 Тестирование методов

Метод Р.Б. Шацовой и метод линеаризации были проверены на искусственном примере. Для этого мы задали определенные (близкие к реальным) значения параметров вращения Местной системы, а именно:

$$l_0 = 286^\circ, \quad b_0 = -5^\circ, \quad n_0 = 1.5, \quad \omega_0 = 1'', \quad \omega_0' r = -1'', \quad \omega_0'' r^2 = 2''.5$$

создали модельные каталоги собственных движений по уравнениям (3.15) и (3.16) с различными уровнями шума от 0.0 до 0.5 "/100 лет (максимальная ошибка собственных движений звезд в астрометрических каталогах).

Результаты тестирования приведены в таблицах 4.1 и 4.2. Из анализа этих таблиц видно, что даже при нулевом уровне случайной составляющей (σ=0) метод Р.Б. Шацовой искажает исходные значения, а при незначительном зашумлении значения изменяются весьма заметно. Некоторые параметры, например, такой важный, как угловая скорость (ω_0 в зонах 79° и 34°), могут изменить знак (т.е. направление вращения!), другие имеют аномально завышенные значения; ($\omega_0' r$ и $\omega_0'' r^2$ в зоне 79°, $\omega_0' r$ в зоне 11°). Наблюдается рассогласование параметров, определяемых по разным зонам. В таблице 6.1 такие параметры выделены подчеркиванием. Однако, как можно видеть, геометрические характеристики l_0, b_0, n_0 оказываются более стабильными и не претерпевают таких драматических изменений, как кинематические параметры ω_0, $\omega_0' r$, $\omega_0'' r^2$. Более детальный анализ метода Р.Б. Шацовой показал, что формулы (30, $30^{\text{I-V}}$) в ее работе (Шацова, 1950) приводят к неустойчивости алгоритма в целом.

Метод линеаризации, напротив, при σ = 0" восстанавливает исходные значения с точностью лучше 0.1% и значительно более устойчив к шумам. Метод Р.Б. Шацовой не дает возможности решить второе уравнение
по $\delta\mu_b$ и провести совместное решение уравнений. Наш метод показал хорошее согласие результатов как при раздельном, так и при совместном решении обоих уравнений (3.15) и (3.16).

Таблица 4.1. Тестирование метода Р.Б. Шацовой.

Единицы измерения: l_0, b_0 *– градусы;* n_0 *– безразмерная;*
ω_0, $\omega'_0 r$, $\omega''_0 r^2$ – *"/100 лет.*

Зона	Параметр	σ = 0".0	σ = 0".1	σ = 0".3	σ = 0".5
79°	l_0	274	275	273	273
	b_0	-6.3	-6.4	-6.0	-5.9
	n_0	0.94	0.35	0.41	0.42
	ω_0	1.1	-0.5	-4.5	-8.3
	$\omega'_0 r$	-1.4	10.7	39.7	67.
	$\omega''_0 r^2$	1.6	11.7	44.	-75.
56°	l_0	272		289	273
	b_0	-5.7		-10.0	-7.9
	n_0	1.18		1.0	1.1
	ω_0	1.2		0.8	0.5
	$\omega'_0 r$	-1.9		1.7	-4.6
	$\omega''_0 r^2$	1.5		-0.5	-2.6
34°	l_0	270	267		295
	b_0	-5.3	-4.2		-11.0
	n_0	1.4	1.14		2.6
	ω_0	1.2	0.9		-0.8
	$\omega'_0 r$	-2.6	-1.4		1.9
	$\omega''_0 r^2$	1.6	1.5		-0.4
11°	l_0	270	273	275	275
	b_0	-5.2	-6.1	-6.5	-6.7
	n_0	1.7	1.9	2.0	2.0
	ω_0	1.3	2.5	5.7	9.0
	$\omega'_0 r$	-3.4	-7.9	-17.3	-26.6
	$\omega''_0 r^2$	1.6	2.7	5.0	7.4

Таблица 4.2. Тестирование метода линеаризации.

Единицы измерения: l_0, b_0 *– градусы;* n_0 *– безразмерная;*
ω_0, $\omega_0' r$, $\omega_0'' r^2$ *– ″/100 лет.*

Уравнение	Параметр	$\sigma = 0''.0$	$\sigma = 0''.1$	$\sigma = 0''.3$	$\sigma = 0''.5$
$\delta\mu_l \cos b$	l_0	286. ± 0.2	278. ± 4.5	260. ± 17.6	
	b_0	-5.0 ± 0.1	-7.2 ± 2.4	-9.9 ± 9.4	
	n_0	1.49 ± 0.01	1.16 ± 0.17	0.81 ± 0.41	
	ω_0	1.00 ± 0.01	1.07 ± 0.10	1.16 ± 0.35	
	$\omega_0' r$	-0.99 ± 0.01	-0.82 ± 0.12	-0.60 ± 0.35	
	$\omega_0'' r^2$	2.47 ± 0.03	1.87 ± 0.57	1.42 ± 1.80	
$\delta\mu_b$	l_0	286. ± 0.1	287. ± 1.6	290. ± 5.5	291. ± 10.9
	b_0	-5.0 ± 0.0	-5.0 ± 0.7	-5.1 ± 9.4	-5.3 ± 4.4
	n_0	1.50 ± 0.00	1.59 ± 0.08	1.78 ± 0.32	2.01 ± 0.86
	ω_0	1.00 ± 0.00	0.98 ± 0.06	0.93 ± 0.18	0.86 ± 0.30
	$\omega_0' r$	-1.00 ± 0.00	-0.92 ± 0.08	-0.76 ± 0.23	-0.62 ± 0.38
	$\omega_0'' r^2$	2.50 ± 0.01	2.29 ± 0.20	1.95 ± 0.58	1.65 ± 0.97
Совместн.	l_0	286. ± 0.1	286. ± 1.5	286. ± 5.0	287. ± 9.1
	b_0	-5.0 ± 0.0	-4.8 ± 0.05	-4.3 ± 1.5	-3.7 ± 2.6
	n_0	1.50 ± 0.00	1.56 ± 0.06	1.69 ± 0.22	1.96 ± 0.55
	ω_0	1.00 ± 0.00	0.98 ± 0.05	0.94 ± 0.15	0.92 ± 0.25
	$\omega_0' r$	-1.00 ± 0.00	-0.94 ± 0.05	-0.80 ± 0.18	-0.66 ± 0.31
	$\omega_0'' r^2$	2.50 ± 0.01	2.36 ± 0.16	2.05 ± 0.48	1.65 ± 0.82

По результатам проведенного тестирования можно заключить, что решение методом линеаризации является состоятельным; между тем метод Р.Б. Шацовой позволяет оценить только геометрические характеристики Местной системы l_0, b_0, n_0 по одному уравнению. Кинематические параметры этим методом определить нельзя.