

Санкт-Петербургский государственный университет

АМОСОВ Федор Альбертович

Выпускная квалификационная работа

Анализ кинематики звезд каталога GAIA

Уровень образования:

Направление 03.06.01 “Физика и астрономия”

Основная образовательная программа 3007 “Астрономия”

Научный руководитель:

доцент, к.ф.-м.н.,

Цветков Александр Станиславович

Рецензент:

Заведующий лаборатории динамики галактик ГАО РАН,

д.ф.-м.н., Бобылев Вадим Вадимович

Санкт-Петербург

2019

Saint-Petersburg State University

AMOSOV Fedor Albertovich

Final qualifying work

GAIA star catalogue kinematics analysis

Education level:

Direction 03.06.01 “Physics and astronomy”
Basic educational program 3007 “Astronomy”

Academic advisor:

professor, PhD,
Tsvetkov Aleksandr Stanislavovich

Reviewer:

Head of the laboratory of galaxy dynamics GAO RAS,
PhD, Bobylev Vladimir Vladimirovich

Saint-Petersburg
2019

Содержание

Часть I. Кинематические параметры поля скоростей звезд околосолнечного пространства по данным каталога GAIA Data Release 2 with Radial Velocities	4
1.1 Введение	4
1.2 Уравнения модели Огородникова-Милна	5
1.3 Подготовка данных	6
1.4 Определение кинематических параметров по собственным движениям	7
1.5 Определение кинематических параметров по лучевым скоростям и по совместному решению	12
1.6 Определение кинематических параметров из совместного решения по собственным движениям и лучевым скоростям звезд	12
1.7 Заключение первой части	12
Часть II. Исследование кинематики звезд каталога GAIA Data Release 2 with Radial Velocities с помощью скалярных и векторных сферических функций	17
2.1 Введение	17
2.2 Определение коэффициентов разложения по наблюдательным данным	19
2.3 Анализ коэффициентов разложения	19
2.4 Возможная природа внемоделных членов в разложениях	22
2.5 Вклад трехмерной модели второго порядка в коэффициенты сферического разложения	
2.6 Заключение второй части	24

Часть I

Кинематические параметры поля скоростей звезд околосолнечного пространства по данным каталога *GAIA Data Release 2 with Radial Velocities*

1.1 Введение

Миссия GAIA находится сейчас в активной стадии проведения космического эксперимента. Финальный каталог ожидается не ранее 2021 года, но уже вышли две предварительных версии GAIA DR1 в 2016 г. и GAIA DR2 в апреле 2018 г. (GAIA, 2018). Последняя версия, основанная на 22 месяцах наблюдений, уже содержит данные о 1 331 909 727 звездах с 5-ю определенными параметрами (три пространственных координаты и два собственных движения). Точность определения параллакса оценивается примерно в 0.1 мсд (миллисекунд дуги). Фотометрические характеристики звезд даны в собственной системе G , и каталог практически полный в диапазоне от $G = 12^m$ до $G = 17^m$.

Особый подкаталог GAIA DR2 with RV, и, по-видимому, содержащий наиболее точные данные, содержит 7 224 631 записи не только о прямом восхождении, склонении и параллаксах, но и обо всех трех компонентах скорости: собственных движениях и лучевых скоростях. Это подмножество представляет особый интерес для звездно-кинематических исследований. Распределение этих звезд по расстоянию представлено на рис. 1.1, а по звездной величине G на рис. 1.2.



Рис. 1.1. Распределение звезд каталога GAIA DR2 with RV по расстоянию

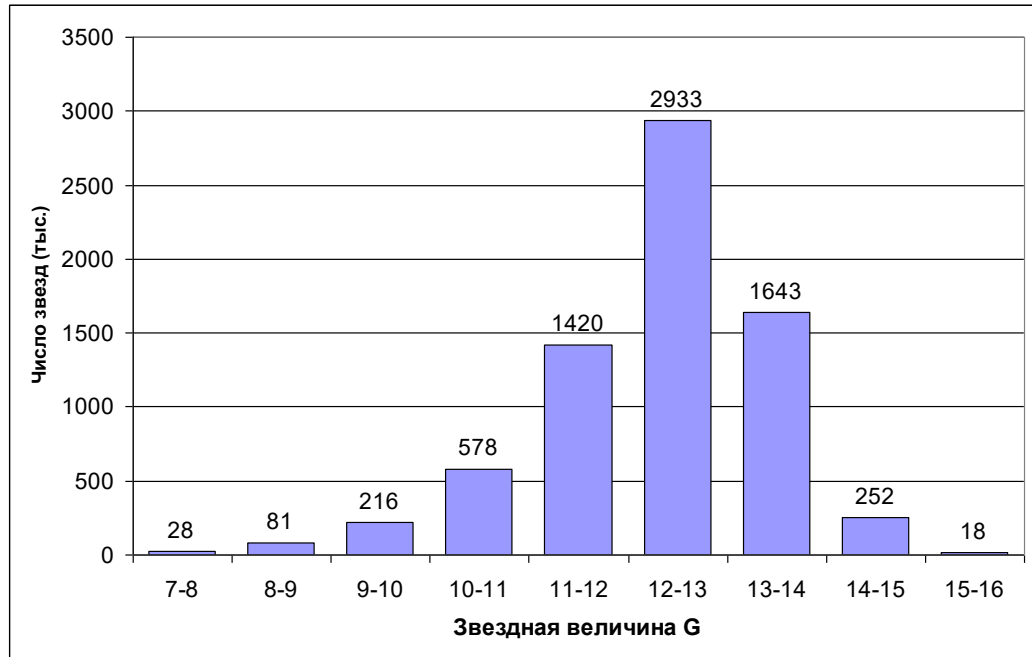


Рис. 1.2. Распределение звезд каталога GAIA DR2 with RV по звездной величине G

Данные GAIA DR2 дают обширный материал для проведения кинематического анализа собственных движений. Авторы провести планируют целую серию работ в этом направлении с использованием данных второго и последующих выпусков каталога Gaia. Данная статья – лишь первый этап этого исследования – классический кинематический анализ поля скоростей звезд в рамках широко распространенной стандартной модели собственных движений и лучевых скоростей. Последующие стадии – анализ внемоделных кинематических компонент и анализ движений звезд на значительных расстояниях, в то время как классический анализ подразумевает изучение кинематики звездного поля в некоторой ограниченной окрестности Солнца.

1.2 Уравнения модели Огородникова-Милна

В качестве первой модели мы используем широко известную модель Огородникова-Милна (Огородников, 1965), подробный вид уравнений этой модели изложен также в (Дю Монт, 1977) и (Рыбка, 2004). В этой модели поле скоростей звезд представляется линейным выражением

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{M}^+ \times \mathbf{r}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{V} – скорость звезды, \mathbf{V}_0 – влияние поступательного движения Солнца, $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость твердотельного вращения звездной системы, \mathbf{M}^+ – симметричный тензор деформации поля скоростей.

Модель содержит всего 12 параметров, однако не все они могут быть независимо определены из собственных движений, и не все параметры входят в уравнения для лучевых скоростей.

U, V, W – компоненты вектора \mathbf{V}_0 поступательного движения Солнца среди звезд;

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$;

$M_{11}^+, M_{22}^+, M_{33}^+$ – параметры тензора деформации, описывающие сжатие-растяжение вдоль

главных осей галактической системы координат;

$M_{12}^+, M_{13}^+, M_{23}^+$ – параметры тензора \mathbf{M}^+ , описывающие деформацию поля скоростей в основной и двух перпендикулярных плоскостях.

Ошибка! Источник ссылки не найден.

Спроецировав уравнение 1.1 на орты галактической системы координат имеем:

$$\begin{aligned} V_r/r = & -U/r \cos l \cos b - V/r \sin l \cos b - W/r \sin b + \\ & + M_{12}^+ \cos^2 b \sin 2l + M_{13}^+ \sin 2b \cos l + M_{23}^+ \sin 2b \sin l + \\ & + M_{11}^+ \cos^2 b \cos^2 l + M_{22}^+ \cos^2 b \sin^2 l + M_{33}^+ \sin^2 b, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} k\mu_l \cos b = & U/r \sin l - V/r \cos l - \omega_1 \sin b \cos l - \omega_2 \sin b \sin l + \omega_3 \cos b + \\ & + M_{12}^+ \cos b \cos 2l - M_{13}^+ \sin b \sin l + M_{23}^+ \sin b \cos l - \\ & - \frac{1}{2} M_{11}^+ \cos b \sin 2l + \frac{1}{2} M_{22}^+ \cos b \sin 2l, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} k\mu_b = & U/r \cos l \sin b + V/r \sin l \sin b - W/r \cos b + \omega_1 \sin l - \omega_2 \cos l + \omega_3 \cos l - \\ & - \frac{1}{2} M_{12}^+ \sin 2b \sin 2l + M_{13}^+ \cos 2b \cos l + M_{23}^+ \cos 2b \sin l - \\ & - \frac{1}{2} M_{11}^+ \sin 2b \cos^2 l - \frac{1}{2} M_{22}^+ \sin 2b \sin^2 l + \frac{1}{2} M_{33}^+ \sin 2b. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В формулах (1.3) и (1.4) имеется линейная зависимость между коэффициентами $M_{11}^+, M_{22}^+, M_{33}^+$, поэтому при анализе собственных движений обычно вводим замены $M_{11}^* = M_{11}^+ - M_{22}^+$ и $M_{33}^* = M_{33}^+ - M_{22}^+$ (Дю Монт, 1977).

Довольно часто рассматривают различные как упрощения, так и усложнения этой модели. В частности, модель плоского вращения Галактики Оорта-Линдблада. В предположении, что поле скоростей осесимметрично, для постоянных Оорта имеем $A = M_{12}^+$ и $B = \omega_3$ (Миямото и др., 1993). Более подробно вопрос смысла параметров и производных от них величин рассматривается в (Витязев и др., 2018).

Уравнения (1.2-1.4) часто используют для совместного решения по полным собственным движениям какого-либо каталога, при этом если не известно расстояние до звезд, то вместо величин U, V, W определяют $U/\langle r \rangle, V/\langle r \rangle, W/\langle r \rangle$, где $\langle r \rangle$ – среднее расстояние выборки звезд, для которой производят решение.

В случае каталога GAIA DR2 with RV мы имеем уникальную возможность для 7 млн. звезд провести решение с использованием индивидуальных расстояний и для всех трех компонент скорости звезды, а именно провести отдельные и совместное решения по собственным движениям и лучевым скоростям. При совместном решении появляется возможность определить все 12 компонент кинематического поля.

1.3 Подготовка данных

Традиционно для определения параметров кинематических уравнений используют не все звезды каталога, а выборки из него, сделанные по какому-либо принципу, с целью обнаружить зависимость параметров от значения этого признака. В нашем случае таким признаком будет расстояние до звезд. Для обеспечения равномоности всех выборок мы зададимся одинаковым числом звезд в выборке. После некоторых экспериментов это число было выбрано равным 400 000. В таблице 1.1 показано, какие диапазоны расстояний будут соответствовать этим выборкам.

Таблица 1.1. Границы выборок 400 000 групп звезд в пк.

min	3	208	300	386	474	571	687	835	1040	1303	1594	1897	2220	2582	3031
max	208	300	386	474	571	687	835	1040	1303	1594	1897	2220	2582	3031	3677

Таким образом, в 15 выборках сосредоточено ровно 6 млн. звезд, что составляет большую часть каталога.

Если близкие выборки имеют распределение звезд по небесной сфере достаточно равномерное, то далекие показывают, как это и ожидалось, значительную концентрацию звезд в галактическому экватору.

К сожалению, на настоящий момент фотометрия звезд каталога еще недостаточна, поэтому выборку по звездам разных спектральных классов или по разным показателям цвета пока не возможен.

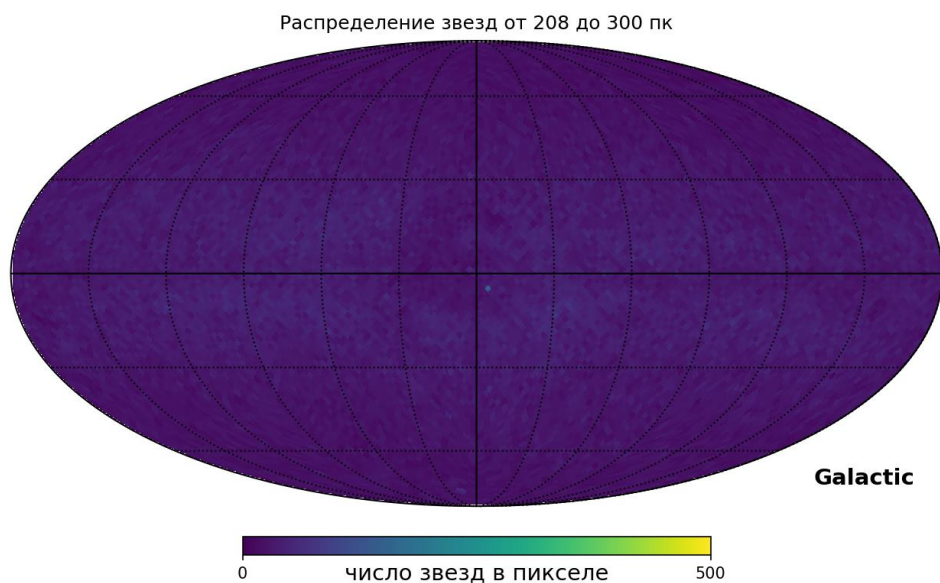


Рис. 1.3. Распределение по небесной сфере близких звезд (208–300 пк)

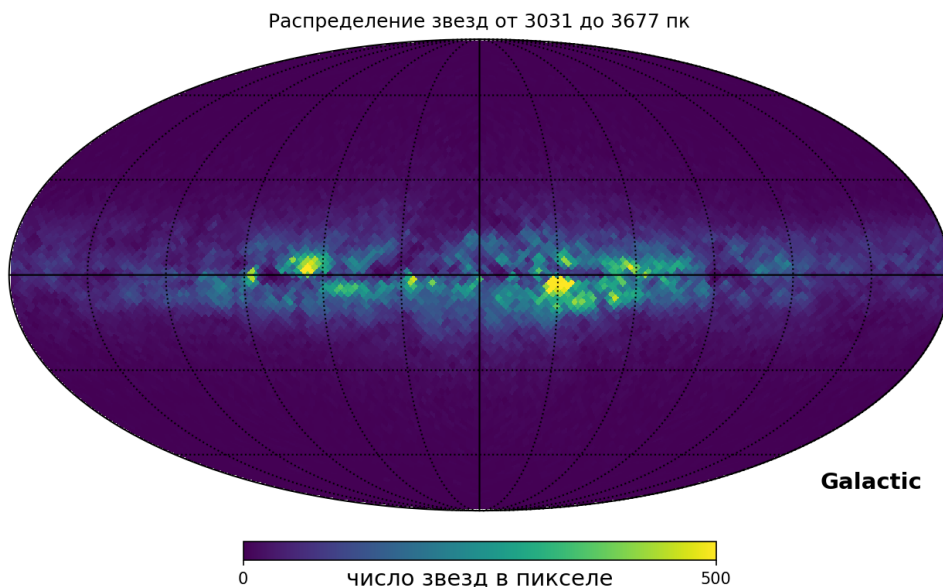


Рис. 1.4. Распределение по небесной сфере далеких звезд (3031–3677 пк)

1.4 Определение кинематических параметров по собственным движениям

Мы провели совместное решение уравнений (1.2-1.3) для каждой из выборок методом наименьших квадратов (Statmodels Python). Результаты этого решения приведены в табл. 1.2 и 1.3. Решение проводилось по 400 000 звезд каждой выборки без какого-либо усреднения. Для удобного анализа зависимость параметров от расстояния представлена на рис. 1.5–1.7.

Следует сказать, что результаты находятся в хорошем согласии с как данными других исследователей, например (Бобылев и др., 2006), (Бобылев В.В., Байкова А.Т., 2018), так и с данными, полученными по другим каталогам (Витязев и Цветков, 2009), (Витязев и др., 2017). Параметры Оорта B (ω_3) и A (M_{12}) имеют традиционные значения – около -13 и $+15$ км/с·Кпк⁻¹. Также обычные значения имеют и остальные параметры, в частности и солнечные члены. Для близких звезд значимыми оказываются компоненты угловой скорости ω_1 и, особенно, ω_2 , показывая, что вектор твердотельного вращения близких звезд ($r < 200$ пк) не перпендикулярен плоскости Галактики. Этот факт довольно хорошо известен и по данным Hipparcos (Tsvetkov A., 2006) и может быть объяснен кинематикой Местной системы звезд (Tsvetkov, 1995).

Основной вопрос для линейной модели Огородникова-Милна (и Оорта-Линдблада) – это граница применимости. При выводе этих уравнений отмечалось, что линейное приближение разложения угловой скорости вращения Галактики по-видимому должно ограничиваться расстояниями 1.5–2 Кпк (Куликовский, 1985), (Binney, Merrifield, 1998). Однако наши результаты показывают, что параметры угловой скорости и коэффициент M_{12} имеют устойчивые значения и для звезд больших расстояний. К этому же выводу приходят и другие исследователи на основе анализа кинематики рассеянных звездных скоплений в каталоге RPMXL (Локтин А.В., Попова М.Э.).

Однако, существует один параметр – компонента Солнечной скорости V , положительное направление которой соответствует направлению вращения Галактики (вдоль оси Y галактической системы), которой начинает меняться, начиная с расстояния 800 пк. Это обстоятельство хорошо иллюстрируется рис. 1.5.

Таблица 1.2. Значения компонент скорости движения Солнца в км/с и угловой скорости твердотельного вращения в км/с/Кпк, полученные для звезд различных расстояний каталога GAIA DR2 with RV по собственным движениям. Мощность каждой выборки – 400 000 звезд.

R	U	V	W	ω_1	ω_2	ω_3
3 – 208	10.1 ± 0.1	21.8 ± 0.1	7.9 ± 0.1	0.4 ± 0.6	-5.1 ± 0.6	-12.9 ± 0.6
208 – 300	9.7 ± 0.1	22.1 ± 0.1	7.7 ± 0.1	1.4 ± 0.2	-2.4 ± 0.2	-12.5 ± 0.2
300 – 386	10.1 ± 0.1	22.6 ± 0.1	7.8 ± 0.1	0.6 ± 0.2	-1.2 ± 0.2	-12.3 ± 0.2
386 – 474	10.1 ± 0.1	22.6 ± 0.1	7.8 ± 0.1	0.7 ± 0.1	-1.0 ± 0.1	-12.8 ± 0.1
474 – 571	10.3 ± 0.1	22.7 ± 0.1	7.8 ± 0.1	0.5 ± 0.1	-1.0 ± 0.1	-13.0 ± 0.1
571 – 687	10.4 ± 0.1	22.6 ± 0.1	7.8 ± 0.1	0.3 ± 0.1	-1.1 ± 0.1	-13.0 ± 0.1
687 – 835	10.7 ± 0.1	23.5 ± 0.1	7.8 ± 0.1	0.1 ± 0.1	-0.7 ± 0.1	-12.9 ± 0.1
835 – 1040	11.1 ± 0.1	25.8 ± 0.1	8.0 ± 0.1	0.2 ± 0.1	-0.5 ± 0.1	-12.6 ± 0.1
1040 – 1303	11.4 ± 0.1	29.2 ± 0.1	8.1 ± 0.1	0.4 ± 0.1	-0.2 ± 0.1	-12.6 ± 0.0
1303 – 1594	11.7 ± 0.1	31.9 ± 0.1	8.2 ± 0.1	0.7 ± 0.1	0.0 ± 0.1	-12.9 ± 0.0
1594 – 1897	12.0 ± 0.1	34.4 ± 0.1	8.2 ± 0.1	0.7 ± 0.1	0.3 ± 0.1	-13.2 ± 0.0
1897 – 2220	12.2 ± 0.1	37.1 ± 0.1	8.3 ± 0.1	0.9 ± 0.1	0.2 ± 0.1	-13.6 ± 0.0
2220 – 2582	12.2 ± 0.1	40.7 ± 0.1	8.3 ± 0.1	0.9 ± 0.1	0.1 ± 0.1	-13.9 ± 0.0
2582 – 3031	12.6 ± 0.1	46.2 ± 0.1	8.4 ± 0.1	0.9 ± 0.1	0.1 ± 0.1	-14.2 ± 0.0
3031 – 3677	13.0 ± 0.1	54.2 ± 0.1	8.6 ± 0.1	0.7 ± 0.1	0.3 ± 0.1	-14.6 ± 0.0

Таблица 1.3. Значения компонент тензора деформации в км/с/Кпк, полученные для звезд различных расстояний каталога *GAIA DR2 with RV* по собственным движениям. Мощность каждой выборки – 400 000 звезд.

r	M_{12}	M_{13}	M_{23}	C	K
3 – 208	16.8 ± 0.7	-3.1 ± 0.7	0.1 ± 0.7	-1.7 ± 0.7	2.0 ± 1.3
208 – 300	16.2 ± 0.3	-1.4 ± 0.3	-1.0 ± 0.3	-2.7 ± 0.3	-2.0 ± 0.5
300 – 386	15.4 ± 0.2	-0.4 ± 0.2	0.3 ± 0.2	-3.2 ± 0.2	-1.9 ± 0.4
386 – 474	15.2 ± 0.2	-1.1 ± 0.2	0.3 ± 0.2	-3.3 ± 0.2	-2.6 ± 0.3
474 – 571	15.2 ± 0.1	-1.1 ± 0.2	0.1 ± 0.1	-3.5 ± 0.1	-2.7 ± 0.3
571 – 687	15.6 ± 0.1	-1.3 ± 0.1	0.5 ± 0.1	-3.5 ± 0.1	-2.5 ± 0.2
687 – 835	15.6 ± 0.1	-0.6 ± 0.1	0.9 ± 0.1	-2.8 ± 0.1	-2.3 ± 0.2
835 – 1040	15.3 ± 0.1	-0.6 ± 0.1	0.7 ± 0.1	-2.0 ± 0.1	-2.0 ± 0.2
1040 – 1303	14.9 ± 0.1	-0.4 ± 0.1	0.2 ± 0.1	-1.6 ± 0.1	-1.7 ± 0.2
1303 – 1594	14.5 ± 0.1	-0.3 ± 0.1	-0.1 ± 0.1	-1.3 ± 0.1	-1.6 ± 0.2
1594 – 1897	14.4 ± 0.0	0.0 ± 0.1	-0.2 ± 0.1	-1.1 ± 0.0	-1.1 ± 0.1
1897 – 2220	13.9 ± 0.0	-0.1 ± 0.1	-0.5 ± 0.1	-1.2 ± 0.0	-1.4 ± 0.1
2220 – 2582	13.6 ± 0.0	-0.3 ± 0.1	-0.4 ± 0.1	-1.1 ± 0.0	-1.2 ± 0.1
2582 – 3031	13.0 ± 0.0	-0.4 ± 0.1	-0.5 ± 0.1	-1.0 ± 0.0	-1.1 ± 0.1
3031 – 3677	12.3 ± 0.0	-0.2 ± 0.1	-0.3 ± 0.1	-0.7 ± 0.0	-1.1 ± 0.1

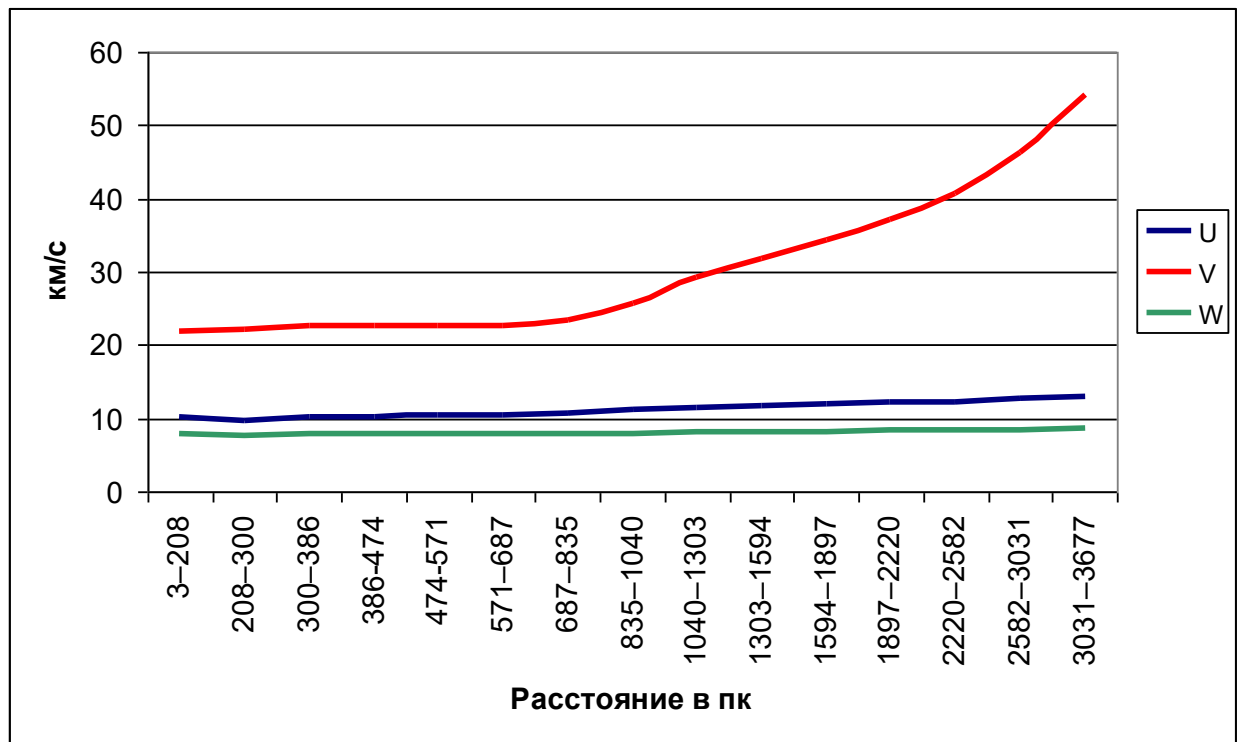


Рис. 1.5. Зависимость компонент солнечного движения U , V , W от расстояния

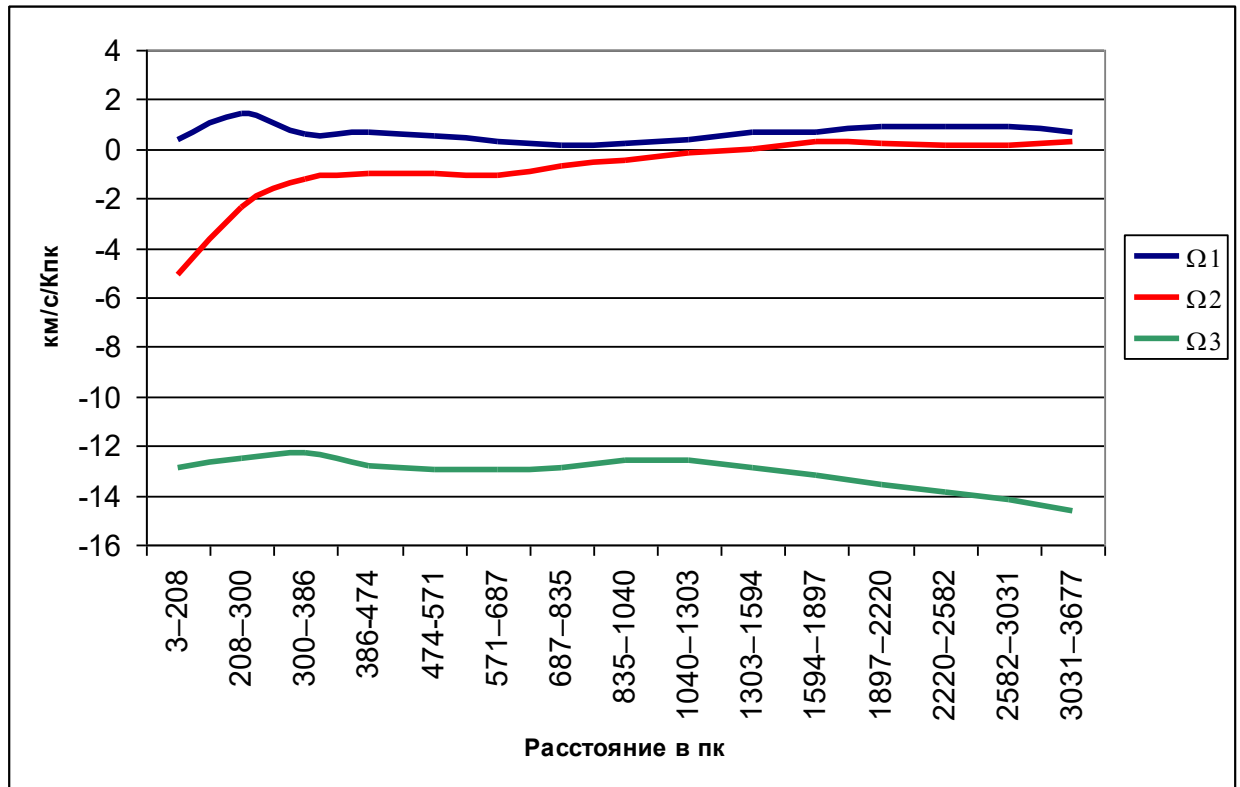


Рис. 1.6. Зависимость компонент угловой скорости, ω_1 , ω_2 , ω_3 от расстояния

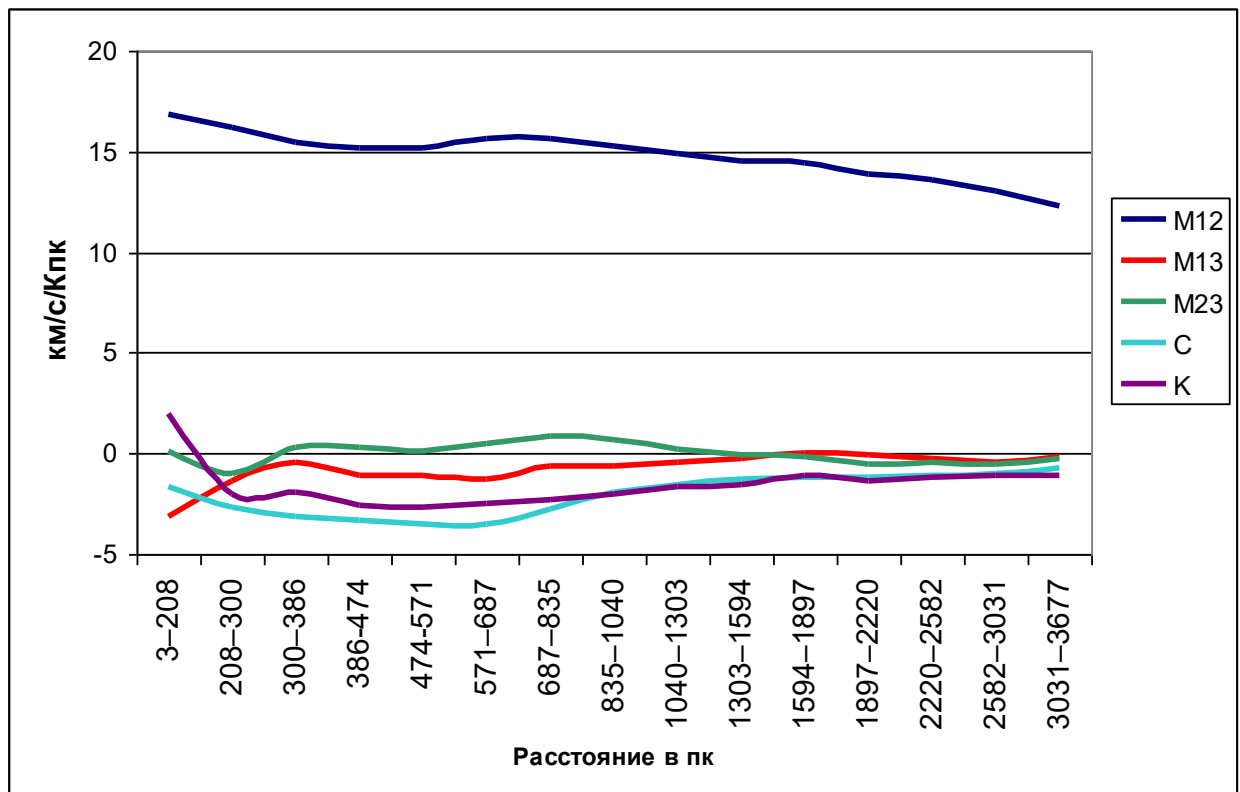


Рис. 1.7. Зависимость компонент тензора деформации M_{12} , M_{13} , M_{23} , C , K от расстояния

Видимо, для каталогов, содержащих звезды таких значительных расстояний, следует использовать модели, учитывающие нелинейные члены в разложении поля скоростей. Для построения поля скоростей звезд околосолнечной окрестности. Автор пробовал реализовать такие подходы еще на материале каталога Hipparcos (Tsvetkov A., 2001). Более простой подход, который бы позволил оценить корректность применения линейной модели на больших

расстояниях может заключаться в том, чтобы рассматривать собственные движения звезд в узкой площадке в направлении на центр Галактики, например радиусом в 1° на различных расстояниях, а также в противоположной точке. Это приведет к выделению в пространстве конуса (рис. 1.8), содержащего около 377 тыс. звезд. Мы разделили расстояние от 5 Кпк (в сторону антицентра Галактики) до 8 Кпк (в сторону центра Галактики) на 500 зон и для каждой зоны построили распределение собственных движений $\mu_l \cos b$ и вычислили медиану этого распределения. Также была вычислена линейная скорость звезды в плоскости Галактики на основе этих данных. Получившиеся результаты представлены на рис. 9, анализ которого показывает стабильность угловой скорости и линейный рост скорости звезды относительно солнца с увеличением расстояния на расстояниях до 6 Кпк в направлении на центр Галактики и 4 Кпк в направлении на антицентр Галактики. Это означает, применимость линейной модели вращения Галактики охватывает диапазон расстояний по крайней мере в 10 Кпк!

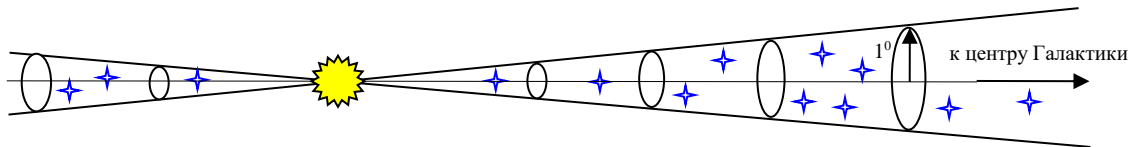


Рис. 1.8. Выборка звезд для определения зависимости угловой и линейной скорости от расстояния

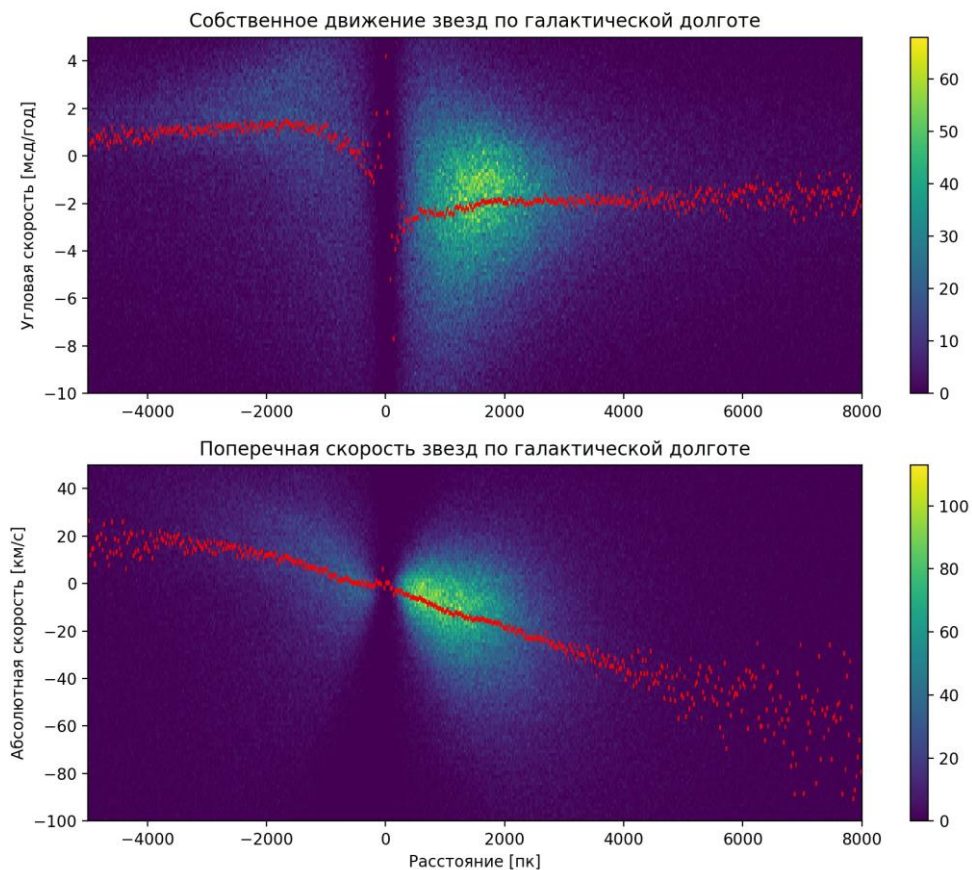


Рис. 1.9. Зависимость собственных движений звезд $\mu_l \cos b$ в узкой зоне (см. рис. 1.8) и линейной скорости, вычисленной на их основе от линейного расстояния от Солнца (направление на центр Галактики – справа). Красными точками обозначена медиана скорости на данном расстоянии.

1.5 Определение кинематических параметров по лучевым скоростям и по совместному решению

Каталог GAIA DR2 with RV позволяет оценить кинематические параметры тензора деформации по лучевым скоростям звезд, которые получаются независимым от определения собственных движений способом. Средняя ошибка определения лучевой скорости составляет около 1 км/с, а $\frac{3}{4}$ звезд каталога GAIA DR2 with RV имеют ошибку менее 2 км/с. Среднее же значение полной ошибки собственного движения составляет 0.1 мсд. Что дает ошибку в определении тангенциальной скорости в 1 км/с на расстоянии порядка 2 Кпк. Таким образом, на исследуемом нами подмножестве звезд собственные движения и лучевые скорости оказываются примерно равноточными в случайном отношении.

Если в эпоху наземных каталогов одноименные кинематические параметры, определенные из собственных движений и лучевых скоростей показывали заметные различия, то в случае каталога GAIA DR2 with RV параметры, полученные по одним и тем же выборкам, оказываются очень близкими к друг другу (Табл. 1.4 и 1.5). Это обстоятельство является свидетельством того, что систематические ошибки каталога GAIA чрезвычайно малы. Поведение параметров в зависимости от выборки звезд оказывается идентичным, что хорошо иллюстрируется рис. 1.10 и 1.11.

1.6 Определение кинематических параметров из совместного решения по собственным движениям и лучевым скоростям звезд

Согласованное значение параметров делает правомочным совместное решение уравнений (1.2–1.4) на материале как собственных движений, так и лучевых скоростей звезд. В этом решении возможно получить все 12 звездно-кинематических параметров. Результаты представлены в таблицах 1.6 и 1.7. Мы видим крайне высокую точность результатов в случайном отношении. По-видимому, на сегодняшний день – это самые точные оценки параметров модели Огородникова-Милна.

Анализ решения еще раз показывает наличие аномалии в кинематике близких звезд. Прежде всего это связано с отличием от нуля компонент угловой скорости ω_1 и ω_2 , а также параметра, описывающего расширение звездного поля в направлении оси $Y - M_{22}$.

Интересен факт значимого параметра M_{11} для всех выборок. Его значение указывает на сжатие системы звезд вдоль оси X (направление на центр Галактики).

Для звезд, находящихся далее 1.5 Кпк стремительно нарастает параметр движения Солнца V – т.е. движение в плоскости Галактики в направлении ее вращения. Пока это единственное указание на то, что на больших расстояниях линейная модель выходит за рамки своей применимости.

1.7 Заключение первой части

Проведенное исследование показало, что стандартная звездно-кинематическая модель Огородникова-Милна имеет достаточно большую пространственную область применимости. Авторы намеренно применили ее к более далеким звездам, чем это обычно принято и обнаружили, что и для звезд, находящихся на расстояниях до 3 Кпк модель работает удовлетворительно, за исключением определения параметра V (движение Солнца вдоль оси Y) Параметры модели, определенные по собственным движениям и по лучевым скоростям 6 млн. звезд каталога GAIA DR2 with RV, хорошо согласованы, что и позволило провести совместное решение, в котором определяются все параметры модели. Отдельного внимания заслуживает кинематика самых близких (ближе 200 пк) звезд, т.к. параметры этой выборки отличаются от стандартных. Несмотря на общую стабильность параметров модели в зависимости от расстояний до звезд, для расстояний более 1.5–2 Кпк следует подумать о разработке нового

кинематического подхода, который бы описывал поведение всей Галактики в целом, так как все-таки для далеких звезд значение параметров движения Солнца начинает сильно меняться.

Особого внимания заслуживает компонента твердотельного вращения ω_1 , которая уверенно значимая и принимает значение $0.6\text{--}1.0 \text{ км/с} \cdot \text{Кпк}^{-1}$ начиная с расстояния более 1 Кпк. Т.е. это не локальный эффект (какой имеет место, например, у близких звезд для ω_2), а указание на вращение всей системы звезд вокруг оси X , направленную на центр Галактики.

Кроме того, в собственных движениях и лучевых скоростях далеких звезд могут содержаться кинематические компоненты, не описываемые простой линейной моделью. Их поиску будет посвящена следующая статья.

Таблица 1.4. Значения компонент скорости движения Солнца в км/с, полученные по лучевым скоростям звезд каталога GAIA DR2 with RV. Мощность каждой выборки – 400 000 звезд.

R	U	V	W
3 – 208	10.1 ± 0.1	21.4 ± 0.1	7.9 ± 0.1
208 – 300	10 ± 0.1	21.4 ± 0.1	8 ± 0.1
300 – 386	10.2 ± 0.1	21.2 ± 0.1	7.8 ± 0.1
386 – 474	10.2 ± 0.1	21 ± 0.1	8.2 ± 0.1
474 – 571	10.2 ± 0.1	20.9 ± 0.1	8.5 ± 0.1
571 – 687	10.2 ± 0.1	20.5 ± 0.1	8.1 ± 0.1
687 – 835	10.1 ± 0.1	20.5 ± 0.1	7.8 ± 0.1
835 – 1040	10.5 ± 0.1	21.6 ± 0.1	7.9 ± 0.1
1040 – 1303	10.8 ± 0.1	24 ± 0.1	7.9 ± 0.2
1303 – 1594	11.4 ± 0.1	25.9 ± 0.1	7.7 ± 0.2
1594 – 1897	12 ± 0.1	27.4 ± 0.1	7.5 ± 0.2
1897 – 2220	12.4 ± 0.1	29.1 ± 0.1	7.5 ± 0.2
2220 – 2582	12.4 ± 0.1	30.8 ± 0.1	7.2 ± 0.3
2582 – 3031	12.9 ± 0.1	32.5 ± 0.1	6.8 ± 0.3
3031 – 3677	12.9 ± 0.1	35.2 ± 0.1	6.6 ± 0.3

Таблица 1.5. Значения компонент тензора деформации в км/с/Кпк, полученные по лучевым скоростям звезд каталога GAIA DR2 with RV. Мощность каждой выборки – 400 000 звезд.

R	M ₁₂	M ₁₃	M ₂₃	M ₁₁	M ₂₂	M ₃₃
3 – 208	17.7 ± 0.6	-5.5 ± 0.6	-2.2 ± 0.6	-1.9 ± 0.7	3.8 ± 0.7	1.6 ± 0.8
208 – 300	17.2 ± 0.3	-4.0 ± 0.4	-0.1 ± 0.4	-5.0 ± 0.4	3.0 ± 0.4	0.1 ± 0.5
300 – 386	16.4 ± 0.2	-2.2 ± 0.3	0.0 ± 0.3	-4.5 ± 0.3	2.5 ± 0.3	-0.3 ± 0.4
386 – 474	15.9 ± 0.2	-1.6 ± 0.2	-0.2 ± 0.2	-5.2 ± 0.2	2.0 ± 0.2	-0.6 ± 0.3
474 – 571	16.1 ± 0.2	-1.5 ± 0.2	0.1 ± 0.2	-6 ± 0.2	1.7 ± 0.2	-0.2 ± 0.3
571 – 687	15.6 ± 0.1	-1.5 ± 0.2	0.2 ± 0.2	-5.2 ± 0.2	1.3 ± 0.1	0.3 ± 0.3
687 – 835	15.1 ± 0.1	-1.8 ± 0.2	0.2 ± 0.1	-5.0 ± 0.1	0.8 ± 0.1	0.4 ± 0.3
835 – 1040	14.7 ± 0.1	-1.5 ± 0.1	0.2 ± 0.1	-4.5 ± 0.1	0.5 ± 0.1	0.2 ± 0.2
1040 – 1303	14.3 ± 0.1	-1.1 ± 0.1	0.3 ± 0.1	-3.5 ± 0.1	0 ± 0.1	-0.3 ± 0.2
1303 – 1594	13.9 ± 0.1	-0.9 ± 0.1	-0.2 ± 0.1	-2.8 ± 0.1	-0.2 ± 0.1	0.2 ± 0.2
1594 – 1897	13.6 ± 0.1	-0.7 ± 0.1	-0.1 ± 0.1	-2.0 ± 0.1	-0.4 ± 0.1	1.0 ± 0.2
1897 – 2220	13.3 ± 0.0	-0.7 ± 0.1	-0.2 ± 0.1	-1.4 ± 0.1	-0.5 ± 0.1	0.6 ± 0.2
2220 – 2582	13.0 ± 0.0	-0.6 ± 0.1	-0.5 ± 0.1	-0.9 ± 0.1	-0.4 ± 0.0	1.0 ± 0.2
2582 – 3031	12.6 ± 0.0	-0.6 ± 0.1	-0.8 ± 0.1	-0.4 ± 0.0	-0.5 ± 0.0	1.1 ± 0.2
3031 – 3677	12.0 ± 0.0	-0.4 ± 0.1	-0.8 ± 0.1	-0.2 ± 0.0	-0.3 ± 0.0	0.9 ± 0.2

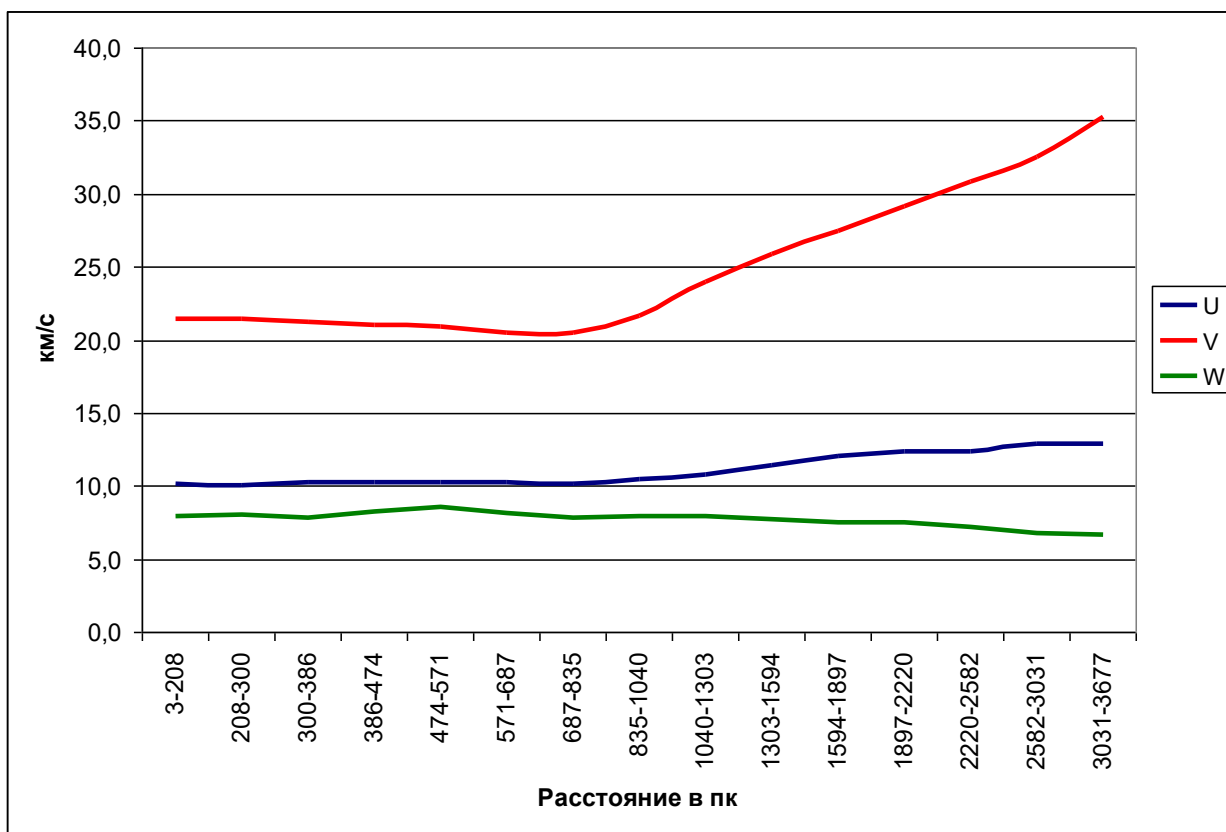


Рис. 1.10. Зависимость компонент солнечного движения U , V , W , определенных по лучевым скоростям, от расстояния

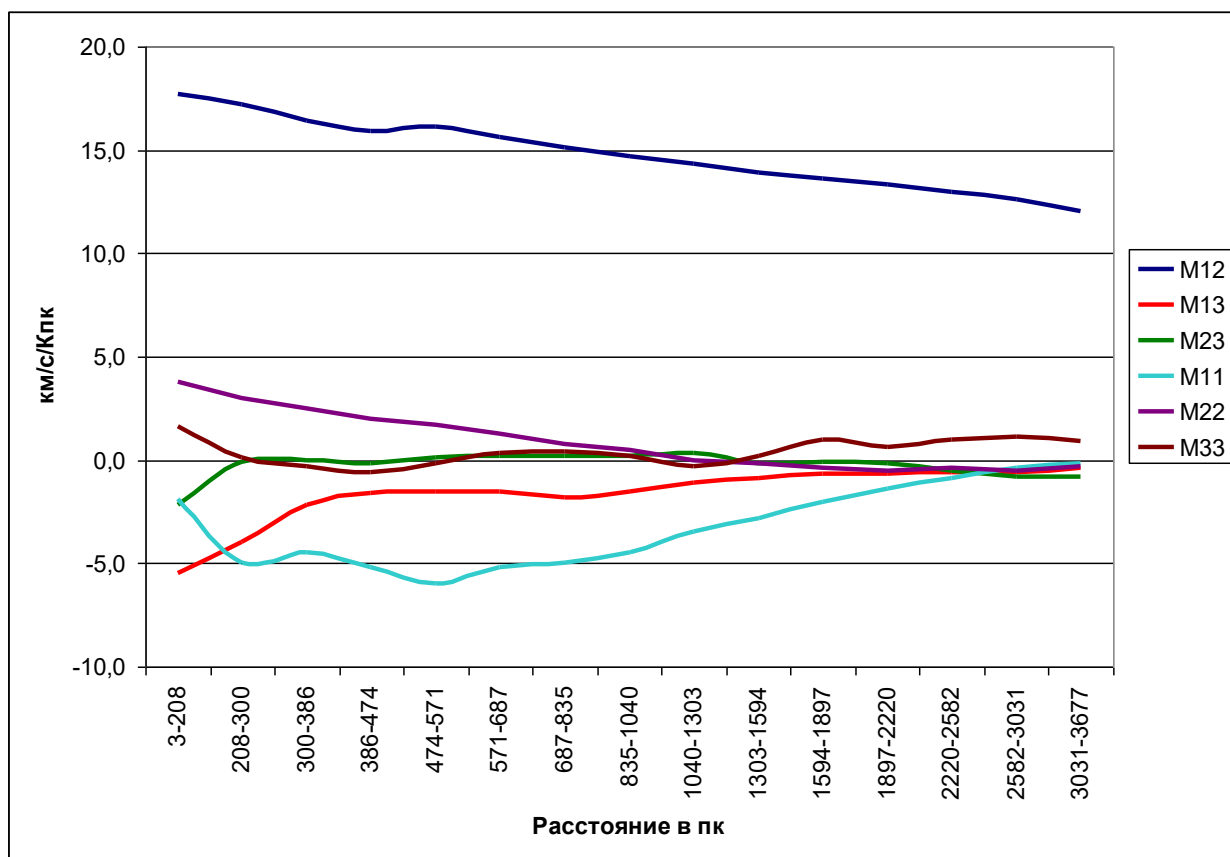


Рис. 1.11. Зависимость компонент тензора деформации, определенных по лучевым скоростям, от расстояния

Таблица 1.6. Значения компонент скорости движения Солнца в км/с и угловой скорости твердотельного вращения в км/с/Кпк, полученные из совместного решения по всем трем компонентам.

R	U	V	W	ω_1	ω_2	ω_3
3 – 208	10.1 ± 0.0	21.8 ± 0.0	7.9 ± 0.0	0.4 ± 0.5	-5.1 ± 0.5	-12.9 ± 0.5
208 – 300	9.7 ± 0.0	22.1 ± 0.0	7.7 ± 0.0	1.4 ± 0.2	-2.4 ± 0.2	-12.5 ± 0.2
300 – 386	10.1 ± 0.0	22.5 ± 0.0	7.8 ± 0.0	0.6 ± 0.1	-1.2 ± 0.1	-12.3 ± 0.1
386 – 474	10.1 ± 0.0	22.4 ± 0.0	7.8 ± 0.0	0.7 ± 0.1	-1.1 ± 0.1	-12.8 ± 0.1
474 – 571	10.3 ± 0.0	22.4 ± 0.0	7.8 ± 0.0	0.5 ± 0.1	-1.1 ± 0.1	-13.1 ± 0.1
571 – 687	10.3 ± 0.0	22.1 ± 0.0	7.8 ± 0.0	0.3 ± 0.1	-1.2 ± 0.1	-13.1 ± 0.1
687 – 835	10.6 ± 0.0	22.6 ± 0.0	7.8 ± 0.0	0.1 ± 0.1	-0.8 ± 0.1	-13.0 ± 0.1
835 – 1040	10.9 ± 0.0	24.0 ± 0.0	8.0 ± 0.0	0.2 ± 0.1	-0.7 ± 0.1	-12.9 ± 0.1
1040 – 1303	11.1 ± 0.1	26.4 ± 0.1	8.0 ± 0.1	0.4 ± 0.1	-0.4 ± 0.1	-13.1 ± 0.1
1303 – 1594	11.5 ± 0.1	28.0 ± 0.1	8.1 ± 0.1	0.7 ± 0.1	-0.2 ± 0.1	-13.6 ± 0.0
1594 – 1897	12.0 ± 0.1	29.3 ± 0.1	8.0 ± 0.1	0.6 ± 0.1	0.1 ± 0.1	-14.0 ± 0.0
1897 – 2220	12.4 ± 0.1	30.6 ± 0.1	8.1 ± 0.1	0.7 ± 0.1	0.0 ± 0.1	-14.5 ± 0.0
2220 – 2582	12.5 ± 0.1	32.3 ± 0.1	8.0 ± 0.1	0.9 ± 0.1	0.1 ± 0.1	-15.0 ± 0.0
2582 – 3031	12.9 ± 0.1	34.0 ± 0.1	7.9 ± 0.1	1.0 ± 0.1	0.2 ± 0.1	-15.6 ± 0.0
3031 – 3677	13.1 ± 0.1	36.7 ± 0.1	7.8 ± 0.1	1.0 ± 0.1	0.3 ± 0.1	-16.2 ± 0.0

Таблица 1.7. Значения компонент тензора деформации в км/с/Кпк, полученные из совместного решения по всем трем компонентам.

R	M ₁₂	M ₁₃	M ₂₃	M ₁₁	M ₂₂	M ₃₃
3 – 208	16.8 ± 0.6	-3.1 ± 0.6	0.1 ± 0.6	0.0 ± 2.6	3.4 ± 2.6	-0.3 ± 2.6
208 – 300	16.2 ± 0.2	-1.5 ± 0.2	-0.9 ± 0.2	-3.9 ± 0.6	1.5 ± 0.6	0.7 ± 0.7
300 – 386	15.5 ± 0.2	-0.5 ± 0.2	0.3 ± 0.2	-4.5 ± 0.4	1.9 ± 0.4	0.6 ± 0.4
386 – 474	15.3 ± 0.1	-1.1 ± 0.1	0.2 ± 0.1	-5.3 ± 0.3	1.4 ± 0.3	0.5 ± 0.3
474 – 571	15.4 ± 0.1	-1.2 ± 0.1	0.1 ± 0.1	-5.8 ± 0.2	1.4 ± 0.2	0.4 ± 0.2
571 – 687	15.6 ± 0.1	-1.3 ± 0.1	0.5 ± 0.1	-5.4 ± 0.1	1.5 ± 0.1	0.5 ± 0.2
687 – 835	15.4 ± 0.1	-1.0 ± 0.1	0.7 ± 0.1	-5.0 ± 0.1	0.9 ± 0.1	0.3 ± 0.2
835 – 1040	15.0 ± 0.1	-0.9 ± 0.1	0.5 ± 0.1	-4.2 ± 0.1	0.4 ± 0.1	0.1 ± 0.1
1040 – 1303	14.6 ± 0.0	-0.7 ± 0.1	0.2 ± 0.1	-3.5 ± 0.1	0.0 ± 0.1	-0.1 ± 0.1
1303 – 1594	14.2 ± 0.0	-0.6 ± 0.1	-0.2 ± 0.1	-2.8 ± 0.1	-0.1 ± 0.1	0.2 ± 0.1
1594 – 1897	13.8 ± 0.0	-0.4 ± 0.1	-0.1 ± 0.1	-2.1 ± 0.0	-0.2 ± 0.0	0.5 ± 0.1
1897 – 2220	13.4 ± 0.0	-0.5 ± 0.1	-0.3 ± 0.1	-1.6 ± 0.0	-0.3 ± 0.0	0.6 ± 0.1
2220 – 2582	13.1 ± 0.0	-0.5 ± 0.1	-0.5 ± 0.1	-1.1 ± 0.0	-0.3 ± 0.0	0.9 ± 0.1
2582 – 3031	12.7 ± 0.0	-0.5 ± 0.0	-0.7 ± 0.0	-0.6 ± 0.0	-0.3 ± 0.0	1.0 ± 0.1
3031 – 3677	12.0 ± 0.0	-0.3 ± 0.0	-0.7 ± 0.0	-0.3 ± 0.0	-0.2 ± 0.0	0.9 ± 0.1

Часть II

Исследование кинематики звезд каталога GAIA Data Release 2 with Radial Velocities с помощью скалярных и векторных сферических функций

2.1 Введение

В работе (Цветков, Амосов, 2019) был проведен кинематический анализ собственных движений и лучевых скоростей 6 млн. звезд каталога GAIA DR2 with RV. Были определены параметры линейной трехмерной модели Огородникова-Милна (Огородников, 1965) из отдельных и совместных решений. Однако, традиционный подход, заключающийся в решении методом наименьших квадратов условных уравнений, имеет известные недостатки, так как не позволяет выявить систематические компоненты в наблюдательном материале, которые изначально не включены в модельные уравнения. Использование аппарата векторных (при анализе собственных движений) и скалярных (при анализе лучевых скоростей) сферических функций позволяет не только обнаружить неучтенные систематические эффекты, но и проверить адекватность модели наблюдениям. Впервые эта техника, по-видимому, была описана в (Витязев, Цветков, 1989) и применена в (Витязев, Цветков, 1990) еще на материале каталогов FK4 и более ранних.

Полный вид и алгоритм вычисления векторных сферических функций, а также связь коэффициентов сферического разложения с параметрами модели Огородникова-Милна (и сами уравнения) приведен в (Витязев, Цветков 2009) и в (Vityazev, Tsvetkov, 2013). Аналогичная сведения, но уже для лучевых скоростей и связи коэффициентов разложения по скалярным сферическим функциям представлены в (Витязев, Цветков, 2014).

Для удобства читателей мы приведем в настоящей статье лишь таблицы связи кинематических параметров с коэффициентами разложения. В таблицах 2.1 и 2.2 приняты стандартные обозначения кинематических параметров:

- U, V, W – компоненты вектора \mathbf{V}_0 поступательного движения Солнца среди звезд, $\langle r \rangle$ – среднее расстояние рассматриваемой группы звезд;
- $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты вектора угловой скорости $\mathbf{\Omega}$;
- $M_{11}^+, M_{22}^+, M_{33}^+$ – параметры тензора деформации, описывающие сжатие-растяжение вдоль главных осей галактической системы координат;
- $M_{12}^+, M_{13}^+, M_{23}^+$ – параметры тензора \mathbf{M}^+ , описывающие деформацию поля скоростей в основной и двух перпендикулярных плоскостях.

Таблица 2.1. Связь кинематических параметров модели Огородникова-Милна с коэффициентами векторного сферического разложения собственных движений звезд.

Коэффициент $t_{\text{нкp}}$ или $s_{\text{нкp}}$	Значение
t_{101}	$2.89\omega_3$
t_{110}	$2.89\omega_2$
t_{111}	$2.89\omega_1$
s_{101}	$-2.89W/\langle r \rangle$
s_{110}	$-2.89V/\langle r \rangle$
s_{111}	$-2.89U/\langle r \rangle$
s_{201}	$-0.65M_{11}^+ - 0.65M_{22}^+ + 1.29M_{33}^+$
s_{210}	$2.24M_{23}^+$
s_{211}	$2.24M_{13}^+$
s_{220}	$2.24M_{12}^+$
s_{221}	$1.12M_{11}^+ - 1.12M_{22}^+$

Таблица 2.2. Связь кинематических параметров модели Огородникова-Милна с коэффициентами скалярного сферического разложения лучевых скоростей звезд.

Коэффициент $v_{\text{нкp}}$	Значение
v_{001}	$1.18M_{11}^+ + 1.18M_{22}^+ + 1.18M_{33}^+$
v_{101}	$-2.05W/\langle r \rangle$
v_{110}	$-2.05V/\langle r \rangle$
v_{111}	$-2.05U/\langle r \rangle$
v_{201}	$-0.53M_{11}^+ - 0.53M_{22}^+ + 1.06M_{33}^+$
v_{210}	$1.83M_{23}^+$
v_{211}	$1.83M_{13}^+$
v_{220}	$1.83M_{12}^+$
v_{221}	$0.92M_{11}^+ - 0.92M_{22}^+$

В работе (Витязев, Цветков 2009) представлены и обратные соотношения, которые мы здесь не будем приводить.

2.2 Определение коэффициентов разложения по наблюдательным данным

Для сохранения преемственности и возможности корректного сравнения результатов мы провели разложение как собственных движений, так и лучевых звезд по векторным и скалярным сферическим функциям соответственно на материале 400 тысячных выборок звезд по расстояниям, как это было сделано в предыдущей статье (Цветков, Амосов, 2019). Приведем здесь только таблицу границ выборок звезд и среднее расстояние звезд выборки.

Таблица 2.3. Границы выборок 400 000-х групп звезд в пк.

min	3	208	300	386	474	571	687	835	1040	1303	1594	1897	2220	2582	3031
max	208	300	386	474	571	687	835	1040	1303	1594	1897	2220	2582	3031	3677
avr	144	255	343	430	522	627	757	933	1168	1447	1745	2056	2396	2796	3328

Для каждой выборки были получены коэффициенты разложения собственных движений звезд по векторным сферическим функциям (Таблицы 2.4, 2.5) и лучевых скоростей по скалярным сферическим функциям (Таблица 2.6). Вычисления производились непосредственно по индивидуальным звездам без какого-либо усреднения. Поскольку все сферические функции являются ортонормированными на сфере, среднеквадратичные ошибки всех коэффициентов одинаковые для каждой выборки, и мы приводим только одно значение. Для удобства читателя в таблицах выделены полужирным начертанием те значения, модуль которых превосходит три среднеквадратичные ошибки его определения (так называемый «критерий 3σ»).

2.3 Анализ коэффициентов разложения

Сравнение таблиц 2.4–2.5 и таблицы 2.1 показывает наличие значимых коэффициентов t_{101} , t_{110} , t_{111} , ответственных за твердотельное вращение группы звезд. При этом довольно велик коэффициент t_{111} , показывающий наличие вращения вокруг оси X. Остальные тороидальные гармоники должны быть равны нулю. Однако мы видим, что гармоники t_{301} , t_{411} , t_{321} и некоторые другие оказываются значимыми. Но основная внемоделная компонента – это гармоника t_{221} , ее значение лишь немногим уступает основному эффекту – гармонике t_{101} , возникающей в силу вращения Галактики вокруг оси Z.

При анализе сфероидальных гармоник наблюдается похожая картина. Весьма значимы гармоники, описывающие поступательные движения Солнца среди звезд: s_{101} , s_{110} , s_{111} . Как и должно быть, их значение убывает с увеличением расстояния. Гармоника s_{220} , генерируемая параметром Орта A, также большая и не зависит от расстояния. Модельные гармоники s_{201} , s_{210} невелики. Лишь гармоника s_{211} , ответственная за разность сжатия/расширения звездной выборки по оси X и Y, довольно значима. Из внемоделных гармоник большое значение имеет s_{310} . Этот эффект также порядка вращения Галактики. Остальные внемоделные гармоники хотя и формально значимы, но малы.

Для иллюстрации данных таблиц 2.4 и 2.5 мы предлагаем способ, который можно назвать «спектр» собственных движений. Рис. 2.1 представляет этот спектр для расстояний 835–1040 пк. Для более компактного представления мы использовали линейную нумерацию коэффициентов по следующей формуле (Brosche, 1966):

$$j = n^2 + 2k + p - 1, \quad (2.1)$$

которая позволяет преобразовать три индекса n , k , p в один.

Сильные внемоделные гармоники в этой нумерации имеют обозначаются как t_6 и s_{10} и выделены штриховкой на рисунке.

Обратимся теперь к анализу коэффициентов разложения лучевых скоростей (Таблица 2.6) и сравним ее данные с таблицей 2.2. Самый сильный эффект – это движение Солнца – коэффициенты v_{101} , v_{110} и v_{111} . Отчетливо прослеживается дифференциальное вращение Галактики

по коэффициенту v_{220} , начиная с расстояний в несколько сот парсеков. Остальные значимые модельные гармоники сравнительно малы (v_{221} , v_{001}). Из внемодельных гармоник опять сильно выделяются v_{310} и для больших расстояний v_{420} . Мы наблюдаем рост гармоники v_{220} и v_{310} , что связано с их кинематическим характером, т.к. в модели Огородникова-Милна для лучевых скоростей лишь в функциях при параметрах движения Солнца нет расстояний, в то время как для остальных членов есть. Для собственных движений картина обратная. Солнечные члены зависят от расстояния, в то время как члены, описывающие кинематику Галактики в линейном приближении от расстояния не зависят. В силу этого, зависимость от расстояния внемодельной гармоники v_{310} служит указанием на ее кинематический характер неучтенного движения звезд.

Спектр разложения лучевых звезд для звезд тех же расстояний 835–1040 пк представлен на Рис. 2. 2. На нем также использована линейная нумерация коэффициентов. Сильная внемодельная гармоника в этих обозначениях v_{10} , выделена штриховкой.

Подводя итоги анализа коэффициентов разложения как собственных движений, так и лучевых скоростей звезд, резюмируем:

1. Кинематика самых близких звезд значительно отличается от кинематики более далеких звезд как в систематическом, так и в случайном отношении (большие ошибки коэффициентов). Это известный факт, вызванный наличием аномалии в кинематике Местной системы звезд (Tsvetkov, 1999) и (Tsvetkov, 1995) и пекулярными скоростями, заметно искажающие собственные движения близких звезд.
2. Существуют стабильные кинематические эффекты в движениях звезд, не описываемые моделью, а именно наличие коэффициентов t_{221} , s_{310} и v_{310} (или t_6 , s_{10} и v_{10}). Этот факт менее известен, хотя обнаруживался при анализе собственных движений звезд каталога Tycho-2 и лучевых скоростей каталога OSACA (Vityazev V., Shuksto A., 2004) и (Витязев, Цветков, 2009). Последнее означает, что, по-видимому, действительно в кинематической картине движения звезд в околосолнечном пространстве присутствуют неучтенные эффекты. До появления каталога GAIA была небольшая вероятность, что эти гармоники могут быть следствием систематических ошибок в собственных движениях звезд каталогов.

2.4 Возможная природа внемодельных членов в разложениях

Систематическая значимость гармоник t_{221} , s_{310} и v_{310} нуждается в объяснении. Одно из возможных объяснений – нелинейные члены в модели вращения Галактики. В самом простом случае – это обобщенная модель Орта-Линдблада. В общем случае эти уравнения являются частным случаем формул Боттлингера, подробное описание которых есть в (Бобылев, 2007) и в (Бобылев и др. 2014). Мы приведем эти уравнения, так как они даны в (Витязев и Цветков, 2009):

$$\begin{aligned}
 k\mu_l \cos b = & (U/r) \sin l - (V/r) \cos l + \\
 & + A \cos b \cos 2l + B \cos b - rF \cos^2 b \cos^3 l - \\
 & - rG(3 \cos^2 b \cos l - \cos^2 b \cos^3 l)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
 k\mu_b = & (U/r) \cos l \sin b + (V/r) \sin l \sin b - (W/r) \cos b - \\
 & - A \sin b \cos b \sin 2l + rF \cos^2 b \sin b \sin l \cos^2 l + \\
 & + rG \cos^2 b \sin b \sin^3 l - K \cos b \sin b
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
V_r/r = & -(U/r)\cos b \cos l - (V/r)\cos b \sin l - (W/r)\sin b + \\
& + A \cos^2 b \sin 2l - r F \cos^3 b \sin l \cos^2 l - \\
& - r G \cos^3 b \sin^3 l + K \cos^2 b
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь

- $k = 4.738$ – множитель перехода от масс/год в км/с · Кпк⁻¹.
- l, b, r – галактические координаты звезды.
- U, V, W – компоненты вектора \mathbf{V}_0 поступательного движения Солнца среди звезд;
- $A = 0.5R_0\omega'_0$ и $B = 0.5R_0\omega'_0 + \omega_0$ – параметры Орта, R_0 – расстояние до центра Галактики, ω_0 – угловая скорость вращения Галактики (напомним, что $A = M_{12}^+$ и $B = \omega_3$).
- K – общее сжатие-растяжение системы в плоскости XY .
- F и G – параметры Орта второго порядка, $F = 0.5R_0\omega''_0$ и $G = A/R_0$.

Если провести теоретическое разложение уравнений (2.2-2.4) по сферическим гармоникам, то в дополнении к таблицам 2.1-2.2 мы получим результат, представленный в таблице 2.7.

Таблица 2.7. Вклад обобщенной модели Орта в коэффициенты скалярного и векторного сферического разложения.

j	n	k	p	$v_{\text{нкп}}$	$t_{\text{нкп}}$	$s_{\text{нкп}}$
0	0	0	1	2.363 K		
1	1	0	1	$-2.047 W/\langle r \rangle$	2.894 B	$-2.894 W/\langle r \rangle$
2	1	1	0	$-2.047 V/\langle r \rangle$ $-0.409 F\langle r \rangle - 1.228 G\langle r \rangle$		$-2.894 V/\langle r \rangle$ $-1.158 F\langle r \rangle - 3.473 G\langle r \rangle$
3	1	1	1	$-2.047 U/\langle r \rangle$		$-2.894 U/\langle r \rangle$
4	2	0	1	$-1.057 K$		$-1.294 K$
5	2	1	0			
6	2	1	1		$-0.747 F\langle r \rangle -$ $2.242 G\langle r \rangle$	
7	2	2	0	1.831 A		2.242 A
8	2	2	1			
9	3	0	1			
10	3	1	0	$0.109 F\langle r \rangle + 0.328 G\langle r \rangle$		$0.126 F\langle r \rangle + 0.379 G\langle r \rangle$
11	3	1	1			
12	3	2	0			
13	3	2	1			
14	3	3	0	$-0.424 F\langle r \rangle + 0.424 G\langle r \rangle$		$-0.489 F + 0.489 G\langle r \rangle$
15	3	3	1			

Мы видим, что наличие в собственных движениях гармоник t_{221} , s_{310} , а в лучевых скоростях гармоники v_{310} может быть объяснено расширенной моделью Орта. Соответствующие ячейки выделены в таблице 2.7 серым цветом. К сожалению, получить отдельно значения F и G по этим трем гармоникам невозможно из-за линейной зависимости. Действительно:

$$v_{310} = 0.109(F + 3G)\langle r \rangle, \quad t_{211} = -0.747(F + 3G)\langle r \rangle, \quad s_{310} = 0.126(F + 3G)\langle r \rangle, \quad (2.5)$$

т.е. мы можем определить только комбинацию $(F + 3G)\langle r \rangle$. Для звезд расстояний 835-1040 пк среднее значение расстояния около 0.933 Кпк имеем следующее:

$$\begin{aligned} v_{310} &\rightarrow F + 3G = -8.5/0.109/0.933 = -83.6, \\ t_{211} &\rightarrow F + 3G = 14.8/(-0.747)/0.933 = -21.2, \\ (2.6) \\ s_{310} &\rightarrow F + 3G = -12.1/0.126/0.933 = -102.9. \end{aligned}$$

Как мы видим значения, полученные по лучевым скоростям и по сфероидальным гармоникам близки друг другу. А значение, определенное по тороидальной гармонике выбивается.

Дальнейшее знакомство с таблицей 2.7 заставляет нас проверить значения коэффициентов v_{330} и s_{330} , которые также порождаются параметрами F и G . Анализ этих гармоник показывает, что они в целом малы (за исключением v_{330} для далеких звезд), что означает либо отсутствие данных кинематических эффектов, либо их примерное равенство величин F и G .

Сопоставление этих фактов указывает на противоречие в прямой интерпретации внемоделных гармоник, как проявление эффектов расширенной модели Оорта.

Для окончательного выяснения мы провели непосредственно совместное решение уравнений (2.2-2.4) по собственным движениям и лучевым скоростям звезд на материале тех же выборок с учетом индивидуальных расстояний звезд. Результаты представлены в таблице 2.7. Для той же выборки звезд со средним расстоянием около 0.93 Кпк, мы имеем $F = -2.9$ км/с·Кпк⁻², $G = 1.4$ км/с·Кпк⁻², что прекрасно согласуется со значениями, полученными в (Бобылев и Байкова, 2014), но находится в резком противоречии с выражениями (6), из которых следует что F и G должны быть значительно больше по модулю. Это означает, что большие значения гармоник t_{221} , s_{310} и v_{310} не могут быть объяснены расширенной моделью Оорта. Хотя значение гармоники $s_{330} = 0.42(G - F)$ находится в хорошем согласии с найденными параметрами F и G , но если попытаться получить F и G например из комбинации гармоник s_{310} и s_{330} , то мы получим нереально большие значения $F \approx 26 \text{ км/с} \cdot \text{Кпк}^{-2}$, $G \approx -23 \text{ км/с} \cdot \text{Кпк}^{-2}$.

Есть еще одно обстоятельство, из которого следует, что параметры F и G должны иметь относительно малые значения. Смысл нелинейных членов – производные параметров Оорта по расстоянию. Но результаты предыдущей работы авторов (Цветков, Амосов 2019) как раз показали удивительную стабильность параметров Оорта ($B = \omega_3$, $A = M_{12}^+$) для значительных диапазонов расстояний, следовательно, производные от этих параметров должны быть малы. Для близких звезд значения многих кинематических параметров велики, что объясняется аномалиями Местной системы звезд (Цветков, 1995). С расстояний свыше 500 пк значения параметров F и G уменьшаются и стабилизируются.

2.5 Вклад трехмерной модели второго порядка в коэффициенты сферического разложения

Можно рассмотреть полую трехмерную модель второго порядка. Подробному выводу уравнений следует, по-видимому, посвятить отдельную статью в силу довольно громоздких выкладок. Предварительно следует сказать, что в силу корреляций видимо вообще не имеет смысла решать уравнения второго порядка, т.к. можно будет получить лишь линейные комбинации параметров. В данном случае метод разложения по сферическим гармоникам и использование полученных коэффициентов для анализа нелинейной части модели представляется наиболее целесообразным.

Введем частные производные от кинематических параметров вдоль главных осей галактической системы координат X, Y, Z , которые обозначим через $\frac{\partial}{\partial r_1}, \frac{\partial}{\partial r_2}, \frac{\partial}{\partial r_3}$ соответственно.

Разложение полученных уравнений второго порядка по скалярным (для лучевых скоростей) и векторным (для собственных движений) сферическим функциям представлены в таблицах 2.8-2.10, множитель $\langle r \rangle$ (среднее расстояние рассматриваемой группы звезд) у каждой частной производной для компактности опущен. В этих таблицах полужирным начертанием выделен вклад линейной модели первого порядка, который уже был представлен в таблицах 2.1-2.2.

Мы видим, что большое число производных от кинематических параметров входит в виде линейной комбинации в отдельные гармоники. В некоторых случаях параметры второго порядка накладываются на коэффициенты, которые ранее предполагались зависящими лишь от параметров первого порядка ($s_{101}, s_{110}, s_{111}, v_{101}, v_{110}, v_{111}$).

Вернемся, однако, к рассматриваемым гармоникам, имеющим большое значение. Выпишем отдельно для них полные выражения из таблиц 2.8-2.10, группируя слагаемые так, чтобы их было удобно анализировать. Имеем (с точностью до множителя $\langle r \rangle$):

$$s_{310} = 0.13 \left(-\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} - 2\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} - 3\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 4\frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2} + 8\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3} \right), \quad (2.7)$$

$$v_{310} = 0.11 \left(-\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} - 2\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} - 3\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 4\frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2} + 8\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3} \right). \quad (2.8)$$

$$t_{211} = 0.37 \left(-\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} + \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} - \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3} + \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2} + 3 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial r_3} + \frac{\partial \omega_3}{\partial r_1} \right) \right). \quad (2.9)$$

Анализ формул (2.7-2.9) показывает, что есть 4 кинематических параметра $\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2}, \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1}, \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3}, \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2}$, которые входят во все 3 коэффициента. Кроме этого параметр $\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2}$ входит в коэффициенты s_{310} и v_{310} , в то время как в t_{211} входят $\frac{\partial \omega_1}{\partial r_3}$ и $\frac{\partial \omega_3}{\partial r_1}$. Вероятно этим и можно объяснить

схожесть поведения s_{310} и v_{310} и отличие t_{211} , если проводить анализ в рамках расширенной модели Оорта.

Теоретическое соотношение коэффициентов s_{310} и v_{310} практически точно совпадает в соотношением коэффициентов, полученных на материале каталога. Это значит, что линейная комбинация параметров в формулах 2.7 и 2.8 имеет одно и тоже значение при анализе лучевых скоростей и собственных движений.

Приведенные рассуждения не решают задачу об отождествлении внемоделных гармоник с какими-то конкретными параметрами кинематической модели, так как система уравнений, по сути дела задаваемая таблицами 2.8-2.10 недоопределена. Число определяемых параметров превосходит число коэффициентов разложения. Кроме того, мы видим, что коэффициенты могут быть пропорциональны друг другу, и могут быть лишь использованы как некоторые дополнительные критерии адекватности модели наблюдениям.

Для полного описания системы в рамках модели второго порядка нужна какая-то дополнительная информация (например, о незначимости некоторых параметров второго порядка), которая позволила бы если и не полностью получить значения всех параметров, то хотя бы значения их менее сложных линейных комбинаций.

Мы можем лишь предложить такое упрощение: оставим в уравнениях (2.7-2.9), только производные от $M_{12}^+ = A$, и от $\omega_3 = B$ по r_1 , считая остальные значения малыми, тогда уравнения (2.7-2.9) сводятся к

$$s_{310} = -0.26 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} \langle r \rangle, \quad v_{310} = -0.22 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} \langle r \rangle, \quad t_{211} = 0.37 \left(\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} + 3 \frac{\partial \omega_3}{\partial r_1} \right) \langle r \rangle. \quad (2.10)$$

Здесь мы уже не стали опускать множитель $\langle r \rangle$. Взяв из таблиц 2.4-2.6 значения коэффициентов для диапазона 835–1040 со средним значением $\langle r \rangle = 0.933 \text{ кпк}$:

$$t_{211} = 14.8, \quad s_{310} = -12.1, \quad v_{310} = -8.5 \text{ км/с} \cdot \text{Кпк}^{-1},$$

получаем из s_{310} и v_{310} среднее значение $\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} = 44 \text{ км/с} \cdot \text{кпк}^{-2}$, а $\frac{\partial \omega_3}{\partial r_1} \approx 0$! Довольно странный результат, если разобраться в том, что $\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} = \frac{\partial A}{\partial r_1}$, что во многом по смыслу совпадает с параметром Оорта F .

Мы предположили, что другие частные производные от кинематическим параметров модели Огородникова-Милна близки к нулю, просто в связи с тем, что сами эти параметры обычно малы. Но малое значение параметров не означает, что производные от них тоже малы. Так что вопрос о нелинейных эффектах в поле скоростей звезд нуждается в дальнейшей проработке. Некоторое указание на то, что внемодельные коэффициенты t_{211} , s_{310} и v_{310} являются проявлением нелинейных эффектов, рост их абсолютных значений с увеличением расстояния, т.к. в нелинейные параметры всегда входит $\langle r \rangle$ – среднее расстояние рассматриваемой группы звезд. Ближе 500 пк, по-видимому, имеют силу местные кинематические эффекты (Рис. 2.4).

Возможно природа гармоник t_{211} , s_{310} и v_{310} вообще другая (особенности распределения звезд, звездные потоки, что-либо еще). Интересно отметить, что существуют значимые коэффициенты (например, v_{420} для больших расстояний), которые не могут быть проинтерпретированы даже в рамках модели второго порядка.

2.6 Заключение второй части

Проведенное исследование показало, что в собственных движениях и лучевых скоростях звезд уверенно присутствуют такие кинематические эффекты, как поступательное движение Солнца, твердотельное вращение в основном вокруг оси Z , но есть и меньший эффект вокруг оси X . Также не подлежит сомнению наличие деформации поля скоростей в плоскости XY . Остальные компоненты линейной модели присутствуют в незначительном количестве. Загадку составляют существование сильных гармоник t_{211} , s_{310} , v_{310} , не описываемых линейными звездно-кинематическими моделями Оорта-Линдблада и Огородникова-Милна. Попытка напрямую привязать их к расширенной модели Оорта-Линдблада лишь частично позволила объяснить их существование, из-за возникшего противоречия в определении параметров по гармоникам s_{310} , v_{310} и t_{211} . Возможно, ключ к пониманию природы этих гармоник лежит в использовании полной трехмерной модели второго порядка. Однако вопрос этот сложный и нуждается в проведении дополнительных исследований. Авторы планируют посвятить модели второго порядка отдельную публикацию.

Таблица 2.4. Тороидальные коэффициенты в $\text{км/с} \cdot \text{Кпк}^{-1}$ разложения собственных движений по векторным сферическим функциям. Жирным шрифтом выделены значимые по критерию 3σ величины.

Min	3	208	300	386	474	571	687	835	1040	1303	1594	1897	2220	2582	3031
Max	208	300	386	474	571	687	835	1040	1303	1594	1897	2220	2582	3031	3677
t_{101}	-35.8	-36.5	-35.9	-37.3	-37.9	-38.2	-38.4	-38.8	-39.8	-40.7	-41.2	-41.6	-41.7	-41.6	-41.2
t_{110}	-15.6	-6.4	-3.1	-3.0	-3.4	-3.6	-1.5	-0.4	0.5	1.3	1.5	1.4	0.8	1.1	0.9
t_{111}	2.2	4.3	2.0	3.1	2.5	1.2	-0.3	0.7	1.9	3.7	3.5	4.9	3.3	3.8	2.6
t_{201}	0.2	0.5	0.3	-0.8	-1.3	-1.4	-2.1	-1.3	-1.0	-0.7	0.3	0.7	1.4	1.2	1.4
t_{210}	-1.2	-0.4	-1.3	-2.3	-3.0	-3.5	-4.6	-3.6	-3.6	-2.9	-2.6	-1.9	-1.6	-0.3	-0.2
t_{211}	19.2	11.5	9.9	10.6	9.2	8.9	10.5	14.8	17.9	20.4	20.8	21.0	21.5	22.7	22.1
t_{220}	-0.3	0.3	0.0	-0.2	-0.6	0.1	-0.4	-0.4	-0.3	-0.8	-1.0	-0.9	-0.5	0.0	-0.2
t_{221}	1.8	0.5	-0.3	-0.5	0.1	0.9	1.0	1.3	1.2	0.0	0.4	-0.5	-0.2	-0.8	-0.1
t_{301}	-5.4	-2.0	-1.3	-0.8	-0.2	-0.8	-1.9	-3.1	-3.9	-3.4	-2.7	-1.7	-0.6	0.1	1.6
t_{310}	2.0	4.9	2.5	1.4	-0.3	0.0	1.6	2.3	2.1	1.8	0.7	0.5	0.3	0.5	0.2
t_{311}	-0.8	-1.9	-2.1	0.0	-0.2	-1.5	-2.1	-0.3	0.4	1.6	1.2	1.4	0.3	0.6	-0.1
t_{320}	0.0	0.2	-0.6	0.5	0.6	1.4	1.0	-0.3	0.3	-0.3	-0.1	-0.2	0.0	-0.5	0.1
t_{321}	-1.2	0.8	-0.6	0.4	0.4	1.0	1.3	2.5	2.4	3.1	3.6	3.5	3.9	4.1	4.3
t_{330}	-1.0	0.2	-0.3	-0.6	0.1	-0.3	-0.6	-0.3	0.0	-0.3	0.2	0.0	0.5	0.0	0.2
t_{331}	2.0	-0.9	0.0	0.0	-0.4	-0.3	0.1	0.3	0.1	0.3	0.2	0.3	0.3	0.0	0.0
t_{401}	4.5	0.1	-2.0	-0.9	-1.2	-1.2	-0.4	0.5	1.3	0.4	1.0	1.4	1.4	1.2	1.0
t_{410}	-0.5	-2.1	-1.3	-0.5	0.0	-0.5	-0.9	-0.2	-0.3	0.6	1.0	0.7	0.8	0.9	0.8
t_{411}	-3.3	-2.7	-2.2	-1.0	-2.2	-1.0	1.4	1.5	-0.2	-1.0	-2.4	-3.3	-3.4	-2.4	-2.4
t_{420}	1.8	-0.4	-0.5	0.3	-0.4	0.2	-0.4	0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.0	0.4	0.7	0.3
t_{421}	-3.2	1.1	-1.1	1.1	0.5	0.7	0.5	0.4	0.7	-0.9	-0.3	-0.8	-0.5	-0.8	-0.1
t_{430}	-1.1	-0.6	0.6	0.2	-0.3	-0.7	-0.1	0.3	0.3	0.0	0.1	0.3	0.3	0.5	0.4
t_{431}	-1.5	0.1	-0.6	-1.0	-0.3	-0.1	0.0	0.6	0.9	0.5	0.6	0.7	0.0	0.0	-0.4
t_{440}	0.7	0.1	-0.2	-0.2	-0.2	0.0	-0.1	0.0	-0.2	0.0	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.0
t_{441}	1.2	-0.8	-0.1	0.0	0.4	0.0	-0.2	-0.1	0.1	0.0	0.1	0.1	0.0	0.1	0.0
σ	1.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Таблица 2.5. Сфероидальные коэффициенты в км/с·Кпк⁻¹ разложения собственных движений по векторным сферическим функциям. Жирным шрифтом выделены значимые по критерию 3σ величины.

Min	3	208	300	386	474	571	687	835	1040	1303	1594	1897	2220	2582	3031
Max	208	300	386	474	571	687	835	1040	1303	1594	1897	2220	2582	3031	3677
S ₁₀₁	-179	-88.2	-66.4	-52.8	-43.7	-36.7	-30.9	-25.9	-21.1	-16.7	-14.3	-11.9	-10.5	-9.2	-8.5
S ₁₁₀	-517	-255	-194	-156	-130	-110	-98.3	-93.8	-91.1	-86.9	-82.6	-79.6	-77.7	-77.6	-77
S ₁₁₁	-229	-110	-85.5	-69.4	-59.1	-50.1	-44.7	-38.1	-31.9	-27	-23.5	-19.9	-17.4	-14.3	-12.5
S ₂₀₁	-2.9	2.4	2.6	3.3	3.2	2.9	2.8	2.2	2.5	2	1.4	2	1.4	1.8	1.9
S ₂₁₀	-1.5	-2.5	0.5	-0.8	-1	0.9	2.8	1.5	-0.5	-2.1	-2.3	-3.2	-1.5	-1.8	-1
S ₂₁₁	-6.1	-2.5	-0.4	-2.5	-2.9	-2.8	-0.7	-0.4	-0.4	-0.3	-0.3	-0.4	-1.2	-0.8	-1
S ₂₂₀	38.7	36.2	34.6	33.7	33.6	34.1	33.5	31.5	30.1	28	26.9	25.6	24.4	23.3	21.3
S ₂₂₁	-3.5	-6.1	-7.3	-7.4	-7.8	-7.2	-5.8	-4.7	-3.6	-3.3	-2.8	-3.2	-2.4	-2.6	-1.2
S ₃₀₁	-5.8	-0.9	-1.1	-0.6	-1.6	-1.9	-2.4	-2	-1.7	-0.5	-1.1	-0.5	-0.6	-0.7	-1.4
S ₃₁₀	-15.4	-7.5	-7.2	-8	-7.7	-7.6	-8.8	-12.1	-14.4	-15.5	-15.3	-15.8	-16.4	-17.2	-17.5
S ₃₁₁	-2.5	-0.1	-0.2	-1.2	-1	-1.3	-2.5	-2.3	-1.7	-1.2	-0.9	-0.6	-0.5	-0.1	0.1
S ₃₂₀	-3.4	0	-0.3	0.6	-0.2	-0.7	-1.5	-1.8	-1.3	-0.1	-0.3	0.6	0.2	0.7	0.3
S ₃₂₁	-1.3	-0.4	-0.8	-0.6	-0.7	-0.3	-0.3	-0.4	-0.2	-0.6	-0.6	-0.5	-0.2	0.2	0.2
S ₃₃₀	2	1.9	2.1	2.1	2	2	1.5	1.6	2.1	3.2	3.3	3.5	4	3.9	4.3
S ₃₃₁	-0.3	-1.3	-1.4	-1.9	-0.9	-1.1	-1.3	-1	-1	-1.6	-1.6	-1.3	-1.2	-1.1	-1.1
S ₄₀₁	0.4	-1.3	0.7	-0.3	-0.3	-0.1	-0.2	-0.4	0.8	0.5	0.6	0.6	0.4	0.7	0.9
S ₄₁₀	0.2	-0.3	1.2	-1.3	-0.6	0.7	1.3	0.4	-0.7	-1	-0.9	-0.6	0	0.2	0.4
S ₄₁₁	5.6	3	1.4	-0.3	-0.5	0.7	1.1	0.6	-0.3	-0.6	-0.9	-0.6	-0.9	-0.5	-0.7
S ₄₂₀	0.5	-0.1	0	-0.7	-1.3	-0.8	-1	-2	-2.2	-2.9	-3.1	-3	-3.4	-3.3	-3.9
S ₄₂₁	-4.1	-1.1	-0.4	-0.2	1.3	1.3	1	0.3	0	-0.2	-0.3	-0.7	0	-0.3	0.1
S ₄₃₀	-0.4	1.9	0.9	0.6	0.6	0.6	-0.1	-0.4	-0.2	-0.5	0	-0.2	-0.3	0.2	0
S ₄₃₁	-1.3	0.2	0.1	-0.7	-0.2	-0.2	0.1	-0.3	-0.1	-0.3	0	0	0.4	0	0.3
S ₄₄₀	0	0.2	0	0.7	0.7	-0.1	-0.8	-0.7	-0.9	0	0.1	0	0.3	0.6	0.9
S ₄₄₁	4.1	0.5	-0.5	0	-0.4	0.7	0.7	0.8	0.7	0.6	0.4	0.1	0	-0.2	-0.1
σ	1,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

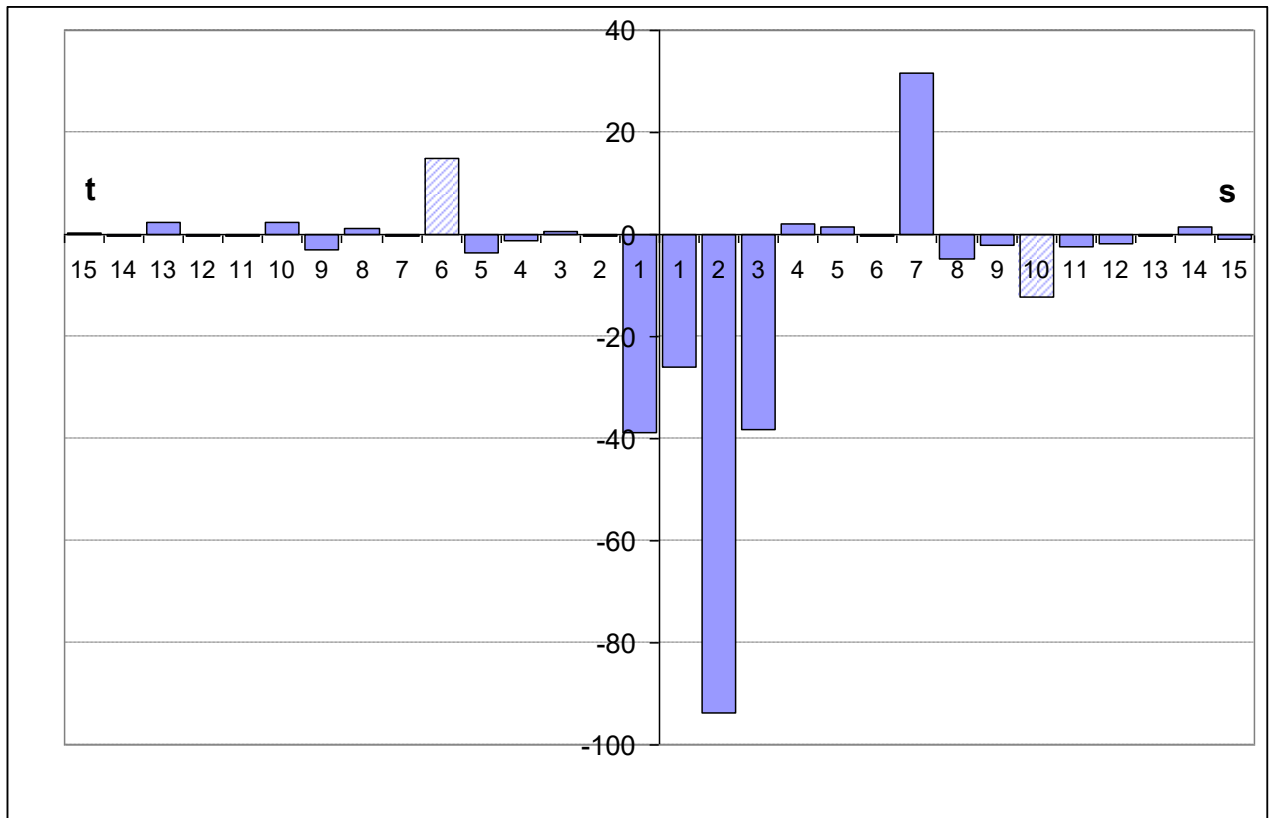


Рис. 2.1. «Спектр» разложения собственных движений для звезд расстояний 835–1040 пк, слева – коэффициенты t_j , справа – s_j . Использована линейная нумерация коэффициентов. По вертикальной оси – значение коэффициентов в $\text{км/с} \cdot \text{Кпк}^{-1}$.

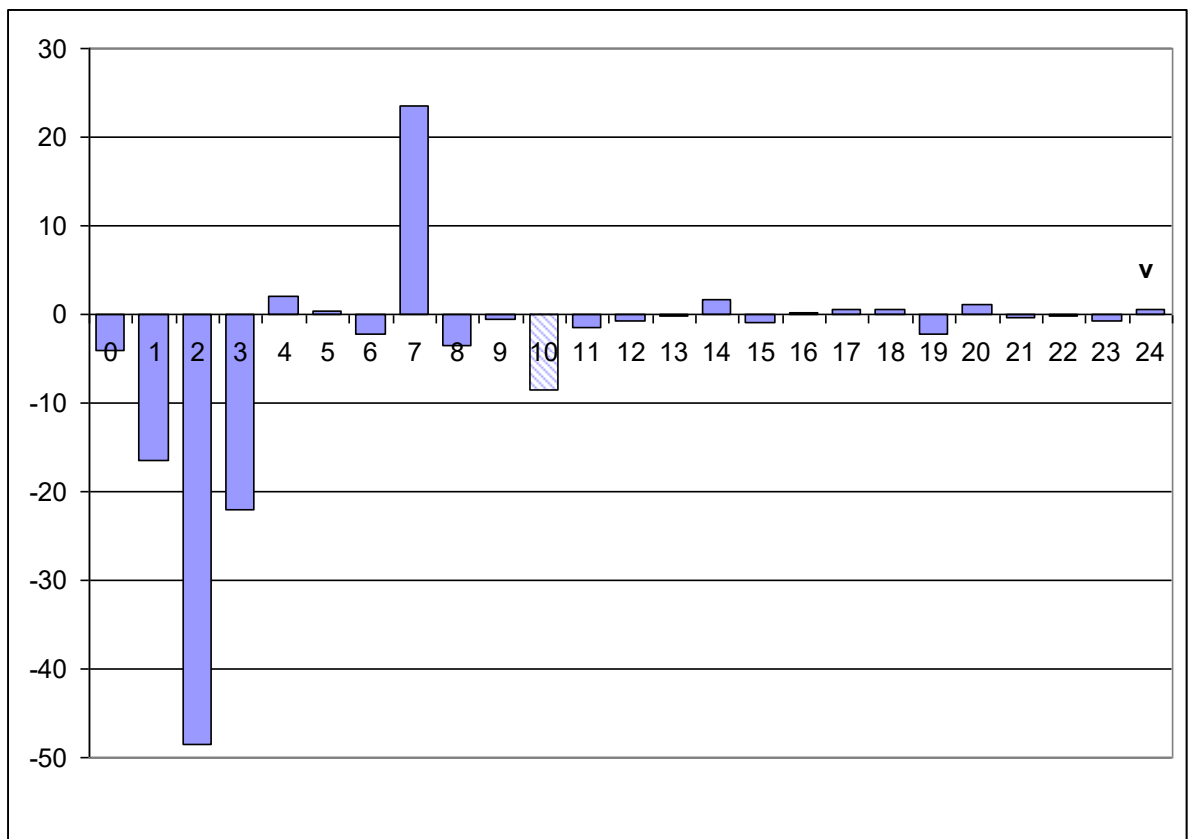


Рис. 2.2. «Спектр» разложения лучевых скоростей звезд для расстояний 835–1040 пк. Использована линейная нумерация коэффициентов. По вертикальной оси – значение коэффициентов в км/с .

Таблица 2.6. Коэффициенты разложения лучевых скоростей км/с по сферическим функциям. Жирным шрифтом выделены значимые по критерию 3σ величины.

Min	3	208	300	386	474	571	687	835	1040	1303	1594	1897	2220	2582	3031
Max	208	300	386	474	571	687	835	1040	1303	1594	1897	2220	2582	3031	3677
V001	0.8	-0.6	-1.0	-2.0	-2.8	-2.7	-3.4	-4.0	-5.1	-4.7	-2.6	-2.8	-0.7	-0.2	-0.3
V101	-16.2	-16.3	-16.0	-16.9	-17.6	-16.7	-16.0	-16.4	-16.3	-17.0	-16.1	-16.5	-16.6	-16.2	-18.3
V110	-43.9	-44.0	-43.8	-43.7	-43.8	-43.6	-44.3	-48.6	-57.7	-65.7	-73.5	-81.6	-90.2	-99.5	-110.3
V111	-20.6	-20.3	-20.8	-21.0	-20.9	-21.0	-21.2	-22.0	-22.9	-24.4	-25.4	-26.2	-25.5	-25.5	-24.3
V201	0.1	0.3	0.2	0.4	1.1	1.6	2.2	2.1	1.7	2.0	3.8	3.0	4.6	2.8	2.4
V210	-0.5	0.0	0.1	-0.1	-0.2	-0.2	0.1	0.4	0.9	-1.2	-0.7	-2.2	-2.3	-3.6	-1.7
V211	-1.4	-1.8	-1.2	-1.3	-1.5	-1.7	-2.4	-2.2	-1.8	-1.5	-0.9	-1.6	-0.2	-1.1	0.5
V220	4.8	8.1	10.3	12.3	15.1	17.5	20.2	23.6	28.1	32.5	37.0	41.8	46.4	51.2	55.1
V221	-0.7	-1.9	-2.2	-2.7	-3.6	-3.4	-3.5	-3.5	-2.7	-2.8	-1.8	-1.2	-1.0	-0.7	0.1
V301	0.4	0.0	-0.8	-0.7	-0.7	-0.8	-0.2	-0.6	-0.7	-1.8	-1.7	-2.1	-3.0	-3.7	-5.2
V310	-0.8	-1.9	-2.5	-3.2	-3.6	-4.5	-5.3	-8.5	-15.0	-20.4	-26.1	-32.1	-38.7	-46.5	-53.4
V311	0.5	0.3	0.0	-0.1	-0.7	-0.5	-1.1	-1.4	-1.5	-2.0	-1.8	-1.6	-0.5	0.1	1.6
V320	-0.2	-0.2	0.4	0.1	-0.3	-0.5	-0.2	-0.8	-0.5	-0.5	-0.6	-0.5	0.6	-0.1	0.2
V321	-0.2	0.0	0.0	-0.1	-0.3	0.1	0.0	-0.2	-0.5	-0.2	-0.4	-0.7	-0.4	-1.2	-1.5
V330	0.0	0.2	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.6	2.4	3.5	4.4	5.9	7.6	9.7	13.0
V331	-0.2	-0.1	0.0	-0.4	-0.2	-0.3	-0.5	-1.0	-1.9	-2.4	-2.8	-2.9	-3.2	-2.8	-3.2
V401	0.0	0.0	0.2	0.0	0.3	0.5	0.6	0.2	0.1	-0.3	0.1	0.5	2.0	1.4	2.6
V410	-0.1	0.2	0.5	0.5	0.0	-0.2	0.4	0.6	1.1	-0.1	-0.1	-0.8	-0.3	-0.4	1.1
V411	0.2	0.8	1.1	0.0	0.0	0.3	0.3	0.6	0.9	1.2	1.6	1.4	2.7	2.6	3.6
V420	-0.1	-0.1	-0.3	-0.5	-0.8	-0.8	-1.6	-2.3	-3.3	-5.7	-7.8	-9.6	-12.4	-15.2	-20.3
V421	0.1	0.1	0.0	0.3	-0.1	0.6	1.0	1.1	1.1	-0.3	-0.3	-1.0	-2.4	-3.6	-3.0
V430	-0.2	0.3	0.1	0.3	0.3	0.0	-0.4	-0.4	-0.6	-0.6	-1.1	-1.0	-0.8	-0.3	-0.4
V431	0.1	0.1	-0.2	-0.3	0.0	-0.2	-0.5	-0.2	0.0	0.2	0.9	0.4	0.6	0.1	-0.3
V440	0.0	-0.1	0.4	0.4	0.1	-0.4	-0.5	-0.8	-0.7	-0.2	0.3	1.0	1.8	2.9	3.9
V441	-0.3	0.2	-0.1	-0.1	-0.1	0.2	0.4	0.5	0.9	1.3	1.2	1.0	0.7	0.6	-0.7
Σ	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.7

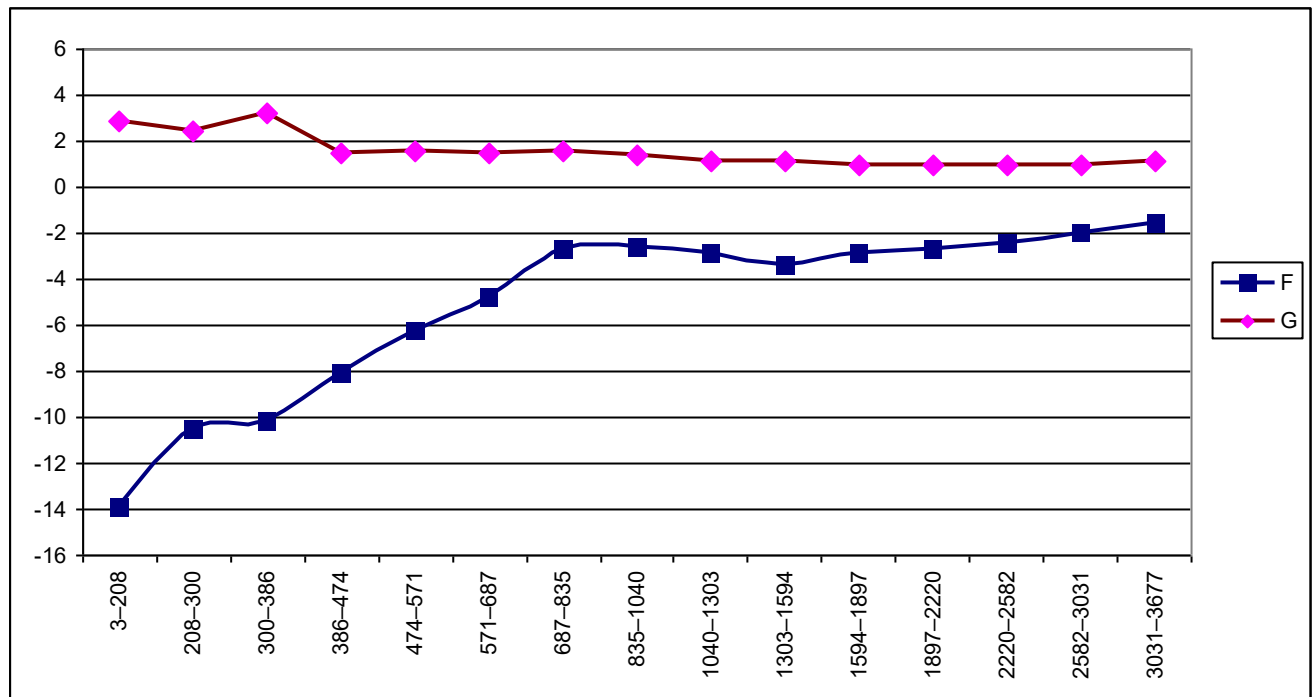


Рис. 2.3. Зависимость параметров F и G от расстояния. По вертикальной оси – значение коэффициентов в км/с·Кпк⁻¹.

Таблица 2.7. Значения параметров расширенной модели Орта, полученные из совместного решения уравнений (2.2-2.4).

Min	3	208	300	386	474	571	687	835
Max	208	300	386	474	571	687	835	1040
U	9.2 ± 0.0	8.9 ± 0.0	9.3 ± 0.0	9.4 ± 0.0	9.6 ± 0.0	9.8 ± 0.0	10.1 ± 0.0	10.6 ± 0.1
V	19.5 ± 0.1	19.9 ± 0.1	20.1 ± 0.1	20.4 ± 0.1	20.4 ± 0.1	20.3 ± 0.1	20.4 ± 0.1	22.0 ± 0.1
W	7.9 ± 0.0	7.8 ± 0.0	7.8 ± 0.0	7.9 ± 0.0	7.9 ± 0.0	7.9 ± 0.0	7.8 ± 0.0	8.0 ± 0.0
A	16.5 ± 0.5	15.8 ± 0.2	15.1 ± 0.1	14.8 ± 0.1	15.0 ± 0.1	15 ± 0.1	14.8 ± 0.1	14.5 ± 0.0
B	-11.0 ± 0.5	-11.0 ± 0.2	-11.1 ± 0.1	-11.7 ± 0.1	-12.1 ± 0.1	-12.3 ± 0.1	-12.3 ± 0.1	-12.3 ± 0.0
F	-13.9 ± 11.8	-10.5 ± 2.7	-10.2 ± 1.5	-8.1 ± 0.9	-6.3 ± 0.4	-4.8 ± 0.4	-2.7 ± 0.2	-2.6 ± 0.1
G	2.9 ± 4.4	2.4 ± 1.1	3.2 ± 0.6	1.5 ± 0.4	1.6 ± 0.2	1.5 ± 0.2	1.6 ± 0.1	1.4 ± 0.1
K	2.8 ± 0.5	-1.2 ± 0.2	-1.2 ± 0.1	-1.8 ± 0.1	-2.0 ± 0.1	-1.7 ± 0.1	-1.8 ± 0.1	-1.7 ± 0.0

Min	1040	1303	1594	1897	2220	2582	3031
Max	1303	1594	1897	2220	2582	3031	3677
U	11.1 ± 0.1	11.6 ± 0.1	12.1 ± 0.1	12.5 ± 0.1	12.6 ± 0.1	13.0 ± 0.1	13.2 ± 0.1
V	25.1 ± 0.1	27.8 ± 0.1	29.8 ± 0.1	31.2 ± 0.1	32.7 ± 0.1	33.3 ± 0.1	33.6 ± 0.1
W	8.1 ± 0.0	8.2 ± 0.1	8.3 ± 0.1	8.5 ± 0.1	8.7 ± 0.1	8.8 ± 0.1	9.1 ± 0.1
A	14.0 ± 0.0	13.6 ± 0.0	13.3 ± 0.0	12.9 ± 0.0	12.6 ± 0.0	12.1 ± 0.0	11.4 ± 0.0
B	-12.5 ± 0.0	-13.0 ± 0.0	-13.3 ± 0.0	-13.7 ± 0.0	-14.1 ± 0.0	-14.3 ± 0.0	-14.6 ± 0.0
F	-2.9 ± 0.1	-3.4 ± 0.1	-2.9 ± 0.1	-2.7 ± 0.0	-2.4 ± 0.0	-2.0 ± 0.0	-1.6 ± 0.0
G	1.1 ± 0.1	1.1 ± 0.0	1.0 ± 0.0	1.0 ± 0.0	1.0 ± 0.0	1.0 ± 0.0	1.1 ± 0.0
K	-1.7 ± 0.0	-1.4 ± 0.0	-1.1 ± 0.0	-0.8 ± 0.0	-0.6 ± 0.0	-0.3 ± 0.0	-0.1 ± 0.0

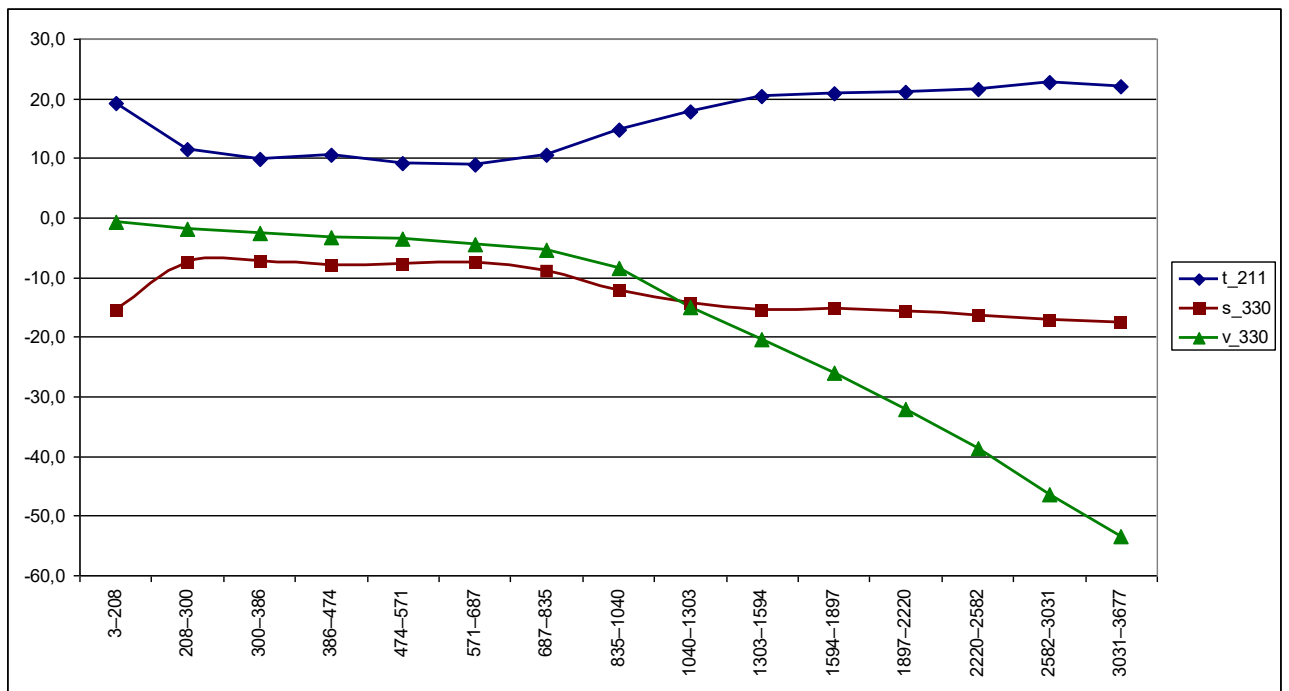


Рис. 2.4. Зависимость гармоник t_{211} , s_{310} и v_{310} от расстояния. По вертикальной оси – значение коэффициентов в км/с·Кпк⁻¹.

Таблица 2.8. Вклад кинематической модели второго порядка в тороидальные коэффициенты векторного сферического разложения собственных движений звезд. Множитель $\langle r \rangle$ у всех частных производных опущен.

j	N	k	p	t_j
1	1	0	1	2.89 ω_3
2	1	1	0	2.89 ω_2
3	1	1	1	2.89 ω_1
4	2	0	1	$-0.65 \frac{\partial \omega_1}{\partial r_1} - 0.65 \frac{\partial \omega_2}{\partial r_2} + 1.30 \frac{\partial \omega_3}{\partial r_3} - 0.65 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_2} + 0.65 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_1}$
5	2	1	0	$1.12 \frac{\partial \omega_2}{\partial r_3} + 1.12 \frac{\partial \omega_3}{\partial r_2} - 0.37 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} + 0.37 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_3} + 0.37 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1} - 0.37 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_1}$
6	2	1	1	$1.12 \frac{\partial \omega_1}{\partial r_3} + 1.12 \frac{\partial \omega_3}{\partial r_1} - 0.37 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} + 0.37 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} - 0.37 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3} + 0.37 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2}$
7	2	2	0	$1.12 \frac{\partial \omega_1}{\partial r_2} + 1.12 \frac{\partial \omega_2}{\partial r_1} + 0.37 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} - 0.37 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} - 0.37 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} + 0.37 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2}$
8	2	2	1	$1.12 \frac{\partial \omega_1}{\partial r_1} - 1.12 \frac{\partial \omega_2}{\partial r_2} - 0.75 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_3} + 0.37 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_2} + 0.37 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_1}$

Таблица 2.9. Вклад кинематической модели второго порядка в сфероидальные коэффициенты векторного сферического разложения собственных движений звезд.

Множитель $\langle r \rangle$ у всех частных производных опущен.

j	n	k	l	s_j
1	1	0	1	$-2.89 W/r + 1.45 \frac{\partial \omega_1}{\partial r_2} - 1.45 \frac{\partial \omega_2}{\partial r_1} - 0.29 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} + 0.87 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} - 0.29 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} + 0.87 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2} + 0.56 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_3}$
2	1	1	0	$-2.89 V/r - 1.45 \frac{\partial \omega_1}{\partial r_3} + 1.45 \frac{\partial \omega_3}{\partial r_1} - 0.29 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} + 0.87 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} + 0.58 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 0.87 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3} - 0.29 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2}$
3	1	1	1	$-2.89 U/r + 1.45 \frac{\partial \omega_2}{\partial r_3} - 1.45 \frac{\partial \omega_3}{\partial r_2} + 0.58 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} + 0.87 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} + 0.87 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_3} - 0.29 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1} - 0.29 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_1}$
4	2	0	1	$-0.65 M_{11}^+ - 0.65 M_{22}^+ + 1.30 M_{33}^+$
5	2	1	0	$2.24 M_{23}^+$
6	2	1	1	$2.24 M_{13}^+$
7	2	2	0	$2.24 M_{12}^+$
8	2	2	1	$1.12 M_{11}^+ - 1.12 M_{22}^+$
9	3	0	1	$-0.31 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} - 0.62 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} - 0.31 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} - 0.62 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2} + 0.62 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_3}$
10	3	1	0	$-0.13 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} - 0.25 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} - 0.38 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 1.01 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3} + 0.51 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2}$
11	3	1	1	$-0.38 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} - 0.25 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} + 1.01 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_3} - 0.13 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1} + 0.51 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_1}$
12	3	2	0	$0.80 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_3} + 0.80 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_2} + 0.80 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_1}$
13	3	2	1	$0.40 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} + 0.80 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} - 0.40 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} - 0.80 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2}$
14	3	3	0	$0.49 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} + 0.98 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} - 0.49 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2}$
15	3	3	1	$0.49 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} - 0.98 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} - 0.49 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1}$

Таблица 2.10. Вклад кинематической модели второго порядка в коэффициенты сферического разложения лучевых скоростей звезд.

Множитель $\langle r \rangle$ у всех частных производных опущен.

j	n	k	p	v_j/r
0	0	0	1	$1.18 M_{11}^+ + 1.18 M_{22}^+ + 1.18 M_{33}^+$
1	1	0	1	$-2.05 W/r + 0.41 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} + 0.41 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} + 1.23 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_3} + 0.82 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} + 0.82 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2}$
2	1	1	0	$-2.05 V/r + 0.41 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} + 1.23 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 0.41 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2} + 0.82 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} + 0.82 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3}$
3	1	1	1	$-2.05 U/r + 1.23 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} + 0.41 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1} + 0.41 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_1} + 0.82 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} + 0.82 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_3}$
4	2	0	1	$-0.53 M_{11}^+ - 0.53 M_{22}^+ + 1.06 M_{33}^+$
5	2	1	0	$1.83 M_{23}^+$
6	2	1	1	$1.83 M_{13}^+$
7	2	2	0	$1.831 M_{12}^+$
8	2	2	1	$0.92 M_{11}^+ - 0.92 M_{22}^+$
9	3	0	1	$-0.27 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} - 0.27 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} + 0.54 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_3} - 0.54 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} - 0.54 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2}$
10	3	1	0	$-0.11 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} - 0.33 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 0.44 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2} - 0.22 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} + 0.88 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3}$
11	3	1	1	$-0.33 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} - 0.11 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1} + 0.44 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_1} - 0.22 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} + 0.88 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_3}$
12	3	2	0	$0.69 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_3} + 0.69 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_2} + 0.69 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_1}$
13	3	2	1	$0.35 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} - 0.35 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} + 0.69 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} - 0.69 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2}$
14	3	3	0	$0.42 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} - 0.42 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 0.85 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1}$
15	3	3	1	$0.42 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} - 0.42 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1} - 0.85 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2}$

Список литературы

1. Brosche P., Veröff, des Astron. Rechen-Inst. Heidelberg, N 17, pp. 1–27, (1966)
2. Tsvetkov A.S., Journess, Systemes de reference spatio-temporels, Dresden, Germany (1999)
3. Tsvetkov A.S., Astron. and Astrophys. Transactions, Vol.9, pp. 1-25 (1995)
4. Vityazev V.V., Tsvetkov A.S., Astron. Nachr. /AN 334, No. 8, 760 – 768 (2013)
5. Vityazev V. and Shuksto A., ASP Conf. Ser. **316**, 230 (2004).
6. Бинни и Мерефилд (Binney J., Merrifield M.) Galactic astronomy. Princeton, (1998)
7. Бобылев В.В. и др., АЖ, т. 83, 821-836 (2006)
8. Бобылев В.В., Байкова А.Т., Письма в АЖ, т. 44, N11, 739-750 (2018).
9. Бобылев В.В., Письма в АЖ, т. 30, № 11, с. 861-873 (2004)
10. Бобылев В.В., Байкова А.Т., Лебедева С.В., Письма в АЖ, т. 33, №11, с. 809-818 (2007).
11. Бобылев В.В., Байкова А.Т., Письма в АЖ, т. 40, №12, 830-839 (2014)
12. Бобылев В.В., Байкова А.Т., Письма в АЖ, т. 43, №3 (2017)
13. Витязев В.В., Цветков А.С., Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 2 (N8), стр. 73-79 (1989).
14. Витязев В.В., Цветков А.С., Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 2 (N8), стр. 79-84 (1990).
15. Витязев В.В., Цветков А.С., Письма в АЖ, т. 35, №2, с. 114-128 (2009).
16. Витязев В.В., Цветков А.С., Письма в АЖ, т. 40, №11, с. 783–793 (2014).
17. Витязев и др., Письма в АЖ, т. 44, N4, с. 265-276 (2018)
18. Витязев В.В. и др. Астрофизика, т. 60, вып. 4, 503 (2017).
19. В.В.Витязев, А.С.Цветков, Astronomy Letters, т. 34, N2, 114-128 (2009).
20. Огородников К.Ф., Динамика звездных систем (М.: Физматгиз, 1965).
21. Цветков А.С., Амосов Ф.А., Письма в АЖ, т. 45, (2019).
22. Дю Монт (B.A. du Mont), Astron. Astrophys. 61, 127 (1977)
23. Европейское космическое агентство (ESA Gaia Science Community), Data release scenario (<https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/release>)
24. Куликовский П.Г., Звездная астрономия (М.: Наука, 1985).
25. Локтин А.В., Попова М.Э., Письма в АЖ, т. 31, 743-748 (2005)
26. Огородников К.Ф., Динамика звездных систем (М.: Физматгиз, 1965).
27. Statmodels Python module (<http://www.statmodels.org/>)
28. Торра и др., (J. Torra, D. Fernandez, and F. Figueras), Astron. Astrophys. 359, 82 (2000).
29. Цветков А. (Tsvetkov, A.) Astronomical and Astrophysical Transactions, Vol. 25, Number 2-3, p. 165-169. (2006)
30. Цветков А. (Tsvetkov A.S.), Astron. and Astrophys. Transactions, Vol.9, pp. 1-25 (1995)
31. Цветков А. (Tsvetkov A.S.), Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 81, Nos. 1-2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p.453-454 (2001)