Πολυπλοκότητα

Ορισμός

i) $f = O(g) \implies \exists\ a > 0$ τ.ω $f \leq a \cdot g \ \forall n \geq n_0, n_0 \geq 0$

ii) $f = \Omega(g) \implies \exists\ b > 0$ τ.ω $f \geq b \cdot g \ \forall n \geq n_0, n_0 \geq 0$

iii) $f = \Theta(g) \implies \exists\ a, b > 0$ τ.ω $b \cdot g \leq f \leq a \cdot g \ \forall n \geq n_0, n_0 \geq 0$

Μέσω ορίων

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0 \implies f = o(g) \\ L \implies f = \Theta(g) \\ \infty \implies f = \omega(g) \end{cases}$$

Ιδιότητες Λογαρίθμων

Αλλαγή βάσης

- $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

Ιδιότητα

- $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$
- $\lg\left(\dfrac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$

Ιδιότητα

$a^{\log c} = c^{\log a}$

Ιδιότητα

$\log n^k = k \cdot \log n$

Σειρές

Αριθμητική Σειρά (πεπερασμένη)

$n \neq \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Γεωμετρική Σειρά (πεπερασμένη

$$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

(άπειρη αριθμητική σειρά)

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = \infty$$

(μη-πεπερασμένη /άπειρη) Γ.Σ.

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad x<1, x \neq 1$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{x-1} \qquad x>1, x \neq 1$

Master Theorem

Έστω η αναδρομική συνάρτηση $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, με $a, b \geq 1$, $f(n) > 0$

- Βρίσκω το $n^{\log_b a}$
- Συγκρίνω την $f(n)$ με το $n^{\log_b a}$
- Διακρίνω περιπτώσεις:

i) Εάν $f(n) \leq k \cdot n^{\log_b a - \varepsilon} \Rightarrow f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$, $\varepsilon \geq 0$. Τότε, $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

ii) Εάν $f(n) = \cdot n^{\log_b a} \Rightarrow f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$, $\varepsilon \geq 0$. Τότε, $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \lg n\right)$

iii) Εάν $f(n) \geq \lambda n^{\log_b a + \varepsilon} \Rightarrow f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$, $\varepsilon \geq 0$ και $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$, $c \geq 1$. Τότε, $T(n) = \Theta(f(n))$

Θεώρημα Akra Bazzi

Εάν έχουμε αναδρομική σχέση της μορφής:

$$T(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} a_i T\left(\frac{n}{b_i}\right) + g(n) & , n > n_0 \\ 1 & , 1 \leq n \leq n_0 \end{cases}$$

Τότε, προσπαθούμε να προσδιορίσουμε το p, στην εξίσωση:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \left(\frac{1}{b_i}\right)^p = 1$$

Εφόσον βρήκαμε το p, προσδιορίζουμε ασυμπτωτικά την $T(n)$ λύνοντας την εξίσωση:

$$T(n) = \Theta\left(n^p\left(1 + \int_1^n \frac{g(u)}{u^{p+1}} du\right)\right)$$