ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εργαστηριακή Άσκηση

Ονοματεπώνυμο: Δημήτριος Λεονταρίδης

Ημερομηνία ολοκλήρωσης: 08/01/2023

1) Να σχεδιαστεί το σήμα διακριτού χρόνου

$$x[n]\begin{cases} sum(AM), & -2 \leq n \leq 4 \\ 0, & 4 < n \leq 10 \\ \sqrt{2n}, & 10 < n \leq 20 \end{cases}$$

Όπου AM ο αριθμός μητρώου του φοιτητή και $sum(AM)$ το μονοψήφιο άθροισμα των ψηφίων
του.

Κώδικας:

a1.m

```
AM = 711171029;

% Single digit sum calculation
loop1 = 1;
dig = 0;
tmp = AM;
sum = 0;
while (sum > 9 || loop1 == 1)
    if (loop1 == 1)
        loop1 = 0;
    end
    sum = 0;
    while (tmp > 0)
        dig = mod(tmp, 10);
        tmp = (tmp-dig)/10;
        sum = sum + dig;
    end
    tmp = sum;
end

% x, n vector construction
n1 = -2:4;
n2 = 5:10;
n3 = 11:20;
n = [n1 n2 n3];

x1 = ones(size(n1)).*sum;
x2 = zeros(size(n2));
x3 = sqrt(2*n3);
x = [x1 x2 x3];

% x, n Stem
stem(n, x)
set(gca,'XTick',n);
ylabel("x[n]", 'fontweight', 'bold');
xlabel("-2 ≤ n ≤ 20 (sec)", 'fontweight', 'bold');
title("Discrete signal x[n]");
```

Το μονοψήφιο άθροισμα των ψηφίων του ΑΜ υπολογίζεται επαναληπτικά. Ως πρώτο βήμα, αποθηκεύεται ο αριθμός μητρώου σε μία tmp μεταβλητή και ύστερα τρέχει ο αλγόριθμος για την εύρεση του πρώτου αθροίσματος sum. Στις επόμενες επαναλήψεις το sum εκχωρείται στην tmp μεταβλητή και υπολογίζεται πάλι το άθροισμα sum των ψηφίων του. Μέχρι το άθροισμα sum να είναι μονοψήφιο. Ο τρόπος υπολογισμού του κάθε ψηφίου του tmp γίνεται επαναληπτικά στην εμφωλευμένη δομή while. Σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται το ακέραιο υπόλοιπο της τιμής του tmp με το 10. Ύστερα η τιμή αποθηκεύεται στην μεταβλητή digit και έπειτα αφαιρείται από την μεταβλητή tmp. Το αποτέλεσμα της διαφοράς διαιρείται με το 10 για τον υπολογισμό του επόμενου ψηφίου.

Το διάνυσμα χρόνου n = -2:20 αποτελείται από τα επιμέρους διανύσματα n1 ,n2, n3

n1 = -2:4;
n2 = 5:10;
n3 = 11:20;

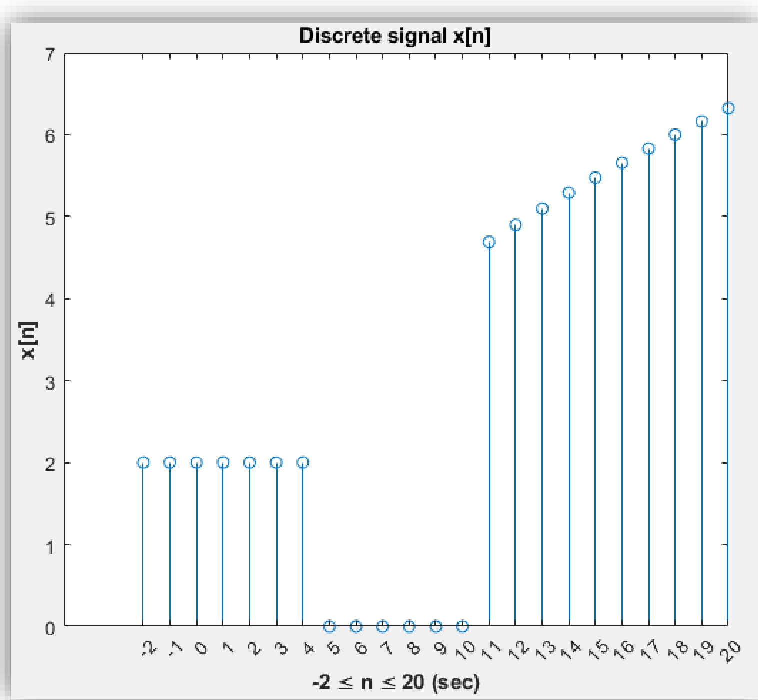
Αντίστοιχα και το διάνυσμα του συνόλου τιμών του σήματος x[n] αποτελείται από τα επιμέρους διανύσματα x1, x2, x3.

x1 = ones(size(n1)).*sum;
x2 = zeros(size(n2));
x3 = sqrt(2*n3);

Με την χρήση της συνάρτησης ones() και zeros() δημιουργείται η βηματική συνάρτηση για τον υπολογισμό των επιμέρους κλάδων του διακριτού σήματος x[n].

Με την χρήση της συνάρτησης sqrt() υπολογίζεται η τετραγωνική ρίζα του 2*n3 γιατον υπολογισμό του τρίτου κλάδου του σήματος x[n].

<u>Αποτελέσματα:</u>



Παρατηρούμε στο διάγραμμα, ότι το σύνολο τιμών του x[n] για τα επιμέρους διανύσματα είναι ορθό.

$$x[n]\begin{cases} sum(AM) = 7+1+1+1+7+1+0+2+9 = 29 \rightarrow 2+9 = 11 \rightarrow 1+1 = 2, & -2 \le n1 \le 4 \\ 0, & 4 < n2 \le 10 \\ \sqrt{2n}3, & 10 < n3 \le 20 \end{cases}$$

2) Να σχεδιαστούν τα σήματα διακριτού χρόνου

$$\text{α) } \mathrm{y[n] = u(n - (3 + AM\ mod\ 5)) - 6 * \delta(n - AM\ mod\ 4)}$$

$$\text{β) } z[n] = u(n + 2 + \mathrm{AM\ mod\ 5}) - u(n - 2 - \mathrm{AM\ mod\ 4})$$

για n=-50-(AM mod 4):50+(AM mod 4)

Όπου AM ο αριθμός μητρώου φοιτητή και u[n] και δ[n] η μοναδιαία βηματική και η μοναδιαία κρουστική ακολουθία αντίστοιχα

Κώδικας:

a2.m

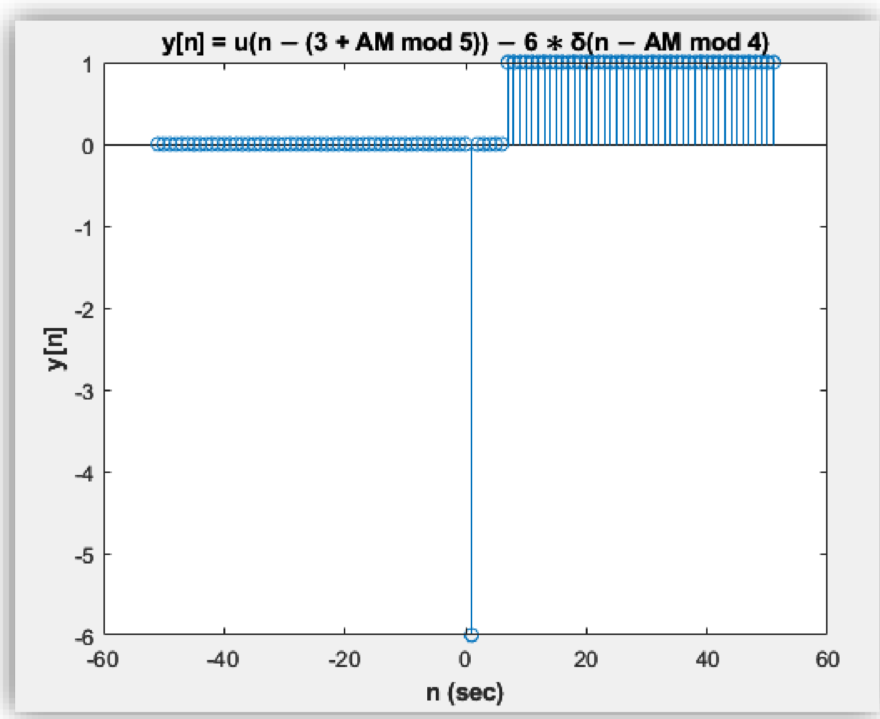
```
AM = 711171029;
n = -50-mod(AM,4):50+mod(AM,4);

% Dirac func construction
d = dirac( n - mod(AM,4) );
infx = d == Inf;
d(infx) = 1;

% y[n] signal construction
% Symbolic Math Toolbox required
sympref('HeavisideAtOrigin',1);
y = heaviside( n - ( 3 + mod(AM,5) ) ) - 6*d;

%y[n] Stem
stem(n, y)
ylabel("y[n]", 'fontweight', 'bold');
xlabel("n (sec)", 'fontweight', 'bold');
title("y[n] = u(n − (3 + AM mod 5)) − 6 ∗ δ(n − AM mod 4)");

% z[n] signal construction
sympref('HeavisideAtOrigin',1);
z = heaviside( n + 2 + mod(AM,5) ) - heaviside( n - 2 - mod(AM,4) );

%y[n] Stem
figure
stem(n, z)
ylabel("z[n]", 'fontweight', 'bold');
xlabel("n (sec)", 'fontweight', 'bold');
title("z[n] = u(n + 2 + AM mod 5) − u(n − 2 − AM mod 4)");
```

Για τον υπολογισμό της κρουστικής ακολουθίας χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση dirac() με το ζητούμενο όρισμα. Στην μεταβλητή infx αποθηκεύτηκε η χρονική τιμή του δείγματος για το οποίο η dirac() επιστρέφει άπειρο(Inf value). Η τιμή Inf αντικαταστάθηκε με 1 για την τήρηση του μοντέλου της συνάρτησης.

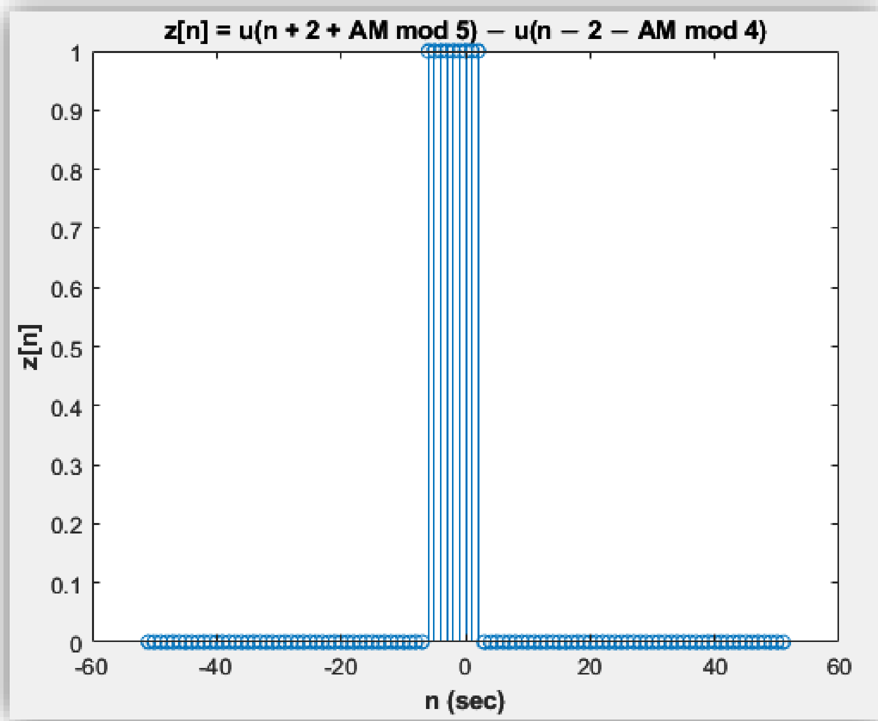
Για τον υπολογισμό της βηματικής ακολουθίας χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση heaviside() για τα διάφορα ορίσματα που ζητούνται. Η εντολή sympref('HeavisideAtOrigin',1); αντικαθιστά την επιστρεφόμενη τιμή ½ της heaviside() με την τιμή 1 για το δείγμα με τιμή 0.

Ύστερα το σύνολο τιμών του σήματος y[n] αποθηκεύτηκε στο διάνυσμα y και το σύνολο τιμών του z[n] στο διάνυσμα z.

<u>Αποτελέσματα:</u>



Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζεται το σύνολο τιμών του σήματος y[n] για της διάφορες τιμές των δειγμάτων του διανύσματος χρόνου n.



Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζεται το σύνολο τιμών του σήματος z[n] για της διάφορες τιμές των δειγμάτων του διανύσματος χρόνου n.

3) Να σχεδιαστούν τα παρακάτω σήματα και για όσα είναι περιοδικά να προσδιοριστεί η θεμελιώδης περίοδός τους και να γίνει γραφική επαλήθευση της περιοδικότητας.

a) $y1[n] = e^{\frac{jn\pi}{8}} \cos\left(\frac{n\pi}{11}\right)$

b) $y2[n] = 2\, cos(\pi/(3 + AMmod\ 4) + 0.4n)$

c) $y3[n] = (AM/100)\, cos(0.25\pi n)$

d) $y4[n] = 3\, cos^2\left(\frac{\pi}{6}n\ +\ {}^{\pi}/_{10}\right)$

e) $y5[n] = e^{\mathrm{j\pi n}/2} + e^{-\mathrm{j\pi n}/2}$

Κώδικας:

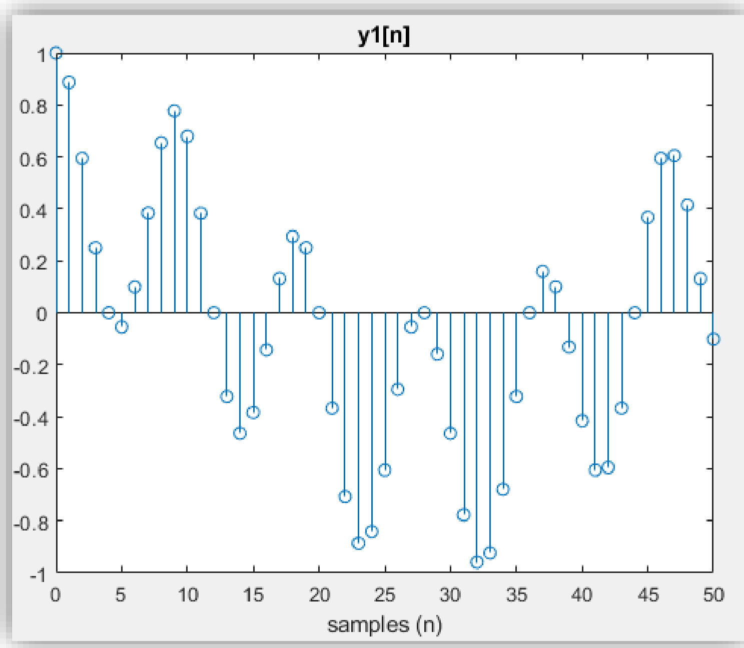
a3.m

```
AM = 711171029;

% a)
n = 0:50;
y1 = exp(n*1i*pi/8).*cos(n*pi/11);
stem(n,y1)
title("y1[n]");
xlabel("samples (n)")

% b)
n = 0:20;
y2 = 2*cos( pi / ( 3+mod(AM,4) ) + pi / 0.4*n);
figure
stem(n,y2)
set(gca,'XTick',n);
title("y2[n]");
xlabel("samples (n)")

% c)
y3 = ( AM/100 ) * cos(0.25*pi*n);
figure
stem(n,y3)
set(gca,'XTick',n);
title("y3[n]");
xlabel("samples (n)")

% d)
y4 = 3*cos(n*pi/6 + pi/10).*cos((n*pi/6) + pi/10);
figure
stem(n,y4)
set(gca,'XTick',n);
title("y4[n]");
xlabel("samples (n)")

% e)
y5 = 2*cos(n*pi/2);
figure
stem(n,y5)
set(gca,'XTick',n);
title("y5[n]");
xlabel("samples (n)")
```

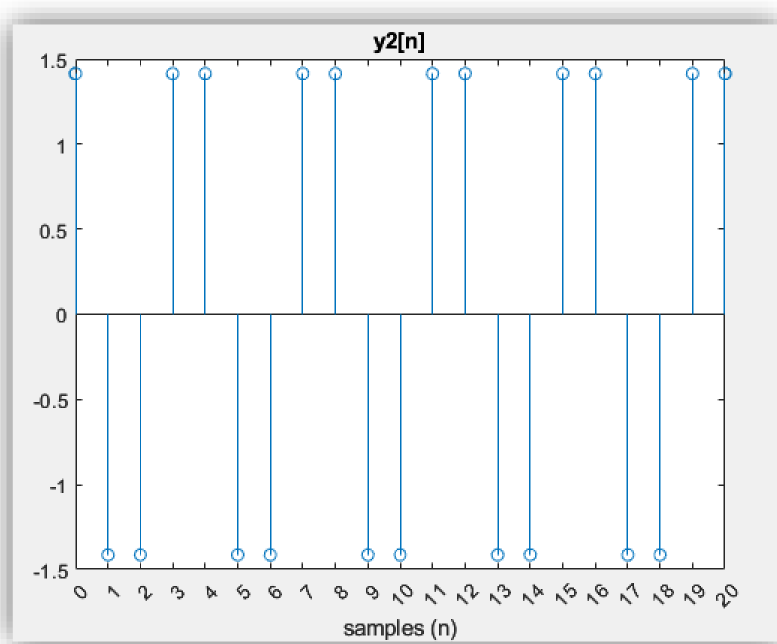
Το σήμα $y5[n] = e^{\mathrm{j}\pi\mathrm{n}/2} + e^{-\mathrm{j}\pi\mathrm{n}/2}$ μπορεί να γραφτεί και ως :

$$y5[n] = 2\,\frac{e^{\mathrm{j}\pi\mathrm{n}/2} + e^{-\mathrm{j}\pi\mathrm{n}/2}}{2} = 2\cos(\pi\mathrm{n}/2)$$

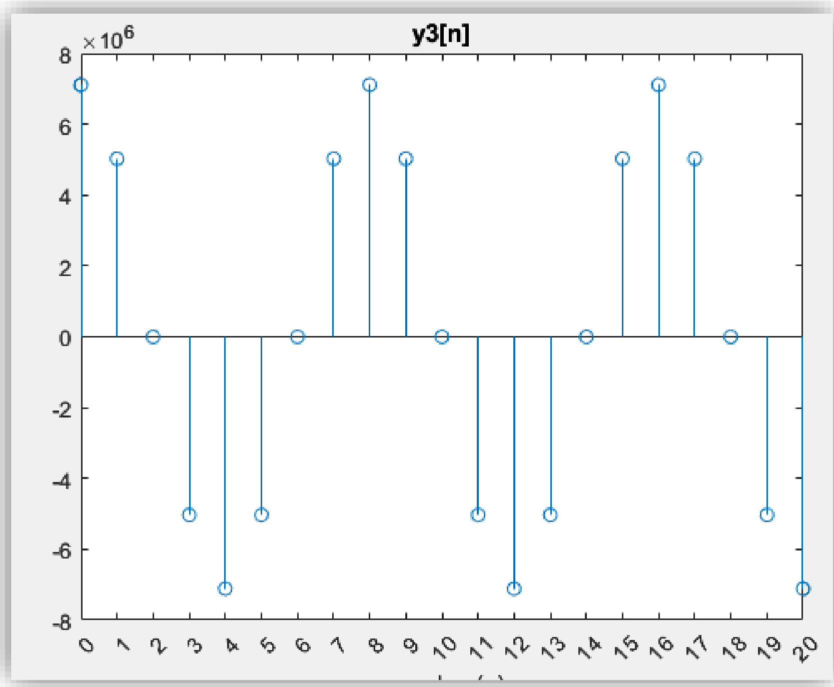
Αποτελέσματα:



Παρατηρούμε ότι το σήμα y1 δεν είναι περιοδικό.

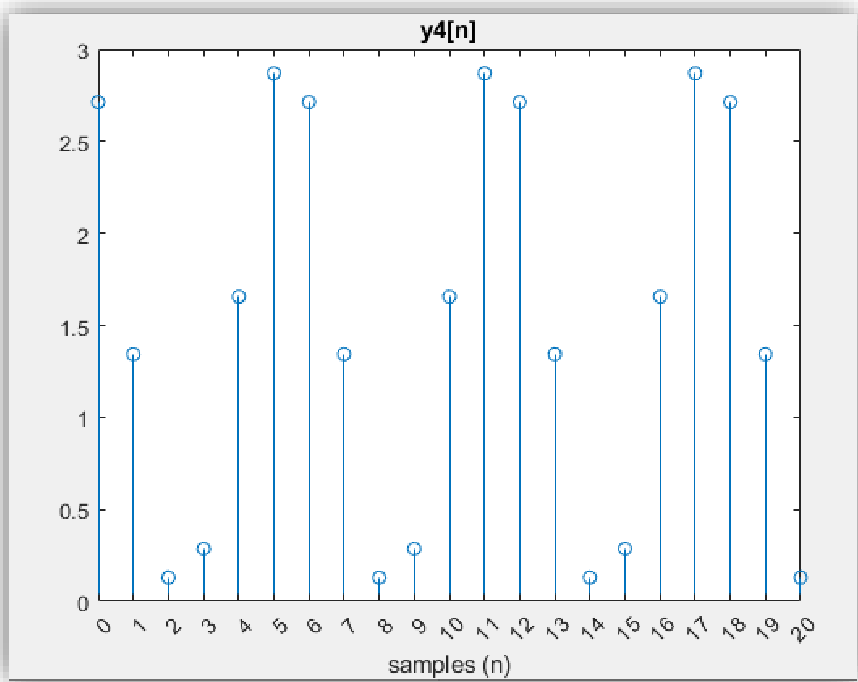


Παρατηρούμε ότι το σήμα y2 είναι περιοδικό. Η περίοδός του είναι ίση με $T = \frac{2\pi}{\pi/_{0.4}} \Leftrightarrow T = 0.8 \Leftrightarrow T = \frac{4}{5} \Longrightarrow T_{\theta\varepsilon\mu\varepsilon\lambda\iota\acute{\omega}\delta\eta\varsigma} = 5T \Leftrightarrow T_{\theta\varepsilon\mu\varepsilon\lambda\iota\acute{\omega}\delta\eta\varsigma} = 4$. Κοιτώντας το διάγραμμα, παρατηρούμε ότι η θεμελιώδης περίοδος είναι ορθή.



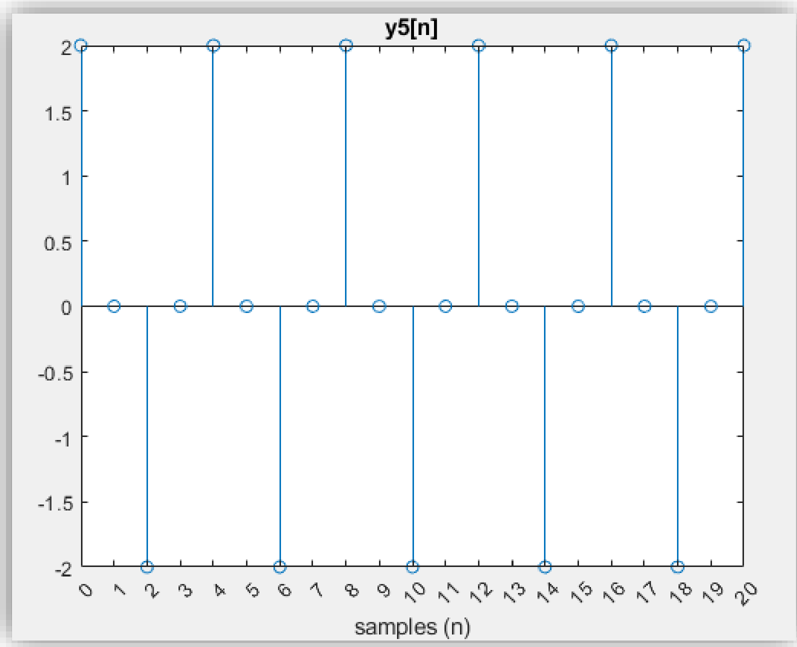
Παρατηρούμε ότι το σήμα y3 είναι περιοδικό. Η περίοδός του είναι ίση με $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{0.25\pi} \Leftrightarrow T = \frac{2}{0.25} \Leftrightarrow T = 8$. Άρα η θεμελιώδης περίοδος θα είναι ίση με $T_{\theta\varepsilon\mu\varepsilon\lambda\iota\acute{\omega}\delta\eta\varsigma} = 8$.

Κοιτώντας το διάγραμμα, παρατηρούμε ότι είναι ορθή.



Παρατηρούμε ότι το σήμα y4 είναι περιοδικό. Το σήμα $y4[n] = 3\,cos^2(\frac{\pi}{6}n + {}^{\pi}/_{10})$ αναλύεται ως, $\text{y4[n]} = 3\,cos^2\left(\frac{\pi}{6}n + {}^{\pi}/_{10}\right) = \frac{3}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}n + {}^{2\pi}/_{10}\right) + \cos(0)\right] = \frac{3}{2}[\cos\left(\frac{\pi}{3}n + {}^{\pi}/_{5}\right) + 1]$. Επομένως η περίοδός του είναι ίση με $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{{}^{\pi}/_{3}} \Leftrightarrow T = \frac{6\pi}{\pi} \Leftrightarrow T = 6$. Άρα η θεμελιώδης περίοδος θα είναι ίση με $T_{\theta\varepsilon\mu\varepsilon\lambda\iota\acute{\omega}\delta\eta\varsigma} = 6$.

Κοιτώντας το διάγραμμα, παρατηρούμε ότι η θεμελιώδης περίοδος είμαι ορθή.



Παρατηρούμε ότι το σήμα y5 είναι περιοδικό. Το σήμα $y5[n] = e^{\mathrm{j\pi n}/2} + e^{-\mathrm{j\pi n}/2}$ μπορεί να γραφτεί και ως :

$$y5[n] = 2\ \frac{e^{\mathrm{j\pi n}/2} + e^{-\mathrm{j\pi n}/2}}{2} = 2\cos(\pi n/2)$$

Επομένως η περίοδός του είναι ίση με $T = \frac{2\pi}{\omega} \iff T = \frac{2\pi}{\pi/2} \iff T = \frac{4\pi}{\pi} \iff T = 4$. Άρα η θεμελιώδης περίοδος θα είναι ίση με $T_{\theta\varepsilon\mu\varepsilon\lambda\iota\acute{\omega}\delta\eta\varsigma} = 4$.

Κοιτώντας το διάγραμμα, παρατηρούμε ότι η θεμελιώδης περίοδος είμαι ορθή.

4) Να γραφεί συνάρτηση (function) που να δέχεται σαν όρισμα σήμα διακριτού χρόνου και το χρονικό διάστημα στο οποίο ορίζεται και να επιστρέφει το άρτιο και περιττό μέρος του σήματος, καθώς και το χρονικό άξονα στον οποίο ορίζονται. Τέλος η συνάρτηση να φτιάχνει τη γραφική παράσταση των δύο σημάτων εξόδου, στο σωστό χρονικό άξονα, π.χ. [xe,xo,m]=ev_od(x,n).

Στη συνέχεια με χρήση της συνάρτησης, να υπολογιστεί το άρτιο και περιττό μέρος της ακολουθίας x[n]=[τα ψηφία του AM, 1, τα ψηφία του AM], όπου η μονάδα στο κέντρο αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή n=0. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις.

(για παράδειγμα, για AM= 17098, x[n]= [1 7 0 9 8 1 1 7 0 9 8])

<u>Κώδικας:</u>

EvenOdd.m

```
function [even, odd, m] = EvenOdd(signal,n)
    rev_signal = flip(signal, 2);
    even = (1/2) * (signal + rev_signal);
    odd = (1/2) * (signal - rev_signal);
    m = n;
end
```

Με την συνάρτηση flip αντιστρέφεται η σειρά των στοιχείων του διανύσματος εισόδου signal. Το διάνυσμα rev_signal αντιστοιχεί στο signal[-n]. Ύστερα το περιττό μέρος του σήματος εισόδου αποθηκεύεται στο διάνυσμα odd και το άρτιο μέρος στο διάνυσμα even.

a4.m

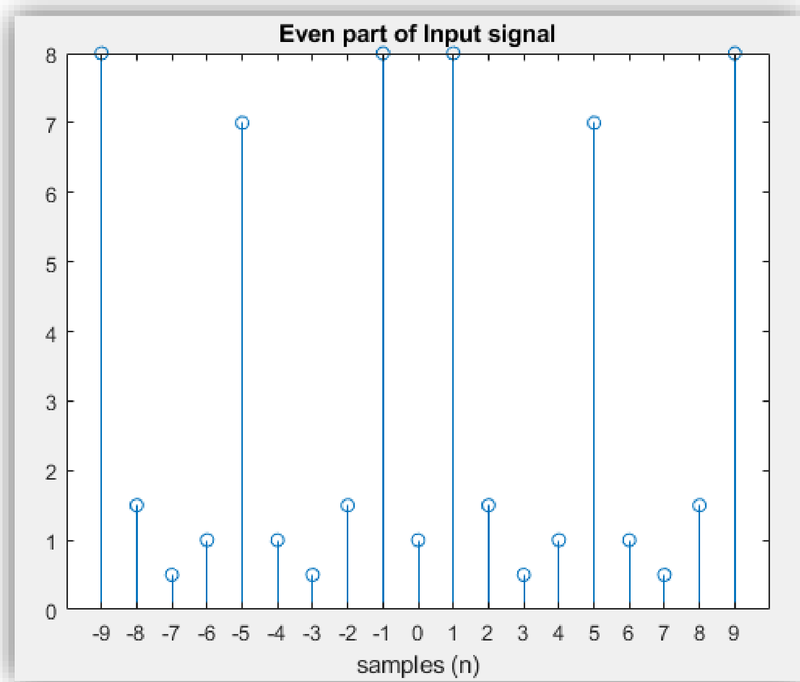
AM = [7 1 1 1 7 1 0 2 9];

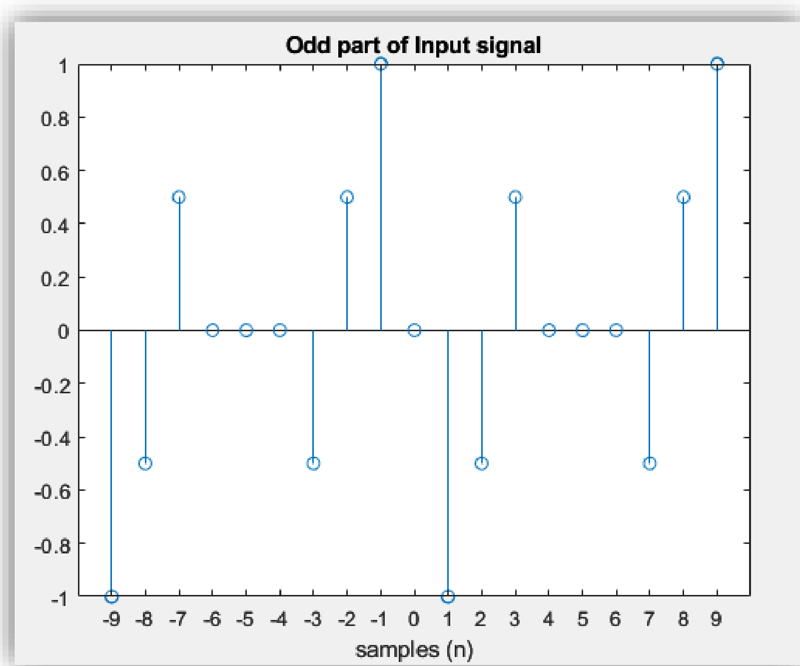
```
% Construction of Input signal
n = -length(AM):length(AM);
signal = [AM 1 AM];

% Construction of Even_part and Odd part
[sig_ev, sig_od, m] = EvenOdd(signal, n);

stem(m, sig_ev)
set(gca,'XTick',n);
title("Even part of Input signal");
xlabel("samples (n)");

figure
stem(m, sig_od)
set(gca,'XTick',n);
title("Odd part of Input signal");
xlabel("samples (n)");
```

Το χρονικό διάστημα αποθηκεύεται στο διάνυσμα n και απαριθμείται από το -9 έως το 9, σύμφωνα με το πλήθος των στοιχείων του διανύσματος AM.

Ύστερα γίνεται κλήση της συνάρτησης EvenOdd και επιστρέφονται το περιττό Odd και άρτιο Even μέρος του σήματος καθώς και το χρονικό διάστημα m που ορίζονται.

<u>Αποτελέσματα:</u>





Παρατηρούμε ότι το άρτιο και περιττό μέρος του σήματος εισόδου είναι ορθό.

5) Να υπολογιστεί η έξοδος συστήματος LTI : α) με κρουστική απόκριση $h[n] = |n - 3|(u[n] - u[n-6])$ και είσοδο

$$x[n] = \begin{cases} -1, n = -1 \\ 1, n = 0 \\ 2, n = 1 \\ -1, n = 2 \end{cases}$$

Θέτοντας $-10 \leq n \leq 10$.

β) με κρουστική απόκριση $h[n] = 0.6\ nu[n]$ και είσοδο $x[n] = u[n] - u[n-10]$

Θέτοντας $-10 \leq n \leq 30$.

Κώδικας:

a5.m

```
% a)
n = -10:10;
sympref('HeavisideAtOrigin',1);
h = abs(n-3).*(heaviside(n)-heaviside(n-6));
x = zeros(size(n));
x(-1+11) = -1;
x(0+11) = 1;
x(1+11) = 2;
x(2+11) = -1;

y = conv(x,h);
n1 = -10:length(y)-10-1;
set(gca,'XTick', n);
stem(n1,y)
title("y[n] a)");
xlabel("samples (n)");


% b)
n = -10:30;
sympref('HeavisideAtOrigin',1);
h = (0.6.^n) .* heaviside(n);
x = heaviside(n) - heaviside(n-10);

y = conv(x,h);
n1 = -10:length(y)-10-1;
set(gca,'XTick', n);
figure
stem(n1,y)
title("y[n] b)");
xlabel("samples (n)");
```

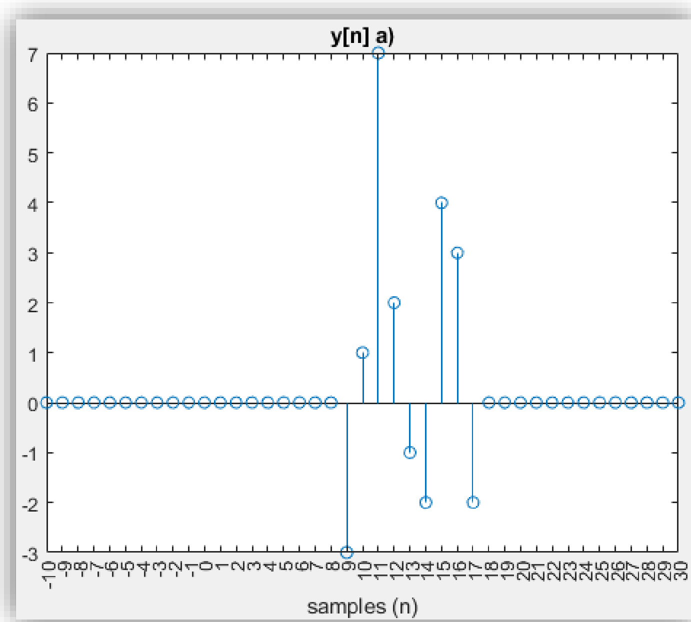
Με την χρήση της συνάρτησης heaviside() αποτυπώνεται η βηματική συνάρτηση. Η εντολή

sympref('HeavisideAtOrigin',1);

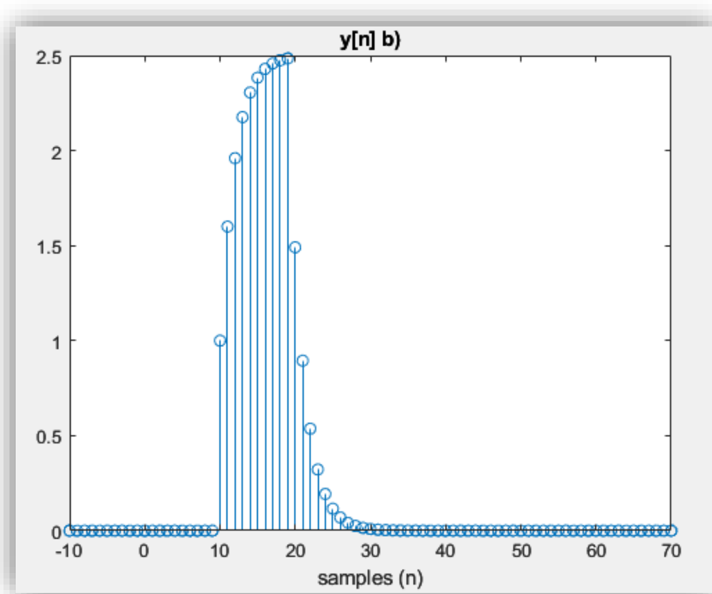
αντικαθιστά την τιμή της βηματικής ακολουθίας στο δείγμα $n = 0$, από ½ σε 1.

Αποτελέσματα:

α) Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα στης συνέλιξης μεταξύ της κρουστικής απόκρισης h και του σήματος εισόδου x για το χρονικό διάστημα $-10 \leq n \leq 30$.



β) Παρακάτω φαίνεται η ακολουθία εξόδου y[n] για το σήμα εισόδου x[n] και την κρουστική ακολουθία h[n]. Η ακολουθία εξόδου y[n] είναι το αποτέλεσμα της συνέλιξης x[n]*h[n]. Το χρονικό διάστημα είναι το $-10 \leq n \leq 70$.



6) Σχεδιάστε την συνέλιξη των ακολουθιών x [n]* y [n] όπου

$$x[n] = -(\frac{n}{4})(u(n) - u(n-4))$$

$$y[n] = (1-\frac{n}{5})(u(n) - u(n-5))$$

Η συνέλιξη των δύο ακολουθιών να γραφεί στη μορφή γινομένου διανυσματικού πίνακα Toeplitz επί διάνυσμα. Να γραφεί συνάρτηση η οποία να υλοποιεί τη συνέλιξη δύο ακολουθιών υπολογίζοντας τη συνέλιξη ως γινόμενου διανυσματικού πίνακα Toeplitz επί διάνυσμα.

Κώδικας:

ConvToep.m

```
function [Conv] = ConvToep(x,y)
% Constructing square circulant matrix
    c = [x(1) fliplr(x(end-length(y)+2:end))];
    xToep = toeplitz(c, x);

% Convolution calculation
    Conv = y*xToep;
end
```

Παραπάνω φαίνεται ο κώδικας της συνάρτησης υπολογισμού της συνέλιξης δύο διακριτών ακολουθιών. Το διάνυσμα της πρώτης ακολουθίας x μετατρέπεται σε πίνακα Toeplitz καλώντας την ConvToeplitz(c,x).

Η συνάρτηση δέχεται το διάνυσμα x, το οποίο θα είναι η πρώτη γραμμή του πίνακα Toeplitz. Δέχεται και το διάνυσμα c, το οποίο κατασκευάστηκε έτσι ώστε να αντιστοιχεί στην πρώτη στήλη του πίνακα Toeplitz.

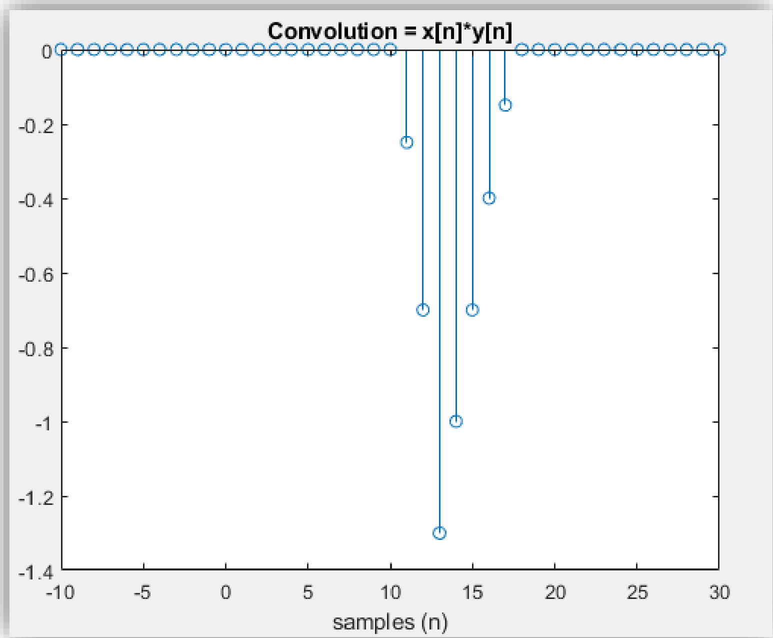
Η συνέλιξη των ακολουθιών εισόδου x και y, είναι ο πολλαπλασιασμός του πίνακα x Toeplitz και του διανύσματος y. Το αποτέλεσμα της συνέλιξης επιστρέφεται ως το διάνυσμα Conv.

a6.m

```
% x, y signal construction
n = -10:30;
sympref('HeavisideAtOrigin', 1);
x = -(n/4).*(heaviside(n)-heaviside(n-4));
y = (1-n/5).*(heaviside(n)-heaviside(n-5));

% Convolution calculation
Conv = ConvToep(x, y);
stem(n,Conv);
title("Convolution = x[n]*y[n]");
xlabel("samples (n)");
```

Αρχικά ορίζουμε το χρονικό διάστημα n = -10:30;
Στην συνέχεια, υπολογίζουμε τις ακολουθίες x και y με την χρήση της Heaviside() ως την βηματική συνάρτηση. Ύστερα αποθηκεύουμε την ακολουθία της συνέλιξης των δύο ακολουθιών εισόδου, στο διάνυσμα Conv.

Αποτελέσματα:



Παραπάνω φαίνεται η ακολουθία της συνέλιξη των διακριτών σημάτων.

$$x[n] = -(\frac{n}{4})(u(n) - u(n-4))$$

$$y[n] = (1 - \frac{n}{5})(u(n) - u(n-5))$$

7) Να διερευνηθεί με γραφικό τρόπο η γραμμικότητα του συστήματος που περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = 3\,x[n] + 4.$$

Ως είσοδοι να θεωρηθούν τα σήματα :
$x1[n] = [\,1\ 2\ 3\ 4\ 5],\ 0 \leq n \leq 4,\ x2[n] = u[n] - u[n-6].$
Ως σταθερές να θεωρηθούν οι α = 2 και β = 3 και η διερεύνηση να γίνει στο διάστημα n = [-5 :10]. Σε υποπαράθυρα του ίδιου γραφικού παραθύρου να σχεδιαστούν οι είσοδοι x1, x2 και οι δύο έξοδοι.

Κώδικας:

System.m

```
function [y] = System(x)
    y = (3*x) + 4;
end
```

Η συνάρτηση System() επιστρέφει την ακολουθία εξόδου y του συστήματός μας, για μία ακολουθία εισόδου x.

a7.m

```
% Input vectors x1, x2 calculation
n = -5:10;
x1 = [1 2 3 4 5];
x1 = [zeros(size(n(1):-1)) x1 zeros(size(n(end)-5:n(end)))];
sympref("HeavisideAtOrigin",1);
x2 = heaviside(n)-heaviside(n-6);

% Calculating ylin1 = a*S(x1) + b*S(x2) and ylin2 = S(a*x1 +b*x2)
a = 2;
b = 3;
ylin1 = (a*System(x1)) + (b*System(x2));
ylin2 = System((a*x1)+(b*x2));

% Sub-Stem graphs
subplot(2,2,1);
stem(n, x1);
title("x1[n] = [1 2 3 4 5]");

subplot(2,2,2);
stem(n, x2);
title("x2[n] = u[n]-u[n-6]");

subplot(2,2,3);
stem(n, ylin1);
title("a*S(x1[n]) + b*S(x2[n])");

subplot(2,2,4);
stem(n, ylin2);
title("S( a*x1[n] + b*x2[n] )");
```

Αρχικά τροποποιούμε το διάνυσμα x1 έτσι ώστε τα δείγματα εκτός του διαστήματος [0, 4] ναι έχουν τιμή 0. Συγκεκριμένα για τα διαστήματα [-5, -1] και [5 10].

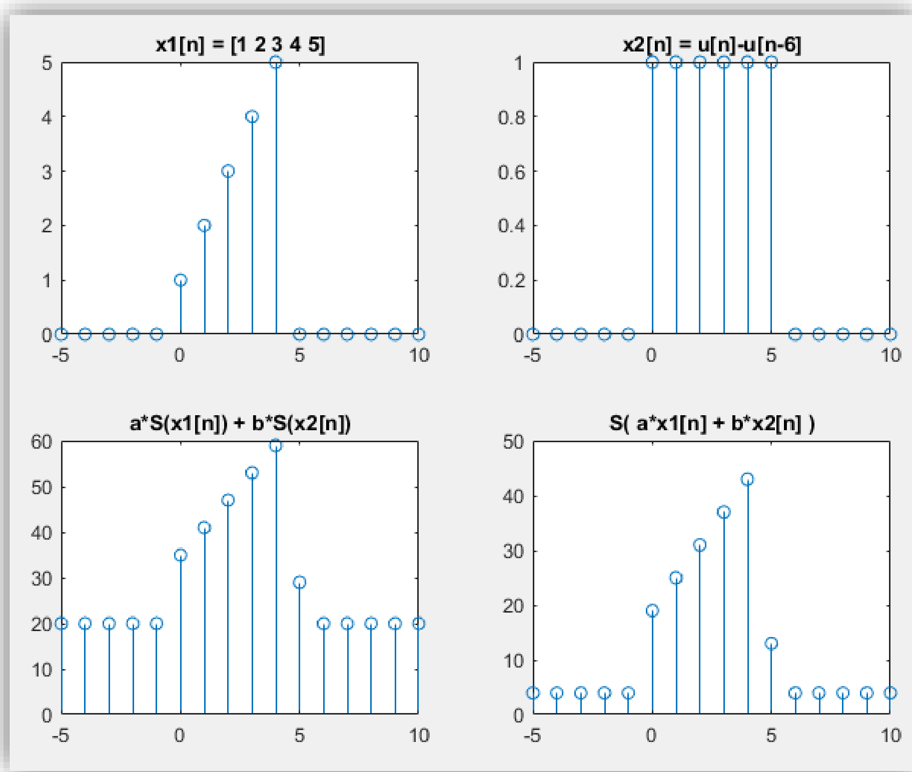
Στην συνέχεια υπολογίζουμε την ακολουθία εισόδου x2, με την συνάρτηση heaviside() για το χρονικό διάστημα n = [-5 10].

Ύστερα δημιουργούμε τις ακολουθίες εξόδου ylin1 και ylin2 οι οποίες για να είναι γραμμικό το σύστημα θα πρέπει να είναι ίσες.

$$ylin1[n] = a * S\{x1[n]\} + \; b * S\{x2[n]\}$$

$$ylin2[n] = S\{a * x1[n] + b * x2[n]\}$$

<u>Αποτελέσματα:</u>



Παρατηρούμε ότι οι ακολουθίες εξόδου ylin1 και ylin2 διαφέρουν. Επομένως το σύστημα δεν είναι γραμμικό.

8) Δίνεται η εξίσωση διαφορών ενός συστήματος:

$$y[n] + 3y[n-1] - 5y[n-2] = 0.5x[n] - x[n-2]$$

α) Να υπολογιστεί και να γίνει η γραφική παράσταση της κρουστικής απόκρισης.
β) Απ' αυτή τη γραφική παράσταση να εξηγήσετε αν το σύστημα είναι BIBO ευσταθές ή όχι.
γ) Να υπολογιστεί η έξοδος για είσοδο την ακολουθία x[n]=[2 1 1 1 0 0 1 1 0 0 2] χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση filter και τη συνάρτηση conv και να εξηγήσετε αυτά που βλέπετε σε σχέση με αυτά που σχολιάσαμε στο φυλλάδιο.
δ) Επαναλάβατε το ερώτημα (γ) για είσοδο x[n] = 2cos(3π n)

Κώδικας:

a8.m

```
% a =  y[n] coefficients, b = x[n] coefficients
L = 10;
a = [1 3 -5];
b = [0.5 0 -1];

% System response = Filter Impulse Response
d = [1 zeros(1,L-1)];
h = filter(b,a,d);
stem(0:L-1, h)
title("h[n]");
xlabel("samples (n)");

% System response calculation, Input: x = [2 1 1 1 0 0 1 1 0 0 2]
x = [2 1 1 1 0 0 1 1 0 0 2];
y = conv(x,h); % System response = Input Convolution with IIR
figure
subplot(2,1,1);
stem(0:L+length(x)-2,y);
title("y=conv(h,x), x=[2 1 1 1 0 0 1 1 0 0 2] ");
xlabel("samples (n)");

y = filter(b,a,x); % System response = Filter Response
subplot(2,1,2);
stem(0:length(x)-1,y);
title("y[n]=filter(b,a,x), x=[2 1 1 1 0 0 1 1 0 0 2] ");
xlabel("samples (n)");

% System response calculation, Input: x[n] = 2cos(3π n)
n = 0:10;
x = 2*cos(3*pi*n);
y = conv(x,h); % System response = Input Convolution with IIR
figure
subplot(2,1,1);
stem(0:L+length(x)-2,y);
title("y=conv(h,x), x=2cos(3π n) ");
xlabel("samples (n)");
```

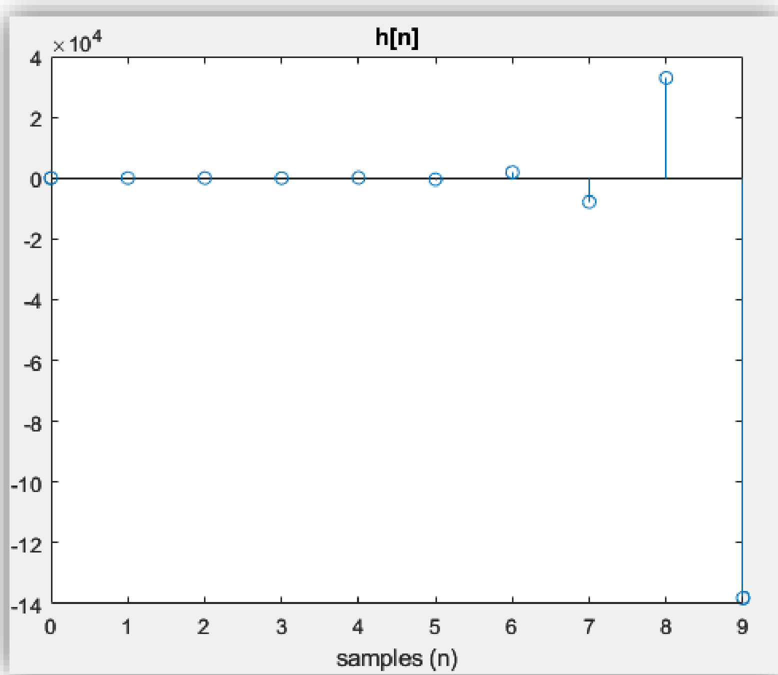
```
y = filter(b,a,x); % System response = Filter Response
subplot(2,1,2);
stem(0:length(x)-1,y);
title("y[n]=filter(b,a,x), x=2cos(3π n) ");
xlabel("samples (n)");
```

Αρχικά, υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση h του συστήματος $y[n] + 3y[n-1] - 5y[n-2] = 0.5x[n] - x[n-2]$, ως την κρουστική απόκριση του φίλτρου. Οι παράμετροι της συνάρτησης filter, είναι οι συντελεστές της απόκρισης y του συστήματος (διάνυσμα a) και οι συντελεστές της εισόδου x (διάνυσμα b) στην συνάρτηση διαφορών και η μοναδιαία ώση (διάνυσμα d).

Ύστερα, υπολογίζουμε την έξοδο y του συστήματος με είσοδο το διάνυσμα x = [2 1 1 1 0 0 1 1 0 0 2]. Η έξοδος υπολογίζεται ως η συνέλιξη του διανύσματος x με την κρουστική απόκριση h του συστήματος που βρέθηκε προηγουμένως. Στην συνέχεια υπολογίζουμε την έξοδο y τους συστήματος για την ίδια είσοδο x, ως την απόκριση του φίλτρου. Η συνάρτηση filter δέχεται ως παραμέτρους το διάνυσμα συντελεστών a, το διάνυσμα συντελεστών b και την ακολουθία εισόδου x.

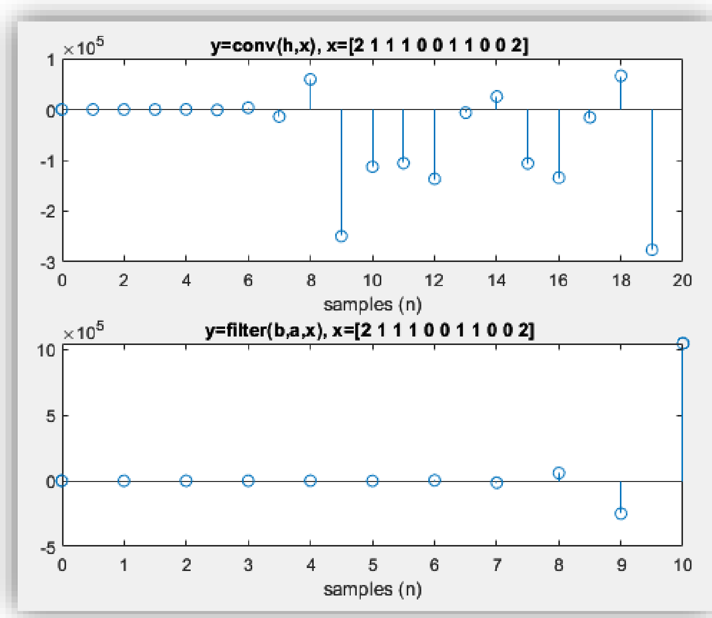
Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για την εύρεση της εξόδου του συστήματος διαφορών με είσοδο x = 2cos(3πn).

<u>Αποτελέσματα:</u>

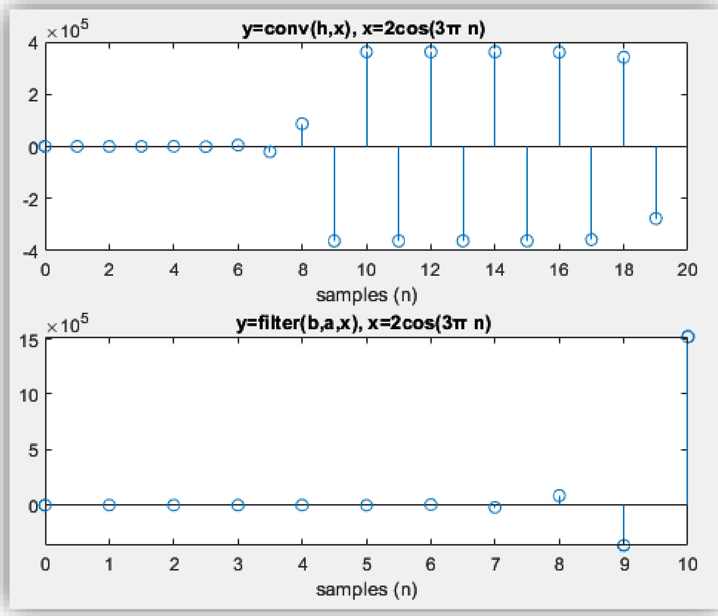


Παραπάνω φαίνεται η κρουστική απόκριση h του συστήματος διαφορών $y[n] + 3y[n-1] - 5y[n-2] = 0.5x[n] - x[n-2]$. Η κρουστική απόκριση αποτελείται από άπειρα δείγματα, αφού η συνάρτηση διαφορών είναι αναδρομική $\sum_{\kappa=0}^{2} a(\kappa)\, y[n-k] = \sum_{\kappa=0}^{2} b(\kappa)\, x[n-k]$.

Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος δεν είναι φραγμένη. Όσο ο αριθμός των χρονικών δειγμάτων αυξάνεται, η τιμή της h δεν συγκλίνει σε σταθερή τιμή, παρά μόνο στο άπειρο μετά από άπειρα δείγματα. Άρα το σύστημα δεν είναι ευσταθές.



Παραπάνω φαίνεται γραφικά η έξοδος y του συστήματος διαφορών, υπολογισμένη ως συνέλιξη και ως απόκριση του φίλτρου με είσοδο την ακολουθία x. Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα διαφέρουν. Όμως ορισμένοι πρώτοι όροι είναι ίδιοι. Η διαφοροποίηση οφείλεται στο ότι στην περίπτωση της συνέλιξης, η κρουστική απόκριση h είναι άπειρη ακολουθία, λόγω της αναδρομικότητας του συστήματος διαφορών. Στην συνέλιξη, η κρουστική απόκριση πρέπει να είναι σταθερή για να υπολογιστεί ορθά η έξοδος του συστήματος. Συνεπώς το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι λάθος.



Παραπάνω φαίνεται γραφικά η έξοδος y του συστήματος διαφορών, υπολογισμένη ως συνέλιξη και ως απόκριση του φίλτρου με είσοδο x=2cos(3πn). Παρατηρούμε ότι και εδώ η γραφική αναπαράστασης της εξόδου y διαφέρει. Η συνέλιξη δίνει διαφορετική ακολουθία εξόδου με την απόκριση του φίλτρου. Η απόκριση του φίλτρου αντιπροσωπεύει την έξοδο του συστήματος μας για την δεδομένη είσοδο x.

9) Δίνεται σύστημα που περιγράφεται από την ΕΔ

$$y[n] = 0.4y[n-1] + x[n] - 0.7x[n-2]$$

a) Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η έξοδος για χρόνο n=[-20 : 20] όταν η είσοδος είναι x

$$[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 8\delta[n-1] + 9\delta[n-2]$$

b) Να βρεθεί και να σχεδιαστεί για n=[-20 : 20] η κρουστική απόκριση του συστήματος με χρήση της συνάρτησης impz (help impz για σύνταξη).

Κώδικας:

a9.m

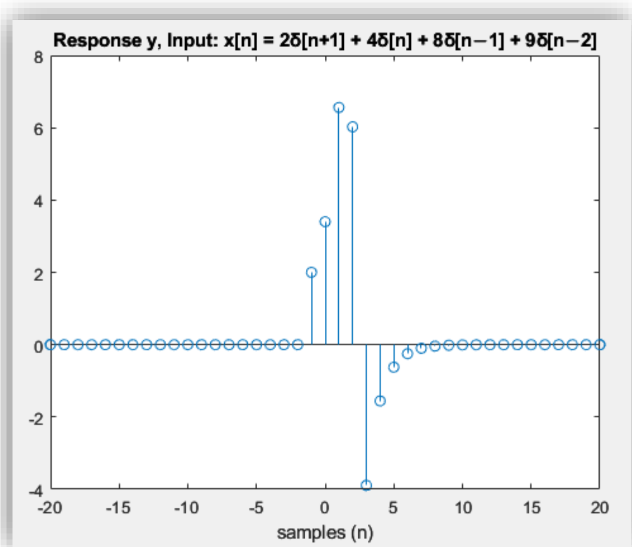
```
n = -20:20;
x = [zeros(1, 19) 2 4 8 9 zeros(1, 18)];
a = [1 -.4];
b = [1 -.7];

% System Output, Input: x[n] = 2δ[n+1] + 4δ[n] + 8δ[n-1] + 9δ[n-2]
y = filter(b, a, x);
stem(n ,y);
title("Response y, Input: x[n] = 2δ[n+1] + 4δ[n] + 8δ[n-1] + 9δ[n-2]");
xlabel("samples (n)");
```

```
% System Impulse Response
% Requires Communications Toolbox
figure
zeros(20,1)
[h, ] = impz(b, a, 21);
h = [zeros(1,20) transpose(h)];
stem(n, h)
title("Impulse Response h of System");
xlabel("samples (n)");
```

Αρχικά υπολογίζουμε την απόκριση του συστήματος διαφορών με την χρήση της συνάρτησης filter(), η οποία υπολογίζει την απόκριση του ψηφιακού φίλτρου για την ακολουθία εισόδου x.

Ύστερα υπολογίζουμε την απόκριση του συστήματος με την χρήση της συνάρτησης impz(). Η συνάρτηση δέχεται σαν είσοδο τα διανύσματα των συντελεστών των x και y. Η συνάρτηση επιστρέφει τους συντελεστές της κρουστικής απόκρισης του συστήματος υπολογίζοντας την κρουστική απόκριση του ψηφιακού φίλτρου. Οι τιμές των συντελεστών αποθηκεύονται στο διάνυσμα h για το χρονικό διάστημα [0,20]. Στο διάνυσμα h θα χρειαστεί να προσαρτήσουμε ένα διάστημα με μηδενικά στοιχεία για τις αρνητικές χρονικές στιγμές του διανύσματος n.

<u>Αποτελέσματα:</u>



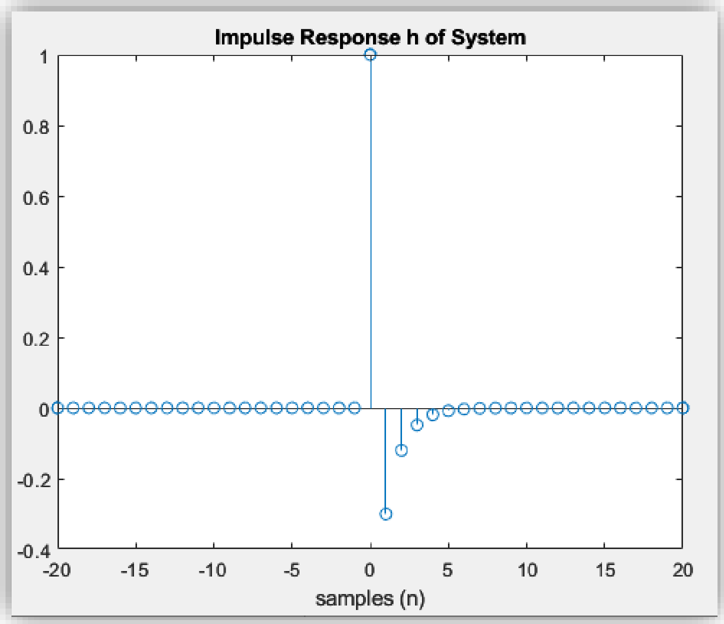
Παραπάνω φαίνεται η έξοδος του συστήματος διαφορών με είσοδο,

$$x[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 8\delta[n-1] + 9\delta[n-2]$$

Το σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών,

$$y[n] = 0.4y[n-1] + x[n] - 0.7x[n-2]$$

Η έξοδος του συστήματος υπολογίστηκε ως η απόκριση του ψηφιακού φίλτρου στο χρονικό διάστημα [-20, 20].



Παραπάνω φαίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος διαφορών,

$\mathrm{h}[n] - 0.4\mathrm{h}[n-1] \ = \delta[n] - 0.7\delta[n-2]$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος υπολογίστηκε ως η κρουστική απόκριση του ψηφιακού φίλτρου στο χρονικό διάστημα [-20, 20].

Δίνεται το σήμα

$$s[n] = 2 * \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right), \ \ n = 0 : 60.$$

Στο σήμα αυτό προστίθεται θόρυβος Gaussian με τυπική απόκλιση (standard deviation) 0.5 και το ενθόρυβο σήμα τίθεται σαν είσοδος στο σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x[n-m]$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα φίλτρο μέσης τιμής τάξης M. Να γραφεί πρόγραμμα που να υπολογίζει την έξοδο του συστήματος για M=4. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις του αθόρυβου σήματος, του ενθόρυβου σήματος και της εξόδου του συστήματος. Ποια πιστεύετε ότι είναι η δράση του συστήματος στο ενθόρυβο σήμα;

Κώδικας:

a10.m

```
% s[n] = Input Signal
n = 0:60;
s = 2*cos((pi*n)/8);

% s_n[n] = Signal s[n] with GN, sd=0.5
sd = 1/2;
s_n = s + sd*randn(size(s)) + mean(s);

% h[n] = Filter Finite Impulse Response
M = 4;
h = n*0;
for k = 1:numel(n)
    for i = 1:M
        if (k-i == 0)
            h(k) = h(k) + 1;
        else
            h(k) = h(k) + 0;
        end
    end
    h(k) = (1/M) * h(k);
end

% y[n] = Filter Response, Input: s_n[n]
y = conv(s_n, h);

subplot(3, 1, 1);
stem(n, s)
title("Input Signal");
xlabel("samples (n)");

subplot(3, 1, 2);
stem(n, s_n)
title("Input Signal with GN, sd = 0.5");
xlabel("samples (n)");

subplot(3, 1, 3);
k = 0:length(h) + length(s_n) - 2;
stem(k, y)
title("Filter Response");
xlabel("samples (n)");
```

Αρχικά αποθηκεύουμε την ακολουθία του σήματος εισόδου στο διάνυσμα s για το χρονικό διάστημα $n = [0,60]$.
Ύστερα κατασκευάζουμε το διάνυσμα s_n με τις τιμές τις ακολουθίας εισόδου προσθέτοντας τυχαίες τιμές με τυπική απόκλιση 0.5. Ο μέσος όρος του σήματος εισόδου (συνημίτονο) είναι ίσος με 0.
Στην συνέχεια υπολογίζουμε την πεπερασμένη κρουστική ακολουθία του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση, για $M = 4$.

$$y[n] = \frac{1}{4}(x[n] + x[n-1] \; + \; x[n-2] \; + \; x[n-3])$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση το άθροισμα

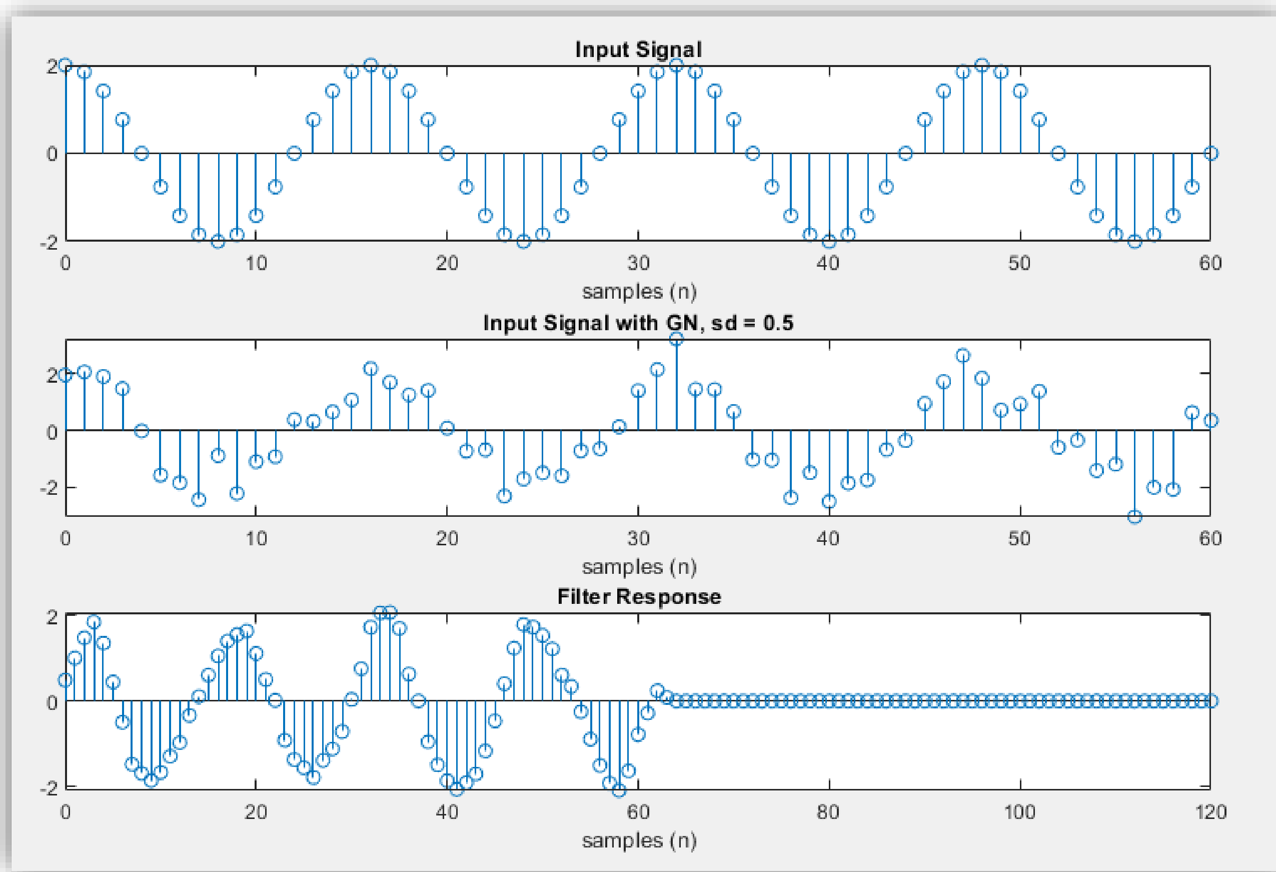
$$x[n] + x[n-1] \; + \; x[n-2] \; + \; x[n-3]$$

με το παρακάτω άθροισμα των όρων της μοναδιαίας ώσης,

$$\delta[n] + \delta[n-1] \; + \; \delta[n-2] \; + \; \delta[n-3],$$

υπολογίζουμε τις τιμές της κρουστικής ακολουθίας του φίλτρου για το χρονικό διάστημα n = [0,60]. Οι τιμές τις κρουστικής ακολουθίας αποθηκεύονται στο διάνυσμα h.
Τέλος καλείται η συνάρτηση conv() με παραμέτρους τα διανύσματα h και s_n. Το αποτέλεσμα της συνέλιξης αποθηκεύεται στο διάνυσμα y.

<u>Αποτελέσματα:</u>



Παρατηρώντας τις τιμές του ενθόρυβου διακριτού σήματος εισόδου και τις τιμές του σήματος εξόδου καταλαβαίνουμε ότι το σύστημα δρα ως φίλτρο εξομάλυνσης του θορύβου. Είναι λογικό, διότι κάθε όρος της ακολουθίας εξόδου του συστήματος υπολογίζεται ως ο μέσος όρος του παρόντος δείγματος εισόδου καθώς και των τριών προηγούμενων αυτού. Συνεπώς, το σύστημα εξομαλύνει την τυχαιότητα των παρόντων τιμών τις ακολουθίας εισόδου με την χρήση παρελθοντικών τιμών. Οι Outlier τιμές της ενθόρυβης ακολουθίας φαίνεται να μην υπάρχουν στο σήμα εξόδου του συστήματος.

10) Να σχεδιαστούν οι βηματικές αποκρίσεις των συστημάτων που περιγράφονται από τις ακόλουθες σχέσεις εισόδου-εξόδου:

$$\alpha)\ y(n) = x(n+2) + x(n-2)$$

$$\beta)\ y(n) = x^2(n-2)$$

<u>Κώδικας:</u>

a11.m

```
% Unit Response of Systems y1, y2
n = -10:10;
sympref('HeavisideAtOrigin', 1);
y1 = heaviside(n+2) + heaviside(n-2);
y2 = heaviside(n-2).*heaviside(n-2);

subplot(2,1,1);
stem(n, y1)
title("UR of y1 = x(n+2) + x(n-2)");
xlabel("samples (n)");
subplot(2,1,2);
stem(n, y2)
title("UR of y2 = x(n-2)*x(n-2)");
xlabel("samples (n)");
```

Αρχικά ορίζουμε το χρονικό διάστημα n = [-10,10].

Έπειτα, υπολογίζουμε την βηματική απόκριση των δύο συστημάτων. Η βηματικές αποκρίσης υπολογίζονται με την χρήση της συνάρτησης heaviside() με παραμέτρους τις διάφορες παραστάσεις του n.

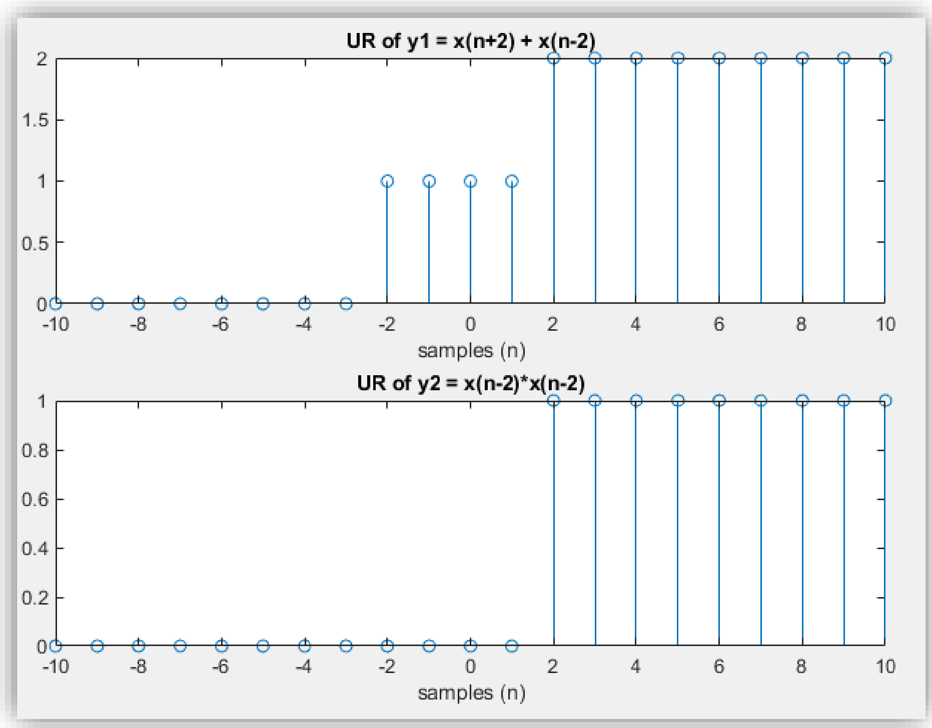
Οι ακολουθία εξόδου του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(n) = x(n+2) + x(n-2)$$

αποθηκεύεται στο διάνυσμα y1. Για το σύστημα με εξίσωση

$y(n) = x^2(n-2)$ στο διάνυσμα y2.

Αποτελέσματα:



Παραπάνω φαίνονται οι βηματικές αποκρίσεις των συστημάτων y1, y2 στο χρονικό διάστημα [-10, 10].

11) Να βρεθούν οι ακολουθίες που έχουν τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Ζ, και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι 6 πρώτοι όροι τους.

$$X1(z) = \frac{z}{z - 2}$$

$$X2(z) = \frac{3z^2}{(z^2 - 1.5z + 0.5)(z - 0.5)}$$

$$X3(z) = \frac{2z^2 + 7z}{z^2 + z - 2}$$

Κώδικας:

a12.m

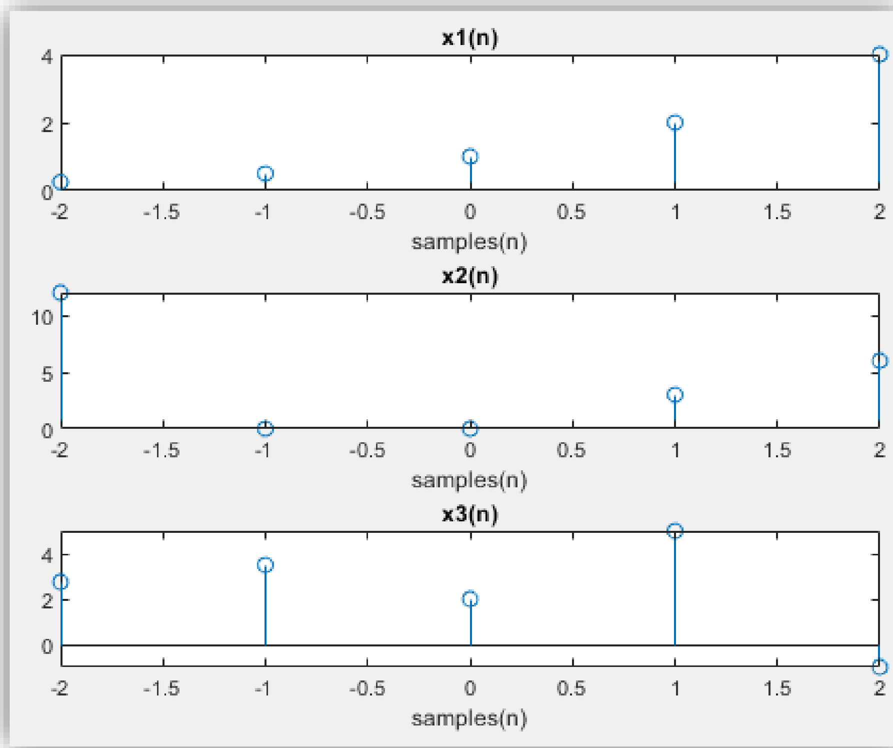
```
% Inverse Z transfotm of X1(z)
syms n z
X1 = z/(z-2);
x1 = iztrans(X1);
t = -2:2;
subplot(3,1,1);
stem(t, subs(x1, n, t))
title("x1(n)");
xlabel("samples(n)");

% Inverse Z transfotm of X2(z)
X2 = (3*z*z) / ( ((z*z) - (1.5*z) + 0.5) * (z-0.5) );
x2 = iztrans(X2);
subplot(3,1,2);
stem(t, subs(x2, n, t))
title("x2(n)");
xlabel("samples(n)");

% Inverse Z transfotm of X3(z)
X3 = ( (2*z*z) + (7*z) ) / ( (z*z) + z - 2 );
x3 = iztrans(X3);
subplot(3,1,3);
stem(t, subs(x3, n, t))
title("x3(n)");
xlabel("samples(n)");

disp('x1 = '); pretty(x1)
disp('x2 = '); pretty(x2)
disp('x3 = '); pretty(x3)
```

Αρχικά δημιουργούμε την συνάρτηση X1 ως με την χρήση της συμβολικής μεταβλητής z. Ύστερα με την χρήση της συνάρτησης iztrans() με παράμετρο την συμβολική παράσταση X1 υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z. Το αποτέλεσμα της κλήσης είναι και αυτό συμβολική παράσταση και αποθηκεύεται στην μεταβλητή x1.
Στην συνέχεια δημιουργούμε το χρονικό διάστημα t = [-2,2] με σκοπό να παραστήσουμε γραφικά τους 6 πρώτους όρους.
Η διαδικασία επαναλαμβάνεται και για τις συναρτήσεις X2 και X3.

Αποτελέσματα:

```
>> a12
x1 =
 n
2

x2 =
       / 1 \n              / 1 \n
12 - 6 | - |  (n - 1) - 18 | - |
       \ 2 /               \ 2 /

x3 =
        n
3 - (-2)
```

Παραπάνω φαίνονται οι συναρτήσεις των αντίστροφων μετασχηματισμών Z των X1, X2, X3.



Παραπάνω φαίνονται γραφικά οι έξι πρώτοι όροι των αντίστροφων μετασχηματισμών των συναρτήσεων X1, X2, X3.

12) Να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων η ρητή συνάρτηση :

$$X(z) = \frac{2z^2 + 3z - 1}{z^3 - 5z^2 + 8z - 4}$$

Κώδικας:

a13.m

```
% Simple fraction analysis
num = [0 2 3 -1];
den = [1 -5 8 -4];
[R,P,K] = residue(num, den)

% Verification
[A,B] = residue(R,P,K)
```

Αρχικά αποθηκεύουμε τους πολυωνυμικούς συντελεστές του αριθμητή στο διάνυσμα num και του παρονομαστή στο διάνυσμα den. Με την κλήση της συνάρτησης residue() οι ρίζες τις εξίσωσης του παρονομαστή αποθηκεύονται στον διάνυσμα P και οι συντελεστές των απλών κλασμάτων στο διάνυσμα R.

Έπειτα επαληθεύουμε εάν η ρητή μορφή της συνάρτησης των απλών κλασμάτων αντιστοιχεί στην αρχική άρρητη μορφή, με την χρήση της residue(). Η residue () δέχεται ως παραμέτρους τις ρίζες και τους συντελεστές που υπολογίστηκαν προηγουμένως.

Αποτελέσματα:

```
>> a13R

R =

   -2.0000
   13.0000
    4.0000


P =

    2.0000
    2.0000
    1.0000


K =

     []


A =

    2.0000    3.0000   -1.0000


B =

    1.0000   -5.0000    8.0000   -4.0000
```

Δίπλα φαίνονται οι τιμές των ριζών του παρονομαστή (διάνυσμα P) καθώς και οι συντελεστές των απλών κλασμάτων (διάνυσμα R).

Με αυτό τον τρόπο η X(z) μπορεί να γραφτεί ως,

$$X(z) = \frac{-2}{z-2} + \frac{13}{z-2} + \frac{4}{z-1}$$

Αν επαληθεύσουμε βλέπουμε ότι οι συντελεστές του αριθμητή (διάνυσμα A) και του παρονομαστή (διάνυσμα B) είναι ίδιοι με την αρχική μορφή της συνάρτησης (ρητή μορφή).

13) Δίνεται σύστημα LTI με impulse response $h(n) = 0.9^n\, u(n)$. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του, να διερευνηθεί αν είναι ευσταθές, να γίνει το διάγραμμα πόλων μηδενικών.

<u>Κώδικας:</u>

a14.m

```
% Transfer Function H
syms n;
h = 0.9^n;
H = ztrans(h);
disp("H(z) = "); pretty(H);

% Zero Crossings and Poles plot
num = [1 0];
denom = [1 -.9];
zplane(num, denom)
```

Αρχικά αποθηκεύουμε την συμβολική παράσταση της κρουστικής απόκρισης του συστήματος στην μεταβλητή h.

Ύστερα υπολογίζουμε την συνάρτηση μεταφοράς H του συστήματος με την χρήση της συνάρτησης ztrans(). Η συνάρτηση ztrans() δέχεται ως παράμετρο την κρουστική απόκριση h και επιστρέφει τον μετασχηματισμό z αυτής, δηλαδή την συνάρτηση μεταφοράς H του συστήματος.

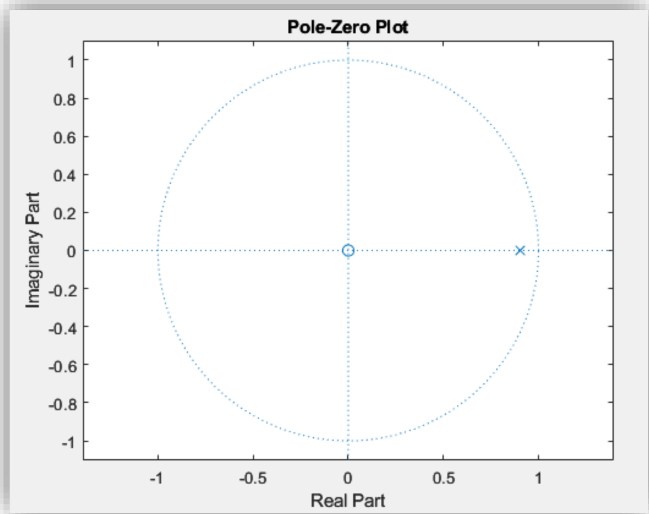
Στην συνέχεια αποθηκεύουμε τους συντελεστές του αριθμητή της H στο διάνυσμα num και τους συντελεστές του παρονομαστή στο διάνυσμα denom.

Τέλος με την χρήση της συνάρτησης zplane() αναπαριστούμε γραφικά τους πόλους του και τα μηδενικά συναρτήσει του μοναδιαίου κύκλου. Η συνάρτηση zplane() δέχεται ως παραμέτρους τα διανύσματα num, denom.

<u>Αποτελέσματα:</u>

```
>> a14
H(z) =
   z
------
     9
z - --
    10
```

Η συνάρτηση μεταφοράς H έχει την αναμενόμενη τιμή, $H(z) = \frac{z}{z-0.9}$ για $z \neq 0.9$



Παραπάνω φαίνονται οι πόλοι με αστεράκι και το σημείο μηδενισμού της H(z) με κύκλο. Εφόσον ο μοναδικός πόλος (0.9) της H(z) βρίσκεται εντός του κύκλου, τότε το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

14) Να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων η ρητή συνάρτηση :

$$X(z) = \frac{3z^4 - 1.1z^3 + 0.88\,z^2 - 2.396\,z + 1.348}{z^3 - 0.7\,z^2 - 0.14\,z + 0.048}$$

<u>Κώδικας:</u>

a15.m

```
% Simple fraction analysis
num = [3 -1.1 0.88 -2.396 1.348];
den = [0 1 -0.7 -0.14 0.048];
[R,P,K] = residue(num, den)

% Verification
[A,B] = residue(R,P,K)
```

Αρχικά αποθηκεύουμε τους πολυωνυμικούς συντελεστές του αριθμητή στο διάνυσμα num και του παρονομαστή στο διάνυσμα den. Με την κλήση της συνάρτησης residue() οι ρίζες τις εξίσωσης του παρονομαστή αποθηκεύονται στον διάνυσμα P και οι συντελεστές των απλών κλασμάτων στο διάνυσμα R.
Έπειτα επαληθεύουμε εάν η ρητή μορφή της συνάρτησης των απλών κλασμάτων αντιστοιχεί στην αρχική άρρητη μορφή, με την χρήση της residue(). Η residue () δέχεται ως παραμέτρους τις ρίζες και τους συντελεστές που υπολογίστηκαν προηγουμένως.

Αποτελέσματα:

```
>> a15

R =

    1.0000
    4.0000
   -3.0000


P =

    0.8000
   -0.3000
    0.2000


K =

    3.0000    1.0000


A =

    3.0000   -1.1000    0.8800   -2.3960    1.3480


B =

    1.0000   -0.7000   -0.1400    0.0480
```

Δίπλα φαίνονται οι τιμές των ριζών του παρονομαστή (διάνυσμα P) καθώς και οι συντελεστές των απλών κλασμάτων (διάνυσμα R) και του πολυωνύμου (διάνυσμα K).
Με αυτό τον τρόπο η X(z) μπορεί να γραφτεί ως,

$$X(z) = \frac{1}{z-0.8} + \frac{4}{z+0.3} - \frac{3}{z-0.2} + 3z + 1$$

Αν επαληθεύσουμε βλέπουμε ότι οι συντελεστές του αριθμητή (διάνυσμα A) και του παρονομαστή (διάνυσμα B) είναι ίδιοι με την αρχική μορφή της συνάρτησης (ρητή μορφή).

15) Να βρεθεί η Συνάρτηση Μεταφοράς του συστήματος που περιγράφεται από την Εξίσωση Διαφορών

$$y(n) + 1.5y(n-1) + 0.5y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

με δύο τρόπους α) με χρήση της tf() β) με χρήση της solve(). Να ελεγχθεί η ευστάθεια, να γίνει διάγραμμα πόλων μηδενικών.

Κώδικας:

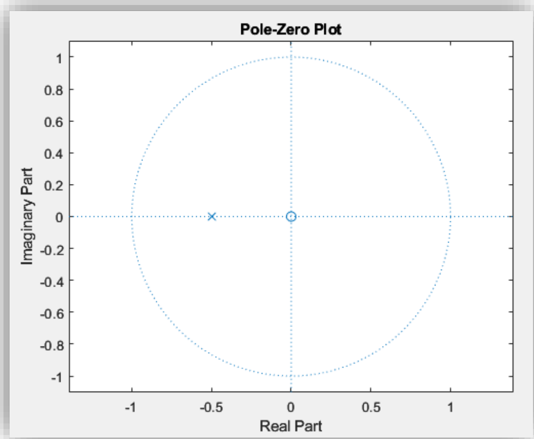
a16.m

```
% Transfer Function H with solve()
syms z X Y
X1 = z^-1*X;
Y1 = z^-1*Y;
Y2 = z^-1*Y1;
G = Y + 1.5*Y1 + 0.5*Y2 - X - X1;
sol = solve(G,Y);
H = sol/X

% Zero Crossings and Poles plot
num = [2 0];
den = [2 1];
H = tf(num, den, 1)
zplane(num, den)
```

Αρχικά κατασκευάζουμε την εξίσωση διαφορών G με τους όρους X και Y, Y1, Y2 και τους αντίστοιχους συντελεστές τους. Ύστερα με την χρήση της solve() υπολογίζεται η μορφή της συνάρτησης Y(z). Το αποτέλεσμα αποθηκεύεται στην μεταβλητή sol. Στην συνέχεια διαιρούμε την (sol)Y με την X και παίρνουμε ως αποτέλεσμα την συνάρτηση μεταφοράς H. ‘Έπειτα αποθηκεύουμε τους συντελεστές του αριθμητή και του παρονομαστή της H, στα διανύσματα num και den αντίστοιχα. Με την χρήση της tf() υπολογίζουμε την μορφή της συνάρτησης μεταφοράς H με βήμα δειγματοληψίας 1 sec. Για την εύρεση των πόλων και μηδενικών, έγινε χρήση της συνάρτησης zplane() με παραμέτρους τους συντελεστές num, den της Σ.Μ.

<u>Αποτελέσματα:</u>

```
>> a16

H =

(2*z)/(2*z + 1)


H =

    2 z
  -------
  2 z + 1

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```



Παρατηρούμε ότι η μορφή της συνάρτησης μεταφοράς είναι ίδια είτε με την χρήση της συνάρτησης solve() είτε με την tf(). Παραπάνω φαίνονται οι πόλοι με αστεράκι και το σημείο μηδενισμού (0) της H(z) με κύκλο. Εφόσον ο μοναδικός πόλος (-0.5) της H(z) βρίσκεται εντός του κύκλου, τότε το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

16) Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του αιτιατού ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου πρώτης τάξης, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y(n) - 0.9y(n-1) = x(n)$$

Να γίνει το διάγραμμα πόλων μηδενικών και να προσδιοριστεί η ΠΣ.

Κώδικας:

a17.m

```
% Transfer Function H
syms n z X Y
Y1 = z^-1*Y;
G = Y - 0.9*Y1 - X;
sol = solve(G,Y);
H = sol/X

% Impulse Response h
h = iztrans(H)

% Zero Crossings and Poles plot
num = [10 0];
den = [10 -9];
zplane(num, den)
```

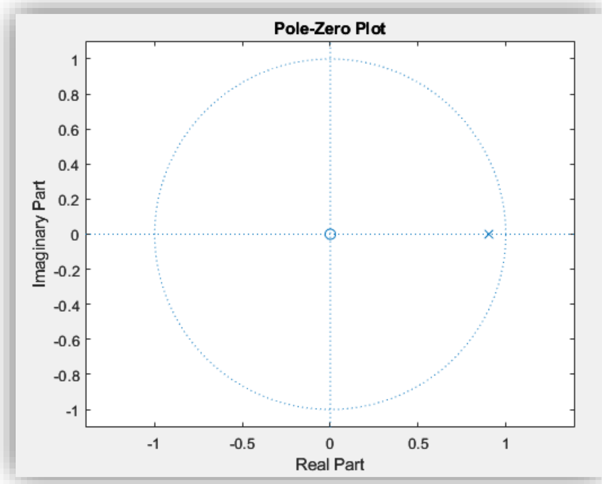
Αρχικά αποθηκεύουμε την εξίσωση διαφορών στην μεταβλητή G σε μορφή συμβολικής έκφρασης. Η εξίσωση G έχει μετασχηματιστεί στο πεδίο z.

Επομένως η λύση sol που θα προκύψει είναι η συνάρτηση Y(z). Διαιρώντας την Y(z) με την X(z) καταλήγουμε στην συνάρτηση μεταφοράς H(z). Ο αντίστροφος μετασχηματισμός της H μας οδηγεί στην βηματική απόκριση h του συστήματος.

Τέλος, με την συνάρτηση zplane() εμφανίζονται συναρτήσει του μοναδιαίου κύκλου, τα μηδενικά και οι πόλοι της Συνάρτησης Μεταφοράς. Η συνάρτηση zplane() δέχεται ως παραμέτρους τους πολυωνυμικούς συντελεστές του αριθμητή (διάνυσμα num) και του παρονομαστή (διάνυσμα den) αντίστοιχα, της συνάρτησης μεταφοράς H.

Αποτελέσματα:

```
>> a17

H =

(10*z)/(10*z - 9)


h =

(9/10)^n
```



Παραπάνω φαίνεται η μορφή της Συνάρτησης Μεταφοράς H(z) καθώς και της Κρουστικής Απόκρισης
h(n). Στο διάγραμμα μηδενικών και πόλων για την Σ.Μ. H(z) φαίνεται ότι ο μοναδικός πόλος (0.9)
βρίσκεται εντός του κύκλου. Επομένως το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

17) Δίνεται το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η είσοδος και η έξοδος συνδέονται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - 0.5y(n-1) = x(n)$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος αν το σήμα εισόδου είναι x(n) = u(n) και το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία.

Κώδικας:

a18.m

```
% Construction of diff equation
syms n z Y
x = heaviside(n);
X = ztrans(x, z);
Y1 = z^(-1)*Y;
g = Y - 0.5*Y1 - X;

% Solving the diff equation
sol = solve(g, Y);

% iztrans of sol gives the system response y(n) for Input: x(n)=u(n)
y = iztrans(sol)
```

Αρχικά κατασκευάζουμε την συνάρτηση x(n) με την χρήση της βηματικής συνάρτησης heaviside(). Ύστερα με την συνάρτηση ztrans(x, z) υπολογίζουμε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό z της x(n). Το αποτέλεσμα αποθηκεύεται στην μεταβλητή X. Κατασκευάζοντας και τους υπόλοιπους όρους Y, Y1 συνθέτουμε την νέα εξίσωση διαφορών στο πεδίο z, η οποία αποθηκεύεται στην μεταβλητή g. Η λύση της εξίσωσης αποθηκεύεται στην μεταβλητή sol και είναι η μετασχηματισμένη έξοδος Y(z) για την είσοδο X(z). Με την συνάρτηση iztrans(sol), μετατρέπουμε την sol στο πεδίο του χρόνου και έτσι παίρνουμε την απόκριση του συστήματος y(n) για είσοδο x(n) = u(n).

Αποτελέσματα:

```
>> a18

y =

2 - (1/2)^n
```

Δίπλα φαίνεται η εξίσωση της απόκρισης y(n) του συστήματος.

18) Ένα διακριτό ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + x[n-2]\,.$$

Να σχεδιαστούν: α) η κρουστική απόκριση και β) τα διαγράμματα κέρδους και φάσης συναρτήσει της
συχνότητας.
Απαιτείται υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης;

Κώδικας:

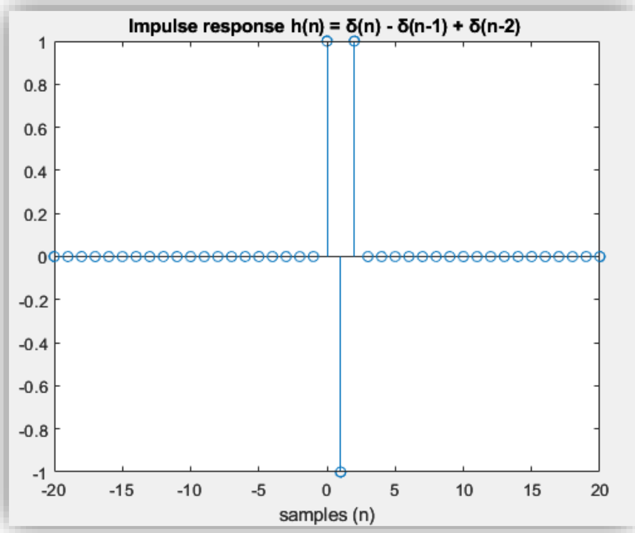
a19.m

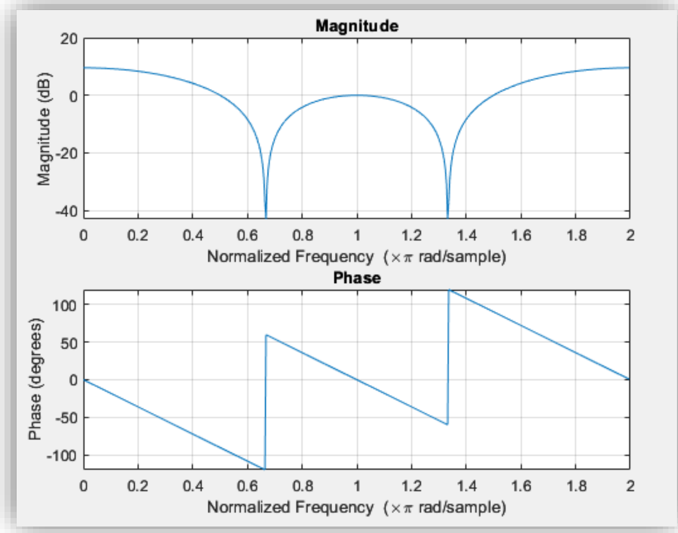
```
% Impulse Response h(n) of system: y[n] = x[n] - x[n-1] + x[n-2]
n = -20:20;
d = dirac(n);
d1 = dirac(n-1);
d2 = dirac(n-2);

I = d == Inf;
d(I) = 1;
I = d1 == Inf;
d1(I) = 1;
I = d2 == Inf;
d2(I) = 1;

h = d - d1 + d2;
stem(n, h)
title("Impulse response h(n) = δ(n) - δ(n-1) + δ(n-2) ");
xlabel("samples (n)");
```

```
% Solving difference equation: Y(z) - X(z) + X(z)/z - X(z)/z^2 = 0
syms z Yz X w
X1 = z^(-1)*X;
X2 = z^(-1)*X1;
g = Yz - X + X1 - X2;
sol = solve(g, Yz);
% Trasfer Function H(z)
Hz = sol/X;


% Frequency Response H(ω)
Hw = subs(Hz, z, exp(1i*w));
pretty(Hw)

% Magnitude and Phase of H(ω)
num = [1 1 1];
den = [1 0 0];
figure
freqz(num, den, 'whole');
```

Αρχικά ορίζουμε τις κρουστικές ακολουθίες d, d1, d2. Για d1 έχουμε δεξιά ολίσθηση στον χρόνο κατά ένα δείγμα και για d2 κατά δύο δείγματα. Με τις d, d1, d2 ορίζουμε την πεπερασμένη κρουστική απόκριση του h τους συστήματος.
Στην συνέχεια αναπαριστούμε την διαφορική εξίσωση στο πεδίο του z ως την συμβολική έκφραση g. Με την χρήση της συνάρτησης solve() η λύση της εξίσωσης αποθηκεύεται στην μεταβλητή sol. Διαιρώντας την sol με την συμβολική μεταβλητή X, παίρνουμε την συνάρτηση μεταφοράς Hz του συστήματος. Στην συνέχεια, αντικαθιστώντας με την subs() στην Hz τον όρο z με $e^{-j\omega}$ παίρνουμε την απόκριση συχνότητας Hw. Οι συντελεστές στου αριθμητή και του παρονομαστή της Hw, αποθηκεύονται στα διανύσματα num και den αντίστοιχα. Με την χρήση της συνάρτησης freqz() αναπαριστούμε γραφικά το μέτρο και την φάση της απόκρισης συχνότητας H(ω).
Για την εύρεση της απόκρισης συχνότητας δεν απαιτείται υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης. Λύνοντας την εξίσωση διαφορών ως προς Y στο πεδίο του z, παίρνουμε την χαρακτηριστική μεταφοράς. Με την αντικατάσταση του z με $e^{-j\omega}$, παίρνουμε την H(ω).

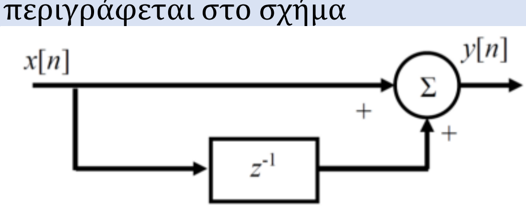
Αποτελέσματα:





Παραπάνω φαίνεται η κρουστική απόκριση, το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας.

19) Να σχεδιαστούν το μέτρο και η φάση συναρτήσει της συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου που περιγράφεται στο σχήμα



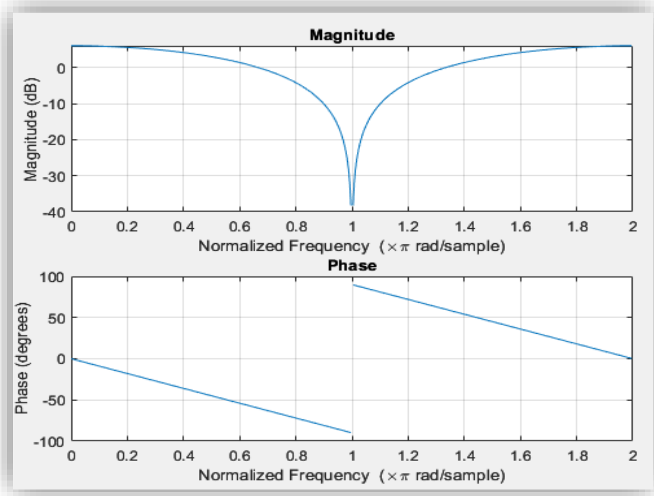
Κώδικας:

a20.m

```
% Solving the difference equation
syms z X Y w
g = Y - z*(-1)*X - X;
sol = solve(g, Y);
% Tranfer Function H(z)
Hz = sol/X;
% Frequncy Response H(ω)
Hw = subs(Hz, z, exp(1i*w));
pretty(Hw);

% Magnitude and Phase of H(ω)
num = [1 1];
den = [1 0];
freqz(num, den, 'whole');
```

Αρχικά, ορίζουμε την συμβολική παράσταση g που περιγράφει το block διάγραμμα του συστήματος. Η παράσταση g ορίστηκε στο πεδίο z και αποτελείται από την μετασχηματισμένη είσοδο $X(z)$, την $z^1X(z)$ και την μετασχηματισμένη έξοδο $Y(z)$. Στο πεδίο του χρόνου οι όροι είναι $x(n)$, $x(n-1)$ και $y(n)$ αντίστοιχα. Ύστερα, η λύση της παράστασης αποθηκεύεται στην ματαβλητή sol. Έπειτα υπολογίζεται η συνάρτηση μεταφοράς Hz, καθώς και η απόκριση συχνότητας Hw του συστήματος. Τέλος για την αναπαράσταση του μέτρου και της φάσης της $H(\omega)$, καλείται η συνάρτηση freqz() με παραμέτρους τα διανύσματα num(συντελεστές αριθμητή Hw), den(συντελεστές παρονομαστή Hw)

Αποτελέσματα:



20) Στο παραπάνω σύστημα εφαρμόζεται είσοδος x[n] = u[n] . Να σχεδιαστεί η έξοδος y[n] για 0≤n≤200. Πώς χαρακτηρίζεται το σύστημα από πλευράς διέλευσης συχνοτήτων;

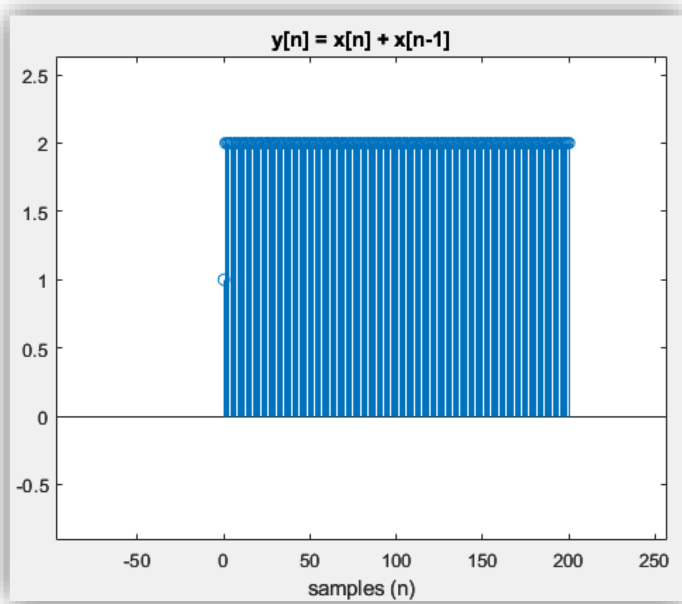
Κώδικας:

a21.m

```
n = 0:200;
sympref('HeavisideAtOrigin', 1);
x = heaviside(n);
x1 = heaviside(n-1);
y = x + x1;
stem(n, y)
```

Αρχικά ορίζουμε τους όρους x και x1 ώς την είσοδο και την μετατοπισμένη είσοδο στο πεδίο του χρόνου προς τα δεξιά κατά ένα δείγμα. Ύστερα ορίζουμε την έξοδο y στο πεδίο του χρόνου και την αναπαριστούμε γραφικά.

Αποτελέσματα:



Στο παραπάνω γράφημα φαίνεται η έξοδος y[n] του συστήματος για είσοδο x[n] = u[n]. Το σύστημα αποτελεί ένα φίλτρο πρώτης τάξης πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR).

21) Δίνεται η ακολουθία

$$x(n) = 0.7\, n\,, 0 \le n \le 19$$

Να σχεδιαστούν στο ίδιο σχήμα το μέτρο του DTFT για 0≤ω≤2π και του DFT πάνω στις συχνότητες:

$$\omega = 2\pi k/N,\ k = 0,\ldots N\text{-}1.$$

Κώδικας:

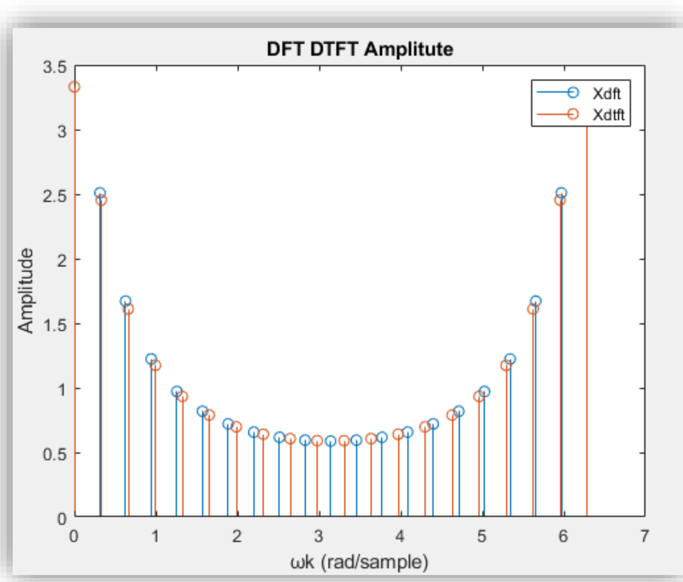
a22.m

```
n = 0:19;
x = 0.7.^n;

% DFT Amplitude
N = length(x);
k = 0:N-1;
syms w
Xdft = sum(x.*exp(-1i*w*n));
wk = 2*pi*k/N;
XXdft = subs(Xdft, w, wk);
stem(wk, abs(XXdft));
title("DFT X(k) Amplitute");
```

```
xlabel("ωk (rad/sample)");
ylabel("Amplitude");

% DTFT Amplitude
wk = linspace(0, 2*pi, 20);
Xdtft = subs(Xdft, w, wk);
hold on
stem(wk, abs(Xdtft));
legend("Xdft", "Xdtft");
```

Αρχικά ορίζουμε το χρονικό διάστημα n = [0,19] και την ακολουθία εισόδου x. Ύστερα υπολογίζουμε το άθροισμα Fourier Xdft των n-οστών όρων ως συμβολική έκφραση με συμβολική μεταβλητή την γωνιακή συχνότητα w.
Η συμβολική μεταβλητή w, αντικαθίσταται με τις τιμές του διανύσματος wk. Το διάνυσμα wk περιέχει τις k-οστές συχνότητες $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, για $k = \{0,..,N-1\}$. Η αντικατάσταση των διακριτών τιμών ω_k στην συμβολική μεταβλητή w της παράστασης Xdft μας δίνει τους όρους Fourier $X(\omega_k)$ για κάθε μία συχνότητα ω_k.
Έπειτα, για τον υπολογισμό της Xdtft ακολουθίας, το μόνο που αλλάζει είναι το διάνυσμα των συχνοτήτων wk. Το διάστημα 0 έως 2π το χωρίζουμε με την χρήση της linsapce() σε N=20 σημεία και αποθηκεύουμε τις τιμές του στο διάνυσμα wk. Οι νέες τιμές του wk αντικαθίστανται στην συμβολική μεταβλητή w της συμβολικής έκφρασης Xdft. Έτσι προκύπτουν οι τιμές του DTFT οι οποίες αποθηκεύονται στο διάνυσμα Xdtft.

<u>Αποτελέσματα:</u>



Παραπάνω φαίνεται το διάγραμμα πλάτους των DTF και DTFT μετασχηματισμών της x[n] ακολουθίας εισόδου. Στον Xdft ο χωρισμός του διαστήματος συχνοτήτων έγινε με βάση τον λόγο $\frac{2\pi k}{N}$ για $k = \{0,\ldots,N-1\}$. Ενώ στον Xdtft χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση linspace για τον διαχωρισμό του διαστήματος των συχνοτήτων.

22) Να γραφεί συνάρτηση που υλοποιεί τη γραμμική συνέλιξη δύο ακολουθιών με χρήση των
συναρτήσεων fft(), ifft().

<u>Κώδικας:</u>

a23.m

```
function [conv] = LinearConv(x1,x2)
    Len = length(x1) + length(x2) - 1;
    x1 = [x1 zeros(1, Len-length(x1))];
    x2 = [x2 zeros(1, Len-length(x2))];
    conv = ifft(fft(x1).*fft(x2));
end
```

Η συνάρτηση LinearConv() δέχεται ως είσοδο τις ακολουθίες εισόδου x1, x2 και ύστερα υπολογίζει το μέγεθος Len της ακολουθίας που θα προκύψει από την συνέλιξη των ακολουθιών εισόδου. Έπειτα για κάθε ακολουθία εισόδου συμπληρώνονται τα Len-N μηδενικά και υπολογίζεται η συνέλιξη ως ο πολλαπλασιασμός των μετασχηματισμών Fourier των εισόδων. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι στο πεδίο των συχνοτήτων και για να επιστρέψουμε στο πεδίο του χρόνου, εκτελούμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στο αποτέλεσμα. Το αποτέλεσμα conv επιστρέφεται με τον ολοκλήρωση της συνάρτησης.

23) Να υπολογιστεί μέσω της παραπάνω συνάρτησης η γραμμική συνέλιξη των ακολουθιών :

$$x[n] = [1\ 2\ 3\ 4], 0 \le n \le 3, \kappa\alpha\iota\ y[n] = [\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1], 0 \le n \le 6.$$

Να γίνει επιβεβαίωση του αποτελέσματος με χρήση της conv().

<u>Κώδικας:</u>

a24.m

```
x = [1 2 3 4];
y = [7 6 5 4 3 2 1];
% Linear Convolution x*y in frequency domain
con = LinearConv(x, y)
% Linear Convolution x*y
conv(x, y)
```

Αρχικά αρχικοποιούμε με τιμές τις ακολουθίες εισόδου x, y. Έπειτα καλούμε την συνάρτηση LinerConv() που δημιουργήσαμε στο ερώτημα 23) με παραμέτρους τις ακολουθίες x, y. Στην συνέχεια τυπώνουμε το αποτέλεσμα της συνέλιξης των x,y με την χρήση της συνάρτησης conv(). Με αυτό τον τρόπο επαληθεύουμε το αποτέλεσμα της συνάρτησης LinearConv(). Εάν τα αποτελέσματα είναι ίδια τότε η συνάρτηση LinearConv() υπολογίσει σωστά την συνέλιξη.

Αποτελέσματα:

```
con =

    7.0000   20.0000   38.0000   60.0000   50.0000   40.0000   30.0000   20.0000   11.0000    4.0000


ans =

     7    20    38    60    50    40    30    20    11     4
```

Τα αποτελέσματα της συνέλιξης και των δύο περιπτώσεων είναι όμοια.

24) Δίνονται οι ακολουθίες:

$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-2] + 4\delta[n-5]\ \kappa\alpha\iota\ w[n] = [1, 1,2, -1\ ], 0 \leq n \leq 3$

Να υπολογιστεί η κυκλική τους συνέλιξη α) στο πεδίο του χρόνου β) με χρήση fft(), ifft().

Κώδικας:

a25.m

```
% Input sequences x, w with 4 samples
n = 0:3;
x = dirac(n) - 2*dirac(n-2) + 4*dirac(n-5);
dx = x == Inf;

x(dx) = 1;
dx = x == -Inf;
x(dx) = -1;
w = [1 1 2 -1];

% Circular inversion wi of w
N = length(w);
for m = 0:N-1
    p(m+1) = mod(-m,N);
end
for m = 0:N-1
    wi(m+1) = w(p(m+1)+1);
end
% Circular Convolution wi*x
for n = 0:N-1
    win = circshift(wi, n);
    cconv(n+1) = sum(x.*win);
end
cconv

% Conv w*x in frequency domain
fconv = ifft(fft(x).*fft(w))
```

Αρχικά υπολογίζουμε τις τιμές τις ακολουθίας x[n]. Η τιμές οι οποίες είναι ίσες με $+\infty$ ή $-\infty$ αντικαθίστανται με την τιμή 1 ή -1 για την τήρηση του μοντέλου της συνάρτησης dirac(). Ύστερα αρχικοποιούμε την ακολουθία εισόδου w. Για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης απαιτείται, ο υπολογισμός της ανακλασμένης ακολουθίας $w(-m)$. Ο υπολογισμός της εκτελείται κυκλικά σύμφωνα με το διάστημα δεικτοδότησης p. Οι τιμές της ανακλασμένης ακολουθίας w αποθηκεύονται στο διάνυσμα wi. Για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης, υπολογίζουμε το άθροισμα των στοιχείων της ακολουθίας w[n-m].*x[n]. Η ακολουθία w[n-m] (διάνυσμα win)υπολογίζεται κυκλικά με την χρήση της circshift() ως η μετατόπιση του διανύσματος wi κατά n θέσεις αριστερά, όπου n = {0, N-1}. Τέλος υπολογίζουμε την συνέλιξη στο πεδίο των συχνοτήτων για επαλήθευση.

<u>Αποτελέσματα:</u>

```
cconv =

    -1     2     1    -2


fconv =

    -1     2     1    -2
```

Το αποτέλεσμα της κυκλικής συνέλιξης και της συνέλιξης με την χρήση του μετ/σμού Fourier είναι όμοια.

25) Για τις δύο ακολουθίες της προηγούμενης άσκησης:
α) Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη 8 σημείων
β) Να βρεθεί η γραμμική συνέλιξη α) στο πεδίο του χρόνου β) με χρήση fft(), ifft()

<u>Κώδικας:</u>

a26.m

```
% Input sequences x, w with 8 samples
n = 0:3;
x = dirac(n) - 2*dirac(n-2) + 4*dirac(n-5);
dx = x == Inf;

x(dx) = 1;
dx = x == -Inf;
x(dx) = -1;
w = [1 1 2 -1];
N = length(w);
w = [w zeros(1, 8 - N)];
x = [x zeros(1, 8 - N)];
```

```
% Circular inversion wi of w
N = length(w);
for m = 0:N-1
    p(m+1) = mod(-m,N);
end
for m = 0:N-1
    wi(m+1) = w(p(m+1)+1);
end

% Circular Convolution wi*n
for n = 0:N-1
    win = circshift(wi, n);
    cconv(n+1) = sum(x.*win);
end

cconv

% Linear Convolution in time domain w*n
lconv = conv(w,x)

% Convolution w*n in frequency domain
fconv = ifft(fft(x).*fft(w))
```

Για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης μεταξύ της ακολουθίας w και x θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με αυτή του ερωτήματος 25). Το μόνο που αλλάζει σε αυτή την περίπτωση είναι το πλήθος των σημείων που θα υπολογιστεί η συνέλιξη. Στο ερώτημα 25) η κυκλική συνέλιξη υπολογίστηκε για 4 σημεία, όσο είναι και το πλήθος των διανυσμάτων x και w. Ενώ τώρα θα υπολογιστεί για 8 σημεία. Επομένως προσθέτουμε στα διανύσματα x, y στο τέλος, 8-N = 4 μηδενικά. Με αυτό τον τρόπο θα υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη cconv για 8 σημεία. Για επαλήθευση υπολογίζουμε την γραμμική συνέλιξη lconv των w,x με την συνάρτηση conv() και την συνέλιξη fconv με την χρήση του μετ/σμού Fourier.

Αποτελέσματα:

```
>> a26

cconv =

     1     1     1    -2    -2     1     0     0


lconv =

     1     1     1    -2    -2     1     0     0


fconv =

     1     1     1    -2    -2     1     0     0
```

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της κυκλικής συνέλιξης 8 σημείων cconv για τις ακολουθίες x,w είναι ορθό. Τα αποτελέσματα των υπόλοιπων συνελίξεων lconv (συνέλιξη με conv()), fconv (συνέλιξη με Fourier) συμπίπτουν.

26) Να υπολογιστεί η ισχύς της μοναδιαίας βηματικής ακολουθίας:

$$u[n], για\ -5000 \leq n \leq 5000.$$

Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με το αποτέλεσμα από τη θεωρητική επίλυση.

<u>Κώδικας:</u>

a27.m

```
n = -5000:5000;
sympref('HeavisideAtOrigin', 1);
x = heaviside(n);

% Power of u[n], n = -5000:5000
L = length(x);
X = fft(x);
Pu = sum(X.*conj(X))/(L^2)
```

Αρχικά αποθηκεύουμε την βηματική ακολουθία για n = [-5000, 5000] στο διάνυσμα x. Η ισχύς της βηματικής ακολουθίας για το διάστημα n, είναι το άθροισμα των τιμών του γινομένου $X(\omega) \cdot \bar{X}(\omega)$ δια το τετράγωνο του πλήθους των στοιχείων της βηματικής,

$$L^2 = (5000 - (-5000) + 1)^2 = 10001^2$$

Όπου $\bar{X}(\omega)$, η συζυγής ακολουθία Fourier της βηματικης.
Το αποτέλεσμα της ισχύς αποθηκεύεται στην μεταβλητή Pu.

<u>Αποτελέσματα:</u>

```
>> a27

Pu =

    0.5000
```

Θεωρητικά η τιμή της ισχύς της βηματικής ακολουθίας για N = 5000 προκύπτει ως,

$$P_{u[n]} = \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=N}^{N} |u[n]|^2 =$$

$$= \frac{1}{10001} \cdot \sum_{n=-5000}^{5000} |u[n]|^2 = \frac{1}{10001} \cdot \left(\sum_{n=-5000}^{-1} 0^2 + \sum_{n=0}^{5000} 1^2 \right) = \frac{5001}{10001} = 0.50005$$

27) Να σχεδιαστεί το μέτρο, η φάση, το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος του DTFT της ακολουθίας

$$x[n] = (0.5)^n\, u[n], \quad -30 \le n \le 30$$

σε N=501 ισαπέχουσες συχνότητες ανάμεσα σε 0 έως π.
Για ποιο λόγο το διάστημα αυτό παρατήρησης (0 έως π) είναι επαρκές?

Σημείωση, ο υπολογισμός του DTFT να γίνει με βάση τον ορισμό. Στο διάγραμμα του μέτρου του DTFT να αποτυπωθεί (hold on) και το μέτρο με βάση τη θεωρητική τιμή (χρησιμοποιείστε έτοιμο τον τύπο από τη θεωρία) καθώς επίσης να αποτυπωθεί και το μέτρο του DTFT υπολογισμένο από τη freqz().

Κώδικας:

a28.m

```
% DTFT of x[n]
n = -30:30;
sympref('HeavisideAtOrigin', 1);
x = (0.5.^n).*heaviside(n);
syms w
Xdtft = sum(x.*exp(-1i*w*n));
wk = linspace(0, pi, 501);
Xdtft = subs(Xdtft, w, wk);

% Real and Imaginary Part of Xdtft
RXw = real(Xdtft);
IXw = imag(Xdtft);
figure
subplot(2,1,1);
stem(wk/pi, RXw)
title("Real Part of X(ω)");
xlabel("ωk (\times\pi rad/sample)");
subplot(2,1,2);
stem(wk/pi, IXw)
title("Imaginary Part of X(ω)");
xlabel("ωk (\times\pi rad/sample)");

% Phase of Xdtft
phase = atan(IXw./RXw);
figure
stem(wk/pi, phase*180/pi)
title("Phase of X(ω)")
ylabel("Phase (degrees)")
xlabel("ωk (\times\pi rad/sample)");

% Xdtft Amplitude using pythogorian theorem
amp = sqrt(RXw.^2 + IXw.^2);
figure
stem(wk/pi, amp)
```

```
% Xdtft Amplitude using freqz()
syms n z w
x = (0.5.^n).*heaviside(n);
Xz = ztrans(x,z);
Xw = subs(Xz, z, exp(1i*w));
pretty(Xw);
num = [2 0];
den = [2 -1];
[h, w] = freqz(num, den, wk);
hold on
stem(w/pi, h)
title("Amplitude |X(ω)|")
legend('|X(ω)| using pythagorian theorem', '|X(ω)| using freqz()');
xlabel("ωk (\times\pi rad/sample)");
```

Αρχικά αποθηκεύουμε τις τιμές της ακολουθίας $x[n] \;=\; (0.5)^n\, u[n]$ στο διάνυσμα x για το χρονικό διάστημα n = [-30, 30]. Υπολογίζουμε το άθροισμα των όρων Fourier στο διάστημα n με την συνάρτηση sum(), με συμβολική μεταβλητή την γωνιακή συχνότητα w. Η συμβολική έκφραση του αθροίσματος αποθηκεύεται στην μεταβλητή Xdtft. Ύστερα ορίζουμε το διάστημα των γωνιακών συχνοτήτων wk ως το [0,π] με 501 ισαπέχοντα δείγματα (χρήση της linspace()). Αντικαθιστούμε την συμβολική μεταβλητή w με το διάνυσμα των συχνοτήτων wk (χρήση της subs()) και οι τιμές του αθροίσματος Fourier αποθηκεύεται στο διάνυσμα Xdtft για κάθε μία από τις 501 συχνότητες. Στην συνέχεια αποθηκεύουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της DTFT ακολουθίας Xdtft στα διανύσματα RXw και IXw αντίστοιχα. Έπειτα υπολογίζουμε την φάση της ακολουθίας Xdtft για κάθε μία συχνότητα του wk ως την αντίστροφη εφαπτομένη των λόγου

$$\frac{\textit{Φανταστικό μέρος της ακολουθίας DTFT}}{\textit{Πραγματικό μέρος της ακολουθίας DTFT}}.$$

$$phase_k = tan^{-1}\left(\frac{IXw_k}{RXw_k}\right), k = \{0,..,500\}$$

Τέλος υπολογίζουμε το μέτρο των όρων του Xdtft για κάθε συχνότητα του wk, ως την ακτίνα του κύκλου του κάθε μιγαδικού όρου της ακολουθίας DTFT.

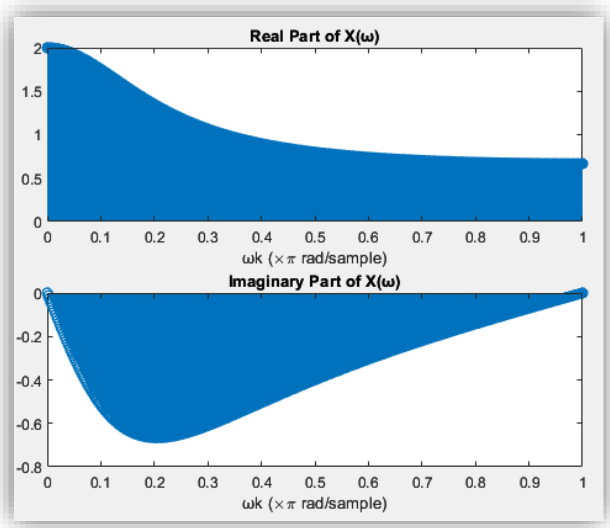
$$amp_k = \sqrt{(RXw_k^2 \;+\; IXw_k^2)} \;\;, k = \{0,..,500\}$$

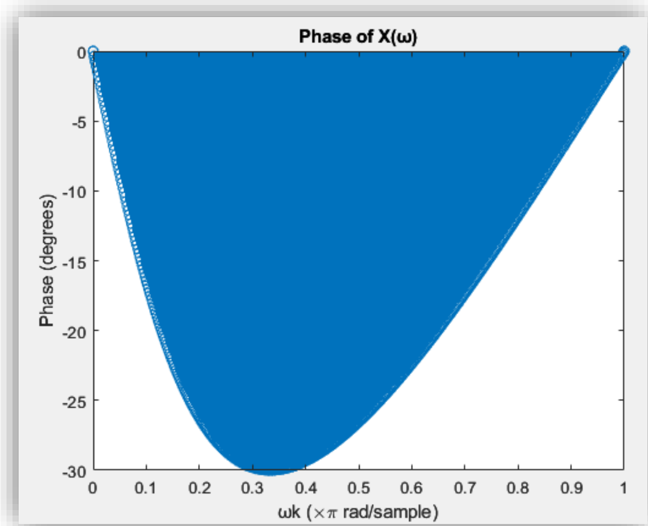
Για επαλήθευση, υπολογίζουμε το μέτρο ως την απόκριση ψηφιακού φίλτρου με την χρήση της freqz(). Αρχικά υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Z της ακολουθίας $x[n] = (0.5)^n\, u[n]$ με την χρήση της συνάρτησης ztrans(). Ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας x αποθηκεύεται ως η συμβολική έκφραση Xz. Στην Xz αντικαθιστούμε την συμβολική μεταβλητή z με το μιγαδικό εκθετικό $e^{-i\omega}$. Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού Fourier είναι $X(\omega) = \frac{2e^{-i\omega}}{2e^{-i\omega}-1}$

Στην συνέχεια αποθηκεύουμε τους συντελεστές του αριθμητή και του παρονομαστή στα διανύσματα num, den αντίστοιχα. Τα διανύσματα των συντελεστών τα δέχεται ως παραμέτρους η συνάρτηση freqz() καθώς και το διάστημα των συχνοτήτων wk.

Η συνάρτηση επιστρέφει το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier Xw για κάθε μία συχνότητα του wk, ως την απόκριση συχνότητας h ψηφιακού φίλτρου καθώς και το διάστημα των συχνοτήτων w = wk.

<u>Αποτελέσματα:</u>

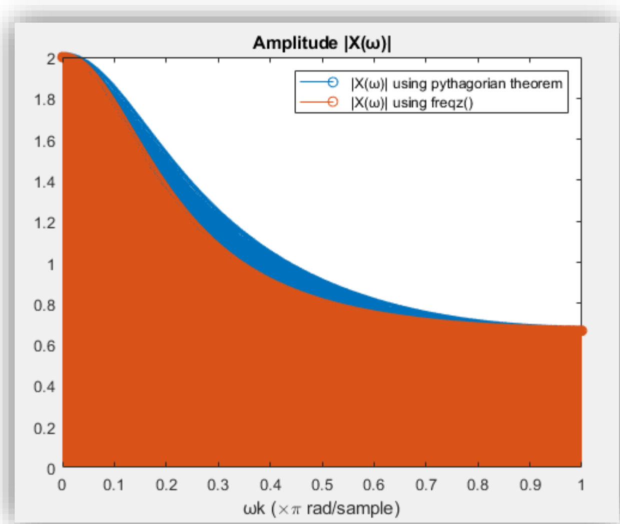




Παραπάνω φαίνονται στα αριστερά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της DTFT ακολουθίας $X(\omega)$. Επίσης στα δεξιά φαίνεται η φάση του $X(\omega)$ για κάθε μία συχνότητα του διαστήματος

$$\omega_k = [0, \pi], \qquad k = \{0, \dots, 500\}$$

Η τιμές τις φάσης έχουν κανονικοποιηθεί από rad σε μοίρες.



Παραπάνω φαίνεται το μέτρο του $X(\omega)$ για κάθε μία από της συχνότητες ω_k

υπολογισμένο με το πυθαγόρειο θεώρημα (μπλε) και ως η απόκριση συχνότητας του $X(z)$, με την χρήση της συνάρτησης freqz(). Οι τιμές των συχνοτήτων του διαστήματος ω_k έχουν κανονικοποιηθεί ως $x\pi\ rad/sample$. Το διάστημα παρατήρησης συχνοτήτων [0, π] είναι επαρκές διότι η ακολουθία περιέχει πραγματικές τιμές. Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier παρουσιάζει άρτια συμμετρία ως προς την συχνότητα 0. Εφόσον οι τιμές της ακολουθίας Fourier είναι ίδιες στα διαστήματα συχνοτήτων [-π, 0) και (0, π], τότε το διάστημα παρατήρησης [0, π] είναι αρκετό.

28) Να σχεδιαστεί το μέτρο, η φάση, το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος του DTFT της ακολουθίας

$$x[n] \;=\; (0.9 * exp\left(\frac{j\pi}{3}\right))^n, 0 \;\le\; n \;\le\; 10$$

σε N=501 ισαπέχουσες συχνότητες. Ποιο διάστημα παρατήρησης είναι επαρκές?

<u>Κώδικας:</u>

a29.m

```
% DTFT of x[n]
n = 0:10;
x = (0.9*exp(1i*pi/3)).^n;
syms w
Xdtft = sum(x.*exp(-1i*w*n));
wk = linspace(pi/3, pi+(pi/3), 501);
Xdtft = subs(Xdtft, w, wk);
% Real and Imaginary Part of Xdtft
RXw = real(Xdtft);
IXw = imag(Xdtft);
figure
subplot(2,1,1);
stem(wk/pi, RXw)
title("Real Part of X(ω)");
xlabel("ωk (\times\pi rad/sample)");
subplot(2,1,2);
stem(wk/pi, IXw)
title("Imaginary Part of X(ω)");
xlabel("ωk (\times\pi rad/sample)");

% Phase of Xdtft
phase = atan(IXw./RXw);
figure
stem(wk/pi, phase*180/pi)
title("Phase of X(ω)")
ylabel("Phase (degrees)")
xlabel("ωk (\times\pi rad/sample)");

% Xdtft Amplitude using pythogorian theorem
amp = sqrt(RXw.^2 + IXw.^2);
figure
stem(wk/pi, amp)
title("Amplitude |X(ω)|")
xlabel("ωk (\times\pi rad/sample)");
```

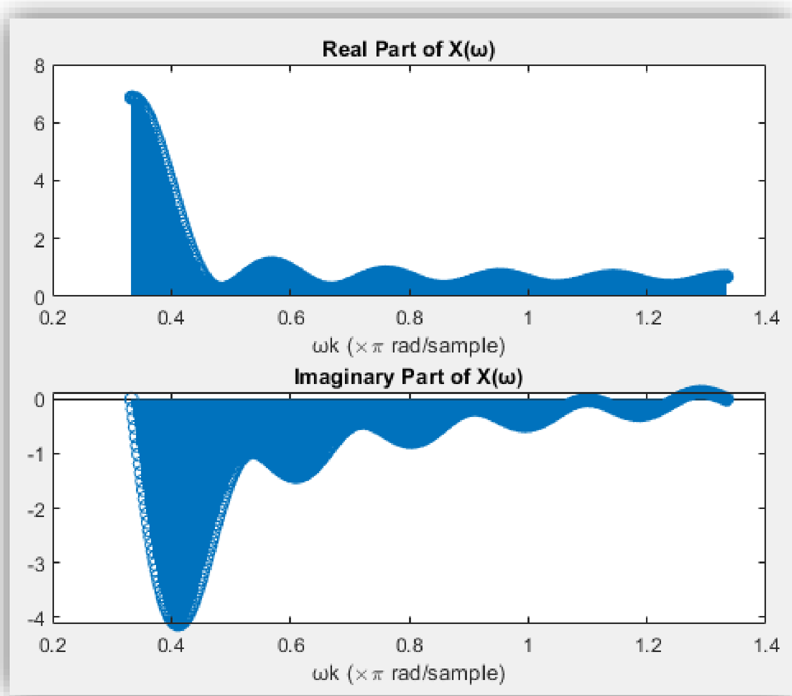
Αρχικά ορίζουμε την ακολουθία x στο χρονικό διάστημα n = [0, 10] και ύστερα υπολογίζουμε το άθροισμα των διακριτών όρων Fourier του χρονικού διαστήματος n. Το άθροισμα Fourier ορίζεται ως συμβολική έκφραση με συμβολική μεταβλητή την γωνιακή συχνότητα w. Ύστερα ορίζουμε το διάστημα των συχνοτήτων wk = $[\frac{\pi}{3}, \pi + \frac{\pi}{3}]$ με πλήθος ισαπέχοντων συχνοτήτων ίσο με 501 (χρήση Linspace). Στην συνέχεια αντικαθιστούμε στο άθροισμα Fourier Xdtft, το διάνυσμα των συχνοτήτων και έτσι για κάθε $k - οστή$ συχνότητα υπολογίζεται ο $X(\omega_k), k = \{0, \ldots, 500\}$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε το πραγματικό RXw και το φανταστικό μέρος IXw της ακολουθίας Fourier Xdtft με την χρήση των συναρτήσεων real() και imag(). Ύστερα υπολογίζουμε το διάνυσμα της φάσης phase της ακολουθίας Xdtft για κάθε μία συχνότητα του διαστήματος wk. Για των υπολογισμό των επιμέρους φάσεων $phase_k$ χρησιμοποιήθηκε ο τύπος από την άσκηση 28)

$$phase_k = tan^{-1}\left(\frac{IXw_k}{RXw_k}\right), k = \{0, .., 500\}$$

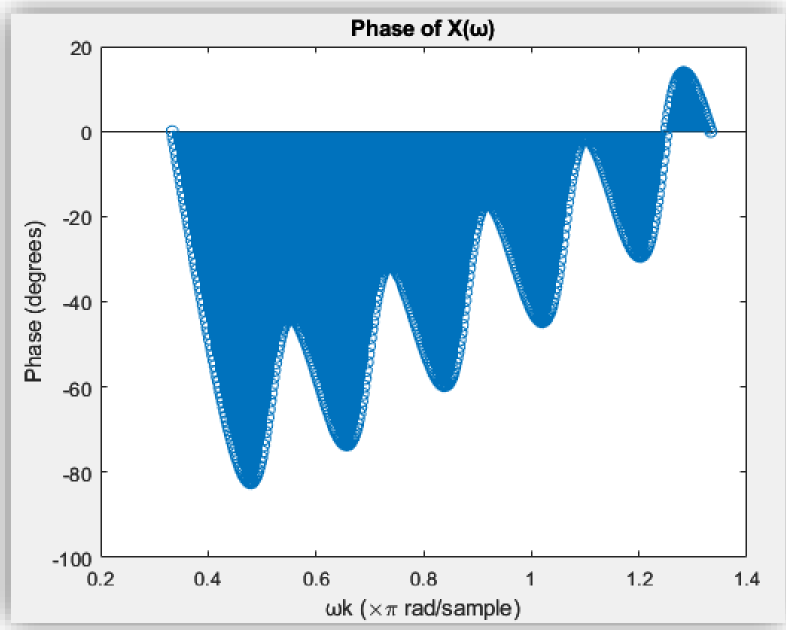
Καθώς και για τον υπολογισμό των επιμέρους μέτρων amp_k

$$amp_k = \sqrt{(RXw_k^2 + IXw_k^2)}\ , k = \{0, .., 500\}$$

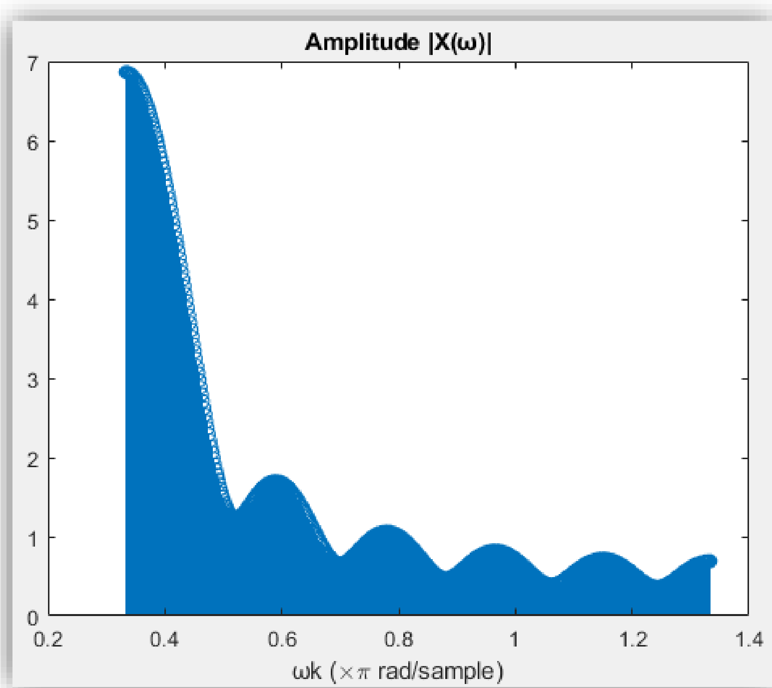
<u>Αποτελέσματα:</u>



Παραπάνω φαίνεται το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της ακολουθίας Fourier Xdtft για κάθε μία συχνότητα του διαστήματος wk = $[\frac{\pi}{3}, \pi + \frac{\pi}{3}]$.



Παραπάνω φαίνεται το διάγραμμα φάσης της ακολουθίας Xdtft για κάθε μία από τις συχνότητες του διαστήματος wk.



Παραπάνω φαίνεται το διάγραμμα μέτρου της ακολουθίας Xdtft για κάθε μία από τις συχνότητες του διαστήματος wk. Οι τιμές των συχνοτήτων του διαστήματος ω_k έχουν κανονικοποιηθεί ως $x\pi\ rad/sample$.
Εάν το διάστημα παρατήρησης περιείχε μόνο πραγματικές τιμές τότε το διάστημα παρατήρησης θα ήταν το [0, π] όπως στην άσκηση 28), διότι ο Fourier μιας ακολουθίας

πραγματικών τιμών είναι συμμετρικός ως προς την συχνότητα 0. Οπότε για τις αρνητικές συχνότητες μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι τιμές του μετασχηματισμού Fourier θα είναι ίδιες λόγω άρτιας συμμετρίας. Όμως για ακολουθίες με μιγαδικές τιμές, δεν μπορούμε να υποθέσουμε κάτι τέτοιο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ο μιγαδικός όρος της ακολουθίας $x[n] = (0.9 * exp\left(\frac{j\pi}{3}\right))^n$ πραγματοποιεί δεξιά ολίσθηση της ακολουθίας Fourier στο διάστημα των γωνιακών συχνοτήτων κατά $\frac{\pi}{3}$. Επομένως το διάστημα παρατήρησης θα είναι το $[\frac{\pi}{3},\ \pi + \frac{\pi}{3}]$

29) Να διαπιστωθεί η ιδιότητα της γραμμικότητας για το DTFT με τα δύο ακόλουθα σήματα διακριτού χρόνου:

$$x_1[n] = rand(1{,}11), \qquad x_2[n] = rand(1{,}11)$$

και α=2, β=3, στο διάστημα $0 \leq n \leq 10$

Κώδικας:

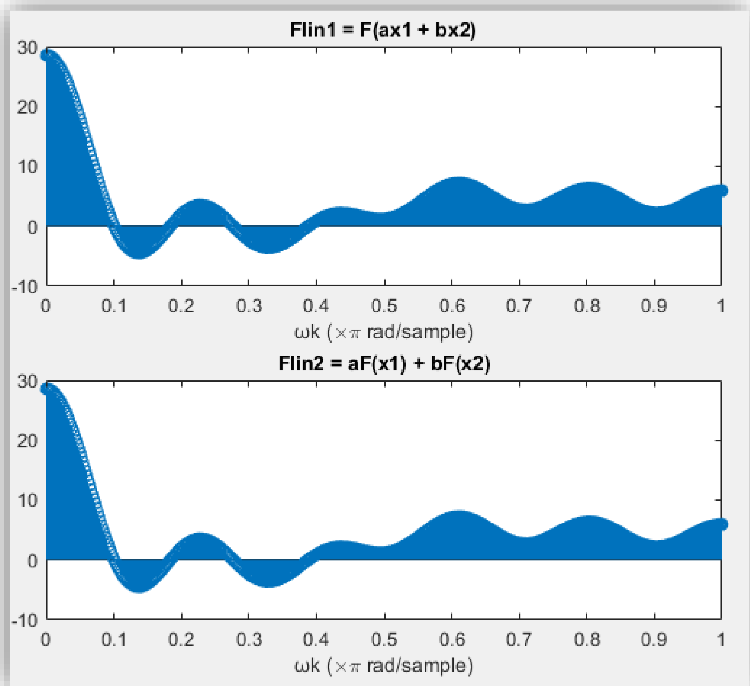
a30.m

```
n = 0:10;
x1 = rand(1,11);
x2 = rand(1,11);
a = 2;
b = 3;

wk = linspace(0, pi, 501);
% Flin1 = F{ax1 + bx2}
syms w
Flin1 = sum((a*x1 + b*x2).*exp(-1i*w*n));
Flin1 = subs(Flin1, w, wk);

% Flin2 = aF{x1} + bF{x2}
X1 = sum(x1.*exp(-1i*w*n));
X2 = sum(x2.*exp(-1i*w*n));
Flin2 = a*X1 + b*X2;
Flin2 = subs(Flin2, w, wk);

subplot(2,1,1);
stem(wk/pi, Flin1);
title("Flin1 = F(ax1 + bx2)")
xlabel("ωk (\times\pi rad/sample)");
subplot(2,1,2);
stem(wk/pi, Flin2);
title("Flin2 = aF(x1) + bF(x2)")
xlabel("ωk (\times\pi rad/sample)");
```

Αρχικά ορίζουμε τα σήματα εισόδου x1 και x2 στο χρονικό διάστημα n = [0, 10]. Ύστερα υπολογίζουμε τις ακολουθίες Flin1 και Flin2.

$$Flin1 = F\{\, ax_1[n] \;+\; ax_2[n] \,\}$$
$$Flin2 = aF\{x_1[n]\} \;+\; bF\{x_2[n]\}$$

Αποτελέσματα:



Εφόσον οι ακολουθίες Fourier Flin1 και Flin2 είναι ίδιες για το διάστημα συχνοτήτων wk = [0, π], το σύστημα το οποίο εκτελεί μετασχηματισμό DTFT στην είσοδό του, τηρεί την ιδιότητα της γραμμικότητας.