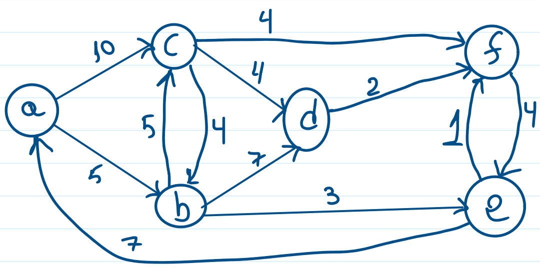
Dijkstra

Παρατήρηση: Ο Dijkstra εφαρμόζεται σε γραφήματα κατευθυνόμενα με θετικά βάρη

- Βρίσκει το συντομότερο μονοπάτι από μία κορυφή (source) προς οποιοδήποτε κορυφή



source = a

steps	Explored	Unexplored
		a^0 b^∞ c^∞ d^∞ e^∞ f^∞
k = 1	a^0	b^{5a} c^{10a} d^∞ e^∞ f^∞
2	a^0 b^{5a}	c^{10a} d^{12b} e^{8b} f^∞
3	a^0 b^{5a} e^{8b}	c^{10a} d^{12b} f^{9e}
4	a^0 b^{5a} e^{8b} f^{9e}	c^{10a} d^{12b}
5	a^0 b^{5a} e^{8b} f^{9e} c^{10a}	d^{12b}
6	a^0 b^{5a} e^{8b} f^{9e} c^{10a} d^{12b}	

From a

b: $a \to b = 5$

c: $a \to c = 10$

d: $a \to b \to d = 12$

e: $a \to b \to e = 8$

f: $a \to b \to e \to f = 9$

Βήματα Αλγορίθμου

Σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος:

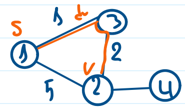
1) Αφαιρεί από τις μη-μόνιμες κορυφές, την κορυφή v με την μικρότερη απόσταση dv.

2) Προσθέτει την κορυφή v στις μόνιμες κορυφές

3) Επανα-υπολογίζει την απόσταση du για κάθε κορυφή $u \in N(v)$

Παρατηρήσεις:

- Για μια κορυφή v, η απόσταση d_v αναφέρεται στην συνολική απόσταση (άθροισμα βαρών) από την κορυφή εκκίνησης s.



- Οι μη-μόνιμες κορυφές είναι εκείνες που ακόμη δεν έχει οριστικοποιηθεί η απόσταση d_v. Το σύνολο των μη-μόνιμων κορυφών συμβολίζεται με $V \setminus S = V - S$ → Μόνιμες κορυφές

- Οι μόνιμες κορυφές είναι εκείνες που η απόσταση d_v τους δεν πρόκειται να αλλάξει. (διότι είναι η μικρότερη απόσταση, που μπορούν να απέχουν από την s)

- Ο αλγόριθμος εκτελείται κυρίως σε σταθμισμένα, μη κατευθυνόμενα και κατευθυνόμενα γραφήματα, δίχως αρνητικά βάρη.

Αλγόριθμος

```
Require: w : E → R+
void Dijkstra(G(V, E, w), s)          → κορυφή εκκίνησης
for all v ∈ V do
    d_v ← ∞; p_v ← NULL;              } Αρχικοποίηση αποστάσεων
end for                                 >> διανύσματος parent
S ← ∅; d_s ← 0;
for i ← 1; i ≤ |V| − 1; i++ do
    v* ← argmin{d_v : v ∈ V \ S};      } Βήματα 1), 2)
    S ← S ∪ {v*};                      → Μόνιμες κορυφές
    for all u ∈ V \ S and u ∈ N(v*) do     } Βήμα 3)
        if d_u > d_v* + w(v*, u) then
            d_u ← d_v* + w(v*, u);
            p_u ← v*;
        end if
    end for
end for
```

argmin{dv}: Συνάρτηση εύρεσης του μικρότερου d_v η οποία επιστρέφει το argument του μικρότερου d_v.

Δηλαδή επιστρέφει την κορυφή v με το μικρότερο d.

$v^* \longrightarrow$ κορυφή με το μικρότερο d από το σύνολο $V \setminus S$

$w(v^*, u) = 5 \quad v^* \xrightarrow{5} u$

Πολυπλοκότητα

n = πλήθος όλων των κόμβων

Στην k επανάληψη:

- $|S| = k-1$ Explored
- $|V \setminus S| = n-(k-1) = n-k+1$ Unexplored

$v^* \leftarrow \text{argmin}\{d_v : v \in V \setminus S\}$ $n-k$ συγκρίσεις ①

for $u \in V \setminus S$ and $N(v^*)$ ⟶ Το πολύ $|V \setminus S| = n-k$ γείτονες
    if $d_u > d_u + w(v^*, u)$ ⟶ 1 σύγκριση ∀ γείτονα του v^*
    $d_u \leftarrow d_{v^*} + w(v^*, u)$ ⟶ 1 εκχώρηση ∀ γείτονα του v^* } 1+1 = 2 ΣΥΒ για το πολύ $n-k$ γείτονες ⟹

⟹ Άρα $2 * (n-k)$ ΣΥΒ ②

① + ② ⟹ $(n-k) + 2(n-k) = 3 \cdot (n-k)$ ΣΥΒ στην k επανάληψη

Για όλες τις επαναλήψεις: $\sum_{k=1}^{n-1} 3 * (n-k) = 3 \sum_{k=1}^{n-1} n - 3 \sum_{k=1}^{n-1} k = 3(n-1)n - 3 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Για όλες τις επαναλήψεις: $\sum_{k=1}^{n-1} 3(n-k) = 3\sum_{k=1}^{n-1} n - 3\sum_{k=1}^{n-1} k = 3(n-1)n - 3\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

$= O(n^2)$