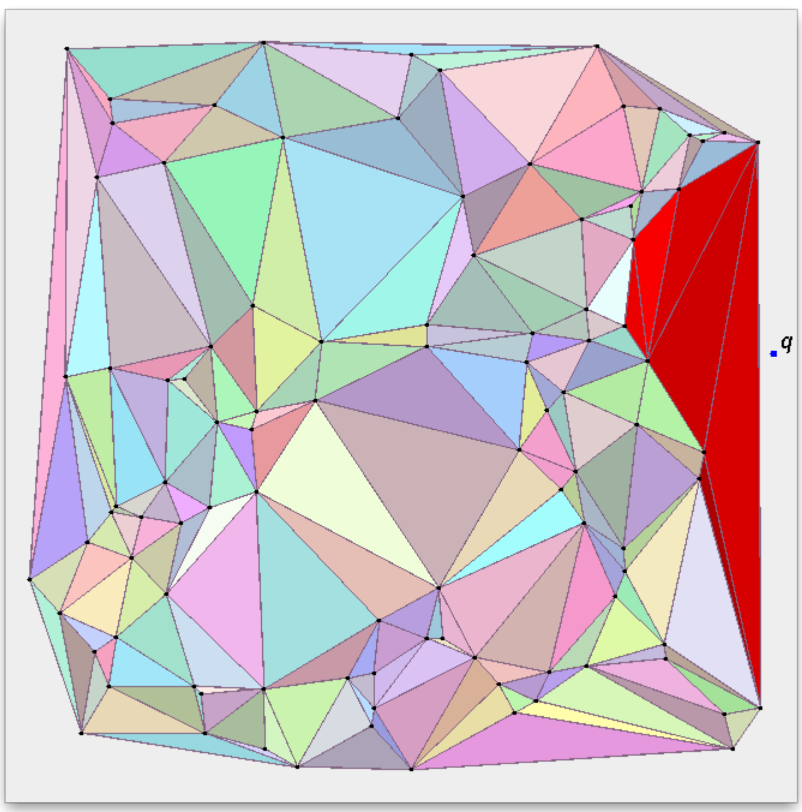
Лемма о связности графа плохих симплексов

Амосов Федор

15 февраля 2014 г.

Лемма

- Пусть дан набор d–мерных точек P, в котором любые $d+2$ точки не лежат на одной d–мерной сфере, и дана точка q вне $Conv P$.
- Рассмотрим D — симплексикацию Делоне набора точек P. Построим на симплексах из D следующий граф G. Его вершинами будут симплексы и еще одна выделенная вершина t. Между двумя различными симплексами будет ребро, если у них общая сторона, между симплексом и t будет ребро, если симплекс является граничным (хотя бы одна его сторона является стороной $Conv P$).
- Назовем симплекс из D *плохим*, если его описанный шар содержит внутри точку q. Рассмотрим подграф G' — граф G, индуцированный на плохие симплексы и на вершину t.
- Утверждение: граф G' связен.



Черные точки — точки P. Треугольники — симплексы из D. Плохие треугольники (вершины графа G') покрашены в красный цвет. Утверждается, что от любого красного треугольника можно дойти до границы по красным треугольникам.

Доказательство

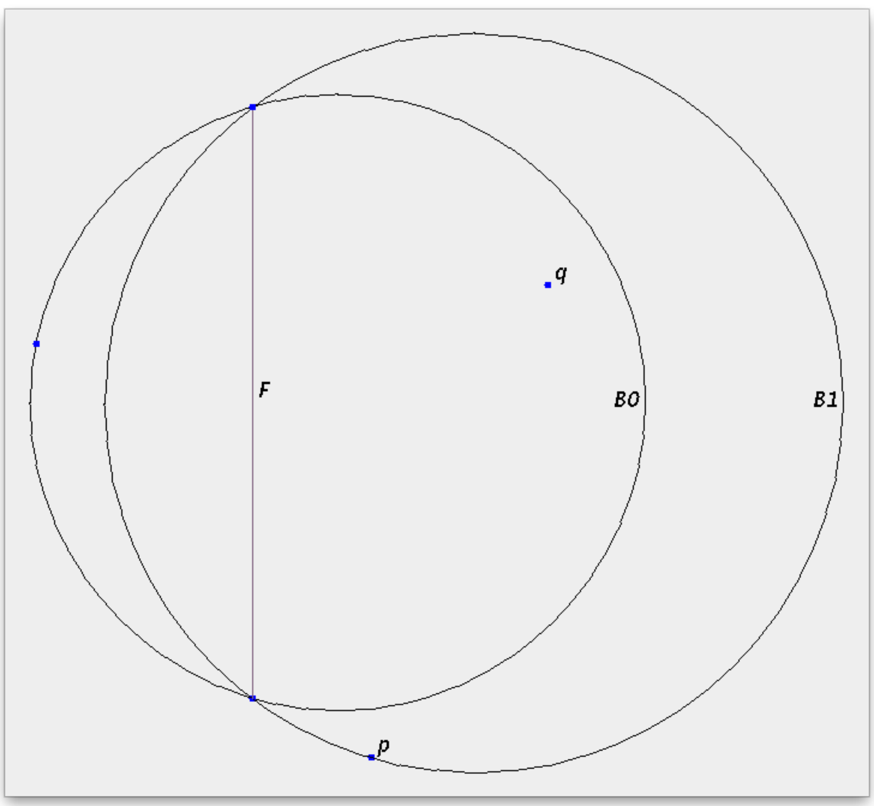
Пусть симплекс S_0 является плохим. Если мы докажем, что от S_0 можно дойти до границы по плохим симплексам, то мы докажем Лемму. Если S_0 граничный, то все ясно. Пусть S_0 не граничный симплекс.

Итак рассмотрим симплекс S_0. Обозначим за d_0 расстояние от q до S_0 ($q \notin S_0$), а за B_0 — описанный шар симплекса S_0. Симплекс S_0 плохой, значит B_0 содержит внутри точку q. Т.к. точка q лежит вне $ConvP$, то $q \notin S_0$. Симплекс S_0 делит B_0 своими гранями на $d+1$ сегмент. В одном из сегментов лежит точка q. Соответствующая грань F является стороной некоторого симплекса $S_1 \neq S_0$, т.к. S_0 не граничный. S_0 и S_1 являются соседями в графе G.

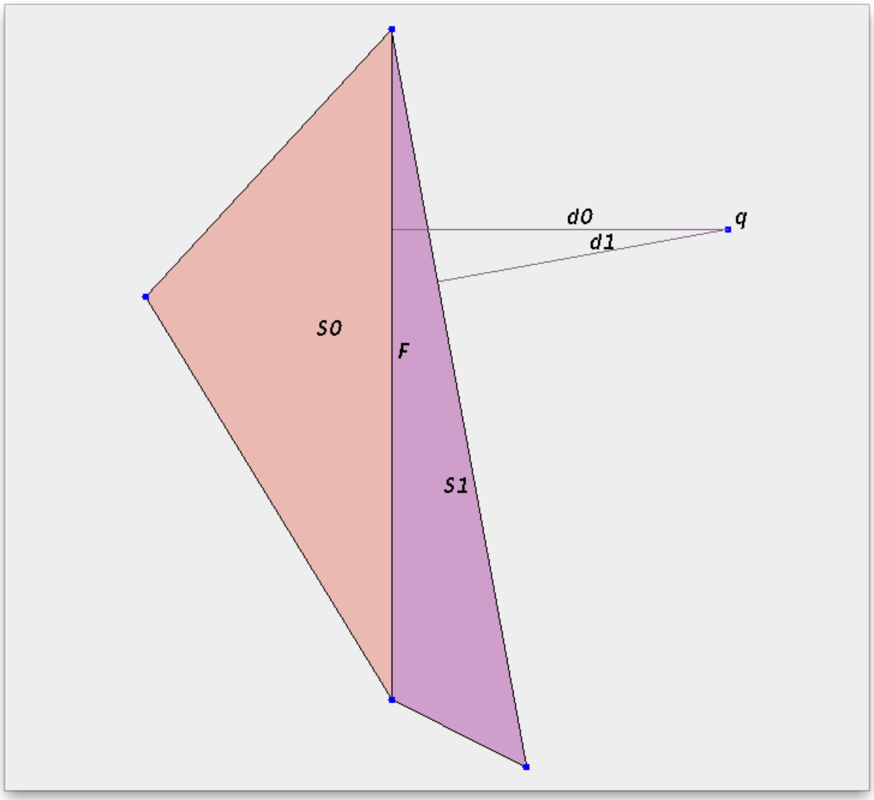
Покажем, что S_1 так же плохой симплекс, т.е. докажем что описанный шар B_1 симплекса S_1 содержит внутри q. Обозначим за p вершину S_1, не лежащую на грани F. Т.к. S_0 — часть симплексикации Делоне, то точка p лежит вне B_0.

Итого, что у нас есть,

- q внутри B_0
- p снаружи B_0
- p на границе B_1
- вершины F лежат на B_0 и B_1
- q и p в одной полуплоскости относительно F
- q внутри B_1 — ?



Будем «надувать» (сдувать) шарик B_0 из «кольца» F, чтобы получился шарик B_1. Обозначим промежуточную стадию шара за B (в начале, $B = B_0$, в конце, $B = B_1$). При надувании, в одной полуплоскости относительно F точки будут только выходить из B, а в другой — только входить в B. Тем самым, при надувании B_0 до B_1 точка q будет оставаться в B. Мы будем надувать B до тех пор, пока на его границе не окажется точка p. Тогда B будет равно B_1. Тем самым, q будет внутри и B_1.



Расстояние от точки q до симплекса S_i есть расстояние от q до грани S_i, соответствующей сегменту B_i, содержащему q. Очевидно, что расстоянию от q до S_1 будет соответствовать грань, не равная F, но грань F присутствует в S_1, поэтому расстояние от q до $S_1 := d_1 < dist(q, F) = d_0$. Тем самым, $d_0 > d_1$.

Итак, мы из S_0 перешли по ребру графа G' в плохой симплекс с меньшим расстоянием до q. Будем повторять такой переход, пока можем. Получим последовательность соседних плохих симплексов $S_0, S_1, S_2 \dots$ с расстояниями до q, $d_0 > d_1 > d_2 > \dots$ В такой цепочке симплексы не повторяются ввиду того, что их расстояния до q не повторяются. Но симплексов конечное число, значит такая цепочка не может быть бесконечной. Рассмотрим последний симплекс S_n. Мы не можем из него перейти, значит он граничный (поскольку это было единственное предположение для перехода), ч.т.д.