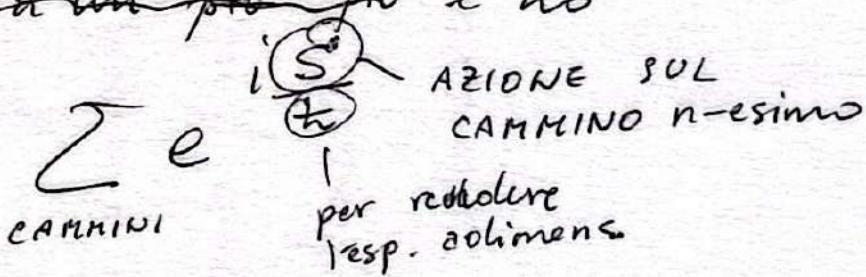


Immagino lo spazio come fatto da infinite feroliture infinitesime, e se una part. va da A a B dove considerare democraticam la scorr. di tutte le prob. di pos., ergo ferate con qualsiasi. Considero quindi tutte le traiettorie per le varie fenditure fino a un punto e ho



Se $t \rightarrow 0$ l'esp. ha i e inizia a oscillare al pto che a tal pto che tutti i contributi si annullano, tranne il minimo \rightarrow \rightarrow PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE

$$\int_{x_1}^{x_B} \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

PATH INTEGRAL

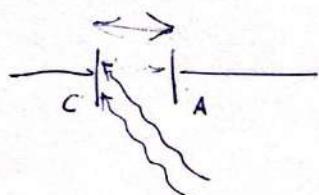
$$v = \frac{v' + v}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$$

$$v' + v = v + \frac{vv'}{c^2}$$

$$v' - v \frac{v}{c^2} v = v - v$$

$$v'(1 - \cancel{\frac{v}{c^2}}) = \cancel{v}$$

EFFETTO FOTOELETTRICO



POTENZIALE IN VERSO $C \xrightarrow{\leftarrow} A$

Gli elettroni partono da C ad A, perché il campo è da A a C.

INVERTO IL POTENZIALE: a un certo p.t. v raggiungerà un certo valore assoluto grande, cui metto il segno meno perché ho invertito V . Da qui gli elettroni vengono frenati via via di più, finché, a un certo $-V_0$, l'elettrone non riuscirà a uscire da C. E' e- può perdere velocità crescenti fino a v_{max} , oltre la quale v_0 non riesce più a frenarli. Se V_0 è il p.t. che riesce giusto a frenare un e- che avrebbe v_{max} $\Rightarrow eV_0 = \frac{1}{2} M v_{max}^2$

$$\Rightarrow -\frac{1,6 \cdot 10 \cdot 15}{8,15 \cdot 10 \cdot 20} \text{ eV} = -13,4 \text{ eV}$$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10 \cdot 15$$

$$P_{08-01 \cdot 51'8} = P \frac{(98,6) \cdot (58,8) \cdot 1191}{51 \cdot 10 \cdot (9,1) \cdot 1,8} \frac{1}{1} =$$

$$= P \frac{89-01 \cdot (98,6) \cdot 58-01 \cdot (58,8) \cdot 1191}{8-01 \cdot 91 \cdot 10-10-10} \frac{1}{1} =$$

$$= \frac{2^2 03_2 1191}{3^2 M} \frac{1}{1} = \frac{2^2 1611_2 7}{M^2 S} - \frac{2^2 1611_2 7}{M^2 S} \frac{2}{1} =$$

$$= \frac{03_2 1191_2 7}{3^2 M} \frac{03_2 1191_2 7}{2^2} - \frac{03_2 1191_2 7}{3^2 M^2 S} \frac{118}{2^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2^2 M}{03_2 1191_2 7}\right) 03_2 1191_2 7}{2^2} - \frac{\left(\frac{2^2 M}{03_2 1191_2 7}\right) 118}{2^2} = \frac{2^2 03_2 1191_2 7}{2^2} - \frac{2^2 M \cdot 118}{2^2} =$$

SOSTITUISCO NUOVA ENERGIA

$$0,53 A =$$

$$m_{11-01 \cdot 51'8} = \frac{2 \cdot (9,1) \cdot 1,8 \cdot 11}{(6,686)^2 \cdot 8,85 \cdot 10-18} =$$

$$= \frac{88-01 \cdot 2^2 11 \cdot 1,8 \cdot 11}{81-01 \cdot 58,8 \cdot 10-18} \frac{1}{1} =$$

(B)

• Esercitazione 5.

(A)

N° 2

ATOMO DI IDROGENO $p_r \sim r$

ORBITE CIRCOLARI

ENERGIA STATO FONDAMENTALE

$$P = MV$$

$$E = \frac{1}{2} MV^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} M \frac{P^2}{M^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} =$$

$$= \frac{P^2}{2M} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\hbar^2}{r^2} \cdot \frac{1}{2M} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ENERGIA STATO FONDAMENTALE \Rightarrow MINIMO DI ENERGIA — Calcolo

$$\frac{dE}{dr} = 0 \quad \frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{Mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\hbar^2}{Mr^3} \rightarrow \frac{Mr}{\hbar^2} = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}$$

$$r = \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{Me^2}$$

$$M = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg.} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

$$\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$r = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{4\pi^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2} \text{ m} =$$

N° 5

(c)

DESCRIVONO UNO STATO FISICO SE NORMALIZZABILI \Rightarrow SE L'INTEGRALE È FINITO. PER COMODITÀ NORMALIZZIAMO A 1.

a)

$N e^{ikx}$ è normalizzabile

$$\int_{-\infty}^{\infty} N^2 e^0 dx = 1 \quad N^2 = 1 \quad N = \pm 1$$

b) $f(x) = \begin{cases} N \sin(kx) & |x| < \frac{\pi}{k} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Ma \sin^2 diverge \Rightarrow NON È NORMALIZZABILE

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N^2}{x^2 + a^2} dx = \frac{N^2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{a^2}}$ $\frac{x}{a} = y$

$$\frac{N^2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ady}{1 + y^2} = \frac{N^2}{a^2} \arctg y \Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= \frac{N^2}{a^2} \pi = 1 \quad \Rightarrow \quad N^2 = \frac{a^2}{\pi} \rightarrow N = \pm \sqrt{\frac{a^2}{\pi}}$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{<\vec{x}>} &= \int d^3x \psi^* \vec{x} \psi = \\
 &= \int_0^a dx \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} x \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \\
 &= \frac{a}{\pi} \int_0^a \frac{x dx}{a^2+x^2} = \frac{a}{\pi} \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \Big|_0^a = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{a}{\pi} \ln (a^2+x^2) \Big|_0^a = \frac{1}{2} \frac{a}{\pi} (\ln(2a^2) - \ln a^2)
 \end{aligned}$$

$$[a, 2a] \quad \frac{1}{2} \frac{a}{\pi} [\ln(2a^2) - \ln(5a^2)]$$

$$[-a, a] \quad \frac{1}{2} \frac{a}{\pi} [\ln(2a^2) - \ln(2a^2)] = 0$$

Quindi:

$$[0, a] \rightarrow P = \frac{1}{2} \frac{a}{\pi} \ln(2)$$

$$[a, 2a] \rightarrow P = \frac{1}{2} \frac{a}{\pi} \ln\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$[-a, a] \rightarrow P = 0$$

$$\tilde{\psi} = \psi e^{i\alpha} \quad \|\tilde{\psi}\|^2 = \|\psi\|^2$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

$$\psi_1, \psi_2 \quad \psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 \in L^2$$

$$\psi_1 = \|\psi_1\| e^{i\alpha_1} \quad \psi_2 = \|\psi_2\| e^{i\alpha_2}$$

$$\|\psi\|^2 = \|c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2\|^2 = |c_1|^2 \|\psi_1\|^2 + |c_2|^2 \|\psi_2\|^2 +$$

$$+ 2 \operatorname{Re} [c_1 c_2^* \underbrace{\|\psi_1\| \|\psi_2\|}_{\text{Da' l'interferenza}} \underbrace{e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)}}_{\text{}}]$$

- ANSOLO SOLIDO
- PARSEC
- II TERMODINAMICA ✓
- MOLI ETC.

Pagliari

Oloardo Paltu

(1)

Per descrivere la radiazione di corpo nero, Planck introduce la prima quantizzazione. Einstein estende la quantizzazione alla radiazione. Rivoluzione la dualità di Planck con considerazioni termodinamiche e con l'ipotesi di boomeraggio termico (Emissione termica).

Il dualismo viene contestualizzato quando si definisce la meccanica quantistica.

COMPORTAMENTO CORPUSCOLARE Effetto Compton 1923

Radiazione γ (freq. molto alta) su una lamina. La rad. γ è eccita gli e^- che oscillano a v_0 ed emettono radiaz. a v_0 . Ma si nota qualche anomalia: oltre a un'intensità di radiaz. a v_0 , da, si osserva una rad. diffusa con $\Delta\lambda \gg \lambda_0$: cambiando l'angolo di diffusione il picco si sposta con fattori di scala $\sin^2 \theta / 2$. ~~è un motivo di~~

Questa variaz. non dipende dal materiale.



$$\Delta\lambda = \lambda_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Per mettere in evidenza λ di una radiazione

bisogna mandare l'onda su uno schermo con una fenditura con apertura $\approx \lambda$. Nascono i primi del Monecento i due buchi di diffrazione \Rightarrow Possibilità di misurare la λ dei raggi γ .

$$\lambda_{\text{inc}}; \Delta\lambda = \lambda - \lambda_{\text{inc}} > 0$$

se ho una radiazione a v, λ , non posso far varire θ . θ è quello per quella

Dipende da θ il rapporto tra l'energia con cui il fotone incide e $h\nu$. È corretto?

I raggi γ , pura Compton, sono costituiti da fotoni e pensa i raggi come corpuscoli. L'è subito un errore da un fotone.

E_f grande $\Rightarrow E_f = h\nu_f$ grande. $\Rightarrow E_f \gg E_e^-$, pensa gli

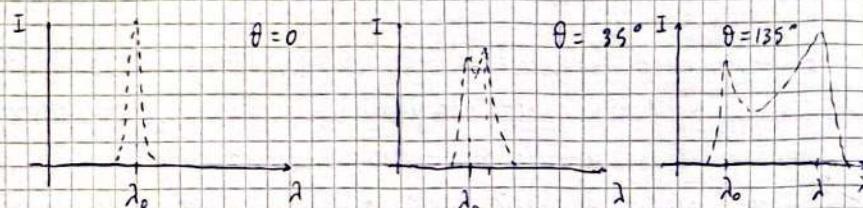
dell'atomo come γ_{inc} e γ_{diff}

Se l' e^- era a riposo e ora rincula, parte dell'energia incidente è stata usata per il rinculo \Rightarrow l'en. di γ_{diff} è minore di E_{inc} .

$$E_{\text{pdiff}} < E_{\text{pinc}}$$

$$E_p + E_e = E'_\gamma + E'_e$$

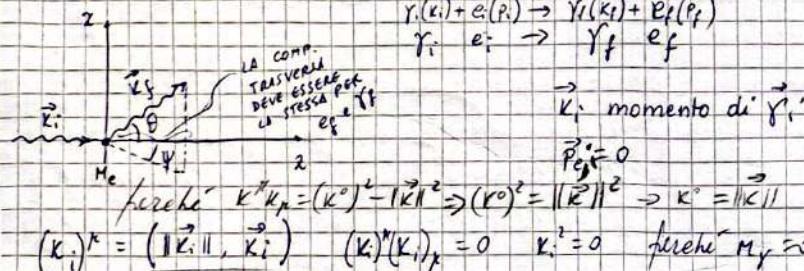
$$\nu' < \nu \Rightarrow \lambda' > \lambda$$



Classicamente (Thompson) non si può spiegare. Oi prece in do ci è comunque perché ci sono molte forze legate ad altri atomi più legati. ^{Quando l'effetto complesso tutta l'atomo} Si la massa del tungsteno è molto più grande, e il rinculo è ridotto. Da qui oneona do.

$$\gamma_i(k_i) + e(p_i) \rightarrow \gamma_f(k_f) + e_f(p_f)$$

$$\gamma_i e_i \rightarrow \gamma_f e_f$$



Simmetria cilindrica, e non lo troverai in dimensioni. Sei go il piano $[zz] \Rightarrow (k_i)^k = (||k_i||, 0, 0, ||k_i||)$

$$(k_f)^k = (||k_f||, k_f) = (||k_f||, ||k_f|| \sin \theta, 0, ||k_f|| \cos \theta)$$

$$(p_i)^k = \left(\frac{E_i}{c}, \vec{p}_i \right) \quad (p_i)^k (p_i)_p = M^2 c^2$$

$(p_i)^k = (M c, \vec{0})$ nel ref. di riposo (lab.). Oi fotoni in ogni ref. si muove sempre a c e non si trova più un ref di quiete.

$$(p_f)^k = \left(\frac{E_f}{c}, \vec{p}_f \right) = \left(\frac{E_f}{c}, -||p_f|| \sin \theta, 0, ||p_f|| \cos \theta \right)$$

N.B. Dato che $k^k = (||k||, \vec{k})$ e $k^k k_p = 0 \Rightarrow$ si può fare $||k|| = \frac{\omega}{c} \Rightarrow k^k = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$

$$(E_f)^k = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{poteri "Planck-Einstein"}$$

$$(k_i)^k = (||k_i||, 0, 0, ||k_i||) = \left(\frac{\hbar}{2i}, 0, 0, \frac{\hbar}{2i} \right) \quad \text{perché } (k_i)^0 = \frac{(E_i)^k}{c} = \frac{\hbar}{2i}$$

$$(k_f)^k = \left(\frac{\hbar}{2f}, \frac{\hbar}{2f} \sin \theta, 0, \frac{\hbar}{2f} \cos \theta \right)$$

Impostando $E_i = E_f$ e $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ si trova il risultato. Ma si può fare di meglio.

$$p_i^k = p_f^k \Rightarrow k_i^k + p_i^k = k_f^k + p_f^k$$

$$\text{nel ref del lab.? Queriamo: } k_i^k + p_i^k - k_f^k = p_f^k$$

$$(k_i + p_i - k_f)^2 = p_f^2$$

Vogliamo i fotoni finali, quindi la sua lunghezza d'onda.

Allora solo p_f perché si compare alla fine solo la massa. Oi primo numero, invece, c'è anche d'angolo.

$$k_i^2 + p_i^2 + k_f^2 + 2 k_i \cdot p_i - 2 k_i \cdot k_f - 2 p_i \cdot k_f = p_f^2$$

$$n p_i = 0 \Rightarrow 0 + M^2 c^2 + 0 + (?)$$

$$\text{So che } \vec{p}_i = 0 \quad k_i \cdot p_i = k_i^k p_i^k = k_i^0 p_i^0 - \underbrace{k_i^1 \cdot p_i^1}_{0} = \frac{\hbar}{2i} \frac{E_i}{c} = \frac{\hbar}{2i} M c$$

$$\Rightarrow 0 + \gamma^2 c^2 + 0 + \gamma \frac{h}{\lambda_i} MC - \gamma' \left(\frac{h}{\lambda_i} \frac{h}{\lambda_f} - \frac{h}{\lambda_i} \frac{h}{\lambda_f} \cos \theta \right) +$$

$$- \gamma \frac{h}{\lambda_f} MC = \gamma^2 c^2$$

Non compare nulla della cinematica finale dell'elettrone.

$$\frac{h}{\lambda_i} MC - \frac{h}{\lambda_i \lambda_f} (1 - \cos \theta) - \frac{h}{\lambda_f} MC = 0$$

$$\lambda_f MC - h(1 - \cos \theta) - \lambda_i MC = 0$$

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{MC} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) (1 - \cos \theta) \Rightarrow \Delta \lambda = \underbrace{\frac{h}{MC}}_{\text{indipendentemente dalla lunghezza d'onda incidente, ma dipendente dalla massa del bersaglio}} (1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow 2 \lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$L'ipotesi usata è \epsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Allora considerato il fenomeno come effetto di un urto tra due corpi, e allora usato la cinematica relativistica.

L'urto $\theta \Rightarrow$ aumenta $\Delta \lambda$. Il prezzo con $d = d_i$ compare perché controllato da M . Se tocca tutta l'atomo, la diffusione va fatta sull'atomo, $\Delta \lambda \sim 0$ e continua ad essere il prezzo in λ_0 .

BAGNO TERMICO

Collocazione di fotoni in eq. termico con gli atomi nello spazio. Planck non accetta l'interpretazione della radiazione.

λ_c lunghezza d'onda Compton.

Il prezzo in λ è dovuto all'urto fotone-elettrone. Ma se viene irradiato tutto l'atomo, ci sono un prezzo in λ_0 .

La luce visibile ha frequenze molto più basse \rightarrow non posso considerare gli elettroni \rightarrow la diffusione avviene non per onda, ma su tutto l'atomo. Vedo perché il fenomeno si svolga con raggi γ .

L'ipotesi è il bombardamento con pacchetti di fotoni.

ASSOCIARE ENERGIA AI CORPOSCOLI CHE SONO I FOTONI.

Scaldando un gas a T esso emette radiaz., e usando un prisma si vede che l'emissione del gas \rightarrow arrivare a lunghez. varie \Rightarrow Righe colorate.

allo stesso modo se riscalda una lamina e si può scegliere su una lastra il risultato: banda nera con righe bianche che coincidono con le radiaz. avviate.

Se associate allo spettro di emissione sono le stesse associate allo spettro di assorbimento.

CORPO NERO \rightarrow CRYSTALLINO \rightarrow ASSORBIM. E EMISS. SU SPECTRO CONTINUO
GAS RAREFATTO \rightarrow RIGHE \checkmark OK! VEDI LIBRO
NOTA A P. 20

Balmer (1885) studia lo spettro dell'atomo di idrogeno e trova ^{una} serie di linee con regolarità e spiega il motivo delle λ con questa relazione

$$\lambda = \text{cost.} \cdot \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad n = 3, 4, 5$$

$$\text{cost.} = 3646 \text{ \AA}$$

1889 Rydberg spiega le mie di Balmer scrivendo così la relazione: $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$. Ma allora fanno apparire idrogeno

altre righe sostituendo il 2 con altri numeri naturali:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_6^2} \right) \quad n_2 = 1, 2, 3 \\ n_6 = 2, 3, 4$$

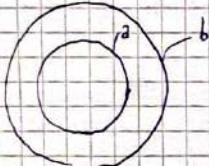
Le combinazioni spiegano tutte le serie che ⁱⁿ concorrono nello spettro dell'idrogeno. $n_2 = 1 \quad n_1$ fisico \Rightarrow Serie di Lyman.

Questa è una formula empirica che elenca. non spiega

Bisogna ricordare il modello atomico. Il modello planetario non contempla il fatto che l' e^- accelerato in moto circolare irradia energia $\Rightarrow \text{in } 10^{-10} \text{ s}$ le gli e^- esploderebbero sul nucleo \Rightarrow la materia non esistrebbe.

Bohr: \exists stati stazionari (specifiche orbite ^{circolari}) in cui l'elettrone non irradia. È un'assunzione. Dall'ipo. di Planck-Einstein, se lo due orbite stazionarie a e b , se l' e^- in b decide in a , emette una ^{dove non irradia} fotone a una portata λ .

$$\Rightarrow E_{\text{FOTONE}} = E_a - E_b$$



Allo stesso modo, $h\nu = \frac{ch}{\lambda}$ è l'energia per saltare da a a b . Il salto implica l'emissione o l'assorbimento di un fotone a energia $\frac{ch}{\lambda}$ che definisce una λ . Quanto a solo se ci sono transizioni tra stati stazionari discreti.

Quei stati stazionari sono solo quelli in cui il momento angolare orbitale è un multiplo di $\hbar = \frac{h}{2\pi}$: $L = nh$. Sono solo quelli a esistere. Non ci sono continui.

ELETTRONE SU UN'ORBITA CIRCOLARE

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{n^2} \cdot \frac{1}{M} = (\cancel{a}_c) \overset{\text{acc. centripeta}}{=} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 M n} Ze^2$$

$$L = M v r \text{ per orbita circolare} \stackrel{\text{Bohr}}{=} nh \Rightarrow q_n^* = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{kn}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{2Me^2} n^2$$

Vel. quantizzata

$$E_n = T_n + V_n = \frac{1}{2} M v_n^2 + \left(-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \right) = -\frac{h}{2\pi k} \left(\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{n^2} \quad n=1,2,\dots$$

L'uno degli stati stazionari reali è un rapporto come $\frac{1}{n^2}$. Il salto tra due stati stazionari dà la formula di Rydberg. Quindi l'ipotesi $L = nh$ spiega l'esistenza l'evidenza sperimentale.

$$v = \frac{E_b - E_a}{2\pi k} = \frac{M}{4\pi k^3} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right)$$

||
 $R_{H\text{TEO}}$

Rydberg misurò R_H , e quindi calcolò $R_{H\text{TEO}}$ con risate con R_H .

L'ipotesi è un'ipotesi i che $C_M \equiv$ centro nucleo ($M_{\text{nucleo}} \rightarrow \infty$). $R_{H\text{TEO}} \equiv R_{H\text{RHO}}$ ($C_M \equiv$ CENTRO NUCLEO). Migliorando i conti si trova che $R_{H\text{TEO}}$ è sempre più vicino a R_H .

Che anche L è quantizzato. Se esistono solo orbitali in cui $L = kn$

↓
SPIEGO GLI SPETTRI ATOMICI

È utile definire $k = \frac{h}{2\pi}$ per simmetria: quando ci sono simmetrie compiono fattori 2π .

$$E_n = -\frac{m}{2k^2} \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{n^2} \quad n=1, 2, \dots \quad L=n\lambda$$

$n = n^{\circ}$ quantico principale.

Comiamo da qui calcolare le righe di emissione o assorbito ritrovando la formula di Rydberg.

ness



$n \rightarrow \infty$ L'è è libero e non può calcolare l'energia di legame.

VEDI
P. LS
BRANDSEN

$$Z=1 \Rightarrow E_n = I_p \frac{1}{n^2}$$

un di ionizz. da fermi
e per strappare L'è

$$\text{Per H, } I_p = 13.6 \text{ eV}$$

$n \rightarrow \infty$ È libero e $E_n = 0$

Nella formula ci sono approssimazioni: orbite ellittiche, ad es. Ma anche $L = nh$ due errori riportati, finora è un'assunzione ad hoc.

RADIAZIONE $\begin{cases} \text{PROPR. ONDULATORIE} \\ \text{PROPR. CORPUSCOLARI} \end{cases}$

MATERIA PROPR. CORPUSCOLARE \rightarrow Ci assommaia, si rivelò che De Broglie nella sua tesi di dottorato (1923). Anche alla materia era associata una prop. ondulatoria.

RADIAZIONE

$$\lambda, \nu, E \propto \nu \quad (E=h\nu)$$

carattere corpuscolare

$$\text{Soltu } c = \lambda\nu, \quad (E = pc) \xrightarrow{\text{rel. rel. per particelle + massa nulla}} p = \frac{\hbar}{\lambda}$$

De Broglie ipotizzava si potesse associare alla materia una lunghezza d'onda λ $\lambda = \frac{h}{p}$

2 ASSOCIO ALLA RADIAZ. UNA PROPRIETÀ CORPUSC. CHE È IL MOMENTO
MATERIA ONDULATORIO LA LUNGHEZZA D'ONDA

$$\lambda_0 = \frac{h}{p} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{p}} \quad v = \frac{E}{h}$$

Ciò ricordava al modello atomico di Bohr. Se le orbite sono circolari e allora attribuiamo un'onda, quest'onda deve essere stazionaria, se no si era interferenza distruttiva: l'onda si elimerrebbe se non si stessa.



ci deve stare un n° intero di lunghezze d'onda: $n\lambda = \frac{\text{lunghezza d'onda di stazionarietà}}{2\pi r} \lambda = \frac{h}{p}$

$$L = np = n \frac{\lambda}{2\pi} \frac{h}{p} = n \frac{h}{2\pi} = nh \text{ consistente con Bohr.}$$

Come evidenzierà il carattere ondulatorio della materia?

$$p = mv \quad \lambda = \frac{h}{mv}$$

Evidenziazione la natura ondulatoria \Rightarrow Osservazione di diffrazioni: sono tutti caratterizzati dal fatto che la rifrazione della funtura è compatibile con la lunghezza d'onda della radiaz. e diversi fenomeni di diffrazione.

$$d \sim \lambda$$

Bombardando elettroni monoelettronici su un reticolato cristallino e quando c'è la distruzione degli interventi che scopre seguire la dist., che avrebbe un'onda con una certa λ (Bragg)

$$--- \cdot --- \cdot ---$$

ANALOGIE TRA OTTICA E MECCANICA Goldstein

Onda in un mezzo con indice di rifrazione n .

$$\psi(\vec{z}, t) \quad \nabla^2 \psi(\vec{z}, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\vec{z}, t) = 0$$

Studio un'onda monodro-

matica: $\psi(\vec{z}, t) = \psi_0(\vec{z}) e^{-i\omega t}$. Sostituiamo nell'eq. d'onda:

$$\nabla^2 \psi_0(\vec{z}) + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \psi_0(\vec{z}) = 0 \quad n = ?$$

MEZZO OMogeneo $\rightarrow n$ cost. (o lentezza variabile, e vale lo stesso)

$$\psi_0(\vec{z}) = A e^{i k_z z} \quad k_z^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} = n^2 k^2$$

Onde piana t.c. $k_z \cdot \vec{z} = 0 \Rightarrow$ si propaga nella dir. \perp al fronte d'onda.

$\vec{k} \cdot \vec{z} = 0$ definisce il fronte d'onda

se $n = n(z, y, z)$, allora non si può usare questa forma,
dove

$$\psi_0(\vec{z}) = A(\vec{z}) e^{i k_z s(\vec{z})}$$

Scegliamo in una parte reale e una immaginaria. Nell'eq.
in cui compare $s(\vec{z})$ facciamo il lim $\lambda \rightarrow 0$ e sono due termini di
 $\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow$ se λ scende su cui varia $n \rightarrow$ ottica
quadratico

LIMITE DELL'OTTICA
GEOMETRICA

• Equazione dell'onda:

$$|\vec{\nabla} s| = n(z, y, z)$$

Da questa equazione riottiene il principio di Fermat, che,
rivisto, dice che il tempo sul percorso deve essere minimo.

(non per forza minimo)
Questo aggiettivo lo abbiamo incontrato per il principio di minima azione!

Così Hamilton-Jacobi avremo inoltre trovato:

$$|\vec{\nabla} W| = P \stackrel{\text{nella forma non relativistica dipende dal potenziale,}}{\stackrel{\text{funzione del pto}}{=}} [2m(E - V(z))]^{1/2}$$

Il potenziale, funzione del pto, gioca lo stesso ruolo di n in ottica geometrica.

$S = W - Et$ per sistemi conservativi. uso w quando H non dip.
espl. da t .

ANALOGIA FORMALE TRA OTTICA GEOM. E MECCANICA ANALITICA

Nell'ottica geom. è intrinseco il principio di Fermat, principio variazionale.

Per le onde, la prop. è quella di un fronte d'onda. Onde nel formalismo di Ham-Tae. es. l'analogo di un fronte d'onda nello spazio delle config.

$$S = W - Et \quad w = S_0 + Et$$

$$t=0 \quad \text{supert. } W = S$$

nel spazio delle config. la ferro come spazio detto in cui le S si spostano su w costanti.

$$\begin{array}{ccc} t=0 & & t=0 \\ S_0 = w_0 & & S_1 = w_1 \end{array} \rightarrow$$

Si noti che non ci sono né in mecc. anal. né in ott. geom. le parametri omologhi. Ma l'~~ott.~~ l'ottica geometrica è il limite per $\lambda \rightarrow 0$ detta dell'ottica lineare.

MANCA LA MECCANICA ONDULATORIA E QUANTISTICA

La buona Schrödinger, partendo da qui, grazie però alle ipotesi di de Broglie. Vede perché Ham-Tae non ci hanno pensato.

$$n(z, y, z) \stackrel{\text{i. funom.}}{=} [2m(E - V(z, y, z))]^{1/2}$$

Sarà un'eq. t.c. nel limite in cui gli eff. ondulatori della mecc. (a λ breve) ne�ppaiono, si ottiene l'eq. di Ham-Jacobi.

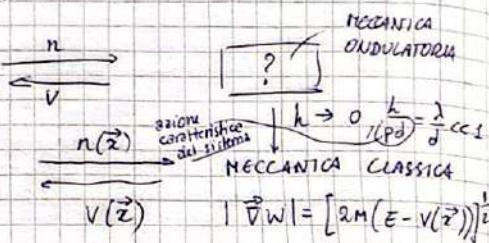
Un altro argomento che rendono plausibile l'eq. di Schrödinger è infatti dimostra l'eq. Il limite dell'eq. è moto \Rightarrow si

fenomeno in teoria costruisce ψ e φ , con quel limite. Ma ci sono org. a sost. dell' eq. di Schrödinger?

$$\nabla^2 \psi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad | \quad \lambda \rightarrow 0 \quad \frac{\lambda}{\delta} \ll 1$$

OTTICA GEOMETRICA

$$|\nabla \psi| = n(x, y, z) \quad (\text{eq. ionale})$$



Ipo: $\lambda = \frac{h}{p}$ associabile al corpuscolo materiale cui ho associato $|\vec{v} w|$

d è la distanza su cui varia il fot., come prima era la scala su cui varia n .

STUDIANDO GLI SPECTRI ATOMICI COMPARIRONO SU EFFETTI QUANTISTICI, PER VIA DELLE DIM. ATOMICHE
1925-1930 Due formulazioni — MECCANICA DELLE MATRICI: le osserva-

meccanica ondulatoria
(Schrodinger, 1925)
de Broglie

tibili (non dinamiche) sono rappresentate da matrici non commutanti $[A, B] \neq 0$ (Heisenberg, Born, 1925-6)

'26 Sch. mostra l'equivalenza delle due formulazioni.

'30 Dirac mostra che sono due realizzazioni di una formalazione più generale.

Ci sono esperimenti ideali, fatti: elettroni in una doppia fenditura. Violenza doppio carattere onda-corpuscolo. Si può fare ma usare anche i fotoni, ma non la teoria dei campi (E e B quantitativi).

DOPPIA FENDITURA

Si può violenziare l'asf. corporeo della radiaz. o l'asf. onda della materia. E' un inf. ideale ma paradigmatico per la nuova quantità. Feynman.

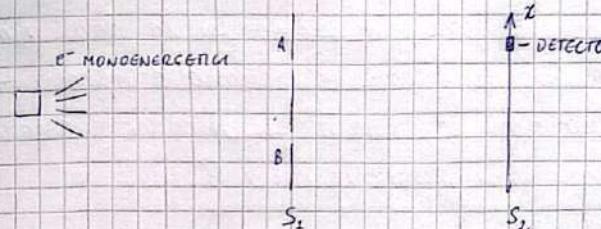
Oggi 18 Ottobre 2024

Giovanni Poltu

1

ESPERIMENTO DELLA DOPPIA FENDITURA

(IDEALE)

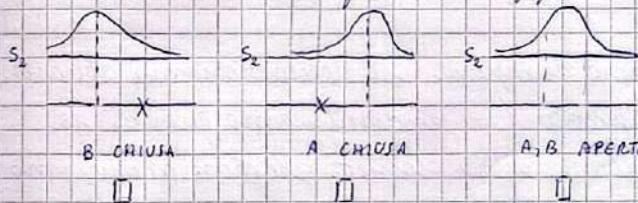


Contiamo gli e- che arrivano su S_2 .

- 1) In S_2 c'è i localizzato in un pto \rightarrow Materia corpuscolare. Masa ed energia sono definite nel pto.
- 2) La freq. con cui si contano gli e- su S_2 dà una distribuzione diffattiva.

$S_2 \sim \Delta$ fenditure.

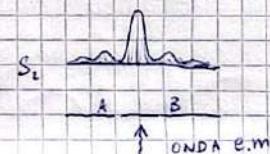
Si ripetiamo di fare lo stesso esperimento con granuli di sabbia, se i risultati sono, quando la figura:



Quanto accade in A i secoli solo da quanto accade in B.

Se A e B sono aperte, la distribuzione è somma di interferenze la norma delle due probabilità, esaminate

Se però uniamo un'onda, le due fenditure di fronte sono due sorgenti \Rightarrow In S_2 c'è una figura di interferenza modulata dalla diffrazione:



Quando studiamo quest'ultima condividiamo l'intensità, che non è la somma delle intensità con una delle fonditure chiuse.

Ora con elettroni, ^{dopo} per un certo tempo, si osserva il comportamento ondulatorio, facendo attraverso le due fonditure. In realtà, si mette un rivelatore, nello ^{che} per la rad. e.m., si può conteggiare l'arrivo dei fotoni. Proviamo a spiegare ora il carattere ondulatorio degli e^- , ma è per spiegare il carattere ondulatorio della rad. e.m. non quantizzare E e B .

~~alla figura diffattiva sarà magari effetto dell'interazione tra gli e^-~~
^{intensità da emissione}
 Allora uno riduce il n° di e^- fino ad avere uno singolo; ^{Coppia un e- arriva in S da parte di un altro, e} sceglie un gran numero di eventi, e scopre che si distribuiscono ^{aspetto un +} in modo diffattivo.

Chiudendo una delle fonditure, la figura di interf. ne cambia, e si ottiene la distribuzione elastica.

Sai A e B aperte: sono verificare con la diffusione della luce di un olifos. chiuso A e B, e il comp. ondulatorio scompare.

~~Qa.~~ Inf. ond. e conf. sono comuni. Se determiniamo attraverso quale fonditura è fatto (ne individuiamo quindi la traiettoria), il suo comp. s'è elastico. Se non individuiamo dove è fatto, il comp. è diffattivo.

Qa. Bisogna determinare allora la relazione tra fenomeno e avvenire, per poter rendere conto del dualismo.

La statistica in una fu sistemi macroscopici. Il carattere degli e^- che arrivano fanno per A e B è statistico. Bisogna rimuovere al concetto di traiettoria, e non raffigurare se l' e^- è fatto da A o da B. Ci sarà la prob. che l' e^- stia da qualche

fonte. Si introduce in profondo una funz. d'onda $\psi(\vec{r}, t)$ armata di probabilità ^{di formazione} di diff. con la misur. stat. i che ora si fa statistica non su un grande numero, ma sul singolo e l'intera materia n'arriverà λ_0 , ma se la massa dell'oggetto è molto grande, il comp. ondulatorio scompare.

$$P(\vec{r}, t) = \|\psi(\vec{r}, t)\|^2 \text{ analogo dell'intensità di } \vec{E}$$

$$\psi_A(\vec{r}, t)$$

$$\psi_B(\vec{r}, t)$$

Nell'elettromagnetismo diciamo che l'onda è

$$\text{ma in A ma in B, e } \|\psi(\vec{r}, t)\| = \|\psi_A + \psi_B\|^2 \neq$$

$$P_A + P_B$$

L'ampiezza di prob. non si misura, ma matem. è identica a quella considerata nell'elettrom.

Il carattere ondulatorio della fonte dalla portante dall'infinità di ogni quale fonditura è stata ottenuta dall' e^- .

Riassumendo si sommano le intensità. Ora si sommano le ampiezze di prob.

1) DISTRIB DI CONTESSI (carattere corpuscolare)

di tipo diffattivo, carattere ondulatorio.

DA REALIZZARSI
ESP. DIFFICILE PERCHÉ
LA A_B ASSOCIATA È POCO
 \rightarrow SOLO NEL 1985

2) PIÙ ALTERNATIVE (PIÙ FONDITORE)

$P = P_A + P_B + \dots$ solo se ottenuto classicamente quale alternativa si sia realizzata (chiude la fund o mette il dispositivo luminoso \rightarrow Scompare il carattere ondulatorio)

$$P \neq P_A + \\ + P_B + \dots$$

se non conosco l'alternativa

Se non individuiamo le fonditure, ci aspettiamo una fig. di diffrazione.

Quindi:

~~CONCETTO DI TRAIETTORIA~~ \rightarrow DESCRIZ.
PROBABILISTICA

- 1) I nrt. quantitativi hanno comp. intrinsecamente esauribile \rightarrow
PARE AMPIEZZA DI PROB.
 - 2) dlo stato di un sistema si comporta "come" un'onda (i solo uno strutt. matematico?)

Sistemi composti (e fonditure, ψ_a, ψ_b, \dots) → si sovraffongono (Linearità, ora si sovrapporranno quantità astratte) secondo leggi dei fenomeni ondulatori.

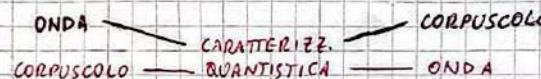
- 3) Misure \Rightarrow Riveliamo eventi singoli (dopo averlo misurato, c'è si trova in un p.t. prima ho solo la prob. che si trovi lì, e l'è ha carattere onovulatorio). Si dice che si è fatto collassare il sistema in un unico punto (stato specifico) $\xrightarrow{\text{coll. della funzione d'onda}} \text{Edilasso}$ dell'interazione tra stato e osservatore.

4) di prob. di eventi singoli n compiongano secondo sce la leggi standard ($P = P_1 + P_2 + \dots$). Ciò non contraddice il principio perché ho un evento singolo. $\underset{\substack{\text{se avessi} \\ \text{più eventi},}}{P = \sum P_i}$

Perche' in un solo alternativo S_2 es prob che e^- passi per A o per B
 e non realizza simbolo
 e non passa in Δx
 la probabilità di trovarlo in Δx = PROB. DI TROVARE e^- IN UN PTO
 entro Δx . E VAR. CONTINUA \rightarrow INTEGRO LE PROBABILITÀ.
 3) e 4) dommo l'interpretazione di Copenhagen (Bohm, -)

* Non misuro \Rightarrow Tutti gli eventi si sovrappongono secondo le leggi di deuterone-

Ormai per i granuli di sabbia c'è l'effetto Δh , ma Δ_s è così piccola (\approx grande) che i picchi si confondono.



Caschi

$\psi(\vec{z}, t)$ ampiezza di probabilità.

Born '26 : N sistemi identici e indipendenti di singola particella -
l'insieme di tali sistemi è rappresentato da $\psi(\vec{z}, t)$.
Una misura di posizione in \vec{z} dentro un volume dV $\int \int \int$ la definiscono come

Prob. di trovare la partecipazione in un pto qualunque dello spazio

$\int \|\psi(\vec{z}, t)\|^2 d^3 z = 1$ Ma la cosa importante è

che l'integrale sia finito \Rightarrow Saremo di funzioni a y dove affannare a L^2 .

Se definisco $\tilde{\psi} = e^{i\alpha}\psi$, $\|\tilde{\psi}\|^2 = \|\psi\|^2$. Possiamo misurare una densità prob., non $\tilde{\psi}$ quantità complessa. $\|\psi\|^2$ è la quantità finita.

PRINCIPIO DI SOVRAOPPOSIZIONE (sempre Copenaghen)

$\psi_1, \psi_2 \rightarrow \psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ dove c_1, c_2 sono ambedue un'ampiezza di probabilità e ℓ^2 . (NON SO QUALE SI REALIZZA, E DEVO SOVRAPPORRE)

$$\psi_1 = \|\psi_1\| e^{i\alpha_1} \quad \psi_2 = \|\psi_2\| e^{i\alpha_2}$$

$$\|\psi\|^2 = \|c_1\psi_1 + c_2\psi_2\|^2 = |c_1|^2|\psi_1|^2 + |c_2|^2|\psi_2|^2 + 2\operatorname{Re}[c_1 c_2^* \psi_1 |\psi_2|]$$

$\cdot e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} \neq |C_1|^2 |\psi_1|^2 + |C_2|^2 |\psi_2|^2$. Compare il termine di im-

tefumenza, in cui conta la fari relativa, inversamente al marziale
sono entrambe le fari ohi Ψ_1 e Ψ_2 . LA SOVRAPPOLIZIONE DÀ L'IN-

LA SOVRAPPOSIZIONE DA L'INTERFERENZA

Illuminiamo quanto conosciamo della prop. di un'onda. Ma se com
pienza dei prob. è assoluta. Il modulo quadro dà la prob. di trovare
me, però.

La funz. d'onda rappresenta un insieme di intumi indip. di singola parti
ella. Questa che forma ha ψ ?

Partiamo dall'onda più semplice: un'onda piana.

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad v = \frac{E}{h} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = 2\pi v$$

1-DIM. MOTO LUNGO $+z$, $p_z > 0$

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \hbar \omega \quad p = \hbar k \quad \Rightarrow \quad \psi(z, t) = A e^{i(cz - \omega t)} = A e^{i(kz - \omega c t)} = \\ &= A e^{i\hbar [p_z z - \vec{c}(p_z) t]} \end{aligned}$$

Tale funzione soddisfa alle relazioni $-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \psi(z, t) = p_z \psi(z, t)$ e
anche $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(z, t) = \vec{c} \cdot \vec{p} \psi(z, t)$.

$$3\text{-DIM. } \psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{c} \cdot \vec{r} - \omega t)} = A e^{i\hbar [\vec{p} \cdot \vec{r} - E(p) t]}$$

$$-i\hbar \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) = \vec{p} \psi(\vec{r}, t)$$

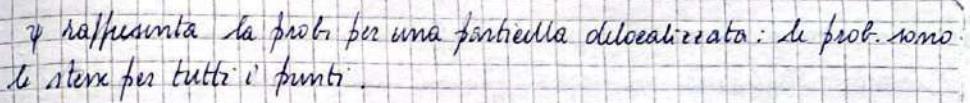
Serve per
compensare
l'azione
della spazio-

f-d

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \|\psi(z, t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dz |A|^2 \neq 1 \quad \text{non è finito} \Rightarrow \psi \text{ piana} \notin L^2$$

Si ponono considerare delle probabilità relative, per risolvere il pro
blema:

$$\frac{|\psi(z_1, t)|^2}{|\psi(z_2, t)|^2} = 1 \quad \text{nel caso di un'onda piana la probabilità è indipendente}$$

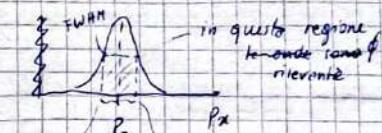
 rappresenta la prob. per una particella dilocalizzata: le prob. sono
le stesse per tutti i punti.

b) Ora conviene passare a un pacchetto d'onda, riconcordanze di onde
piane.

Se ho un'onda monocromatica, essa è disposta ugualmente ovunque. Volendo loca
lizzare un PTO, bisogna sovrapporre onde monocromatiche.

$$\text{Definiamo } \psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \tilde{\phi}(p_z) e^{i\hbar [p_z z - Et]}$$

Sufficiente che $\tilde{\phi}(p_z)$ sia del tipo



$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z e^{i\hbar \beta(p_z)} \tilde{\phi}(p_z) \quad \text{Ora } e^{i\beta} \text{ è una fase, con } \beta = p_z z - Et$$

Laddove β varia molto, ci saranno
contributi + e - e nel complesso $\psi \sim 0$. Invece, se p_z è quasi co
stante, i contributi si sommano. C'è la condizione

$$\frac{d\beta}{dp_z} = 0$$

Se voglio il massimo contributo di ψ con β costante, dovo esigere
che

$$\left. \frac{d\beta}{dp_z} \right|_{p_0} = 0 \quad \text{e modo che } \psi \neq 0$$

Atto localizzando il centro del pacchetto d'onda

$$\beta = p_z z - E(p_z) t$$

$$\left. \frac{d\beta}{dp_z} \right|_{p_0} = z - \left. \frac{dE}{dp_z} \right|_{p_0} t = 0$$

Definisco il moto del centro del pacchet
to d'onda. $\left. \frac{dE}{dp_z} \right|_{p_0}$ è la velocità di grup

pois $v_g \neq v_{\text{fan}}$.

$$\text{Infatti } v_g = \left. \frac{dE}{dp_z} \right|_{p_0} = \frac{dw}{dk} \quad \text{mentre } v_f = \frac{\omega}{k}$$

Moi stiamo studiando una particella cui assegniamo carattere ondulatorio. Vogliamo che $v_g = \frac{p_0}{m}$ vel. della particella. Questo è alla base del principio di corrispondenza (tra tratt. classica e ondulatoria/quantistica).

$$v_g = \frac{p_0}{m}$$

PRINC DI CORRISPONDENZA

$$\frac{dE}{dp_z} \Big|_{p_0} = \frac{p_0}{M} \Rightarrow E = \frac{p_z^2}{2M} + c \text{ forma funzionale del}$$

Moi misureremo sempre ΔE , mai l'energia E , quindi la costante c la posso rispettare a p_0 . Siamo ignorare.

Affinehi la rappresentazione di onde ma esente, ci la funzione però.

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \phi(p_z) e^{i\frac{p_z^2}{2\hbar} t} ; \quad \text{per usare l'interpretaz. fatto che } \phi \text{ è predata in } p_0,$$

$$\text{risultiamo } E(p_z) = \frac{p_z^2}{2M} + \underbrace{\frac{p_0(p_z - p_0)}{M}}_{v_g} + \frac{(p_z - p_0)^2}{2M}$$

Se la funzione però è "molto predata" su p_0 , mi aspetto che il termine con $(p_z - p_0)$ sia trascurabile per tempi piccoli.

Saranno anche $p_z = p_z - p_0 + p_0$.

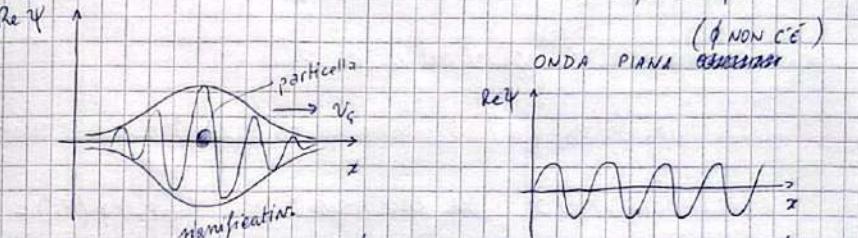
$$\psi(x, t) = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}} e^{i\frac{p_z}{\hbar}(p_z x - E(p_z)t)} \tilde{\psi}(x, t)$$

onda piana associata a p_z

$$\tilde{\psi}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z e^{i\frac{p_z}{\hbar}(p_z x - v_g t)} \phi(p_z)$$

Alla fine $\|\psi\|^2 = \|\tilde{\psi}\|^2$, ed ecco perché esemmeno tutto in F .

2 $F(z, 0) = F(z + v_g t, t)$. La forma non cambia, ciò comunque che per tempi piccoli $(p_z - p_0)$ sia trascurabile perché per tempi piccoli i sufficienze molto piccata d.



Io voglio che ψ m' dica dove la particella è davvero localizzata. Se mom introduce ψ non si riferisce. Un pacchetto d'onde m'arriva all'interpret. della particella come propagazione onda.

$$\psi(z, 0) = \psi(z). \quad \psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp_z e^{i\frac{p_z^2}{2\hbar} z} \phi(p_z) \text{ è una trasformaz. di Fourier!}$$

$$\phi(p_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dz e^{-i\frac{p_z^2}{2\hbar} z} \psi(z) . \quad \text{Quindi } \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \text{ è il fattore di normalizzazione. } \frac{p_z}{\hbar} = k. \quad \text{Passo alle } k \text{ e } \omega \text{ e } t.$$

Promo quindi avrei i vantaggi

$$\psi(x, t) = \tilde{\psi}(p_z, t)$$

RISULTATO

$$\int dz |\psi(x)|^2 = \int dp_z |\tilde{\psi}(p_z)|^2 = 1 \text{ nel nostro caso.}$$

Affinehi l'interpret. prob. sia consistente, deve essere verificata la conservazione della probabilità totale

$$\psi(z, t) |_{int=0} \int dz |\psi(z, 0)|^2 = 1 . \quad \text{Vogliamo che in } t \neq 0 \text{ esistano a valere la relazione.}$$

PASSO ALLO SPAZIO DEL MOMENTO

$$\text{Sarivo il modulo quadro come } \int dz \underbrace{|\psi(z, t)|^2}_{\tilde{\psi}(p_z, t)} = \int dz \int dp_z \tilde{\psi}(p_z, t) \tilde{\psi}(p_z, t)$$

$$e^{\frac{i}{\hbar} (\tilde{p}_z - \tilde{p}'_z) z} e^{-\frac{i}{\hbar} [E(p_z) - E(p'_z)] t} \phi^*(p'_z) \phi(p_z)$$

I segni vengono
mo dal complesso coniugato.

Ma

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int dx e^{\frac{i}{\hbar} (\tilde{p}_z - \tilde{p}'_z) x} = \frac{1}{2\pi} \int dy e^{\frac{i}{\hbar} (\tilde{p}_z - \tilde{p}'_z) y} = \delta(\tilde{p}_z - \tilde{p}'_z)$$

ora si conviene di integrare ad x in p_z' .

$$\Rightarrow \int dp_z \int dp'_z \delta(\tilde{p}_z - \tilde{p}'_z) \Rightarrow \text{Dove ho } p'_z, \text{ la } \delta \text{ dice che dico uno } p_z.$$

$$\Rightarrow E(p_z) - E(p'_z) = 0 \text{ e la funzione a } i \Rightarrow \phi^*(p'_z) \phi(p_z) =$$

$$= \phi^*(p_z) \phi(p_z) = \int dp_z |\phi(p_z)|^2 = 1 \text{ per normalizz.} \int dp_z |\phi|^2 = \int dx |f(x)|^2 \in 1 \text{ per } f(x)$$

Se ho norm. a 1 in $t=0$, la normalizzazione continuerà a valori per $t \neq 0$. È importante fare questo ragionamento se si fa la di probabilità. Cio' vale per tempi precisi.

Ultimo esempio di una funz. d'onda complessa. Già com'è ordinaria. STUDIAMO IL PACCHETTO D'ONDA GAUSSIANO

L'intensità, oggi ora la prendiamo.

Consideriamo $\phi(p_z) = c e^{-\frac{(p_z - p_0)^2}{2\Delta p_z^2}}$

INTEGRAZIONE UTILE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(u^2 + \frac{\beta}{\alpha}u + \frac{\beta^2}{4\alpha^2})} = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(u + \frac{\beta}{2\alpha})^2} \quad u' = u + \frac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow e^{\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u'^2} = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Normalizziamo $\phi(p_z)$ a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_z |\phi|^2 = 1 = |c|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z e^{-\frac{(p_z - p_0)^2}{2\Delta p_z^2}}$$

se faccio per $u = \frac{p_z - p_0}{\Delta p_z} \rightarrow du = \frac{dp_z}{\Delta p_z} \Rightarrow \int = \Delta p_z |c|^2 \sqrt{\pi} = 1$

$$\Rightarrow c = \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\Delta p_z}$$

risultato reale per praticità.

$$\psi(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp_z e^{\frac{i p_z z}{\hbar}} e^{-\frac{(p_z - p_0)^2}{2\Delta p_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\Delta p_z} e^{i \frac{p_0 z}{\hbar}}$$

AGGIUNGO E
SOTTRAIGO p_0^2
 $\int dp_z e^{\frac{i}{\hbar} (p_z - p_0)^2} = e^{-\frac{(p_z - p_0)^2}{2\Delta p_z^2}}$

$$u = p_z - p_0$$

$$\alpha = \frac{i}{2\Delta p_z} \quad \beta = -\frac{i}{\hbar} z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\Delta p_z} e^{\frac{i p_0 z}{\hbar}} \pi^{\frac{1}{2}} \left[2(\Delta p_z)^2 \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(\Delta p_z)^2 z^2}{4\hbar^2}} =$$

$$= \pi^{-\frac{1}{4}} \hbar^{-\frac{1}{2}} (\Delta p_z)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i p_0 z}{\hbar}} e^{-\frac{\Delta p_z^2}{2\hbar^2} z^2}$$

da trasf. di una funzione gaussiana è una gaussiana. Il centro è in $z=0$.

Potrei definire la lunghezza t.c. il valore massimo si riduce a $\frac{1}{e}$.

$$|\psi|^2 \sim e^{-\frac{\Delta p_z^2}{\hbar^2} z^2}$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_z}$$

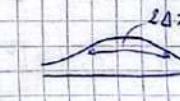
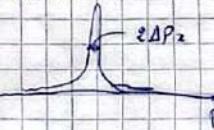
distanza t.c. il $|\psi|^2$ si riduce a un fattore $\frac{1}{e}$.

$$(\Delta x)(\Delta p_z) = \hbar \quad \text{se si pone } p_z = \hbar x \Rightarrow (\Delta x)(\Delta p_z) = 1$$

In realtà inserita sul la cui la lo momento della calore zione della partecella partecella

avanti onde monodromiche sto quale lunghezza è concentrata la parte saliente del pacchetto.

Se l'onda è localizzata tanto più è determinato il momento della partecella, tanto meno localizzata è la partecella.



Ciò è alla base del principio di indeterminazione di Heisenberg.
Ciò si collega al non poter definire la traiettoria di una particella. Sarebbe un'onda monodromia, ma con essa la part. è delocalizzata. Usa un pacchetto, che può connetere posizione e velocità. Non potendo determ. univoc. entrambe, non si può trovare da ~~determinare~~ traiettoria.

Cosa succede a $t \neq 0$?

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp_z e^{\frac{i}{\hbar}(p_z x - Et)} c e^{-\frac{(p_z - p_0)^2}{2\Delta p_z^2}}, E = \frac{p_z^2}{2M}$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}(p_z x - \frac{p_z^2}{2M}t)} = e^{\frac{i}{\hbar}[(p_z - p_0) + p_0]x} e^{-\frac{i}{\hbar}(p_z - p_0 + p_0)^2 t} =$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}p_z x - \frac{i}{\hbar}\frac{p_z^2 t}{2M}} e^{\frac{i}{\hbar}(p_z - p_0)x} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{(p_z - p_0)^2 t}{2M}} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_0(p_z - p_0)}{M}t} v_g$$

ora non lo trascuriamo

$$u = p_z - p_0$$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} c e^{\frac{i}{\hbar}p_z x - \frac{i}{\hbar}\frac{p_z^2 t}{2M}} \int du e^{\frac{i}{\hbar}u(x - \frac{p_0}{M}t)} e^{-u^2 \left[\frac{1}{2\Delta p_z^2} + \frac{i}{\hbar} \frac{t}{2M} \right]}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\Delta p_z^2} + \frac{i}{\hbar} \frac{t}{2M} \quad \beta = \frac{i}{\hbar} \left(x - \frac{p_0}{M} t \right)$$

$$I = \pi^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2\Delta p_z^2} + \frac{i}{\hbar} \frac{t}{2M} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \frac{(x - v_g t)^2}{4\Delta p_z^2} \left[\frac{1}{2\Delta p_z^2} + \frac{i}{\hbar} \frac{t}{2M} \right]^{-1} \right\}$$

Dal modulo quadro di un numero complesso...

$$|\psi(x, t)|^2 = \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Delta p_z/t}{\left[1 + \frac{\Delta p_z^2 t^2}{\hbar^2 M^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ - \frac{(x - v_g t)^2}{4\Delta p_z^2} \left(\frac{\Delta p_z}{\hbar} \right)^2 \right\}$$

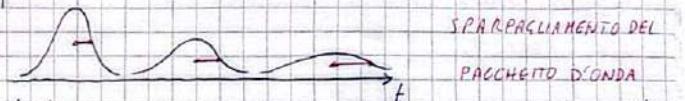
Vediamo che il centro del pacchetto d'onda si muove a $v = v_g$.
La lunghezza $\Delta x(t)$ è $\left[1 + \frac{\Delta p_z^4 t^2}{\hbar^2 M^2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\hbar}{\Delta p_z}$

$$\rightarrow |\psi(\bar{x}, t)|^2 = \frac{1}{c} |\psi(x = v_g t, t)|^2 \quad \text{quando } \bar{x} = v_g t \pm \Delta x$$

Consideriamo t : $t=0$, $\Delta x(0) = \frac{\hbar}{\Delta p_z}$ e per tempi piccoli, cioè $t \ll \frac{\hbar M}{\Delta p_z^2}$, $\Delta x(t) = \frac{t}{\Delta p_z}$

Al crescere del tempo, la larghezza del pacchetto aumenta.

171



Se il pacchetto si sparteglia, il catenillo molto sarà il giorno dopo in buona sintonia o no? Ma, l'effetto dipende dalle dimensioni dell'oggetto (^{anche} della mia mano).

Gia' con un atomo... ATOMO $\sim 10^{-10}$ m ricorda l'atomo $\Delta x(0) \approx 10^{-10}$ m $\Delta p_z = \frac{\hbar}{\Delta x(0)} = 10^{-26}$ kg m/s.

Dopo quanto tempo $\Delta x(t) = 2\Delta x(0)$?

Molto i parametri dell'atome, n. etc., e basta che $t = 10^{-16}$ s. In t c'è l'informazione.

Considero di 1 g e $\Delta x(0) = 10^{-6}$ m. Ottima localizzazione.

$\Delta p_z = 10^{-28}$ kg m/s. t.t.c. $\Delta x(t) = 2\Delta x(0)$ $t = 10^{15}$ s > età dell'universo.

Gli effetti quantistici sono rilevanti in scale micrometriche. In realtà macroscopiche, gli effetti ^{non} sono rilevanti. Quindi la meccanica quantistica contiene la meccanica classica e si estende in dimensioni micrometriche.

Questa varianza Δp_z , Δz è inv. proporzionale. In realtà, il principio dice che

$$\Delta z \Delta p_z \gtrsim \hbar \quad \text{(il quanto d'azione è un limite inferiore del prodotto delle incertezze)}$$

Se facchietto gauniamo dà l'ineq. minore, perché $\hbar = \hbar$. Se $t=0$ si ha il limite classico \rightarrow Determino la traiettoria. Lo SPARPIAGLIO è evidente a livello MICROSCOPICO

In 3-D ci hanno tre relazioni

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar$$

$$\Delta y \Delta p_y \gtrsim \hbar$$

$$\Delta z \Delta p_z \gtrsim \hbar$$

Vengono mense alcune variabili classiche coniugate (per esempio coniugato a x e p_x ecc.).

Perciò noi in H ci sono certi valori di energia?

STABILITÀ ATOMI

Stima energia di legame H

$$\tilde{E} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{CLASSIC} \quad r \rightarrow 0 \Rightarrow E \rightarrow -\infty$$

\approx massa librotta

MECC. QUANTISTICA \Rightarrow CORRELAZIONE TRA $\Delta x \times \Delta p$

$p = \frac{4\pi}{3} \text{ MOMENTO MEDIO DELL'ELETTRONE} \Rightarrow \Delta p \sim p$ CONOSCO p , ASSUMO CHE Δp SIA DELLO STESSO ORDINE.

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar \approx \Delta r \sim \frac{\hbar}{p} \quad \text{ma allora } \Delta r \sim r \Rightarrow p \sim \frac{\hbar}{r}$$

$$\Rightarrow \tilde{E} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \frac{dE}{dr} = 0 \rightarrow r = r_0 \text{ valore dove } n \text{ annulla } E.$$

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 k^2}{e^2 m} = 2a \quad \text{raggio dell'orbita in cui l'en. è minima.}$$

Quindi $r \neq 0$

$$\tilde{E}(r_0) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a^2}. \quad \text{Determinando lo spettro di H, } E(r_0) =$$

$$= E_1 \text{ sta}$$

to fondamentale Se finire di ind. di Heis. spieghi perché $r \neq 0$.

Non raffissimo come sia fatta l'eq. che deve essere soddisfatta da ψ . Ripetiamo l'analogia tra ottica e meccanica.

$$n \geq P(V(z))$$

Uniamo le propriez. per convertire i parametri ondulatori dell'ottica fini in parametri corpuscolari e riuniamo l'eq. dell'ottica come eq. che deve essere soddisfatta da ψ .

C'era la connes. tra ottica geom. ($\lambda=0$) e meccanica analitica, ma mancava il passaggio del dualismo.

Cagliari 22 Ottobre 2024

Eduardo Gatto

$$n(z, y, z) = \rho = [e_n(E - V)]^{\frac{1}{2}}$$

OTTICA FISICA

$$\gamma = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} = \lambda v \quad ; \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \text{ lunghezza d'onda nel vuoto}$$

$$\text{De Broglie} \quad \lambda = \frac{h}{p} \quad \omega = 2\pi\nu$$

$$\text{eq. d'onda} \quad \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

ONDA MONOCROMATICA $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t}$ t.c., sostituita nelle equazioni d'onda, dà $\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}) + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi(\vec{r}) = 0$

$$k = \frac{h}{2\pi} \quad \lambda = \frac{h}{p} \quad \text{con } p = [2m(E - V(\vec{r}))]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}) + \frac{2m}{h^2} (E - V(\vec{r})) \psi(\vec{r}) = 0$$

$$\text{Moltiplico per } -\frac{h^2}{2m} \Rightarrow \boxed{-\frac{h^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})}$$

EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER STAZIONARIA

$$\text{Ponendendo che } E = \hbar \omega \quad \text{e} \quad \psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t} = \\ = \psi(\vec{r}) e^{-i\frac{E}{\hbar} t}$$

im ψ

L'equazione scritta è lineare al II ordine e energia finita (domanda i monogramma \rightarrow ω finito $\Rightarrow E$ finito da $E = \hbar\omega$). L'equazione è stazionaria perché $\|\psi(\vec{r}, t)\|^2 = \|\psi(\vec{r})\|^2$ perché μ è l'energia finita. Il modulo quadrato della soluzione non dipende dal tempo, quindi $\|\psi(\vec{r}, t)\|^2$ non dipende dal tempo, quindi $\psi(\vec{r}, t)$ non dipende dal tempo, quindi allora.

Consideriamo ora $\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) e^{-\frac{iE}{\hbar}(S_0(\vec{r}) - Et)}$, è la stessa ψ di prima, scritta in altro modo.

$\psi(\vec{r})$

$$\text{Inserendola nell'eq. d'onda, si ha } \hbar^2 \frac{\vec{\nabla}^2 A}{A} - (\vec{\nabla} S_0)^2 + 2m(E - V) = 0$$

$$\text{e} \quad \vec{\nabla} \cdot (A^2 \vec{\nabla} S_0) = 0 \quad (\text{parte reale e parte immaginaria}).$$

$$\text{Nel limite classico, } k \rightarrow 0 \Rightarrow \| \vec{\nabla} S_0 \| = [2m(E - V)]^{\frac{1}{2}} !$$

Ma l'eq. stazionario non è la più generale. Con la scelta della soluzione monocromatica si ottiene cioè, ma non generale, quali è la soluzione generale?

Ipo: sistema atomico $\xrightarrow{\text{livelli discreti}} \vec{e} \rightarrow E_n \quad n = 1, 2, \dots$

$$\psi_n(\vec{r}, t) = \psi_n(\vec{r}) e^{-\frac{iE_n}{\hbar} t}$$

$\psi_n(\vec{r})$

E_n saranno autovetori quantizzati e le ψ_n saranno un insieme completo di autofunzioni \Rightarrow formando una base.

Considero dunque $\psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{r}, t) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{r}) e^{-\frac{iE_n}{\hbar} t}$: la sol generale è comb. delle autof di base. Si nota che il $\|\psi(\vec{r}, t)\|^2$ di $\psi(\vec{r}, t)$ non dipende dal tempo. Componiamo i termini di interfusione. Soltanto, la somma di autof a energia finita diversa da una fra funz. a energia non finita.

Solt. a energia finita i t.c. $\|\psi(\vec{r}, t)\|^2$ non dip. dal tempo \Rightarrow la sol. non dip. allora stazionaria.

Ora ci è energia non finita \rightarrow dipendenza dal tempo.

Sulla base di autof. sviluppo la sol. generale come combinaz. lin.

Prandendo una soluz. stazionaria, vale $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(\vec{r}, t) = E_n \psi_n(\vec{r}, t)$.

Ora:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi_n(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}) = E_n \psi_n(\vec{r})$$

Moltiplico per $e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}$ e n ha l'eq. cui deve obbedire $\psi_n(\vec{r}, t)$
monocromatica, stiamo sempre considerando

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi_n(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}, t) = E_n \psi_n(\vec{r}, t)$$

Faccio comparire le derivate temporali:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi_n(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(\vec{r}, t)$$

Ma l'eq. deve essere soddisfatta nel stazionario

Sarà faccio ora la comb. lineare:

$$\sum_n c_n (-\dots) \text{ e ottengo:}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \quad \text{EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER TEMPORALE}$$

Del modello atomico abbiamo costruito la sol. generale usando il principio di non rapp. di per le sol. staz.: si ottiene una sol gen a energia non più finita. Faccendo comparire le $\frac{\partial}{\partial t}$, ricompare E_n e formiamo fare la comb. lineare. Se si sostituisce una sol. staz., si ottiene la l'eq. stazionario.

Ma non compare la derivate seconda del tempo! Ovviammo si sta che $\frac{\partial}{\partial t}$ è eponentiale. Questo operatore no! Ma ma non stiamo cominciando un approccio relativistico.

Direttamente è in relatività speciale i fotoni, $E = pc$. In Maxwell già funziono. Ma qui $E = \frac{p^2}{2M}$ ed E è p non sono dello stesso ordine. Usare tale soluz. porta ad una assimmetria rispetto al verso dell'ottica finita.

Prendendo $\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) \exp\left\{i \frac{\hbar}{\hbar} S(\vec{r}, t)\right\}$, tenendo conto della parte reale e parte immaginaria, si trova ad es:

$$\frac{\hbar^2}{A} \frac{\nabla^2 A}{2M} - \left[\left(\nabla^2 S \right)^2 + 2M V \right] = 2M \frac{\partial S}{\partial t} \xrightarrow[\hbar \gg 0]{} \| \vec{V} S \| = \| \vec{P} \|$$

$$E = \frac{p^2}{2M} + V(\vec{r}) = H$$

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{Nam-Jae}$$

Vale quindi un principio di complementarietà.

L'eq. ottiene di se è corretta in ambito non relativistico.

$$3-\text{D} \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$$

Con un'onda monoch. si ha associata la stazionario

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{i\frac{\hbar}{\hbar} Et})$$

$$1-\text{D} \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) \right] \psi(z) = E \psi(z)$$

PARTICELLA LIBERA $\rightarrow V(\vec{r}) \text{ o } V(z) = 0$

d'eq. i lineari e omogenee \Leftrightarrow Vale il princ. di non affezionamento

Se l'urto elatico è H.J. (princ. di corrispondenza)

I ordine $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow$ Se compare $\psi(z, t_0)$, (tutto compare $\psi(x, t)$) $\forall t$, cioè che non vale avendo $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

PARTICELLA LIBERA CASO 1D

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(z, t)$$

Se faccio tutta somma prima modifica l'equazione?

$$\psi(z, t) = A e^{i\hbar(p_z z - Et)}$$

$$ik \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = E \psi(x, t)$$

$$\frac{k^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = \frac{k^2}{2M} i^2 p_x^2 \psi = -\frac{p_x^2}{2M} \psi(x, t) = -E \psi(x, t)$$

Quindi l'onda piana soddisfa all'eq. di Schrödinger, perché $E = \frac{p_x^2}{2M}$ per avendo energia nulla nell'interv. t .

Sorprendentemente, dunque comunque funziona.

PACCHETTO D'ONDA

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int dp_x e^{ik(p_x x - Et)} \phi(p_x)$$

$$ik \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{\frac{p_x^2}{2M}} dp_x \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{ik(p_x x - Et)} \phi(p_x) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{\frac{p_x^2}{2M}} dp_x \underbrace{\left(-\frac{k^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)}_{\text{indip. dall'integraz. in } p_x} e^{ik(p_x x - Et)} \phi(p_x) = -\frac{k^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t)$$

La soluz. di soluz. corrisponde piane è unica soluz. Cioè mu. lo aspetto perché l'eq. è lineare e omogenea. La soluz. di sol. dunque unica come soluzione.

ψ deve essere int. nell'interv. corretta ma deve anche soddisf. all'eq.

$$3@ -ik \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t) = \vec{p} \psi(\vec{x}, t)$$

$$(-ik \vec{\nabla})^2 \psi(\vec{x}, t) = -k^2 \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t) = \vec{p}^2 \psi(\vec{x}, t)$$

$$-\frac{k^2}{2M} \psi(\vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2M} \psi(\vec{x}, t) = E \psi(\vec{x}, t) = ik \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t)$$

Anche l'onda piana è un fascio d'onde bidimensionali. soddisfano Sch.

Facendo agire con $\vec{\nabla}$ sull'onda piana si vede che $-ik \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t) = \vec{p} \psi(\vec{x}, t)$

$$ik \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \vec{p} \psi(\vec{x}, t)$$

per l'onda piana

Ipo: vale $\vec{p} \psi(\vec{x}, t)$

Sull'omomorfismo otteniamo queste corrispondenze:

$$\begin{aligned} \vec{p} &\rightarrow -ik \vec{\nabla} \\ E &\rightarrow ik \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

Con una particella libera, in meccanica classica vale

$$E = \frac{p^2}{2M} = H_{cl}$$

$$H_Q = \hat{H}$$

Allora scrivo $ik \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{k^2}{2M} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t)$ eq. di Sch. per una particella libera. Usando quegli operatori, l'eq. classica si traduce nella eq. di Sch.

$$\begin{aligned} \text{Se agisca un campo di forze: } E &= \frac{p^2}{2M} + V(\vec{r}) H_{cl} \rightarrow \hat{H} \\ \Rightarrow ik \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) &= \hat{H} \psi(\vec{x}, t) = \left(-\frac{k^2}{2M} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Uno degli operatori differenziali corrispondenti a \vec{p} ed E , come lo dedotto dal loro comportamento su un'onda piana, agente su una funzione generica ^{nel senso} per passare dalla meccanica classica a quella quantistica.

$$H_{cl}(\vec{x}, \vec{p}) \rightarrow \hat{H}(\vec{x}, -ik \vec{\nabla}) \psi(\vec{x}, t)$$

Michelson - Morley

DIFERENZA DI CAMMINO OTTO
SOSTAN. PESATO PER 2

Varabili classiche

\vec{P} , \vec{x} , t (qui è assoluto), E

$$\vec{p} \rightarrow -ik\vec{v}$$

$$\vec{e} \rightarrow ik \frac{\partial}{\partial E}$$

$$\tilde{v} = \frac{p^2}{2M} + V(\vec{x})$$

Introduciamo $\psi(\vec{x}, t)$ e ottieniamo

$$\left[\frac{(-ik\vec{v})^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \psi = ik \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2 V^2}{2M} \psi + V(z^2) \psi = ik \frac{\partial}{\partial z} \psi$$

In linea di principio, $v = v(\vec{x}, t)$ è funz. l'eq. continua a valere.

$$EN. \text{ POT} = \text{POT.}$$

- Consideriamo $v(\vec{x}, t)$ intera della dipendenza da \vec{x} . v è continua in $\vec{x} \Rightarrow v_1, \frac{\partial v}{\partial t}, \vec{v}_v$ continui $v = v(\vec{x}, t)$

- Se v è discontinuo in \vec{x} con discontinuità finita, \vec{v}^*y è discontinuo ma finito $\Rightarrow \vec{v}^*y$, y sono ancora continui.

C'è un'analogia tra $v(z)$ e $n(z)$. Per enfatizzare il carattere ondulatorio, vogliamo che n varii anche in modo discontinuo, in scale dell'ordine di λ . Se v varia in scale di (λ) , si manifesta pure tale comportamento.

- $v(\vec{x}, t)$ continuus in $t \geq y$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ continue

- $v(\vec{r}, t)$ direz. finita in $t \Rightarrow \psi$ continua

è esigibile che garantire la conservazione della probabilità totale
 sia consistente alla teoria probabilistica. LA PARTICELLA STA IN UN PROBLEMA
 $\psi(i,t)$ = ampiezza di prob. di posizione

$|\psi(\vec{x}, t)|^2$ è la densità di probabilità.

$$\int \delta^3 z \rho(\vec{z}, t) \quad \text{prob. total}$$

$$\psi \in L$$

Vogliamo che $\frac{d}{dt} \int \delta^3 z f(\vec{z}, t) = 0 \Rightarrow$ conserv. prob. totale

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V d^3x \psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\vec{x}, t) \right) \psi(\vec{x}, t) +$$

V volume finite

$$+ \psi(\vec{z}, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{z}, t) \right) \right] d^3 \vec{z}. \quad \text{Ma} \quad i \hbar \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{z}, t) = \underbrace{\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right]}_{\text{Hilf. Sch.}, \quad \mathcal{E}} \psi(\vec{z}, t).$$

Suggeriamo $v \in R$. v è associato a n . Un n con forte immaginaria implica un assottiglamento della radionave, e per garantire allora la cosa dell'intensità, ergo della prof. per v , non ci deve essere quella parte immaginaria $V \in R \Rightarrow V^* = V$ quindi semplifica

$$\Rightarrow \frac{1}{ik} \int d^3x \left[\left(\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V \right) \psi^* \right] \psi + \psi^* \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V' \right] \psi \right\} \quad \text{(2)} \quad \text{(1)}$$

$$-\frac{\hbar}{2mi} \int_V d^3x \left[\underbrace{\psi^* \nabla^2 \psi}_1 - \underbrace{(\nabla^2 \psi^*) \psi}_2 \right] = -\left(\frac{\hbar}{2mi}\right) \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \left[\underbrace{\psi^* \vec{\nabla} \psi}_1 - \underbrace{(\vec{\nabla} \psi^*) \psi}_2 \right]$$

$$= - \int d^3x \vec{J} \cdot \vec{j}; \quad \vec{j} = \frac{k}{2m} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi]$$

TEO. DI GREEN E GAUSS-GREEN

$$\int_V d^3x \vec{v} \cdot \vec{j} = \int_S d\vec{x} \cdot \vec{j} \Rightarrow - \int_V d^3x \vec{v} \cdot \vec{j} = - \int_S d\vec{x} \cdot \vec{j}.$$

$$\text{PROB. TOTALE} \quad V \rightarrow \infty \Rightarrow S \rightarrow \infty$$

$\psi \cdot \vec{j}$ per essere in L^2 , a ∞ dev'andare a zero $\Rightarrow \vec{j} \rightarrow 0$

$$|\psi| \xrightarrow[z \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_S d\vec{s} \cdot \vec{j} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x j(\vec{x}, t) = 0$$

L'eq. di Schrödinger tiene, per $\psi \in L^2$, che la prob. totale in com. scorri.

$$\text{Se limitiamo al volume finito: } \frac{d}{dt} \int_V d^3x j(\vec{x}, t) = - \int_V d^3x \vec{V} \cdot \vec{j}$$

V = volume finito ma generico

Però $\frac{d}{dt}$ dentro come $\frac{\partial}{\partial t}$ $\Rightarrow \int_V d^3x \left[\frac{\partial}{\partial t} j(\vec{x}, t) \right]$ è il primo membro di una relaz che vale V volume finito \Rightarrow Vale per l'integrale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{j} = 0$$

denità di corrente di probabilità

Se la prob. di trovare una part. in una regione cambia, si dice avere un flusso di corrente di probabilità.

Dalle equazioni discende da Schr. Ormai localmente è conservata la probabilità.

$j \in \mathbb{R}$ quindi lo posso misurare.

$$\vec{j} = \frac{i}{2M} \left[\psi^* \left(\frac{1}{i} \vec{V} \psi \right) + \left(\frac{1}{i} \vec{V} \psi \right)^* \psi \right] \quad \text{Stiamo sommando una quantità e la complessa coniugata} \quad \text{La somma dà} \quad \vec{j} = \frac{i}{2M} \text{Re} \left[\psi^* \left(\frac{1}{i} \vec{V} \psi \right) \right], \text{ad es.}$$

$$= \text{Re} \left[\psi^* \left(-i \frac{\vec{V}}{M} \psi \right) \right] = \text{Re} \left[\psi^* \frac{\vec{p}}{M} \psi \right] \sim \begin{array}{l} \text{dennità per} \\ \text{velocità,} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{analogo di} \\ p \vec{v} \end{array}$$

questa configurazione
non è ricorrente

Quindi \vec{j} è detta densità di corrente di probabilità.

- 1) $\psi \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{j} = \vec{0}$ perché non parte nulla molt. per i \Rightarrow am. fuso \Rightarrow \vec{j} parte nulla $\Rightarrow \vec{j} = \vec{0}$
- 2) $\psi, \vec{V}\psi$ continuo $\Rightarrow \vec{j}$ continua, \vec{p} continua.

E abbiamo chiesto V reale. Scriviamo ora Schrödinger come

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \psi(\vec{x}, t), \text{ con } \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\vec{x}) \quad \text{OPERATORE HAMILTONIANO}$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\vec{x}, t) = (\hat{H} \psi(\vec{x}, t))^*$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x j(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\psi^* (\hat{H} \psi) + \right.$$

$$\left. - (\hat{H} \psi)^* \psi \right]. \quad \text{Vogliamo ora che } \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x j(\vec{x}, t) = 0. \quad \text{Cioè è vero se}$$

$$\int d^3x \psi^* (\hat{H} \psi) = \int d^3x (\hat{H} \psi)^* \psi = 0$$

$$= \int d^3x \left(\psi^* \hat{H}^+ \right) \psi \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}^+ \quad H \text{ hermitiano.}$$

Se accade ciò, la prob. totale è conservata.

Richiedendo V reale, trovo la cons. $V \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}^+$, con \hat{H} operatore agente su $\psi \in L^2$.

Probabilità

$$\psi(\vec{x}) \in L^2 \quad \text{OPERATORI IN } L^2: \hat{A}^{\text{adag}} = \hat{A}$$

- a) $\hat{A}(\psi(\vec{x})) = \psi(\vec{x}) \in L^2$
- b) $\hat{A}(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = c_1 \hat{A} \psi_1 + c_2 \hat{A} \psi_2 = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 \in L^2$
- c) $(c\hat{A})\psi = c(\hat{A}\psi)$
- d) $(\hat{A} + \hat{B})\psi = \hat{A}\psi + \hat{B}\psi$
- e) $(\hat{A}\hat{B})\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi)$
- f) $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad \Rightarrow \text{ordinare è importante}$

PRODOTTO SCALARE IN L^2 : si farà delle funzioni al quadrato sommabile

$$\varphi, \psi \in L^2 \quad (\varphi, \psi) \equiv \int d^3x \varphi^*(\vec{x}) \psi(\vec{x})$$

a) $(\varphi, \psi)^* = (\psi, \varphi)$ prop. di ricambio

b) $(\varphi, c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = c_1 (\varphi, \psi_1) + c_2 (\varphi, \psi_2)$ linearità rispetto al secondo termine
 $(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2, \psi) = c_1^* (\psi_1, \psi) + c_2^* (\psi_2, \psi)$ antilinearità rispetto al primo termine

c) $(\varphi, \psi) \geq 0$; $(\varphi, \psi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$

~~d)~~ $(\varphi, A\psi) = \int d^3x \varphi^*(\vec{x}) A\psi(\vec{x})$

D.P. AGGIUNTO

L.c. $(A^\dagger \varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$

$$\int d^3x (A^\dagger \varphi)^* \psi = \int d^3x \varphi^* (A\psi)$$

OP. AUTOAGGIUNTO O HERMITIANO $A^\dagger = A$

$(A^\dagger \varphi, \psi) = (A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ se $A^\dagger = A$

Se ora $\varphi = \psi \Rightarrow (A^\dagger \varphi, \psi)$

$$(\varphi, A\psi) = \underset{\text{simile}}{(A\psi, \psi)} = \underset{\text{herm.}}{(\psi, A\psi)} \Rightarrow (\varphi, A\psi)^* = (\psi, A\psi) \Rightarrow \Rightarrow \text{il prod.} \in \mathbb{R}$$

$\int d^3x \psi(\vec{x}) A\psi(\vec{x})$ è un valor medio, reale.

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$[A, B]^\dagger = (AB - BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = - (A^\dagger B^\dagger - B^\dagger A^\dagger) = - [A^\dagger, B^\dagger] \\ = [B^\dagger, A^\dagger]$$

COMMUTATORI

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$$

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

①

Li interverranno i valori medi. $\rho = \psi^* \psi$ densità di probabilità di funzione. Quale il valor medio di aspettazione $\langle \vec{z} \rangle$? Integro la variabile su tutto lo spazio e la pego per la densità.

$$\langle \vec{z} \rangle = \int d^3x \vec{z} \rho(\vec{x}, t) = \int d^3x \vec{\psi}^* \vec{\psi} \rho$$

Dato che $\rho = \rho(\vec{x}, t)$, $\langle \vec{z} \rangle = \langle \vec{z} \rangle(t)$ in generale

$$\text{Presa una genunica } f(\vec{z}, t), \quad \langle f(\vec{z}, t) \rangle = \int d^3x f(\vec{z}, t) \rho(\vec{z}, t) = \int d^3x \psi^* f \psi. \quad \text{Se } f = V(\vec{z})$$

$$\vec{p} \cdot \text{Osserveremo definito } \vec{\Phi}(\vec{p}, t) = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \psi(\vec{x}, t)$$

$$\vec{p} \text{ ampiezza di prob. di trovare un momento tra } \vec{p} \text{ e } \vec{p} + d\vec{p} \\ \Rightarrow f(\vec{p}, t) = \|\vec{\Phi}(\vec{p}, t)\|^2 \quad \text{densità perché la variabile è continua} \\ \Rightarrow d\hat{\rho} = \rho(\vec{p}, t) d^3p$$

Definire il valor medio di \vec{p} come allora:

$$\langle \vec{p} \rangle = \int d^3p \vec{p} \rho(\vec{p}, t) = \int d^3p \vec{\Phi}^* \vec{\Phi}$$

Similmente per $g(\vec{p}, t)$, ottenere l'inv. eimutica $i = \frac{p^2}{2m}$

$$\Rightarrow \langle g \rangle = \int d^3p g \rho(\vec{p}, t)$$

Pomo calcolare il $\langle \rangle$ ed usando la funzione d'onda? Sì, con il trasf. di Fourier per passare per passare allo spazio dei momenti.

Cagliari 24 Ottobre 2022
Giuliano Ratto

è funz della coord posso calcolare il valo medio.

Si può fare lo stesso con i momenti e con funzioni dei momenti.

Usando l'ampiezza di prob. di funzione, come calcoliamo $\langle p_z \rangle$?

$$\text{Sappiamo che } \langle p_z \rangle = \int d^3p \hat{\phi}^*(\vec{p}, t) p_z \hat{\phi}(\vec{p}, t) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3p \int d^3z \int d^3z' e^{i\vec{p} \cdot \vec{z}'} \psi^*(\vec{z}', t) p_z e^{-i\vec{p} \cdot \vec{z}} \psi(\vec{z}, t);$$

$$p_z e^{-i\vec{p} \cdot \vec{z}} = -ik \frac{\partial}{\partial z} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{z}}$$

$$\Rightarrow \int d^3p \int d^3z \int d^3z' e^{i\vec{p} \cdot \vec{z}'} \psi^*(\vec{z}', t) ik \frac{\partial}{\partial z} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{z}} \psi(\vec{z}, t) \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3;$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hbar k}\right)^3 \int d^3p \int d^3z' \int d^3z e^{i\vec{p} \cdot \vec{z}'} \psi^*(\vec{z}', t) \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{z}}}_{\substack{\text{Dall'integrazione} \\ \text{per parti}}} \left(-ik \frac{\partial}{\partial z} \psi(\vec{z}, t)\right)$$

$\int dz dy dz$
penso l'integraz.
solo sulla z

INTEGRO PER PARTI ENTRE $\pm\infty$. MA ψ TENDA A ZERO

$$\psi(\vec{z}, t) \xrightarrow[z \rightarrow \pm\infty]{} 0$$

Poi ritorno all'integraz. in d^3z

$$\text{Ho fatto questo: } \int d^3z [\quad] = \int dy dz \int dz. \text{ Considerato } e^{-i\vec{p} \cdot \vec{z}} \psi(\vec{z}, t)$$

$$\text{Ho ottenuto } e^{-i\vec{p} \cdot \vec{z}} \psi \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int dz e^{-i\vec{p} \cdot \vec{z}} \frac{\partial}{\partial z} \psi. \text{ Giusto? No.}$$

Ripristinato così l'integraz. in d^3z , ma con un segno meno.

$$\text{Ma } \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3p e^{i\vec{p} \cdot (\vec{z} - \vec{z}')} \delta^3(\vec{z} - \vec{z}') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int d^3z' \int d^3z \delta^3(\vec{z} - \vec{z}') \psi^*(\vec{z}', t) \left(-ik \frac{\partial}{\partial z} \psi(\vec{z}, t)\right) =$$

Usa la δ^3

$$= \int d^3z \psi^*(\vec{z}, t) \left(-ik \frac{\partial}{\partial z} \psi(\vec{z}, t)\right) = \langle p_z \rangle$$

Per p_z , il valo medio usando le coord. lo calcolo usando $-ik \frac{\partial}{\partial z}$.

$\langle p_z \rangle$ in rappresentazione dei momenti è $\int d^3p \hat{\phi}^* p_z \hat{\phi}$ e qui p_z agisce

secondo un prodotto come

delle coordinate

$p_z \rightarrow -ik \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow$ Per qui

spazio coniugato

agisce come operatore

di differenziale

Allora $\vec{p} \rightarrow -ik \vec{\nabla}$ e vediamo che questa corrispondenza non è canale.

Prima era irrilevante form $\hat{\phi}^* p_z \hat{\phi}$. Ora no: $-ik \vec{\nabla}$ è un operatore che agisce solo su ψ .

da corrispondenza che come agisce \vec{p} nello spazio delle coordinate.

Si può fare l'analogo per la posizione:

$$\langle \vec{z} \rangle = \int d^3z \vec{z} \psi(\vec{z}, t) = \int d^3z \vec{z} \psi^* \vec{z} \psi. \text{ Con l'antitrasformata} \\ \text{del valore medio} \\ \text{dell'operatore} \\ \text{associato}$$

$$\int d^3p \hat{\phi}^* (+ik \vec{\nabla}) \hat{\phi} \quad \hat{\phi} = \hat{\phi}(\vec{p}, t)$$

$$\langle \vec{p} \rangle = \int d^3p \vec{p} \sigma(\vec{p}, t) = \int d^3p \hat{\phi}^*(\vec{p}, t) \vec{p} \hat{\phi}(\vec{p}, t) = \\ = \int d^3z \psi^*(\vec{z}, t) (-ik \vec{\nabla}) \psi(\vec{z}, t)$$

Per l'unica faccio comparire il laplaciano.

Molti, in generale:

$$g(\vec{p}, t) \xrightarrow[\psi(\vec{z}, t)]{} g(-ik \vec{\nabla}, t)$$

$$T = \frac{p^2}{2m} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

$\vec{z}, \vec{p} \rightarrow \hat{\vec{z}}, \hat{\vec{p}}$ che i due sono hermitiani, perché in tal maniera ho quantità reali: $\hat{A}^* = \hat{A} \Rightarrow (\psi, \hat{A}\psi) \in \mathbb{R}$ ma quel prodotto è $\int d^3x \psi^* A \psi$ ($\psi = \psi(\vec{z})$) che è proprio il valore medio.

Asciogiamo a una variabile elamica A_{cl} un'operatore \hat{A} e vedi che

$$\langle \hat{A} \rangle = \int d^3x \psi^*(\vec{z}, t) \hat{A} \psi(\vec{z}, t)$$

$$\langle z \rangle = \int d^3x \psi^*(\vec{z}, t) z \psi(\vec{z}, t)$$

↑
VARIABILE

$$\langle \hat{p}_x \rangle = \int d^3x \psi^*(\vec{z}, t) (-ik \vec{\nabla}) \psi(\vec{z}, t)$$

. Quando espongo A ,
so come agisce

operator posizione

$$A_{cl} = A_{cl}(\vec{z}, t) \Rightarrow \hat{A}(\vec{z}, t)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

in $\psi(\vec{z}, t)$ → $A(\vec{z}, t)$ non elamica

$$\text{Se } A_{cl} = A_{cl}(\vec{p}, t) \Rightarrow \hat{A} = A(-ik \vec{\nabla}, t)$$

funzione
di \vec{p}

operator che ha la stessa forma
funzionale di A_{cl} ma hi sostituisce $-ik \vec{\nabla}$

$$\text{ESEMPIO: } V(\vec{z}) \rightarrow V(\vec{z}) = v(\vec{z})$$

$$T \frac{\vec{p}^2}{2m} \rightarrow \hat{T} = T(\hat{\vec{p}}) = T(-ik \vec{\nabla})$$

Spazio delle coord:

Sfusione delle coord: z come coordinate

$$\vec{z} \rightarrow \vec{z} = \vec{z}$$

Sono operatori lineari.

$$\vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -ik \vec{\nabla}$$

In generale, se ho una $A_{cl}(\vec{z}, \vec{p}, t) \rightarrow \hat{A} = A_{cl}(\vec{z}, \hat{\vec{p}}, t) = A(\vec{z}, -ik \vec{\nabla}, t)$.

$$H_{cl} = E = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\vec{z}) \rightarrow \hat{H} = -\frac{k^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{z})$$

$$\Rightarrow \hat{H}\psi = E\psi \text{ Sch. stazionaria}$$

$\langle \hat{H} \rangle = \text{valore medio energia}$

VALOR MEDI COME QUANTITÀ REALI \Rightarrow OP. LINEARI HERMITIANI

$$\text{Si può scrivere } \int d^3x \psi^*(\vec{z}, t) \hat{A} \psi(\vec{z}, t) = \int d^3x (\hat{A}\psi)^* \psi.$$

Cosa succede con un prodotto?

$$z p_x \rightarrow \hat{z} \hat{p}_x \text{ è hermitiano?}$$

Calcolo il valore medio: in \mathbb{R}^3

$$\langle \hat{z} \hat{p}_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi^*(z, t) z \left(-ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(z, t) =$$

FATTORE DIFFERENZIALE

$$= \left[ik \psi^* z \psi \right]_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial \psi^*}{\partial z} z \psi =$$

FATTORE FINITO

$$= ik \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi^* \psi + ik \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial \psi^*}{\partial z} z \psi$$

$$\text{Seguendo di normalizzare } \psi \text{ a 1} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dz = 1$$

$$\Rightarrow ik + \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(-ik \frac{\partial}{\partial z} \psi \right)^* z \psi = ik + \langle \hat{z} \hat{p}_x \rangle^* \notin \mathbb{R}$$

Ma $z p_x = p_x z$ e in tal caso avrei calcolato $\langle \hat{z} \hat{p}_x \rangle = -ik + \langle \hat{p}_x \hat{z} \rangle$.

Ma $z p_x = \frac{1}{2} (z p_x + p_x z) \rightarrow \frac{1}{2} (\hat{z} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{z})$ trovo che il valore medio è $\frac{1}{2} \langle \hat{z} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{z} \rangle \in \mathbb{R}$!

Queste variabili sono economicamente coniugate. Provando $z p_y$, $z p_z$ ho trovato che l'op. era term. Se problema è con le var. ^{economiche} coniugate, si risolve con la immittanza di variabili elamiche economicamente coniugate.

In QM, $[A, B] \neq 0$ in generale.

Quando due variabili sono coniugate, $\{p_x, q_y\} \neq 0$ se vale cioè, la somma o sottrazione in L^2 non è t.c. $[A, B] \neq 0$. Allora bisogna rimuovere.

$[\hat{x}, \hat{p}_x]$ lo faccio agire su $\psi(x, t)$ unidim, tanto non cambia.

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] \psi = (\hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x}) \psi(\hat{x}, t) = \left[x \left(-ik \frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(-ik \frac{\partial}{\partial x} \right) x \right] \psi = -ik \left[x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (x \psi) \right] = -ik \left[x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = ik \psi$$

ψ è una funzione generica \Rightarrow Deduco informazioni sull'operatore.

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] \psi = ik \psi \quad \forall \psi$$

$\underbrace{\{q_x, p_y\}}_{\text{completa adimensionale}} = \delta_{xy}$ $\underbrace{[\hat{x}, \hat{p}_x]}_{\text{dimensioni di un'azione}} = ik$ COMMUTATORE FONDAMENTALE TRA VAR. CANON. CONIUG. PROMOSSE A OPERATORI.

Heisenberg ha partito da qui per le formule matriciali.

$$[\hat{y}, \hat{p}_y] = ik = [\hat{x}, \hat{p}_x]$$

Con i valori nudi obbediscono alle stesse leggi temporali come le variabili classiche.

Mostriamo che i valori nudi obbediscono a una legge analoga a quella detta con le $\{q_i, p_j\}$ fra t . Ora ci sono un commutatore.

La const. fa parte del principio di corrispondenza

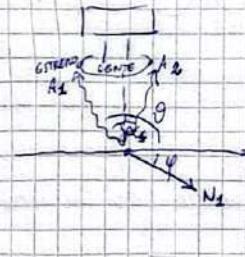
Tutoraggio

MICROSCOPIO A RAGGI X

Si mandano un fotone molto energetico (grandi frequenze \Rightarrow a piccole lunghezze d'onda) grandi energie servono per rendere piccolissime distanze $< 10^{-12}$ Heisenberg volle ridurre una variaz. di posiz. molto piccola. Come si può fare? \exists il principio di indeterminazione. Il meglio che si può fare, nel modo che vidi, è naturale l'uguaglianza.

$$\frac{hv}{c} = \text{MOMENTO}$$

$$\frac{1}{r} \rightarrow e^-$$



Il fotone dopo esso vinto può essere deviato di un angolo

$$\alpha = \frac{h\nu'}{c} \text{ senza } d_2$$

o di un angolo compreso tra A_1 e A_2 .

da risoluzione del microscopio $\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$ t.c. se a maggiore di un certo punto non si vede nulla.

$$\frac{hv}{c} = \frac{hv'}{c} \cos \theta + p_x$$

del rinculo dell'elettrone

$$p_x = \frac{hv}{c} - \frac{hv'}{c} \cos \theta, \quad \text{è seconda di } \theta \text{ c'è il caso } A_1 \text{ o } A_2.$$

Così risolviamo v e v' , ma c'è un'inertezza nel momento.

$$p_x^+ = \frac{hv}{c} - \frac{hv'}{c} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \frac{hv}{c} + \frac{hv'}{c} \sin \alpha \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{CASI ESTREMI}$$

$$p_x^- = \frac{hv}{c} - \frac{hv'}{c} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{hv}{c} - \frac{hv'}{c} \sin \alpha \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{MOMENTO ELETTRONE}$$

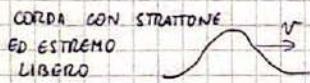
in più c'è l'inertezza Δx .

$$\Delta p_x = \frac{2hv'}{c} \sin \alpha = \frac{2h}{\lambda} \sin \alpha$$

$$\Delta p_x \Delta x = \frac{2h}{\lambda} \sin \alpha \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} = h$$

~~che~~ Non si riesce a ingannare l'indeterminazione con esperimenti mentali.

Se gli operatori non commutano \Rightarrow c'è indeterminazione nello spazio di Hilbert



Con l'impulso ningo lo darà una mossa di posizione.

se fino l'altezza attorno a cui muore a scuotere, non ha più senso parlare di posizione, ma ha senso parlare di λ , che sono determinate con buona precisione. Se scuoto la corda con tre impulsi, questi magari non sono:

Quindi non determiniamo bene

ATOMO DI IDROGENO

la pos, ma determiniamo meglio λ .
più frange ho, meno bene trovo $\lambda \rightarrow \Delta x \Delta \lambda \sim 1$

Il modulo di Rutherford non funziona a causa della radiazione di Compton. Poiché allora dice che c'è un raggio minimo per il quale l'è più orbitare, e sotto non può scendere. Gli è stanno su orbita a poca energia, cosa o si può dire che l'è quantizzato.

$p_r \sim k \equiv p_r \lambda$ quantizzato

$$(L) = nk$$

$\frac{p_r}{k}$

N°3

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ikx}$$

Separare variabili se l'energia è costante si può fare

quanto i è il prototipo di onda piana.

$$\psi(x) = \int \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \phi(k) dk \quad i \text{ è un pacchetto.}$$

funzione peso

$$|\psi(x)|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2$$

ma $1/\sqrt{\pi} dk$ è la prob. di trovare la partita tra x e $x + dx$.

Se $|\psi|^2$ non dipende da x , significa che tutti i punti sono equiprobabili. In effetti:

$$\langle x \rangle = \int dx \psi^* x \psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ikx} x \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-ikx} dk =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x dk = 0$$

Se calcolo $\langle x^2 \rangle = \infty$ diverge. Allora se $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \rightarrow \infty$

FORMA NELLO SPAZIO DEGLI IMPULSI

$$\phi(k) = \delta(k - k_0) \Rightarrow \psi(x) = \int dk \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ikx} \delta(k - k_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ik_0 x}$$

ϕ dà la forma del pacchetto, che è degenero. Non si la muove un pacchetto, ma una distrib. δ è ad es. il limite di una somma di gaussiane e $\Delta k = 0$.

Si può anche fare:

$$\langle k \rangle = \int dk \phi^*(k) k \phi(k) = \int dk k \delta^2(k - k_0)$$

Ma non c'è normalizzazione: la faccio

NOTA: FORSE SBAGLIATA

ABUSI DI NOTAZIONE

$$\langle k \rangle = \frac{\int dk p^* k \phi}{\int dk \phi^* \phi} = \frac{k_0 \delta(k_0 - k_0)}{\delta(k_0 - k_0)} = k_0$$

Salvo per k^2 .

$$\Delta k = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2} = \sqrt{k_0^2 - k_0^2} = 0$$

Aggiungiamo il generico istante t con una costante di fase.

PARTICELLE LIBERE SONO DESCRITTE DA Onde Piane

$$\text{Carriero} \quad e^{-i\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{E}{k} \rightarrow \frac{k^2 k_0^2}{2Mk}$$

$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega_0 t)}$ ma rimane dilocalizzata, la fonte della, perché s'infila. es. oscillazioni del tempo. $\Delta z \rightarrow \infty$.

IL PROBLEMA È LO SPAZIO INFINTO

SE NON SI ASSUME CHE x E p SONO OPERATORI, I CONTI NON TORNAANO.

NO COMMUTATIVITÀ \Rightarrow NO INDETERMINA.

Il secondo dell'inf. mi curano ψ è ϕ da. Gli stai Sembrano proie
inf. sul momento zioni di una stessa
grandezza chiamata

Proietto su il vettore ψ negli autostati (basi) dello spazio di Hilbert

$$\psi(p) = \langle p | \psi \rangle \quad \text{l'autostato dell'OPERATORE}$$

MOMENTO È L'ESPOENZIALE, PERCHÉ $P \rightarrow -ih\partial^k$ E L'AUTOSTATO DELLE DERIVATE È
L'ESPOENZIALE, PERCHÉ SE DERIVO PATROVO L'ESP. A MENO DI COSTANTI

$$\text{Punto finire} \quad \psi(z) = \int \frac{dp}{2\pi} \underbrace{\langle z | p \rangle}_{\substack{\text{onda} \\ \text{piana:} \\ p \text{ in rapp.} \\ \text{due coordinate}}} \underbrace{\langle p | \psi \rangle}_{\text{pacchetto}}$$

Ma i a lui come all'inizio fatto collaudare ψ nello spazio delle coor
dinate.

N°4

- Ne $i\epsilon z$ durevole uno stato finito (part. libera, senza potenziale). In un volume finito non ci sono problemi:

$$\psi'(z) = N^* e^{-iz} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |N|^2 dz = 1 \rightarrow |N|^2 L = 1 \rightarrow |N|^2 = \frac{1}{L} \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

secolo lo sol.
reale perché
posso prendere sempre la quantità con un fattore di fase e niente finché non ha la sol.
reale. Fisicamente non cambia. Tanto prendo il modulo quadro e non cambia nulla.

Se lo spazio è infinito \nexists normalizzazione

$$\cdot \psi(z) = \begin{cases} N \sin kz & |z| < \frac{\pi}{k} \\ 0 & \text{altronde} \end{cases}$$

$$|\psi|^2 = |N|^2 \sin^2 kz \Rightarrow 1 = \int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} |N|^2 \sin^2 kz = 2 \int_0^{\frac{\pi}{k}} |N|^2 \sin^2 kz$$

$$\sin^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos 2kz) \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{k}} |N|^2 (1 - \cos 2kz) = |N|^2 \frac{\pi}{k} = 1$$

$$|N|^2 = \frac{k}{\pi} \rightarrow N = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Quindi durevole uno stato finito, in un volume finito.}$$

$$\cdot \psi(z) = \frac{N}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{in tutto lo spazio}$$

$$\int |\psi|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|N|^2}{z^2 + a^2} dz = \frac{|N|^2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\frac{z}{a})^2} dz \quad \frac{z}{a} = u \quad dz = adu$$

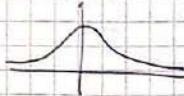
$$\Rightarrow \frac{|N|^2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{|N|^2}{a^2} \pi = 1 \rightarrow N = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

$$\Rightarrow \psi = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{1}{z^2 + a^2} \quad \text{i uno stato finito ammissibile}$$

$$\text{Q)} \quad P = \frac{\beta}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dx}{x^2 + \beta^2} = \frac{\beta}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta^2} \int_{-\alpha/\beta}^{\alpha/\beta} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\pi} \left\{ \arctg \frac{\beta}{\alpha} - \arctg \frac{-\alpha}{\beta} \right\}$$

$[0, \alpha]$ $\frac{1}{\pi} \left\{ \arctg \frac{\alpha}{\beta} - 0 \right\} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$ un quarto delle minime di forza. rientrano nell'intervallo $[0, \alpha]$

$[\alpha, 2\alpha]$ $\frac{1}{\pi} \left\{ \arctg 2 - \frac{\pi}{4} \right\} \Rightarrow P \approx 0.10 < \frac{1}{4}$. In effetti il grafico di $|\psi|^2$ è ~



$[-\alpha, \alpha]$ $P = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$

da cui si vede quanto i risultati probabili, se solo hanno mostrato gli esf. di Bell: le variabili messe

Cagliari 5 Novembre 2023

Dolando Rattu

Oscillazione di Ehrenfest

Semplifica il principio di corrispondenza.

$$it \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t)$$

$$-ik \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\vec{r}, t) = (\hat{H} \psi(\vec{r}, t))^*$$

$$(\hat{H} \psi)^* = \psi^* \hat{H} \quad \text{con } \hat{t} \text{ che agisce a sinistra. poiché } \hat{H} = \hat{H}$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \int d^3 \vec{r} \psi^* (\vec{r}, t) \hat{A} \psi (\vec{r}, t);$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \int d^3 \vec{r} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \hat{A} \psi + \psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi + \psi^* \hat{A} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] =$$

$$= \int d^3 \vec{r} \left[\frac{i}{\hbar} \left(\psi^* \hat{A} \hat{H} \psi - (\hat{H} \psi)^* \hat{A} \psi \right) + \psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi \right] =$$

$$\psi^* \hat{H}$$

$$= \int d^3 \vec{r} \frac{1}{i\hbar} = \left(\frac{1}{i\hbar} \right) \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \rangle$$

Cioè i simboli a quanto accade al nell'evoluzione temporale di una variabile classica:

$$\frac{dA}{dt} = \{ A, H \} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad \text{Vediamo la corri-$$

spontaneità tra $\{ \}$ e $[\]$, con in mezzo un fattore $\frac{1}{i\hbar}$ che compare. L'Hamiltoniana è quanto controlla l'ev. temporale, ma in M.Q. diventa un operatore.

Ora: \vec{z} non dipende espliciti dal tempo $\Rightarrow \frac{\partial \vec{z}}{\partial t} = 0$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{z} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{z}, \hat{H}] \rangle, \quad \text{quando } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{z}) -$$

Calcoliamo ad ora $[x, H]$, il contributo di V è nullo perché non cambia: $[z, V(\vec{z})] \psi(\vec{z}, t) = [zV(\vec{z}^2) - V(\vec{z}^2)z] \psi = 0$ perché $zV = Vz$.

$$\text{Allora consideriamo solo } [x, H] = [x, \frac{\vec{p}^2}{2m}] \quad \vec{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

Ma z commuta con p_x e p_z , quindi l'unico termine che sopravvive è $[x, \frac{p_z^2}{2m}] = \frac{i}{2m} \{ p_z [x, p_z] + [x, p_z] p_z \}$. Ma

$$[x, p_z] = ik \Rightarrow [x, \frac{p_z^2}{2m}] = ik \frac{p_z^2}{m}$$

Ora similmente per y e z .

$$\downarrow \\ \frac{d}{dt} \langle \vec{z} \rangle = \frac{1}{ik} \langle [\vec{z}^2, \hat{H}] \rangle = \frac{1}{ik} ik \langle \frac{\vec{p}^2}{m} \rangle = \langle \frac{\vec{p}^2}{m} \rangle$$

da notare: del valore medio della posiz. nel tempo è la velocità.
È il valore medio della velocità.

$$\text{Consideriamo ora } \frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{ik} \langle [\vec{p}, \hat{H}] \rangle$$

$\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{z})$ ma \vec{p} commuta con \vec{p}^2 e allora sopravvive solo il termine ciò che ha i contratti di $V \Rightarrow [\vec{p}, \frac{\vec{p}^2}{2m}] = 0$

$$\downarrow \\ \frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{ik} \langle [\vec{p}, V(\vec{z})] \rangle$$

$$\text{Consideriamo } [p_x, V(\vec{z})] \psi(\vec{z}) = [p_x V(\vec{z}^2) - V(\vec{z}^2) p_x] \psi =$$

Ci posso mettere t , ma conta la dipendenza dalle coordinate

$$= -ik \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (V(\vec{z}) \psi(\vec{z})) - V(\vec{z}^2) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} = -ik \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} \psi + V \frac{\partial \psi}{\partial z} - V \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}$$

$$= -ik \frac{\partial V}{\partial z} \psi$$

↓

$$[p_x, V(\vec{z})] = -ik \frac{\partial}{\partial z} V(\vec{z}) \quad \text{(metto in rapporto cont. delle cond.)}$$

↓

$$[\vec{p}, V(\vec{z})] = -ik \vec{V} V(\vec{z})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{ik} (-ik) \langle \vec{V} V(\vec{z}) \rangle = - \langle \vec{V} V(\vec{z}) \rangle$$

Ma V è l'energia potenziale $\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle = \langle \vec{F} \rangle = \langle \vec{F}(\vec{z}) \rangle$

Considerando ora

$$\frac{d}{dt} \left(M \underbrace{\frac{d}{dt} \langle \vec{z} \rangle}_{\langle \vec{p} \rangle} \right) = \frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle = \langle \vec{F}(\vec{z}) \rangle = - \langle \vec{V} V(\vec{z}) \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \left(M \frac{d}{dt} \langle \vec{z} \rangle \right) = - \langle \vec{V} V(\vec{z}) \rangle$$

TEOREMA DI
EHRENFEST

$$M \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{z} \rangle$$

(LEGGI DI
NEWTON
PER I VALORI
MEDI DELLE
VARIABILI
 \vec{z} E \vec{p})

E questa dimostra i speciebramenti sul testo di Schawall.

Quindi, $\psi(\vec{z}, t) = \psi(\vec{z}) e^{-\frac{i}{\hbar} Et}$ analogo di un'onda monochromatica. Per calcolare lo scarto quadratico medio di E , facciamo $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$ claramente.

$$(\Delta E)^2 = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$$

Caso quantistico

$$(\Delta E)^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \text{, con i valori medi}$$

$$\int \psi^*(\vec{z}) \psi d^3z.$$

$$H\psi = E\psi \rightarrow H^2\psi = H(E\psi) = E^2\psi \Rightarrow \langle H^2 \rangle = E^2$$

$\Rightarrow (\Delta E)^2 = E^2 - E^2 = 0$ perché lo stato è un'energia finita, e le misure di energia non distribuite con scarto nullo.

Se $V = V(\vec{z}) \Rightarrow \psi(\vec{z}, t) = \psi(\vec{z}) e^{-\frac{i}{\hbar} Et}$, stato a un. finita con $(\Delta E)^2 = 0$. Ma vediamo che $\psi(\vec{z}, t)$ è uno stato stazionario:

$$\begin{aligned} j(\vec{z}, t) &= \psi^*(\vec{z}, t) \psi(\vec{z}, t) = \psi^*(\vec{z}) \psi(\vec{z}) = |\psi(\vec{z})|^2 = \\ &= \rho(\vec{z}) \text{ che non dipende dal tempo.} \end{aligned}$$

Ma abbiamo definito $\rho(\vec{z})$ anche $j(\vec{z}, t)$, che in tal caso è $i \frac{\hbar}{2m} (\psi^*(\vec{z}) \vec{\nabla} \psi(\vec{z}) - \vec{\nabla} \psi^*(\vec{z}) \psi(\vec{z}))$ e anche j non dipende dal tempo.

ψ dipende dal tempo, ma le quantità misurabili, cioè le densità, no.

$$\text{Dato che } \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

tenendo conto che $\int d^3z \rho = 1$, si calcola

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \int d^3z \psi^*(\vec{z}, t) \hat{A}(\vec{z}, -ik\vec{\sigma}) \psi(\vec{z}, t) \text{ da che } \langle \hat{A} \rangle = \\ &= \int d^3z \psi^*(\vec{z}) \hat{A}(\vec{z}, -ik\vec{\sigma}) \psi(\vec{z}) \text{ anche se il valore medio non} \\ &\text{dipende direttamente dal tempo.} \end{aligned}$$

Cominciamo meglio gli stati

$$H\psi_E(\vec{z}) = E\psi_E(\vec{z})$$

autof. relativa all'autor. E

• STATO LEGATO $\rightarrow E = E_n$ (quantizzazione), $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &\int d^3z \psi_E^*(\vec{z}) \psi_E(\vec{z}) = 1 \\ &\psi \rightarrow 0 \text{ per } |\vec{z}| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

• CASO DEL CONTINUO (es. onda piana e^{ikz})
Significa che E può assumere qualunque valore reale con $E = \frac{E_{k\perp}^2 + p^2}{2m}$

$\psi_E \notin L^2$ e allora si sceglie un volume finito per cui E diventa una variabile quantizzata e $\int d^3z \psi_E^* \psi_E = 1$

Ma questo V è grande t.c. il perimetro del cubo di lato L è $\frac{\pi}{L}$ piccolo \sim continuità. Dopo dove sta il trucco. Se no non posso passare dal continuo al discreto.

Quindi faremo valere $\int d^3z \psi_E^* \psi_E = 1$ in entrambi i casi. Si dimostra che $\int d^3z \psi_{E'}^*(\vec{z}) \psi_E(\vec{z}) = 0$ per $E' \neq E$.

autofunzioni
cioè perché gli stati sono ortomormali. Autoveloni diversi \Rightarrow
Prod. reale nullo. Per lavorare sui due casi sceglieremo un avio
nu grande V . Ma tanto $H = H^+$, quindi ad autovel. dist.
corrispondono autovettori \perp . Lo so già. Dove la condizione
entra in gioco?

$$H\psi_e = E\psi_e$$

$$\textcircled{1} \quad \Psi_e^*(H\psi_e) = \bar{E}\Psi_e^*\psi_e$$

$$H\psi_{e'} = E'\psi_{e'}$$

$$(H\psi_{e'})^* = \bar{E}'\psi_{e'}^*$$

$$\textcircled{2} \quad (H\psi_{e'})^*\psi_e = \bar{E}'\psi_{e'}^*\psi_e$$

\textcircled{1} \textcircled{2} è INTESO

$$(E - E') \int_V d^3x \Psi_e^* \psi_e = \int_V d^3x (\Psi_e^* H \psi_e - (H \psi_{e'})^* \psi_e) =$$

$$= \int_V d^3x (\Psi_e^* H \psi_e - \Psi_{e'}^* H \psi_e) = 0$$

H^+ perché è herm.

$$\text{Se } E \neq E' \Rightarrow \int_V d^3x \Psi_e^* \psi_e = 0$$

$\Psi_e^*(\vec{x}) \quad \Psi_e(\vec{x})$

$$\text{Dieiamo allora che } \boxed{\int_V d^3x \Psi_{e'}^*(\vec{x}) \Psi_e(\vec{x}) = \delta_{e'e}}$$

Gli stati ψ_e sono ortonormali.

Nel caso di degenerazione, cioè, finito E , si hanno più ψ_e , la dimostr. non funziona.

Sufficiente di avere $\psi_{e1}, \psi_{e2}, \dots, \psi_{ek}$ lin. indipendenti,

ti, si procede allora con Gram-Schmidt:

Se $\{A, A^+\} = 0$ ho $\dim K = m =$ moltefficità dell'
operator. Purtroppo non gli autovel. sono tutti nello spazio

non ortogonali \Rightarrow uso Gram-Schmidt
 ψ_i ortogonali

(\Rightarrow reg. stazionaria)

Risulta dunque agli autoveloni, anche nel caso degenero si può avere un insieme completo ortonormale Ψ_E , dal fatto che $H^+ = H$.

\Rightarrow Oltretutto una base in $L^2 \Rightarrow \Psi(\vec{x}, t)$ generica = $\sum_{e \in E} c_e(t) \Psi_e(\vec{x})$
nella considerando H , che è separabile quindi la sol. è del tipo $f(t)\Psi(\vec{x})$. Esso $f(t) = C_E(t)$

CHI SONO LE $c_e(t)$?

$$\int d^3x \Psi_{e'}^*(\vec{x}) \Psi(\vec{x}, t) = \int d^3x \underbrace{\Psi_{e'}^*(\vec{x})}_{e'} \underbrace{\sum_e c_e(t) \Psi_e(\vec{x})}_{\delta_{e'e}} = c_{e'}(t)$$

$$= c_{e'}(t)$$

$c(t)$ si ottengono proiettando la $\Psi(\vec{x}, t)$ sulla base doppia $\Psi_e(\vec{x})$

CONVIZ. VEC. È SUFF. !!!

Se H è herm. \Rightarrow gli autostati relativi
ad autoveloni distinti

sono ortogonali.

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \Psi_{e'}^*(\vec{x}, t) \Psi_e(\vec{x}, t) = 0$$

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} Et}$$

$$\Rightarrow \frac{i}{\hbar} (E' - E) \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \Psi_{e'}^*(\vec{x}) \Psi_e(\vec{x}) = 0$$

$$E' \neq E \Rightarrow \int_V = 0 \Rightarrow \Psi_{e'} \perp \Psi_e$$

$$E' = E \quad \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \Psi_{e'}^* \Psi_e = 1 \quad \text{CONS. PROB. TOTALE}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \Psi_{e'}^*(\vec{x}, t) \Psi_e(\vec{x}, t) = \delta_{ee}$$

TEO. CARENFEST: HO I VALORI MEDII: CI SARA' UNA DISTRIB. CON O.

$$ik \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{z}, t) = H \psi(\vec{z}, t)$$

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(\vec{z})$$

$$V = V(\vec{z}) \rightarrow \text{sist. com.} \rightarrow \text{Gromo}$$

$$H \psi_e(\vec{z}) = E \psi_e(\vec{z}) \quad \text{con } \psi(\vec{z}, t) = \psi_e(\vec{z}) e^{-\frac{iE}{\hbar} t}$$

ψ_e mist. om. completo \rightarrow Base

di autovettori che sono

versori (punti)

normalizzati a 1

cioè

dopo

integrazione

della prob. totale

Pomo sviluppano allora una qualunque $\psi(\vec{z}, t) = \sum_e c_e(t) \psi_e(\vec{z})$,

con $c_e = (\psi_e, \psi)$.

$$\text{Sostituisco nell'eq: } ik \frac{\partial}{\partial t} \sum_e c_e(t) \psi_e(\vec{z}) = H \sum_e c_e(t) \psi_e(\vec{z})$$

cioè pomo fanno nullo l'eq. stazionario. Proietto l'equazione su sulla base, cioè moltiplico a sx per la base ψ_e integrando su tutto lo spazio

$$\int d^3x \psi^* \left[ik \frac{\partial}{\partial t} \sum_e c_e(t) \psi_e(\vec{z}) \right] = \int d^3x \psi^* \left(H \sum_e c_e(t) \psi_e(\vec{z}) \right)$$

$$= \int d^3x \psi^*(\vec{z}) \left(\sum_{e'} E' c_{e'}(t) \psi_{e'}(\vec{z}) \right)$$

$$\sum_{e'} ik \frac{d}{dt} c_{e'}(t) \delta_{ee'} \downarrow$$

$$\sum_{e'} ik \frac{d}{dt} c_{e'}(t) \delta_{ee'} = \sum_{e'} E' c_{e'}(t) \delta_{ee'}$$

$$ik \frac{d}{dt} c_e(t) = E c_e(t) \quad \Downarrow \quad \text{Quindi } c_e(t) = c_e(t_0) e^{-\frac{iE}{\hbar} (t-t_0)}$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow c_e(t) = c_e(0) e^{-\frac{iE}{\hbar} t} = c_e e^{-\frac{iE}{\hbar} t}$$

Allora la sol. più generale è $\psi(\vec{z}, t) = \sum_e c_e e^{-\frac{iE}{\hbar} t} \psi_e(\vec{z})$ per l'eq. stazionario. Vale not. i una somma di stati stazionari. Qui supponiamo di conoscere $\psi_e(\vec{z})$ poiché abbiamo risolto l'eq. agli autovettori. c_e viene data dalle cond. iniziali.

$$\psi(\vec{z}, t_0) = \psi(\vec{z}, 0) \rightarrow c_e(0) = \int d^3x \psi_e^*(\vec{z}) \psi(\vec{z}, 0)$$

sist. com. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{Gromo} \quad H \psi_e = E \psi_e$ diagonalizzando \rightarrow

$$\rightarrow \psi(\vec{z}, t) = \sum_e c_e e^{-\frac{iE}{\hbar} t} \psi_e(\vec{z}). \text{ FINE. Ora si fa nella risoluzione dell'eq. agli autovettori, diagonalizzare}$$

Ho solo $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow$ data la cond. in t_0 trovo la sol. $\psi(t)$.

$$\int d^3x \psi^*(\vec{z}, t) \psi(\vec{z}, t) = 1 = \sum_e \sum_{e'} c_e(0) c_{e'}^*(0) e^{-\frac{i}{\hbar} (E - E') t}$$

$$\underbrace{\int d^3x \psi_e^*(\vec{z}) \psi_e(\vec{z})}_{\text{Sei}} = \sum_e |c_e|^2 = 1$$

$$\psi(\vec{z}, t) = \sum_e c_e e^{-\frac{iE}{\hbar} t} \psi_e(\vec{z})$$

$$\text{Se ora calcolo } f(\vec{z}, t) = \psi^*(\vec{z}, t) \psi(\vec{z}, t) = \sum_{e, e'} c_e c_{e'}^* e^{-\frac{i}{\hbar} (E - E') t} \psi_{e'}^*(\vec{z}) \psi_e(\vec{z})$$

vedo che, essendo una sommazione, c'è dipendenza dal tempo, e l'equazione non è finita.

rimanente, $\vec{j} = \vec{j}(\vec{z}, t)$. Cominciamo i termini di interruzione.
 $\langle \hat{A} \rangle = \langle \hat{A} \rangle(t)$ sullo stato $\psi(\vec{z}, t)$. C'è invece l'operatore

hamiltoniano che continua a non dipendere dal tempo.

$$\langle H \rangle = \int d^3x \psi^*(\vec{z}, t) H \psi(\vec{z}, t) =$$

$$= \sum_{E, E'} c_E c_{E'} e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E')t} \int d^3z \psi_E^*(\vec{z}) \underbrace{H \psi_E(\vec{z})}_{\text{!}} = \text{usando la cond.}$$

$\text{!} \quad (\vec{E}) \psi_E(\vec{z})$

$\hookrightarrow \text{può spostare}$

$$= \sum_{E, E'} c_E c_{E'} e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E')t} \delta_{EE'} = \sum_{E, E'} |c_E|^2 \delta_{EE'}$$

$$\langle H \rangle = \sum_E |c_E|^2 E$$

Allora da un'omogeneità, ciò che si può minimizzare è dato dall'autovettore E dell'operatore associato alla grandezza finita.

Quando sommo su E , sommo allora su tutti i possibili valori. Ma allora $|c_E|^2$ è la probabilità associata a esistere valori di energia.

Ricordiammo, $\langle E \rangle = \frac{\sum E p_E}{\sum p_E} \rightarrow \frac{\sum |c_E|^2 E}{\sum |c_E|^2} = \sum |c_E|^2 E$

$\text{!} \quad \text{se ho normalizzato la funz. d'onda}$

Ricordiamo sempre considerando un insieme di sistemi isolati e indipendenti.

In generale, $\langle H \rangle = \sum_E |c_E|^2 E \neq E_0$ che avviene considerando

$$\psi(\vec{z}, t) = C_{E_0} e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \psi_{E_0}(\vec{z}) \quad \text{t.c. } c_{E_0} = 1, c_E = 0, E \neq E_0$$

CASO DEGENERE

BILINARE

$$H \Psi_{E,n} = E \Psi_{E,n} \quad n = 1, \dots, \alpha_E \text{ indice di degenerazione}$$

$$\psi(\vec{z}, t) = \sum_{E, n} \sum_{n=1}^{\alpha_E} c_{E,n} \Psi_{E,n} e^{-\frac{i}{\hbar} Et}, \quad \text{Prima } n=1. \quad \text{Ora: norma}$$

$$\text{ma se } \psi : \int d^3x \psi^*(\vec{z}, t) \psi(\vec{z}, t) = 1. \quad \text{Com'è } \Psi_{E,n} \text{ uso Gram-Schmidt}$$

$$\text{metti t.c. } \int d^3x \Psi_{E,n}^*(\vec{z}) \Psi_{E,n}(\vec{z}) = \delta_{EE'} \delta_{nn'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int d^3x \psi^*(\vec{z}, t) \psi(\vec{z}, t) = \sum_E \sum_n |c_{E,n}|^2 \text{ e quindi:}$$

$$\langle H \rangle = \sum_E \left(\sum_n |c_{E,n}|^2 \right) E = \sum_E p_E E$$

$p_E = \sum_n |c_{E,n}|^2$ prob. che una misura dia quel valore di energia.

Sono le energie dei possibili stati

la prob. di trovare E è il rettangolo per E finito.

Per

Un'ultima ora

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{z}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(\vec{z}) \right] \psi(\vec{z}, t)$$

$$\psi(\vec{z}, t) = \psi(\vec{z}) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \quad \text{stato stazionario}$$

$$-\frac{i\hbar}{2M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(\vec{z}) \right\} \psi(\vec{z}) = E \psi(\vec{z}) \quad \text{ci va il pedice } E.$$

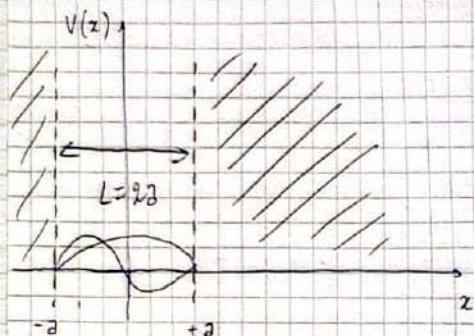
$$p(z, t) = |\psi(\vec{z})|^2$$

$$\vec{j}(z, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^*(\vec{z}) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi(\vec{z}) \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right]$$

$$\text{ma allora } \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial z} = 0 \quad j \text{ non dipende da } z$$

mi da z

Teoria di potenziali a barri infiniti



$$V(z) = \begin{cases} 0 & |z| < a \\ \infty & |z| > a \end{cases}$$

Dove muore $\psi(z) = 0$ $|z| \geq a$ per l'intervento probabilistico

Ma la discontinuità ~~ora~~^{ai bordi} di V ora è $\infty \Rightarrow$ ci sarà solo ψ continua in $|z| = a$, e non anche $\frac{d}{dz}\psi$.

L'equazione che studiamo è $-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2\psi}{dz^2} + V(z) = E\psi(z) \quad |z| < a$.

Quasi il sistema è confinato \Rightarrow i valori dell'energia diventano quantizzati.

Introduciamo $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ $\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dz^2} + k^2\psi = 0$ e cerchiamo

$\psi(z) = A'e^{ikz} + B'e^{-ikz}$ ~~o~~^{o meglio}, o meglio $\psi(z) = A\cos kz + B\sin kz$. Questa è la forma in questo caso più pratica.

Ora: $\psi(a) = \psi(-a) = 0$

$$\psi(a) = A\cos ka + B\sin ka = 0$$

$$\psi(-a) = A\cos(-ka) - B\sin(-ka) = 0 \Rightarrow B\sin ka = A\cos ka$$

Se come, se le due eqg. sono lin. ind., l'unica sol. è la banale, chiediamo che non sia lin. ind. ~~perché~~^{ponendo} $B \neq 0$ \Rightarrow ~~che~~^{che} c'è qualche a in k , che finora non ho detto niente

In realtà, più semplice, faccio somma e sottraggo e trovo

$$A\cos ka = 0$$

$$B\sin ka = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos ka = 0 \rightarrow B = 0 \\ \sin ka = 0 \rightarrow A = 0 \end{array} \right.$$

In entrambi i casi ho una condizione su k .

- CASO $B = 0 \rightarrow \cos ka = 0 \Rightarrow ka = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow k = (2n+1)\frac{\pi}{2a}$ con n dispari $1, 3, 5, \dots$

Quindi k dipende da n . Ma $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ \Rightarrow ~~se~~ quindi

$$k_n = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (E_n)$$

$\Rightarrow \psi_n = A_n \cos k_n z$ e chiudo la normalizzazione $\int_{-a}^a \psi_n^*(z) \psi_n(z) dz = 1 \Rightarrow$

ma

$$\Rightarrow \psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \left(\frac{n\pi}{2a} z \right),$$

- CASO $A = 0 \rightarrow \sin ka = 0$

$$k_n = \frac{n\pi}{2a} = \frac{n\pi}{L} \quad n \text{ pari } 2, 4, 6, \dots$$

Non abbiamo usato lo zero...

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \left(\frac{n\pi}{2a} z \right)$$

la forma di k è la stessa. Complementamente: $k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N}$

$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2M} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ML^2} \quad n \in \mathbb{N}$ lo spettro è ∞ . Non ci sono limiti a n . Del resto, la base è a punti ∞ .

Ma si può dimostrare che $\int_a^a \psi_n^*(z) \psi_n(z) dz = \delta_{nn}$ perché n e m sono ortogonali.

Ha fatto a un'energia più bassa $n=1 \Rightarrow E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ML^2} \neq 0$. Ciò è incompatibile al principio di indeterminazione, perché $k=0 \Rightarrow E_0=0$

\Rightarrow Considererò erattivamente $P(=0)$ e z . Dovrei $\Delta z \sim a$, Δp

$$m \sim \frac{k}{a} \Rightarrow E = \frac{p^2}{2M} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

$$D'accordo alla funz. d'onda $\lambda_0 = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \hbar \nu k$.$$

Sarà uno spazio confinato si formano onde stazionarie. L'onda di De Broglie è un'onda staz. t.c. $n \frac{\lambda}{2} = 2a$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Si noti che questa condizione equivale a $n = \frac{n\pi}{2a}$, se faccio i conti.

Questa è un'onda che ha solo hanno una posità definita, o ci lo aspettiamo?

$V(z) = V(-z)$ e H non cambia, perché ha $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ e $V(z)$. Quindi il risultato che sto studiando è invariante per posità, t.c. i moduli quadri non cambiano.

Come crescono i livelli energetici H (stati legati) $-\frac{1}{n^2}$

boca $n \in \mathbb{Z}$

osc. arm $n + \frac{1}{2}$

Tutoraggio

$$\psi(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{i}{\hbar k} px} \rightarrow N = \sqrt{\frac{\pi k}{L}}, \|\psi\|^2 = \frac{1}{2L} \Rightarrow \text{Delocalizzazione}$$

per $|x| \leq L$

$$\langle x \rangle = \int dx \psi^* x \psi = 0 \quad \langle x^2 \rangle = \frac{L^2}{3}$$

$$\langle p \rangle = \int_{-L}^L \psi^*(x) \left(-ik \frac{d}{dx} \right) \psi(x) = -ik \int \frac{ip}{x} = p \quad \langle p^2 \rangle = p^2$$

Fanno scuri che il momento sia quello $\Rightarrow \Delta p = 0$. Per un'onda uno stato delocalizzato me lo aspetto.

$$C^2 - S^2 = C \cdot 2x$$

$$1 - 2S^2 = C \cdot 2x$$

$$S^2 = \frac{1 - C \cdot 2x}{2}$$

$$\psi(x) = N \sin\left(\frac{px}{k}\right) \quad x \in [0, \frac{2\pi k}{p}]$$

$$\int_0^{\frac{2\pi k}{p}} \sin^2\left(\frac{px}{k}\right) dx = \frac{N^2}{2} \int_0^{\frac{2\pi k}{p}} (1 - \cos\left(\frac{2px}{k}\right)) dx = \frac{N^2}{2} \left[\frac{2\pi k}{p} - \int_0^{\frac{2\pi k}{p}} \cos\left(\frac{2px}{k}\right) dx \right] = \frac{N^2}{2} \cdot \frac{2\pi k}{p} = 1 \Rightarrow N = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\pi k}} \Rightarrow \psi(x) = \sqrt{\frac{p}{\pi k}} \sin\left(\frac{px}{k}\right)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{p}{\pi k} \int_0^{\frac{2\pi k}{p}} x^2 \sin^2\left(\frac{px}{k}\right) dx = \frac{1}{2} \frac{p}{\pi k} \int_0^{\frac{2\pi k}{p}} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2px}{k}\right)\right) dx = \frac{p}{2\pi k} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi k}{p}\right)^2 - \int_0^{\frac{2\pi k}{p}} x \cos\left(\frac{2px}{k}\right) dx \right] = \frac{\pi k}{p}$$

$$\langle x^4 \rangle = \frac{p}{\pi k} \int_0^{\frac{2\pi k}{p}} \int_0^{\frac{2\pi k}{p}} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{2\pi k}{p}\right)^3 - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi k}{p}} x^2 \cos\left(\frac{2px}{k}\right) dx \right) dx \Rightarrow$$

$$\langle x^4 \rangle = \frac{p}{\pi k} \left(\frac{8\pi^3 k^3}{6p^3} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 k^2}{p^3} \right) = \frac{1}{3} \frac{\pi^2 k^2}{p^2} - \frac{k^2}{2p^2}$$

$$\Delta x = \left[-\frac{\pi^2 k^2}{p^2} + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 k^2}{p^2} - \frac{k^2}{2p^2} \right] = \frac{1}{3} \frac{\pi^2 k^2}{p^2} - \frac{k^2}{2p^2}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int dx \psi^*(x) \left(-ik \frac{d}{dx} \right) \psi(x)$$

$$\left(-ik \frac{d}{dx} \right) \psi = -ik \sqrt{\frac{p}{\pi k}} \cos\left(\frac{px}{k}\right) \frac{p}{k} \Rightarrow \langle \hat{p}^2 \rangle = 0.$$

~~$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \left(-ik \frac{d}{dx} \right)^2 \psi = \left(-ik \right)^2 \sqrt{\frac{p}{\pi k}} \frac{p}{k} \left(-\sin\left(\frac{px}{k}\right) \right) = p^2 \sqrt{\frac{p}{\pi k}} \sin\left(\frac{px}{k}\right)$$~~

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = p^2$$

$$\Delta p^2 = p^2$$

$$\Delta x^2 \Delta p^2 = \frac{\pi^2 k^2}{3} - \frac{k^2}{2} = \left(\frac{\pi k}{3} - \frac{k}{2} \right) k^2 \geq \frac{\pi^2 k^2}{9}$$

$$\psi(x) = N e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

$$\|\psi\|^2 = |N|^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}} \quad |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz = |N|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{1}{a^2}\right)}} = |N|^2 \sqrt{\pi} a$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{\pi} a} \Rightarrow \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi} a} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{a^2}} x^2 = -a^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{a \sqrt{\pi}} \left(-\frac{x^2}{a^2}\right) e^{-\frac{x^2}{a^2}} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{a^2}} \Big|_{x=1} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{a}} a \right\} \Big|_{x=1} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ -\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} a \right\} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$\langle p \rangle = 0 \quad \text{per simmetria}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{2}$$

$$-ik \frac{d}{dx} \psi(x) = -\frac{ik}{\sqrt{\pi} a} (-2x) \cdot \frac{1}{2a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

$$\text{Se faccio agire di nuovo il termo: } \frac{(-ik)^2}{\sqrt{\pi} a} \left\{ -\frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{(-ik)^2}{\sqrt{\pi} a} \left\{ -\frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \right\} = \frac{ik^2}{2^3 \sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} a \cancel{ik} \frac{ik^2}{2^5 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} =$$

$$= \frac{k^2}{2^5 \sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} a - \frac{k^2}{2^5} \frac{a^2}{2} = \frac{k^2}{2a^2}$$

$$\Delta x^2 \Delta p^2 = \frac{k^2}{4}$$

$$\begin{array}{l} \text{spazio coord} \\ p \rightarrow -ik \frac{\partial}{\partial x} \end{array}$$

$$\text{spazio momenti}$$

$$x$$

$$x \rightarrow ik \frac{\partial}{\partial p}$$

Buia di potenziale

Esercizio 6

Particella libera dentro la buia.

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a} x\right) \quad n = 1, 3, \dots$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a} x\right) \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

$$E_n = \frac{k^2 \pi^2}{8 M a^2} n^2 \quad n=1 \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a} x\right)$$

$$\langle z \rangle = 0 = \int_{-a}^a dx z \psi^* \psi \quad \text{Per la diss. = diss.} \quad c \int_{-a}^a dx = 0$$

$$\langle p \rangle = \int_{-a}^a \frac{ik}{a} \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \psi \cos\left(\frac{n\pi}{2a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2a} x\right) = 0$$

$$\langle p^2 \rangle = ? \quad \text{Dentro la fonticella i libri} \Rightarrow \frac{p^2}{2M} = E$$

$$\langle \hat{H} \rangle_{n=1} = \frac{k^2 \pi^2}{8 M a^2} = E_1 = E \text{ Edi} \quad \langle \hat{p}^2 \rangle = 2M \langle \hat{H} \rangle \quad M E = \frac{p^2}{2M}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{k^2 \pi^2}{4 a^2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-a}^a dx \frac{1}{a} z^2 \cos^2 \frac{n\pi}{2a} x = \frac{2}{a} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \frac{1}{2} (1 + \cos(ay)) \left(y = \frac{\pi x}{2a}\right)$$

$$= \frac{2}{a} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^3 \left[\frac{\pi^3}{24} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \cos(ay) dy \right] = \frac{2}{3} - \frac{2a^2}{\pi^2}$$

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \frac{k^2 \pi^2}{4} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{a^2} \right) \geq \frac{k^2}{4}$$

H: Operatori di cui ψ è autorizzata.

Lo studio nel tempo mi ha fornito $\psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-iEt/\hbar}$ e
il rotolo muove continua a mom dipendere dal tempo.

$\frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t}$
energia
associata
a quello
stato
rotolante

Mai faremo' altre descriz. equivalenti dello stato ruotando ψ
nello spazio di Hilbert, e ovvi quindi farci diverse.

Consideriamo ora una buca e una ψ che i normati di due funzioni.

$$\psi(x,t) = \frac{i}{2} \psi_1(x,t) + B \psi_2(x,t)$$

normalizzato $\Rightarrow B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ è $\in \mathbb{R}$ per comodità. Va bene qualunque corso che stessa può modello questo.

Ma ecco, se poniamo a $t=0$ perché raffiguriamo che la norma a $t=0$ si preserva. Quindi ci dimentichiamo dei fattori di fase e invochiamo il fatto che $\psi_1^* \psi_1 = 1$ $\psi_2^* \psi_2 = 0$ $\alpha \neq \beta$.

$\left| \frac{1}{2} \right|^2$ dice quale è la probabilità di trovare l'energia corrisp. al primo autovalore.

$$P(E=E_1) = \frac{1}{4} \quad P(E=E_2) = \frac{3}{4}$$

$$\langle x \rangle(t) = ?$$

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \quad \psi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a dx \left[\underbrace{\psi_1^*(x,t)}_{\psi_1'(x) e^{\frac{i}{\hbar} E_1 t}} \left(-\frac{i}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{\psi_2^*(x,t)}_{\psi_2'(x) e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t}} \right] x \left[\frac{i}{2} \psi_1(x,t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_2(x,t) \right] \\ & = \int_{-a}^a dx \left\{ -\frac{i}{2} \psi_1'(x) e^{\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_2'(x) e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} \right\} x \left\{ \frac{i}{2} \psi_1(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_2(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} \right\} \\ & = \int_{-a}^a dx -\frac{i\sqrt{3}}{4i} \psi_2 \psi_1 e^{\frac{i}{\hbar} (E_2 - E_1)t} + \frac{i\sqrt{3}}{4i} \psi_1 \psi_2 e^{-\frac{i}{\hbar} (E_2 - E_1)t} \\ & \quad \leftarrow \zeta = 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2i} \left(e^{-i\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}} - e^{i\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}} \right) \int_{-a}^a dx \psi_2 x \psi_1 = \\ & = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \int_{-a}^a dx \psi_2 x \psi_1 \end{aligned}$$

$$\int_{-a}^a x \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) dx \quad \frac{\pi x}{2a} = y \quad dx = \frac{2a}{\pi} dy$$

$$\sin(y+ay) = \sin y \cos ay + \sin ay \cos y$$

$$\sin(ay-y) = \sin y \cos ay - \sin ay \cos y$$

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 y \cos y \sin ay dy =$$

$$= \frac{32a^3}{9\pi^2} \quad \langle x \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) + \frac{32a^3}{9\pi^2}$$

$$\langle H \rangle = |C_1|^2 E_1 + |C_2|^2 E_2 \quad \text{con } E_n = \frac{k^2 \pi^2}{8Ma^2} n^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\hbar^2}{8Ma^2}$$

Ora quindi i valori medi oscillano, $\langle x \rangle$ oscilla.

$$\begin{aligned} C_{P2} &= \int_{-a}^a dx \left\{ \left(-\frac{i}{2} \psi_1^* e^{\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_2^* e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} \right) \left(\frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi_1 \right) e^{\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(-ik \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 \right) e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} \right) \right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \int_{-a}^a \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \\ & = -\frac{\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{(E_2 - E_1)t}{2}} \int_{-a}^a \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) x + \frac{\sqrt{3}}{4} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{(E_2 - E_1)t}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_{-a}^a dx \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

$$\lambda_B = \frac{h}{p} \quad v = \frac{E}{h} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = 2\pi v \\ = \frac{E}{\hbar}$$

IPO: anda piano

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega(k)t)} \text{ d. BR.} \quad = A e^{i(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{E}{\hbar} t)} = \\ = A e^{i(p_x x - E(p_x) t)}$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = p_x \psi(x, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -E(p_x) \psi(x, t)$$

$$\mathbb{R}^3 \quad \psi(\vec{r}, t) = A e^{i[\vec{p} \cdot \vec{r} - E(p)t]}$$

$$-i\hbar \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) = \vec{p} \psi(\vec{r}, t)$$

\mathbb{R}^1

ψ densidade $\in L^2$ ma

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |A|^2 \neq 1 \rightarrow \infty !!$$

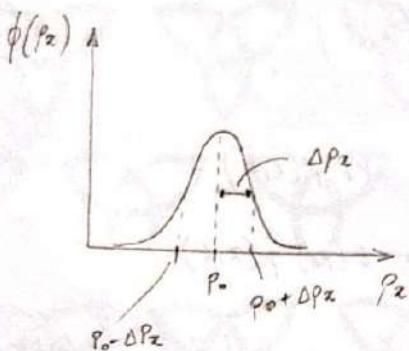
ψ piano $\notin L^2$

ONDA PIANA → PACCHETTO D'ONDA

$$\psi(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar}[p_x x - Et]}$$

/
funzione
pero

IPO: $\phi(p_x)$ funzione pero piceata in p_0



$$p_x x - E(p_x)t \stackrel{\text{def}}{=} \beta$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar}\beta}$$

β varia molto $\Rightarrow \psi(x,t) \rightarrow 0$

$\beta \sim$ costante $\Rightarrow \psi \neq 0$ (i contributi si sommano)

CERCO LA CONDIZIONE

$$\frac{d\beta}{dp_x} = 0$$

(2)

$$\frac{d\beta}{dp_x} \Big|_{p_0} = 0 \Rightarrow \text{Vedo dove } \beta \neq 0$$

$$\beta = p_x x - E(p_x)t$$

$$\frac{d\beta}{dp_x} \Big|_{p_0} = x - \frac{dE}{dp_x} \Big|_{p_0} = 0$$

EQ. DEL MOTORE PER
IL CENTRO DEL
PACCHETTO

$$\frac{dE}{dp_x} \Big|_{p_0} = v_g = \frac{dp}{dk}$$

PRINCIPIO DI CORRISPONDENZA

$$v_g = \frac{p_0}{M} \Rightarrow \frac{dE}{dp_x} \Big|_{p_0} = \frac{p_0}{M}$$

INTEGRO

$$E(p_x) = \frac{p_x^2}{2M} \Big|_{p_0} + C$$

$$\boxed{dE = \frac{p_0^2}{2M}}$$

La funzione per garantire la correnza

(4)

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar} [p_x z - E(p_x)t]} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar} [p_x z - \frac{p_x^2}{2M}t]}$$

$$P_x = p_x + p_0 - p_0$$

$$\frac{p_x^2}{2M} = \frac{(p_x + p_0 - p_0)^2}{2M} = \frac{p_x^2}{2M} + \frac{p_0^2}{2M} + \frac{p_0^2}{2M} + \frac{2p_x p_0}{2M} - \frac{2p_0^2}{2M} +$$

$$- \frac{2p_x p_0}{2M} = \frac{p_x^2}{2M} + \left(\frac{p_0^2}{2M} \right) + \frac{p_0^2}{2M} + \left(\frac{p_x p_0}{M} \right) - \frac{p_0^2}{M} - \frac{2p_x p_0}{2M} =$$

$$= \frac{p_0^2}{2M} + \frac{p_0}{M} (p_x - p_0) + \frac{(p_x - p_0)^2}{2M}$$

$$\text{Ipo: tumuli piccoli} \Rightarrow (p_x - p_0)^2 \sim 0$$

$$\Rightarrow E(p_x) \sim \frac{p_0^2}{2M} + \frac{p_0}{M} (p_x - p_0)$$

$$\Rightarrow \beta = (p_x + p_0 - p_0)z - \left(\frac{p_0^2}{2M} + \frac{p_0}{M} (p_x - p_0) \right) t =$$

$$= (p_x - p_0)(z - v_g t) + p_0 z - \frac{p_0^2}{2M} t$$

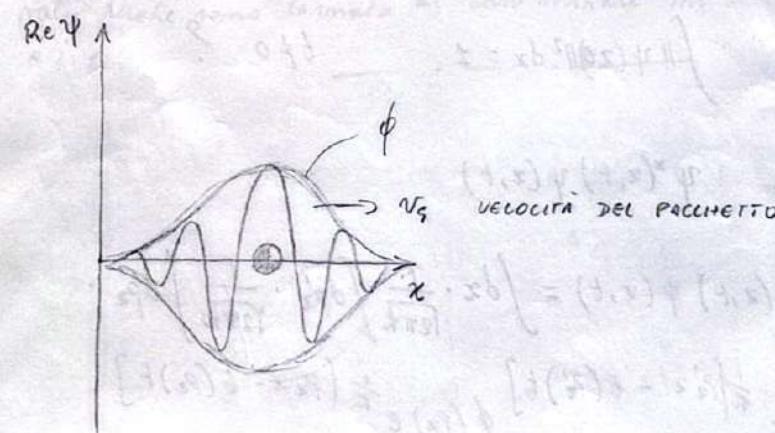
$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar} [(p_x - p_0)(z - v_g t) + p_0 z - \frac{p_0^2}{2M} t]} =$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar} [p_0 z - E(p_0)t]} \underbrace{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar} [(p_x - p_0)(z - v_g t)]} \right\}}_{\text{Onda piana associata a } p_0} F(x, t)$$

$$\|\psi(z, t)\|^2 = \|F(x, t)\|$$

$$\psi(z, t) = e^{\frac{i}{\hbar} [p_0 z - E(p_0)t]} F(x, t)$$

$$F(x, 0) = f(z + v_g t, t)$$



$$\psi(x, 0) \stackrel{def}{=} \psi(x)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) e^{i \frac{k}{\hbar} p_x x}$$

Quasiformata di Fourier

$$\Rightarrow \phi(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-i \frac{k}{\hbar} p_x x}$$

$$\lambda_0 = \frac{\hbar}{p_x} \Rightarrow \frac{2\pi}{k} = \frac{\hbar}{p_x} \Rightarrow \frac{k}{2\pi} = \frac{p_x}{\hbar}$$

$$\Rightarrow k = \frac{p_x}{\hbar}$$

PARSEVAL

$$\int \|\psi(x, 0)\|^2 dx = \int \|\phi(p_x)\|^2 dp_x = 1$$

$$t=0 \quad \int \|\psi(x, 0)\|^2 dx = 1 \quad t \neq 0 ?$$

$$\|\psi(x, t)\|^2 = \psi^*(x, t) \psi(x, t)$$

$$\int dx \psi^*(x, t) \psi(x, t) = \int dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int dp'_x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int dp_x \cdot$$

$$\cdot \phi^*(p'_x) e^{-i \frac{k}{\hbar} [p'_x x - E(p'_x)t]} \phi(p_x) e^{i \frac{k}{\hbar} [p_x x - E(p_x)t]}$$

(6)

$$= \frac{1}{2\pi k} \int dx \int dp'_x \int dp_x \phi^*(p'_x) \phi(p_x) e^{i \frac{k}{\hbar} (p_x - p'_x)x}$$

$$- i \hbar [E(p_x) - E(p'_x)] t$$

mi concentro su

$$\frac{1}{2\pi k} \int dx e^{i \frac{k}{\hbar} (p_x - p'_x)x} : \frac{x}{\hbar} = y \quad dy = dx \quad \text{c.v.}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int dy e^{i (p_x - p'_x)y} = \delta(p_x - p'_x)$$

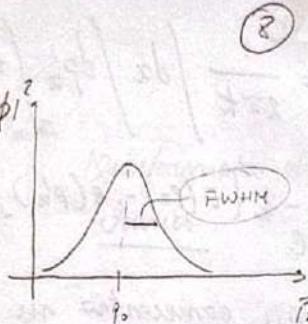
$$\Rightarrow \int dp'_x \int dp_x \phi^*(p'_x) \phi(p_x) \delta(p_x - p'_x) =$$

$$= \int dp_x \phi^*(p_x) \phi(p_x) = \int dp_x \|\phi(p_x)\|^2 = 1 \quad \text{per Parseval}$$

ora, faremo tornato al caso iniziale in cui non c'è t .

PICCHETTO D'ONDA GAUSSIANO

$$\phi(p_x) = ce^{-\frac{(p_x - p_0)^2}{2\Delta p_x^2}} |\phi|^2$$



⑧

PARENTESI MATEMATICA

$$\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\alpha u^2} e^{-\beta u} = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\alpha(u + \frac{\beta}{2\alpha})^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$$

$$= e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\alpha(u + \frac{\beta}{2\alpha})^2}$$

$$u + \frac{\beta}{2\alpha} \stackrel{c.v.}{=} u'$$

$$du = du'$$

$$\Rightarrow e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} du' e^{-\alpha u'^2} = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int dp_x |\phi|^2 = 1$$

$$|\phi|^2 = |c|^2 e^{-\frac{(p_x - p_0)^2}{\Delta p_x^2}} \quad u = \frac{p_x - p_0}{\Delta p_x}$$

$$|c|^2 e^{-u^2} \quad du = \frac{1}{\Delta p_x} dp_x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c|^2 e^{-u^2} \Delta p_x du = |c|^2 \Delta p_x \sqrt{\pi} = 1$$

$$\Rightarrow |c|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta p_x} \quad c = \pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}}$$

⑨

$$\phi(p_x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(p_x - p_0)^2}{2\Delta p_x^2}}$$

$$\psi(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar}(p_x z)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x e^{\frac{i}{\hbar} p_x z} \pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(p_x - p_0)^2}{2\Delta p_x^2}}$$

$$p_x = p_x + p_0 - p_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x e^{\frac{i}{\hbar}(p_x - p_0)z} \pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(p_x - p_0)^2}{2\Delta p_x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 z} \pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} u z} e^{-\frac{1}{2\Delta p_x^2} u^2}$$

$$u = p_x - p_0$$

$$\alpha = \frac{1}{2\Delta p_x^2}$$

$$\beta = -\frac{i}{\hbar} z$$

$$\alpha e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} =$$

$$\alpha e^{-\frac{z^2}{2\Delta p_x^2}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1}{2\Delta p_x^2}} \Rightarrow$$

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2} \Delta p_x e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x} \cdot \sqrt{\pi}. \quad (10)$$

$$e^{-\frac{x^2}{k^2} \frac{\Delta p_x^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{2\pi} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x} e^{-\frac{x^2}{k^2} \frac{\Delta p_x^2}{2}}$$

TRANSFORMATA DI
UNA GAUSSIANA
È ANCORA UNA
GAUSSIANA

LARGHEZZA DELLA DISTRIBUZIONE

$$\Delta x \text{ t.c. } |\psi|^2 = \frac{1}{e} |\psi|_{\max}^2$$

$$|\psi|^2 \sim e^{-\frac{x^2}{k^2} \frac{\Delta p_x^2}{2}} \Rightarrow \Delta x = \frac{k}{\Delta p_x}$$

$$p_z = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k$$

$$\Delta p_x = \hbar \Delta k \Rightarrow \Delta x = \frac{k}{\hbar \Delta k} = \frac{1}{\Delta k}$$

$$\boxed{\Delta x \Delta k = 1}$$

Def pacchetto
economico

$$\Delta x \Delta p_x = \hbar$$



$t \neq 0$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar} (p_x x - E(p_x) t)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x e^{-\frac{(p_x - p_0)^2}{2\Delta p_x^2}} e^{\frac{i}{\hbar} ((p_x - p_0)x + p_0 x - \frac{(p_x - p_0)^2}{2M} t)}$$

$$\frac{(p_x - p_0 + p_0)^2}{2M} = \frac{p_x^2}{2M} + \frac{p_0^2}{2M} + \frac{p_0^2}{2M} - \frac{p_x p_0}{M} + \frac{p_x p_0}{M} - \frac{p_0^2}{M} =$$

$$= \frac{(p_x - p_0)^2}{2M} + \frac{p_0}{M} (p_x - p_0) + \frac{p_0^2}{2M}$$

↓

$$\frac{\pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x e^{-\frac{(p_x - p_0)^2}{2\Delta p_x^2}} e^{\frac{i}{\hbar} (p_x - p_0)x} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{(p_x - p_0)^2}{2M} t} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p_0^2}{2M} t}$$

$$- \frac{i}{\hbar} \frac{p_0}{M} (p_x - p_0) t$$

$$e^{ - \frac{i}{\hbar} \frac{p_0}{M} (p_x - p_0) t } =$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 x - E(p_0) t)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x e^{-\frac{(p_x - p_0)^2}{2\Delta p_x^2} \left[\frac{1}{2\Delta p_x^2} + \frac{i}{\hbar} \frac{t}{2M} \right]}$$

$$(p_x - p_0) \left[\frac{i}{\hbar} x - \frac{i}{\hbar} \frac{p_0}{M} t \right] =$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 x - E(p_0) t)} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2 \left[\frac{1}{2\Delta p_x^2} + \frac{i}{2\hbar M} t \right]} u \left[\frac{ix}{\hbar} - \frac{i}{\hbar} \frac{p_0}{M} t \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{2\Delta p_x^2} + \frac{it}{2kM} ; \quad \beta = \frac{-i}{\hbar} (v_g t + x) \quad (12)$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) \propto e^{\frac{p_x^2}{\hbar \alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\Delta p_x^2} + \frac{it}{2kM}}} \frac{1}{2} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar^2} (v_g t + x)^2 \right\}$$

↓

$$\psi(x,t) =$$

$$\frac{\pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 x - E(p_0)t)} \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{1}{2\Delta p_x^2} + \frac{it}{2kM} \right)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar^2} (x - v_g t)^2 \right\} =$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 x - E(p_0)t)}}{\left[\frac{1}{2\Delta p_x^2} + \frac{it}{2kM} \right]^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{(x - v_g t)^2}{\hbar^2 \left(\frac{1}{2\Delta p_x^2} + \frac{it}{2kM} \right)} \right\}$$

Dal modulo quadro definisce la lunghezza.

$$|\psi(x,t)|^2 =$$

$$\frac{\pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x}{2\pi} \underbrace{\frac{1}{\left[\frac{1}{2\Delta p_x^2} + \frac{t^2}{\hbar^2 M^2} \right]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{2\hbar^2 \left(\frac{1}{2\Delta p_x^2} + \frac{t^2}{\hbar^2 M^2} \right)}}$$

II

$$\left[\frac{1}{2\Delta p_x^2} \left(1 + \frac{t^2 \Delta p_x^2}{\hbar^2 M^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\Delta p_x^2} \left[1 + \frac{t^2 \Delta p_x^2}{\hbar^2 M^2} \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

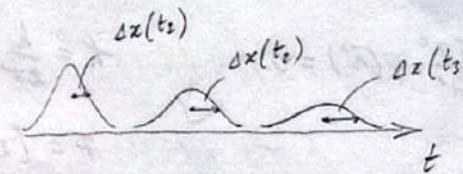
$$\downarrow$$

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{\pi^{-\frac{1}{2}} \Delta p_x}{2\pi} \frac{\sqrt{\Delta p_x}}{\left[1 + \frac{\Delta p_x^4 t^2}{\hbar^2 M^2} \right]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\Delta p_x^2}{\hbar^2} \frac{(x - v_g t)^2}{\left(1 + \frac{\Delta p_x^4 t^2}{\hbar^2 M^2} \right)}} =$$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{\Delta p_x}{\hbar} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta p_x^4 t^2}{\hbar^2 M^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\Delta p_x^2}{\hbar^2} \frac{(x - v_g t)^2}{\left(1 + \frac{\Delta p_x^4 t^2}{\hbar^2 M^2} \right)}} .$$

Avremo definito Δx t.c. $\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x}$. Ora

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x} \left(1 + \frac{\Delta p_x^4 t^2}{\hbar^2 M^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \Delta x(t)$$



SPARPAGLIAMENTO
DEL
PACCHETTO
D'ONDA

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar$$

Pacchetto gaussiano $\Rightarrow \Delta x \Delta p_x = \hbar$

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar$$

$$\Delta y \Delta p_y \approx \hbar$$

$$\Delta z \Delta p_z \approx \hbar$$

VARIABILI CANONICHE,
CONIUGATE

— · — · —

OTTICA FISICA

$$v_f = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} = 2\nu$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$\text{De Broglie } \lambda_0 = \frac{h}{p}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad \text{in un mezzo}$$

EQ. DI Onda

$$\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{ONDA PIANA: } \psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad \frac{1}{2\nu} = \frac{e\pi}{2\omega}$$

$$\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}) - \frac{(e\pi)^2}{\lambda^2 c^2} (-\omega^2) \psi(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}) + \frac{e\pi^2}{\lambda^2} \psi(\vec{r}) = 0 \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

$$p = [2M(E-V)]^{1/2}$$

$$\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}) + \frac{e\pi^2}{\lambda^2} 2M(E-V) \psi(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}) + \frac{2M}{\lambda^2} (E-V(\vec{r})) \psi(\vec{r}) = 0$$

$$\boxed{-\frac{1}{2M} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})}$$

EQ. DI
SCHRÖDINGER
STAZIONARIA

$$\text{Infatti } \|\psi(\vec{r}, t)\|^2 = \|\psi(\vec{r})\|^2$$

$$n(x, y, z) \Rightarrow \rho = [2M(E - V(\vec{r}))]^{1/2} \quad (14)$$

SOLUZ. GENERALE

$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) e^{i\frac{E}{\hbar}(S_0(\vec{r}) - Et)} \quad (15)$$

azione

Immagine null' eq. d'onda e biono:

$$\vec{\nabla}^2 \psi = \psi \left[\vec{\nabla}^2 + \frac{i}{\hbar} (S_0(\vec{r}) - Et) + A \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla} S_0 e^{\frac{i}{\hbar}(S_0(\vec{r}) - Et)} \right]$$

$$\vec{\nabla}^2 \psi = \psi \left[\vec{\nabla}^2 A \left(\dots \right) + \vec{\nabla} A \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S_0 \left(\dots \right) + \vec{\nabla} A \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S_0 \left(\dots \right) + \right.$$

$$\left. + A \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla}^2 S_0 \left(\dots \right) + A \frac{i}{\hbar^2} (\vec{\nabla} S_0)^2 \left(\dots \right) \right] =$$

$$= \psi \left(\dots \right) \left[\vec{\nabla}^2 A + 2 \vec{\nabla} A \vec{\nabla} S_0 \frac{i}{\hbar} + A \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla}^2 S_0 + \frac{A}{\hbar^2} (\vec{\nabla} S_0)^2 \right]$$

↓

PER

$$\vec{\nabla}^2 \psi + \frac{2M}{\hbar^2} [E - V] \psi = 0$$

↓

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}^2 A - \frac{A}{\hbar^2} (\vec{\nabla} S_0)^2 + \frac{2M}{\hbar^2} (E - V) A = 0 \\ 2 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S_0 + A \vec{\nabla}^2 S_0 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{PARTE} \\ \text{REALE} \end{array}$$

PARTE
IMAGINARIA

è corretto?

40

Parte reale

$$\nabla^2 A - \frac{A}{k^2} (\vec{\nabla} S)^2 + A \frac{2M}{k^2} (E - V) = 0$$

$$\hbar^2 \frac{\nabla^2 A}{A} - (\vec{\nabla} S)^2 + 2M(E - V) = 0$$

$$t \rightarrow 0 \quad (\text{limite classico}) \Rightarrow \underline{\underline{\|\vec{\nabla} S\|^2 = 2M(E - V)}}$$

Ipo: sistema atomico

$$\psi_n(\vec{r}, t) = \psi_n(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{r}, t)$$

$$\|\psi\|^2 = \|\psi(\vec{r}, t)\|^2 \text{ DIPENDE DA } t$$

$$\text{SOL. STAZIONARIA} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(\vec{r}, t) = E_n \psi_n(\vec{r}, t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \psi_n(\vec{r}) + V(r) \psi_n(\vec{r}) = E_n \psi_n(\vec{r})$$

MOLTIPLICO PER $e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$

↓

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \psi_n(\vec{r}, t) + V(r) \psi_n(\vec{r}, t) = E_n \psi_n(\vec{r}, t)$$

FACCIO LA SOVRAPPOSIZIONE FACENDO COMPARIRE

$\frac{\partial}{\partial t}$

(16)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$$

EQ. DI SCHRODINGER TEMPORALE

CONSIDERO

$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t)}$$

SOL. PIÙ GENERALE

$$\vec{\nabla} \psi = \vec{\nabla} A \left(\exp \right) + A \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S \left(\exp \right)$$

Rifatto nel foglio seguente

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \left[\nabla^2 A + \vec{\nabla} A \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S + \vec{\nabla} A \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S + A \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla}^2 S + \right. \\ &\quad \left. - \frac{A}{\hbar^2} (\vec{\nabla} S)^2 \right] \left(\exp \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\partial A}{\partial t} \left(\exp \right) + A \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \left(\exp \right)$$

↓ INSERISCO NELL' EQ. DI SCHRODINGER TEMPORALE

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\nabla^2 A + 2\vec{\nabla} A \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S + A \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla}^2 S - \frac{A}{\hbar^2} (\vec{\nabla} S)^2 \right) + V \right] =$$

$$= i\hbar \left(\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\vec{V}^2 A - \frac{A}{\hbar^2} (\vec{V} \cdot \vec{S})^2 \right) + V + A \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{PARTE REALE (18)}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{V}^2 A + \frac{A}{2M} (\vec{V} \cdot \vec{S})^2 + V + A \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

\Downarrow
 P^2

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{V}^2 A + \frac{A}{2M} P^2 + V + A \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\vec{V}^2 A}{A} + \frac{P^2}{2M} + A \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER TEMPORALE

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$$

$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) e^{i \frac{\hbar}{\hbar} S(\vec{r}, t)}$$

$$\vec{V}\psi = \vec{V}A e^{\frac{i\hbar}{\hbar} S} + A \frac{i}{\hbar} \vec{V}S e^{\frac{i\hbar}{\hbar} S}$$

$$\nabla^2 \psi = \vec{V}^2 A e^{\frac{i\hbar}{\hbar} S} + \frac{i}{\hbar} \vec{V}A \cdot \vec{V}S e^{\frac{i\hbar}{\hbar} S} + \vec{V}A \cdot \vec{V}S \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i\hbar}{\hbar} S} + A \frac{i}{\hbar} \vec{V}^2 S e^{\frac{i\hbar}{\hbar} S} +$$

$$+ A \frac{i}{\hbar} - \frac{1}{\hbar^2} A (\vec{V} \cdot \vec{S})^2 e^{\frac{i\hbar}{\hbar} S}$$

• sostituiamo a sinistra

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{i}{\hbar} A \frac{\partial S}{\partial t} e^{\frac{i\hbar}{\hbar} S(\vec{r}, t)}$$

• sostituendo nell'equazione di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left\{ \vec{V}^2 A + \frac{q^2}{\hbar^2} \vec{V}A \cdot \vec{V}S + \frac{i}{\hbar} A \vec{V}^2 S - \frac{A}{\hbar^2} (\vec{V} \cdot \vec{S})^2 \right\} e^{\frac{i\hbar}{\hbar} S} = -A \frac{\partial S}{\partial t} e^{\frac{i\hbar}{\hbar} S}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{V}^2 A - \frac{q^2}{\hbar^2} \vec{V}A \cdot \vec{V}S - \frac{i\hbar}{2M} A \vec{V}^2 S + \frac{A}{2M} (\vec{V} \cdot \vec{S})^2 + A \frac{\partial S}{\partial t} = 0 + AV = 0$$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{V}^2 A + \frac{A}{2M} (\vec{V} \cdot \vec{S})^2 + A \frac{\partial S}{\partial t} + AV = 0 \right.$$

$$\left. \frac{i\hbar}{\hbar} \vec{V}A \cdot \vec{V}S + \frac{i\hbar}{2M} A \vec{V}^2 S = 0 \right.$$

PARTE REALE

PARTE IMMAGINARIA

Parte reale

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 A + \frac{A}{2M} (\vec{V}S)^2 + A \frac{\partial S}{\partial t} + AV = 0$$

B

Diviso per A e moltiplicato per $2M$, cambiando anche segno

$$\frac{\hbar^2 \nabla^2 A}{A} - (\vec{V}S)^2 - \frac{2M \partial S}{\partial t} - 2MV = 0$$

$$\frac{\hbar^2 \nabla^2 A}{A} - (\vec{V}S)^2 - 2M \frac{\partial S}{\partial t} - 2MV = 0$$

$$\frac{\hbar^2 \nabla^2 A}{A} - \text{f}(t)$$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \left\{ \nabla^2 A + \frac{2i}{\hbar} \vec{V}A \cdot \vec{V}S + \frac{i}{\hbar} A \nabla^2 S - \frac{A}{\hbar^2} (\vec{V}S)^2 \right\} + AV \right\} e^{iS/\hbar} = -A \frac{\partial S}{\partial t} e^{iS/\hbar}$$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 A + \frac{A}{2M} (\vec{V}S)^2 + AV + A \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \right.$$

parte immaginaria

Parte reale

$$-\frac{i \nabla^2 A}{A} + (\vec{V}S)^2 + 2MV + A \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$k' \frac{\nabla^2 A}{A} - \left\{ \frac{(\vec{V}S)^2}{2M} + V \right\} = + \frac{\partial S}{\partial t} \xrightarrow{k \rightarrow 0} - \left\{ \frac{p^2}{2M} + V \right\} = \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\Rightarrow H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{Hamilton-Jacobi}$$

R³

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V \right) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$$

ONDA MONOCROMATICA CORRE SOLUZIONE

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V \right) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

$$R^1 \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

ONDA MONOCROM., $\psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$
ONDE TOTALE PERCHÉ NON C'È DIP. DA t

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x) = E \psi(x)$$

PARTICELLA LIBERA $V=0$

R¹ particella libera

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \psi = \psi(x, t)$$

L'ONDA MONOCROM. è sol?

$$\psi(x, t) = A e^{i(k(p_x x - Et))}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = E \psi(x, t) \quad A=1$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(-\frac{p_x^2}{\hbar^2} \right) \psi = i\hbar \left(-\frac{1}{\hbar} E \right) \psi(x, t)$$

$$\frac{p_x^2}{2m} \psi(x, t) = E \psi(x, t) \quad \text{OK, PERCHÉ} \quad (20)$$

$E = \frac{p_x^2}{2m}$ PER UNA PART. LIBERA

PACCHETTO D'ONDA È SOL.?

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)}$$

$$ik \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) ik \frac{i}{\hbar} (-E) e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) \frac{p_x^2}{2m} e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)}$$

$$\frac{p_x^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{DALLA DIM. DI PRIMA} \quad (\text{FINE P. 19})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \phi(p_x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = ik \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

R3

$$(-i\hbar \vec{p}) \psi(\vec{r}, t) = \vec{p} \psi(\vec{r}, t) \quad (21)$$

$$-k^2 \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = p^2 \psi(\vec{r}, t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{E} \psi(\vec{r}, t)$$

$$= E \psi(\vec{r}, t) = ik \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$$

QUINDI L'ONDA MONOCHROM SOODISSEA SCHRÖDINGER \Rightarrow IL PACCHETTO D'ONDE PURE LO SOODISFA.

ψ ONDA PIANA (MONOCHROM.)

$$-i\hbar \vec{p} \rightarrow \vec{p}$$

$$ik \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow E$$

Ipo: l'annoziazione vale sempre

$\psi(\vec{r}, t)$ genuina

$$\text{SE } V=0 \Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} = H_{\text{cl}} \quad H_{\text{cl}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{H} \text{ (operatore)}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = ik \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

$$\frac{p^2}{2m} = E$$

$$p \rightarrow -i\hbar \vec{p} \quad E \rightarrow ik \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{AGENTI SU } \psi(\vec{r}, t)$$

$$H_{\text{cl}} \rightarrow \hat{H}$$

$$\hat{c} = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V - i\hbar \vec{v} \right) \psi(\vec{r}, t)$$

in $\psi(\vec{r}, t)$ generale

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{V}^2 + V \right) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$$

$V = V(\vec{r}, t)$ IN GENERALE

V come $V(\vec{r})$ se V continua $\Rightarrow \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \vec{\nabla} \psi$
continua

perché se il
primo membro
con \vec{V}^2 è continuo,
anche se II

V disc. conolinearità finita \vec{V}^2 disc. con $\frac{\partial}{\partial t}$
due
 $\psi, \vec{\nabla} \psi$
continui

V come $V(t)$ continuo in t $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}$ continuo
disc. con disc. finita $\Rightarrow \psi$ continua

Verifica della conservazione della probabilità totale

$\psi(\vec{r}, t)$ ampt. di prob. di pos.
 $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)$
densità di probabilità

$$\frac{d}{dt} \int d^3 \vec{r} \rho(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{con} \quad \int d^3 \vec{r} \rho(\vec{r}, t) \text{ prob. totale}$$

$\psi \in L^2$ per ipo.

CONSIDERO UN VOLUME FINITO V

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V d^3 \vec{r} \rho(\vec{r}, t) &= \frac{d}{dt} \int_V d^3 \vec{r} \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = \\ &= \int_V d^3 \vec{r} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

Ipo: $V(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \psi(\vec{r}, t) = -\frac{i}{\hbar} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{V}^2 + V \right] \psi(\vec{r}, t)$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\vec{r}, t) = E \psi^*(\vec{r}, t) \Rightarrow \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{V}^2 + V \right] \psi^*$$

↓

$$\begin{aligned} \int_V d^3 \vec{r} \left\{ \left[\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{V}^2 + V \right) \psi \right] \psi^*(\vec{r}, t) + \psi^*(\vec{r}, t) \left[\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{V}^2 + V \right) \psi \right] \right\} = \\ = -\frac{i}{\hbar} \int_V d^3 \vec{r} \left\{ \left[\left(\frac{\hbar^2}{2m} \vec{V}^2 - V \right) \psi \right] \psi^*(\vec{r}, t) + \psi^*(\vec{r}, t) \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{V}^2 + V \right) \psi \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int_V d^3\vec{r} \left\{ \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* \right] \psi + \psi^* \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \right] \right\} = \quad (24)$$

$$= -\frac{\hbar^2 i}{2m} \int_V d^3\vec{r} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi) =$$

$$= \frac{\hbar^2 i}{2m} \int_V d^3\vec{r} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) =$$

$$= \frac{\hbar^2 i}{2m} \int_V d^3\vec{r} \vec{v} \cdot (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

$$\frac{\hbar^2 i}{2m} (\psi^* \vec{v} \psi - \psi \vec{v} \psi^*) \stackrel{\text{not}}{=} \vec{j}$$

$$-\int_V d^3\vec{r} \vec{v} \cdot \vec{j} \stackrel{\text{DIV.}}{=} -\int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$V \rightarrow \infty \Rightarrow S \rightarrow \infty \Rightarrow \psi, \psi^* \rightarrow 0 \text{ se } \psi, \psi^* \in L^2$

$$\Rightarrow -\int_{\infty}^{\infty} d^3\vec{r} \vec{v} \cdot \vec{j} = \frac{d}{dt} \int_{\infty}^{\infty} d^3\vec{r} \rho(\vec{r}, t) = 0$$

OSSERVAZIONI

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3\vec{r} \rho(\vec{r}, t) = - \int_V d^3\vec{r} \vec{v} \cdot \vec{j} \quad (25)$$

in generale

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \text{ DENTRO L'INTEGRALE}$$

$$\int_V d^3\vec{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_V d^3\vec{r} \vec{v} \cdot \vec{j}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{j} = 0}$$

EQUAZIONE
DI CONTINUITÀ

\vec{j} DENSITÀ DI CORRENTE DI PROBABILITÀ

$\vec{j} \in IR$ e lo posso misurare

$$\vec{j} = \frac{\hbar^2 i}{2m} [\psi^* \vec{v} \psi - \psi \vec{v} \psi^*] =$$

$$= \frac{1}{2m} [\psi^* (-ik\vec{v}) \psi - \psi (-ik\vec{v}) \psi^*] =$$

$$= \frac{1}{2} [\psi^* \frac{\vec{p}}{m} \psi - \psi \frac{\vec{p}}{m} \psi^*] = \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{Re} \left\{ \psi^* \left(\frac{\vec{p}}{m} \right) \psi \right\}$$

ANALOGO DI $\vec{P}(t)$ IN ELETTRODINAMICA

$$\text{qui } \psi^* \psi \quad \text{qui } \frac{\vec{p}}{m}$$

VELOCITÀ DI
GRUPPO

$$\psi \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{j} = \vec{0}$$

$\psi, \vec{p}\psi$ continua con V ev. con discont. finite \Rightarrow

f, \vec{j} continue

Ipo: $V \in \mathbb{R}$

$$it \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t)$$

$$\hat{H} = -\frac{k^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t)$$

$$-it \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\vec{r}, t) = [\hat{H} \psi(\vec{r}, t)]^*$$

$$\frac{d}{dt} \int d^3\vec{r} \psi^* \psi = \int d^3\vec{r} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) =$$

$$= \int d^3\vec{r} \left[\frac{i}{\hbar} (\hat{H} \psi(\vec{r}, t))^* \psi - \frac{i}{\hbar} \psi^* (\hat{H} \psi(\vec{r}, t)) \right] =$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int d^3\vec{r} [\psi^* \hat{H} \psi - (\hat{H} \psi)^* \psi] = 0 \quad \text{SE DEVE VALERE}$$

$$\text{cio} \Rightarrow \int d^3\vec{r} (\underline{\psi^* \hat{H} \psi}) = \int d^3\vec{r} (\hat{H} \psi)^* \psi =$$

$$= \int d^3\vec{r} (\underline{\psi^* \hat{H}^+ \psi})$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \hat{H}^+ \Rightarrow \hat{H} \text{ è HERMITIANO}$$

(26)

CALCOLO $\langle p_x \rangle$ CON LA FUNZ. D'ONDA

(27)

$$\langle p_x \rangle = \int d^3p \phi^*(\vec{p}, t) p_x \phi(\vec{p}, t)$$

$$\phi(\vec{p}, t) = \frac{1}{(2k\pi)^3} \int d^3\vec{r} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \psi(\vec{r}, t)$$

basato su 3 dimensioni

$$\phi^*(\vec{p}, t) = \frac{1}{(2k\pi)^3} \int d^3\vec{r}' e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}'} \psi^*(\vec{r}', t)$$

SOSTITUISCO

$$\langle p_x \rangle \propto \int d^3p \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}'} \underbrace{\psi^*(\vec{r}', t) p_x e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}'}}_{\text{LO VEDO COME UNA DERIVATA PARZIALE}} \psi(\vec{r}, t)$$

$$it \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}'} \right) = it \left(-\frac{i}{\hbar} \right) p_x e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}'} = p_x e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}'}$$

$$p_x \rightarrow ik \frac{\partial}{\partial x}$$

↓

$$\langle p_x \rangle \propto \int d^3p \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \psi^*(\vec{r}', t) \left(ik \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(\vec{r}, t),$$

$$-\frac{\vec{p}}{\hbar} \text{ c.v. } \vec{q} \quad \int p = -\hbar \int \vec{p}$$

$$\langle \rho_x \rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3p \int d^3\vec{n} \int d^3\vec{n}' e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p} \cdot (\vec{n} - \vec{n}')} \psi^*(i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi \quad (18)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3\vec{n} \int d^3\vec{n}' \left[i\vec{p} \cdot (\vec{n} - \vec{n}') \psi^*(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi \right] =$$

$$= \int d^3\vec{n} \int d^3\vec{n}' \psi^*(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi \underbrace{\left(\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3p e^{i\vec{p} \cdot (\vec{n} - \vec{n}')} \right)}_{\delta^3(\vec{n} - \vec{n}')} =$$

14

$$\langle \rho_x \rangle = \int d^3\vec{n} \psi^*(\vec{n}, t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(\vec{n}, t)$$

15

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int d^3\vec{n} \psi^*(\vec{n}, t) \left(-i\hbar \vec{v}\right) \psi(\vec{n}, t)$$

$\hat{A}_{cl} \rightarrow \hat{A}$ IN M.T.

$\vec{x} \rightarrow \hat{x} \equiv x$

$\vec{p} \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \vec{v}$ (in 3D)

$$g(\vec{p}, t) \stackrel{es}{=} T = \frac{p^2}{2m} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

$$A_{cl}(\vec{p}, t) \rightarrow \hat{A}(-i\hbar \vec{v}, t) \quad (19)$$

$$A_{cl}(z, t) \rightarrow \hat{A}(\hat{z}, t) = \hat{A}(\vec{z}, t)$$

$$H_{cl} = \frac{p^2}{2m} + V \rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x})$$

$\langle \hat{A} \rangle$ VALOR MEDIO
DELL'ENERGIA

$$\hat{A}\psi = E\psi \quad \text{SCHRÖDINGER STAR.}$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad \text{SCH. TEMPORALE}$$

$$\psi = \psi(\vec{n}, t)$$

PRODOTTO $x \hat{p}_x (o y \hat{p}_y o z \hat{p}_z)$

$x \hat{p}_x \rightarrow \hat{x} \hat{p}_x$ È HERMITIANO?

SE LO È, IL VALOR MEDIO È REALE:

$$\langle \hat{x} \hat{p}_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x, t) x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x, t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x, t) x \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \stackrel{\text{Per parti}}{=} \underbrace{-i\hbar \psi^* x \psi}_{0} \Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

(30)

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dx i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (\psi^* x) \psi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx i\hbar \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) x \psi + i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^* \psi = i\hbar + \int_{-\infty}^{\infty} i\hbar dx \frac{\partial \psi^*}{\partial x} x \psi$$

$\stackrel{!}{=} \text{per l'ipotesi
sulla normalizzazione}$

$$i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial x} x = - \left[\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \right]^*$$

↓

$$i\hbar + \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^* x \psi = i\hbar + \langle \hat{x} \hat{p}_x \rangle^* \notin \mathbb{R}$$

$$\text{MA } x p_x = p_x x \quad \Rightarrow \quad x p_x = \frac{1}{2} (x p_x + p_x x)$$

$$\langle \hat{x} \hat{p}_x \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{x} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{x} \rangle \quad \text{CON} \quad \langle \hat{p}_x \hat{x} \rangle = -i\hbar + \langle \hat{p}_x \hat{x} \rangle^*$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \langle \hat{x} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{x} \rangle \in \mathbb{R}$$

$\{ q_x, p_x \} \neq 0$ SE LE VARIABILI SONO CONIUGATE

↓ PROIEZIONE IN L^2

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$$

(31)

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] \psi(\hat{x}, t) = \hat{x} \hat{p}_x \psi - \hat{p}_x \hat{x} \psi =$$

$$= \hat{x} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{x} \psi =$$

$$= -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \psi + i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} =$$

$$= i\hbar \psi \quad \Rightarrow \quad [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad \text{HA DIMENSIONI}$$

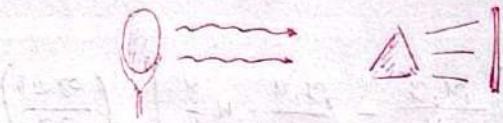
$$\{ \hat{x}, \hat{p}_x \} = \hat{x} \quad (\text{NO DIMENSIONI})$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$$

INTERVALLO

$$c^2 \Delta t^2 - \frac{L^2}{\gamma(v_p^r)} = c^2 \Delta t_p^{T_2} - L^2 = c^2 \Delta t_p^s - \frac{L^2}{\gamma(v_s^r)}$$

K



Rydberg

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right)$$

BALMER

$$\lambda = \text{cost. } \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad \text{cost. NOTO}$$

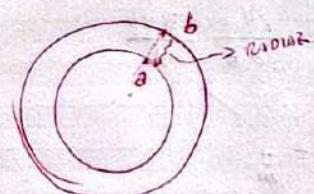
$l \rightarrow n'$

$$n_a = 1, 2, 3$$

$$n_b = 2, 3, 4$$

BOHR

3 stati stazionari



$$E_{a \rightarrow b} = h\nu = \frac{ch}{\lambda}$$

IPO Planck-Einstein $E = h\nu$

DISECCITAZIONE

$$E_f = -h\nu = \bar{E}_f - \bar{E}_b = \underline{\underline{\lambda \text{ costante}}}$$

↗
NO FINALE

STATI STAZIONARI: $IVI \propto l = nk$

$$k = \frac{h}{e\pi}$$

ELETTRONE SU UN'ORBITA CIRCOLARE

$$\frac{e}{r} = Ma_c = M \frac{v^2}{r}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ze^2}{r^2} = M \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ze^2}{Mr^2} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{ze^2}{M4\pi\epsilon_0 r}$$

$$r = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 M v^2}$$

$$L = M v r = n\hbar$$

$$v_n^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ze^2 v_n}{L} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ze^2 v_n}{n\hbar}$$

↓

$$v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ze^2}{n\hbar}$$

$$r_n = \frac{n\hbar}{M v_n} = \frac{n\hbar}{M} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 n\hbar}{ze^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Mze^2} n^2$$

$$\begin{aligned} \text{ENERGIA TOTALE} \quad E_n &= T_n + V_n = \frac{1}{2} M v_n^2 + \left(-\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 R_n} \right) = \frac{1}{2} M \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar} \right)^2 - \frac{ze^2 \cdot Mze^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2} = \\ &= \frac{M}{2\hbar^2} \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{1}{2} M \cdot \frac{1}{n^2 \hbar^2} - \frac{M}{\hbar^2 n^2} \right] = -\frac{M}{2\hbar^2} \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

$$E_n = -\frac{M}{2\hbar^2} \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{n^2}$$

NEL PASSAGGIO TRA DUE STATI $a \rightarrow b$

$$\begin{aligned} E_a - E_b &= -\frac{M}{2\hbar^2} \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{n_b^2} - \frac{1}{n_a^2} \right) \\ &= \frac{M}{2\hbar^2} \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right) = h\nu = 2\pi\hbar\nu \end{aligned}$$

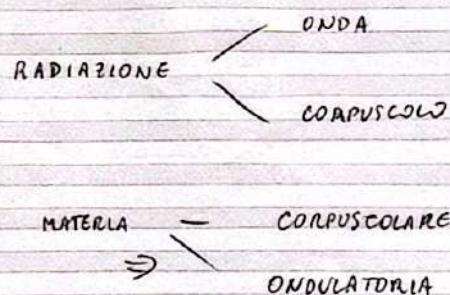
$$\Rightarrow V = \frac{m}{4\pi\hbar^3} \left(\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right)$$

$$E_n = - \underbrace{\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)}_{\text{II not}} \frac{1}{n^2}$$

 I_p I_p = en. di ionizzazione

$$n \rightarrow \infty \quad E_n = 0 \quad e^- \text{ libero}$$

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 n^2} \Rightarrow$$

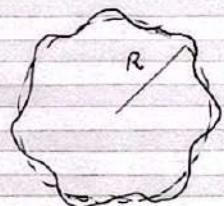
 \Rightarrow Doppia Diammetria λ

$$c = \lambda v$$

$$h\nu = pc \Rightarrow h\nu = p\lambda v$$

$$p \nu E = pc \quad \& \quad M = 0$$

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$$

 \Rightarrow MODELLO DI BOHRIpo: orbite circolari, e^- hanno λ comp. ondulatorio

Cond. di stazionarietà

$$\boxed{2\pi n r = n\lambda}$$

$$2\pi n r = n\lambda \Rightarrow n = \frac{n\lambda}{2\pi}$$

$$L = n\lambda = n \frac{\hbar}{2} = n \lambda \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} = n \frac{\hbar}{2\pi} = nh$$



Cagliari 7 Novembre 2014
Davide Rattu

I) $\psi_n = A_n \cos k_n x$

Se $x \rightarrow -x$, I) è pari, II è dispari

II) $\psi_n = B_n \sin k_n x$

Il potenziale v presenta una simmetria per scambio: $v(-x) = v(x)$, e quindi esistono soluzioni a parità definita. Ma anche $H(-x) = H(x)$. Ciò è alla base del risultato ottenuto.

PARITÀ

$$H(-x) = H(x) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + v(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

$$v(-x) = v(x) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + v(-x) \right] \psi(-x) = E \psi(-x)$$

"
 $v(x)$

$$H \psi(x) = E \psi(x) \quad H \psi(-x) = E \psi(-x) \Rightarrow \text{Stesso } E$$

caso a) NON DEGENERATO

$$\psi(-x) = \alpha \psi(x)$$

$x \rightarrow -x$

$$\psi(x) = \alpha (\psi(-x))$$

$$= \alpha (\alpha \psi(x)) = \alpha^2 \psi(x)$$

Due autovalori che differiscono per una costante non formano stessa autovalore perché la cost. la rimborso nulla normalizzazione.

\Rightarrow altra parità è definita

$$\begin{cases} \psi(-x) = \psi(x) \\ \psi(-x) = -\psi(x) \end{cases}$$

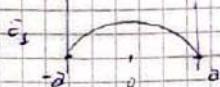
Se quindi $H(-x) = H(x)$ e non c'è degenerazione, le soluzioni sono a parità definita

Se ci sono degli stati legati in 1-d, si può dimostrare che non c'è mai degenerazione.

Quindi nel caso buca di potenziali, i punti infiniti
ci ritroveremo nel caso a). In questa buca vediamo che ci sia
una funzione $\psi_n(x)$ che ha $(n-1)$ modi e ψ_n pari ha un numero
finito di modi; $\psi_n(x)$ dispari ha un numero disperso di modi,
cioè di zeri.

Se ordiniamo le n per n crescenti, la curva con a è il valore più
piccolo corrispondente a un caso:

Stato fondamentale: 0 nodi
(quelli agli estremi ci sono sempre)



ψ_n al crescere dei modi corrisponde ad autovalori crescenti,

se non sono in uno stato legato, se continua a valori che $H(-x) = H(x)$, si dimostra che ci comunque parità definita di ψ sol.

Caso b) DEGENERAZIONE

ma nonostante
la degener-

Sia $H\psi(x) = E\psi(x)$. ψ potrebbe essere
del tutto diversa,
 $H\psi(-x) = E\psi(-x)$ essendo però forse
una parte pari e una parte dispari

$$\psi(x) = \frac{1}{2} [\psi(x) + \psi(-x)] + \frac{1}{2} [\psi(x) - \psi(-x)] = \psi_+(x) + \psi_-(x)$$

$$(H-E)\psi(x) = 0 \Rightarrow 1) (H-E)\psi_+(x) + (H-E)\psi_-(x) = 0$$

$$\text{Sufficientemente una parità: } (H-E)\psi_+(x) + (H-E)\psi_-(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2) (H-E)\psi_+(x) - (H-E)\psi_-(x) = 0$$

Sommiamo sottraiamo le ultime due equazioni e finale:

$$\Rightarrow \begin{cases} (H-E)\psi_+(x) = 0 \\ (H-E)\psi_-(x) = 0 \end{cases}$$

Ora sono allora soluzioni a parità definite da più generali è una combinazione delle due.

dà fondo a una int. trasf. geometrica. Introduciamo un operatore po-
tuta \hat{P} t.c. $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$. La trasf. non è continua: non
ci arriviamo per successioni di ~~successioni~~ infinitesime.
Lo faccio agire due volte,

$$\hat{P}^2\psi(x) = \hat{P}\hat{P}\psi(-x) = \psi(x) \Rightarrow \text{autovalori } p=\pm 1$$

forniti dall'eq. agli autovalori $\hat{P}^2\psi(x) = \psi(x)$

$$\text{ESEMPIO} \quad \hat{P}\psi(x) = \psi(x) \quad \hat{P}^2\psi(x) = -\psi(x)$$

Dimostriamo che per stati legati lo spettro è non degenero, i.e.
i due stati legati \Rightarrow NO DEGEN. DEGLI STATI

Per esempio: $H\psi_1 = E\psi_1$ $H\psi_2 = E\psi_2$ E ha due autovalori
dissimi (digen. di ordine 2).

$$-\frac{k^2}{2m}\psi''_{1,2} + V\psi_{1,2} = E\psi_{1,2} \Rightarrow \psi''_{1,2} = -\frac{2m}{k^2}(E-V)\psi_{1,2}$$

$$\frac{\psi''_1}{\psi''_2} = \frac{\psi_1}{\psi_2} \Rightarrow \psi''_1\psi_2 - \psi''_2\psi_1 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} (\psi'_1\psi_2 - \psi'_2\psi_1) = 0$$

dec
se le funz. sono obbligatamente
dipendenti dalle
condizioni

$\Rightarrow \psi'_1\psi_2 - \psi'_2\psi_1$ è costante in $x \neq x$. Cosa succede in $x \rightarrow \infty$?
Gli stati legati sono t.c. $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ Allora come sostan-

te nego zero:

$$\psi'_1\psi_2 - \psi'_2\psi_1 = 0$$

il che lo uso anche se ho autofunzioni

$$\frac{\psi'_1}{\psi_2} = \frac{\psi'_2}{\psi_1}$$

Integro $\Rightarrow \psi_1 = c\psi_2$ Ma questo non dice che sono la stessa

funzione. Quindi non c'è degenerazione.

Particella libera

$V(x)$

x

Penso a raggiungere $V(x) = 0$ ovvero $V(x) = c$, ma poi tanto tante risalite e mi lo porto a zero. L'importante è che non esistono.

$$\hat{F} = -\frac{dV}{dx} = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x) \quad x = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0 \Rightarrow \exists \text{ sol. ind. } e^{\pm ikx}$$

$$\text{Uniamo qui gli esponenziali: } \psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$E < 0 \quad k = i|k| \Rightarrow e^{\pm ikx} \rightarrow e^{\pm |k|x} \text{ divergente} \neq L^2 \text{ e} \rightarrow \text{infinita a} \pm \infty.$$

Non ci sono quindi sol. a m. reale. Già anche classicamente, perché c'è solo m. cinetica.

Segue che l'energia è maggiore del minimo di potenziale, che in questo caso è zero.

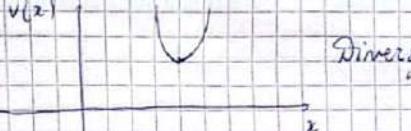
Perché non sono funzioni $E < V_{\min}$?

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\psi'' = \frac{2M}{\hbar^2} [V(x) - E] \psi(x)$$

Se $V(x) - E > 0$, ψ'' e ψ hanno lo stesso segno.

$$\psi > 0 \Rightarrow \psi'' > 0$$



Diverge

$$\psi < 0 \Rightarrow \psi'' < 0$$

$V(x)$

Diverge

$$\psi = 0 \Rightarrow \psi'' = 0 \Rightarrow \text{fisso}$$

$V(x)$

Diverge

Quindi in generale non forniamo soluz. che am. t.c. $E < V_{\min}$, perché c'è divergenza. Il pto di vista classico è un buon pto di partenza, ma non basta a dimostrare quanto detto.

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad E > 0 \quad k = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar}$$

$$\text{e finita} \Leftrightarrow E = \frac{\hbar^2}{2M} k^2 \quad e^{ikx} \quad k_x = \pm k$$

→ Metto in ψ e ho lo stesso risultato: degenerazione di ordine 2.

$$\psi_{k_1} = C e^{ik_1 x} \quad k_1 = \pm k \quad \text{Mi ricordo di De Broglie:}$$

$$\psi_{p_x} = C' e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} \quad p_x = \hbar k_1$$

AUTOFUNZIONI DI \hat{A}

$$\psi_{p_x} \quad \swarrow$$

AUTOFUNZIONI DI \hat{P}_x

$$\hat{P}_x \psi_{p_x}(x) = -ik \frac{d}{dx} \psi_{p_x}(x) = p_x \psi_{p_x}(x) \quad p_x \in \mathbb{R}$$

$$\psi_{kz}(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \text{FINITA} \quad (\text{ma non e } L^2)$$

$$p_x \in \mathbb{R} \text{ e continuo} \quad E = \frac{p_x^2}{2m} \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Spettro continuo.}$$

«O il contorno della buca, con luce un'energia quantizzata.

SIGNIFICATO FISICO

$$H\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\text{EQ. STATE} \rightarrow \psi(x,t) = \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

$$= Ae^{i(kz-wt)} + Be^{-i(kz+wt)} \quad \text{non riflessi}$$

zioni di onde piane in versi opposti:

Caso $B=0$

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kz-wt)}$$

Ottieni Abbiamo una fonte libera che si muove verso destra nulla di
mazione x .

$$p = kK \quad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{k^2 K^2}{2m}$$

ONDA PIANA

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{\omega k}{k K} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} \\ v_g &= \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{aligned}$$

$j = |A|^2$ costante \rightarrow Delocalizzazione ($\Delta z \sim \infty$) $\Delta p = 0$

$$j = \operatorname{Re} \left\{ \psi^* \left(-\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \right\} \quad \text{considerando } \psi(x) = Ae^{i k x}$$

$$= \frac{k\hbar}{m} |A|^2 = \frac{p}{m} |A|^2 = \frac{v_g}{2} p$$

vel. gruppo = vel. particella

CASO $A=0$

$$\psi(x,t) = Be^{-i(kz+wt)} \quad \xrightarrow{\text{prop.}}$$

$$p = |B|^2 \quad j = -v_g |B|^2$$

CASE GENERALE: $A, B \neq 0$

$$j = |A|^2 + |B|^2 + 2\operatorname{Re}(AB^* e^{i k x})$$

$$j = \frac{t_0 K}{m} (|A|^2 - |B|^2)$$

Interferenza

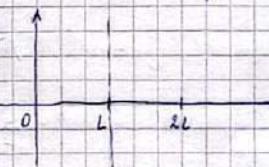
Ma queste funzioni non sono $\psi \in L^2$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz |Ae^{ix} + Be^{-ix}|^2 \rightarrow \infty$$

Onde

Consideriamo un volume finito. Del resto, le onde piane $\notin L^2$ ma saremo bene $\psi \in L^2$, quindi le onde piane non le buttiamo via.

Chiediamo una periodicità in L : $\psi_{kz}(x+L) = \psi_{kz}(x)$



se confino tra $0 \leq x \leq L$

$$e^{ikz(x+L)} = e^{ikz x}$$

$$e^{ikzL} = 1 \quad k_z = \frac{2\pi n}{L}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Non voglio che questa discretizzazione abbia impatto fisico: selego L grande e il passaggio da n a $n+1$ è vicino alla ϵ_0 quasi continuo.

Ora fare normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz |\psi_{kz}(x)|^2 = 1 \quad \text{con } \psi_{kz} = A e^{ikz x} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{L}} \text{ a m.}$$

no della fun.

$$\text{Si fa calcolo che } \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \psi_{kz}^*(x) \psi_{kz}(x) = \delta_{k_z k_z'}$$

$$\text{prendendo } \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz e^{-ik_2 z} e^{ik_2' z}$$

Come passare al continuo?

Cagliari 3 Novembre 2024

Eduardo Rattu

Bianchi
p. 156

$$\psi_{k_2}(z) = \frac{1}{L} e^{ik_2 z} \quad z \in [0, L]$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \psi_{k_2}(z) \psi_{k_2'}(z) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz e^{i(k_2 - k_2')z} = \frac{\sin[(k_2 - k_2')\frac{L}{2}]}{(k_2 - k_2')\frac{L}{2}}$$

$$\text{entro } L, k_2 = \frac{2\pi n}{L} \quad (k_2 - k_2')\frac{L}{2} = \frac{2\pi}{L}(n - n')\frac{L}{2} = (n - n')\pi$$

Se $n = n'$ anche il denomin. L annulla. Altrimenti il numeratore è sempre zero. Se $n = n'$ si ha $\frac{\sin 0}{0} \rightarrow 1$

↓

$$\delta_{k_2 k_2'}$$

Poniamo a un volume ∞ . Si può rappresentare

$$\delta \text{ di Dirac} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i(k_2 - k_2')z} = \delta(k_2 - k_2')$$

Poniamo allora definire $\psi_{k_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_2 x}$. Sono le stesse di prima, non normalizzate al punto che sono $\notin L^2$, ma la variabile continua, e le ψ sono ora \perp a se stesse in questo nuovo spazio.

Ci

la relazione di chiusura è data da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{k_2}(x') \psi_{k_2}(x) = \delta(x - x')$$

pedice continuo

Se abbiamo uno spazio diretto di autofunzioni $\phi_n(x)$, la relazione di chiusura è $\sum_n \phi_n^*(x) \phi_n(x) = \delta(x - x')$ con $A\phi_n(x) = a_n \phi_n(x)$

Se la variabile d'intervale è continua l'autovalore è continuo, si ha l'integrale.

Se la funzione $\in L^2$, può essere ortonormalizzata solo alla funzione di Dirac ed è detta impropria.

$$\text{VOLUME FINITO : } \frac{1}{L} \xrightarrow{\text{Passo al continuo}} \frac{1}{2\pi}$$

di onde finite quindi $\notin L^2$ e bisognerà passare a un pacchetto. Con queste metodologie, escluderemo a priori le onde finite.

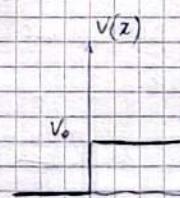
Potete evitare usare la espressione $\psi_{k_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{i}{\hbar} p_2 x}$ con k perché deve tornare la norma \rightarrow

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{p_2}(x) \psi_{p_2'}(x) = \delta_{p_2 p_2'} \delta(p_2 - p_2') \quad \text{con } \hat{P}_2 \hat{P}_2 \psi_{p_2}(x) = p_2 \psi_{p_2}(x)$$

Cose onde finite sono racchiusibili in un set ortonormali su cui espandere qualunque funt. $\in L^2$ che rappresenta stati finiti.

• Gradino di potenziali.

Da pag. 16 Bianchi



C'è una discontinuità finita.

Un'anche gli spazi di rappresentazione di continuo per $V(x)$ mette in evidenza la natura con-

distribuzione della lunghezza di volo per v , e ci aspettiamo di vedere il comportamento quantistico.

$$V \text{ cresce in reale} \sim \lambda_0$$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \text{ discontinua}, \psi', \psi \text{ continue}$$

CASO CLASSICO $\not\exists$ sol. E < 0

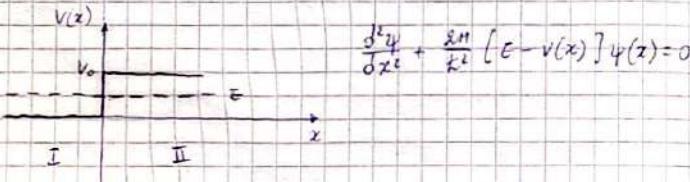
$\rightarrow E \in (0, V_0)$ RIFL. TOTALE

$E > V_0$ TRANSMISSIONE TOTALE CON VELOCITÀ RIDUTTA

CASO QUANTISTICO

$\not\exists$ E < 0

$E \in (0, V_0)$



$$\text{I) } \text{Qd' } \epsilon = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ in ha } \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (V=0) \Rightarrow \psi = e^{\pm ikx}$$

$$\text{II) Definendo } q = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}} \text{ trovo } \frac{d^2\psi}{dx^2} - q^2\psi = 0 \Rightarrow \psi = e^{\pm qx}$$

Quindi:

$$\text{I) } \psi_I = A e^{ikx} + B e^{-ikx}; \quad \text{II) } \psi_{II} = C e^{qx} + D e^{-qx}$$

$x < 0$

$x > 0$

Ma $x \rightarrow \infty \Rightarrow \psi_{II} \rightarrow \infty$ inadattabile. Allora deve essere $C=0$, finemente.

Dobbiamo ora ricordare ψ_I e ψ_{II} , chiudendo in 0 la discontinuità di ambo di ψ .

$\psi(0), \psi'(0)$ continuo

Dovendo includere e^{qx} , c'è una sola soluzione a singola funzione, quindi non c'è degenerazione completamente, perché ha una sola funzione.

Continuità di $\psi(0) \Rightarrow A + B = D$

$$\psi'(0) \Rightarrow ik(A - B) = -qD$$

* 2 egg. 3 inc. 6
costante rimanente in
trova normalizzando ψ

Non dobbiamo imporre condizioni sulla singola \Rightarrow spettro continuo di energia. Il secondo della sol. oscillante può essere fatto a valori di energia.

perché ha portato i sopra

Combinando le due equazioni: $A = \frac{1+i}{2} D$

$$B = \frac{1-i}{2} D \quad \text{perché ha portato i sopra}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i\sqrt{\frac{V_0}{E}-1}}{1+i\sqrt{\frac{V_0}{E}-1}} \quad (E < V_0)$$

$$\left| \frac{B}{A} \right| = 1 \Rightarrow \frac{B}{A} \text{ è una fase} \stackrel{\text{not}}{=} e^{i\alpha}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{(1-i\sqrt{\frac{V_0}{E}-1})^2}{1+\left(\frac{V_0}{E}-1\right)} = -1 + \underbrace{\frac{2i\sqrt{\frac{V_0}{E}-1}}{V_0}}_{\cos \alpha} - \underbrace{\frac{2i\sqrt{\frac{V_0}{E}-1}}{V_0}}_{-\sin \alpha} = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\frac{D}{A} = \frac{2}{1+i} = \frac{2}{V_0} \left[1 - i\sqrt{\frac{V_0}{E}-1} \right] = 1 + e^{i\alpha}$$

$$\frac{B}{A} = e^{i\alpha}$$

$$\frac{D}{A} = 1 + e^{i\alpha}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} = A e^{i\left(kx - \frac{\alpha}{2}\right)} [e^{i\left(kx - \frac{\alpha}{2}\right)} + e^{-i\left(kx - \frac{\alpha}{2}\right)}] \\ A (1 + e^{i\alpha}) e^{-qx} = A e^{i\frac{\alpha}{2}} [e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}] e^{-qx} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi(z) = \begin{cases} 2Ae^{-\frac{i\alpha}{2}} \cos(kz - \frac{\alpha}{2}) & z < 0 \\ 2Ae^{\frac{i\alpha}{2}} (\cos \frac{\alpha}{2}) e^{-qz} & z > 0 \end{cases}$$

$\psi(z)$ EIS. 5.2. DI SCH. ITAL.
CIOÈ L'CA. NEL
MUN.

Penso ignorare $2Ae^{\frac{i\alpha}{2}}$ perché sono sempre nascoste \Rightarrow non so che

$$\cos(kz - \frac{\alpha}{2}) \in (\cos \frac{\alpha}{2}) e^{-qz} \in \mathbb{R}$$

INTERPRETAZIONE FISICA

I) $z < 0$ $\psi_1(z, t) = \psi_c(z) e^{-\frac{i\alpha}{2} Et}$

$Ae^{i\omega z} + Be^{-i\omega z}$

Silenzio due onde piane che si propagano in direzioni opposte.
Supponiamo che una fonte arrivi da sinistra (infatti visto che $E \ll v_0$)
 $B e^{-i\omega z}$ è allora l'onda riflessa, $A e^{i\omega z}$ l'onda incidente.

$$J_2 = \frac{kE}{M} (|A|^2 - |B|^2) = v \left(\frac{|A|^2 - |B|^2}{P} \right) = J_{\text{inc}} - J_{\text{rifl.}}$$

primo momento
è esplicito qui
il segno neg. di
v onda rif.

$$\frac{J_{\text{rifl.}}}{J_{\text{inc}}} = R \text{ coefficiente di riflessione} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = 1$$

(perché ho scritto le 3 fonti,
non avrei dovuto considerare i
moduli, perché $R > 0$ per com.)

$R = 1$ come succede elasticamente.

$\rho(z) = |\psi(z, t)|^2 = |\psi(z)|^2 = 4|A|^2 \cos^2(kz - \frac{\alpha}{2}) \Rightarrow$ ci sono quindi
un effetto di interferenza, distruittiva per certi valori di z .

Ricordiamo che f prende il posto di I intensità. Si dimostra che tra 0 e v_0 , ci saranno con t.c. $kz - \frac{\alpha}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2}$ e $f=0$.
Classicamente la fonte della si sente sempre, a no.

Il son è venuto fuori dalla somma di una + rifl, che possono interfondere distruttivamente.

$$kz - \frac{\alpha}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow f=0$$

Interferenza onde riflessa e incidente

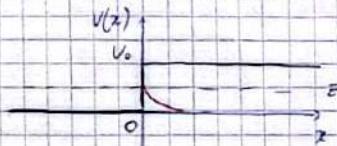
se c'è inter. diff. = 0
In I) non c'è densità J , perché $J_I = J_{\text{inc}} - J_{\text{rifl.}} = 0$

Nel caso unidimensionale, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$, quindi no cosa accade nella regione II):

$$J_{\text{II}} = 0 = J_S \quad \text{Non c'è certo dipendenza da } z.$$

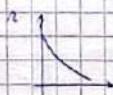
$$\text{Ma io posso calcolare } J_{\text{II}} = 1|A|^2 e^{-2qz} = 4|A|^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} e^{-2qz} \neq 0.$$

Quanto è un aspetto puramente quantistico. C'è una curva che diecierei rapidamente.



Ma se $R=1$, come mi spiega ciò? Perché il modulo è idealizzato, e non si considera il ritorno nel fenomeno di riflessione. Saranno quel ritorno $J_{\text{II}} \neq 0$.

Ciò lo abbiamo già visto per rifl. totale quando arrivano due ondate: è penetrata nel secondo mezzo. Questa è l'onda uscente



in effetti
dai dati $v_0 \rightarrow \infty \Rightarrow q \rightarrow \infty \Rightarrow \psi_{\text{II}} \rightarrow 0$ L'ersameen
che è legata a e^{-qz} . $\frac{B}{A} \rightarrow -1$, $\frac{D}{A} \rightarrow 0$, $\psi(z) = \begin{cases} A(e^{iz} - e^{-iz}) & z < 0 \\ 0 & z > 0 \end{cases}$

Quanto più \bar{v} è piccolo, tanto più ω in ψ_{ω} penetra nella regione $x > 0$, che è claramente proibita.

Consideriamo ora $\bar{v} \geq v_0$: ci saranno sempre soluzioni orizzontali.

$$\text{i)} \quad \psi'' + k^2 \psi = 0 \quad k = \frac{\sqrt{M/E}}{\hbar} > 0$$

$$\text{ii)} \quad \psi'' + k'^2 \psi = 0 \quad k' = \frac{1}{\hbar} \left[2M(E - V_0) \right]^{\frac{1}{2}} > 0$$

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{ONDÀ AVANZA DA } -\infty \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & \text{INCANTA IN UNA DISCONTINUITÀ} \\ & \text{DENTRO DELL'ONDA} \\ & \text{SULLA RIFL. E NON AB FISICAMENTE} \end{cases}$$

A finita E ci sono sempre e soli, qui, quindi ci sarà una discontinuità di ordine 2.

INTERPRETAZIONE FISICA

AGGIUNGONO $e^{i\omega t}$ PER AVERE L'ONDA PIANA

Particella da mezzo che: $\bar{v} = 0$ perché nulla ci dice che c'è un effetto di riflessione a ∞ . Doppieggiando il fattore temporale

$$\text{Imponiamo la continuità in zero':} \quad \begin{cases} A+B=C \\ K(A-B)=k'C \end{cases}$$

esistono non determinato e fissi
3 inc.

$$\frac{B}{A} = \frac{k-k'}{k+k'} \quad \frac{C}{A} = \frac{2k}{k+k'}$$

A, B, C sono i coefficienti delle ψ , sono le incognite del sistema ma i coefficienti del quale

$\sqrt{|A|^2 + |B|^2}$ sono costanti.

$$j(x) \Rightarrow J_I(x) = n \left\{ |A|^2 + |B|^2 \right\} \quad n = \frac{k^2}{\hbar}$$

$$J_{II}(x) = n' |C|^2 \quad n' = \frac{k'^2}{\hbar}$$

$$J_I(x) = \frac{n k}{\hbar} |A|^2 \left\{ 1 - \frac{|B|^2}{|A|^2} \right\} = \frac{n k}{\hbar} |A|^2 \left\{ \frac{kk'}{(k+k')^2} \right\}$$

$$J_{II}(x) = \frac{n' k'}{\hbar} |A|^2 \left\{ \frac{(k')^2}{(k+k')^2} \right\}$$

In effetti, manca niente nel

caso stazionario: $J_I + J_{II}$ non dipende da x , e $J_I = J_{II}$ basta.

$$R = \frac{J_I}{J_I} \quad T = \frac{J_{II}}{J_I} = \frac{n' |C|^2}{n |A|^2}$$

$$\frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k-k')^2}{(k+k')^2} = \left| \frac{1 - \left(1 - \frac{V_0}{E} \right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left(1 - \frac{V_0}{E} \right)^{\frac{1}{2}}} \right|^2$$

$$T = \frac{4kk'}{(k+k')^2} = \frac{4 \left(1 - \frac{V_0}{E} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left[1 + \left(1 - \frac{V_0}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2};$$

dimostrazione dato che $\frac{1 - \frac{V_0}{E}}{1 + \frac{V_0}{E}} = \frac{1 - \frac{V_0}{E}}{\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}}$

Quindi risulta che $n (1 - \frac{V_0}{E}) = n' |C|^2$

$J_I = J_{II}$

dimostrazione che $J_I = J_{II}$ basta affatto $E > V_0$ e non c'è dipendenza

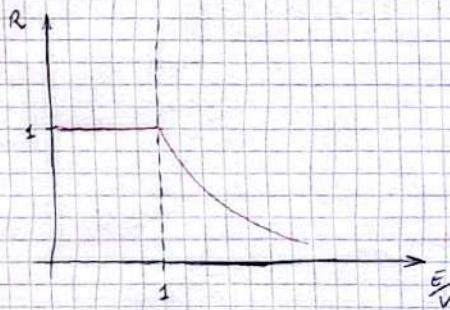
$R + T = 1$ come dove lo dimostraremo

Non c'è ancora perché $v \in \mathbb{R}$.

Claramente attendevamo solo T . Ormai se $\bar{v} \geq v_0$ e $R \neq 0$, con un effetto quantitativo che nasce dalla discontinuità finita di V .

Consideriamo $E = V_0$

$T \neq 0$ $R \neq 1$



Richiamo all'analogia ottica

Consideriamo un'onda che attraversa una superficie di separazione tra due mezzi. Si può definire l'indice di rifrazione relativo

$$n_{rel} = \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} = \frac{k'}{k} = \left(1 - \frac{V_0}{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Quindi se gli autovalori associati alle autofunzioni sono diseruti, i formule attuarie la comuta normalizzazione di queste autofunzioni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \text{ perché } \psi \in L^2$$

Ma ~~la~~ ^{le} ψ che abbiamo noi ~~saranno~~ ha ~~avuto~~ ⁱ esempio i momenti, ~~sono~~ ^{ad} continui. Per mantenere allora la stessa forma $\int_{\text{universo}} |\psi|^2 dx = 1$, si cambia il concetto di normalizzazione, ~~estendendo~~ ^{la particella} entro un volume finito, una scatola di lato L , che in \mathbb{R}^3 si ridurrà a un segmento lungo L . ~~Questa~~ ^{Questa} è la ~~segmento~~, richiediamo che le ψ soddisfino a condizioni al contorno ~~sulla~~ ai confini, in modo che $\psi_{k_x}(x+L) = \psi_{k_x}(x)$.

In tal maniera, k_x non è più una quantità arbitraria, ma viene discretizzata:

$$k_x = \frac{\lambda\pi}{L} n$$

Quindi anche lo spettro energetico diventa discreto, con ogni entorvalore E_n doppia mente degenerato.

Ora, a oliterizzazione avvenuta, si può porre

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |\psi_{k_x}(x)|^2 dx = 1$$



TENKASI
orientavancina

Osserviamo che c'è degenerazione del II
ordine perché $\bar{E} = \frac{\hbar^2}{2M} k^2$ autovarore
uguale per le due autofunzioni:

$$e^{ik_x x} \quad e^{-ik_x x}$$

L'autofunzione $\psi_{k_x}(x)$ può essere anche
espressa in funzione del momento p_x
della particella, quando $p_x = \hbar k_x$ da
di Broglie. Quindi ψ_{k_x} può anche essere
 ψ_{p_x} autofunzione del momento, ovvia
dell'operatore momento $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Quindi
l'equazione agli autovarori per il momento
 i

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi_{p_x}(x) = (\underbrace{p_x}_{\hbar k_x} \Psi_{p_x}(x))$$

Si noti che i k_x devono essere reali, in quanto il contrario porterebbe ad avere

$$e^{\pm |k| x} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty}$$

Invece vogliamo che a ∞ l'autofunzione sia finita, per cui $k_x \in \mathbb{R}$. Segue allora che $P_x \in \mathbb{R}$, quindi anche che lo spettro dei momenti è continuo, come continuo per le stesse ragioni è lo spettro dell'energia, a differenza dell'esempio delle bucce di potenziale a parati infiniti.

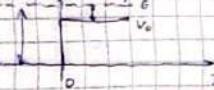
Dal momento che $\psi(x) = A e^{ixx} + B e^{-ixx}$ non è normalizzabile nel modo consueto, ci si chiede come fare, cercando di mantenere la stessa forma che si avrebbe con autofunzioni con associati autovalori olisseretici.



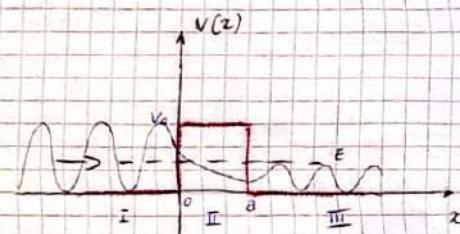
$$R = \left(\frac{1 - n_{\text{rel}}}{1 + n_{\text{rel}}} \right)^2$$

Asta Questa espressione risposta a R quanto
stesso sostituendo le espressioni quantistiche
per n_{rel} .

Se ci spostiamo nella regione II, con $V_0 - E$ al posto di $V_0 - 0$,
non cambia, ma ora $B = 0$.



Barrera di potenziale



Classicamente, $E < (0, V_0) \Rightarrow R = 1$

$E > V_0 \Rightarrow T = 1$

$$\text{I, II, III} \quad \psi = \begin{cases} Ae^{ixz} + Be^{-izx} & z < 0 \\ Ce^{izx} + De^{-izx} & z > a \end{cases} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\dot{\psi} = \begin{cases} i\hbar(Ae^{izx} - Be^{-izx}) & z < 0 \\ i\hbar(Ce^{izx} - De^{-izx}) & z > a \end{cases} \quad v = \frac{\hbar k}{M}$$

$$R = \frac{|t|}{|i|} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad T = \frac{|t|}{|i|} = \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

$E \in (0, V_0)$, $z \in (0, a)$

Zona classicamente proibita \rightarrow Onde ondiali reali.

$\psi_{\text{II}} = Fe^{qz} + Ge^{-qz}$ non ha problemi di dirigenza, in una
regione finita.

$$q = \frac{(2m(V_0 - E))^{1/2}}{\hbar}$$

. La condizione di continuità non basta in
 $x=0$ e $z=a$ per $q \neq 0$.

S COGLIE DA DETERMINARE A, B, C, F, G , 4 VINCOLI

Non ci sono cond. in $k \Rightarrow k \in \mathbb{R} \Rightarrow E \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} A + B = F + G \\ ik(A - B) = q(F - G) \end{cases} \quad z=0$$

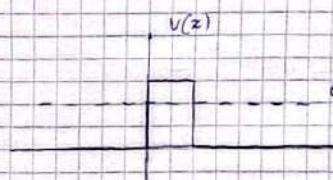
$$\begin{cases} Ce^{ixa} = Fe^{qa} + Ge^{-qa} \\ ikCe^{ixa} = q(Fe^{qa} - Ge^{-qa}) \end{cases} \quad z=a$$

Per l'interpretazione fisica ci interessa $R = \frac{|B|^2}{|A|^2} \times T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$, quindi
dobbiamo "eliminare" F e G.

$$A = \left\{ 1 + \frac{4g^2k^2}{(k^2 + q^2)(\sinh^2 qa)} \right\}^{-1}$$

poiché ci sono $e^{qa} - e^{-qa}$

$$T = \left\{ 1 + \frac{(k^2 + q^2) \sinh^2 qa}{4k^2 q^2} \right\}^{-1} \quad R+T=1$$



$R+T=1$ e $T \neq 0$!!

Quanticamente, la particella può attraversare la barriera, com
un effetto che è l'effetto tunnel, alla base del decadimento
di beta-beta. Se x non hanno $E > \frac{1}{2}V_0$ non passa la barriera
EFFECTO TUNNEL: $T \neq 0$

$$R = \left\{ 1 + \frac{se(v_0 - E)}{V_0^2 \sinh^2(qa)} \right\}^{-1}, \quad T = \left\{ 1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(qa)}{4(E - v_0 - E)} \right\}^{-1}$$

$$q = \sqrt{\frac{2m(E - v_0)}{\hbar^2}} \frac{1}{a}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad v_0, \text{ e } E \text{ sono a norma i parametri fisici.}$$

caso $E \rightarrow 0 \Rightarrow T=0, R=1$
cioè v_0 (altura barriera)

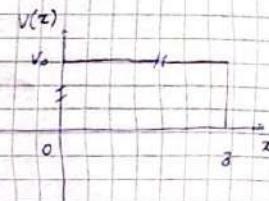
caso $E \rightarrow v_0$ $\sinh(qa) \xrightarrow[q \gg 0]{\text{approx}} \frac{e^{qa} - e^{-qa}}{2} \xrightarrow[q \rightarrow 0]{} qa$

$$\frac{T}{E-v_0} \rightarrow \left\{ 1 + \frac{V_0^2 \frac{2m(E-v_0)}{\hbar^2} a^2}{4(E-v_0)} \frac{1}{V_0^2} \frac{1}{(v_0-E)} \right\}^{-1} =$$

$$= \left\{ 1 + \frac{4V_0^2 a^2}{4t^2} \right\}^{-1}, \quad V_0 \rightarrow \infty \quad \text{ma}$$

Il not
η OPACITÀ

$qa \gg 1 \quad V_0 \rightarrow \infty$ diretto $a \rightarrow \infty$



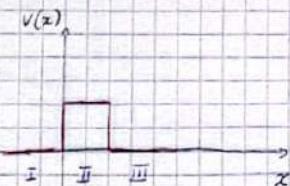
$$\sinh(qa) = \frac{e^{qa} - e^{-qa}}{2} \xrightarrow[qa \rightarrow \infty]{} \frac{e^{qa}}{2}$$

Substituito in $T \rightarrow T \rightarrow \frac{4E(v_0-E)}{V_0^2} 4e^{-2qa} \rightarrow 0$

L'effetto tunnel è fortunato se $V_0 \rightarrow \infty$ o se $a \rightarrow \infty$, o quando q è grande (o v_0 grande, indipendentemente da a). Se no, il prob. $\neq 1$ c. la part. attraversa la zona elargie facilmente.

Angioni 11 Novembre 2024

Cicolando Battu



$E > V_0$

$$\psi_{II} = Fe^{ikz} + Ge^{-ikz}$$

$$\psi_{III} = \begin{cases} Ae^{ikz} + Be^{-ikz} \\ Ce^{ikz} \end{cases}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda}$$

Continuità di ψ, ψ' in $z=0$ e $z=a$. Sfruttiamo le informazioni ottenute per $E < V_0$ mandando q in ik' : $q = ik'$. Procedendo come al solito troviamo R e T dalla continuità, ma se sostituiamo $q = ik'$ si fa più in fretta:

$$R = \frac{|R|^2}{|A|^2} = \left[1 + \frac{4k^2 k'^2}{(k^2 - k'^2)^2 \sinh^2 k'a} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{4E(E-V_0)}{V_0^2 \sinh^2 k'a} \right]^{-1}$$

$$T = \frac{|T|^2}{|A|^2} = \left[1 + \frac{(k^2 - k'^2) \sinh^2 k'a}{4k^2 k'^2} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 k'a}{4E(E-V_0)} \right]^{-1}$$

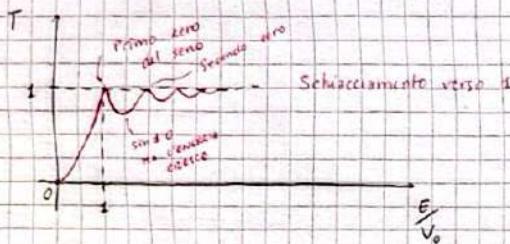
Quindi $T < 1$. Siccome ci sono poi di discontinuità finite, ci sono effetti ondulatori \Rightarrow Ci è anche riflessione, diversamente dal caso classico.

Se $k'a = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$), $T \rightarrow 1$. Dove cioè succede che

$z = n \frac{\lambda}{2}$: un numero intero di mezie lunghezze d'onda. I fori alla larghezza. La fonte trasmette trova un'altra discontinuità e c'è un'ulteriore riflessione: due onde riflesse verso so portavano da fasi diverse fanno interferire distruttivamente \Rightarrow Resta solo l'onda trasmessa.

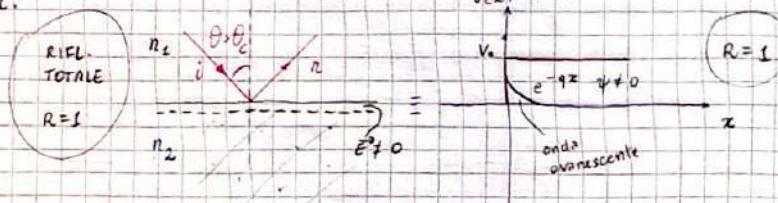
Le discontinuità finite evidenziano la natura ondulatoria della particella.

Se $E \gg V_0 \Rightarrow T \rightarrow 1$ caso elamico. In realtà ci sono gli zeri del numero.

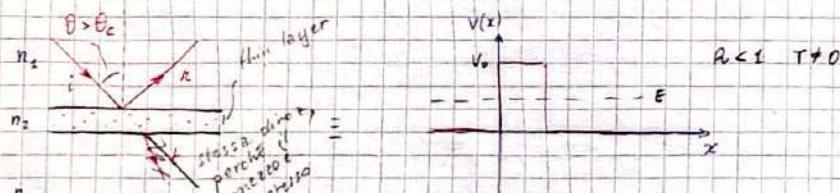


ANALOGIA OTTICA (GRADINO E BARRETTA)

Consideriamo due mezzi con $n_1 > n_2$ (vetro/aria) per avere riflessione totale.



Se ora abbiamo due lamine soffili...



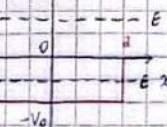
Qua è la riflessione totale frustrata.

Data l'analogia, si aspettiamo l'effetto tunnel.

Buca a parità finita

Nel caso di una propagazione comune usare gli espon. perché aggiungendo la fase com. si ottengono onde piane. Se il sistema è confinato, comune usare sin e cos.

$$V(x)$$



$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ -V_0 & |x| < a \end{cases}$$

Rappresenta
se ho una forza a carica
raggit.

Il potenziale è simmetrico \Rightarrow soluzione di parità definita.

$E \in (-V_0, 0)$
In realtà, ci sono due fasi di immersione e la particella elamericamente rimbalza avanti e indietro dentro la buca.

$|E| > |V_0|$ elamericamente, trasmissione totale.

Quantisticamente, per $|E| < V_0$ ci saranno livelli senza energia quantizzata.
 $E \in (-V_0, 0)$

$$-V_0 < E < 0 \quad (E < 0)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x) \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2M} \psi'' = (E - V(x)) \psi$$

$$\cdot |x| < a \quad \psi'' + \frac{2V_0}{\hbar^2 M} \psi = 0 \quad \alpha = \sqrt{\frac{2M(V_0+E)}{\hbar^2}} = \sqrt{2M(V_0-E)} \quad \text{Se ormai } E < V_{\min}, \text{ dico } \frac{k}{V_{\min}} = \text{for}$$

$$|x| > a \quad \psi'' - \frac{2E}{\hbar^2 M} \psi = 0 \quad \beta = \sqrt{\frac{2EM}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2EM}{\hbar^2}}$$

ψ ha parità definita: studiamo solo il caso per $x > 0$.

a) Soluzioni pari (prendiamo solo il seno)

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos \alpha x & 0 < x < a \\ C e^{-\beta x} & x > a \end{cases} \quad \text{In } a \text{ ci disegniamo una. se } a \text{ è } \text{disegnato} \text{ in } 2 \text{ linee} \Rightarrow \text{rendere paritati.}$$

lim. dip. le cui significano imposta condizioni su A e β . Si ottiene uno spettro discreto. ψ'' dà la curvatura di ψ . In alcune condizioni il secondo in x di discontinuità in più fa

su ϵ e curvatura, in altro mo, e se in dottrina ammette regolare specifici m
lori di ϵ .

$$\begin{cases} A \cos \alpha z = ce^{-\beta z} \\ -A \sin \alpha z = -\beta c e^{-\beta z} \end{cases} \Rightarrow \alpha \operatorname{tg}(\alpha z) = \beta \quad \text{risolvibile con un mu-} \\ \text{tato grafico.}$$

b) SOLZ. DISPARI

$$u(z) = \begin{cases} B \sin \alpha z & z \in (0, \pi) \\ ce^{-\beta z} & z > \pi \end{cases} \Rightarrow \alpha \operatorname{cdg}(\alpha z) = -\beta$$

Dati condizioni, ① e ②, rimecolano ϵ .

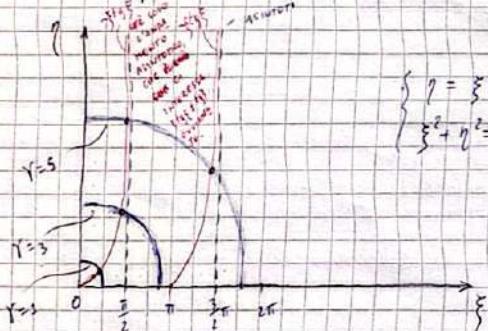
Proviamo: chiamiamo $\alpha z = \xi$, $\beta z = \eta$ $\Rightarrow \xi, \eta > 0$

$$\begin{cases} \eta = \xi \operatorname{tg} \xi \\ \eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi \end{cases}, \quad \xi^2 + \eta^2 = (\alpha^2 + \beta^2) z^2 = \frac{2n(V_0 - E)}{\hbar^2} z^2 =$$

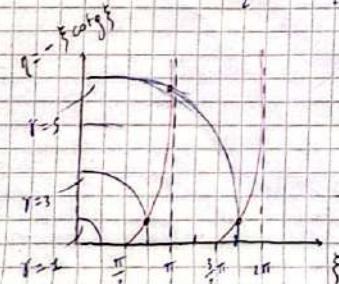
$$= \frac{2nV_0 z^2}{\hbar^2} \text{ costante} = \gamma^2$$

per l'opposita, che
l'elio, ma non
è iniziale

Intersezione dunque le curve in una circonferenza di raggio γ .



$$\begin{cases} \eta = \xi \operatorname{tg} \xi \\ \xi^2 + \eta^2 = \gamma^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi \\ \xi^2 + \eta^2 = \gamma^2 \end{cases}$$

Stati pari

\Rightarrow 1 stato
se $\gamma \in [0, \pi]$ ho un automa di singola (una sola intersezione).
 $\gamma \in (\pi, 2\pi]$ due automa, cioè due stati.

In generale, se $\gamma \in ((N_p - 1)\pi, N_p\pi]$, ho N_p stati.

Stati dispari:

vedi p. 166 e
167 BRUNOSEN

$\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$ non ci sono stati.

$\gamma \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ho uno stato.

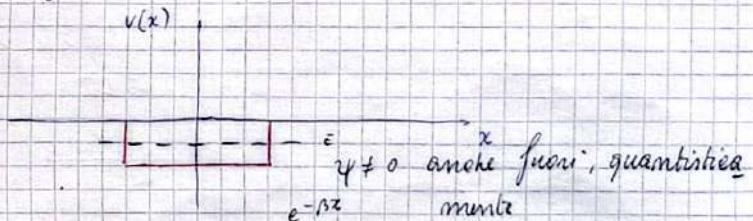
In generale, se $\gamma \in ((N_d - \frac{1}{2})\pi, (N_d + \frac{1}{2})\pi]$, ho N_d stati, partendo da $N_d = 1$ se no ho zero.

INTERSEZIONE = AUTOVALORE cui è associata un'autofunzione che descrive uno stato.

Un sistema confinato, non esiste degenerazione e a ogni autovalore corrisponde una singola autofunzione. si alternano anche diversi stati

Sarà dunque le soluz. pari e dispari, in parte, come già visto, con la ϵ soluzione pari. Più grande saranno nel grafico, più l'energia sarà.

$(N-1)\frac{\pi}{2} < \gamma \leq N\frac{\pi}{2}$ in generale. γ è fissato una volta realizzata la linea. Punto quindi dire quanti sono gli stati. Ora il numero di stati è finito, vale N , e la alternanza pari-dispari è stato fondamentale.



Esercizio: Ricapitoliamo il caso a partiti infinite

Disegniamo sopra l'asse x il grafico e mandiamo $v_0 \rightarrow \infty$.

$$0 < E < v_0 \quad \alpha = \frac{12\pi E}{k} \quad \beta = \frac{12\pi(v_0 - E)}{k} \xrightarrow{v_0 \rightarrow \infty} \infty$$

Quando $v_0 \rightarrow \infty$, le radici chi

$$\eta = \pm \frac{\pi k}{2} \text{ e } \eta = -\frac{\pi k}{2}$$

$\xi_n = n \frac{\pi}{2}$ fanno sì che andano nell'asintoto $\eta \rightarrow \infty$

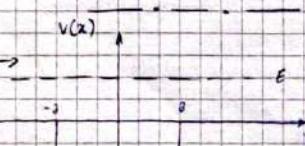
Dopo quindi prendere sul grafico i punti sempre più prossimi agli asintoti: $\{\xi_n = n \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 2, 3 \text{ ma } \xi = \alpha z = \left(\frac{12\pi E}{k}\right) z = n \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow E_n = \frac{k^2}{8n} \frac{\pi^2 n^2}{z^2}$ soluzione esplicita. Prima non c'è interno ma nel grafico. In E_n , n non ha limite $\rightarrow \infty$ stati meno degeneri. Se la linea è finita, c'è dipendenza da z e v_0 , perché $F = \gamma(z, v_0)$.

Stesso $\beta \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 0$ per $v_0 \rightarrow \infty$ e ci sono solo onda stazionaria dentro.

Caso $E > v_0$

(diffusione)



$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{izx} + Be^{-izx} & x < 0 \\ Ce^{izx} & x > 0 \end{cases} \quad \psi(0) = Fe^{izx} + Ge^{-izx} \quad |z| < 2$$

$$d = \frac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{k}$$

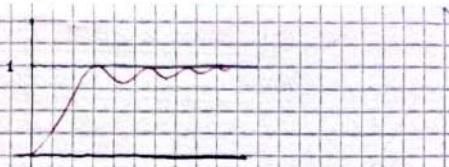
Continuità in ψ , ψ' : uniamo i valori della barriera di potenziale e li riccioliamo: $v_0 \rightarrow -v_0$ e $z \rightarrow 2z \equiv L$

$$R = \left[1 + \frac{4E(E+v_0)}{V_0^2 \sin^2(\alpha L)} \right]^{-1} \quad T = \left[1 + \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha L)}{4E(E+v_0)} \right]^{-1}$$

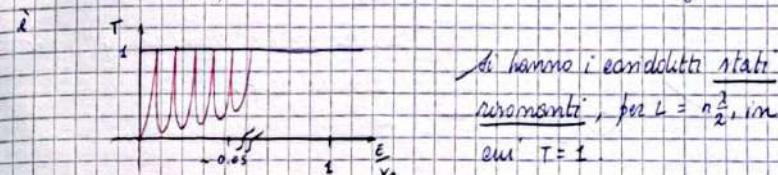
$T < 1 \Rightarrow$ \exists autovalori dal caso classico. $E \rightarrow 0 \Rightarrow T \rightarrow 0$.

T cresce con l'energia. $T=1$ per $L = \frac{n\pi}{2}$, $\lambda = \frac{2\pi}{L}$ per i del zero

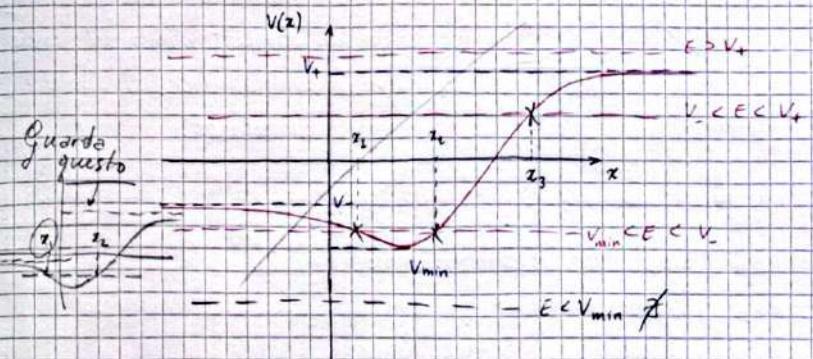
Per $E > v_0$, $T \rightarrow 1$



Per $\frac{E}{v_0} \ll 1$, cioè energia piccola rispetto alla profondità, $T \rightarrow 0$, ma se $L = n\frac{\pi}{2}$, $T=1$, per cui l'andamento nulla risponde $\frac{E}{v_0} \ll 1$



Si hanno i cosiddetti stati resonanti, per $L = n\frac{\pi}{2}$, in cui $T=1$



a) $E < V_{\min}$ no sol

b) $V_{\min} < E < V_-$ $\exists z_{1,2}$ punti di inversione chimica. E' instabile e confinato in $[z_1, z_2]$

$\psi = \frac{2m}{k^2} [V-E]^{\frac{1}{2}} \psi$. Nelle regioni frattile $x < z_1$ e $x > z_2$ si hanno esponenziali reali ψ , cioè due a sinistra e due a destra \Rightarrow servono 4 costanti. Per $x \in (z_1, z_2)$ si hanno $e^{\pm izx} \Rightarrow$ due costanti. In totale allora servono 6 cost. Ma l'ingresso veludore, per $x > z_2$, è ψ_2 , per $x < z_1$ è ψ_1 perché non c'è simmetria. Sia $\psi_1 = A e^{izx} + B e^{-izx}$ e $\psi_2 = C e^{izx} + D e^{-izx}$

Cagliari 12 Novembre 2024

Edoardo Bertu

$$\xi = \omega x \quad \lambda = \frac{\omega \xi}{k w} \quad \tilde{\psi}(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \xi^{2\mu} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\tilde{\psi}'(\xi) = H(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\tilde{\psi}' = e^{-\frac{\xi^2}{2}} [-\xi H + H'] ;$$

$$\tilde{\psi}'' = e^{-\frac{\xi^2}{2}} [\xi' H - 2\xi H' - H''].$$

Sostituendo nell'equazione e ricompare il termine in ξ^2 .

$$H'' - 2\xi H' + (\lambda - 1) H = 0 \quad \text{Equazione di Hermite}$$

Li siamo liberati almeno formalmente del comportamento parabolico, quello con ξ^2 . Consideriamo le soluzioni pari: H è analitica, quindi sviluppano in serie di Taylor.

$$\text{sol. pari } H(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{2k} \quad (c_0 \neq 0)$$

$$H' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k 2k \xi^{2k-2}; \quad H'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k 2k(2k-1) \xi^{2k-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ c_k 2k(2k-1) \xi^{2(k-1)} - 2 c_k 2k \xi^{2k} + (\lambda - 1) c_k \xi^{2k} \right\} = 0$$

$$(2 - 1 - \lambda) c_k \xi^{2k}$$

Poi $k=0$ è primo termine in zero. Punto quindi partire da $\lambda' = k - 1 \Rightarrow c_{k+1} 2(k+1)(2k+1) \xi^{2k+2}$ con λ' che parte da zero. Poi $\lambda' = k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [c_{k+1} 2(k+1)(2k+1) + (2 - 1 - \lambda) c_k] \xi^{2k} = 0$$

$$c_{k+1} = \frac{\lambda k + 1 - \lambda}{2(k+1)(2k+1)} c_k$$

Relazione di ricorrenza

$\xi \rightarrow \infty$ ci sarà un comportamento anintotico. Si calcola il coefficiente dominante $\lambda \frac{c_{k+1}}{c_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{k}$ dalla rel. di ricorrenza.

$$\text{Pondiamo } \xi^2 e^{\frac{\xi^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{k!} \quad \xi \rightarrow \infty \Rightarrow ?$$

cosa succede per $\xi \rightarrow \infty$ perché per ξ grande lo λ è ancora esistente.

$$\frac{d \lambda k + 1}{d k} = \frac{k!}{(k+1)!} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{k} \text{ come nel caso di prima}$$

Quindi la serie degli H ha lo stesso comportamento anintotico di $e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

$$H(\xi) \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} e^{\frac{\xi^2}{2}}$$

Ma allora la soluzione $\tilde{\psi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H(\xi) \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Quindi non abbiamo dovuto usare $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Ci sono abbia una serie, d comp. arint. rimane a prendere dalla forma iniziale scelta. A meno che non in tronchiata la serie. Una serie troncata si chiama polinomio. Se facciamo poi troncare se il comportamento $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ a ∞ . Se è un polinomio, $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ controlla il comp. a ∞ . Se H è una serie, n'ha $e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Supponiamo allora una condizione su λ t.c. il grado più alto è ξ^{2N} , $N \in \mathbb{N}$, e $c_{N+1} \neq 0$, $c_{N+2} = 0$. Se $\lambda = IN + 1$ ha lo stesso numero rel. di ricorrenza, la quale dice che se $c_{N+2} = 0$, tutti i successivi saranno = 0.

sol dispari

$$\tilde{\psi}(-\xi) = -\tilde{\psi}(\xi)$$

se

$$H(-\xi) = -H(\xi)$$

Sarà l'uffisimo in serie di potenze dispari: $H(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \xi^{2k+1}$

$$d_{k+1} = \frac{4k+3-\lambda}{2(k+1)(2k+3)} d_k \quad \text{fino a } d_0 \text{ e calcolo gli altri}$$

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \quad \text{Stesso discorso di prima.}$$

Chiediamo che la potenza più alta sia ξ^{2N+1} $d_0 \neq 0, d_{n+1} = 0, \lambda = 4N+3, N \in \mathbb{N}_0$.

Mettiamo ammesso le condizioni su λ e si ha $\lambda = 2n+1, n=0,1,\dots$
Ma $\lambda = \frac{E}{\hbar\omega} \Rightarrow E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, d'energia è quantizzata.

da prima sol. è quella pari.

Commeamente, si trova ora ogni energia. Quantisticamente si hanno stati egidistanti, senza dunque degenerazioni perché in tutt il sistema è legato in 1-D. $\Delta E_n = \hbar\omega = \hbar\nu$.

Per i soluti, nella modellizzazione del campo e.m. è modellizzabile come una somma di modi con nati $\hbar\nu$.

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad \text{OK! per l'indeterminazione di Heisenberg.}$$

Usando tale principio, si vede che si ottiene E_0 .

$$xp \sim \frac{p}{2}, \quad E = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}kx^2 \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

e trovò la soluzione.

Se $\lambda = 2n+1 \Rightarrow H'' - 2\xi H' + 2nH = 0$. Siccome ho i po
linomi, considero $H_n'' - 2\xi H_n' + 2nH_n = 0$ con H_n polinomi di Hermite.

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2})$$

$$H_0 = 1 \quad H_1 = 2\xi \quad H_2 = 4\xi^2 - 2$$

n è anche il numero di zeri (o numero di modi) del polinomio.
Ci un altro modo per esprimere H_n , nei termini della funzione generatrice:

$$g(\xi, s) = e^{-s^2 + 2s\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n$$
 utile per cal
colare le normalizzazioni.

$$\text{Perciò } q_n(x) = N_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(xz). \quad \text{Normalizziamo:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} q(\xi, s) q(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s^n t^m \cdot \frac{1}{n! m!} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi)$$

$$\text{Ma } \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} e^{-s^2 + 2s\xi} e^{-t^2 + 2t\xi} = e^{2st} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-(\xi-s-t)^2} =$$

$$= \sqrt{\pi} e^{2st}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} q(\xi, s) q(\xi, t) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2st)^n}{n!} = \sqrt{\pi} \sum_{n,m} \frac{(st)^n}{n! m!} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n H_m$$

$$\text{Cominceremo } m=n \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} (H_n(\xi))^2 = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

$$m \neq n \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n H_m = 0 \quad \text{perché in } * \text{ non ci sono contributi di } m \text{ con } m.$$

Ellora la costante di normalizzazione

$$H'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k 2^k \xi^{2k-2}$$

$k \rightarrow k+1$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} 2^{(k+1)} \xi^{2(k+1)-2} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} 2(k+1) \xi^{2k}$$

$$H''' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k 2^k (2k-1) \xi^{2k-2}$$

$k \rightarrow k+1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} 2(k+1)(2k+1) \xi^{2k}$$

$k=1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} 2(k+1)(2k+1)$$

$$\Delta x \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{2x} \quad (1)$$

$$p_x x \sim \frac{\hbar}{2} \quad (2)$$

$$E = \frac{p_x^2}{2M} + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{\hbar^2}{4x^2} \cdot \frac{1}{2M} + \frac{1}{2} k x^2$$

CONDIZIONE ENERGIA MINIMA

$$\frac{dE}{dx} = 0 \quad - \frac{2\hbar^2}{4x^3} \cdot \frac{1}{2M} + kx = 0$$

$$\frac{2\hbar^2}{4x^3} \cdot \frac{1}{2M} = kx = M\omega^2 x$$

$$\hbar^2 = 4M^2\omega^2 x^4$$

$$x = \left\{ \frac{\hbar^2}{4M^2\omega^2} \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$\tilde{E}_s = \frac{p_x^2}{2M} + \frac{1}{2} k \left(\frac{\hbar^2}{4M^2\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{1}{2M} \frac{\hbar^2}{4} \cdot \left(\frac{4M^2\omega^2}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} M\omega^2 \left(\frac{\hbar^2}{4M^2\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{k^2}{\zeta} \cdot \frac{2\zeta \omega}{k} + \frac{1}{2} \omega \frac{k}{2\zeta} = \frac{2}{\zeta} k \omega = \frac{1}{2} k \omega \quad (2)$$

— · — · —

$$\text{è data da } \langle \psi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} (H_n(\xi))^2 = \frac{1}{\alpha} N_n^2 \pi^2 n!$$

$$N_n = \left(\frac{\alpha}{\pi n!} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{per tutte le funzioni d'onda.}$$

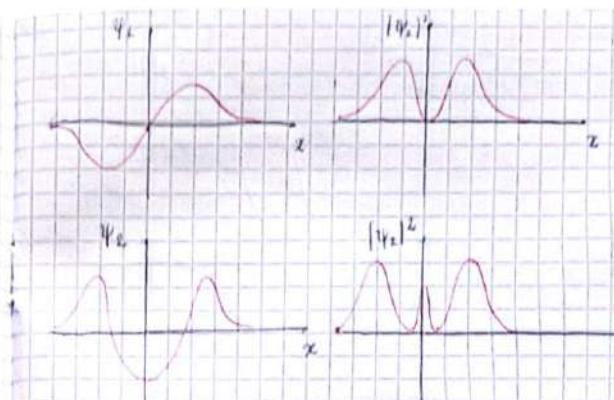
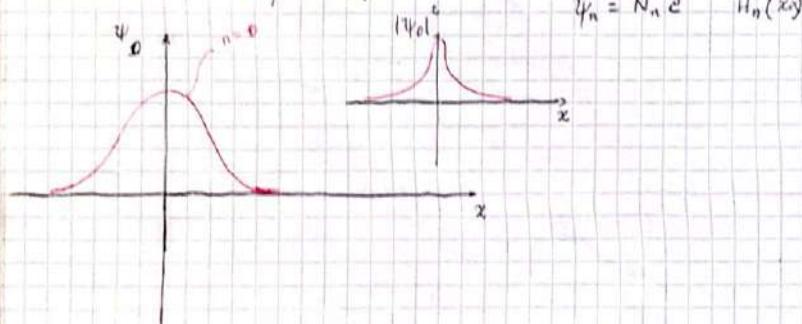
Ottiamo anche informazioni sull'ortogonalità:

$$\int dz \psi_n^* \psi_m = \frac{N_n N_m}{\alpha} \int d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = \delta_{nm} \quad \text{(perché ho scritto } N_m N_n \text{ prima!)}$$

$$x_{nm} = \int dz \psi_n^* \psi_m \text{ sono elementi di matrice. Si trovano usan-} \\ \text{do } g(\xi, s) = g(\xi, t) \text{ e } x_{nm} = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ ma } n \pm 1 \\ \frac{1}{\alpha} \binom{n+1}{2}^{\frac{1}{2}}, & m = n \pm 1 \\ \frac{1}{\alpha} \binom{n}{2}^{\frac{1}{2}}, & m = n \end{cases}$$

Risulta che $\langle \hat{x} \rangle = x_{nn} = 0$ perché le funzioni sono pari o dispari, ma il modulo quadro è sempre pari e il rango medio è zero $\int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 = 0$

Consideriamo i primi polinomi:



CONFRONTO CON L'OSCILLAZIONE CLASSICO

$$x = x_0 \sin \omega t$$

con x_0 ampiezza di oscillazione

$$x_0 = \left(\frac{2E}{M\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{M\omega^2 x_0^2}{2} \\ U_{\max} &\text{ iniziale, da 0 a } x_0 \\ v &= \omega x_0 \cos \omega t \\ g &= -\frac{dU}{dx} \end{aligned}$$

$$v^2 = \omega^2 x_0^2 \cos^2 \omega t = \omega^2 x_0^2 (1 - \sin^2 \omega t) = \omega^2 (x_0^2 - x^2)$$

Quale probabilità mi ha dato ha classicamente di trovare la particella in una zona classicamente esclusa?

$$x, x + dx \quad T = \frac{dx}{\omega} \quad P_c(x) dx = \frac{1}{T} \left(\frac{dx}{\omega} \right) : \text{risultato}$$

grande dove è lenta, cioè ω a quota $\sim \varepsilon$, prende più presto di x_0 , dove la velocità è massima:

$$P_c(x) dx = \frac{\omega}{2\pi} x \frac{dx}{\omega} \frac{dx}{\pi (x_0^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \begin{array}{l} \text{MAX per} \\ x \sim \pm x_0 \\ \text{MINIMA } x=0 \end{array}$$

Uniamo ora $\xi = \alpha x = \left(\frac{4\omega}{k} \right)^{\frac{1}{2}} x \quad \pm x_0 \equiv \pm \xi_0 = \pm 2^{\frac{1}{2}} \lambda$ parametru definito prima nel caso quantistico ($\lambda = \frac{2\pi}{k\omega}$)

$$\pm 2^{\frac{1}{2}} = \pm (2n+1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{dalla cond. } \lambda = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

Se λ è mass. per $x \sim \pm x_0$, qui si avrà P_{\max} per $\xi \sim \pm \xi_0$.

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int dp |\psi(p)\rangle \langle \psi(p)| = \int dp \langle \psi(p) | \psi(p) \rangle$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = (\psi_p, \psi) = \int dx \psi_p(x) \psi(x) = \frac{1}{(2\pi R)} \int dx e^{-\frac{i}{\hbar} px} \psi(x) = \psi(p)$$

↓

$$\langle \psi | \psi \rangle = \psi(p)$$

Stesso stato ψ : nulla nella rappresentazione coordinate, $\psi(x)$ dice che lo stato è p . Ora abbiamo la stessa cosa, ma siamo in rappresentazione degli impulsi.

$$\langle \psi | = \int dp \psi(p) | p \rangle$$

Urimo quindi queste barre con $| \rangle$ corrispondenti delle barre improprie inverse di ψ .

Tutoraggio (eserc. 6)

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \psi_+ (x, t) + \beta \psi_- (x, t)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\varphi}$$

ULTIMO es. eserc. 6



Penso il cerchio come una retta in cui individuo i punti separati all'uno dall'altro.

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \psi''(x) = E \psi(x) \quad \psi(x) = A e^{ix} + B e^{-ix} \quad \text{Imponiamo}$$

le condizioni di periodicità: $\psi(x + 2\pi R) = \psi(x)$

Se aggiungo $e^{i\varphi}$ cambia qualcosa, e mi ha l'effetto Aharonov-Bohm, da presenza di iB dovuta al cerchio circondando presentan-

si componendo una fase dopo un giro. Ma consideriamo ora la momen-

tomia.

$$e^{i\kappa(x + 2\pi R)} = e^{ix}$$

$$ik(x + 2\pi R) = ikx$$

$$ik2\pi n = i\pi n z \rightarrow \kappa = \frac{n}{R} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \psi_n(x) = N e^{ik_n x}$ autofunzioni dell'hamiltoniana e del momento

$$\int |\psi_n(x)|^2 dx = 1 = \int_{0}^{2\pi R} |N|^2 dx \rightarrow N = \frac{1}{(2\pi R)}$$

non ci sono fan relativi

ne e lo faccio fare.

$$\psi_n(x) = u_n = \frac{1}{(2\pi R)} e^{ik_n x}$$

Queste sono autofunzioni associate a H , $H^\dagger = H \Rightarrow u_n$ sono ortogonali. Per verificarlo calcolo

$$\int_0^{2\pi R} dx u_m^*(x) u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } m=n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dx e^{-imx} e^{inx} = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dx e^{i(n-m)x} = 0$$

Considerando il momento

$$u_n(x) = \frac{1}{(2\pi R)} e^{ik_n x}; \quad \hat{p} u_n(x) = -ik \frac{d}{dx} u_n(x) = -ik \frac{i k_n}{(2\pi R)} e^{ik_n x} =$$

$$= k K_n \left(\frac{1}{(2\pi R)} e^{ik_n x} \right)$$

$$\text{Ora spettro è ottenuto. } E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2M} = \frac{\hbar^2 n^2}{2MR^2}$$

$$\text{Al valore medio } \langle x \rangle_n = \int dx u_n^*(x) x u_n(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dx x = \frac{1}{2\pi R} \frac{(2\pi R)^2}{2} = \pi R \text{ ovviamente, perché le funzioni girano}$$

giorno girando, e in media mi aspetto il centro.

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} u_2$$

Ora, u_1 e u_2 comparemo con la stessa probabilità ($\frac{1}{2}$), ma

$$p_1 = \frac{k}{R}, \quad p_2 = \frac{2k}{R} \quad \text{perché } k = \frac{n}{R} \quad \text{e } p_n = kx_n$$

Il momento, come l'energia, non è determinato, perché ci sono sommazioni.

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} \frac{k}{R} + \frac{1}{2} k R \cdot 2 = \frac{3}{2} \frac{k}{R} \neq p_1 \neq p_2$$

$N=1$

$$\psi(z, t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \psi_2(z, t) + \frac{i}{\sqrt{3}} \psi_3(z, t); \quad \psi_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{2\pi z}{3}$$

$$-\frac{1}{2} E_2 t$$

$$\psi_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{3\pi z}{2}\right)$$

$$\psi_n(z, t) = \psi_n(z) e^{-\frac{1}{2} E_n t}$$

quando il hamiltoniana non dipende dal tempo.

ψ_2 è autostato dell'operatore di parità?

$\hat{P} \psi(x) = \psi(-x) = \lambda \psi(x) \quad \hat{P}^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \lambda = \pm 1$ per il teo. di Cayley-Hamilton, per cui un operatore è sol. del suo polinomio caratteristico.

Le autofunzioni sono di \hat{P} sono le fari e le dispari.

$\psi(x, t)$ non è auto. perché non è né pari né dispari. Ma è comunque di autostati:

$$\langle p \rangle_{\psi} = \sum_n |c_n|^2 \lambda_n \text{ contro } \int dx \psi^* p \psi. \text{ Al primo modo}$$

è meglio; perché altrimenti si riconosciuto il fatto che

le ψ sono autostati.

¶

$$(-1)^{\frac{E_2}{k} t} + (+1)^{\frac{E_3}{k} t} = -\frac{1}{3}$$

→ Valori simici di tanti colpi della funz. d'onda in una misura pari a una dispari.

$$\langle \hat{P}^2 \rangle = \frac{1}{3} \frac{1}{9} \quad \langle \hat{P}^2 \rangle = 1 \Rightarrow (\Delta \hat{P})^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$p(t) = \int_0^{\frac{3}{2}} dz \psi^*(z, t) \psi(z, t) = \int_0^{\frac{3}{2}} dz \left\{ \frac{2}{3} \psi_2(z) e^{i \frac{E_2 t}{k}} - \frac{i}{\sqrt{3}} \psi_3(z) e^{i \frac{E_3 t}{k}} \right\}$$

$$\cdot \left\{ \frac{2}{3} \psi_2(z) e^{-i \frac{E_2 t}{k}} + \frac{i}{\sqrt{3}} \psi_3(z) e^{-i \frac{E_3 t}{k}} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{2}{3} |\psi_2|^2 + \frac{1}{3} |\psi_3|^2 + \frac{i}{\sqrt{3}} \left[\frac{2}{3} \psi_2 e^{i \frac{E_2 t}{k}} \psi_3 e^{-i \frac{E_3 t}{k}} - \frac{i}{\sqrt{3}} \psi_3 e^{i \frac{E_3 t}{k}} \psi_2 \right] \right\} dz$$

finché ψ_2 e ψ_3 sono pari e da 0 ad $\frac{3}{2}$, cioè $\frac{1}{2} \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$ = 1 perché non sono normalizzati.

Il termine di interferenza lo riguarda.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \sin \left(\frac{E_3 - E_2}{k} t \right) \right| \int_0^{\frac{3}{2}} \psi_2(z) \psi_3(z) dz$$

$$p(t) = \frac{1}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{15\pi} \sin \left(\frac{E_3 - E_2}{k} t \right) \quad \text{Minimo quando } \frac{E_3 - E_2}{k} t = \pi n \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{(bisogna sempre stare a } \frac{3}{2}, \text{ non andare a } -\frac{3}{2}).$$

$$t_{\min} = \frac{\pi}{E_3 - E_2} \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right), \quad t_{\max} = \frac{\pi}{E_3 - E_2} \left(-\frac{\pi}{2} + 2m\pi \right)$$

$$t_{\min} = \frac{1}{2} - \frac{8\pi}{15\pi} \quad t_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{8\pi}{15\pi}$$

da prob. che la font. stia im $(\omega_0 - \frac{g}{2}, 0)$ sarà $1 - P(0, \frac{g}{2})$.

es. 2

$$U(z, 0) = -\frac{i}{15} \varphi_1(z) + \sqrt{\frac{1}{2}} \varphi_4(z) + \frac{i}{16} \varphi_6(z)$$

$$\sum |c_i|^2 = 1 \text{ OK}$$

$$\varphi(z, t) = -\frac{i}{15} \varphi_1(z) e^{-\frac{i}{k} E_1 t} + \sqrt{\frac{1}{2}} \varphi_4(z) e^{-\frac{i}{k} E_4 t} + \frac{i}{16} \varphi_6(z) e^{-\frac{i}{k} E_6 t}$$

$\sum |c_i|^2 = 1$ perché non ci ha normalizzato
il nome im $t=0$ e ci ha messo $\propto t$ comune.

$$\langle \hat{H} \rangle = \frac{1}{3} E_1 + \frac{1}{2} E_4 + \frac{1}{6} E_6 \quad \text{da} \quad \langle \hat{H} \rangle = \sum |c_i|^2 E_i \text{ indipendente dal tempo.}$$

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \frac{1}{3} E_1^2 + \frac{1}{2} E_4^2 + \frac{1}{6} E_6^2$$

$$\langle \Delta \hat{H} \rangle = (\langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$$

H e \hat{H} commutano
 \Rightarrow ammettono un set di autovalori comuni

es. 3

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2^n n! n!}} e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2} H_n(\alpha x) = N_n e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2} H_n(\alpha x)$$

$$\alpha = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{oppure} \quad \langle x_n \rangle = |N_n|^2 \int dx \underbrace{H_n(x)}_{\text{dispari}} \underbrace{x H_n(x)}_{\text{pari}} e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2} \rightarrow \int \text{DISPARI} = 0$$

$$\langle p \rangle = |N_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2} \left(-ik \frac{d}{dx}\right)^2} H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2}$$

Quando dirò una / farò lo quale ora dispari
dispari / pari

Quindi $\langle p \rangle = 0$ comunque

$$\langle x_n^2 \rangle = |N_n|^2 \int dx H_n(\alpha x) x^2 H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2}$$

$$x^2 = \frac{\xi^2}{\alpha^2} \Rightarrow |N_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^2 H_n(\xi) \xi^2 H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}}$$

$$G(s, \xi) = e^{-s^2 + 2s\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n H_n(\xi)$$

$$\int d\xi \xi^2 G(s, \xi) G(t, \xi) e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^n t^m}{n! m!} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^2 H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}}$$

$$\int d\xi \xi^2 e^{-s^2 + 2s\xi} e^{-t^2 + 2t\xi} e^{-\xi^2} =$$

$$\int d\xi \xi^2 e^{-(s^2 - 2s\xi + t^2 + 2t\xi + \xi^2 + 2st)} e^{2st} =$$

$$e^{2st} \int d\xi \xi^2 e^{-(\xi - s - t)^2} =$$

$$e^{2st} \int d\xi (\eta^2 + (s + t)^2) e^{-\xi^2}$$

$$e^{2st} \left\{ \frac{\pi}{2} + (s+t)^2 \ln \pi \right\}$$

$$\xi - s - t = \eta$$

$$d\xi = dy$$

$$\xi = \eta + s + t$$

$$\xi' = \eta^2 + (s+t)^2 + 2\eta(s+t)$$

$$e^{2st} \left\{ \frac{\pi}{2} + (s+t)^2 \ln \pi \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (2st)^k \left\{ \frac{\pi}{2} + (s+t^2 + 2st) \ln \pi \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(2^k (st)^k + 2^k \frac{k+1}{2} t^{k+1} + 2^k s^k t^{k+1} + 2^{k+2} (st)^{k+2} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-m} \frac{1}{(n!)^2} (st)^n \int d\xi \xi^k H_n H_m e^{-\xi^2}$$

Quando $k = n$ e $k = n-1$

$$\text{si ha l'uguaglianza} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \right\}$$

$$k=n \quad k=n-1$$

gli altri termini
mi si bruciano.

$$\int d\xi \xi^2 H_n(\xi) H_m(\xi) = n! m! \sqrt{\pi} (2n+1)$$

$$\langle x^i \rangle_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar}{m\omega}$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} M \omega^2 \langle x^2 \rangle_n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega = \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_n$$

$$\langle T \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2M} = \langle E \rangle_n - \langle V \rangle_n = \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_n \Rightarrow \langle T \rangle = \langle V \rangle_n$$

$$\langle p^2 \rangle = M \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

Ma $\langle T \rangle_n = \langle V \rangle_n$ viene già dal teorema del minimo, lo rafforzo già!

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \langle x^2 \rangle_n \langle p^2 \rangle_n = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \hbar^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$n=0 \text{ Stato fondamentale, gaussiano} \Rightarrow (\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

Bagliari 15 febbraio Novembre 2024
Edoardo Gatti

Allora introdotto dalla base del continuo come opera l'operatore impulso nella base delle coordinate?

IN RIPR. DEL MOMENTI

$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$ fattore moltiplicativo

Consideriamo $\hat{p}|y\rangle$, $|y\rangle \in S$: $\hat{p}|y\rangle$ come cosa dà? Proviamo nella base dell'impulso: $\langle p | \hat{p}|y\rangle = p | \underbrace{\hat{p}|y\rangle}_{\text{in } S}$

Rappresentativo

dello stato nulla \mathcal{B} degli impulsi $\Rightarrow p|\psi(p)\rangle$

Allora definiamo $\langle p | \hat{p}|y\rangle \stackrel{(def. come)}{=} \hat{p} \langle p | y\rangle = \hat{p}\psi(p)$

Se faccio agire l'operatore \hat{p} su ψ mi ha quindi $\hat{p}\psi(p) = p\psi(p)$, con \hat{p} che agisce come fattore moltiplicativo.

Spostiamoci in rapp. delle coordinate:

$$\langle z | \hat{p}|y\rangle = \hat{p}\psi(z)$$

$$\hat{p} \langle z | y\rangle$$

Studiamo $\langle z | \hat{p}|y\rangle = \langle z | \hat{p} \underbrace{\int dp |p\rangle \langle p | y\rangle}_{\text{fatto faccio}} \rangle$

con perché so come agisce \hat{p} sulla $\mathcal{B} = \{|p\rangle\}$. Ottengo Rindino:

$$\langle z | \hat{p}|y\rangle = \int dp \underbrace{\langle z | \hat{p}|p\rangle}_{\text{RINDINO}} \langle p | y\rangle = \int dp p \langle z | p \rangle \langle p | y\rangle$$

$\underbrace{\langle z | p \rangle}_{\text{azione di } \hat{p} \text{ su } |p\rangle}$ rappres. NELLA BASE DELLE COORDINATE

$\psi(p)$ rappresenta
TITO DI
 \hat{p} NEGLIA
BASE $\{|p\rangle\}$

$$\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = (x, \psi_p) = \int dx' X_x^*(x) \psi_p(x') =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int dx' \delta(x-x') e^{-\frac{i p x'}{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\frac{i p x}{\hbar}}$$

Il rappresentativo di \hat{p} nella base $\{|x\rangle\}$ è $\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\frac{i p x}{\hbar}}$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int dp p e^{-\frac{i p x}{\hbar}} \psi(p)$$

N.B. $\langle p | x \rangle$ rappres. di \hat{x}
nella base $\{|p\rangle\}$, com.
pleno coniugato

Ma vogliamo la rappresentazione delle coordinate: esplicitiamo $\psi(p)$ come ambitrasformata:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int dp p e^{-\frac{i p x}{\hbar}} \int dx' \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\frac{i p x'}{\hbar}} \psi(x') = \frac{1}{2\pi k} \int dp \int dx' e^{\frac{i p(x-x')}{\hbar}} \underbrace{p \psi(x')}$$

$$ik \frac{\partial}{\partial x} ik \frac{\partial}{\partial x'} e^{\frac{i p(x-x')}{\hbar}}$$

Substituiamo.

$$\frac{1}{2\pi k} \int dp \int dx' \left(ik \frac{\partial}{\partial x'} e^{\frac{i p(x-x')}{\hbar}} \right) \underbrace{\psi(x')}_{\in L^2} =$$

~~non siamo ancora in condizioni per fare questo~~

$$= \frac{1}{2\pi k} \int dp \int dx' e^{\frac{i p(x-x')}{\hbar}} \left\{ -ik \frac{\partial}{\partial x'} \right\} \psi(x'). \quad \text{Ma c'è una colpa di}$$

Qinac!

$$\int dx' \delta(x-x') \left\{ -ik \frac{\partial}{\partial x'} \psi(x') \right\} = -ik \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

\hat{p} agisce sullo stato $|\psi\rangle$ in rappresentazione delle coordinate così:

$$\langle x | \hat{p} | \psi \rangle \doteq \hat{p} \psi(x) = -ik \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

Ovendo quindi definito una \mathcal{B} del continuo, abbiamo ricavato, in generale che, con \hat{p} nulla base $\{|x\rangle\}$, per $\psi \in \mathcal{L}^2$, è t.c. $\hat{p} \psi(x) = -ik \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$.

Si può vedere come segue l'op. coord. in rappresentazioni dei momenti.

$$\langle x | \hat{x} | \psi \rangle \doteq \hat{x} \psi(x)$$

$$x \langle x | \psi \rangle = x \psi(x)$$

IN RAPPO
OCUE COORDINATE

$$\langle p | \hat{x} | \psi \rangle \doteq \hat{x} \psi(p) = ik \frac{\partial}{\partial p} \psi(p)$$

Quanto vale $[x, \hat{y}]$ e? Dico anzitutto fatto agire su uno stato, quindi scegliere una rappres. adatta: sceglio la $\{|x\rangle\}$.

$$\langle x | [x, \hat{y}] | \psi \rangle \doteq [x, \hat{y}] \psi(x)$$

Ma $[x, \hat{y}] \psi(x) = (\hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x}) \psi(x) = (xy - yx) \psi(x)$ nella rapp. delle coordinate. Quindi $[x, \hat{y}] \psi(x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Invece, } & \langle x | [\hat{x}, \hat{p}_x] | \psi \rangle = [\hat{x}, \hat{p}_x] \psi(x) = (\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x}) \psi(x) = \\ & = (x(-ik \frac{\partial}{\partial x}) - (-ik \frac{\partial}{\partial x})x) \psi(x) = -ik \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi(x) - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \\ & = ik \psi(x) \end{aligned}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] \psi(x) = ik \psi(x) \quad \forall \psi(x) \in \mathcal{L}^2$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = ik$$

Le trans. unitarie garantiscono rappresentazioni unitarie equivalenti di stati finiti. Regolano inoltre i cambiamenti di base.

Parliamo allora un po' della base delle coord o dei momenti, o dell'angolo o di altri operatori, ed es. e' avere un risultato equivalente, non alterando cioè il contenuto fisico.

Ci sono le $B \in S$ (numerabili) e quelle del continuo $\not\in S$

TRASF. UNITARIE U

$$U^+ = U^{-1}$$

Consideriamo $|u\rangle, |v\rangle \in S$ e $|u\rangle = A|v\rangle$.

Prendiamo i trasformati $|u'\rangle = U|u\rangle$ e $|v'\rangle = U|v\rangle$.

Come si trasforma A ?

$$|u'\rangle = A|v\rangle \Rightarrow A|v\rangle$$

$$U|u\rangle = A'U|v\rangle$$

$$UA|v\rangle = A'U|v\rangle$$

$$UA = A'U$$

$$UAV^{-1} = A'UU^{-1} \quad U \text{ è unitario}$$

$$A' = UAV^{-1} = UAU^+$$

$|u\rangle$ non lo poniamo minore.

Proprietà trasf. unitarie

$$1) \quad A^+ = A \Rightarrow A'^+ = A'$$

U unit.

$$2) \quad A = c_1 B + c_2 C \mathcal{D} \rightarrow A' = c_1 B' + c_2 C' \mathcal{D}'$$

E' importante, perché se $[A, B] = c \in \mathbb{C} \rightarrow [A', B'] = c$, quindi di i commutatori fondamentali ~~continuono~~ non hanno lo stesso valore.

$$3) \quad A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle \rightarrow A'|u'_n\rangle = a_n|u'_n\rangle \quad (\text{stessi autovettori})$$

Prendiamo infatti $A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$

$$AU^+U|u_n\rangle = a_nU^+U|u_n\rangle$$

$$UAU^+U|u_n\rangle = a_nUU^+U|u_n\rangle$$

$$A'|u'_n\rangle = a_n|u'_n\rangle$$

Gli autovettori di un operatore per trasf. unitarie non cambiano.
Gli autostati sì.

$$\begin{aligned} 4) \quad & \langle \varphi | A | u \rangle \text{ prod. scalare } (\Rightarrow \text{misurabile!}) = \langle \varphi | U^+ U A U^+ U | u \rangle \\ & = \langle \varphi | A' | u' \rangle. \quad \text{è importante, perché } \langle A \rangle \text{ valore medio è} \\ & \langle u | A | u \rangle = \langle u' | A' | u' \rangle \text{ invariante.} \end{aligned}$$

Se poi $A = \mathbb{1}$, $A' = \mathbb{1} \Rightarrow \langle u | u \rangle = \langle u' | u' \rangle$. La norma è invariante. In generale, per $A = \mathbb{1}$, $\langle \varphi | A | \psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi' | \psi' \rangle$.

~~Summary~~ Summary: sulle TRASF. UNITARIE

Sono trans. di operazioni e stati t.c. tutto ciò che è misurabile non cambia.

Se lo transf. unitario è continuo, cioè costruibile a partire da un insieme delle unità, possono definire trasf. unitarie infinitesimali.

$$U = \mathbb{1} + i\varepsilon F \quad \varepsilon \text{ param. infinitesimale, } \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$F^+ = F, \text{ se } \mathbb{1} = U^+U = (\mathbb{1} - i\varepsilon F^+)(\mathbb{1} + i\varepsilon F) = \mathbb{1} + i\varepsilon(F - F^+)$$

Per far valere l'uguaglianza, $F = \bar{F}^+$. F è l'operatore generatore della trasformazione.

$$|u'\rangle = U|u\rangle = (\mathbb{1} + i\varepsilon F)|u\rangle$$

$$\delta|u\rangle = |u'\rangle - |u\rangle = i\varepsilon F|u\rangle \quad \text{Generatore nel senso che dice quanto è il cambiamento di } |u\rangle.$$

$$A' = UAV^+ = (\mathbb{1} + i\varepsilon F)A(\mathbb{1} - i\varepsilon F) = A + i\varepsilon[F, A]$$

↓

$$\delta A = A' - A = i\varepsilon[F, A] \quad \text{come in meccanica razionale, ma con i commutatori.}$$

Diamo le rappresentazioni matriciali degli operatori. Ciò porta alla meccanica delle matrici di Heisenberg.

β fissata on.

$$c_i = \langle u_i | \psi \rangle \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$| \psi \rangle$ stato e s

$$c_i^* = \langle u_i | \psi \rangle^* = \langle v_i | u_i \rangle = (c_1^*, \dots)$$

$$\langle u_i | A | u_j \rangle = A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots \\ \vdots & \ddots \\ \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_i | u_i \rangle \langle u_i | \psi \rangle = \sum_i \langle \psi | u_i \rangle \langle u_i | \psi \rangle = \sum_i c_i^* c_i = \sum_i |c_i|^2$$

$$\sim () ()$$

Valgono le stesse proprietà degli operatori.

La rappres. matriciale di un operatore nella sua base è una matrice diagonale.

$$\text{Se } A \text{ è un operatore, } A | u_i \rangle = a_i | u_i \rangle$$

ma base è quella di autostati, la matrice $\langle u_i | A | u_j \rangle = A_{ij} = a_i \langle u_j | u_i \rangle = a_i \delta_{ij}$, generata da una base detta di autostati.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Cambio di rappresentazione.

$$\{ | w_i \rangle \} \quad \{ | v_j \rangle \} \text{ sono ON}$$

$$| w_i \rangle = \sum_j | v_j \rangle \underbrace{\langle v_j | w_i \rangle}_{\propto \delta_{ij}} = \sum_j a_{ji} | v_j \rangle$$

$$a_{ji}$$

$$\begin{aligned} \text{Raccolgo gli elementi } a_{ji} \text{ in una matrice } U \mid U^\dagger = U^{-1} \mid \\ \text{infatti } (U U^\dagger)_{ij} = \sum_k a_{ik} a_{jk}^* = \sum_k a_{ik} a_{jk}^* = \sum_k \langle v_i | w_k \rangle \langle w_k | v_j \rangle^* = \\ = \sum_k \langle v_i | w_k \rangle \langle w_k | v_j \rangle = \sum_k \langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

$$| \psi \rangle = \sum_i c_i | w_i \rangle$$

$$c_i = \langle w_i | \psi \rangle$$

$$| \psi \rangle = \sum_i c'_i | v_i \rangle$$

$$c'_i = \langle v_i | \psi \rangle$$

$$c'_i = \langle v_i | \psi \rangle = \langle v_i | \sum_j | w_j \rangle \langle w_j | \psi \rangle = \sum_j \langle v_i | w_j \rangle \langle w_j | \psi \rangle = \sum_j a_{ji} c_j$$

Un cambiamento di base negato da U , che regola anche i cambiamenti di coefficienti, e U è unitaria.

Consideriamo le basi improprie $\{ | x \rangle \}$ e $\{ | p \rangle \}$.

$$| p \rangle = \int dx | x \rangle \langle x | p \rangle = \int dx \langle x | p \rangle | x \rangle \text{ con } \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{i}{k} px}.$$

$$| w_i \rangle = \sum_j a_{ji} | v_j \rangle$$

Esistono la corrispondenza: $| x \rangle \rightarrow | v_j \rangle$

$$| v_j \rangle \rightarrow U(x, p) = \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{i}{k} px}$$

Similmente:

$$| x \rangle = \int dp | p \rangle \langle p | x \rangle = \int dp \langle p | x \rangle | p \rangle$$

$$U | p \rangle = U^{-1}(p, x) = \langle x | p \rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\frac{i}{k} px}$$

Facciamo vedere l'unitarietà: siamo nel continuo, e verrà fuori una Delta di Dirac.

$$U_{ij}^* = U_{ji}^* \quad \text{anche se } U \text{ non è } U^\dagger \quad \text{come elementi di matrice}$$

$$\sum_k a_{ik} a_{kj}^* = \delta_{ij} \rightarrow \int dp U(x, p) U^*(p, x) = \int dp U(x, p) \underbrace{\langle x | p \rangle^*}_{\text{aut. di } z \text{ hermit.}} =$$

$$= \int dp \langle x | p \rangle \langle x | p \rangle^* = \int dp \langle x | p \rangle \langle p | x \rangle = \langle x | x \rangle = \delta(x - x')$$

Si ricava direttamente facendo

$$\int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{i}{\hbar} px} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\frac{i}{\hbar} px} = \delta(x - x')$$

$$|y\rangle = \int dx |x\rangle \langle x| y\rangle = \int dx y(x) |x\rangle \quad \text{sviluppo dello stato } |y\rangle$$

$$= \int dp |p\rangle \langle p| y\rangle = \int dp \varphi(p) |p\rangle$$

$$\varphi(p) = \langle p | y \rangle = c_p \int dx \langle p | x \rangle \langle x | y \rangle = \int dx \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\frac{i}{\hbar} px} y(x)$$

I coefficienti delle due basi sono legati da una trasformata di Fourier:

$$y(x) = c_x |y\rangle = \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{i}{\hbar} px} \varphi(p)$$

$$y(x) \xrightleftharpoons[\text{ANTITRASF}]{\text{TRASF}} \varphi(p)$$

La trasf. di Fourier sono l'analogo delle trasformazioni unitarie tra le basi delle coordinate e degli impulsi.

Analiticamente:

$$u(x, p) = \langle x | p \rangle \quad \text{coincide per visibilità, non conta davvero}$$

$$u^+(p, x) = u^*(p, x, p) = \langle x | p \rangle^* = \langle p | x \rangle = u^{-1}(p, x)$$

Così si vede che si hanno trasformazioni unitarie

In S non sceglioamo alcuna base. Se siamo interessati a una in certo senso finita, sceglioamo una raffresentazione. Heisenberg proietta gli operatori su una base e usa una raffresentazione matriciale. Schrödinger usa una raffresentazione delle coordinate.

Esplosi 13 Novembre 2024

Giuliano Rattner

BASI DISCRETE

$$|w_i\rangle \quad \langle w_i | w_k \rangle = \delta_{ik}$$

$$|v_j\rangle \quad \langle v_j | v_p \rangle = \delta_{jp}$$

$$\sum_i |w_i\rangle \langle w_i| = \mathbb{1} = \sum_j |v_j\rangle \langle v_j|$$

$$|w_i\rangle = \sum_j |v_j\rangle \langle v_j | w_i \rangle = \sum_j u_{ij} |v_j\rangle \quad (\text{cambiamento di variabile})$$

$$(uv^+)_j = \sum_k u_{ik} u_{kj}^* = \delta_{ij}$$

$$|y\rangle \in S : \quad |y\rangle = \sum_i c_i |w_i\rangle = \sum_i c'_i |v_i\rangle, \quad c'_i = \sum_k u_{ki} c_k$$

BASI DEL CONTINUO

$$|z\rangle \quad \langle z | z' \rangle = \delta(z - z')$$

$$|p\rangle \quad \langle p | p' \rangle = \delta(p - p')$$

$$\int dz |z\rangle \langle z| = \mathbb{1} = \int dp |p\rangle \langle p|$$

$$|p\rangle = \int dx |x\rangle \langle x | p \rangle = \int dx u(x, p) |x\rangle$$

$$\int dp u(x, p) u^*(p, x') = \int \delta(x - x') \quad \text{con } u(x, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\frac{i}{\hbar} px}$$

$$|y\rangle \in S$$

$$|y\rangle = \int dx y(x) |x\rangle = \int dp \varphi(p) |p\rangle$$

non raffresentativo
molte basi delle coordinate

$$\varphi(p) = \int dx u^{-1}(p, x) y(x) = \int dx \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\frac{i}{\hbar} px} y(x)$$

$$y(x) = \int dp u(x, p) \varphi(p) = \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{i}{\hbar} px} \varphi(p)$$

Queste sono trasf. antitraf., analogo delle trasf. unitarie, ora sulle basi del continuo.

Imponendo quindi che $\langle \psi | \psi' \rangle = \delta_{\psi \psi'}$ e $(x, p_x) = ik$, ad esempio, si ricava da una rappresentazione materiale, usando una base discreta. Prende $|k\rangle \in S$ e lo proietta su una base.

\hat{A} è dato. Se ne definiscono $A_{ij} = \langle u_i | \hat{A} | u_j \rangle$ ma sono le matrici i unitarie, ci sono proprietà speciali.

$$\hat{A}' = \hat{U} \hat{A} \hat{U}^+ \quad \text{con le matrici} \quad \hat{A}' = \hat{U} A U^+$$

Siccome non siamo diagonalizzati gli operatori, quindi le matrici associate, individuiamo l'eq. materiale per un eq. agli autovalori:

$$\hat{A}' |u_i\rangle = a_i |u_i\rangle$$

Si ricerca una trasf. (= matrice) unitaria $\Rightarrow A' = UAU^+$ | A' è diagonale.

Sotto quali condizioni la trasf. unitaria \exists ?

Teo. 1 normice

$$\forall A \text{ t.c. } A^+ = A \Rightarrow \exists U \text{ t.c. } A' \text{ è diagonale}$$

Teo. 2

Siano A, B t.c. $A^+ = A$ e $B^+ = B$. Allora $\exists! U$ t.c. A' e B' abbiano una base comune che le diagonalizzino, a fatto che $[A^+, B] = 0$.

Per una trasf. unitaria, la traccia non cambia. Ciò ha senso, perché in A' diag. è la somma degli autovalori.

Soluzione dell'oscillatore armonico simile con metodi operatoriali:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 \hat{x}^2$$

S

metodo Braket

$$\text{Si definisce un operatore } \hat{a} = \frac{i}{\hbar} \left[\left(\frac{M\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{x} + i \frac{\hat{p}_x}{(M\omega)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$\hat{z} = \hat{x}^+$$

$$\text{Si definisce anche } (\hat{a}^+) \hat{a}^+ = \frac{1}{\hbar} \left[\left(\frac{M\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{x} - i \frac{\hat{p}_x}{(M\omega)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad \hat{p}_x = \hat{p}_z$$

Ora si calcolano i commutatori:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = ik; \quad [\hat{a}, \hat{a}] = 0; \quad [\hat{a}^+, \hat{a}^+] = 0$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \frac{1}{i} \left[\left(\frac{M\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{x} + i \frac{\hat{p}_x}{(M\omega)^{\frac{1}{2}}} \right] \hat{a}^+ - i \left(\frac{M\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{x} - i \frac{\hat{p}_x}{(M\omega)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{i} \left\{ -i \left(\frac{M\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{x} \left[\hat{a}, \hat{a}^+ \right] + i \left(\frac{M\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\hat{p}_x, \hat{x} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{i} \left\{ -i \frac{1}{\hbar} ik + i \frac{1}{\hbar} (-ik) \right\} = -i$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$$

Ora si calcolano i termini di \hat{a} e \hat{a}^+ , facendo attenzione al fatto che non c'è commutazione:

$$\hat{x} = \frac{1}{i\hbar} \left(\frac{k}{M\omega} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a}^+ + \hat{a})$$

$$\hat{p}_x = (a^* - a^+) \frac{i}{\hbar} \left(\frac{M\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{k}{M\omega} (a^{+2} + a^2 + a^* a + a a^*) \quad \text{è moltiplicato per } M\omega^2$$

$$\hat{p}_x^2 = -(a^{+2} + a^2 - a a^* - a^* a) \frac{1}{2} M\omega^2 \quad \text{è diviso per } 2M$$

□

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4} \hbar \omega \left[- (a^+ a^+ + a^+ a^- - a^+ a^- - a^- a^+) + (a^+ a^+ + a^+ a^- + a^- a^+ + a^- a^-) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega (a^+ a^+ + a^- a^-) \quad \text{Dato che } [a, a^\dagger] = a a^\dagger - a^\dagger a = 1, \\ &\text{si può scrivere } \hbar \omega (a^+ a^+ + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$H = \hbar \omega \left(a^+ a^+ + \frac{1}{2} \right)$$

Definiamo $N = a^+ a^+$ operatore.

↓

$$H = \hbar \omega \left(N + \frac{1}{2} \right)$$

Costruiamo l'algebra del sistema finito.

$$[N, a^+] = [a^+ a^+, a^+] = a^+ \underbrace{[a^+, a^+]}_{=0} + \underbrace{[a^+, a^{\dagger \dagger}]}_{=0} a^+ = a^+$$

$$[N, a^-] = -a^-$$

Queste regole si tramuteranno in H , perché H è resultante dei minimi di N .

↓

$$[H, a^+] = \hbar \omega a^+ \quad ; \quad [H, a^-] = -\hbar \omega a^-$$

Mai vogliamo risolvere $H|E\rangle = E|E\rangle$.

Cosa succede con $a^+|E\rangle$, $a^-|E\rangle$? Consideriamo allora il commutatore

$H a^+|E\rangle = (a^+ H + \hbar \omega a^+)|E\rangle = (E + \hbar \omega) a^+|E\rangle$. Quindi $a^+|E\rangle$ viene in modo da restituire lo stesso autovettore incrementato di $\hbar \omega$. Ottengo cioè ancora un autovettore di H , ma con autovettore incrementato. Se faccio agire a^- sull'autovettore di H , ottengo un autovettore di H con autovettore decrementato di $\hbar \omega$:

$$H(a^-|E\rangle) = (E - \hbar \omega) a^-|E\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } a^+|E\rangle &\sim |E + \hbar \omega\rangle \\ a^-|E\rangle &\sim |E - \hbar \omega\rangle \end{aligned}$$

Chiameremo a^+ operatore di innalzamento, a^- operatore di abbassamento.

L'operatore H è una forma quadratica di operatori hermitiani:

$$x^2 = x x = x^* x$$

$$\langle H \rangle_4 = \langle 4 | H | 4 \rangle \sim \langle 4 | x^* x | 4 \rangle = \| x | 4 \|^2$$

$$p_x^2 = p_x p_x = p_x^* p_x$$

$$\langle 4 | p_x^* p_x | 4 \rangle = \| p_x | 4 \|^2$$

$$\boxed{\langle H \rangle_4 \geq 0} \quad \text{perché somma di due norme al quadrato.}$$

Lo vale $\forall |4\rangle$, quindi vale anche per i $|E\rangle$ autovettori di H .

$$\langle H \rangle_E = \langle E | H | E \rangle \geq 0. \quad \text{Ma so che } H|E\rangle = E|E\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \langle E | E \rangle \geq 0 \Rightarrow \boxed{E \geq 0}$$

Dove allora esiste un valore minimo E_0 perché lo spettro è limitato inferiormente dallo zero. Se faccio:

$a^-|E_0\rangle$ dove E_0 è minima, siccome $|E_0\rangle$ è già minima e a^- abbassa di $\hbar \omega$, segue che $a^-|E_0\rangle = 0$. Questa equazione, $a^-|E_0\rangle = 0$, fa risolvere l'eq. agli autovettori:

$$\begin{aligned} 0 &= \hbar \omega a^+ (a^-|E_0\rangle) = \\ &= \hbar \omega N|E_0\rangle = (H - \frac{1}{2} \hbar \omega)|E_0\rangle = \end{aligned}$$

$$H|E_0\rangle - \frac{1}{2}\hbar\omega|E_0\rangle = 0$$

$E_0|E_0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|E_0\rangle \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ valori minimi dell'energia dello spettro di energia dell'oscillatore armonico.

Con l'operatore di innalzamento costruire tutti gli stati:

$|E_0\rangle \rightarrow \frac{1}{2}\hbar\omega$ e $a^+|E_0\rangle \rightarrow \hbar\omega(1 + \frac{1}{2})$, lo faccio uscire anche una volta in $|E_0\rangle$ e trovo $(2 + \frac{1}{2})\hbar\omega$, e per n volte ho lo spettro

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Io ho che gli stati sono normalizzati:

$$H|E\rangle = E|E\rangle. \text{ Ora } H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle;$$

$$a^+|E_n\rangle = |E_{n+1}\rangle$$
 dal fatto che $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

C'è allora

$$|E_{n+1}\rangle = d_n a^+|E_n\rangle$$
 volendo $\langle E_{n+1}|E_{n+2}\rangle = 1$

$$\langle E_{n+1}| = d_n^* \langle E_n| \Rightarrow \langle E_{n+1}|E_{n+1}\rangle = |d_n|^2 \langle E_n|a^+a|E_n\rangle =$$

$$= |d_n|^2 \langle E_n| \underbrace{(N+1)}_{\hbar\omega} |E_n\rangle. \text{ Ma se } H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow N = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

↓

$$|d_n|^2 \langle E_n| \left(\frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right) |E_n\rangle = |d_n|^2 \langle E_n|$$

$= \left(\frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right) |E_n\rangle = n |E_n\rangle$ se $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$. Quindi tale operatore N somma il livello: N sarà quindi detto operatore numero.

↓

$$|d_n|^2 (n+1) \underbrace{\langle E_n|E_n\rangle}_{=1} = 1 \Rightarrow |d_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{Quindi: } |E_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} a^+ |E_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} (a^+)^2 |E_{n-1}\rangle =$$

$= \dots = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} (a^+)^{n+1} |E_0\rangle$ e ho la normalizzazione di tutti gli stati.

$$|E_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |E_0\rangle \quad \text{infatti } |E_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1!}} a^+ |E_0\rangle$$

RAPPRESENTAZIONI MATRICIALI

Ottiamo matrici a dimensionali:

$$\text{Base } \{|E_n\rangle\}$$

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} \frac{H_{00}}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{H_{11}}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{H_{22}}{2} & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{E' ovvio } H|E_n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) |E_n\rangle$$

Rappresentiamo a, a^+ , che non sono fermi, perché il commutatore $a^+ a \neq 0$.

$$\langle E_k | E_{n+1} \rangle = \delta_{k,n+1}$$

$$\square d_n \langle E_k | a^+ | E_n \rangle = d_n \frac{1}{\sqrt{n+1}} (a^+)^{n+1} = \delta_{k,n+1}$$

$$\Rightarrow (a^+)^{n+1} = \sqrt{n+1} \delta_{k,n+1}, \text{ e } a_{kn} = (a^+)^k = (a^+)^*_{nk} = (a^+)^*_{nk} = a^+_{nk} = \dots$$

$= \sqrt{k+1} \delta_{n,k+1} = \sqrt{n} \delta_{n,k+1}$ da una sforatura tra riga e colonna

Ho a^+_{kn} . Per trovare a_{nk} faccio $(a^+_{kn})^+ =$
 $= (a^*_{nk})^+ = a_{kn}$ ^{in cui ho trasposto righe e colonne}

$$a^+ = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \sqrt{1} & 0 & & & \\ \sqrt{2} & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \sqrt{3} & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & \sqrt{1} & & & \\ 0 & \sqrt{2} & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$|E_n\rangle \rightarrow |x\rangle$$

$$2\hat{V}_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} \left[\left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} x \pm \frac{k}{(km\omega)^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{dx} \right]$$

Ottiamo esplicitato, risetzando che, in raffr. delle coordinate $\pm i p_x = \pm i (-i\hbar \frac{d}{dx})$

$$\xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} x = \alpha x \quad |\psi(x)\rangle^c = |\tilde{\psi}(\xi)\rangle^c \frac{\partial \xi}{\partial x} = |\tilde{\psi}(\xi)\rangle^c x$$

$$2\hat{V}_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} \left(\xi \pm \frac{d}{d\xi} \right)$$

Ricordiamo ora che $2|E_0\rangle = 0$. Proiettiamo l'equazione in raffr. sull'azione delle coordinate.

$$\langle x | \hat{a} | E_0 \rangle = 0 \quad \hat{a} \langle x | E_0 \rangle = \hat{a} \psi_0(x) = \hat{a} \tilde{\psi}_0(\xi)$$

Rappresentativo di $|E_0\rangle$ nella base $\{|x\rangle\}$.

Allora
 $\tilde{\psi}_0$ Ma $\hat{a} \underbrace{\frac{1}{\hbar} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right)}_{\hat{a}}$ $\tilde{\psi}_0(\xi) \Rightarrow \tilde{\psi}_0(\xi) = \tilde{N}_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ gaussiana

Risulterà che $\psi_0(x) = N_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$ espressione dello stato fondamentale, con $N_0 = (\alpha/\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}$

Uniamo l'operatore di innalzamento per determinare gli altri stati:

$$\langle x | E_n \rangle = \langle x | \frac{(a^+)^n}{n!} | E_0 \rangle \Rightarrow \psi_n(x)$$

$\tilde{\psi}_n(\xi) = (n!)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\hbar} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right) \right)^n \tilde{\psi}_0(\xi)$. Ma questo è un modo in cui raffrontiamo i polinomi di Hermite

$$H_n(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right)^n e^{-\frac{\xi^2}{2}} \text{ oppure } e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \tilde{\psi}_0(\xi).$$

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(\alpha x). \quad \text{Quindi anche la forma funziona lo è lo stesso.}$$

(3)

(4)

POSTULATI DELLA MECCANICA QUANTISTICA

① È stato finito definito $|\psi(t)\rangle$ è S t.c. $\hat{H}|\psi(t)\rangle = ik \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$ è dato un sistema gli accadeva \hat{H} . Nota $|\psi(t_0)\rangle$ in t_0 inizia se mi determina $|\psi(t)\rangle \forall t$. La teoria è causale in t , ma non è deterministica. $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{x})$

Se ora voglio una rappresentazione nello spazio delle coordinate, proietto su $\{|x\rangle\}$: $\langle x | \hat{H} |\psi(t)\rangle = ik \frac{d}{dt} \langle x | \psi(t)\rangle$. Uso le formule operatoriali della coord. e del momento:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x^2) \right] \psi(x^2, t) = ik \frac{\partial}{\partial t} \psi(x^2, t) \quad \begin{matrix} \hat{p} \rightarrow -ik \vec{\nabla} \\ \hat{x} \rightarrow \vec{x} \end{matrix}$$

RAPPRESENTATIVO

1 bis PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in S \Rightarrow |\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle \in S$ importanti per il calcolo dell'interferenza della doppia fenditura abbiamo capito che si può combinare eventualità.

2 POSSIBILI RISULTATI DI UNA MISURA

Ottiamo una variabile dinamica (elastica) $A \xrightarrow{\text{OPERATORE ASSOCIATO}} \hat{A}$. I valori possibili della minima sono gli autovalori di \hat{A} , i quali sono reali, quindi i binari che $\hat{A}^2 = \hat{A}$. Gli autovalori rappresentano le osservabili. \hat{A} sarà un osservabile.

Si può avere uno spettro discreto: $\hat{A}|u_n\rangle = a_n |u_n\rangle \quad n \in \mathbb{N}$
continuo $\hat{A}|u_\alpha\rangle = \alpha |u_\alpha\rangle \quad \alpha \in \mathbb{R}$

③ PROBABILITÀ DI OTTENERE GLI AUTOVALORI quale valore otterremo

Dato $|ψ>$ facciamo misurare ottinere uno qualunque degli autovalori di $\hat{A} \Rightarrow$ Interpretaz. probabilistica.

Oggi siamo il calcolotto: $A|u_n> = a_n|u_n>$

$$P(a_n) = ?$$

$\{u_n>\}$ base \Rightarrow Sviluppo $|ψ(t)>$ nello spazio

$$\text{e: } |ψ(t)> = \sum_k c_k(t)|u_k>$$

$$P(a_n) = |\langle u_n | ψ(t) \rangle|^2, \text{ ricordando che } \langle u_k | u_n \rangle = δ_{kn} \Rightarrow P(a_n) = \sum_k |c_k(t)|^2.$$

In ciò ho sempre ammesso $\langle ψ | ψ \rangle = 1 = \sum_k |c_k(t)|^2$. Se non lo ho normalizzato, allora

$$P(a_n) = \frac{|\langle c_n(t) \rangle|^2}{\sum_k |c_k(t)|^2}. \text{ Se ho normalizzato}$$

$$\text{è } 1, \sum_k |c_k(t)|^2 = 1.$$

In uno spettro continuo, $dP(\alpha, \alpha + d\alpha) = |c(\alpha, t)|^2 d\alpha$ densità di probabilità $= |\langle u_\alpha | ψ(t) \rangle|^2 d\alpha$.

Cagliari

Edoardo Ratto

$$\text{Se } |ψ> = |u_n> \quad P(a_n) = |\langle u_n | u_n \rangle|^2 = 1$$

lo stato finito, cioè, è uno degli autostati?

Ho allora la scelta di trovare o meno l'enumerabile finita.

SPECTRO DEGENERE

$$A|u_n^{(e)}> = a_n|u_n^{(e)}> \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$n = \dim S_n$$

$$\text{In questo caso si fa } \langle u_n^{(e)} | u_m^{(e)} \rangle = \sum_k S_{kj},$$

$$|ψ(t)> = \sum_n \sum_{k=1}^n c_n^{(e)}(t)|u_n^{(e)}>$$

Quando lo sommo, $\sum_k S_{kj}$, $P(a_n) = \sum_{k=1}^n |\langle u_n^{(e)} | ψ(t) \rangle|^2$

È probabile trovare tutto

Cosa ci aiuta l'inf. della doppia perdita: quando ho più alternativi, mi sommo le ampiezze e me prendo il modulo quadro. Se ho solo gli elettroni nello schermo, sommo i moduli quadri.

$$P(a_n) = \sum_{k=1}^n \sum_k \langle u_n^{(e)} | u_m^{(e)} \rangle \langle u_m^{(e)} | ψ(t) \rangle$$

$$\text{ovvero } P_n = \sum_k |u_n^{(e)}> \langle u_n^{(e)}| \text{ proiezione su } S_n \text{ associato all'autonale } a_n.$$

$$P(a_n) = |\langle ψ(t) | P_n | ψ(t) \rangle|$$

$$P_n^+ = P_n \text{ e } P_n^- = P_n$$

↓

$$P_n^2 = P_n P_n = P_n^+ P_n$$

$P(a_n) = |\langle ψ(t) | P_n^+ P_n | ψ(t) \rangle|$. Ma perciò $|\langle u_n(t) | = P_n | ψ(t) \rangle|$
 $\Rightarrow \|P_n | ψ(t) \rangle\|^2 = \| | ψ(t) \rangle\|^2$ invariante per trasformazioni unitarie. Quindi, anche nel caso degenero, la prob. di avere un certo valore della minima è un invariante per trasformazioni unitarie.

④ VALOR MEDIO DI UNA MISURA DI UN OSSERVABILE

$$\langle A \rangle = \sum_n a_n P(a_n) = \sum_n a_n | \langle u_n | \psi(t) \rangle |^2 =$$

$$= \sum_n a_n \langle \psi(t) | u_n \rangle \langle u_n | \psi(t) \rangle . \text{ Ma } A|u_n\rangle = a_n |u_n\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_n \langle \psi(t) | \underbrace{A|u_n\rangle}_{\in \mathcal{A}} \langle u_n | \psi(t) \rangle : \text{ ho costruito una ret di chiavi} \\ \text{per gli autovalori } |u_n\rangle \\ \sum_n |u_n\rangle \langle u_n| = \mathbb{I}$$

$$\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle \stackrel{\text{not}}{=} \langle A \rangle_{\psi} \text{ valor medio nello stato finito} \\ |\psi(t)\rangle$$

differiamo ora che valga per definizione che $\langle A \rangle = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$
Se abbia una degenerazione: $A|u_n^{(k)}\rangle = a_n |u_n^{(k)}\rangle$

$$\langle \psi(t) \rangle = \sum_n \sum_k c_n^{(k)} |u_n^{(k)}\rangle, \text{ con } \langle u_n^{(k)} | u_m^{(l)} \rangle = \delta_{nm} \delta_{kl}$$

$$\Rightarrow \sum_n \sum_k \sum_l c_n^{(k)} c_m^{(l)*} \langle u_m^{(l)} | A | u_n^{(k)} \rangle =$$

$$= \sum_{n,m} \sum_{k,l} c_n^{(k)} c_m^{(l)*} a_n \underbrace{\langle u_m^{(l)} | u_n^{(k)} \rangle}_{\delta_{mn} \delta_{kl}} = \sum_n \left[\sum_k |c_n^{(k)}|^2 a_n \right]$$

sempre su questi

Prob. di trovare en in pre
senza di degenerazione

$$P_n = \sum_k |c_n^{(k)}|^2$$

ESEMPI:

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle_{\psi} &= \langle \psi(t) | \hat{x} | \psi(t) \rangle = \int d^3x' \langle \psi(t) | \hat{x} | x' \rangle \langle x' | \psi(t) \rangle \\ &= \int d^3x' \langle \psi(t) | \hat{x} | x' \rangle \langle x' | \psi(t) \rangle = \int d^3x' x' \underbrace{\langle \psi(t) | \hat{x}' \rangle}_{\psi^*(\vec{x}', t)} \langle \hat{x}' | \psi(t) \rangle \\ &= \int d^3x' \underbrace{\hat{x}' | \psi(\vec{x}', t) |^2}_{\rho(\vec{x}', t)} \end{aligned}$$

⑤ SIMMETRIZAZIONE PRODOTTI OPERATORI NON COMMUTANTI

$$x \hat{p}_x \rightarrow \frac{\hat{x} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{x}}{2} \text{ affinché l'operatore sia hermitiano, quindi} \\ \text{osservabile.}$$

⑥ RIDUZIONE DEL PACCHETTO D'ONDA

Sufficiente di avere uno stato $|\psi(t)\rangle$

$$|\psi(t_0)\rangle \xrightarrow{t_0 \text{ misura}} \begin{cases} t_1 \\ t_0 \text{ immediatamente} \end{cases} \xrightarrow{H|\psi(t_1)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle}$$

Se una misura in t_1 : prendo un operatore \hat{A} e lo misuro. Uno
è t.c. $\hat{A}|u_n\rangle = a_n |u_n\rangle$ e se al momento della misura collasta
all'autostato corrispondente all'autovettore misurato a_n . Da qui pro-
segue l'evoluzione: si ha ora $|\psi(t_2)\rangle$ e si misura con l'hamiltonia
ma si arriva a $|\psi(t_2)\rangle \neq |\psi(t_1)\rangle$.

Quindi: $|\psi(t)\rangle \xrightarrow{A} |u_n\rangle$

Ci quindi un'interruzione dell'osservazione sulla misura.
Se l'osservatore trova l'e in un pto, rifa la misura e lo ritrova
lì, ha la certezza.

Se polarizzatore, se il fascio è polarizzato in una direzione diversa
dal suo asse, farà passare solo la componente parallela al suo
asse: $I = I_0 \cos^2 \theta$

$$\begin{array}{ccc} \text{pol. luce} & \theta & \text{ponte} \\ \uparrow & & \nearrow \\ I_0 & & I = I_0 \cos^2 \theta \end{array}$$

Se ora misut

te un altro polarizzatore,
è già stato ad adattamento lo stato con pol. parallela e la luce
fase al 100%.

Se la luce è pol. lungo x e metto un polarizzatore lungo y, la
luce non faga, perché la proiezione di z su y è zero.

Se misuro in presenza di degenerazione, $A|u_n^{(e)}\rangle = \alpha_n|u_n^{(e)}\rangle$, e

$$\beta_n|u\rangle \rightarrow |u_n\rangle = p_n|u(t)\rangle, \quad p_n = \sum_k |u_n^{(k)}\rangle \langle u_n^{(k)}|$$

Ripetendo la misura dopo dt dalla prima, mi ha lo stesso es.

OSSERVABILI COMPATIBILI

Cosa succede se faccio misure di osservabili diverse?

$$[A, B] = AB - BA$$

↑ 0
↓ ≠ 0

Sono compatibili se commutano un set di autostati comuni, quindi si commutano.

$$A|u_n\rangle = \alpha_n|u_n\rangle$$

$$B|u_n\rangle = \beta_n|u_n\rangle$$

Supponiamo di misurare A: uno collana nell'autostato corrispondente all'autoraleggiato α_n . Se misuriamo B, non abbiamo la sicurezza di ottenere un valore mantenendo B nello stesso stato, cioè non lo si fa collanare in uno stato diverso, perdendo d'inform. precedente su A. La misura di uno non distrugge l'informazione sull'altro.

Compatibili \rightarrow Compatibili

$$AB|u_n\rangle = A\beta_n|u_n\rangle = \beta_n A|u_n\rangle = \beta_n \alpha_n|u_n\rangle = BA|u_n\rangle$$

y BASE COMUNE

$$[A, B](u_n) = 0 \quad \text{ma ciò non ci autorizza a dire che commutano: dobbiamo, per farlo, cercare di agire}$$

$[A, B]$ su $|u\rangle$ generico. Ma $|u\rangle = \sum_n c_n|u_n\rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow [A, B]|u\rangle = [A, B] \sum_n c_n|u_n\rangle = \sum_n c_n [A, B]|u_n\rangle = 0$$

Commutano \rightarrow Sono compatibili

$$[A, B] = 0$$

$$a) \quad A \text{ NON DEGENER} \quad A|u_n\rangle = \alpha_n|u_n\rangle$$

$$A(B|u_n\rangle) = AB|u_n\rangle = \beta_n A|u_n\rangle = \beta_n(\alpha_n|u_n\rangle) \quad \text{Quindi lo stato}$$

$[A, B] = 0$

autostato di A

ottenuto secondo agire B su $|u_n\rangle$ è ancora autostato di A con autoraleggiato α_n . Ma dato che non

c'è degenerazione, $B|u_n\rangle$ deve coincidere con $|u_n\rangle$ a meno di una costante moltiplicativa: $B|u_n\rangle = b_n|u_n\rangle$. Ma allora B e A hanno un set di autostati autostati in comune

$$A|u_n\rangle = \alpha_n|u_n\rangle \rightarrow B|u_n\rangle = b_n|u_n\rangle \Rightarrow \text{compatibili}$$

$$b) \quad A \text{ DEGENER} \quad A|u_n^{(i)}\rangle = \alpha_n|u_n^{(i)}\rangle \quad i = 1, \dots, n$$

$$A(B|u_n^{(i)}\rangle) = AB|u_n^{(i)}\rangle = BA|u_n^{(i)}\rangle = \beta_n B|u_n^{(i)}\rangle$$

AUTOSTATO DI A

Quando α_n stati, non si può dire che solo che $B|u_n^{(i)}\rangle \in S_n(\alpha_n)$.

vedi se un vertice e S_n, così può succedere come come più più

Se i com si sviluppano nulla box di S_n : $B|u_n^{(i)}\rangle = \sum_{k=1}^n c_k|u_n^{(k)}\rangle$.

? $\sum_{i=1}^n d_i|u_n^{(i)}\rangle$ / sia un autostato di B? Solo così infatti c'è compatibilità, perché

$$B \sum_{i=1}^n d_i|u_n^{(i)}\rangle = b_n \sum_{i=1}^n d_i|u_n^{(i)}\rangle$$

trovo che

sono anche autostati di B

$$\sum_{i=1}^n d_i(B|u_n^{(i)}\rangle) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_i c_{ik}|u_n^{(k)}\rangle$$

ho cambiato nome: $i=k$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_i c_{ik}|u_n^{(k)}\rangle = b_n \left(\sum_{k=1}^n d_k|u_n^{(k)}\rangle \right), \quad \text{Quando proceduto all'onto-}$$

monomorf. di G. Schmidt (ho le S), hanno detto:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n (d_i c_{ik} - b_n d_k) \right\} |u_n^{(k)}\rangle = 0 \quad \text{con } |u_n^{(k)}\rangle \text{ ontomorm}$$

$$\Rightarrow \text{dim. ind} \Rightarrow \sum_{i=1}^n (d_i c_{ik} - b_n d_k) = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

Si hanno quindi n eqq. con le incognite d_k . Si può

$$\text{terremo: } \sum_{i=1}^{n_a} (d_i c_{ik} - b_n d_i \delta_{ik}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n_a} d_i (c_{ik} - b_n \delta_{ik})$$

n_a egg. com n_a incognite.

Chiediamo che il det. dei coefficienti sia nullo.

$$\det (c_{ik} - b_n \delta_{ik}) = 0 \Rightarrow \text{sol. non banali}$$

Qg. di grado n_a che può avere n_a sol. distinte o meno.

• n_a sol. DISTINTE $b_n^{(k)}$ $k=1, \dots, n_a$ componendo ho n_a set. perché vado da 1 a n_a

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n_a} d_i^{(k)} |U_n^{(i)}\rangle = |V_n^{(k)}\rangle \text{ con } B|V_n^{(k)}\rangle = b_n^{(k)} |V_n^{(k)}\rangle$$

è come se mi fossi posto sulla base in cui è stato comune

B è diagonale, ed è composta da a_1, a_2, a_3

$n=1, 2, 3$

$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}$

\dots

$a_1^{(n_a)}, a_2^{(n_a)}, a_3^{(n_a)}$

c'è un set di n_a coefficienti autorazionali

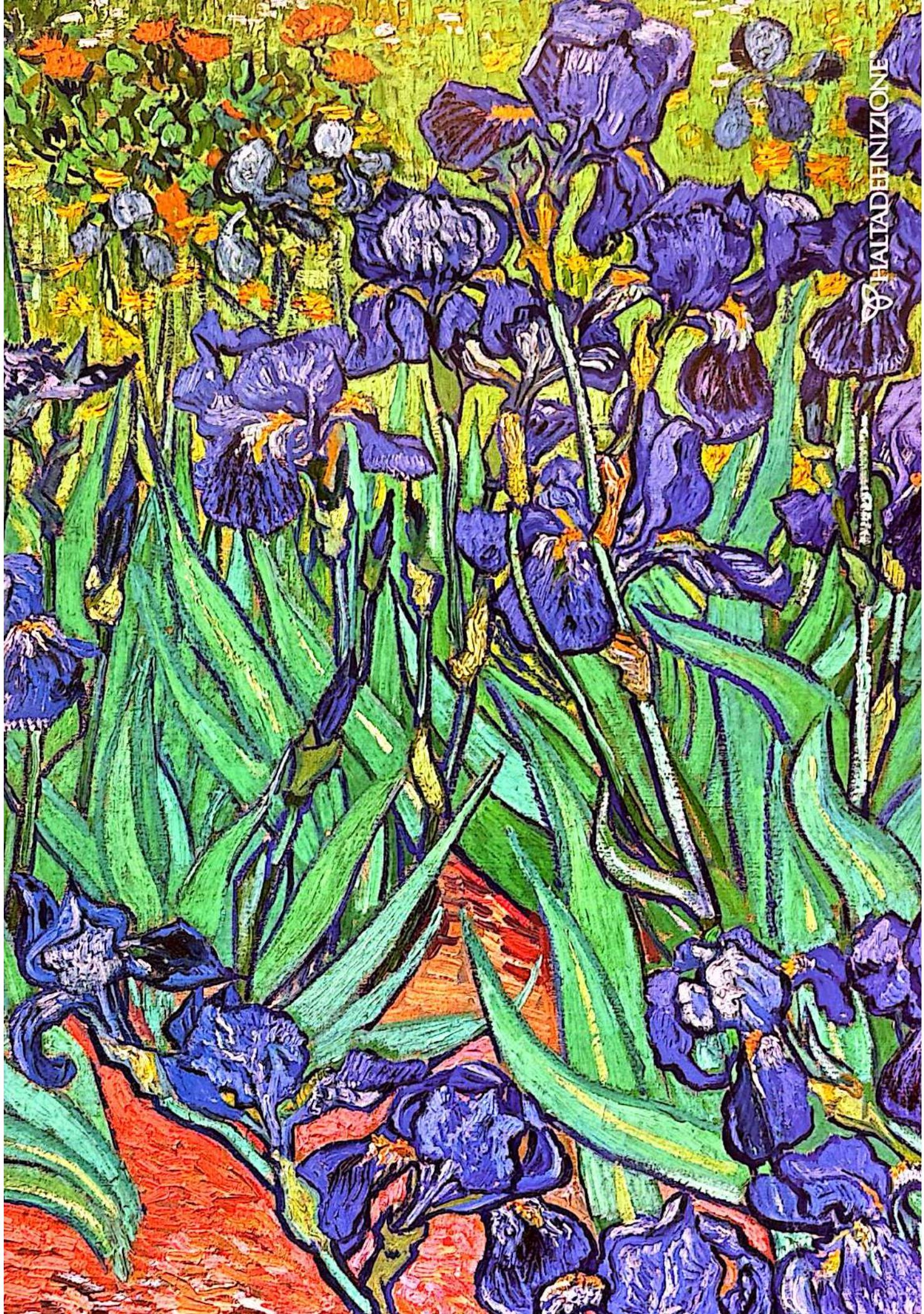
Ho dimostrato quindi la compatibilità. Ciò dall'ipotesi di commutazione. Se le soluz. non fossero distinte, non ci sarebbe lo stato distinto b ($a_n, b_n^{(k)}$). C'è un avanzo di degenerazione. Si introduce c che commuta con A e con B , per avere corrispondenza 1:1 tra stati osservabili. Ciò è importante per avere un sistema completo di stati osservabili.

DIAGONALIZZO G IN

n_a sol. dist.

Se no prendo una quadra tino amena degenera e prosegua, etc.





A RIRORE, SAREBBE, DICEVO

$$[L_z, V] \psi$$

$$\frac{L_z V \psi - V L_z \psi}{\text{ / }} *$$

$$-ik \left(x \frac{\partial}{\partial y} (V \psi) - y \frac{\partial}{\partial x} (V \psi) \right) =$$



$$= (-ik) \left(x \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \psi + \left(x V \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - y \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \psi - \left(y V \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right)$$

* $Vx \frac{\partial \psi}{\partial y} - Vy \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ma c'è il segno -
del commutatore

$$[L_z, V] = -ik \left[x \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right]$$

LOBIDIUR
nebivololo/drochlorotiazide

Cagliari 20 Novembre 2024

Dolando Patti

Diagonalizziamo B in S_n sottoinsieme degli autostati relativi ad uno stesso autorelatore, quindi:

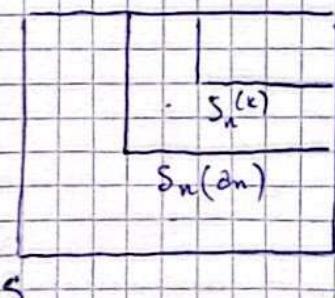
$$A|u_n^{(i)}\rangle = a_n |u_n^{(i)}\rangle \quad i=1, \dots, n$$

$$\text{se } [A, B] = 0 \Rightarrow B|u_n^{(i)}\rangle = \sum_{k=1}^n c_{ik} |u_n^{(k)}\rangle$$

$$|v_n^{(k)}\rangle = \sum_{i=1}^{n_k} d_i |u_n^{(i)}\rangle \quad |B|v_n^{(k)}\rangle = b_n^{(k)} |v_n^{(k)}\rangle \text{ diagonalizzando.}$$

$k = 1, \dots, n$ se che dà soluz. distinte
sull'equazione agli autorelatori $\Rightarrow \exists ! |v_n^{(k)}\rangle \mid A|v_n^{(k)}\rangle = a_n |v_n^{(k)}\rangle$
e $B|v_n^{(k)}\rangle = b_n^{(k)} |v_n^{(k)}\rangle$.

Se può $b_n^{(k)}$ è con $k = 1, \dots, n$ con $n < n$ distinti, la
degenerazione non è rimasta completamente. Si sceglie allora
 $c \mid [A, c] = 0 = [B, c]$ in $S_n^{(k)}$.



Se cioè
diagonalizzato
e non trova
sol. dist.
dell'eq.
agli stati,
aggiungo α

Questo ragionamento si può estendere
finché non si arriva un set di autorelatori
con cui corrisponde un solo stato.

Similmente, per preparare uno stato
si fa una serie di misure per ottenere
un set di numeri quantici.

Se ci sono corrispondenze 1:1, gli operatori A, B, C, \dots definiscono un ICOC, insieme completo di osservabili compatibili.

$$A \rightarrow a_n$$

$$B \rightarrow b_n^{(k)}$$

$$C \rightarrow c_n^{(k)(j)}$$

...

• Compito, perciò, è minimizzare contemporaneamente le assicurabilità e le spese legate ad A, B, C, ... - le autorizzazioni che corrispondono a un unico stato, autorizzato da tutti gli operatori considerati;

sono forse set di autori, se poi lo siamo!
 Sicurezza: compatibilità garantisce che, siccome c'è la stessa base,
 $|u_n| \xrightarrow{\text{collage}} |u_n| \xrightarrow{\text{cattura nel rete o sulla stessa base}} |u_n|$
 A B
 ↓
 $a_n \xrightarrow{\beta_n}$, senza distruggere l'informazione

Are most men conservative?

ANALOGIA OTTICA: SULLA RIDURIONE DELLO STATO
potenziato che si propaghi.

Ebbiamo \vec{e} lungo l'axe z. Mettiamo un polarizzatore.

$$\vec{E} = E_0 \hat{e}_x e^{i(kz - \omega t)}$$

$$L = |E_0|^2$$

$$I' = |E'_0|^2 = I_0 \cos^2 \theta$$

$$\hat{e}_p \cdot \hat{x} = \cos \vartheta$$

15

più clamorosamente. Se abbiano dei fotoni? Ci sarà una probabilità che farsi e non farsi trasformare che va come così.

\hat{A}_x ha solo due possibili stati: se $\hat{e}_p = \hat{x}$, l'onda puro; se $\hat{e}_p \perp \hat{x}$, mem faisa. Quindi ci sono due other autostati possibili $\Rightarrow \hat{A}_x \hat{e}_x = +1 \hat{e}_x$, $\hat{A}_x \hat{e}_y = 0 \hat{e}_y$, unici stati realizzabili, detti stati proprio o autostati, analoghi di $|n\rangle$.

Se l'onda incidente è t.c. $\hat{e}_p = \hat{e}_x$, era passo perché coincideva con l'autostato con autov. 1, e $P=1$.

Se $\hat{p} = \hat{y}$ ha probabilità s di essere ammortimato.

Se sono già in un autotato, ho euterza del risultato, P = 0.

Se invece sono in uno stato generico, lo scompongo sulla base:
scrivo cioè la relazione geometrica che lega le componenti:

$$\hat{e}_p = \cos\theta \hat{e}_x + \sin\theta \hat{e}_y, \text{ da prob. che norma di } |\hat{e}_x \cdot \hat{e}_p|^2 = \cos^2\theta.$$

da prob. che non fanno $1 \hat{e}y \cdot \hat{e}r 1^2 = \sin^2 \theta$.

Ora l'onda è fatta, ed è polarizzata lungo \hat{x} . Metto un altro polarizzatore, e sono certo del formaggio. Ma col primo polarizzatore ho fatto collaudare l'onda nello stato con autovettore \hat{e}_x , e quindi se faccio la misura col secondo, se non ci sono perturbazioni, riottengo lo stesso valore.

Cosa succede se $[A, B] \neq 0$? \Rightarrow Indeterminazione di Heisenberg. Quisiamola in modo rigoroso.

$$\alpha \equiv \alpha^+ \quad \beta = \beta^+$$

$$\epsilon_{A3} = \langle \bar{2}4|18|24\rangle \quad ; \quad \epsilon_{B3} = \langle \bar{2}4|13|24\rangle$$

$$\Delta A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2. \quad \Delta A \text{ est la racine}$$

$$\Delta B^2 = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2. \quad \Delta B \text{ est la racine}$$

Dimostriamo che $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{6} |c_{[A, B]}|$.

Definiamo l'operatore $\widehat{A} = A - \langle A \rangle$ e $\widehat{B} = B - \langle B \rangle$.

$\Rightarrow \Delta A^2 = \langle \bar{A}^2 \rangle$, $\Delta B^2 = \langle \bar{B}^2 \rangle$. Dalla def di \bar{A} e \bar{B} segue

$$ab \in [\alpha, \beta] = [\bar{\alpha}, \bar{\beta}].$$

Consideriamo ora $c = \bar{a} + i\sqrt{b}$ $a \in \mathbb{R}$, $c \neq c^t$

Calcoliamo $\langle Cc^+ \rangle = \langle \psi | Cc^+ | \psi \rangle = \| c + i\psi \| ^2 \geq 0$, se non si
valore minimo di un operatore non per forza è positivo.

$\langle (\bar{A} + i\lambda \bar{B})(\bar{A} - i\lambda \bar{B}) \rangle$ perché $A \in \mathbb{R}$ e $A^+ = A$, $B^+ = B$

$$\Rightarrow \langle (\bar{A}^2 + \lambda^2 \bar{B}^2 - i\lambda \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle) \rangle = \Delta A^2 + \lambda^2 \Delta B^2 - i\lambda \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \geq 0$$

Dove avremo che $\langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle = i \langle [A, B] \rangle$, cioè dove avere un
immaginario puro. Perché $\langle Cc^+ \rangle \in \mathbb{R}$ in quanto
valore reale.

$$f(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta A^2 + \lambda^2 \Delta B^2 - i\lambda \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle$$

$$\xrightarrow{\text{minimo}} 0 = f'(\lambda) = 2\lambda \Delta B^2 - i \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle = 0$$

$$\bar{A}^+ = \bar{A}_0 = \frac{i}{2} \langle [A, B] \rangle \quad \text{Questo è il minimo.}$$

$$f(\bar{A}_0) = \text{minimo di } f = \Delta A^2 - \frac{1}{4} \frac{(\langle [A, B] \rangle)^2}{\Delta B^2} \Delta B^2 + \frac{1}{2} \frac{(\langle [A, B] \rangle)^2}{\Delta B^2} \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle$$

$$= \Delta A^2 - \frac{1}{4} \frac{(\langle [A, B] \rangle)^2}{\Delta B^2} + \frac{1}{2} \frac{(\langle [A, B] \rangle)^2}{\Delta B^2} =$$

$$= \Delta A^2 + \frac{1}{4} \frac{(\langle [A, B] \rangle)^2}{\Delta B^2} \geq 0$$

∴

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq -\frac{1}{4} (\langle [A, B] \rangle)^2$$

$$\geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

∴

$$\boxed{\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|}$$

Se ora prendiamo A e B comuni, ovvero, cui corrispondono
 \hat{A} e \hat{B} operatori, $[A, B] = ik \Rightarrow \Delta A \Delta B \geq \frac{ik}{2}$

$$\hat{A} = \hat{x} \quad \hat{B} = \hat{p}_x \quad \Delta x \Delta p_x \geq \frac{k}{2}$$

Se commutano, $\Delta A \Delta B \geq 0$ e niente avviene, come visto, finezione
assoluta.

• Ma quale è lo stato di indeterminazione minima? per cui la di-
seguaglianza è naturata?

$$\Delta A \Delta B = \frac{1}{2} |\langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle|$$

Cerchiamo quindi quando $f(\bar{A}_0) = 0 \Rightarrow \| c + i\psi \| ^2 = 0$
e non più ≥ 0

$(\bar{A} - i\bar{A}_0 \bar{B})|\psi\rangle = 0$ Una norma infatti è nulla se lo stato
è nullo.

Omettiamo i cappellotti: $A = x$, $B = p_x$, $[x, p_x] = ik$

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{k}{2}$$

Proiettiamo l'equazione sulla base delle coordinate, fissa la proiezione
sulla x vogliamo l'azione su una funzione.

$$\bar{A} = A - \langle A \rangle \rightarrow x - \langle x \rangle \quad \bar{A}_0 = (i/\bar{x}) \frac{\langle [x, p_x] \rangle}{4p_x^2} = -\frac{ik}{4p_x^2}$$

$$\bar{B} = B - \langle B \rangle \rightarrow p_x - \langle p_x \rangle = -\frac{ik}{2}$$

$$\text{d'equazione} \quad \langle x | (\bar{A} - i\bar{A}_0 \bar{B})|\psi\rangle = (\bar{A} - i\bar{A}_0 \bar{B})\psi(x) =$$

$$= \left\{ x - \langle x \rangle + \frac{ik}{\Delta p_x^2} \left[-ik \frac{\partial}{\partial x} - \langle p_x \rangle \right] \right\} \psi(x) = 0$$

$$\left(-ik \frac{\partial}{\partial x} - \langle p_x \rangle \right) \psi(x) = \frac{2i \Delta p_x^2}{k} (x - \langle x \rangle) \psi(x)$$

$$\text{Perciò} \quad \psi(x) = e^{\frac{ik}{\Delta p_x^2} \langle p_x \rangle x} \varphi(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -ik \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) = \frac{2i \Delta p_x^2}{k} (x - \langle x \rangle) \varphi(x).$$

Integriamo:

$$\psi(x) = c e^{-\frac{i}{\hbar} \langle p_2 \rangle x} \cdot \exp \left\{ - \frac{(\Delta p_2)^2 (x - \langle x \rangle)^2}{\hbar^2} \right\}$$

Otturaggio. Fine esercitazione.

$$H = \hbar \omega \left(\hat{x}^\dagger \hat{x} + \frac{1}{2} \right), \quad [\hat{x}, \hat{x}^\dagger] = I \quad N = \hat{x}^\dagger \hat{x} \text{ operatore numero}$$

$$\hat{a}|n\rangle = \hat{c}_n |n\rangle \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad |n\rangle \text{ s.t. comune di autostati per } N \text{ e per } H.$$

$$a|n\rangle = c_n |n-1\rangle \quad a^\dagger |n\rangle = d_n |n+1\rangle \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}$$

$$c_n = ? \quad d_n = ? \quad \text{Normalizzo lo stato n-esimo.}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \langle n+1 | n+1 \rangle \\ &= \langle n+1 | \frac{\partial^+}{\partial n} | n \rangle \\ &= \langle n | \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^+}{\partial n} | n \rangle = \frac{1}{|d_n|^2} \langle n | a a^\dagger | n \rangle = \\ &= \frac{1}{|d_n|^2} \langle n | a^\dagger a + 1 | n \rangle = \frac{1}{|d_n|^2} \langle n | N + 1 | n \rangle = \frac{1}{|d_n|^2} (n+n) \\ &\Rightarrow d_n = \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

$$\text{Ma allora } N|n\rangle = a^\dagger(a|n\rangle) = c_n a^\dagger |n-1\rangle = c_n d_{n-1} |n\rangle = \\ = c_n \cancel{d_{n-1}} |n\rangle$$

$$c_n d_{n-1} |n\rangle = n |n\rangle$$

$$c_n = \frac{n}{d_{n-1}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow c|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle.$$

Consideriamo $|1\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle$. In questo caso, calcoliamo:

$c_{1|1\rangle}, c_{1|2\rangle}$

Per svolgere bisogna normalizzare, e considerare i coefficienti ma si può scegliere la m.o. in modo da avere la norma

$$\frac{c_{1|1\rangle}}{c_{1|2\rangle}} = \frac{|a_0|^2 E_0 + |a_1|^2 E_1 + |a_2|^2 E_2}{|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2} = \frac{\hbar \omega}{\sqrt{2}} \left(\frac{|a_0|^2 + 3|a_1|^2 + 5|a_2|^2}{|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2} \right)$$

$$\text{Definiamo ora } \hat{x} = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2} \omega} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{X}, \quad \hat{p} = (n \omega \hbar)^{\frac{1}{2}} \hat{p}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i \hat{p}) \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i \hat{p}) \rightarrow \hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar \omega}{2} (\hat{X}^2 + \hat{p}^2).$$

$$\left[c_{1|1\rangle} \hat{X} |1\rangle \left(|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_0 |a_0|^2 + c_1 |a_1|^2 + c_2 |a_2|^2).$$

$$\cdot (a + a^\dagger)(a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_0 |a_0|^2 + c_1 |a_1|^2 + c_2 |a_2|^2) (a_0 |0\rangle + \sqrt{2} a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle)$$

I termini con $|3\rangle$ non si scrivono mancando perché nel primo fattore non ci sono.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (a_0^* a_2 + a_1^* (a_0 + \sqrt{2} a_2) + \sqrt{2} a_2^* a_1) = \dots$$

punto c)

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = ? \quad \text{Risp: } a_2 = 0$$

$$\text{Allora } c_{1|1\rangle} |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

$$\Rightarrow c_{1|\hat{X}|1\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{i-1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$\hat{X}^2 = \frac{1}{2} (a + a^\dagger)(a + a^\dagger) = \frac{1}{2} (a^2 + a^{*2} + a a^\dagger + a^\dagger a) =$$

$$= \frac{1}{2} (a^2 + a^{*2} + 2N + 1)$$

$$\langle u | \hat{x}^2 | u \rangle = \frac{1}{2} (c_{01} a_0 + c_{11} a_1^*) (2N+1) (a_0 | 0 \rangle + a_1 | 1 \rangle) = \\ = \frac{1}{2} () (a_0 | 0 \rangle + 3a_1 | 1 \rangle) \quad \text{perché } N/n = n/n \\ \Rightarrow (2N+1)/n = (2n+1)/n$$

↓

$$\frac{1}{2} (|a_0|^2 + 3|a_1|^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) = 1 \Rightarrow \langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{k}{m\omega} \cdot 1 = \\ = \frac{k}{m\omega} = \Delta x^2$$

$$\hat{P} = \frac{1}{i\hbar} (a - a^*) \Rightarrow \langle \hat{P} \rangle = \frac{1}{i\hbar} (a_0^* (c_{01} + c_{11} a_1^*) (a - a^*) \cdot$$

$$(a_0 | 0 \rangle + a_1 | 1 \rangle) = \frac{1}{i\hbar} (a_0^* (c_{01} + a_1^* c_{11}) (a_1 | 0 \rangle - a_0 | 1 \rangle - \sqrt{2} a_1 | 1 \rangle) = \\ = \frac{1}{i\hbar} (a_0^* a_1 - a_1^* a_0) = \frac{1}{i\hbar} \left(\frac{i}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{i}{2\hbar} = \frac{1}{\hbar}$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \omega} - \hat{X}^2 = \hat{P}^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \omega} \langle \hat{H} \rangle = -\langle \hat{X}^2 \rangle = \langle \hat{P}^2 \rangle = \\ = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{\hbar} \omega \right) - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\langle \hat{P}^2 \rangle = \frac{mk\omega}{2}$$

$$\langle \hat{P} \rangle = \frac{\sqrt{mk\omega}}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta x^2 \Delta \hat{P}^2 = \frac{k}{m\omega} \frac{mk\omega}{2} = \frac{k^2}{2} \geq \frac{k^2}{4}$$

Avendo fatto i conti in generale, faremo aggiungere la dipendenza temporale.

$$\langle u | \hat{x} | u \rangle = \left(\frac{k}{m\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (a_0^* a_1 + a_1^* a_0)$$

$$a_0(t) = a_0(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} \quad a_1(t) = a_1(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t}$$

$$a_0(0) = \frac{i}{\sqrt{2}} \quad a_1(0) = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\langle u | \hat{x} | u \rangle = \left(\frac{k}{m\omega} \right)^{\frac{1}{2}} m \left(\frac{E_1 - E_0}{\hbar} t \right)$$

Calcoliamo i seguenti commutatori:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x^n], \quad [\hat{x}^m, \hat{p}_x^n]$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x^n] = \hat{p}_x [\hat{x}, \hat{p}_x^{n-1}] + [\hat{x}, \hat{p}_x] \hat{p}_x^{n-1} = \hat{p}_x [\hat{x}, \hat{p}_x^{n-1}] + ik \hat{p}_x^{n-1} = \\ = \hat{p}_x [i\hbar [\hat{x}, \hat{p}_x^{n-1}] + [\hat{x}, \hat{p}_x] \hat{p}_x^{n-1}] + ik \hat{p}_x^{n-1} = \\ = \hat{p}_x [\hat{p}_x [\hat{x}, \hat{p}_x^{n-2}] + ik \hat{p}_x^{n-2}] + ik \hat{p}_x^{n-2} = \\ \dots \Rightarrow \hat{p}_x^m [\hat{x}, \hat{p}_x^{n-m}] + mik \hat{p}_x^{n-s}$$

$$m = n-s \Rightarrow \hat{p}_x^{n-s} [\hat{x}, \hat{p}_x] + (n-s) ik \hat{p}_x^{n-s} = nik \hat{p}_x^{n-s}$$

$$[\hat{x}^m, \hat{p}_x^n] = imk \hat{x}^{m-s}$$

$$\text{Ora: } [\hat{f}(\hat{x}), \hat{p}] = ? \quad f(\hat{x}) = \sum_n f_n \hat{x}^n$$

$$[\hat{f}(\hat{x}), \hat{p}] = \sum_n f_n [\hat{x}^n, \hat{p}] = \sum_n f_n ik n \hat{x}^{n-1} = ik \frac{d}{dx} f(\hat{x})$$

Apprendendo agire su $\psi(x)$, risulta:

$$[\hat{f}(\hat{x}), \hat{p}] \psi(\hat{x}) = f(\hat{x}) \left(-ik \frac{d}{dx} \psi \right) - \left(-ik \frac{d}{dx} f \psi \right) = ik f' \psi$$

Similmente,

$$[g(\hat{p}), \hat{x}], \text{ con } \hat{x} = ik \frac{d}{dp}$$

$$[g(\hat{p}), \hat{x}] \psi(p) = g(p) \left(ik \frac{d\psi}{dp} \right) - ik \frac{d}{dp} (g \psi) = -ik g' \psi - ik \frac{d}{dp} g \psi.$$

$$\text{Ma allora } [\hat{x}, g(\hat{p})] = ik \frac{dg}{dp} \psi.$$

Era. Vale che $[\hat{x}, \hat{p}_x^n] \psi$, per $g(p) = \sum_n g_n \hat{p}_x^n$, in reale:

$$[x, \hat{p}_x^n] = \sum_n g_n [\hat{x}, \hat{p}_x^n] = ik \sum_n g_n n \hat{p}^{n-1} = ik \frac{\partial g}{\partial p_x}.$$

(6)
(7)

Cagliari 21 Novembre 2024

Eduardo Gattu

al int. elamio

l'analogo dell'integrabilità in m.q. è proprio il sistema completo, a
fatto che sconta H. Ma in m.q. si può conoscere solo l'int. la pro-
babilità.

Uniamo ora i postulati:

• Momento angolare

$$L_x = y p_z - z p_y \quad L_y = z p_x - x p_z \quad L_z = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L_y = z p_x - x p_z$$

$$L_z = x p_y - y p_x$$

Unisci Rappresentiamo con gli operatori. Consideriamo $[x_i, p_j] = ik S_{ij}$
Gli stati finiti hanno una norma semi-definita positiva

Dal commutatore fondam. calcoliamo i commutatori tra le com-
ponenti. Si affittano, dal fatto che è generale le rotazioni in
m.q. classica, che $[]$ ma $\neq 0$.

$$[L_x, L_y] = [y p_z - z p_y, z p_x - x p_z] = [y p_z, z p_x] + [z p_y, x p_z] = \\ = y [p_z, z] p_x + z [z, p_x] p_y = ik (x p_y - y p_x) = ik L_z \neq 0$$

$$-ik \quad ik$$

Con delle permutazioni cicliche trovi gli altri valori. Allora in
generale scrivo:

$$[L_i, L_j] = ik E_{ij} L_k$$

Quello ciò viene dal commutatore fondo-
mentale.

Algebra del momento angolare

Siccome il commutatore è $\neq 0$, non potremmo mai misurare due
momenti contemporaneamente

Potremmo però scegliere di definire L^2 e calcolare $[L_x, L^2]$. In
m. classica, da { } ^{in questo caso} da la variazione del modulo per una ro-
tazione, ma il modulo di un vettore non cambia...

$$[L_x, L^2] = [L_x, L_x^2 + L_y^2 + L_z^2] = [L_x, L_x^2] + [L_x, L_y^2] = \\ L_y L_y \quad L_x L_x$$

$$= L_y [L_x, L_y] + [L_x, L_y] L_y + L_x [L_x, L_x] + [L_x, L_x] L_x = \\ = ik \{ i g L_x + L_x L_y - L_x L_y - L_y L_x \} = 0$$

Se quindi è vero che non troviamo una base comune per le com-
ponenti, lo si può fare per una componente e per L^2 . Per conve-
nzione si considera $[L_x, L^2]$. Cerchiamo una base comune per
 L_x e L^2 .

$$L^2 | l, m \rangle = \hbar^2 l(l+1) | l, m \rangle$$

$L_x | l, m \rangle = \hbar m | l, m \rangle$, $l, m \in \mathbb{R}$
autovettori di operatori hermitiani. $\begin{cases} l(l+1) \text{ autov. di } L^2 \\ m \text{ autov. di } L_x \end{cases}$

$$\text{Definiamo } L_{\pm} = L_x \pm i L_y \quad \text{e.c. } L_+^* = L_-$$

Vale che $\langle l, m | l', m' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ ~~ma non per forza~~
non per forza di Kronecker, ma
per anche di Dirac

$$[L_+, L_-] = [L_x + iL_y, L_x - iL_y] \stackrel{?}{=} \hbar^2 L_z$$

$$[L_x, L_\pm] = [L_x, L_x \pm iL_y] = \pm \hbar L_\pm$$

$$[L^2, L_\pm] = [L_x^2, L_x \pm iL_y] = 0$$

$$L_+ L_- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) = L_x^2 + L_y^2 - i[L_x, L_y] = L_x^2 + L_y^2 + \hbar^2 L_z$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ L_x^2 + L_y^2 = L_+ L_- + \hbar^2 L_z \end{matrix}$$

$$L_- L_+ = L_x^2 + L_y^2 - \hbar^2 L_z \Rightarrow L_x^2 + L_y^2 = L_- L_+ + \hbar^2 L_z$$

Perseguiamo L^2 :

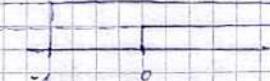
$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \left\{ \begin{array}{l} L_+ L_- + \hbar^2 L_z \\ L_- L_+ + \hbar^2 L_z \end{array} \right.$$

Cerchiamo gli autovalori:

$$\begin{aligned} <L, m| L^2 | L, m> &= \hbar^2 l(l+1) <L, m| L, m> = \hbar^2 l(l+1) = \\ &= <L, m| L^2 | L, m> = <L, m| L_+ L_- + L_- L_+ | L, m> = \|L^2 | L, m>\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l(l+1) \geq 0$$

$$l \geq 0 \quad l \leq -1$$



Ma fanno neanche solo $l \geq 0$, perché per $l \leq -1$ basterebbe definire $-l = l+1 \rightarrow l \geq 0$, quindi sotto $l \geq 0$ prende inteso le condizioni:

Cosa succede se afflico L_\pm ?

$$\begin{aligned} L^2(L_\pm | L, m>) &= L_\pm L^2 | L, m> = L_\pm \hbar^2 l(l+1) | L, m> = \\ &= \hbar^2 l(l+1) L_\pm | L, m> \end{aligned}$$

Se quindi faccio agire L^2 o L_\pm^2 , ottengo mi muovo molto

stesso autovalore. Ho gli stessi autovalori di L^2 .

$$L_\pm(L_\pm | L, m>) = (L_\pm L_\pm \pm \hbar^2 L_z) | L, m> = \hbar(m \pm 1) L_\pm | L, m>$$

Gli stati ottenuti secondo agire L_\pm sono ancora autovalori di L_z , ma con autovalore incrementato o decrementato di 1. Prima erano anche autovalori di L^2 con stesso autovalore.

$L_\pm | L, m>$ autovalori di L_z con autoval. $\hbar(m \pm 1)$. Quindi in questo caso sono definiti L_\pm è un op. di innalz.

L_- abbass.

$$\text{Quindi } L_+ | L, m> = c_+(l, m) | L, m+1> \quad (1)$$

$$L_- | L, m> = c_-(l, m) | L, m-1> \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ dividiamo da } 4 &< L, m | L_+^2 | L, m> = < L, m | L_- L_+ | L, m> = \\ &= |c_+|^2. \text{ Ma } L_- L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar^2 L_z = (\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m) - \\ &- \underbrace{\cdot < L, m | L, m>}_{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ 1 \end{matrix} \quad |c_+|^2 = \hbar^2 [l(l+1) - m(m+1)] \rightarrow$$

~~caso~~

$$1 \rightarrow c_+ = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \text{ se } l \geq m \text{ reale}$$

$$(2) |c_-|^2 = \hbar^2 [l(l+1) - m(m-1)]$$

$$1c_+^2 \geq 0, 1c_-^2 \geq 0 \text{ ci danno condizioni su } l, m.$$

$$\begin{cases} l(l+1) > m(m+1) \\ l(l+1) > m(m-1) \end{cases}$$

simultaneamente. Per $l \geq 0$ si ha

$$\begin{cases} m \in [-l, l] \\ m \in [-l+1, l-1] \end{cases} \Rightarrow m \in [-l, l].$$

Quindi, anche, $|m| \leq l$. m_m non può essere $< -l$ o $> l$
se $m_l < 0$. Ma questo non è vero.

Ora ~~è~~ un limite superiore e uno inferiore. Se prendiamo ~~minimo~~ il valore minimo di m , se faccio agire L_z ho zero. Se prendo il valore massimo di m , con $l+$ non faccio seguire fatto salire più m , L_z ha ~~massimo~~ zero.

$$L_z | l, m_m \rangle = 0$$

$$L_z | l, m_m \rangle = 0$$

Cioè ~~per~~ perché $|m| \leq l$, nel senso che ho m in un range limitato.
Questo importa.

$$\text{e. d. l. m}_m \quad L_z (L_z | l, m_m \rangle) = 0 \Rightarrow [L_z (l+1), m_m] | l, m_m \rangle = 0$$

Questa quantità deve essere zero

$$L_z (l+1, m_m) = 0$$

$$l(l+1) - m_m(m_{m+1}) = 0$$

↓

$$l(l+1) = m_m m_{m+1} (m_{m+1} - 1)$$

$$l(l+1) = m_m (m_{m+1} + 1) \Rightarrow m_m (m_{m+1} + 1) = m_m (m_{m+1} - 1)$$

↓

$$m_m = -m_{m+1}$$

$$m_m = m_{m+1} - 1$$

Se ho una reale, salgo con passi interi, e

la diff. tra valore massimo e minimo vale $N \geq 0$, $N \in \mathbb{Z}$.

Unendo ora $m_m = -m_{m+1}$ si ha $2m_m \geq 0$, quindi il valore massimo è non negativo.

Ricordando ad esempio $l(l+1) = m_m(m_{m+1} + 1)$ si trova che $m_m = l$. Se prima $|m| \leq l$, ora mi ricopre che il minore raggiunto. Inoltre, $m_m = -l$.

Ricaviamo da qui informazioni sugli autovalori:

$$|l, -l \rangle, |l, -l+1 \rangle, \dots, |l, l \rangle$$

$2l = N$ salti + $2l+1$ stati

ma allora, per N dispari fuori l è un semi-interv

N passi interio

Le proprietà si estendono anche per m .

Affidando quindi l'algebra degli operatori L , troviamo che esso è quantizzato, e che il suo autovalore può avere intero o numero intero, ciò stesso per m .

Cosa succede in rapporto delle coordinate? ~~E~~ ~~considerando~~ il momento angolare orbitale, che realizza solo il cerchio l'intero. Ma c'è un altro momento angolare, intrinseco, detto di spin, che non si realizza nello spazio delle coordinate, ma ha le stesse proprietà del momento angolare orbitale.

NEGLIO SPAZIO DELLE COORDINATE

$$L_z = x p_y - y p_x \quad \text{dove } C^2 | l, m \rangle$$

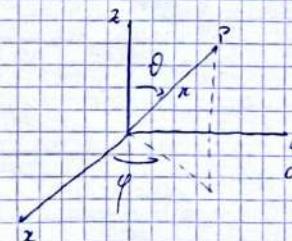
Uniamo le coord polari sferiche:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\theta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$



$$\begin{aligned} L_z &= x \left(-ik \frac{\partial}{\partial y} \right) - y \left(-ik \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= -ik \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

non ci ragione di minimizzare, perché non hanno prodotti di razionali e coniugate.

$$L_x = -ik \left(-\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - i\text{ctg}\vartheta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

$$L_y = -ik \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - i\text{ctg}\vartheta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -k^2 \left(\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right)$$

$$L_z = k e^{\pm i\varphi} \left(\frac{3}{2\theta} + i\text{ctg}\vartheta \frac{3}{2\varphi} \right)$$

Studieremo $\psi < \vec{r} | L^2 | l, m \rangle$. Ma nelle relazioni scritte non compare! Vogliamo allora una sfera di raggio unitario e studiamo $\begin{cases} < \theta, \varphi | L^2 | l, m \rangle = k^2 l(l+1) < \theta, \varphi | l, m \rangle \\ < \theta, \varphi | L_z | l, m \rangle = k_m < \theta, \varphi | l, m \rangle \end{cases}$

con $< \theta, \varphi | l, m \rangle = Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ armoniche sfereiche.

$$\begin{cases} L^2 Y_{l,m}(\theta, \varphi) = k^2 l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \\ L_z Y_{l,m}(\theta, \varphi) = k_m Y_{l,m}(\theta, \varphi) \end{cases}$$

Con L^2 e L_z scritte come sopra. Si hanno quindi eqq. diff.

Viene restituito lo spettro degli autovalori agli interi.

Lugliari 26 Ottobre 2024

Odoardo Ratto

In rappresentazione delle coordinate si realizza solo l'intero, m intero.
cioè

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = < \theta, \varphi | l, m \rangle \text{ armoniche sfereiche}$$

riche

$$L^2 Y_{l,m}(\theta, \varphi) = k^2 l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

$$L_z Y_{l,m}(\theta, \varphi) = k_m Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

In rapp. delle coordinate, $L_z = -ik \frac{\partial}{\partial\varphi}$

$$-ik \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{l,m}(\theta, \varphi) = k_m Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

dicevamo ci sono $\frac{3}{2}\varphi$
euchiammo $Y_{l,m}(\theta, \varphi) = T_{l,m}(\theta) \Phi_m(\varphi)$

perché dall'eq. si vede che solo m importa

$$-ik \frac{\partial}{\partial\varphi} \Phi_m(\varphi) = k_m \Phi_m(\varphi) \Rightarrow \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{ik} e^{im\varphi}$$

normalizzazione t.c.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \Phi_m^* \Phi_m = \delta_{mm}$$

per praticità.

m deve essere intero, perché $\Psi(\vec{r}) = < \vec{r}, \theta, \varphi | \Psi \rangle = R(r) Y_l(\theta, \varphi)$
ma monochroma. Ma sulla sfera unitaria, finiti θ e φ
facendo un giro di $\varphi = 2\pi$ si torna al pt. di partenza. Vogliamo che $\varphi = 0$ e $\varphi = 2\pi$ siano lo stesso pt. Più equivale a chiedere

$$\Phi_m(\varphi + 2\pi) = \Phi_m(\varphi) \Rightarrow e^{im(\varphi + 2\pi)} = e^{im\varphi}$$

$$\Rightarrow e^{im\theta} = 1 \Rightarrow m \text{ è intero.}$$

La rappresentazione di 1 orbitali met in rappresentazione delle coordinate avviene solo con m intero.

Nella trattazione operatoriale, abbiamo visto che se m è intero dunque ℓ è intero, e non ci è bisogno di risolvere l'altra equaz. con le ℓ . Si realizza quindi solo una parte dello spettro: quella con ℓ, m interi.

Si può

Chiedere necessariamente m intero per avere la monodromia ~~es~~ equ., oppure dire che solo per m intero L_z è hermitiano. Nel primo caso potrete cominciare da me, minimizzando il $\| \cdot \|$, e mi faranno del segno (monodromia).

$$L_z^+ = L_z \quad \& \quad \psi_1, \psi_2 \in L^2$$

$$(\psi_1, L_z \psi_2) = (L_z \psi_1, \psi_2) \quad \psi_{1,2}(\varphi)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \psi_1^*(\varphi) \left(-ik \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi_2(\varphi) = \psi_1^* \left(-ik \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi_2 \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} d\varphi \left(ik \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi_1^* \right) \psi_2 = \\ = -ik \psi_1^* \psi_2 \Big|_0^{2\pi} + (L_z \psi_1, \psi_2). \quad \text{è bene} \quad \left(-ik \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi_1 \right)^*$$

Allora che ψ_1, ψ_2 sia nullo. Ma ψ_1 e ψ_2 sono funzioni generali, e il prodotto è nullo solo se le funzioni sono periodiche. Ma se lo sono, abbiamo visto che m è intero. L_z è hermitiano \Rightarrow Onorevole.

Come determiniamo T ?

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = T_{\ell,m}(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

Sostituendo nell'eq. con L_z e risolviamo. Ma ci è un altro modo, usando gli operatori di innalzamento e abbassamento.

$Y_{\ell,0}$ è al massimo valore, se $m \in [-\ell, \ell]$. Quindi $L_z Y_{\ell,0} = 0$

$$L_z Y_{\ell,0} = 0 \quad (\text{ovvero}, L_z Y_{-\ell,0} = 0)$$

$$L_z = \hbar e^{i\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$$

$$L_z Y_{\ell,0} = L_z \left[T_{\ell,0}(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \right] = 0$$

$$= \hbar e^{i\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} - \ell \cot \theta \right] T_{\ell,0}(\theta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} - \ell \cot \theta \right\} T_{\ell,0}(\theta) = 0 \Rightarrow T_{\ell,0}(\theta) = c_\ell (\sin \theta)^\ell$$

PER AVERE UNA NORMALIZZAZIONE

L'ortogonalità è data dalla hermiticità dell'operatore. La normalizzazione la vogliamo perché $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sia un numero come base.

$$\text{Allora} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta |T_{\ell,0}(\theta)|^2 = 1$$

$$c_\ell = \left(\frac{(2\ell+1)}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(2\ell)!}{(2\ell+1)(2\ell-1)\dots(1)} \right)^{\frac{1}{2}} (-i)^\ell$$

Lo si aggiunge a tutti posteriori. Non cambia la finea.

Ora determiniamo le altre funzioni, usiamo l'operatore di abbassamento L_- .

$$L_- Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = (L_-)^{\ell-m} \left\{ (\sin \theta)^\ell e^{im\varphi} \right\} c_{\ell-m}$$

normalizzazione

$$\int d\Omega |Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)|^2 = 1.$$

$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ FUNZ. IL
massimo
valore
 ℓ, m

Gli stati sono $\ell \pm 1$ e, i salti sono $\ell \pm 1$.

$$e^z Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = h^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$$

$$-k^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] T_{\ell,m}(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} =$$

$$= k^2 \ell(\ell+1) T_{\ell,m}(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

↓

$$-k^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] T_{\ell,m}(\theta) = k^2 \ell(\ell+1) T_{\ell,m}(\theta)$$

$$\theta \rightarrow \cos \theta \quad w = \cos \theta \in [-1, 1]$$

↓

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial w^2}$$

$$= -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial w} - w \frac{\partial}{\partial w^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial w} \right) = -\cos \theta \frac{\partial}{\partial w^2} - \sin \theta \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial w^2} =$$

$$= -w \frac{\partial}{\partial w} + (1-w^2) \frac{\partial^2}{\partial w^2}$$

$$\left\{ (1-w^2) \frac{\partial^2}{\partial w^2} - 2w \frac{\partial}{\partial w} + \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-w^2} \right\} F_{\ell,m}(w) = 0$$

AZIONE SU F

$$T_{\ell,m}(\theta) = F_{\ell,m}(w)$$

CASE $w \neq m=0$

$$\left\{ (1-w^2) \frac{\partial^2}{\partial w^2} - 2w \frac{\partial}{\partial w} + \ell(\ell+1) \right\} F_{\ell,0}(w) = 0$$

EQUAZIONE DI
LEGENDRE

$w=0$ fto regolare. Svilupperemo nulla int. in un intorno di $w=0$.

$$F_{\ell,0}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k \rightarrow c_{k+\ell} = \frac{k(k+1) \cdots (\ell(\ell+1))}{(\ell+1)(\ell+2)} c_0 \quad \text{che per co dato}$$

i coefficienti fari. Dobbiamo quindi fornire $\{c_k\}$ al che i servono, perché allora abbiamo un'eq. diff. al secondo ordine

CASO $|w|=1$ (per $m=0$)

$w \rightarrow \infty$ (studio la convergenza)

$$\frac{c_{k+\ell}}{c_\ell} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{k(k+1) \cdots (\ell(\ell+1))}{(\ell+1)(\ell+2)} \sim \frac{k}{\ell+2}$$

stesso comportamento di $\sum_n \frac{1}{n} \frac{1}{k}$ divergente.

$|w|=1$ è una singolarità regolare. Moi voglio che $\theta=0$ e $\theta=\pi$ siano raggiungibili \Rightarrow la serie va troncata \Rightarrow a un certo ordine i coefficienti si devono annullare. k è intero. E deve essere intero, quindi, se $k(k+1) - \ell(\ell+1) = 0$ e con k

serie troncata \rightarrow polinomio di ordine ℓ \rightarrow l'intero

$$P_{\ell,0}(w) = \binom{2\ell+1}{2} P_{\ell}(w) \quad (\text{grado } \ell)$$

$$\int_{-1}^1 dw P_{\ell}(w) P_{\ell'}(w) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

$$P_{\ell}(1) = 1$$

$$P_{\ell}(-w) = (-1)^{\ell} P_{\ell}(w)$$

$$P_{\ell}(w) = 2^{-\ell} (\ell!)^{-1} \frac{d^{\ell}}{dw^{\ell}} (w^2 - 1)^{\ell} \quad (\text{Rodrigues})$$

$$P_{\ell}(w, z) = \int_{-1}^1 dz P_{\ell}(wz) (z^2 - 1)^{-\frac{\ell}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_{\ell}(w) z^l \quad |z| < 1$$

i coefficienti sono i polinomi

~~Le funzioni~~ $P_l(w)$ sono un insieme completo. $|w| \leq 1$

$$\forall f(w), f(w) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(w)$$

Prendiamo le normalizzate $F_{l0}(w)$: $f(w) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l F_{l0}(w)$

$$a_l = \left(\frac{2l+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} c_l \text{ da' dal legame tra } F_{l0} \text{ e } P_l$$

$$c_l = \int_{-1}^1 dw F_{l0}(w) f(w) = \int_{-1}^1 dw \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(w) f(w)$$

$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 dw P_l(w) f(w)$: non basta quindi proiettare, ma, perciò prima non c'è la normalizzazione, e si trova $\frac{2l+1}{2}$, fattore di normalizzazione.

CASO $m \neq 0$

$$\left\{ (1-w^2) \frac{d^2}{dw^2} - 2w \frac{d}{dw} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-w^2} \right\} F_{lm}(w) = 0$$

$$P_l^{(lm)}(w) \stackrel{\text{def}}{=} (1-w^2)^{\frac{l-m}{2}} \frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} P_l(w)$$

funzione di Legrende
associata

POLINOMI A MENO
DI UN FATTORE CHE
NE CAMBIA IL CARATTERE

Risolviamo l'equazione completa. Lo si fa partendo dal caso $m=0$ e derivando m volte: derivando m volte si ottiene già l'eq. completa sopra scritta ed essa è soddisfatta da $P_l^{(lm)}$.

$P_l(w)$ è un polinomio di grado l . Se $m > l$ ottengo zero

↓

$|m| \leq l$ mi m'ho ottenuto zero.

Ottieniamo molto che $T_{lm}(\theta) = F_{lm}(w) = C_{lm} P_l^{(lm)}(w)$

Chiediamo che $\int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$

$$\text{ma } Y_{lm}(\theta, \varphi) = T_{lm}(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

$$\int d\Omega \rightarrow \int dw \int_0^{2\pi} d\varphi$$

In particolare

$$\int dw \delta T_{lm}(\theta) T_{l'm'}(\theta) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Cagliari 27 November 2024

Odeardo Gattus

$-l \leq m \leq +l$ $l \in [0, \infty)$ se non altro
mo un int. finito.

- Molte spazio delle coordinate, riordinando le sgg. agli autovalori per le ψ_i , trioniamo in intu per la periodicità, etc.

Per vincere la serie di Reggina \Rightarrow Granaio l'intero.

Proibendo l'eq. di L_{conflict} , si trova $|m| \leq L$.

Continuando analogamente, si hanno le armoniche sferiche, rappresentate dagli operatori ℓ^2 e ℓ_2 in rapporto alle coordinate

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!} \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}\ell} P_{\ell-n}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad m > 0$$

$$Y_{e,m}(g, \psi) = (-1)^m \tilde{Y}_{e,-m}^*(\psi) \quad m < 0$$

$$\text{Bragg's Law: } \int d\Omega Y_{e,m}^*(\theta, \varphi) Y_{e,m'}(\theta, \varphi) = \delta_{mm'} \quad \text{ORTOGONALITÄT}$$

Sufficiente di avere una funzione su una sfera unitaria. γ_m è una funz. o.m.

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} a_{\ell, m} Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)$$

$$a_{q,m} = \int d\Omega \, y_{e,m}^*(\theta, q) \, y_{q,m}(\theta, q)$$

$\varrho(\ell, m) = |\lambda_{\ell, m}|^{\frac{1}{2}}$ prob. che gli automorfi per $\ell^2 \times \ell$ siano proprio ℓ, m .

Se vogliamo solo i o solo m?

$$P(\ell) = \sum_{m=1}^{\ell} |a_{\ell,m}|^2 \quad \text{sommo sulle terze componenti, quelle con } m$$

$$P(m) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikm}$$

Quanto è il significato dei coefficienti.

Dixi. di chiamare

$$\left| \int f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \int d\Omega' Y_{l,m}(\theta', \varphi') f(\theta', \varphi') \right\} Y_{l,m}(\theta, \varphi) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta_1, \varphi_1) Y_{\ell,m}(\theta_2, \varphi_2) = \delta(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{chi si chiama per}$$

Voglio)

perché $f(\theta, \varphi) = f(\varphi)$, è una identità le ammetti.

$$N.B. \quad \delta(\omega_1 - \omega_2) = \delta(\cos\theta' - \cos\theta) \delta(\varphi' - \varphi) \quad \text{the selection}$$

$$\text{for } \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow f(q - q) = 0 \in [0, \pi]$$

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)$$

$$Y_{l,\ell}(\theta, \varphi) = (-1)^{\ell} \left\{ \frac{(2l+1)(2\ell)!}{4^{\ell} (l!)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} (\sin \theta)^{\ell} e^{i \ell \varphi}$$

PARITÀ DI $Y_{cm}(\theta, \varphi)$

$$\vec{A} \geq -\vec{B}$$

$$n \rightarrow n \quad \theta \rightarrow \pi - \theta \quad \varphi \rightarrow \varphi + \pi$$

$$\hat{P} Y_{e.m.}(\theta, \varphi) = Y_{e.m.}(\alpha - \theta, \varphi + \pi)$$

$$\text{Eddiammo } p_e^{1\text{mt}} (\cos(\pi - \theta)) = p_e^{1\text{mt}} (-\cos \theta) \cdot \text{rimosso dal fattore} \quad - \text{per via delle cos} \theta = \omega \in \mathbb{R}$$

$P_e^{(m)}$ ~ polinomio di grado $l-1$ delle derivate considerando $P_e^{(m)}(w)$

$$P_e^{(m)}(-\cos \theta) = (-1)^{e-m} P_e^{(m)}(\cos \theta)$$

Possediamo che $y_{e,m}(\vartheta, \varphi) \sim p_e^{(m)}(\cos \vartheta) \underbrace{f_m(\varphi)}_{\sim e^{im\varphi}}$

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \int d\Omega' Y_{l,m}^* \right. \\ \left. f(\theta', \varphi') \right\} Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

Nice come voglio verificare
l'identità, dove essere che

$$\sum_l \sum_m Y_{l,m}^*(\theta', \varphi') Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \\ = \delta(\Omega' - \Omega).$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}_m(\varphi + \pi) = (-1)^m \hat{\phi}_m(\varphi)$$

$$(-1)^{l-m} (-1)^m \xrightarrow[m>0]{} (-1)^l$$

segnatura del
cambiamento

$$= (-1)^l \text{ perché tanto } m \text{ è intero pari e } (-1)^{\text{(pari)}} = 1$$

↓

$$\hat{P} Y_{l,m}(\theta, \varphi) = (-1)^l y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

$\begin{cases} l \text{ pari} & y_{l,m} \text{ pari} \\ l \text{ dispari} & y_{l,m} \text{ dispari} \end{cases}$

Probabilità

$$ds = \left(\frac{1}{4\pi} e^{im\varphi} \right)^2$$

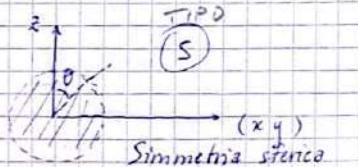
$$|Y_{l,m}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{1}{4\pi} |T_{l,m}(\theta)|^2$$

$$l=0 \rightarrow m=0 \text{ multa numeri } |m| \leq l$$

Della formula multa pagina di oggi

$$y_{00} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow |y_{00}|^2 = \frac{1}{\pi} \text{ non c'è dipendenza angolare.}$$

Uniamo i diagrammi polari



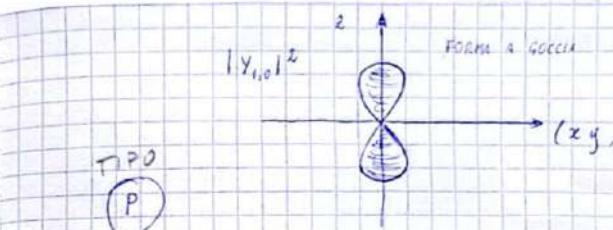
Simmetria sferica

nube sferica con rcs
nel nostro caso

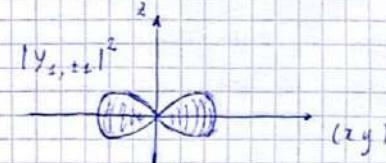
$$l=1 \rightarrow m = -1, 0, 1$$

$$m=0 \quad y_{1,0} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \cos \theta \quad |y_{1,0}|^2 = \frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta$$

$$m=\pm 1 \quad y_{1,\pm 1} = \mp \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \quad |y_{1,\pm 1}|^2 = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta$$

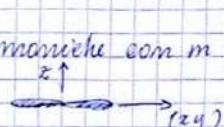


Tipo
(P)



$$y_{00} \sim (\sin \theta)^0 e^{i\varphi} \quad |y_{00}|^2 \sim (\sin \theta)^0$$

al crescere di l , le componenti armoniche con m più alto hanno un momento più seghettato.



Nella trattaz. operatoriale ci sono fonti di spettro che non si realizzano nello spazio delle coordinate. Usiamo

\vec{P} non ang. ord. l, m interi

\vec{J} momento associato definito come tali dall'algebra

$$[J_i, J_j] = ik \epsilon_{ijk} J_k$$

$$j^z |j, m\rangle = \hbar^z j(j+1) |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = k m |j, m\rangle$$

j, m interi, semi-interi

Potremmo scegliere di rappresentare questi operatori come matrici,
proiettando nella base degli autostati. $m_j \stackrel{?}{=} m$

$$\delta_{jj'} \langle j', m' | j, m \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\langle J^2 \rangle_{jm', jm} = \langle j', m' | J^2 | j, m \rangle = \hbar^2 j(j+1) \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\langle \bar{J}_z \rangle_{j,m,j,m} = \langle j,m | \bar{J}_z | j,m \rangle = \hbar m \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\langle \bar{J}_z \rangle_{j,m',j,m} \Rightarrow \bar{J}_z = \bar{J}_z \pm i \bar{J}_y; \quad \bar{J}_z | j,m \rangle = | j,m \pm i \rangle$$

$\downarrow \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$

I valori di j non cambia. Ci sarà una $\delta_{jj'}$. Le matrici sono diagonali in j . A finito j ci saranno matrici quadrate $(2j+1) \times (2j+1)$.

$$\langle j,m | \bar{J}_z | j,m \rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \langle j,m | j,m \pm i \rangle =$$

$\delta_{jj}, \delta_{m,m \pm 1}$

Dato j si determinano gli elem. di matrice nullo ^{stato} a j finito.

$j=0 \quad m=0$ matrice nulla

$$j=\frac{1}{2} \quad m=\pm \frac{1}{2} \quad \bar{J}^2 = \hbar^2 \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{J}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{J}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{J}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$j=1 \quad m=0, \pm 1 \quad \bar{J}^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{J}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{J}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{J}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

sono tutte hermitiane

Evoluzione Temporale

OPERATORE DI EVOLUZIONE TEMPORALE

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad |\psi(t_0)\rangle \text{ dato}$$

immagino, per convenienza

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad U \text{ oper. di ev. temp.}$$

$$U(t_0, t_0) = \mathbb{I}$$

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t') |\psi(t')\rangle = \underbrace{U(t, t') U(t', t_0)}_{\downarrow} |\psi(t_0)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

$$|\psi(t')\rangle$$

$U(t, t') U(t', t_0) = U(t, t_0)$ una sorta di legge di composizione (composizione interna).

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = U(t, t_0) U(t_0, t) |\psi(t)\rangle \Rightarrow U(t, t_0) U(t_0, t) = \mathbb{I}$$

$$U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0) \quad (\Rightarrow \text{v. forma un gruppo})$$

Traduciamo l'equazione di Schrödinger in forma operatoriale

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = H U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad \& \quad |\psi(t)\rangle$$

\downarrow

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H U(t, t_0) \\ U(t_0, t_0) = \mathbb{I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(t, t_0) = \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H U(t', t_0) \quad \text{eq. integrale}$$

Ma $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle$, prob. totale deve essere conservata.

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle$$

$\Rightarrow U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) = \mathbb{I} \Rightarrow U \text{ è unitario. L'ev. temp. di un sistema finito è controllata da un operatore unitario, che garantisce la cons. della prob.}$

Per un tempo infinitesimo $t = t_0 + \Delta t \Rightarrow$

$$\Rightarrow i\hbar [U(t_0 + \Delta t, t_0) - U(t_0, t_0)] = H U(t_0 + \Delta t, t_0) \Delta t \quad \Rightarrow$$

FERMENTI del
primo ordine in sp

$$\Rightarrow U(t_0 + \delta t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} H \delta t \quad \text{perché } U(t_0 + \delta t, t_0) \delta t \\ \text{i già al primo ordine} \Rightarrow \text{Dove prendere } U(t_0 + \delta t, t_0) \text{ all'ordi} \\ \text{ne uno} \Rightarrow \text{Stessa } U(t_0, t_0) = 1$$

U è unitario, H è hermitiano. L'equazione hamiltoniana genera le trasformazioni nel tempo.

H non dipende da t (sistema conservativo)

$$U(t, t_0) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} (t - t_0) H \right\} \Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} (t - t_0) H} |\psi(t_0)\rangle$$

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \Rightarrow \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = 1$$

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (t - t_0) H \right] |\psi(t_0)\rangle$$

$$\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$$

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$$

$$H^2 |\psi_n\rangle = E_n^2 |\psi_n\rangle$$

FUNZ di operatori, $e^{i\hbar t} = e^{it}$

vedi IN METODO
Alcune degli operatori come argomenti di funzioni

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} (t - t_0) H \right\} \rightarrow \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} (t - t_0) E_n \right\}$$

$$\sum_n c_n |\psi_n\rangle | \psi(t_0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} (t - t_0) E_n} |\psi_n\rangle$$

N.B.

Quindi la trattazione è
equividente

Ogni volta che c'è un operatore, consideriammo ~~che~~ ad esempio
più $\sum \frac{A^k}{k!}$ etc...

• TUTTO RAGGIATO •

$$L_z = x p_y - y p_x \quad \begin{cases} L_z \\ L_x \\ L_y \end{cases}$$

$$z = r \cos \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$x = r \cos \theta$$

$$p_r = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x},$$

$$L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} - - -$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \left(\frac{x}{z \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} =$$

$$x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = \frac{xy}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{xy}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \left(\frac{1}{z \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{z^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} +$$

$$- \frac{yz}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{xy}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \left(\frac{1}{z \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{y^2}{z^2 + \frac{y^2}{z^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \left(\frac{x^2}{z^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{Similmente per gli altri.}$$

(5)

$$\sum_{l=0}^3 \sum_{m=-3}^3 |a_{lm}|^2$$

$$\left(\underline{a_{0,-3}} + \underline{a_{0,-2}} + \underline{a_{0,-1}} + \underline{a_{00}} + \underline{a_{01}} + \underline{a_{02}} + \underline{a_{03}} \right) + \\ + \left(\underline{a_{1,-3}} + \underline{a_{1,-2}} + \underline{a_{1,-1}} + \underline{a_{10}} + \underline{a_{11}} + \underline{a_{12}} + \underline{a_{13}} \right) + \\ + \dots$$

$$P(l, m) = \sum |a_{lm}|^2$$

$$P(l) = \sum_m |a_{lm}|^2$$

P perché ne ho uno stesso l per più valori di m!

$$\text{Invece: } P(m) = \sum_l |a_{lm}|^2$$

es. 2

$$L_{\pm} |l, m\rangle = [c_{\pm} \langle l, m|] |l, m \pm 1\rangle$$

$$c_{\pm}(l, m) = \hbar [e(l \pm z) - m(m \pm z)]^{\frac{1}{2}}$$

$$L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 e(l \pm z) |l, m\rangle$$

$$L_z |l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle$$

Riuniamo $l=2$

↓

$$L^2 = \hbar^2 2 \cdot 3 |l, m\rangle = 6\hbar^2 |l, m\rangle = 6\hbar^2 |2, m\rangle$$

$$L_{\pm} = L_z \pm iL_y \quad 2l+1 = 5$$

$$\langle 2, m' | L_{\pm} | 2, m \rangle = (L_{\pm})_{mm'} = \hbar \sqrt{16 - m(m \pm 1)} \delta_{m', m \pm 1}$$

$m' = -2, -1, 0, 1, 2$ scorrere righe dall'alto verso il basso

$m = 2, 1, 0, -1, -2$ colonne da sx verso dx

$$L_+ = \begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 & +1 & +2 \\ -2 & 0 & \sqrt{16-12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{16-0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{16-(2+1)} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hbar =$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 2 & & & \\ 0 & 0 & \sqrt{16} & & \\ 0 & 0 & \sqrt{16} & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ogni rappresentazione di stato la si può rappresentare come vettore colonna le cui entrate sono i coefficienti.

$$(L_{\pm})_{mm'} = \langle 2, m' | L_{\pm} | 2, m \rangle = \hbar (6 - m(m \pm 1))^{\frac{1}{2}} \delta_{m'} \delta_{m \pm 1}$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 2 & 0 & & & \\ 0 & \sqrt{16} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_z = \frac{1}{2} (L_+ + L_-)$$

$$L_y = \frac{i}{2} (L_+ - L_-)$$

$$L_0 - L_x + iL_y = L_+$$

$$L_x - iL_y = L_-$$

$$2iL_y = L_+ - L_- \Rightarrow L_y = \frac{1}{2i} (L_+ - L_-)$$

$$L_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & & & \\ 2 & 0 & \sqrt{16} & & \\ 0 & \sqrt{16} & 0 & \sqrt{16} & \\ 0 & 0 & \sqrt{16} & 0 & \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & & & \\ 2 & 0 & -\sqrt{16} & & \\ 0 & -\sqrt{16} & 0 & -\sqrt{16} & \\ 0 & 0 & -\sqrt{16} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_z = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & -2 & & \end{pmatrix} \quad L^2 = 6\hbar^2 I$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 2\rangle + |2, 0\rangle + 2i|2, -1\rangle)$$

$$\frac{1}{\hbar^2} (4 + 1 + 4) = 1$$

$$\frac{9}{\hbar^2} = 1 \quad \hbar^2 = \frac{9}{1} \rightarrow \hbar = \frac{3}{2} \text{ eV}$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2i}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$P(m=2) = \frac{1}{3} \quad P(m=0) = \frac{1}{3} \quad P(m=-1) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Si può fare } P(m=2) = |\langle 2, 2 | \psi \rangle|^2 = \left| (2 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 2i/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{3}$$

etc

$$\langle \psi | L_z | \psi \rangle = \left(\frac{2}{3} \right) \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 2i/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \hbar \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2i}{3} \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 2i/\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \hbar \left\{ \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right\} = 0 \quad \text{per ragione di simmetria si vede che dà re es.}$$

Si può ripetere il ragionamento per $l=1$

$$L_x = \frac{k}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_y = \frac{k}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle L_y | \psi \rangle = \langle \psi | L_y | \psi \rangle = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2i}{3} \right) \frac{k}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2i/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2i}{3} \right) \begin{pmatrix} -i/3 \\ 1/3 + i/3 \\ i/3 \end{pmatrix} = \frac{k}{\sqrt{2}} \left(-\frac{i}{3} + \frac{2i}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \right) = \frac{k \cdot 2\sqrt{2}}{9}$$

Prob l.c. una minima di L_x dia come risultato k ?

Singnalizzando L_x matrice si hanno gli autostati: Gli autovettori saranno sempre $0, \pm k$.

Ricerchiamo $|\psi\rangle$ secondo qui nuovi autostati. Ovvio, esistono almeno modo.

$$\text{Qs } |1,1\rangle_z = ?$$

PENSO:

$$L_{z+} = L_x + iL_y$$

$$L_{x+} = L_y + iL_x = \frac{1}{2i} (L_{z+} - L_{z-}) + iL_x$$

nella base
degli autovalori
di L_x

$$L_{z+} |1,1\rangle_z = 0$$

$$(L_{z+} - L_{z-} - 2L_x) |1,1\rangle_z = 0$$

$$\langle 1,1 | L_{z+} - L_{z-} - 2L_x | 1,1 \rangle_z = 0$$

$$\sqrt{2} \langle 1,0 | 1,1 \rangle_z - 2 \langle 1,1 | 1,1 \rangle_z = 0 \quad \text{sono componibili}$$

$$|1,1\rangle_z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{2}\beta - 2\alpha = 0$$

Condiamo $\langle 1,0 |$

$$\sqrt{2} \langle 1,-1 | 1,1 \rangle_z - \sqrt{2} \langle 1,1 | 1,1 \rangle_z = 0$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ \gamma = \alpha \end{cases} \quad \text{NORMALIZZATE}$$

$$P(L_x = k)$$

$$|\langle 1,1 | \psi \rangle|^2 = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2i/3 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$\frac{5}{18} + \frac{\sqrt{2}}{9}$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{8\pi}} \left(\sin 2\theta \cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta \sin 2\varphi \right) f(r)$$

$\text{L}=2$

$$Y_{2,+2} \quad Y_{2,-2}$$

$$L_2 = 2k, 0, -k \quad \langle L^2 \rangle, L_x, L_y, L_z$$

$$\sin 2\theta \cos \varphi = \sin 2\theta \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) \Rightarrow -\sqrt{\frac{5}{15}} (Y_{2,+2} - Y_{2,-2})$$

$$\sin^2 \theta \sin 2\varphi = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{32\pi}{15}} (Y_{2,+2} - Y_{2,-2})$$

↓

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{15}} Y_{2,+2} + \frac{1}{\sqrt{15}} Y_{2,-2} - \frac{1}{\sqrt{16}} Y_{2,0} + \frac{1}{\sqrt{16}} Y_{2,-2} \right\} f(r)$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \\ 0 \\ 1/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{16} \end{pmatrix}$$

$$|\langle 2,2 | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{6} \quad P(L_x = 0) = 0$$

$$P(L_x = -k) = \frac{1}{3}$$

$$\langle \psi | L_z | \psi \rangle = \sum |\alpha_n|^2 \lambda_n = 0 \quad \langle \psi | L^2 | \psi \rangle = \cancel{6k^2} \quad \langle \psi | \psi \rangle = 6k^6$$

$$\langle \psi | L_x | \psi \rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} \\ 0 \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left\{ \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right\} = \frac{\hbar}{16}$$

$$\langle \psi | L_y | \psi \rangle = \langle \psi | \frac{\hbar}{2} i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} \\ 0 \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} | \psi \rangle = 0$$

Luglio 28 Novembre 2025

Giuliano Gattin

$$ik \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad |\psi(t_0)\rangle \quad U(t_0, t_0) = I$$

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

$$ik \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H U(t, t_0) \quad U^+ = U^{-1}$$

$$U(t, t_0) = I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H U(t', t_0) \quad \text{occhio all'ordine degli operatori nei prodotti.}$$

Se abbiamo una trasf. continua, studiabile nell'intorno dell'unità, possiamo studiare la forma infinitesima

$$U = I + i\varepsilon F \quad U^+ = U^{-1} \quad F^+ = F$$

μ è il generatore di U , in $U(t_0 + \delta t, t_0) = I - \frac{i}{\hbar} H \delta t$

Per $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ integriamo $\int_{t_0}^t dt' H U(t', t_0)$ e troviamo

$$\rightarrow U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t (t-t') H}$$

$$\text{con } e^{iA} = \sum_n \frac{1}{n!} (iA)^n$$

$$\checkmark \text{ I.e. } \frac{2H}{\hbar t} = 0$$

$$\text{Ora: se } H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle, \text{ con } \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{nm}$$

$$\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = I$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) H} |\psi(t_0)\rangle = \sum_n |e_n\rangle \langle e_n| e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) E_n} |\psi(t_0)\rangle$$

Uniamo $\sum_n \frac{1}{n!} (iA)^n$ e troviamo gli autovalori ²⁰ facciamo nome

$$E_n \Rightarrow \text{Per } \sum_n \langle \psi_n | \psi(t_0) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) E_n} |\psi_n\rangle$$

$$\text{caso } \langle A \rangle \psi \quad \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle A \rangle \psi = \frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle$$

se $[A, H] = 0$ la variabile associata ad A non dipende dal tempo.

$$[H, H] = 0 \quad \text{Per } \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \langle H \rangle \text{ costante}$$

aggi di conservazione e simmetrie continue

$$|\psi'\rangle = U_S |\psi\rangle \quad U_S \text{ trasf unitaria (direz. equivalenti) di simmetria.}$$

$A' = U_S A U_S^+$ || Se A è una trasf. di simmetria, l'hamiltoniana

ma è invariante: $H' = U_S H U_S^+ = H$
Questo perché U deve rispettare il sistema. La trasf. di simmetria è per ogni qualcosa che lascia invariato il sistema \Rightarrow lascia invariato H .
Per la continuità, consideriamo $U_S = I + i\varepsilon F_S$, $F_S^+ = F_S$.

Allora $\checkmark i\varepsilon [F_S, H] = 0 \Rightarrow$ Il generatore commuta con l'hamiltoniana. Di fatto, quel commutatore dice che $\underline{\underline{\delta H}} = 0$.

Avendo una trasf. di simmetria continua bc $H' = H$ e $U_S = I + i\varepsilon F_S$ e $[F_S, H] = 0$, allora $\frac{d}{dt} \langle F_S \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [F_S, H] \rangle = 0$

e il generatore è una costante del moto.

TRASF. DI SIMMETRIA $\rightarrow \exists$ COSTANTE DEL MOTO CHE GENERA QUESTA TRASFORMAZIONE.

TRASLATORIE NEL TEMPO

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}$$

CHIEDO $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, com. H genera
zione. Inoltre, $[H, H] = 0 \Rightarrow \langle H \rangle = \text{cost.}$
generatore famili.
ment.

$\psi(\vec{r})$ è la costante
del moto.

TRASLATORIE NELLO SPAZIO

(sistema isolato,
spazio omogeneo)

$$\vec{r}' = T(\vec{r}) = \vec{r} + \vec{a}$$

$\psi'(\vec{r}')$ nuovo stato nello
stesso spazio

$$|\psi'\rangle = U_T |\psi\rangle ; \quad \langle \vec{r}' | \psi' \rangle = \langle \vec{r} | U_T |\psi\rangle = U_T \langle \vec{r} | \psi \rangle =$$

$$U_T^+ \psi(\vec{r})$$

$$\psi'(\vec{r}') = U_T \psi(\vec{r}) \quad \text{TRASF. ATTIVA: SUEI STATI}$$

La transf attiva agisce sugli stati. La transf. passiva agisce sul sistema di riferimento.

$$\psi'(\vec{r}') = \psi(\vec{r}) \quad \text{Infatti } \langle \vec{r}' | \psi' \rangle = \underbrace{\langle \vec{r}' | U_T^+ U_T | \psi \rangle}_{\text{è naturale: tanto il mettono e poi}} = \langle \vec{r} | \psi \rangle$$

il sistema in uno spazio. Ritroviamo
che l'oggetto senza trasformazioni.

$$\psi'(\vec{r}') = \psi(\vec{r}) \Rightarrow \psi'(\underbrace{\vec{r} + \vec{a}}_{\vec{r}'}) = \psi(\vec{r}) \Rightarrow \psi(\vec{r}') = \psi(\vec{r} - \vec{a})$$

Trasf. infinitesima: $\vec{r}' = \vec{r} + \delta \vec{a}$. $\psi'(\vec{r}') = \psi(\vec{r} - \delta \vec{a}) \approx$

$$\approx \psi(\vec{r}) - \delta \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) + o((\delta \vec{a})^2), \text{ ma } \psi'(\vec{r}) = U_T(\delta \vec{a}) \psi(\vec{r}) \text{ dif. operati-} \\ \text{na dell'azione di } U_T.$$

Ma mi rendo che $\psi(\vec{r}) = (1 - \delta \vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \psi(\vec{r}) \Rightarrow U_T(\delta \vec{a}) = (1 - \delta \vec{a} \cdot \vec{\nabla})$

$$= \left\{ 1 - \delta \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\hbar} \\ -ik \end{pmatrix} \right\} \psi. \quad \text{Per una trasformazione finita?}$$

\vec{p} GENERATORE DELLE TRASLATORIE SPAZIALI, E $\vec{p}' = \vec{p}$

$$U(\vec{a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - i \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{\hbar n} \right)^n, \text{ con } \vec{a} = n \delta \vec{a}$$

$$\delta \vec{a}$$

Nel caso di un sistema isolato, sotto l'assunzione di spazio omoge-
neo, il hamiltoniana non cambia \Rightarrow Il generatore conservato com-
muta $[H, \vec{p}] = 0 \Rightarrow (\partial_{\vec{r}} \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = 0) \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{p} \rangle = 0$

Il valore medio dell'operatore si conserva.

SYMMETRIA \rightarrow LEGGE DI CONSERVAZIONE

Per una trasformazione covariante, il form. br. hamiltoniano non
sta bene: H è generatore dell'inv. temp. \Rightarrow Privilegio di tempo!

Allora in teo dei campi si usa la lagrangiana.

ROTATORIE

Sistema isolato + spazio rotante

$$\exists U_R / U_R^+ = U_R^{-1}$$

$$|\psi'\rangle = U_R |\psi\rangle$$

Sistema invariante $\Rightarrow H' = H$

$$\psi'(\vec{r}') = \psi(\vec{r}')$$

$$\vec{r}' = R \vec{r} \quad \text{matrice di corse 3-3}$$

$$\psi'(\vec{r}') = U_R \psi(\vec{r}')$$

$$\vec{r}' = R^{-1} \vec{r}$$

$$\psi(\vec{r}') = \psi(R^{-1}\vec{r}'') \quad ; \quad \psi'(R) = \psi(R^{-1}\vec{r}''')$$

$\vec{r}' \equiv \vec{r}''$ sta semplicemente cambiando nome alla variabile r'
per non portarmi dietro il raff. inverso delle coordinate vecchie rappresentative nel sistema rotato

Ora si attiva su ψ e passava su R .

Ora si infinitesima di $\delta\alpha$ intorno all'angolo.

$U_z(\delta\alpha)$

$$x' = \cos\delta\alpha x - \sin\delta\alpha y \approx x - \delta\alpha y$$

$$y' = \sin\delta\alpha x + \cos\delta\alpha y \approx \delta\alpha x + y$$

$$\delta x = x' - x = -\delta\alpha y \quad ; \quad \delta y = y' - y = \delta\alpha x \quad ; \quad \delta z = 0$$

$$R^{-1} : \delta\alpha \rightarrow -\delta\alpha$$

perché faccio $\delta x \rightarrow -\delta\alpha$

$$\psi(\vec{r}') = U_z(\delta\alpha) \psi(\vec{r}'') = \psi(R^{-1}\vec{r}'') = \psi(x + \delta\alpha y, y - \delta\alpha x, z) \approx$$

$$\approx \psi(x, y, z) + y \delta\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} - \delta\alpha x \frac{\partial \psi}{\partial y} + \dots$$

$$= \psi(x, y, z) + \underbrace{\delta\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}_{\begin{matrix} \text{prodotto} \\ \text{scalar} \end{matrix}} \underbrace{\left(I - \delta\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right)}_{\begin{matrix} \text{I} \\ L_2 \\ -ik \end{matrix}} \psi(\vec{r}'')$$

$$\Rightarrow U_z(\delta\alpha) = I - \frac{i}{\hbar} \delta\alpha L_2 \Rightarrow \text{Il generatore di una rotazione attorno a } z \text{ è } L_2.$$

Consideriamo $\vec{n} = (m \cos\varphi, m \sin\varphi, \cos\theta)$

$$U_n(\delta\alpha) = I - \frac{i}{\hbar} \delta\alpha \vec{L} \cdot \vec{n}$$

Per una rotaz. finita si può ruotare più volte attorno allo stesso asse (perché non c'è commutazione!) farò però un po' fare così:

$$U_n(\delta\alpha) \overbrace{U_n(\delta\alpha)}^{\text{incognita}} = U_n(\alpha + \delta\alpha) = \left(I - \frac{i}{\hbar} \delta\alpha \vec{L} \cdot \vec{n} \right) U_n(\alpha)$$

Definendo $\delta U_n(\alpha) = U_n(\alpha + \delta\alpha) - U_n(\alpha) = \left(-\frac{i}{\hbar} \delta\alpha \vec{L} \cdot \vec{n} \right) U_n(\alpha)$ guardando la riga precedente

$$\delta U_n = \left(-\frac{i}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{n} d\alpha \right) U_n(\alpha) \Rightarrow \frac{dU_n}{U_n} = -\frac{i}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{n} d\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_n(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{n} \alpha}$$

Se $H = H \Rightarrow [\vec{L}, H] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \vec{L} \rangle = 0$. \vec{L} è una costante del moto.

Se $[H, \vec{L}] = 0 \Leftrightarrow H$ è invariante per rotazioni

Possiamo prendere un set di operatori che commutano:

H, L_2, L^2 ~~ma non~~

Prodotto diretto di spazi vettoriali

S_1, S_2 spazi vettoriali lineari.

$$\Rightarrow S_1 \otimes S_2 = S$$

Consideriamo $\{|u_i\rangle\}$ base in S_1 e $\{|v_j\rangle\}$ in S_2 .

$|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$ è la base in $S_1 \otimes S_2$

Se $\dim S_1 = N_1$ e $\dim S_2 = N_2 \Rightarrow \dim(S_1 \otimes S_2) = N_1 \times N_2$

$$|\psi\rangle \in S \quad \text{Vale che } (c_{ij} |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle) (|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle) = S_{ii} S_{jj} \cdot \text{fattore comune}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$$

Potrei scrivere $|\psi\rangle = \sum_i a_i |u_i\rangle \otimes \sum_j b_j |v_j\rangle$, stato separato in suffisso separatamente nelle due basi. Si può dire che

more compact

$C_{ij} = z_i b_j$, ma il maneggi non è gara sempre fornito

\Rightarrow Entanglement.

Com'è φ ci corrisponde: prob. di trovare un certo valore di φ in s_1 assieme a uno in s_2 . In φ c'è indipendenza.

$$3.2 \quad \vec{x} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \stackrel{\text{not}}{=} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$$

Pero definire $\hat{x}_i | x_i > = x_i | x_i >$ $i = 1, 2, 3$

s_1, s_2, s_3 sono associati a x, y, z .

Volendo continuare $\hat{x}^i | \vec{x} \rangle = x^i | \vec{x} \rangle$, si sta dicendo che
 $| \vec{x} \rangle = | x_1 \rangle \otimes | x_2 \rangle \otimes | x_3 \rangle$

$$\hat{x}_i \text{ t.c } \hat{x}_i | x_i \rangle = x_i | x_i \rangle \text{ e } \hat{x}_i | x_j \rangle = 0 | x_j \rangle \text{ per } j \neq i$$

Quinde

$$\vec{z} | z> \otimes | y> \otimes | z> = | z> \otimes | y> \otimes | z>$$

Allora $\langle \vec{x}^2 | \psi \rangle = \psi(\vec{x}^2) + \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)$. Sono n.c. se il sistema è separabile in più fattori.

a dire che si può misurare $\frac{c_{ij}}{c_{ii}}$, ad es., indipendentemente
dalle altre c_{ij} quanto si accresca per c_{ii} . Qui $|y| >=$

$$= \int d^3x \underbrace{\psi(\vec{x})}_{\equiv c_{ij}} | \vec{x} \rangle$$

Per la separabilità deve essere che H_1 e H_2 in cui ad esempio racchiengono H siano commutabili.

$$H = H_1(x_1) + H_2(x_2) + H_3(x_3) \quad S = S_1 \otimes S_2 \otimes S_3$$

$$\{H_i, H_j\} =$$

$[H_2, H_2]_{(S)} = [H_2, I]_{S_2} + [I, H_2]_{S_2}$ perché un op agisce in un altro spazio diverso dal suo ~~perché~~ come operatore identità \Rightarrow Gli operatori tra loro commutano \Rightarrow Possiamo fattorizzare.

POTENZIALE CENTRALE

Un esempio è l'oscillatore armonico isotropo in 3D.

$$V = V(r) \text{ con } r = \sqrt{|R_1 - R_2|} \stackrel{\text{not}}{=} |\vec{R}| \Rightarrow \text{Simmetria sferica}$$

$$[\vec{L}, V(\vec{r})] = 0 \quad \text{and} \quad [\vec{L}, V(\vec{r})] \psi(\vec{r}) = (\vec{L}V - V\vec{L}) \psi(\vec{r}) =$$

$$= \vec{L}^* \psi(\vec{x}) v(a) - v(a) \vec{L}^* \psi(\vec{a'}) =$$

le video
sono come
fatture, poi
bende

La dimostra che $\left(\begin{matrix} 1^2 & \frac{p^2}{2} \\ 1^2 & \frac{3m}{2} \end{matrix} \right) = 0$ ma questa è zero.

$$(L_x, L_y, L_z)$$

$$\{ \vec{t}_1 H \} \in \mathcal{C}$$

Di contro $\int_{L_2} \{ L_2, H \} = 0$, $\int_{L_2} \{ L_2, L_2 \} = 0$ e $\int_{L^2} \{ L^2, H \} = 0$ muovono per L^2 .

Si dimostra che $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = h^{-1} l^{-1} (l+b)^{-1} \delta_{1,2} \delta_{1,2}$

$$L_2 Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = \text{term } Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$$

Grazie alla commutazione, cerchiamo $\psi(\vec{r}) = R_{\ell,m}(\vec{r}) Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$
per risolvere $H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$ con $H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$, in cui

n nede che parte angolare e radiale sono separabili:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{J}^2 + V(r) \quad \text{Assumiamo } \vec{J}(r, \theta, \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} + V(r). \quad \text{Si nede che compare il momento angolare:}$$

$\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l^2}{r^2 \mu^2} \right\} + V(r)$. È ham. i separabile in una parte angolare e una radiale. Ci aspettiamo allora che le soluzioni comuni siano le ondemoniche sferiche.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2 \mu^2} \right\} + V(r) \right] R_{el,m}(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi) = E R_{el,m}(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

Ora $r > 0$ perché se $r \rightarrow 0$ dobbiamo avere come fattore r lo svolgo un momento

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2 \mu^2} + V(r) \right] R_{el}(r) = E R_{el}(r)$$

POTERÒ
IN HAM
COMPARARE: SENZATO, PERCHÉ M È LA TEORIA CONCERNENTE DI L, MA PER SIMMETRIA SPHERICA NON CI POSSONO ESSERE DIREZIONI PRIVILEGIATE

L'energia non può dipendere da m. $E = E(l)$ al più. Allora imponiamo che ci sono $2l+1$ valori, e ci quindi una degenerazione totale.

SIMMETRIA \leftrightarrow DEGENERAZIONE

Gli autovalori della energia. Le autofunzioni ~~sono~~ infatti sono $Y_{l,m}$, dunque dipendenti da m.

$$|\psi_{l,m}(r)|^2 = |R_{el}(r)|^2 |Y_{l,m}(\theta, \varphi)|^2 = |R_{el}(r)|^2 \frac{1}{4\pi} |Y_{l,m}(\theta)|^2.$$

Le amplitudini di prob., cioè che minimizzano, non dipendono da φ , e il potenziale controlla solo la parte radiale.

Consideriamo uno stato legato ($\psi \in L^2$)

$$\int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi |\psi_{l,m}(r, \theta, \varphi)|^2 = 1.$$

ma $\int_0^\infty dr r^2 |\psi_{l,m}(r, \theta)|^2 = 1$ oh già $\Rightarrow \int_0^\infty dr r^2 |\psi_{l,m}(r)|^2 = 1$, esistenza nella parte radiale per avere uno stato legato.

Quando agire l'operatore parità su $\hat{P} \psi_{l,m}(r, \theta, \varphi) = \hat{P} R_{el}(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$

$$r \rightarrow r \quad \theta \rightarrow \pi - \theta \quad \varphi \rightarrow \pi + \varphi \quad \text{per coord. sferiche}$$

$$(-1)^l \psi_{l,m}(r, \theta, \varphi).$$

$$\text{Definiamo ora } u_{el}(r) = r R_{el}(r), \quad u' = R + r R'$$

$$u'' = R' + R' + r R'' = 2R' + r R''$$

$$= r(R'' + \frac{1}{r} R')$$

$\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} u_{el}(r) + V_{eff}(r) u_{el}(r) = E u_{el}(r)$ quando $V_{eff} = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$. $V(r)$ non lo conosciamo. Ma l'altro contributo è $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$ aggiunto a $\frac{1}{r^2}$ in m.c.

to i sempre positivo e quindi centrifugo, che cresce all'aumento di l. Si chiama barriera centrifuga.

$$R_{el}(r) \rightarrow \text{FINITA} \Rightarrow u_{el}(r) \rightarrow 0$$

$r \rightarrow 0$ non osse
cioè ovunque
in un estremo state int. della prob. tot

Come è il comportamento in un intorno dell'origine?

$$u_{el}(r) \sim r \rightarrow 0$$

Studiamo $V(r) = r^p (b_0 + b_1 r + \dots)$, $b_0 \neq 0$ P2 - I
non osse
perché
perché
perché
perché

Mai V_{eff} è $V(r)$ che al prima come $\frac{1}{r}$, e poi ci altri termini ma che va come $\frac{1}{r^2}$ ed è finito. L'ultimo term.
è per l'osse
non osse
perché
perché

$r=0$ è un polo singolare regolare per $u^r(r)$,

$$U_{ee}(r) = r^3 \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \quad c_0 \neq 0 \quad \text{si indica da determinare.}$$

Sostituendo nell'equazione,

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1+k) r^{1+k-1} \quad u'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1+k)(1+k-1) r^{1+k-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ -\frac{k^2}{2\mu} c_k (1+k)(1+k-1) r^{1+k-2} + v(r) c_k r^{1+k} + c_k \frac{\ell(\ell+1)}{2\mu} r^{1+k-2} \right\} +$$

polo
depr.
polo
norm.

$- E c_k r^{1+k} \right\} = 0$ Sostituendo la potenza più bassa, $k=0$, poiché i lì che ci eritiechi.

$$k=0 \quad -\frac{k^2}{2\mu} c_0 [1(1-1) - \ell(\ell+1)] r^{1-2} + c_0 b_0 r^{1+0} - E c_0 r^1 \text{ fu}$$

mo termine della serie che controlla il comportamento nell'origine.

Più trovau s , dobbiamo risolvere l'equazione indiciale:

$$s(s-1) - \ell(\ell+1) = 0 \quad \begin{cases} s = \ell+1 \\ s = -\ell \end{cases}$$

$(s = -\ell)$ strane!

che sol. che caratterizza controllo il

comportamento null intorno di $r=0$

I $u_{ee}(r) \sim r^{\ell+1} \Rightarrow R_{ee}(r) \sim r^\ell$. La parte radiale è t.c. al crescere di r diminuisce la prob. di trovare la part. \rightarrow priso lo regime diromissivo. E ciò perché, difatti, c'è la barriera centrifuga

POTENZIALE COULOMBIANO

- ATONO IDROGENOIDI

$$V(r) = \frac{ze^2}{(4\pi\epsilon_0)r}$$

$$M_1 = M_e$$

$$M_2 = M_N$$

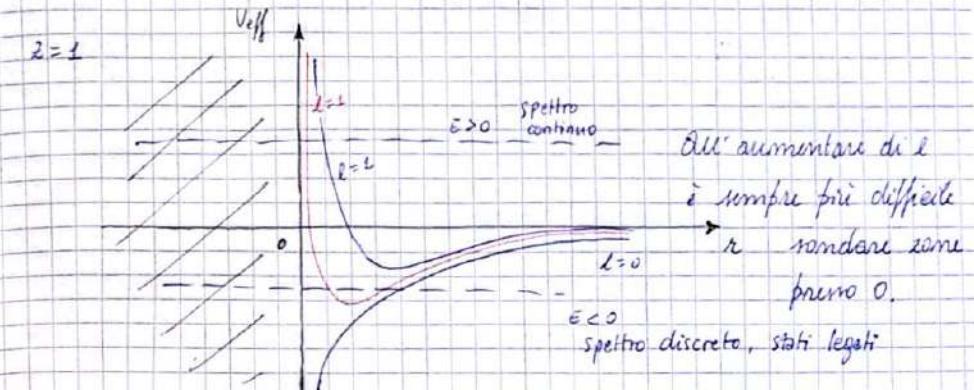
$$\mu = \frac{M_e M_N}{M_e + M_N} \sim M_e$$

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$u_{ee}(r, \theta, \varphi) = R_{ee}(r) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$$

$$u_{ee} = R R_{ee}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u_{ee}(r) + \frac{2\ell}{r} [E - V_{eff}(r)] u_{ee} = 0 \quad , \quad V_{eff} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\ell(\ell+1)}{8\mu r^2}$$



All'aumentare di ℓ
è sempre più difficile
rendere zero
 V_{eff} .

spettro discreto, stati legati

esco, giacché il segno - non ci preoccupa

$$\rho = \left(-\frac{8\mu E}{\ell(\ell+1)} \right)^{\frac{1}{2}} r, \quad \lambda = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu} \left(-\frac{r}{ze} \right)^{\frac{1}{2}} = 2\alpha \left(-\frac{1e^2}{2ze} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu c} r$$

cost. di
struttura
fini $\times \frac{1}{137}$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = -\frac{8\mu E}{2\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} \right] u_{ee}(\rho) = 0$$

controllata
da questo

$$\rho \rightarrow \infty \quad r \sim \text{eq. asymptotica} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{4} \right) u_{ee}(\rho) = 0$$

$$\Rightarrow u_{ee}(\rho) \sim \pm e^{\pm \rho/2} \rightarrow e^{-\rho/2}$$

Ricerca una soluzione $u_{ee}(\rho) = e^{-\rho/2} f(\rho)$

Eugliari 4 Dicembre 2024

Volcardo Rattner

Studio i p.h. all'origine e all'infinito

$$e^{-\frac{f}{2}p} \rightarrow e^{-\frac{f}{2}p} f^{l+s} g(p)$$

3° P.T. SINGOLARI

SE IL PROBLEMA È RESOLUBILE, VIO FROGNIUS È UN PROBLEMA. LO TRADUCO NELLA RICERCA DEGLI COEFFICIENTI → REG. DI RICORRENZA CHE STUDIO PER DISINCARICO. ANNOTA, EVENTUALMENTE.

BUT... CI SONO O G. NO. SINGOLARI. POSSO USATO IL TEOREMA DI FUCHS. ESTENDO IL COMPORTAMENTO, STUDIANDO IL POTENZIALE CENTRALE CHE HA QUEL CONDIZIONE MENTRE PROLOGUE, DOPO aver STUDIATO IL SUO COMPORTAMENTO ASINTOTICO

↓

$$\left[\frac{d^2}{dp^2} - \frac{d}{dp} - \frac{\ell(\ell+1)}{p^2} + \frac{2}{p} \right] f(p) = 0$$

Gioviamoci nisto (in realtà per n) che $u(p) \xrightarrow[p \rightarrow 0]{} p^{l+s}$

$\Rightarrow f(p) = p^{l+s} g(p) = p^{l+s} \sum_{k=0}^{\infty} c_k p^k$. Allora, avendo studiato il comportamento della nostra funzione, introduco la serie

$$f' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (l+k) p^{l+k}; \quad f'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (l+k+k) p^{l+k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[c_k (l+k+k) p^{l+k-1} - c_k (l+k+k) p^{l+k} - c_k l (l+1) p^{l+k-1} + \lambda c_k p^{l+k} \right] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ c_k [l(l+1) + k^2 + k(2l+1) - l(l+1)] p^{l+k-1} + c_k (\lambda - l - 1 - k) p^{l+k} \right\} = 0$$

Per $k=0$ la prima serie è nulla. Allora una parte da $k=l$, faccio:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ c_{k+l} [(k+l)^2 + (k+l)(2l+1)] p^k + c_k (\lambda - l - 1 - k) p^k \right\} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ c_{k+l} [(k+l)^2 + (k+l)(2l+1)] + c_k (\lambda - l - 1 - k) \right\} p^k = 0$$

$$c_{k+l} = \frac{(k+l+s-1)!}{(k+l)(k+2l+2)!} c_k$$

Cosa succede per f grande, cioè per p grande? Studio il comportamento per $p \rightarrow \infty$ di $\frac{c_{k+l}}{c_k} \sim \frac{1}{k}$. Ma $e^f = \sum_k \frac{f^k}{k!} = \sum_k \frac{p^k}{k!} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{c_{k+l}}{c_k} = \frac{(k+l)!}{k!} \sim \frac{k!}{(k+l)!} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Le due serie diventano sempre più simili.

$$f(p) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} e^f \Rightarrow u = e^{-\frac{f}{2}} f(p) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} e^{-\frac{f}{2}}$$

Ora occorre allora tranneare $f(p)$, affinché diventi un polinomio. La soluzione è una funz. ipergeometrica confluente

$$\exists n_0 \mid c_{n_0} \neq 0 \quad \text{e} \quad c_{n_0+1} = 0 \quad n_0 \in \mathbb{N}$$

λ è il parametro associato all'energia \Rightarrow imponiamo una condizione sull'energia. $\lambda = n_0 + l + s$, n_0 = numero quantico
 $\lambda = n$ intero.

$$\text{Ma } \lambda = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 k} \left(-\frac{1}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow E_n = -\frac{1}{2k^2} \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{n^2} \quad n=1,2,\dots$$

Ma quanto è quanto avremo trovato studiando l'atomo di Bohr.

$$E_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 k^2}{m_e} \sim 0.5 \text{ eV} \quad \text{Raggio di Bohr}$$

$$\Delta E = \frac{M_e}{n} E_0 \quad \Rightarrow \quad E_n = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{n^2}$$

$$E_s = -\frac{1}{2k^2} \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \xrightarrow[\text{FATTO PIÙ LEGGERO}]{\text{FATTO PIÙ LEGGERO}} E_\infty = 0$$

Si vede che l'energia non dipende da m e neanche da λ . Possiamo calcolare la degenerazione: finito ℓ su n , $\ell = 0, \dots, n-1$; $m = -\ell, \dots, +\ell$ sono $2\ell + 1$ valori.

PER QUESTI NO S'ESCE PER $n_0=0$ CARENTE

Consideriamo tutti i valori a livello n :

$$d_n = \sum_{l=0}^{n-1} (\text{valori di } m) = \dots = n^2 \quad \text{degenerazione del } l \text{ a } n.$$

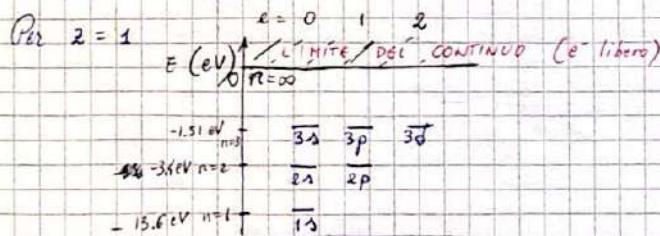
DES. IN $m \leftrightarrow$ simm. sferica

$l \leftrightarrow V \sim \frac{1}{r}$ ma l'è non può raggiungere $r=0$, bisognerà migliorare il modulo erando una renormalizzazione.

Quali i valori di l da 0 a $n-1$ hanno lo stesso valore di energia, perché n è l'ultimo. m va da - l a l e compless. la deg. è n^2 .

NOTAZIONE SPECTROSCOPICA

	l	0	1	2	3	d_n
STATE		s	p	d	f	
STATI n, l		1s		2s		3s
			2p			3p
				3d		3d



$l=0, \dots, n-1$

$n=1 \quad l=0$

$n=2 \quad l=0, 1$

alla lettera anno
cio il valore di n

• Autofunzioni •

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{l(l+1)}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{1}{4} \right] u_{ee}(p) = 0 \quad u_{ee}(p) = e^{-\frac{p}{2}} L_l(p)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{l(l+1)}{p^2} + \frac{2}{p} \right] f(p) = 0 \quad f(p) = p^{l+1} g(p)$$

$$\left[p \frac{\partial^2}{\partial p^2} + (2l+2-p) \frac{\partial}{\partial p} + (2-l-1) \right] g(p) = 0 \quad g(p) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p^k$$

ER. DI KUMMER-LAPLACE

FUNZ. FERG. CONFLUENTE

$\lambda = n + l + 1 = n$ $g(p)$ polinomio di grado n .

Definiamo polinomi di Laguerre $L_q(p) = e^p \frac{d^q}{dp^q} (p^q e^{-p})$ come dei polinomi che soddisfano $\left[p \frac{\partial^2}{\partial p^2} + (1-p) \frac{\partial}{\partial p} + q \right] L_q(p) = 0$

Differenziamo p volte e otteniamo $\left[p \frac{\partial^2}{\partial p^2} + (p-1-p) \frac{\partial}{\partial p} + (q-p) \right] L_q(p) = 0$, con $L'_q(p) = \frac{d}{dp} L_q(p)$ pol. di Laguerre associati. Ora ci corrisponde l'eq. or. ridenominata in modo: quindi le soluzioni che cerchiamo sono i polinomi di Laguerre, per $p = 2l+1$. Ricordando che $\lambda = n \Rightarrow q = n+l$

$$g(p) \sim L_{n+l}^{2l+1}(p)$$

Cerchiamo $R_{el}(r) = R_{nl}(r) = N_{nl} e^{-\frac{p}{2}} p^l L_{n+l}^{2l+1}(p)$, con $p = \frac{2z}{n\alpha_p} r = \left(-\frac{8\pi E_n}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}} r$

La normalizzazione si ha per $\int d^3r |f_{nlm}(\vec{r})|^2 = 1 \rightarrow$

$$\int d\Omega r^2 |R_{nl}(r)|^2 = 1 \quad \psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

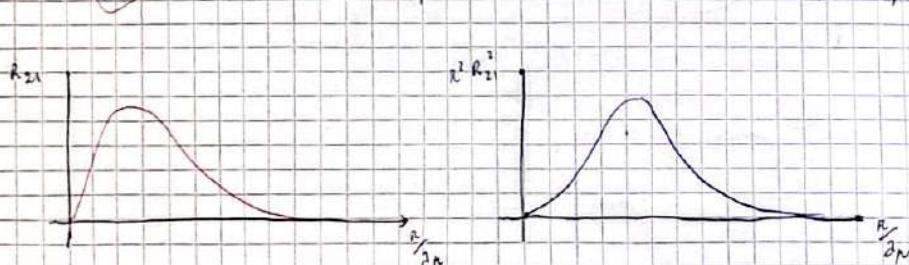
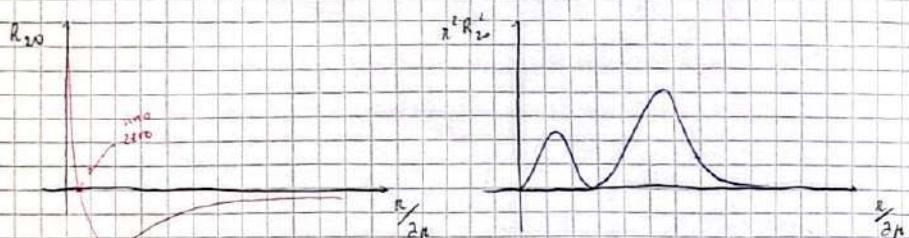
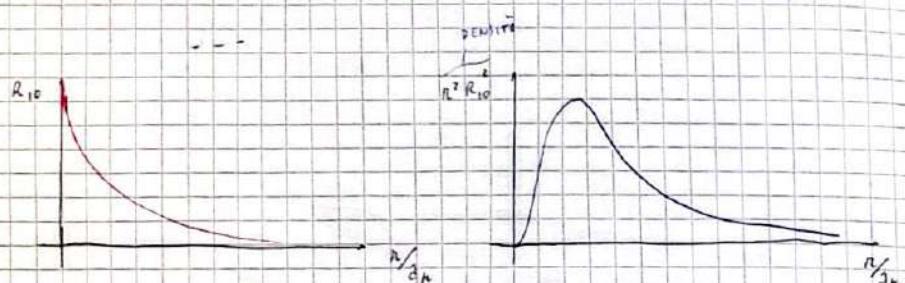
$$N_{nl} = - \left\{ \left(\frac{ze}{n^2 \pi} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2^n [(n+l)!]^3} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{Ci interrompo } R_{10}, R_{20}, R_{21}, \\ R_{30}, R_{31}, R_{32}.$$

$$R_{10} = 2 \left(\frac{ze}{n^2 \pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{ze}{2\pi n}}; \quad \text{stata}$$

$$R_{20} = 2 \left(\frac{ze}{n^2 \pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{ze}{2\pi n} \right) e^{-\frac{ze}{2\pi n}} \quad R \in \mathbb{R}$$

$$R_{21} = \frac{1}{15} \left(\frac{ze}{n^2 \pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(2z/n \right) e^{-\frac{ze}{2\pi n}}$$

DEBITO



1) Solo stati s [l=0] sono t.c. $R_{nl}(0) \neq 0$

$$R \sim r^l$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow |\psi_{n00}(0)|^2 = \frac{1}{16} |R_{n0}(0)|^2 = \frac{e^2}{\pi^2 n^3}$$

per $l=0, m=0$
finita

2) $R_{nl}(r) \sim r^l$. Per $l \neq 0 \Rightarrow R_{nl}$ piccola intorno a $r \approx 0$ e al crescere di r non si riduce di più \rightarrow BARRIERA CENTRIFUGA.

Le funzioni radiali sono $L_{n+l}^{2l+1}(r)$ polinomi di grado $n_l \Rightarrow$ Hanno n_l nodi radiali $\Rightarrow D_{nl}(r) = r^2 |R_{nl}(r)|^2$ avranno $n_l + 1$ massimi, con $n_l = n - l - 1 \Rightarrow n - l$ massimi.

$l_{\max} = n - 1 \Rightarrow$ 1 solo massimo per la densità radiale.
($n_l = 0$)

La mia forma? $R_{n_l, n-1} \sim r^{n-1} e^{-\frac{ze}{n^2 \pi n}}$. $D = r^2 |R|^2 \propto \frac{dD}{dr} = 0$
dà il massimo, che si ha per $r' = \frac{n^2 \pi n}{2} \xrightarrow[n-1]{2-1} \frac{n^2 \pi n}{2} \xrightarrow{n-1} (4\pi)$!

Quello che nella formulazione di Bohr era per mei \propto corrisponde alla probabilità massima di trovare l'elettrone la distanza dal centro dà questa probabilità.

APPRAFONDIMENTO DI PROFESSOR BURDERTI: massima

Nel modello di Bohr, la probabilità di trovare gli n nuclei nel medesimo stato fond. $l = 0, n = 0$, effettuati come nella loro orbita

Per Bohr però al livello fond $n=1$ il momento è \vec{p} , ma dovrebbe essere zero $\vec{p} \Rightarrow$ In realtà il moto com'è concentrica \rightarrow Pericolo nell'oggetto e aperto lontano. Per il punto di vista, si è maneggiata un'orbita, ma le nega tutte, tanto $l=0$ e $\langle \vec{p}_{\text{mag}} \rangle$ è al centro, giustamente. Poi



si moltiplica per qualsiasi che fa compare i massimi. \hat{n}^2 all'atto il massimo al centro e compare i massimi ad \hat{x}_p .

Oggi 4 e 5 Dicembre 2024

Carlo Rattu

$$\tilde{E}_n = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{n^2}$$

ATOMO H

$$= E_I \frac{1}{n^2}$$

$n = 1, 2, \dots$ n° quantico principale

$$\tilde{E}_1 = 13.6 \text{ eV}$$

$$\Delta E = E_n - E_{n_2} = E_I \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

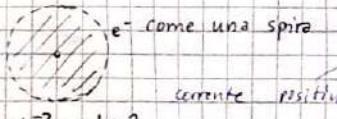
$$\nu_{ce} = \frac{\Delta E}{h} \text{ freq. di avvicinamento}$$

dipendenti solo da n .

Deg \Rightarrow Stessa è indipendente da l e da m .

Quando c'è una carica ^{in moto} ~~in moto~~, gli associamo un momento magnetico. Usciamo un modello semielastico:

H



corrente resistiva

$$d\vec{A} = dA \hat{n}$$

MOMENTO MAGNETICO

$$\vec{M} = \vec{l} d\vec{A} \quad l > 0$$

$$I = \frac{e}{T} = e \frac{v}{2\pi r}$$

$$dA = \pi r^2$$

$$|M| \stackrel{\text{def}}{=} M = e \frac{v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{e}{2m} L \quad , \quad L = mv$$

massa e-

$$\vec{M} = \frac{e}{2m} (\vec{L}) - \text{legato dal moto di } e^- = -\left(\frac{ek}{im}\right) \vec{L}$$

$$\text{MAGNETONE DI BOHR} \quad \mu_B = \frac{ek}{im} \sim 9.27 \cdot 10^{-25} \text{ JT}^{-1}$$

Secondo ora un campo magnetico: atomo di H in \vec{B} . Ci sarà una componente hamiltoniana $H_B = -\vec{\mu}_B \cdot \vec{B}$

$$\vec{B} = B \hat{z} \quad B \text{ costante} \Rightarrow H_B = -M_z B = \mu_B B \frac{L_z}{\hbar}$$

$$H = H_0 + H_B = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) \right] + \mu_B B \frac{L_z}{\hbar}$$

$$\text{risolto: } H |\psi_{nmlm}\rangle = E_n |\psi_{nmlm}\rangle$$

$$H |\psi_{nlm}(r)\rangle = E_n |\psi_{nlm}(r)\rangle$$

$$\text{ma } L^2 |\psi_{nlm}\rangle = \hbar^2 l(l+1) |\psi_{nlm}\rangle$$

$$L^2 |\psi_{nlm}\rangle = \hbar^2 m^2 |\psi_{nlm}\rangle$$

Quindi il termine aggiuntivo ha le stesse autofunzioni. Sarebbe
mo

$$H |\psi_{nlm}(r)\rangle = E_{nlm} |\psi_{nlm}(r)\rangle$$

No noto la simmetria sferica, e sono passato alla simmetria cilindrica

$$E_{nlm} = E_n^{(0)} + \mu_B B m \quad \text{dipende anche quindi dalla direzione di } \vec{B}. \\ = -\frac{e}{2m} \frac{1}{n^2} + \mu_B B m.$$

Una stessa livello ha energia diversa a causa di m_B . È una differenza anche in base a m .

$$\Rightarrow \nu = \frac{E_{n_2 m_2} - E_{n_1 m_1}}{\hbar} = \nu_{ce}^{(0)} + \frac{\mu_B B}{\hbar} (m_2 - m_1) \quad \text{Ora non ho più}$$

una sola riga, ma un multipletto di righe dipendente da quanti valori di m per un l fissa anche ($2l+1$).

Ciò è il cosiddetto effetto Zeeman normale, per distinguere da quello anomalo, in cui ritrovano altri multipletti.

Orendo \vec{B} , quanto è rotolante si ha $H_B = -\vec{M} \cdot \vec{B} \rightleftharpoons V_B$ per l'atomo. Ma l'atomo subisce anche un momento torcente $\vec{T} = \vec{M} \times \vec{B}$, con $\vec{M} = -\gamma \vec{l}$ con $\gamma = \frac{e}{2m}$

↓

$$\vec{r} = -\gamma \vec{l} \times \vec{B}$$

Ma $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} = -\gamma \vec{l} \times \vec{B} \rightarrow$ Moto di precessione. Il mome-



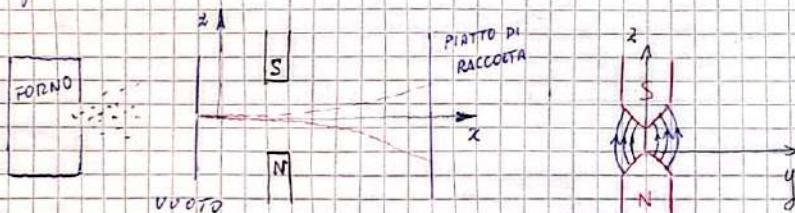
dito non cambia, e la componente lungo \hat{z} è costante. Le altre cambiano in modo da tener costante L .

$$\text{Abbiamo } \vec{F} = -\vec{\nabla} V_B \quad \vec{B} = B_z \hat{z} \quad \Rightarrow V_B = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -M_z B_z \cdot L_z \text{ cost.} \Rightarrow M_z \vec{\nabla} B_z$$

Se B_z omogeneo $\rightarrow \vec{F} = 0$. Bisogna allora usare B_z diverso.

Esperimento di Stern-Gerlach

Atomi di Ag monovalente rafforzati attraverso un forno, colpiti e fatti attraverso \vec{B} lungo \hat{z} omogeneo. Il fascio è confinato in \hat{z} .



$$B_x = 0 \quad |B_z| > |B_y|$$

Magnete simmetrico rispetto a \hat{z}
 $\frac{\partial B_z}{\partial x}$ (effetti di bordo) ≈ 0

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$$

$\vec{F} = F_z \hat{z} = M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{z}$. Le altre componenti, con $\frac{\partial B_z}{\partial y}$ e $\frac{\partial B_z}{\partial x}$ zero o nulli o trascurabili:

$$\vec{r}_2 \propto M_z \propto L_z$$

In una tratt. classica, L_z varia con continuità. Ma rispiamo che è quantizzato: $L_z = m\hbar$ può assumere al +1 valori, con m intero \Rightarrow Mi aspetto un numero discreto di tracce. Non accade.

Ag momen. stato fond. $\Rightarrow L=0$ $m=0$ ci aspetta una traccia al centro. Invece, si osservano due tracce distinte, simmetriche. Ma è zero, e in più ci è un numero doppio pari!
Perpettualmente non viene proprio nullo stato fondamentale, e ci saranno valori di m , che però sono doppio.

Goudsmit e Uhlenbeck danno l'interpretazione: è un altro tipo di momento magnetico intrinseco associato a un momento angolare intrinseco \vec{S} .

$$\vec{M}_s = -g \frac{k_B}{s} \frac{\vec{S}}{s} \quad s \text{ è definito attraverso l'algebra}$$

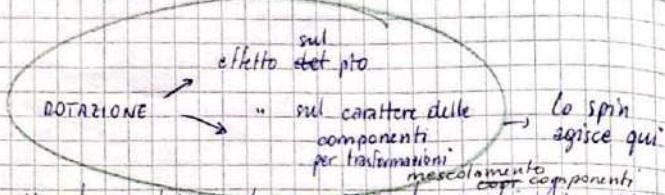
$$[S_i, S_j] = ik \epsilon_{ijk} S_k \quad e \quad S^2 |s, m_s\rangle = k^2 s(s+1) |s, m_s\rangle$$

$$S_z |s, m_s\rangle = \hbar m_s |s, m_s\rangle$$

$$m_s = -s, \dots, s \rightarrow 2s+1 \text{ valori}$$

Se sono due facce, $2s+1 = 2 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$. Allora il mom. intrinseco deve avere autovalori semi-interni.

\vec{S} operatori di spin. \vec{i} agisce nello spazio delle coordinate. \vec{S} fanno pure generi rotazioni, ma opera nello spazio di spin, astratto.



\vec{S} è il generatore nello spazio delle rotaz. nello spazio di spin. Un vettore ha spin unitario. ($C=1$)

Per spiegare i multipletti in più per \vec{H} bisogna introdurre lo spin nella definizione di ψ . Dopotutto, si può immaginare ψ in un campo magnetico \rightarrow Spiego l' ϵ effetto Zeeman anomalo.

~~introduzione nello spazio prodotto diretto~~ Bisogna ridefinire le regole. ~~introduzione~~ Eviduiamo lo spazio degli stati allo spazio prodotto diretto tra spazio di spin e spazio delle coordinate

$$s = \frac{1}{2} \quad \mathcal{Q}_x \quad |\vec{x}\rangle \quad |s, m_s\rangle \quad \begin{aligned} |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &\stackrel{\text{not}}{=} |+\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &\stackrel{\text{not}}{=} |- \rangle \end{aligned}$$

segno della
terza
componente

Definisco $|s\rangle = \begin{pmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix}$ $|s\rangle = (\frac{1}{2}, s)\epsilon$ per $s = \frac{1}{2}$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_x \otimes \mathcal{Q}_s$$

$$|\vec{x}\rangle \otimes |s\rangle \quad \text{è la base}$$

ESEMPIO:

$$\vec{x}|\vec{x}; \epsilon\rangle = \vec{x}|x, y, z; \epsilon\rangle = x|x, y, z; \epsilon\rangle = z|\vec{x}; \epsilon\rangle$$

$$S^z|\vec{x}; \epsilon\rangle = \hbar \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+s)|\vec{x}; \epsilon\rangle$$

AUTOSTATO
DELL'EL COORD.
IN 97% SUDO!
NON AFFICE SU E

$$S_z|\vec{x}; \epsilon\rangle = \frac{\hbar}{2}\epsilon|\vec{x}; \epsilon\rangle \quad \text{mi dai } \epsilon?$$

$$\langle \vec{x}'; \epsilon' | \vec{x}; \epsilon \rangle = S^z(\vec{x}' - \vec{x})\delta_{\epsilon' \epsilon}$$

$$\text{CHIUSURA} \quad \sum_{\epsilon} \int d^3x |\vec{x}; \epsilon\rangle \langle \vec{x}; \epsilon| = 1 = \int d^3x [|\vec{x}; +\rangle \langle \vec{x}; +| + |\vec{x}; -\rangle \langle \vec{x}; -|]$$

$$\text{Ora meglio } |\psi\rangle \in \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_x \otimes \mathcal{Q}_s \Rightarrow |\psi\rangle = \sum_{\epsilon} \int d^3x |\vec{x}; \epsilon\rangle \langle \vec{x}; \epsilon| \psi$$

$$\psi_{\epsilon}(\vec{x}) = \langle \vec{x}; \epsilon | \psi \rangle \Rightarrow \sum_{\epsilon} \int d^3x \psi_{\epsilon}(\vec{x}) |\vec{x}; \epsilon\rangle$$

$$[\psi] = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{x}) \\ \psi_-(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \text{spinore di Pauli, che raggruppa le due funzioni d'onda.}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_{\epsilon} \int d^3x |\vec{x}; \epsilon\rangle \langle \vec{x}; \epsilon| \psi \rangle = \sum_{\epsilon} \int d^3x \psi^*(\vec{x}) \psi_{\epsilon}(\vec{x}) = \sum_{\epsilon} \int d^3x [| \psi_{\epsilon} |^2]$$

Prima, $|\psi|^2$ dava la prob. di fonzi. Ora invece abbiamo la prob. di fon per spin $\pm \frac{1}{2}$.

Questo g.d.l. in Sch. non c'è. Bisogna farlo comparire. Sch. è scritta per una particella con $s=0$.

Cagliari 9 Dicembre 2021
Domenico Gattu

Ora sono una funzione d'onda la componente di spin.

$$\Psi = \Psi_x \otimes \Psi_s$$

$$s \quad m_s = \underbrace{-s, \dots, +s}_{2s+1}$$

$$|\vec{z}, s, m_s\rangle \stackrel{\text{per quanto}}{\equiv} |\vec{z}; m_s\rangle \quad \begin{array}{l} \text{(riso. insieme a)} \\ \text{valore di } s \end{array}$$

$$|\Psi\rangle = \sum_{m_s=-s}^{+s} \int d^3x |\vec{z}; m_s\rangle \underbrace{|\psi\rangle}_{\Psi}$$

$$= \sum_{m_s} \int d^3x \psi_{m_s}(\vec{z}) |\vec{z}; m_s\rangle$$

Si hanno $2s+1$ funzioni ψ_{m_s} che si raccolgono nel candidotto Ψ :
more

$$[\Psi(\vec{z})]_s = \begin{pmatrix} \psi_{-s}(\vec{z}) \\ \vdots \\ \psi_s(\vec{z}) \end{pmatrix} \quad \text{dimensione } 2s+1$$

Quali i rappresentatori di $|s, m_s\rangle$ stati di spin? Unisimo: nei
tutti elettrone X_{s, m_s}

$$X_{s, +s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_{s, -s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_{s, 0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\Psi(\vec{z})]_s = \underbrace{\psi_{-s}(\vec{z}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_{-1}(\vec{z}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \psi_s(\vec{z}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{SOMMA DELLE COCCHE}}. \quad \text{Venne quindi}$$

naturale rappresentare definire qui vettori colonna come i rappre-
sentativi nello spazio di spin.

NELLA BASE COMUNA A S^2 E S_z SI SCRIVE, USANDO VETTORI DI BASE

$$S^2 |s, m_s\rangle = h^2 s(s+1) |s, m_s\rangle$$

POSSO EQUIV. USARE I RAPPRESENTATIVI

$$S^2 X_{s, m_s} = h^2 s(s+1) X_{s, m_s}$$

densità ch:

$|\Psi_{m_s}(\vec{z})|^2$ prob. per finito m_s dato s .

$dP = |\Psi_{m_s}(\vec{z})|^2 d^3x$ prob. infinitesima di trovare il sistema in
uno stato con m_s , in $(\vec{z}, \vec{x} + d\vec{z})$ (non si valuta)

la prob. di trovare da fatti tra \vec{z} e $\vec{z} + d\vec{z}$ a prescindere da m_s è

$$\sum_{m_s} |\Psi_{m_s}(\vec{z})|^2 d^3x = dP$$

la prob. di trovare uno stato con m_s su tutto lo spazio:

$$\int d^3x |\Psi_{m_s}(\vec{z})|^2 = P(m_s)$$

CASO SISTEMA SEPARABILE: non c'è interazione tra g.o.c. orbitali e di spin
 \Rightarrow lo stato $|\Psi\rangle$ può essere scritto come prodotto diretto tra due sta-
ti: $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |X\rangle$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ |\varphi\rangle & |X\rangle \end{matrix}$$

$$\text{Proietto sulla base: } \underbrace{\langle \vec{z}; m_s | (|\varphi\rangle \otimes |X\rangle)}_{\text{LO STATO È FATTORIZZATO}} = \langle \vec{z} | \varphi \rangle \langle s, m_s | X \rangle$$

$$|\vec{z}, m_s\rangle \equiv |\vec{z}\rangle \otimes |s, m_s\rangle$$

$$\psi_{m_s}(\vec{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\vec{z}) X_{s, m_s}$$

infatti:

$$\text{Pieno senso si definisce } X_s = \sum_{m_s=-s}^s a_{m_s} X_{s, m_s}$$

$$\Psi$$

$$|X\rangle = \sum_{m_s=-s}^s a_{m_s} |s, m_s\rangle \in \mathcal{Q}_s$$

$$X_s = \sum_{m_s=-s}^s a_{m_s} X_{s, m_s}$$

$|\alpha_{m_s}|^2$ = prob. che una misura della terza componente su \vec{X} dia m_s .

$$s = \frac{1}{2}$$

$$S_x^z X_{s, m_s} = \hbar^2 s(s+1) X_{s, m_s}$$

$$S_z X_{s, m_s} = \hbar m_s X_{s, m_s}$$

$$X_{\frac{1}{2}, m_s}$$

$$\begin{cases} X_{\frac{1}{2}, \pm} \\ X_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \end{cases} \equiv X_{\pm}$$

$$S_x^z X_{\pm} = \frac{\hbar^2}{4} X_{\pm}$$

$$S_z X_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} X_{\pm}$$

$$X_{\pm}^z X_{\pm}^z \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo stesso vale con X_- .

ma $X_+^z X_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$. Dovendo le relaz. di orto
genet normalità im termini dei rappresentativi:

$$X_+^z X_{\pm} = 0 \quad X_{\pm}^z X_{\mp} = 0 \quad \text{cioè } \langle s m_s | s m'_s \rangle = \delta_{m_s, m'_s}$$

Il spin totale, in generale, è un insieme di blochi*.

$$X = a_+ X_+ + a_- X_- \quad \text{l.c.} \quad |a_+|^2 + |a_-|^2 = 1 \quad \text{e} \quad |a_+|^2 = P\left(\frac{1}{2}\right)$$

* Il generico ha una struttura a blochi perché $|a_-|^2 = P(-\frac{1}{2})$
il piano ho matrici $2j+1$ dim come limite superficce-
azione degli operatori INNALZAM. E ADASSAMENTO per semplicità, non sto
di una matrice $2j$ dim.
ma i simboli blocco,

$$S_{\pm} X_{\pm} = 0 \quad \text{con} \quad S_{\pm} = S_x \pm i S_y$$

$$S_{\pm} X_{\mp} = \hbar X_{\pm} \quad \text{perché} \quad c_{\pm} = \hbar \left[\underbrace{s(s+1)}_{\frac{1}{4}} - m_s(m_s \pm 1) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{cioè una}$$

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \quad S_y = \frac{i}{2i}(S_+ - S_-)$$

$$S_x X_{\pm} = \frac{\hbar}{2} X_{\mp}$$

$$S_y X_{\pm} = \left(\pm i \frac{\hbar}{2} X_{\mp} \right)$$

$$S_z X_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} X_{\pm} \quad \text{diagonale in questa base}$$

Si può applicare l'operatore due volte

$$S_x^2 X_{\pm} = S_x S_x X_{\pm} = S_x \frac{\hbar^2}{2} X_{\pm} = \frac{\hbar^2}{4} X_{\pm} \Rightarrow S_x^2 X_{\pm} = \frac{\hbar^2}{4} X_{\pm} \text{ da qui}$$

generale in questa base. Stessi risultati per S_y^2, S_z^2 . Quindi i quadra-
ti agiscono su questa base come operatori identità in
questa base di stati X_{\pm} .

$$S_z^2 X_{\pm} = \frac{\hbar^2}{4} X_{\pm}$$

Definisco uno stato $X = a_+ X_+ + a_- X_-$ e $S_i^2 X = \frac{\hbar^2}{4} X$ $\forall X$
stato. $\Rightarrow S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4} \mathbb{I}$ in una base di stati a $s = \frac{1}{2}$.

$$S_{\pm} X_{\pm} = 0 \quad S_x^2 X_{\pm} = 0 \quad S_z^2 X_{\pm} = 0 \quad \text{Dove} \quad S_{\pm} X \neq 0$$

$$a_+ X_+ + a_- X_-$$

$$\Rightarrow S_{\pm}^2 = 0$$

$$S_{\pm}^2 = (S_x \pm i S_y)^2 = S_x^2 - S_y^2 \pm i(S_x S_y + S_y S_x) \Rightarrow S_x S_y + S_y S_x =$$

$$\frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4}$$

$$[S_x, S_y]_+ = [S_x, S_y]$$

anticommutatore è zero.

Cioè ora la coppia di componenti.

$$[S_i, S_j]_+ = \frac{\hbar^2}{2} \delta_{ij} \quad \begin{cases} i=j & S_i^2 + S_i^2 = 2 S_i^2 = 2 \frac{\hbar^2}{4} \mathbb{I} \\ i \neq j & 0 \end{cases}$$

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

OPERATORE
DI
PAULI

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

per $s = \frac{1}{2}$ e $X_{\frac{1}{2}, \pm} \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$

MATRICE
DI
PAULI

$$[S_i, S_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} S_k$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = 2 \delta_{ij} \mathbb{I}$$

$$\Rightarrow [\sigma_i, \sigma_j] = \delta_{ij} \mathbb{I} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

$\text{Or } \sigma_z = 0 \quad \text{dai } \sigma_i = -1$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo $\vec{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$

$$\vec{s} \cdot \vec{n} \stackrel{\text{def}}{=} S_m = S_x \sin\theta \cos\varphi + S_y \sin\theta \sin\varphi + S_z \cos\theta ; \quad S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$$

$$S_m = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{i\varphi} \\ \sin\theta e^{-i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{p. 309, 310, 311}$$

BRANDSEN

Diagonalizziamo: $S_n \chi_m = \hbar m \chi_m \quad \chi_m = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \chi_+ + b \chi_-$

$m = \pm \frac{1}{2}$. Normalizzando $|a|^2 + |b|^2 = 1$ si ha

$$m = +\frac{1}{2} \rightarrow \chi_+ = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\varphi} \end{pmatrix} ; \quad m = -\frac{1}{2} \rightarrow \chi_- = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\chi_+^\dagger \chi_+ = 1 = \chi_+^\dagger \chi_- ; \quad \chi_+^\dagger \chi_- = \chi_+^\dagger \chi_+ = 0$$

$$\vec{n} = \hat{\vec{n}} \quad S_n \equiv S_z \quad \chi_+ \equiv \chi_+ \quad \chi_- \equiv \chi_-$$

$$\vec{s} = \langle \uparrow | \vec{s} | \uparrow \rangle \vee \langle \downarrow | \vec{s} | \downarrow \rangle$$

$$\langle s_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \cos\varphi \quad \langle s_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \sin\varphi \quad \langle s_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos\theta$$

↑ up: concorde alla direz. n. Non è detto che sia su

↓ è discordo alla direz. n. È antiparallelo

Ripetiamo la diagonalizzazione con la notazione di Dirac.

$$S_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$$

Quali gli autostati di S_x, S_y in $|\pm\rangle$? Come viderlo ciò

$$S_x |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$$

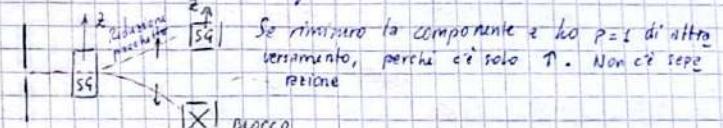
Quello che $|\pm\rangle$ è $= \alpha_{\pm} |+\rangle + \beta_{\pm} |-\rangle$. Con i rappresentativi riceverebbe

$$\chi_{\pm, \alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{\pm} \\ \beta_{\pm} \end{pmatrix} \quad |\alpha_{\pm}|^2 + |\beta_{\pm}|^2 = 1$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [---] \Rightarrow |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \pm |-\rangle)$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \pm i|-\rangle)$$

Cio' serve per studiare apparati di Stern-Gerlach in meccanica.



$$\left| \begin{array}{c} \uparrow z \\ \text{concorda} \\ \text{discorda} \\ \hline \text{SG} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \uparrow z \\ \text{SG} \\ \hline \text{X} \end{array} \right| \quad p_x \left(\pm \frac{\hbar}{2} \right) = \left| \begin{array}{c} \pm 1 \\ \hline \text{X} \end{array} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Ma come S_x e S_z non commutano, perdo l'informazione su z.

Oggiungiamo un aforato lungo z

$$\left| \begin{array}{c} \uparrow z \\ \text{SG} \\ \hline \text{X} \end{array} \right| \quad 1+\rangle_z \quad p_z \left(\pm \frac{\hbar}{2} \right) = \left| \begin{array}{c} \pm 1 \\ \hline \text{X} \end{array} \right|^2 = \frac{1}{2} \quad \text{da fra-}$$

tia ho rigenerato il risultato fornito dal primo sg.

Cosa succede quando ruotiamo uno stato nello spazio \mathbb{R}^3 ?

$$U_n(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{s} \cdot \hat{\vec{n}}}$$

ROTAZIONE

\Rightarrow NUOVO SIST. DI RIF \Rightarrow NUOVE COMPONENTI + COMPONENTI MESCOLATE.
PER PUNTI DIVERSI!

CIO' CHE ACCADE CON LO SPIN. MA ESSO PUÒ ESSERE ANCHE SEMI-INTERO

$$\chi'_s = v_n(\alpha) \chi_s$$

a) $s = \frac{i}{\hat{x}}$ $\vec{s} = \frac{\vec{x}}{x} \vec{\sigma}$ $\chi'_{\frac{1}{2}} = e^{-i \frac{\alpha}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n}} \chi_{\frac{1}{2}}$, quando $\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$= \left(1 \cos \frac{\alpha}{2} - i \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \chi_{\frac{1}{2}}$$

$$e^{-i \frac{\alpha}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i \frac{\alpha}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i \frac{\alpha}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n})^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i \frac{\alpha}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n})^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \sigma_i \sigma_j A_i B_j =$$

$$= \sum_{ij} A_i B_j \delta_{ij} + i \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \sigma_k A_i B_j =$$

$$= \vec{A} \cdot \vec{B} + i (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma}$$

CASO $\vec{B} = \vec{A} \Rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{A})^2 = \vec{A}^2$ il prodotto nullo fra rette parallele.

CASO $\vec{A} = \hat{n} \Rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^2 = 1$ perché resta $\delta_{ij} n_i n_j = |n|^2 = 1$ perché è un vettore

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \binom{\alpha}{2k} \frac{1}{(2k)!} \left((\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^k \right)^k = -i (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \binom{\alpha}{2k} \frac{1}{(2k+1)!}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{sviluppo coseno}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{sviluppo seno}}$

Se ora faccio $n = \hat{x}$ $\vec{s} \cdot \hat{n} \equiv S_2 \Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \hat{n} = \vec{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\chi'_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} e^{-i \frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i \frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \chi_{\frac{1}{2}}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{TRANSFORMATO PER UNA ROTAZIONE}}$

Se $\alpha = 2\pi \Rightarrow \chi' = -\chi$ lo stato cambia segno.

b) In generale $\hat{n} = \hat{z}$

$$\chi'_s = e^{-\frac{i}{\hbar} x S_2} \chi_s \quad \chi_s = \sum_{m_s=-s}^{+s} a_{m_s} \chi_{s, m_s}$$

Per $S_2 \chi_{s, m_s} = \hbar m_s \chi_{s, m_s}$, otengo

$$\chi'_s = \sum_{m_s} e^{-i m_s \alpha} a_{m_s} \chi_{s, m_s}$$

$$\alpha = 2\pi$$

$$\chi'_s = \sum_{m_s} e^{-i m_s 2\pi} a_{m_s} \chi_{s, m_s} \quad e^{-i\pi} = -1$$

$$= \sum_{m_s} (-1)^{2m_s} a_{m_s} \chi_{s, m_s} \quad m_s \text{ pari: intero} \rightarrow s \text{ idem}$$

$\text{ " intero" } \rightarrow \text{ "}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{2m_s \equiv 2s}$ nulla signifca.

$$= \sum_s (-1)^{2s} \chi_s \Rightarrow \chi'_s = (-1)^{2s} \chi_s \quad \text{s intero } \chi'_s = \chi_s$$

$\text{s pari } \chi'_s = -\chi_s$

Questo è un criterio fondamentale per classificare le particelle in fermioni e boroni.

STATISTICA
DI BOSE-EINSTEIN
DI FERMI-DIRAC

ROTATORI

$$U_{m_s} (\hat{z})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}$$

$$\vec{j} = \vec{s} + \vec{l}$$

è matrice di Wigner interviene
no in questa rotazione. Non
la studieremo.

Per il campo c'è l'operatore i lo stendo perché c'è in composta come \vec{x} . Ma uno stato è lo proietto nello spazio delle coord $\rightarrow \vec{l} + \vec{s}$.
 \vec{j} è un mom. ang. perché ne ha d'algebra.

Abbiamo un sistema con due parti ^{non} interagenti $\Rightarrow H = H(1) + H(2)$.
 Se l'interazione non è simmetrica $\Rightarrow [H(i), L^z(i)] = 0 \quad i=1,2$
 \Rightarrow moim. ang. orb.

$L^z(1), L_2(1), L^z(2), L_2(2), H$ commutanti
 $\hat{L}_2(1), \hat{L}_2(2)$

insieme di buoni numeri quantici.

Sufficiente ora $H = H(1) + H(2) + V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$

$$[L_2(1), H] = [L_2(1), V] = -ik \left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

$$|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

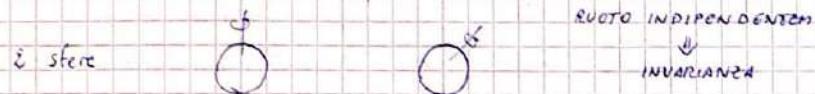
$$\frac{\partial}{\partial x_1} V = V' \frac{\partial |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}{\partial x_1} = V' \frac{x_1 - x_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

$$[L_2(1), H] = -ik \frac{V'}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} [x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)] \neq 0$$

$$[L_2(2), H] = \dots = -ik \frac{V'}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} (-y_2 x_2 + x_2 y_2) \neq 0$$

ma definendo $L_2 = L_2(1) + L_2(2) \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}(1) + \vec{L}(2)$ basta che
 $[L_2, H] = 0 \quad e \quad [L^z, H] = 0$

Prendendo $L_2, L^z, L^z(1), L^z(2), H$, commutano di nuovo.



AGGIUNGO UN'INTERAZIONE: UNA SBARRA DI RETTILIO



nel spazio degli stati i lo stacco, e ho s. operatori prima e dopo.
 Dopo, considero un'altra operazioni globali:

$$[L_2, L^z(1)] = [L_2(1), L^z(1)] = 0$$

Occorre capire quali però commutano con H , e com'è definito

Edoardo Ratta - 319
1 - 2 - 3 E
Ginnastica



ESERCITAZIONE 8

N° 1

$$L = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L_x = y L_z - z L_y \quad L_y = z L_x - x L_z \quad L_z = x L_y - y L_x$$

COORD. SPHERICHE

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$P_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$$

r, θ, φ variabili

$$L_z = -x i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + y i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Ora vediamo che la parte in r e in θ è uguale per x e per y , ma ci sono i segni opposti \Rightarrow Resta la parte in φ !

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^{-1} = \left(-r \sin\theta \sin\varphi \right)^{-1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^{-1} = \left(+r \sin\theta \cos\varphi \right)^{-1}$$

$$L_z \propto -\frac{r \sin\theta \cos\varphi}{+r \sin\theta \cos\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{r \sin\theta \sin\varphi}{r \cos\theta \sin\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \propto -2 \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Non va, si allora procede con rigore ponimamente

N°2

$$\langle L_+ | l, m \rangle = c_+(l, m) | l, m+1 \rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c_+(l, m) = k [l(l+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}}$$

 $l=2$

$$\langle L_+ | 2, m \rangle = k^2 \cdot 3 | 2, m \rangle$$

$$\langle L_+ | 2, m \rangle = k m | 2, m \rangle$$

$$L_x, L_y \text{ si ricava da } L_{\pm} = L_x \pm i L_y$$

Dato un vettore $|x_j\rangle$ e un'operazione A, $\langle x_i | A | x_j \rangle = a_{ij}$ raffigurazione matriciale.

$$\langle L_+ | 2, m \rangle = 6k^2 | 2, m \rangle$$

 \Downarrow

$$\langle 2, m' | L_+ | 2, m \rangle = \langle 2, m' | 6k^2 | 2, m \rangle$$

$$\Rightarrow 6k^2 \langle 2, m' | 2, m \rangle = 6k^2 \boxed{1}$$

Consideriamo $L_+ | 2, m \rangle = c_+(2, m) | 2, m+1 \rangle$

$$c_+(2, m) = \text{tr} [6 - m(m+1)]^{\frac{1}{2}}$$

 \Downarrow

$$\langle 2, m' | L_+ | 2, m \rangle = \langle 2, m' | k [6 - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} | 2, m+1 \rangle$$

$$= k [6 - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \delta_{m', m+1}$$

+2	+1	0	-1	-2
-2	0	$\sqrt{14}$		

 $|m| \leq l$

$$L_+ = k^{-1} \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \sqrt{16} \\ \cdot & 0 & \sqrt{16} \\ 0 & 0 & \sqrt{16} \\ 1 & \cdot & 0 \sqrt{15} \\ 2 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

m' riga
 $m+1$ colonna

$$L_- \text{ non è finito} \quad \text{Poi}, \quad L_x = \frac{1}{2} (L_+ + L_-) \quad \text{e} \quad L_y =$$

$$= \frac{i}{2} (L_- - L_+)$$

$$L_x = k \quad \boxed{1}$$

il vettore che mi dà
intervalle

 $\boxed{-2}$

n°3

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (\underbrace{|1,1\rangle}_{1} + |1,0\rangle + 2i |1,-1\rangle)$$

$$|L, m\rangle$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (4 + 1 + 4) = \frac{9}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 3$$

a) Probabilità che una misura di L_z dia $k, 0, -k$?

$$k \Rightarrow L_z = m = 1 \quad -k \rightarrow m = -1 \quad 0 \rightarrow m = 0$$

$$P(m=1) = \frac{4}{9} \quad P(m=-1) = \frac{4}{9} \quad P(m=0) = \frac{1}{9}$$

Per calcolare il valore medio di L_z è comodo definire

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \langle \psi | = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2i}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\langle \psi | L_z | \psi \rangle = k m |\psi\rangle$$

$$\langle \psi | L_z | \psi \rangle = k \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2i}{\sqrt{3}} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= k \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2i}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2i}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= k \left\{ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right\} = 0$$

Consideriamo $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ t.c. $L_x^2 + L_y^2 = L_z^2$

$$L_{\pm} |l, m\rangle = c_{\pm} |l, m \pm 1\rangle$$

Dalla espressione dello stato $|l\rangle$ ricominciamo che $l=1$, quindi poniamo ricavare le espressioni matriciali per L_x e L_y , forse

$$c_{\pm}(1, m) = k [2 - m(m \pm 1)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{c} \text{. .} \\ \text{. .} \\ L_+ = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{k} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{m' riga} \\ \text{m+1 colonna} \end{array} \\ L_- = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{12}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{m'} \\ \text{m-1} \end{array} \end{array}$$

$$L_z = \frac{1}{2} (L_+ + L_-) = \frac{\sqrt{12}}{2} k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_y = \frac{\sqrt{12}}{2} k \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = k \frac{i}{2} (L_- - L_+)$$

$$\langle \psi | L_z | \psi \rangle = \frac{k}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2i}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2i}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2i}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2i}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2i}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2i}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{\sqrt{12}} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{2i}{3} \right\} \quad !!!$$

d) Probabilità che una misura di L_z abbia come risultato k ?

Noi cominciamo gli autovalori rispetto a L_z . Occorre diagonalizzare L_z ~~mettendo sotto forma diagonale~~ per trovare quanto cercato.

$$L_z = \frac{k}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \frac{k}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Facchiamo agire L_z sullo stato $|l\rangle$:

$$\frac{k}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2i}{3} \end{pmatrix} = \frac{k}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\lambda + \frac{2i}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{2i}{3} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\lambda = 0 \\ \left(\frac{2}{3} + \frac{2i}{3}\right) - \frac{2}{3}\lambda = 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{2i}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda - 1 = 0 \\ 2 + 2i - 2\lambda = 0 \\ 2\lambda i - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{out} = 0 \quad -\lambda (\lambda - i) - i(-2) = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 1) - \lambda = 0$$

$$\lambda[\lambda^2 - 2] = 0$$

$$\frac{k}{\sqrt{12}} \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \sqrt{12} \\ \lambda = -\sqrt{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = k \\ \lambda = -k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Facendo agire $(A - \lambda I)$ su
l'equazione:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} -\lambda c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - \lambda c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 - \lambda c_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = \lambda c_1 \\ c_1 - \lambda^2 c_1 + c_1 = 0 \\ c_2 = \lambda c_3 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 (\lambda - \lambda^2) = 0 \\ \lambda = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$c_2, c_3 = \lambda c_1$$

$$c_3 = \frac{c_2}{\lambda} = c_1$$

$$\lambda = \sqrt{2} \Rightarrow ? ?$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + i\varphi)$$

$$z^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - i\varphi)$$

$$z - z^+ = \frac{2i}{\sqrt{2}} \varphi$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2i} (z - z^+) = \varphi$$

Cagliari 2 Dicembre 2014

Edoardo Patti

$$\vec{x}|\vec{z}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle$$

$$\vec{z}|\vec{x}\rangle = \vec{z}(z_2 \otimes y_2 \otimes z_3) = x_1 z_2 y_3 z_3$$

$$|zyz\rangle$$

$$\langle \vec{z}|\psi = \psi(z, y, z) \neq \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z) \text{ in genere, quando}$$

$$|\psi = \int d\vec{z} |\vec{z}\rangle \langle \vec{z}|\psi = \int d\vec{z} \psi(\vec{z}) |\vec{z}\rangle$$

Avendo un insieme di particelle, ciascuna col suo spazio vettoriale, diciamo N particelle, allora lo spazio complesso sarà

$$S = S_1 \otimes S_2 \otimes \dots \otimes S_N$$

in questo caso si intende al netto di S_1 , come spazio vettoriale, non di ψ_1 (vedi sopra)

$$|\psi = \sum_{m_1 \dots m_N} \langle m_1 \dots m_N | \psi^{(1)}_{m_1} \otimes \psi^{(2)}_{m_2} \otimes \dots \otimes \psi^{(N)}_{m_N} \rangle$$

Quando è possibile separare?

$$\text{Autonomia di avere } v(\vec{x}) = v_1(\vec{x}_1) + v_2(\vec{x}_2) + v_3(\vec{x}_3)$$

$$\Rightarrow H = \sum_{i=1}^3 H_i(\vec{x}_i, \vec{p}_i) = H_1 + H_2 + H_3. \quad \text{Ma se } H \text{ è separabile, non}$$

può esistere una soluzione $\psi_e(\vec{x}) = u_{e_1}(x_1) u_{e_2}(x_2) u_{e_3}(x_3)$.

Vogliamo risolvere $H\psi_e(\vec{x}) = E\psi_e(\vec{x})$

$$[H_1(x_1) + H_2(x_2) + H_3(x_3)] \psi_e(\vec{x}) = E \psi_e(\vec{x})$$

Sono operatori differenziali.

$$u_{e_1}(x_1) u_{e_2}(x_2) u_{e_3}(x_3)$$

Divido inoltre per tutta la funzione $\psi_e(\vec{x})$. Dall'axioma di H_i su ψ_e risulta:

$$\frac{H_1(x_1) u_{e_1}(x_1)}{u_{e_1}(x_1)} + \frac{H_2(x_2) u_{e_2}(x_2)}{u_{e_2}(x_2)} + \frac{H_3(x_3) u_{e_3}(x_3)}{u_{e_3}(x_3)} = E$$

①

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) = E$$

②

Le funzioni devono essere delle costanti: $E_1 + E_2 + E_3 = E$

$$\text{Dovrò allora riscrivere: } H_i(x_i) u_{e_i}(x_i) = E_i u_{e_i}(x_i) \quad i=1,2,3.$$

Per le tre eqg. differenziali ~~se~~ in casi unidimensionali ha sol. in 3^2 è data dal prodotto delle tre. Quello cioè se il potenzia-

le i servibili come nell'ipotesi che $[H_i, H_j] = 0$ (non e' i intue-
cio chi coordinate, cioè momento quantico)

Se $E_i = E_n$ disegnerà, si risolve il tutto così:

$$E = E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3}$$

$$H_i |u_{n_i}^{(i)}\rangle = E_{n_i} |u_{n_i}^{(i)}\rangle \quad i=1, \dots, 3$$

$$\psi_{n_1 n_2 n_3} = \langle \vec{x} | \psi_{n_1 n_2 n_3} \rangle = u_{n_1}^{(1)}(x_1) u_{n_2}^{(2)}(x_2) u_{n_3}^{(3)}(x_3)$$

Se $H = \sum_{i=1}^3 H_i$ e $[H_i, H_j] = 0$, risolviamo $H_i |k_n^{(i)}\rangle =$
 $= E_n |k_n^{(i)}\rangle$, dove con $\{|k_n^{(i)}\rangle\}$ faccio di H_i , e l'autorazione com-
pleta è somma dei singoli autori autore.

$$E = E_{n_1} + \dots + E_{n_f} \quad \text{che entra in}$$

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

~~la~~ ~~risoluzione~~ ~~autore~~ ~~operatori~~

Quando ritroviamo numeri di q.d.l. intrinseci (spin), in
cui c'è uno è legato da alcuni termini di H al
momento orbitale: non c'è più separabilità.

Equazione di Schrödinger in 3D

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$$

$V(\vec{r})$ non dipende da $t \Rightarrow$ Scegliamo $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

C'è per una singola particella. Consideriamo due particelle interagenti con $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. \vec{r}_1 = pos. particella 1
 \vec{r}_2 = pos. particella 2

Introduciamo la coordinata relativa: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{p}_1 \rightarrow -i\hbar \vec{v}_1 \\ \vec{p}_2 \rightarrow -i\hbar \vec{v}_2$$

U

RAPPRESENTATIVO
NUOVO STATO PRODOTTO DIRETTO $S_1 \otimes S_2$

$$H \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Ma nel problema a due corpi il problema si semplifica introduttendo il CM.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}^2 = \vec{r}^2 = \frac{\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{p}_1^2 + m_2 \vec{p}_2^2}{m_1 + m_2}. \text{ Definiamo } p = \frac{m_1 \vec{p}_1 + m_2 \vec{p}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}$$

$$\text{con } M = m_1 + m_2$$

$$\vec{p} = p \vec{v} = \frac{m_1 \vec{p}_1 + m_2 \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V} = \vec{R} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{M}, \quad \vec{P} = M \vec{V} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p} + \frac{m_1}{M} \vec{P} \quad \vec{p}_2 = -\vec{p} + \frac{m_2}{M} \vec{P}$$

Sostituendo in H , ritroviamo: $H = \frac{\vec{p}^2}{2M} + \frac{\vec{P}^2}{2M} + V(\vec{r})$ nelle coordinate di relazione del CM, siccome in V la coord. del CM non compare, H è separabile. Separiamo i moti del CM e relativi. Le trasformazioni nelle coordinate sono lineari:

$$\begin{cases} r_1 \\ r_2 \end{cases} \begin{cases} \vec{r} \\ \vec{R} \end{cases}, \text{ e segue che} \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{v}_r \\ \vec{P} \rightarrow -i\hbar \vec{V}_R$$

$$\text{Componiamo: } H = -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{v}_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \vec{V}_R^2 + V(\vec{r}) = H_r + H_R$$

$$\psi(\vec{r}, \vec{r}) = \phi(\vec{R}) \psi(\vec{r}) \quad \& \quad H \psi(\vec{R}, \vec{r}) = E_{CM} \psi(\vec{r}, \vec{r})$$

U

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{v}_r^2 \phi(\vec{R}) = E_{CM} \phi(\vec{R})$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{V}_R^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

$$E_{TOT} = \bar{E} + E_{CM}$$

Se decidiamo di studiare il sistema nel rif. del CM, il CM è inizialmente a riposo \Rightarrow Cominciamo semplicemente l'equazione che già conosciamo, quella con ψ , con \vec{r} coord. relativa e p massa ridotta. Studio il problema nel centro di massa usando i p , dimostrandone dall'eq. del CM per il CM. In effetti, il CM è a riposo nel mio rif \Rightarrow Non è soggetto ad alcuna forza \Rightarrow Il CM è una part. libera e E_{CM} è una cost. additiva. Studiamo di fatto il moto di una sola part.

neggetta a $V_{\vec{r}}(\vec{r})$. Osserviamo che $S = S_x \otimes S_z = S_R \otimes S_{\vec{r}}$ perché le trasf. i lineari.

Quindi, in generale:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = V_1(r_1) + V_2(r_2) + V_3(r_3)$$

$$H = H_1(r_1) + H_2(r_2) + H_3(r_3)$$

$$H_1(r_1) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + V_1(r_1)$$

$$(H_1 + H_2 + H_3) \psi(r_1, r_2, r_3) = E \psi(r_1, r_2, r_3)$$

□

$$\psi(r_1, r_2, r_3) = X(r_1) Y(r_2) Z(r_3)$$

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

PARTICELLA LIBERA

perché la parte circolare, quella restante, lo è

$$V(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \text{Separabile} \quad -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) = E_1 X(x); \quad X(x) = A e^{i k_x x} + B e^{-i k_x x} = e^{i k_x x}$$

$$\text{con } |k_x| = (\sqrt{E}/\mu)/k_x \quad E_1 = \frac{\hbar^2}{2\mu} k_x^2$$

Analogamente per $Y(y)$ e $Z(z)$.

$$\psi_E(r_1, r_2, r_3) = C e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = C e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Singolarmente, ogni soluzione è degenera di ordine 2 (caso 1B).

$$\tilde{E} = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{\hbar^2}{2\mu} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 E^2}{2\mu} = \frac{p^2}{x^2}$$

- $\psi_E(\vec{r})$ è autofunzione di H e autofunzione di \vec{p}^2 ($-i\hbar \vec{v}^2$)
 - $E > 0$ ma lo spazio è continuo, non ci sono vincoli.
 - E dipende solo dal modulo di \vec{k} , non dagli angoli θ_x e ϕ_x .
- Se k_x non cambia, ψ_E e θ n'ha la stessa energia \Rightarrow degenerazione infinita (tutte le direzioni a fissato k_x danno una soluzione)
- La normalizzazione sarà alla Dirac
- $$\int d^3 \vec{r} \psi_E^*(\vec{r}) \psi_E(\vec{r}) = \delta(\vec{k} - \vec{k})$$

Oscillatore armonico tridimensionale

è questo che ci interessa sulla separabilità

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2. \quad \text{Per quanto detto è separabile!}$$

$$\psi(\vec{r}) = XYZ$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) + \frac{1}{2} k_x x^2 X(x) = E_1 X(x)$$

$$\tilde{E} = E_1 + E_2 + E_3 = E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3} \quad \text{perché ad es. } E_1 = E_{n_1} = (n_1 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_1$$

con $\omega_1 = (\frac{k_x}{\mu})^{1/2}$.

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = X_{n_1}(x) Y_{n_2}(y) Z_{n_3}(z) = N_{n_1} N_{n_2} N_{n_3} e^{i k_x x} e^{i k_y y} e^{i k_z z}$$

$$\cdot H_{n_1}(\alpha_1 x) H_{n_2}(\alpha_2 y) H_{n_3}(\alpha_3 z), \text{ dove } \alpha_i = (\frac{i k_i}{\mu})^{1/2}$$

$$\tilde{E}_{n_1, n_2, n_3} = E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3} = (n_1 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_2 + (n_3 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3$$

Se l'oscillatore è anisotropo, quindi $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3$, dovrei dire che sono incommensurabili. Se c'è una legge tra le 3 componenti, posso trovare periodicità.

Se l'oscillatore è isotropo, $k_1 = k_2 = k_3 \stackrel{def}{=} k$. Ciò ha a che fare con l'irruzione isotropia. Scrivo V in modo che non appariscano θ . Allora $V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}k\vec{r}^2 = \frac{1}{2}kr^2$ contiene.

Se $k_1 = k_2 = k_3 = k \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$

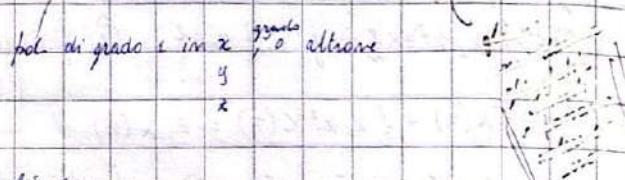
$$E_{n_1, n_2, n_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{n_1 + n_2 + n_3}_{n} + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega = \left(n + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega$$

A ogni valore di n corrisponde una soluzione (u in etc). Per

$$n=0 \quad E_0 = \frac{3}{2} \hbar \omega \quad n_1 = n_2 = n_3 = 0 \quad 1 \text{ autof} \rightarrow \text{no deg.}$$

$$n=1 \quad E_1 = \frac{5}{2} \hbar \omega \quad \begin{array}{c} n_1=1 \\ n_2=0 \\ n_3=0 \end{array} \xrightarrow{\text{metti } 0} \Rightarrow 3 \text{ autofunzioni} \rightarrow \text{deg. di} \quad \text{ORDINE 3}$$

poli di grado l in x , y , z altrane



Degenerazione del livello n .

ora ho fissato n_1, n_2, n_3 , e non posso scorgere su n_1, n_2, n_3 un solo valore

$$d_n = \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n-n_1} 1 = \sum_{n_1=0}^n (n - n_1 + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \text{ usiamolo}$$

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} (n_2 - n_1 + 1) = \sum_{n=n_1}^{n_2} n = \frac{(n_2 - n_1 + 1)(n_2 + n_1)}{2}$$

TUTORAGGI

Wigner

$$\Psi_{nlm}(r) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

N.L

$$\int_0^\infty r^2 dr |R_{nl}(r)|^2$$

$$\int_0^\infty r^2 dr \frac{\hbar^2}{m} r = \frac{h^2}{m} r^2$$

$$\int_0^\infty r^2 dr |R_{nl}(r)|^2 = 1$$

$$|N|^2 \left(\frac{h^2 r}{2m} \right)^3 \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{2l} [L_{n+l}(\rho)]^2 \rho^2 d\rho = 1$$

$$U_g(p, s) = (-1)^p \frac{\exp(-ps)}{(1-s)^{p+1}} = \sum_{q=p}^{\infty} \frac{U_g(p)}{q!} s^q$$

Ci interessano questi perché comparano nella normalizzazione. Sono tutti gli integrali

$$\int p^2 e^{-p} p^{2l} U_{2l+1}(p, s) U_{2l+1}(p, t) =$$

$$= \sum_{q=2l+1}^{\infty} \sum_{\tilde{q}=2l+2}^{\infty} \frac{U_g(p)}{q!} \frac{U_g(p)}{\tilde{q}!} \int_0^\infty p^{2l+1} e^{-p} p^{2l} d\rho$$

$$q = \tilde{q} = n + p \Rightarrow \frac{(-s)^{2l+1} (-t)^{2l+1}}{(1-s)^{2l+2} (1-t)^{2l+2}} \int_0^\infty p^{2l+2} e^{-p} \left[1 + \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1-t} \right] d\rho$$

$$u = \frac{1-st}{(1-s)(1-t)} \int_0^\infty p^{2l+2} e^{-p} \frac{1}{1-u} = \frac{1}{\beta^{l+1}} = \frac{\alpha!}{\beta^{l+\alpha}}$$

$$\frac{(st)^{2l+2}}{[(1-s)(1-t)]^{2l+2}} \left[\frac{(2l+2)!}{(1-st)} \right]^{1+2l+2} = (st)^{2l+2} (1-s)(1-t)(2l+2)! \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2l+2+k}{k} (st)^k$$

Confrontiamo in sostanza i coefficienti delle serie.

$$2l+k+1 = n+l$$

$$k = n-l-1$$

$$2l+k+2 = n+l$$

$$k = n-l-2$$

$$\int dp \left[L_{n+l}^{2l+1}(z) \right]^2 e^{-\int p dl} = (2l+2)! / ((n+l)!)^l$$

$$\left\{ \binom{2l+2+n-l-1}{n-l-1} + \binom{2l+2+n-l-2}{n-l-2} \right\} =$$

$$= [(n+l)!]^2 (2l+2)! \left\{ \underbrace{\binom{l+n+1}{n-l-1}}_k + \underbrace{\binom{l+m}{n-l-2}}_{(l+m)!} \right\} =$$

. . .

Moltiplica $\frac{(n-l-1)}{(n-l-2)}$
e divide per $\frac{(l+m+1)!}{(n-l-1)!(2l+2)!}$

↓

$$\frac{(n+l)!^2}{(n-l-1)!} \cdot \frac{(n+l-1)(n+l)}{(n-l-1)!} + \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}$$

$$= \frac{2n[(n+l)!]^3}{(n-l-1)!} \cdot \text{Per } N^2 \left(\frac{n \alpha_0}{2\pi} \right)^3 \left(\frac{2n[(n+l)!]^3}{(n-l-1)!} \right) = 1$$

$$\Rightarrow N = \left\{ \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!^3} \left(\frac{2\pi}{n \alpha_0} \right)^3 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\underset{c=2}{N^2} \quad \rho_{2,1}^{n=2} \quad \beta_{2,1}(z) \Theta(\theta, q)$$

la probabilità $P(L \geq 0) = 0 \Rightarrow Y_{2,0} = 0$

$$\langle L_2 \rangle = 0 \Rightarrow |x|^2 = |\beta|^2$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{12}} \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{12}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \psi(\theta, q) = \frac{1}{\sqrt{12}} \left(Y_{11} + e^{i\frac{\pi}{4}} Y_{1,-1} \right) - \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{i\frac{3}{4}\sin\theta} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\theta \sin\theta}$$

sinθ ↓
per cui $|\psi(\theta, q)|^2 = \frac{3}{16\pi} \sin^2\theta \left\{ 1 - e^{2i\theta - i\pi} - e^{i\theta - 2i\theta} + 1 \right\} = \frac{3}{16\pi} \sin^2\theta$,
i prot. I quadrante ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) è $\frac{1}{4}$,

$$\cdot \left\{ 2 - 2\cos(2\theta - \alpha) \right\} = \frac{3}{8\pi} \sin^2\theta \left\{ 1 - \cos(2\theta - \alpha) \right\}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{3}{8\pi} (1 - \cos^2\theta) \int_0^{\pi/2} d\psi (1 - \cos(2\theta - \alpha)) = \frac{1}{4} = \frac{3}{8\pi} \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} d\psi (1 - \cos(2\theta - \alpha))$$

$$= \frac{3}{8\pi} \frac{1}{3} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin(2\theta - \alpha) \Big|_0^{\pi/2} \right\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} (\sin(\pi - \alpha) - \sin(-\alpha)) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \sin\alpha \right\} = \frac{1}{4} \quad \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ oppure } \alpha = \pi$$

N° 3

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi d_0^3}} e^{-\frac{r}{d_0}} \quad d_0 = \frac{4\pi e \hbar^2}{m_e c^2}$$

$$\langle r \rangle = \frac{4\pi}{4\pi} \left| \psi(r) \right|^2 r^2 = \frac{1}{\pi d_0^3} e^{-\frac{r}{d_0}} r^2$$

$$\frac{d}{dr} \left(\dots \right) = -\frac{2}{2r^2} e^{-\frac{2r}{20}} r^2 + 2r \frac{1}{r^2} e^{-\frac{2r}{20}} = 0$$

$$= \frac{2e^{-\frac{2r}{20}}}{r^2} \left\{ -\frac{2r}{20} + 2 \right\} = 0 \quad \Rightarrow r=20 \text{ PROB. MAX.}$$

$$\hat{L}^2 = 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{r^2} e^{-\frac{2r}{20}} r^3 dr \propto \zeta r \left(-\frac{2}{20} r^3 e^{-\frac{2r}{20}} \Big|_0^\infty + \frac{3}{2} 20 \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{20}} dr \right).$$

$$L = r^3 \frac{du}{dr} = 3r^2 \frac{du}{dr} = 4\pi \left(\frac{3}{2} 20 \right) \int_0^\infty r^2 dr \left(-\frac{2}{20} e^{-\frac{2r}{20}} \right) =$$

$$v = e^{-\frac{2r}{20}} (2r/2)$$

$$dv = e^{-\frac{2r}{20}} dr = 4\pi \left\{ \frac{3}{2} 20 \left[-\frac{2}{20} r^2 e^{-\frac{2r}{20}} \Big|_0^\infty + 20 \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{20}} dr \right] \right\}$$

$$u = r \quad du = dr$$

$$dv = e^{-\frac{2r}{20}} \quad v = -\frac{2}{20} e^{-\frac{2r}{20}}$$

$$\Rightarrow \zeta r \left\{ \frac{3}{2} 20 \left\{ -\frac{2}{20} e^{-\frac{2r}{20}} r \Big|_0^\infty + \int_0^\infty dr \frac{2}{20} e^{-\frac{2r}{20}} \right\} \right\} =$$

$$= \zeta r \frac{1}{r^2} \frac{3}{2} 20^4 = -\frac{3}{2} 20$$

Per equiprobabilità, come visto nel mod. n. oria $\varphi = \pi$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$

Ma caro da due motivi interagenti, abbiamo visto che la simmetria sferica è garantita solo per considerando grandezze globali.

Igo: sistema a simmetria sferica, con spin $\neq 0$, ma L e H non contengono interazioni orbitali-spin.

$$[H_0, L_i] = 0 \quad [H_0, S_i] = 0 \quad \Rightarrow L_x, L_y, S_x, S_y, H_0 \text{ commutabili.}$$

Cos'è un buon quantizzatore?

ANCORA SIMMETRIA
SFERICA

Consideriamo ora $H = H_0 + f(r) \vec{L} \cdot \vec{S}$, con $\vec{L} \cdot \vec{S} = \sum_{i=1}^3 L_i S_i$.

$$[H, L^2] = 0 \quad [H, S^2] = 0 \quad [H, L_z] \neq 0, \quad [H, S_z] \neq 0.$$

Introduciamo $\vec{T} = \vec{L} + \vec{S}$, momento angolare totale che ha l'algebra. $T^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$. $T_z = L_z + S_z$

$$[T_z, H] = [T_z, f(r) \vec{L} \cdot \vec{S}] = f(r) [T_z, \vec{L} \cdot \vec{S}] = f(r) \left(T_z, L^2 - S^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} f(r) [T_z, -L^2 - S^2] = \frac{1}{2} f(r) [L_z + S_z, -L^2 - S^2] = 0. \quad \text{In generale,}$$

$$[T_z, H] = 0$$

T^2, T_z, L^2, S^2, H commutabili

È importante perché sono quantità conservate, quindi sono buoni numeri quantici, nel senso che sono appunto gli autori che non cambiano nel tempo, quanto è vero quanto noi

Consideriamo \vec{T}_1, \vec{T}_2 che formano insieme $L+S$, o uno dei due addendi.

$$T_1 \rightarrow j_1, m_1$$

$$T_1^2, T_{1z}, T_2^2, T_{2z}$$

$$T_2 \rightarrow j_2, m_2$$

$$\text{Combiniamo } \vec{j}_1 + \vec{j}_2 \rightarrow j^2, j_2, j_1^2, j_2^2$$

Per $\vec{j}_1 + \vec{j}_2$ contiene lo spazio prodotto diretto com base

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |m_1, m_2\rangle$$

Per \vec{j} si ha $|j, m; j_1, j_2\rangle = |j, m\rangle$ nuova base

$$\text{Cosa succede facendo agire } \vec{j}_2 \text{ su } |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = (j_{22} + j_{12})|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \\ = \cancel{k(m_1 + m_2)}|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle.$$

ma $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ non è uno stato di j^2 !

Fruttiamo allora la relazione di chiusura $j_1 \circ j_2 = j_2 \circ j_1$, come

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1; j_2, m_2|j, m\rangle$$

$$= \sum_{m_1, m_2} \left(\langle j_1, m_1; j_2, m_2, j_1, m_1 \rangle \right) |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

$$\mathcal{D}(j) = \mathcal{D}(j_1) \otimes \mathcal{D}(j_2)$$

$$(e_{j_1+1}, \dots, e_{j_1+2})$$

Rimovendo in tutti le dimensioni degli spazi e ottengo la somma diretta su j , con j autorazione di j^2 e con solo uno stato dimensionale.

$$\mathcal{D}(j_1, j_2) = \bigoplus_j \mathcal{D}(j)$$

$$\text{prop. tensoriale}$$

$$(e_{j_1+1}, \dots, e_{j_1+2}) \cdot (e_{j_2+1}, \dots, e_{j_2+2}) = \sum_j (e_{j+1}, \dots, e_{j+2})$$

vecchia base

$$|m_1, m_2\rangle \quad (b) \quad m \quad (a) \quad |j, m\rangle \quad (c) \quad j \quad (d)$$

$$m_1 (\max) = j_1$$

$$m_2 (\max) = j_2 \Rightarrow m (\max) = j_1 + j_2$$

Per questo mi ho un solo stato: $|j_1, j_2\rangle$. E' bene che ci sia un solo

stato anche nella nuova base, che indico

con $|j, j\rangle$, con j che raggiunge il valore

massimo compatibile $j = j_1 + j_2$. Non può essere più piccolo perché $|m| \leq j$, né può essere

maggiore perché in avrebbe $j_1 + j_2$ più grande di

il valore massimo: $\cancel{|m| > j_1 + j_2}$.

Prendiamo ora $m = j_1 + j_2 - 1 \Rightarrow |j_1, j_2 - 1, j_2\rangle$ possibili stati sulla vecchia base.

Nella nuova base, $j = j_1 + j_2$ è già

dato $\Rightarrow |j_1, j_2 - 1\rangle$. Ma com'è un solo stato deve allora

essere $|j_1 + j_2 - 1$ t.c. un altro stato sia $|j, j\rangle$, al valore massimo possibile.

Per far esistere $j_1 + j_2 - 1$ ho aperto un nuovo spazio in cui lo stato si realizza. Quando mi fermo?

range $\sqrt{j_1} > j_2$. $j_1 + j_2$ era il valore massimo. Corro per i valori $j_1 + j_2 - 1$ raggiungo il valore minimo per m :

$$|m_1, m_2\rangle$$

$$|j_1, j_2, j_2\rangle \quad |j_1 - j_2, j_2\rangle$$

$$\begin{matrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_2 \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_2 \end{matrix} \right\} 2j_2 + 1$$

$$|j_1 - j_2\rangle$$

inoltre

$$j_1 - j_2 \text{ ha senso? } \cancel{j_1 - 2j_2} \geq -j_2 \text{ e } j_1 \geq j_2 \Rightarrow -j_2 \geq -j_1$$

Quindi trovo che $m_1 \geq -j_2$. Ottimo, perché $|m_1| \leq j_1$.

Due avrei attribuiti valori nulla nuova base. Per $j = j_1 + j_2$, avrei
dove avere $|j, j - 2j_2\rangle$. Quando afferro lo spazio con $j_1 + j_2 - 1$,
avrei già $2j_2$ possibilità

$$\begin{array}{ll} |j, j - 2j_2\rangle & j_1 + j_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} j_1 + j_2 - 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right. & \text{In realtà ho solo} \\ & \text{preso la struttura} \\ & \text{matriciale in } \vec{T} \text{ più} \\ & \text{grande della preced.} \\ |j, j\rangle & j_1 - j_2 \quad \text{per } j_2 > j_1 \\ & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Non ci sono altri valori possibili, ammesso $j_2 - j_1 \geq 0$. m_1
può variare solo $2j_1 + 1$ volte. Non ci sono altre possibilità
nella nuova base ragionando sull'ipotesi $j_2 \geq j_1$ e usando $|1\rangle$:
 $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$

ESEMPIO: $j_1 = 5 \quad j_2 = 1 \quad 2j_2 + 1 = 11$ stati
 $2j_1 + 1 = 3$ stati
" " 33 stati

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \Rightarrow 5 \leq j \leq 6 \Rightarrow j = \{5, 6\}$$

$\frac{2 \cdot 4 + 1}{2 \cdot 4 + 1}$	$\frac{2 \cdot 5 + 1}{2 \cdot 5 + 1}$	$\frac{2 \cdot 6 + 1}{2 \cdot 6 + 1}$	= 33 OK
9	11	13	

$m_1(\max) = 5 \quad m_2(\max) = 1 \quad m(\max) = 6$

$ 1, m_1, m_2\rangle$	$ m\rangle$	$ 1, j, m\rangle$
$ 5, 1\rangle$	6	$ 6, 6\rangle$
$\{5, 0\rangle$	5	$\{6, 5\rangle$
$\{5, 1\rangle$	4	$\{6, 4\rangle$
$\{5, -1\rangle$		$\{5, 4\rangle$
$\{5, 0\rangle$		$\{4, 4\rangle$
$\{5, +1\rangle$		

perché j non può essere più
piccolo di m

Sufficiente di andare avanti

$ 1, m_1, m_2\rangle$	$ m\rangle$	$ 1, j, m\rangle$	$ j\rangle$
$ 5, -1\rangle$	3	$ 6, 3\rangle$	6
$ 5, 0\rangle$	5	$ 5, 3\rangle$	5
$ 5, 1\rangle$	6	$ 4, 3\rangle$	4

Non aumenta il numero di stati, quindi $j \in \{4, 5, 6\}$.

$$\sum_{j=1}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

$\langle j_1, m_1; j_2, m_2; j | m \rangle$ COEFF DI CLEBSCH-GORDON ✓

$$|j | m \rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2; j | m \rangle |j_1, m_1; j_2, m_2 \rangle$$

(vincolo) $m_1 + m_2 = m$

è idea è questa:

$$j_1 m_1 \quad j_2 m_2 \quad j | m \quad j_1 j_2$$

$m = m_1 + m_2$

prendendo il valore massimo
 $|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = |j_1 j_2\rangle$ nella vecchia
base

valori
teore
componibili

Usa poi l'operazione di abbattimento ($T_- = T_{j_1} + T_{j_2}$) a sinistra
a sinistra a destra

Così si costruiscono i coefficienti. Cominceranno $j_1 + j_2 - 1$ a
sinistra $j_1, j_2 - 1$ e $j_1 - 1, j_2$ a destra.

Consideriamo la somma di \vec{S} con \vec{s} ($s = \frac{1}{2}$) utile per l'atto
mo idrogenoide.

$$l^2, l_2 : |l, m_l\rangle \quad |l, m_l\rangle \xrightarrow{\text{prod. diretta}} |l, m_l, l_2\rangle$$

$$S^2, S_2 : \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \rightarrow + | \pm \rangle$$

$$j = l - \frac{1}{2} \quad j = l + \frac{1}{2}$$

Come continuare gli stati?

$$j = l + \frac{1}{2} \quad -(l + \frac{1}{2}) \leq m_j \leq (l + \frac{1}{2})$$

in $|j, m_j\rangle$

$$|l + \frac{1}{2}, m_l + \frac{1}{2}\rangle = c_r(l) |m_l, +\rangle + c_s(l) |m_l, -\rangle$$

$$|l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\rangle = |l, +\rangle$$

$$\begin{matrix} l + \frac{1}{2}, - & |l, -, +\rangle \\ |l, -\rangle & \end{matrix}$$

APPLICANDO
 $j_- = l_- + S_-$

Considerando $j = l - \frac{1}{2}$, trovo $|l - \frac{1}{2}, m_l + \frac{1}{2}\rangle$ perché due sono ortogonalità tra gli stati. Quando ci sono due possibilità, neambilne una segno meno.

$$|l - \frac{1}{2}, m_l + \frac{1}{2}\rangle = c_r(l) |m_l, +\rangle - c_s(l) |m_l, -\rangle$$

Scopriamo i coefficienti da quelli per $j = l + \frac{1}{2}$.

$$\text{ESEMPIO } j_1 = 3, j_2 = 1 \quad j = 2, 3, 4$$

$$|m_{j_1}\rangle \leq 3$$

$$|m_{j_2}\rangle \leq 1$$

$$\otimes(j_1) \otimes \otimes(j_2) = (2, 3, 4) (2, 1) = 7 \cdot 3 = 21$$

$$\begin{matrix} j = 2, 3, 4 \\ / \quad \backslash \\ 5 + 2 + 1 = 21 \end{matrix}$$

$$|l_{j_1}, m_{j_1}\rangle \quad m \quad |j, m_j\rangle \quad | \langle \langle \rangle = 13, 1 \rangle$$

$$|13, 1\rangle \quad \downarrow \quad |14, 2\rangle \quad J- \quad \frac{1}{2} \quad |J_1 + J_2 -$$

$$|13, 0\rangle \quad 3 \quad |14, 3\rangle, |15, 2\rangle \dots |14, -4\rangle$$

$$|12, 1\rangle \quad \text{comb. lin.} \quad |13, 3\rangle \quad \equiv |13, -1\rangle$$

$$|12, 0\rangle \quad 2 \quad |14, 2\rangle \quad \text{Somm. } j \rightarrow 3$$

$$|12, -1\rangle \quad 1 \quad |13, 2\rangle \quad |13, 3\rangle$$

$$|12, -2\rangle \quad |12, -1\rangle \quad \downarrow J$$

$$|12, -3\rangle \quad |12, -2\rangle \quad 3 \geq$$

$$|12, -4\rangle \quad |12, -3\rangle \quad 3 \leq$$

$$\text{Per } j = 2 \quad |12, 2\rangle \quad |11, 2\rangle, |13, 2\rangle$$

$$|J\rangle$$

$$\text{Ora } m |12, 2\rangle = a |13, -1\rangle + b |12, 0\rangle + c |12, 1\rangle$$

I coefficienti di accoppiamento danno la prob. di trovare lo stato con il m considerato:

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |0, +\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1, -\rangle$$

COMPOSIZIONE DI DUE SPIN $\frac{1}{2}$

$$\begin{matrix} l_1 = \frac{1}{2} & l_2 = \frac{1}{2} \\ m_{l_1} = \pm \frac{1}{2} & m_{l_2} = \pm \frac{1}{2} \\ |+\rangle & |+\rangle \end{matrix}$$

$$|m_{j_1}, m_{j_2}\rangle : |++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$$

$$n = 0, 1 \rightarrow |100\rangle \text{ per } 0 \quad l_1 - l_2 \leq n \leq l_1 + l_2$$

$$|111\rangle, |110\rangle, |11, -1\rangle \text{ per } 1 \quad n+3=4$$

$$|m_{j_1}, m_{j_2}\rangle$$

$$|++\rangle \quad |+-\rangle$$

$$\frac{1}{2} (|+-\rangle + |-\rangle)$$

$$|--\rangle \quad |1-1\rangle$$

$$S_z |1, m_1\rangle = C_{\pm}(1, m_1) |1, m_1 \pm 1\rangle$$

$$C_{\pm}(1) = \pm [1(1 \pm 1) - m_1(m_1 \pm 1)]^{\frac{1}{2}}$$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)$$

$$\langle +0|00\rangle = 0$$

Tripletto di spin ($i=1$) è simmetrico per scambio. Il singolo letto ($i=0$) è antisimmetrico, per via del segno minus.

Particelle identiche

Ottiamo due particelle che a un certo punto arrivano in una stessa posizione e poi si separano. Non so quale è l'una e quale è l'altra perché non ho il concetto di traiettoria.

N : numeri quantici
degli spin
 q_i : numeri quantici
degli spin
 (\vec{r}_i, X_i) : Stato di spin

Il sistema è simmetrico per scambio di ogni coppia di particelle P_{ij} : operatori di scambio $i \leftrightarrow j$. $[P_{ij}, H] = 0$ per questa simmetria.

Consideriamo $\psi(q_1, q_2, \dots, q_N)$. Il sistema è simmetrico, ma ψ non ha in gen. una parte simmetrica per scambio.

Se $\psi(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots, q_N)$ è autofunzione di H , e $\psi = P_{ij}\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_i, \dots, q_N)$, ψ è anche autofunzione di H .

$$H\bar{\psi} = E\bar{\psi} \quad H.P_{ij}\psi = P_{ij}H\psi = P_{ij}E\psi = E\bar{\psi}$$

$$P_{ij}(P_{ij}\psi) = P_{ij}\bar{\psi} = \psi \rightarrow P_{ij}^2\psi = \psi \Rightarrow \pm 1$$
 autovalori

$$P_{ij}\psi = \psi \quad \psi \text{ simmetrica}$$

$$P_{ij}\psi = -\psi \quad \psi \text{ antisimmetrica}$$

Consideriamo N particelle: $\exists N!$ permutazioni, ognuna delle quali è combinazione di scambi (trasformazioni P_{ij}).

$$P_{(a)} \quad \text{Sistema } [P_{ij}, H] = 0 \Rightarrow [P_{(a)}, H] = 0$$

perm. pari: n° pari di trasp.
perm. dispari: n° disp. di trasp.

$$q_1 \rightarrow q_{P_1} \\ q_2 \rightarrow q_{P_2} \\ \vdots \\ q_N \rightarrow q_{P_N}$$

$$\alpha = 1, \dots, N! \quad P_{(a)}\psi(q_1, q_2, \dots, q_N) = \psi(q_{P_1}, q_{P_2}, \dots, q_{P_N})$$

Per $N > 2$ le permutazioni non commutano fra di loro, però. Ho quindi una DECORRIZZAZIONE DI SCAMBIO.

$\psi_{(a)}$ funzione ottenuta usando $P_{(a)}$. $H\psi_{(a)} = E\psi_{(a)}$ sono autofunz. di H ma non hanno una base comune

Si dimo: che:

1) $\psi_{(3)}(q_1, \dots, q_N)$ totalmente simmetrica $\xrightarrow{\text{deg.}} \psi_{(3)}$ e $\psi_{(3)} = \psi_3$

2) $\psi_{(4)}(q_1, \dots, q_N)$ totalmente antisimmetrica

$$P_{(a)}\psi_a = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\psi_a$$

$\xrightarrow{\text{scambi}}$ se pari $(+1)\psi_a$
 $\xrightarrow{\text{dispari}} (-1)\psi_a$

Questa dimostrazione è un po' difficile, perché non ci sarebbe corrispondenza che escludere gli autovalori ottenuti con le diverse simmetrie. Per escludendo una matrice massima, non ne ha determinazione \rightarrow Perdita di predicitività. Si introduce allora un altro particolare: in natura è evidente che gli unici stati finiti sono o quelli totalmente simmetrici, o quelli totalmente antisimmetrici \rightarrow POSTULATO DI SIMMETRIZZAZIONE, è in una cosa stato simmetrico, $[P_a, H] = 0$ e non si andrà mai in uno stato antisimmetrico.

Ma ci sono ancora ψ_0 e ψ_5 , non unicità.

- Per sistemi in cui lo spin è semi-intero, la Matura ha deciso che lo stato è antirimmetrice, e per valutare comunque direi che con H , l'evoluzione temporale non cambia nulla. Ora in che ci una sola realizzazione della funzione d'onda ψ .

Ora diciamo due particelle identiche: $N=2$ $\psi(q_1, q_2)$ non simmetrica: non avremo ancora uno stato fisico.

$$\psi_s(q_1, q_2) \text{ totale, simm.} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} (\psi(q_1, q_2) + \psi(q_2, q_1))$$

$$\psi_a(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(q_1, q_2) - \psi(q_2, q_1))$$

tre particelle identiche: $N=3$ $\psi(q_1, q_2, q_3)$

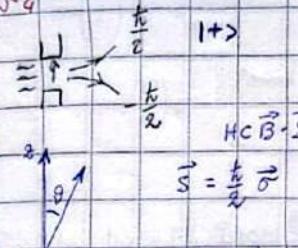
$$\psi_s(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{6} (\psi(q_1, q_2, q_3) + \psi(q_2, q_1, q_3) + \psi(q_2, q_3, q_1) +$$

$$+ \psi(q_3, q_1, q_2) \cancel{+} \psi(q_3, q_2, q_1) \cancel{+} \psi(q_1, q_3, q_2)) \text{ con le } \psi \text{ tutte autofunzioni di } H.$$

$$\psi_a = \frac{1}{6} (\psi(q_1, q_2, q_3) - \psi(q_2, q_1, q_3) + \psi(q_2, q_3, q_1) - \psi(q_3, q_1, q_2))$$

$$+ \psi(q_3, q_1, q_2) - \psi(q_1, q_3, q_2))$$

N° 4



FINE TUTORIALE 9

$$\vec{B} = (B_x \sin \theta, B_y \cos \theta)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B} \cdot \vec{\sigma} = B_x \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

nulla base z .

Diagonalizziamo $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ $\lambda = \pm 1$ per simmetria

$$(\cos \theta - 1 \quad \sin \theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mi dà una parete sono lin. ind.}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} x \xrightarrow{\text{non.}} 1 \alpha^2 + 1 \alpha^2 \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 = 1$$

$$x = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \beta = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$|1\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad |1\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$a) |\frac{1}{2}\uparrow\uparrow\downarrow\rangle^2 = |(1, 0)\left(\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\right)|^2 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$|\frac{1}{2}\downarrow\downarrow\downarrow\rangle^2 = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

+ ragionevoleamente
stato del spin

$$b) S_x = ? \quad |1\uparrow\uparrow\rangle_x ; \quad |1\downarrow\downarrow\rangle_x$$

$$|1\uparrow\downarrow\rangle_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad |1\downarrow\downarrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$|\downarrow \uparrow | \uparrow \uparrow \rangle^2 = \frac{1}{2} (1 + \sin \theta)$$

$$|\downarrow \downarrow | \uparrow \uparrow \rangle^2 = \frac{1}{2} (1 - \sin \theta)$$

$$\langle S_z \rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(+\frac{k}{\hbar}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\frac{k}{\hbar}\right) = \frac{k}{2} \cos \theta$$

ESERCITAZIONE 10

N° 1 spin = gire interno

$$i) H = -\gamma \vec{B} \cdot \vec{S} = -\frac{e \hbar \vec{B} \cdot \vec{S}}{2m}$$

$$|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow \rangle_z \quad H = -\mu_0 B_0 \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$|\uparrow \rangle_\theta = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow \rangle_z + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow \rangle_z$$

$$|\downarrow \rangle_\theta = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow \rangle_z + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow \rangle_z$$

$$|\uparrow \rangle_z = \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow \rangle_\theta - \sin \frac{\theta}{2} |\downarrow \rangle_\theta$$

$$|\downarrow \rangle_z = \sin \frac{\theta}{2} |\uparrow \rangle_\theta + \cos \frac{\theta}{2} |\downarrow \rangle_\theta$$

Da ora imponi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow \rangle_\theta \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow \rangle_\theta$$

$$\Rightarrow H_0 = -\mu_0 B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_- = -\mu_0 B_0$$

do diagonalizzato H ,

$$E_+ = \mu_0 B_0$$

e ora è più facile

$$|\psi(0)\rangle = |\uparrow \rangle_z = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\mu_0 B_0 t}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\mu_0 B_0 t}{\hbar}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\mu_0 B_0 t}{\hbar}} \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{i\mu_0 B_0 t}{\hbar}} \end{pmatrix}$$

rimo τ

$$b) ii) |\psi(-1/\tau)\rangle^2 = \left| \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\mu_0 B_0 t}{\hbar}} \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{i\mu_0 B_0 t}{\hbar}} \end{pmatrix} \right|^2 =$$

$$= \sin^2 \theta \sin^2 \left(\frac{\mu_0 B_0 t}{\hbar} \right)$$

$$iii) \frac{\mu_0 B_0 \tau}{\hbar} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

iv) $\sin^2 \theta = 1 \Rightarrow$ Campo \vec{B} lungo x . Dopo τ , c'è la ψ terza di bromio:

N° 2

$$a) Poniamo da [L_i, L_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} L_k \text{ e da } [S_i, S_k] = i \hbar \epsilon_{ijk} S_k$$

$$[L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [S_i, S_j] \text{ perché } [L_i, S_j] = 0$$

$$= i \hbar \epsilon_{ijk} (L_k + S_k)$$

" " S_k

$$b) [J_i, L^2] = [L_i + S_i, L^2] = [L_i, L^2] = [L_i, L_j L_j] = L_j [L_i, L_j] +$$

$$+ [L_i, L_j] L_j = L_j i \hbar \epsilon_{ijk} L_k + i \hbar \epsilon_{ijk} L_j L_k = 0 \text{ per le proprie di } \epsilon$$

$$c) [J_i, S^2] = [S_i, S^2] = 0 ; [J_i, L^2] = [L^2 + S^2 + 2 \vec{S} \cdot \vec{L}, L^2] =$$

$$= 2 [S_k L_k, L^2] = 2 S_k [L_k, L^2] + 2 [S_k, L^2] L_k$$

$$[J_i^2, S^2] = 0$$

N°3

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad l=1$$

$$|j, m_j\rangle \text{ per } J^z = J_z \\ |m_e, m_s\rangle \text{ per } \begin{cases} L^z, L_z \\ S^z, S_z \end{cases}$$

$$|l-s| \leq j \leq l+s \quad |j, m_j\rangle = T_{\frac{3}{2}}(\alpha_{m_e, m_s}) |m_e, m_s\rangle$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$$

$$j = \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \Rightarrow |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1, \frac{1}{2}\rangle \Rightarrow \alpha = 1$$

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = ? \quad \text{Usiamo } J_z = \hbar \left(I(j+z) - m(m \pm z) \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow |j, m \pm z\rangle$$

$$J_z |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = (I + S_z) |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{15}{4}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

$$= \sqrt{3} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = (I + S_z) |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{1 \cdot 2 - 1 \cdot 0} |0, \frac{1}{2}\rangle +$$

$$l=1 \quad s=\frac{1}{2} \quad + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + z \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} |1, -\frac{1}{2}\rangle =$$

$$= \sqrt{2} |0, \frac{1}{2}\rangle + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} |1, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2} |0, \frac{1}{2}\rangle + |1, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$L^z, S^z \downarrow$$

$$B_z |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2} |0, \frac{1}{2}\rangle + |1, -\frac{1}{2}\rangle \quad ;$$

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |0, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1, \frac{1}{2}\rangle$$

$$\text{se faccio } j = \frac{3}{2}, \text{ ho certezza di} \\ \text{trovare } L^z = \hbar k, S^z = \frac{k}{2}.$$

Così posso non essere sicuro.

Se minimo $J^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) = \frac{15}{4} \hbar^2$ e $J_z = \frac{k}{\lambda} \hbar$, trovo k .
che con $\frac{3}{2}$ di prob. trovo 0 , con $\frac{1}{2}$ trovo k .

Vediamo la

normalizzazione è un indicatore di correttezza dei conti.

Facciamo agire ancora T_z .

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ L_+ |0, \frac{1}{2}\rangle + S_- |0, \frac{1}{2}\rangle \right\} +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{3}} L_- |1, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{1 \cdot 2 - 0} |1, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} |0, -\frac{1}{2}\rangle \right\} +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{3}} |1^2 - 1 \cdot 0| |0, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ |1, \frac{1}{2}\rangle + |0, -\frac{1}{2}\rangle \right\} + \sqrt{\frac{2}{3}} |0, -\frac{1}{2}\rangle =$$

$$= \sqrt{2} |1, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, \frac{1}{2}\rangle + 2 \sqrt{\frac{1}{3}} |0, -\frac{1}{2}\rangle \neq \sqrt{\frac{1}{3}} |1, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |0, -\frac{1}{2}\rangle$$

Ho minimizzato J^2 e ho ottenuto $\frac{15}{4} \hbar^2$ e J_z e ho ottenuto $-\frac{k}{2}$. Quali minimi di L^z e S^z mi aspetta per queste misure? Lo vedo dai coefficienti

Razzi

$$|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |-1, -\frac{1}{2}\rangle \text{ perché } m = m_e + m_s$$

$$-\frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{2}$$

$j \neq \frac{1}{2}$. Ma stai avendo stallo m_j e dunque i devono essere ortogonali: $|1, \frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}} |0, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, -\frac{1}{2}\rangle$ da quanto ottenuto altrave, cambiando segno e scambiando.

$$|\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}} (2 - 0) |1, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}).$$

$$|0, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} (1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) |0, -\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} |1, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |0, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Quindi:

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left| 1, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left[\frac{2}{3} \left| 0, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, -\frac{1}{2} \right\rangle \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} j = \frac{3}{2} \\ i = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left[\sqrt{\frac{1}{3}} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 0, -\frac{1}{2} \right\rangle \right]$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \left| -1, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left| 0, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} j = \frac{1}{2} \\ i = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left| -1, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 0, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

N° 4
 $\left\{ \begin{array}{l} s = \frac{3}{2} \\ l = 1 \end{array} \right.$

$$|4\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \frac{-1}{2}, -1 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{5}} \left| \frac{3}{2}, 0 \right\rangle$$

$m_s \quad m_l$ $m_s \quad m_l$

$$\frac{1}{2} \leq j \leq \frac{5}{2}$$

$$\left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2}, 1 \right\rangle$$

$$\left| \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle = \left| -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle$$

Uniamo l'op. di normalizzazione:

scissore

$$\left[\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{5}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left| \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle = \sqrt{15} \left| \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle$$

Oltremo ormai a destra:

$$\left\{ \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left| -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle + \sqrt{2} \left| \frac{3}{2}, 0 \right\rangle = \right.$$

$$= \sqrt{3} \left| -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle + \sqrt{2} \left| \frac{3}{2}, 0 \right\rangle$$

↓

$$\left| \frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} \left| -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \frac{3}{2}, 0 \right\rangle \equiv |4\rangle$$

Stiamo in un'autostrada, e ci entra! Prob = 1 per avere $J^2 = \frac{35}{9} h^2$ e $m_s = \frac{3}{2} h$.

$$P(S_2 = -\frac{5}{2} h, L_2 = -h) = \frac{3}{5}$$

$$P(S_2 = -\frac{3}{2} h, L_2 = 0) = \frac{2}{5}$$

Lo leggo proprio da come sono etichettati i coefficienti.

N°2

$$H = H_0 + \alpha z^3 = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 z^2 + \underbrace{\alpha z^3}_{H'}$$

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_n^{(0)} + \tilde{E}_n^{(2)}$$

 $\langle n | H' | n \rangle$

$$\text{Ricordiamo } z = \left(\frac{\pi}{2M\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \{a + a^\dagger\}$$

$$\begin{aligned} H' &= \alpha z^3 = \alpha \left(\frac{\pi}{2M\omega}\right)^{\frac{3}{2}} [a + a^\dagger]^3 = \\ &= \alpha \left(\frac{\pi}{2M\omega}\right)^{\frac{3}{2}} [(a + a^\dagger)(a^2 + a^{+2} + \underbrace{a^\dagger a + a a^\dagger}_{N+N+1})] \\ &= \alpha \left(\frac{\pi}{2M\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \{ (a + a^\dagger)(a^2 + a^{+2} + 2N + 1) \} \end{aligned}$$

 \Downarrow

$$\begin{aligned} \langle n | H' | n \rangle &\propto \langle n | (a + a^\dagger)(a^2 + a^{+2} + 2N + 1) | n \rangle = 0 \text{ perché} \\ \langle n | \cancel{n+i} | n \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Quanto ottengo facendo agire $(a + a^\dagger)(a^2 + a^{+2} + 2N +$

+ 1). E non ci sono quindi tanti operatori di allontanamento quanti di innalzamento, non si tornerei mai a iniz. e il prodotto scalare è zero. Con un operatore dispari in gen. vale i comi.

Al secondo ordine, $E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|H_{kn}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$. Qui non guardiamo solo gli elementi diagonali.

$$\begin{aligned} \text{Faccendo agire } (a + a^\dagger)^3, \quad \langle k | H' | n \rangle &= \langle k | n-3 \rangle = -\delta_{k,n-3} \Rightarrow \text{corrispondenze del tipo} \\ &\frac{\alpha^2 k^3}{2M\omega} \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)}{3\hbar\omega} + \right. \\ &\left. + \frac{9n^3}{\hbar\omega} - \frac{9(n+1)^3}{\hbar\omega} - \frac{9(n+2)^3}{\hbar\omega} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3\hbar\omega} \right\} \end{aligned}$$

Si potrà ridurre in rapporti delle coord. studiando la parità dei poli di Hermite nell'integrale del prodotto scalare.

N°3 EFFETTO STARK

Inserendo un campo \vec{E} si rompe la simmetria sferica \rightarrow Parziale rimozione della degenerazione che n'ha perché c'è ci sono l, m con più valori, c'è parziale romoz. si traduce in una separazione detta dei livelli.

$$H' = eE\hat{z} \quad n=1 \quad 1 \text{ stato}$$

$$\langle 100 | H' | 100 \rangle = \langle 100 | eE\hat{z} | 100 \rangle = 0$$

per parità, dato perché n'ha $(-1)^l$ parità anomala, e inoltre $p^+ \hat{z} p^- = -z$

$$\begin{aligned} &= \langle 001 | \hat{p}^2 (eE\hat{z}) \hat{p}^2 | 100 \rangle = \langle 100 | \cancel{p^2} (eE\hat{z}) \cancel{p^2} | 100 \rangle = \\ &= - \langle \quad \rangle \Rightarrow \langle \quad \rangle = 0 \quad \text{Niente correzioni al} \\ &\text{primo ordine} \Rightarrow \text{NO MOMENTI DI DIPOLO PERMANENTE} \end{aligned}$$

$$n=2 \quad |200\rangle \quad |210\rangle \quad |21-1\rangle \quad |21+1\rangle$$

Dobbiamo, in questo caso di degenerazione, calcolare

$$\sum_{s=1}^{\infty} [H'_{n,m,n,s} - E_{n,s}^{(2)}] c_{rs} = 0. \quad \text{Ma consideriamo}$$

$$\text{Sono zero non negli questo} \quad \langle n'l'm' | \hat{z} | nlm \rangle \xrightarrow{\text{Punto}} -(-1)^{l+l'} \langle n'l'm' | \hat{z} | nlm \rangle$$

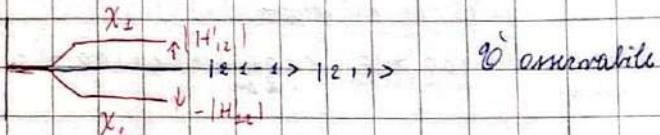
\Rightarrow $l \neq l'$ (una trattaz. più gen. dice che $l' = l \pm 1$, ma qui $l = i \neq \pm 1$) \Rightarrow Ma sufficiamo di calcolare gli int in rapporto di esponenti \Rightarrow faccio: $\int dy e^{-i(m-m')y} \propto \delta(m-m') \Rightarrow m=m'$ \Rightarrow Concentriamoci allora su $|200\rangle$ e $|210\rangle$. Restano solo due equazioni, e le stanno scritte.

$$\chi_{rs}^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} C_{rs} \psi_{rs}^{(0)}$$

$$\begin{cases} -E_n^{(0)} C_{r1} + H_{12}^{(0)} C_{r2} = 0 \\ H_{21}^{(0)} C_{r1} - E_n^{(0)} C_{r2} = 0 \end{cases}$$

Ottiamo risolto la degenerazione, perché c'è separazione dei due stati: $E_n^{(0)} = |H_{11}|^2 = 0$ $E_n = \pm |H_{22}|$

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{200} - \psi_{200}) \quad \chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{200} + \psi_{200}) \quad \text{in termini degli autostati degli atomi di idrogeno}$$



$$H_{12}^{(0)} = \frac{eEz^3}{16\pi^2 \omega^3} \int_0^\infty dz z^3 \left(\frac{2z}{\omega}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2\omega^2}\right) e^{-\frac{2z^2}{\omega^2}} \int_0^1 \sin\theta \cos^2\theta \int_0^{\pi/2} d\phi =$$

$$= \frac{eEz^3}{12\omega^3} \left(\frac{\omega}{z}\right)^4 \int_0^\infty dp p^4 \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) e^{-p^2/z^2} = \frac{2z}{\omega} = p \quad dz = dp \frac{\omega}{2} \quad p = \frac{\omega}{z} p$$

$$= \frac{2eE}{12z^2} \left\{ P(5) - \frac{1}{2} P(6) \right\} \quad P(z) = \int dt e^{izt} e^{-t}$$

$$P(n) = (n-1)! \Rightarrow -\frac{32eE}{z^2} \quad \text{valori nelle connessioni di energia}$$

$$N=3 \quad \text{campo elettrico noto} \quad E$$

$$H = H_0 + q\vec{E}\cdot\vec{r} = p/\tau_m + \frac{1}{2} M\omega^2 \vec{r}^2 + q\vec{E}\cdot\vec{r} \quad \text{Completando il quadrato si può risolvere senza perturbazioni, comparsa un termine costante che produrrà uno scalo reale d'energia}$$

$$\tilde{E}_n^{(1)} = \langle n | q\vec{E} \cdot \vec{r} | n \rangle = 0 \quad \text{per il ragionam. di prima}$$

$$\text{Al I ordine } E_n^{(1)} = \sum_{k \neq n} \frac{|H_{kn}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

$$H'_{mn} = qE \sqrt{\frac{k}{2M\omega}} \langle m | (q\vec{E} \cdot \vec{r}) | n \rangle = qE \sqrt{\frac{k}{2M\omega}} \langle m | \sqrt{n} | n-1 \rangle +$$

$$+ \sqrt{n+1} | n+1 \rangle = qE \sqrt{\frac{k}{2M\omega}} \left\{ \sqrt{n} \delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} \right\}$$

notiamo $H'_{n-1,n} = H'_{n+1,n}$ sono diversi da zero $\Rightarrow \frac{|H'_{n-1,n}|^2}{E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)}} + \frac{|H'_{n+1,n}|^2}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}}$

$$H'_{n-l,n} = qE \sqrt{\frac{k}{2M\omega}} \sqrt{n} \quad H'_{n+l,n} = qE \sqrt{\frac{k}{2M\omega}} \sqrt{n+1}$$

\Downarrow Quadrato

$$qE \sqrt{\frac{k}{2M\omega}} q^2 E^2 \frac{k n}{2M\omega}$$

$$q^2 E^2 \frac{k}{2M\omega} (n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{q^2 E^2 k}{2M\omega} \left\{ \frac{n}{k\omega} - \frac{n+1}{k\omega} \right\} = - \frac{q^2 E^2}{2M\omega^2} \quad \text{Butti gli stati vengono corretti, perché non c'è dipendenza da } n.$$

$$\text{Riserviamo} \quad \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 \left(\vec{r}^2 + \frac{q^2 E^2}{M\omega^2} \xi^2 + \frac{q^2 E^2}{M^2 \omega^4} - \frac{q^2 E^2}{M^2 \omega^4} \right) =$$

$$= \frac{p^2}{2M} - \frac{1}{2} M\omega^2 \xi^2 - \frac{q^2 E^2}{2M\omega^2} = \xi^2$$

$$= \left(N + \frac{1}{2}\right) k\omega - \frac{q^2 E^2}{2M\omega^2} \quad \text{Questa Ham. in sé non avrà correzioni al primo ordine.}$$

$$N=4 \quad \text{campo elettrico noto} \quad E$$

$$H' = E E_2 \frac{x}{L} \quad E_2 = \frac{\pi^2 k^2}{2M L}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall n$$

$$\langle 1 | E E_2 \frac{x}{L} | 1 \rangle = \frac{E E_2}{L} \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) x \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{E E_2}{L^2} \frac{\xi}{2} \int_0^L dx x \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{E E_2}{L^2} \frac{\xi}{2} \int_0^L dx x \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right) =$$

$$= \frac{E E_2}{L^2} \left\{ \frac{L^2}{2} \right\} - \frac{E E_2}{2}. \quad E_2 \rightarrow E_2 \left(1 + \frac{E}{\hbar}\right)$$

Po' il ξ stato mutto un i nell'arg. del min' e del cos.
Ma la parte col cos è sempre zero. Risulta che

$$E_2^{(1)} = \frac{E E_2}{2} \Rightarrow E_2 \rightarrow E_2 + \frac{E}{2} E_2.$$

$$\int_0^L dx e^{i(m-m')x} = \delta_{mm'} \text{ odi Kronecker}$$

$$\Rightarrow E = \left\{ \frac{k^2 \pi^2}{L^2} + \frac{q^2}{4} - \frac{k^2 \pi^2}{4L^2} \right\} \hbar$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{+1}{4}$$

$$c_b^{(1)}(t) = \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_{ba}^{(1)} e^{i\omega_{ba} t'} \quad \text{e la prob. è il modulo quadro}$$

$$\omega_{ba} = \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

es. 1

$$H'(t) = \begin{cases} q \varepsilon x & t \in [0, \tau] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P(0 \rightarrow 1) \quad P(1 \rightarrow 3) \quad P(1 \rightarrow 2)$$

$$P_{ab} = \left| \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_{ba}^{(1)} e^{i\omega_{ba} t'} \right|^2$$

Bisogna calcolare l'elemento di matrice $H_{10}^{(1)} = \langle 1 | q E \sqrt{\frac{k}{2\pi\omega}} (\sigma + \sigma^\dagger) | 0 \rangle$

$$= q E \sqrt{\frac{k}{2\pi\omega}} \langle 1 | 1 \rangle = q E \sqrt{\frac{k}{2\pi\omega}}$$

$$\omega_{ba} = +\omega \quad \text{perché le energie sono separate di } \hbar\omega$$

$$\frac{i}{\hbar} q E \sqrt{\frac{k}{2\pi\omega}} \int_0^t dt' e^{i\omega t'} dt' \Rightarrow \frac{i}{\hbar} q E \sqrt{\frac{k}{2\pi\omega}} \frac{i}{\hbar \omega} (e^{i\omega t} - 1) =$$

$$= \frac{q E}{\hbar k} \frac{2q E}{k} \sqrt{\frac{k}{2\pi\omega}} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

$$P(0 \rightarrow 1) = \frac{q^2 E^2}{k} \frac{1}{2\pi\omega^3} \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

$$H_{21}^{(1)} = \langle 2 | q E \sqrt{\frac{k}{2\pi\omega}} (\sigma + \sigma^\dagger) | 1 \rangle = q E \sqrt{\frac{k}{2\pi\omega}} \sqrt{2}$$

$$P(1 \rightarrow 2) = 2 P(0 \rightarrow 1)$$

$$P(1 \rightarrow 3) = 0 \quad \text{perché l'elemento di matrice è nullo}$$

Quindi la transizione a quest'ordine perturb. dal 1 al 2 è stato
i probabilità.

N°2

$\omega_{22} = \omega$ vale solo se $b = 0$ sono contigui. Se non si ha n con n dato dal salto.

$$H'(t) = A z^2 e^{-bt} \quad x^2 = \frac{k}{2\pi\omega} (\dot{z}^2 + z^{+2} + 2N + 1)$$

Dobbiamo calcolare un elemento generico di matrice partendo da 0 (ruoto, o stato fondamentale)

$$H'_{mo} = \frac{k}{2\pi\omega} A e^{-bt} \langle m | z^2 + z^{+2} + 2N + 1 | 0 \rangle =$$

$$= \frac{k}{2\pi\omega} A e^{-bt} \langle m | (\bar{z}/2 + 1_0) \rangle = \frac{k}{2\pi\omega} A e^{-bt} (\bar{z} \delta_{mz} + \delta_{mo})$$

Quindi sono permessi 2 e 0. Quindi c'è una prob. di permanenza nullo stato fond.

c'è cioè un lungo tempo

$$P(0 \rightarrow 2) = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt' H'_{20} e^{i\omega t'} dt' \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{i}{i\hbar} \frac{k}{2\pi\omega} A \bar{z}_2 \int_0^\infty dt' e^{-bt'} e^{i\omega t'} \right|^2 = \left| \frac{1}{2\pi\omega i} A \bar{z}_2 \frac{1}{(i\omega - b)} e^{(i\omega - b)t'} \right|^2$$

$$= \frac{A^2}{2M^2\omega^2} \frac{1}{(i\omega^2 + b^2)}$$

parte cosi

$= 0$

$$\text{Cambiando } H_{20} \text{ in } H_{00} \text{ si trova } P(0 \rightarrow 0) = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt' \left(\frac{\hbar A}{2\pi\omega} \right) e^{-bt'} \right|^2 = \left| \frac{A}{2\pi\omega} \frac{1}{-b} e^{-bt'} \right|^2 = \frac{A^2}{4M^2\omega^2 b^2}$$

N°3

$$t_x = \epsilon_0 \sin \omega t$$

$$H' = e \epsilon_0 \sin \omega t \hat{z} = H'(t) = H \sin \omega t$$

$$\text{Definiamo A antihermitiano } \frac{\hat{H}'}{2i} = \frac{eE\hat{z}}{2i} \Rightarrow H'(t) = Ae^{i\omega t} + A^+ e^{-i\omega t}$$

ψ_{200} è ambiguo "I stato eccitato", perché ci sono 4 stati con stessa energia. Ma in virtù delle regole di selezione sopravvivono solo ψ_{200} e ψ_{210} per questioni di parità e perché $[L^z, L_z] = 0$.

Ricordiamo che $E_n = -\frac{R_n}{n^2}$

$$i\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

$$c(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' (A_{21} e^{i\omega t'} e^{i\omega_{21} t'} +$$

$$+ A_{21}^+ e^{-i\omega t'} e^{i\omega_{21} t'}) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' A_{21} e^{i(\omega + \omega_{21})t'} + A_{21}^+ e^{i(\omega_{21} - \omega)t'} =$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \left\{ \frac{A_{21}}{i(\omega + \omega_{21})} e^{i(\omega + \omega_{21})t'} \Big|_0^t + \frac{A_{21}^+}{i(\omega_{21} - \omega)} e^{i(\omega_{21} - \omega)t'} \Big|_0^t \right\}. \quad \text{Ci}$$

mettiamo in risonanza: ei dire quindi c'è essere un termine che predomina sull'altro: il secondo, perché $\omega_{21} - \omega$ diventa molto piccolo

$$\Rightarrow \sim \frac{1}{i\hbar} \left\{ \frac{A_{21}^+}{i(\omega_{21} - \omega)} \left\{ e^{i(\omega_{21} - \omega)t'} \Big|_0^t \right\} \right\} = \frac{A_{21}^+}{-i(\omega_{21} - \omega)} e^{\frac{i(\omega_{21} - \omega)t}{2}} +$$

$$- \left. \frac{-i(\omega_{21} - \omega)t}{2} \right\} \frac{2i}{2i} = \frac{A_{21}^+ 2i}{-i(\omega_{21} - \omega)} e^{\frac{i(\omega_{21} - \omega)t}{2}} \sin \left(\frac{\omega_{21} - \omega}{2} t \right)$$

$$P = \frac{\left| A_{21}^+ \right|^2}{t^2 (\omega_{21} - \omega)^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_{21} - \omega}{2} t \right) \frac{t^2}{t^2} = \frac{\left| A_{21}^+ \right|^2}{t^2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega_{21} - \omega}{2} t \right)}{\left(\frac{\omega_{21} - \omega}{2} t \right)^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_{21}} P(1 \rightarrow 2) = \frac{\left| A_{21}^+ \right|^2}{t^2} t^2. \quad \text{Quindi } A_{21}^+ \text{ deve essere abbastanza piccolo per poter}$$

interpretare la quantità come una probabilità.

$$A^+ = -\frac{\hat{A}}{\hbar i} = -\frac{eE_0}{\hbar i} \hat{x}$$

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi \omega^3}} e^{-\frac{r}{2\omega}}$$

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \omega}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \cos \theta e^{-\frac{r}{2\omega}}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\hbar i} e E_0 \cos \theta = -\frac{1}{\hbar i} e E_0 \langle 210 | \hat{x} | 100 \rangle =$$

$$= -\frac{1}{\hbar i} e E_0 \frac{1}{\sqrt{\pi \omega^3}} \frac{1}{\sqrt{32\pi \omega^5}} \int_{-1}^1 d\cos \theta \int_0^\infty dr r^4 (\cos \theta)^2 e^{-\frac{r}{2\omega}} =$$

$$= K \frac{2}{3} \int_0^\infty dr r^4 e^{-\frac{3}{2\omega} r} \quad p = \frac{3}{2\omega} r \quad dr = \frac{2\omega}{3} dp \quad r = \frac{2\omega}{3} p$$

$$= K \frac{2}{3} \left(\frac{2\omega}{3} \right) \int_0^\infty dp p^4 e^{-p} = \text{mass} \frac{32}{3} \omega K = \frac{32}{3} \omega \left(\frac{1}{2\omega} \rho E_0 \right)^3$$

$\Gamma(5) = 4! = 24$

$$= \frac{32}{3} \omega \left(-\frac{1}{\hbar i} \right) e E_0 \frac{2\pi}{\sqrt{32\pi^3 \omega^11}}$$

$$P = \frac{|A_{101}^+|}{t^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{2H\dot{r}\dot{t}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} - \left(1 - \frac{2M}{r} - H^2 r^2\right) \dot{t}^2 \quad (2)$$

$$\ddot{r}_t = \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} - Hr\right)\dot{t} + \frac{\dot{r}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} ; \quad F_t = -\left(\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} + Hr\right)\dot{t} + \frac{\dot{r}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

$$\frac{dt}{dr} = - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \left\{ \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} - Hr \right\}} \quad \text{for ingoring null geodesics.}$$

Euler-Lagrange equations (i.e., what is obtained from the variation of \mathcal{L}).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = - \frac{2H\dot{r}\dot{t}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} - 2\dot{t} \left(1 - \frac{2M}{r} - H^2 r^2\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{2H(t)r \frac{\partial r \partial t}{\partial t \partial t}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} - \left(1 - \frac{2M}{r} - H^2(t)r^2\right) \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 \right\} =$$

$$= - \frac{2r\dot{r}\dot{t}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \frac{\partial H}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \left(H^2(t) \right) r^2 \dot{t}^2} = \frac{\partial f(g(t))}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial t} = 2H \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \left\{ - \frac{2r\dot{r}\dot{t}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} - 2Hr^2\dot{t}^2 \right\} \frac{\partial H}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f(a(t))}{\partial t} =$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \cancel{- \frac{2H\dot{r}\dot{t}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}} - \frac{2H\dot{r}\dot{t}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} - \frac{2H\dot{r}\dot{t}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} +$$

$$\text{or } r^2 = f(a(t))$$

$$+ \frac{1}{\cancel{r}} \frac{\cancel{2H\dot{r}\dot{t}}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\dot{r}}{r^2}\right) 2M - 2\dot{t} \left(1 - \frac{2M}{r} - H^2 r^2\right) - 2\dot{t} \left(\frac{2M\dot{r}}{r^2} + 2H^2 r \dot{r} \right) + \cancel{2H\dot{r}\dot{t}}$$

↓

* EULER-LAGRANGE EQUATION *

$$- \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \left\{ + \underline{2H\dot{r}^2} + \underline{2H\dot{r}\dot{t}} \right\} + \frac{2H\dot{r}^2 M}{r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} - 2 \left\{ \dot{t} - \frac{2M}{r} \dot{t} - H^2 r^2 \dot{t}^2 - \frac{2M\dot{r}\dot{t}}{r^2} - 2H^2 r \dot{r} \dot{t} \right\}$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial t} \left\{ \frac{2r\dot{r}\dot{t}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} + 2Hr^2 \dot{t}^2 \right\} = 0$$

$$\frac{-2H}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \left\{ \dot{r}^2 + r\ddot{r} \left\{ + \frac{\lambda H \dot{r}^2 M}{r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} - 2 \left\{ \ddot{t} \left[r - \frac{2M}{r} - H^2 r \dot{r} \right] - 2\pi t \left[\frac{M}{r^2} + rH^2 \right] \right\} + \right. \right.$$

(B)

$$+ 2 \frac{\partial H}{\partial t} \left\{ \frac{r\dot{r}\dot{t}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} + H r^2 \dot{t}^2 \right\} = 0$$

$$- \frac{2H}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \left\{ \dot{r}^2 + r\ddot{r} \left\{ + \frac{\lambda H M \dot{r}^2}{r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} + 2\pi t \left[\frac{M}{r^2} + rH^2 \right] + \frac{\partial H}{\partial t} \left\{ \frac{r\dot{r}\dot{t}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} + H r^2 \dot{t}^2 \right\} \right\} = 0 \right\}$$

N PARTICELLE IDENTICHE $\xrightarrow{H_Q}$ INDISTINGUIBILI $\Rightarrow [P_{ij}, H] = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow [P_{(\alpha)}, H] = 0$. MA $[P_{(\alpha)}, P_{(\beta)}] \neq 0$
 \Rightarrow DEG. DI SCAMBIO, per cui le $N!$ $\psi_{(\alpha)}$ sono autofunzioni di H come
 stessi numeri quantici \Rightarrow PERDITA POTERE PREDITTIVO anche misurando
 i massimi che danno un set completo.

Il Soluz. SPIN INTERO ψ_S BOSONI
 POSTULATO DI SPIN SEMIINTERO ψ_A FERMIONI
 SIMMETRIZAZIONE \exists solo ψ_S, ψ_A con

Questo postulato non è presente in meccanica quantistica. Viene dalla teoria dei compi.

N PARTICELLE IDENTICHE NON INTERAGENTI

$$H = \sum_{i=1}^N H_i \quad H_i u_\lambda(q_i) = E_\lambda u_\lambda(q_i)$$

$$q_i = (\vec{r}_i, \chi_i) \quad \lambda: \text{set numeri quantici} = \{d_1, d_2, \dots\}$$

$$\vec{r}_i \quad \chi_i$$

$$H_2 u_{d_2}(q_2) = E_{d_2} u_{d_2}(q_2)$$

$$H\psi(q_1, \dots, q_N) = \tilde{\epsilon}\psi(q_1, \dots, q_N); \text{ Separabilità} \Rightarrow \psi(q_1, \dots, q_N) = \prod_{i=1}^N u_\lambda(q_i).$$

$$u_\beta(q_2) \cdots u_\lambda(q_i) \cdots u_\nu(q_N); \quad \tilde{\epsilon} = E_\chi + E_\beta + \cdots + E_\lambda + \cdots + E_\nu$$

Altro set $\tilde{\epsilon} = \{E_1, E_2, \dots\}$

Contrariamente CASO $N=2$ $\tilde{\epsilon} = E_\chi + E_\beta$ $\psi_S(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_\chi(q_1)u_\beta(q_2) + u_\chi(q_2)u_\beta(q_1)]$; $\psi_A(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_\chi(q_1)u_\beta(q_2) - u_\chi(q_2)u_\beta(q_1)]$

CASO $N > 2$

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} u_\alpha(q_1) & u_\beta(q_1) & \cdots & u_\nu(q_1) \\ u_\alpha(q_2) & u_\beta(q_2) & \cdots & u_\nu(q_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_\alpha(q_N) & u_\beta(q_N) & \cdots & u_\nu(q_N) \end{vmatrix}$$

DETERMINANTE
DI
SLATER

Se scambio due indici, ~~scambio~~ scambio due righe, quindi l'anno mutria i garantita.

$$\psi_a = [\psi_a \text{ scambiando i segni negativi con i puntini}].$$

PRINCIPIO DI ESCLUSIONE DI PAULI (~ 1925)

n fermioni identici $\rightarrow \psi_a$ dal det. di Slater. Pensiavamo due fermioni con lo stesso set di numeri quantici, ad es. $d=3 \rightarrow$ det-0 $\Rightarrow \psi_a=0$. Per n ferm. identici, quindi, \neq due fermioni con stessi numeri quantici, cioè con stesso set \Rightarrow solo un fermione può occupare uno stato / set di numeri quantici.

STRUTTURA ATOMICA

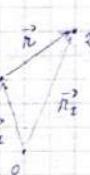
$$H \quad 1e^- \rightarrow \begin{array}{c} n \\ 1 \\ \downarrow \\ \text{spin} \end{array}$$

$$He \quad 2e^- \rightarrow 1S^2 (1\alpha)$$

$$Li \quad 3e^- \rightarrow 1S^2 (1\alpha) 2S$$

Funzione d'onda con due ulteriori: $\psi_a(q_1, q_2) = \psi(\vec{r}) X_s$ - stato di spin.

Scambio $\rightarrow 1 \geq 2 \Rightarrow \vec{r}_1 \rightarrow -\vec{r}_2$ col 2 come al 1 sottostante un'operazione di parità.



$$\psi(\vec{r}^2) = R_{nlm}(r) Y_{l,m}(\theta, \phi) \xrightarrow{\text{parità}} (-1)^l$$

$$X_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-> - |-+>) ; X_z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{array}{l} |++> \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-> + |-+>) \\ |--> \end{array} \right.$$

Per capire cosa succede con lo scambio, studio lo stato di spin. Se $\lambda=0$, $X_s \rightarrow -X_s$. Ma noi vogliamo che la funzione complessiva cambi segno, perché è $\psi_a \Rightarrow$ è pari. Gli stati di singololetto sono solo quelli con il parit.

Ma se lo stato è un tripletto, il dispari, faremo $X_s \rightarrow +X_s$ e deve contrar segno la parte orbitale.

Sarebbe se queste sono le conseguenze dell'impostare $\psi_a = \psi_a$. Abbiamo studiato il caso $\psi = \psi$. L'impostazione $\psi = \psi_a$ nei quark non fa nulla a definire una ψ come $\psi_0 \psi_1 \psi_2 \psi_3$, col colore antinuovo. Perché

$$\underbrace{\psi_1}_{\substack{\text{color} \\ \text{spin}}} \underbrace{\psi_2}_{\substack{\text{flavor} \\ \text{color}}} \underbrace{\psi_3}_{\substack{\text{color} \\ \text{antinuovo}}} \underbrace{\psi_4}_{\substack{\text{color} \\ \text{spin}}} = \psi_a.$$

Trattiamo sistemi conservativi, e allora ~~ma~~ non siamo in grado di risolvere pienamente soluz. stazionaria. Consideriamo la

TEORIA DELLE PERTURAZIONI STAZIONARIE

$$H = H_0 + \lambda H' \xrightarrow{\substack{\text{piccola} \\ \text{correzione}}} \lambda \ll 1 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$[H_0, H'] \neq 0$$

Perché se ho un set di autovalori ~~comuni~~ comuni, risolto H_0 , ho già risolto anche H' .

a) CASO NON DEGENERAZIONE

$$H_0 |\psi_n> = \tilde{\epsilon}_n^{(0)} |\psi_n>$$

$$\text{Vogliamo risolvere } H |\psi_n> = \tilde{\epsilon}_n |\psi_n>.$$

Il procedo corrente di fare sviluppi in serie. Supponiamo che

$$\tilde{\epsilon}_n = \tilde{\epsilon}_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots$$

$$|\psi_n> = |\psi_n> + \sum_{k \neq n} c_{nk}(\lambda) |\psi_k> \quad c_{nk}(0) = 0$$

$$c_{nk}(\lambda) = (\lambda)_{nk}^{(1)} + \lambda^2 c_{nk}^{(2)} + \dots$$

Quindi:

$$\begin{aligned} & (H_0 + \lambda H') (|\psi_n> + \lambda \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} |\psi_k> + (\lambda^2) \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(2)} |\psi_k> + \dots) = \\ & = (\tilde{\epsilon}_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots) (|\psi_n> + \lambda \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} |\psi_k> + \lambda^2 \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(2)} |\psi_k> + \dots) \end{aligned}$$

Ordine zero in λ : λ^0) (NESSUNA CORREZIONE)

$$H_0 | \psi_n \rangle = E_n^{(0)} | \psi_n \rangle \quad \text{ci sono ordini diversi solo } E_n^{(0)}$$

$$\lambda^1: H_0 \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(1)} | \psi_k \rangle + H' | \psi_n \rangle = E_n^{(0)} \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(1)} | \psi_k \rangle + E_n^{(1)} | \psi_n \rangle$$

si considerano anche il fattore λ , ovviamente, ecc. ma non λ^2

$$\lambda^1: H_0 \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(1)} | \psi_k \rangle + H' \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(1)} | \psi_k \rangle = E_n^{(0)} \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(1)} | \psi_k \rangle + E_n^{(1)} \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(1)} | \psi_k \rangle + E_n^{(1)} | \psi_n \rangle$$

Studiamo il caso λ^2 .

$$(H_0 - E_n^{(0)}) \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(2)} | \psi_k \rangle + (H' - E_n^{(1)}) | \psi_n \rangle = 0$$

$$\sum_{k \neq n} C_{nk}^{(2)} [E_n^{(0)} - E_n^{(0)}] | \psi_k \rangle + (H' - E_n^{(1)}) | \psi_n \rangle = 0 \quad \text{Moltiplico per } \langle \psi_m |,$$

cioè proietto sugli stati $\langle \psi_m |$. Erro:

$$\sum_{k \neq n} C_{nk}^{(2)} [E_n^{(0)} - E_n^{(0)}] \delta_{mk} + \underbrace{H'_{mm} - E_n^{(1)}}_{\substack{\text{elemento di} \\ \text{matrice tra gli} \\ \text{stati non perturbati}}} \delta_{mm} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m \neq n} C_{nm}^{(2)} [E_m^{(0)} - E_m^{(0)}] + H'_{mm} - E_n^{(1)} \delta_{mm} = 0 \quad \substack{\text{NON SO SE } m \neq n \text{ E} \\ \text{LO LASCI COSE}}$$

$$\text{CASO } m=n \quad H'_{nn} - E_n^{(1)} = 0 \Rightarrow H'_{nn} = E_n^{(1)} = \boxed{\langle \psi_n | H' | \psi_n \rangle}$$

$$\text{Ma } E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \dots = E_n^{(0)} + \lambda \langle \psi_n | H' | \psi_n \rangle + \dots$$

$$= E_n^{(0)} + \langle \psi_n | \lambda H' | \psi_n \rangle + \dots$$

VALOR MEDIO DA
LA PERTURBAZIONE
TRA GLI STATI NON
PERTURBATI

λ è un parametro arbitrario che può avere diverse posti a i trovati argomenti validi. Gli argomenti sono piccole perturbazioni.

Cioè che conta è $\langle \psi_n | H' | \psi_n \rangle$ non $\lambda H'$. Dico che un operatore è piccolo non significa nulla, solo perché è piccolo non vuol dire niente. Di fatto, ne definisce

$$C_{nm}^{(1)} (E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) + H'_{mm} = 0 \quad \lambda H' = H'$$

Pero determinare allora $C_{nm}^{(1)} = \frac{H'_{nm}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$, e cioè correggo gli auto-

stati. Prima, avevo corrotto gli autostati.

Ma meglio che i nuovi autostati non siano molto diversi dai vecchi.

Allora H'_{nm} deve essere minore dei molti tra gli autostati, visto che

includendo λ , farebbe $\lambda C_{nm}^{(1)} = \frac{\lambda H'_{nm}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$

la perturbazione è $\lambda H'$

ACCOPPIA GLI STATI

$$|\langle \psi_m | (\lambda H') | \psi_n \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}| \quad \text{PICCOLA CORREZIONE}$$

NE T.C. NON STA VELATA ^{STAVICINA} _{SPERARSI AL SALTI ENERGETICI.} L'ACCOPPIAMENTO TRA STATI NON PER PERTURBATI DEVE ESSERE C.C. SALTO. ALLORA MI PIACE PONTO $\lambda=1$, PERCHÉ HO ANCORA MENTI FISICI PER DIRLO.

Se ci è degenerazione, il denominatore va a zero e non è il raggio momento non funziona più. La perturbazione va fuori controllo.

Quindi: $E_n = E_n^{(0)} + \langle \psi_n | \lambda H' | \psi_n \rangle + \dots$

$$| \psi_n \rangle = | \psi_n \rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle \psi_k | \lambda H' | \psi_n \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} | \psi_k \rangle + \dots$$

N.B.

Non si confrontano operatori, ma elementi di matrice o valori medi. Cioè λ per controllare la perturbazione. La condizione finita è quella nell'accoppiamento? Allora definisco $H = \lambda H'$ e mi domando di λ - λ serve solo per i parametri intermedi.

AI SECONDO ORDINE

$$(H_0 - E_n^{(0)}) \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(2)} | \psi_k \rangle + (H' - E_n^{(1)}) \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(2)} | \psi_k \rangle - E_n^{(2)} | \psi_n \rangle = 0$$

Hence sommo tutto e $H_0 \rightarrow E_n^{(0)}$

$$\sum_{k \neq n} (E_k^{(0)} - E_n^{(0)}) C_{nk}^{(2)} | \psi_k \rangle + (H' - E_n^{(1)}) \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(2)} | \psi_k \rangle - E_n^{(2)} | \psi_n \rangle = 0$$

$\langle \varphi_m |$

$n=m$

$$\Rightarrow \sum_{k \neq n} (E_k^{(2)} - E_n^{(0)}) C_{nk}^{(2)} \delta_{mk} + \sum_{k \neq n} (H'_{nk} - E_k^{(2)} \delta_{nk}) C_{nk}^{(2)} - E_n^{(2)} = 0$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} H'_{nk} C_{nk}^{(2)}$$

calcolare prima
complejo conjugato

Q' ogni ordine uno quanto lo era alto dal
l'ordine precedente. Ogni ordine successivo
deve conoscere il precedente.

$$= \sum_{k \neq n} \frac{H'_{nk} H'_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \sum_{k \neq n} \frac{|H'_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

$$\text{Quindi avriss } E_n = E_n^{(0)} + \langle \varphi_n | \lambda H' | \varphi_n \rangle + \sum_{k \neq n} \frac{|\lambda H'_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|H'_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \quad \text{2) Prendiamo per } n \text{ il livello fondamentale.}$$

Per tutti i x allora saranno più grandi $\Rightarrow E_n^{(2)} < 0$

b) Sufficiente che i termini perturbativi H'_{nk} siano confrontabili \rightarrow

\rightarrow Nella sommatoria contano i livelli primari

c) Sufficiente che ci sia un livello ϵ importante $\rightarrow E_\epsilon^{(0)} \sim E_n^{(0)} \Rightarrow E_\epsilon^{(2)} \sim |\lambda H'_{nk}|^2 / (E_n^{(0)} - E_\epsilon^{(0)})$

Ottene più succidere per $|H'_{nk}|$ grande, pochi traseurro gli altri termini

ciò c'è un accorciamento più importante, e vale la stessa approssimazione

Se $E_\epsilon^{(0)} < E_n^{(0)}$, la correzione $E_n^{(2)}$ aumenta la separazione
diminuisce

In questo caso, c'è una repulsione tra due livelli.



Quando $|E_n^{(0)} - E_k^{(0)}| \rightarrow 0$ c'è degenerazione. Bisognerà rivedere lo sviluppo.

CASO DEGENERE

$$H = H_0 + \lambda H'$$

$$H_0 | \varphi_n^{(i)} \rangle = E_n^{(0)} | \varphi_n^{(i)} \rangle \quad i = 1, \dots, n$$

Se vogliamo gli stati t.c. $\langle \varphi_n^{(i)} | \varphi_m^{(j)} \rangle = \delta_{nm} \delta_{ij}$. Dobbiamo risolvere $H | \varphi_n \rangle = E_n | \varphi_n \rangle$. Sufficiente $E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(2)} + \dots$

$$| \varphi_n \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i | \varphi_n^{(i)} \rangle + \text{combinazione di stati degeneri con stesso auto-} \\ \text{valore di energia}$$

$$H_0 | \varphi_n \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i | \varphi_n^{(i)} \rangle = E_n^{(0)} \sum_{i=1}^n \alpha_i | \varphi_n^{(i)} \rangle$$

$$\lambda^2 H_0 \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(2)} \sum_{i=1}^n \beta_i | \varphi_k^{(i)} \rangle + H' \sum_{i=1}^n \alpha_i | \varphi_n^{(i)} \rangle = E_n^{(0)} \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(2)} \sum_{i=1}^n \beta_i | \varphi_k^{(i)} \rangle +$$

$$+ E_n^{(2)} \sum_{i=1}^n \alpha_i | \varphi_n^{(i)} \rangle . \quad \text{Uniamo } \langle \varphi_n^{(i)} | \varphi_n^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$$

$$\langle \varphi_n^{(i)} | \varphi_n^{(j)} \rangle \Rightarrow \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(2)} \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_{nk} \delta_{ij} E_n^{(0)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \varphi_n^{(i)} | H' | \varphi_n^{(i)} \rangle$$

$$= \sum_{k \neq n} [\dots] + E_n^{(2)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} \quad \text{se}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (H'_{ji} - E_n^{(2)} \delta_{ij}) = 0 \quad \begin{matrix} \Downarrow \\ i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \\ \alpha_i \text{ incognite} \end{matrix}$$

Abbiamo un sistema omogeneo con n eqq. = n inc. Di fatto siamo diagonalizzando il hamiltoniana nel spazio degenero S_n .

det $(H'_{ji} - E_n^{(2)} \delta_{ij}) = 0$ equaz. scalare di ordine n . Se troviamo n soluzioni, abbiamo rimossa la degenerazione.

Q' una deg. è l'effetto di una simmetria. La perturbazione rompe la simmetria \Rightarrow si riduce o ~~elimina~~ la degenerazione, e è stato che c'è un autovalore.

$$n=2$$

$$|\psi_n\rangle = \alpha_1 |\varphi_n^{(+)}\rangle + \alpha_2 |\varphi_n^{(-)}\rangle + o(1)$$

$$\begin{vmatrix} H'_{11} - E_n^{(z)} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} - E_n^{(z)} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow E_{n,\pm}^{(z)} = \frac{H'_{11} - H'_{22} \pm \sqrt{[(H'_{11} - H'_{22})^2 - 4(H'_{12})^2]}}{2}$$

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(z)} + 2E_n^{(x)} + \dots + o(\lambda^2) \quad \text{e.g. } E_{n+} - E_{n-} = \lambda [(H'_{11} - H'_{22})^2 - 4(H'_{12})^2]^{\frac{1}{2}} + o(\lambda^2) \\ &\begin{cases} H'_{11} \neq H'_{22} \\ H'_{12} \neq 0 \end{cases} \quad \text{Chiediamo infine } |\alpha_1^{(\pm)}|^2 + |\alpha_2^{(\pm)}|^2 = 1 \end{aligned}$$

Cosa succede se $H'_{12} = 0$? per $H'_{11} > H'_{22}$ posso estrarre la radice
 $E_{n+} - E_{n-} = H'_{11} - H'_{22} \Rightarrow E_{n+} = H'_{11} \quad \text{e} \quad E_{n-} = H'_{22}$
 $\Rightarrow \begin{cases} + \\ - \end{cases} \quad \text{dalle} \quad \text{correlazioni al primo ordine sono date dai valori medi, che si calcolano proprio come}$

Prrendendo una delle due equazioni (non entrambe perché $\det = 0$),
si ha $\frac{\alpha_2^{(z)}}{\alpha_2^{(z)}} = \frac{E_{n,+}^{(z)} - H'_{12}}{H'_{12}}$ ~~deve essere lo stesso, nel caso non degenero~~
 $\alpha_2^{(z)} (H'_{11} - E_n^{(z)}) + \alpha_2^{(z)} (H'_{12}) = 0$
da $\alpha_2^{(z)} (H'_{11} - E_n^{(z)}) = -\alpha_2^{(z)} (H'_{12})$
 $\Rightarrow E_{n,+}^{(z)} = H'_{12} \quad \Rightarrow \alpha_2^{(z)} = 0 \quad \Rightarrow \alpha_2^{(z)} = 1$
 $\Rightarrow E_{n,-}^{(z)} = H'_{22} \quad \Rightarrow \alpha_2^{(z)} = 1 \quad 1,0 \quad 1,0$
 $|\psi_n^{(+)}\rangle = |\varphi_n^{(+)}\rangle$ ~~perché~~ $|\psi_n^{(+)}\rangle = \alpha_1^{(+)} |\varphi_n^{(+)}\rangle + \alpha_2^{(+)} |\varphi_n^{(+)}\rangle$
 $|\psi_n^{(-)}\rangle = |\varphi_n^{(-)}\rangle$ ~~perché~~ $|\psi_n^{(-)}\rangle = \alpha_1^{(-)} |\varphi_n^{(-)}\rangle + \alpha_2^{(-)} |\varphi_n^{(-)}\rangle$

Summary
Se $H'_{ij} = 0 \quad i \neq j \Rightarrow$ si può usare $E_n^{(z)} = \langle \varphi_n^{(z)} | H' | \varphi_n^{(z)} \rangle$, cioè le correl. al 1 ord. non date da valori medi.

Si cercano allora condizioni per avere ciò.

Sono in S_n .

Se $\exists A = A^\dagger$ t.c. $[A, H'] = 0 = [A, H_0]$ e se $A |\varphi_n^{(z)}\rangle = \alpha_z |\varphi_n^{(z)}\rangle$ (e $\alpha_i \neq \alpha_j$, ~~ma~~ $\alpha_i = \alpha_j$ è già stato visto) allora $A = A^\dagger$

In effetti $0 = \langle \varphi_n^{(z)} | [A, H'] | \varphi_n^{(z)} \rangle = (\alpha_i - \alpha_j) H'_{ij} \Rightarrow H'_{ij} = 0$
Gli elem. non diag. sono nulli.

Allora uso direttamente il caso non degenero, non devo diag.

maximare

$$\begin{aligned} & \cancel{\langle \varphi_n^{(z)} | AH - HA | \varphi_n^{(z)} \rangle} = (\alpha_i - \alpha_j) \langle \varphi_n^{(z)} | H' | \varphi_n^{(z)} \rangle \\ & \cancel{\langle \varphi_n^{(z)} | \varphi_n^{(z)} \rangle} \\ & = \langle \varphi_n^{(z)} | AH | \varphi_n^{(z)} \rangle - \langle \varphi_n^{(z)} | HA | \varphi_n^{(z)} \rangle = \alpha_i H_{ii} - \alpha_j H_{jj} = 0 \\ & \Rightarrow (\alpha_i - \alpha_j) H_{ij} = 0 \Rightarrow H_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Engliano 13 Dicembre 2024

Eduardo Rattner

Diagonalizzare la mat. hamiltoniana nel sottospazio degenero per eliminare la degenerazione.

Nel caso $n=2$: $|\psi_n\rangle = \alpha_1 |\varphi_n^{(+)}\rangle + \alpha_2 |\varphi_n^{(-)}\rangle + \dots \quad E_n = E_n^{(z)} + 2E_n^{(x)}$

Bisogna risolvere $\begin{cases} (H_{11} - E_n^{(z)}) \alpha_1 + H'_{12} \alpha_2 = 0 \\ H'_{21} \alpha_1 + (H_{22} - E_n^{(z)}) \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} H'_{11} - E_n^{(z)} & H'_{12} \\ H'_{21} & H_{22} - E_n^{(z)} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow E_{n,\pm}^{(z)} = \frac{1}{2} \left\{ H'_{11} - H_{22} \pm \sqrt{[(H'_{11} - H_{22})^2 + 4(H'_{12})^2]} \right\}$$

Assumo $\alpha_1 = \alpha_2$ $E_n^{(z)} = H'_{11}$
caso $H'_{12} = 0$, assumendo $H'_{21} > H'_{12} \Rightarrow E_{n+}^{(z)} = H'_{11}$ ~~caso analogo al caso non degenero.~~
 $E_{n-}^{(z)} = H'_{22}$

Prendiamo la prima equazione: $(H'_{11} - E_n^{(z)}) \alpha_1 = 0 \quad \therefore E_n^{(z)} = E_{n+}^{(z)} = H'_{11}$

$$\Rightarrow 0 \cdot \alpha_1^{(z)} = 0$$

Si ha: $E_n^{(z)} = E_{n+}^{(z)} = H'_{11} \quad (H'_{11} - H_{22}) \alpha_1^{(-)} = 0 \Rightarrow \alpha_1^{(-)} = 0 \Rightarrow \alpha_1^{(-)} = 1$,
per $|\alpha_1^{(z)}|^2 + |\alpha_1^{(-)}|^2 = 1$.

$$|\psi_{n+}\rangle = \alpha_1^{(z)} |\varphi_n^{(+)}\rangle + \alpha_1^{(-)} |\varphi_n^{(-)}\rangle = |\varphi_n^{(+)}\rangle$$

Prendo la seconda equazione, perché è l'unica che mi dà informazione sul segno ~~ma~~ più $|q_{n+1}| = |q_n|$. Se quindi $H_{\text{ze}} = 0$: gli autostati coincidono con quelli del caso non degenero, e gli valori al primo ordine, sono i valori medi.

$$\text{In } S \rightarrow S_n \quad H_0|_{S_n} = \epsilon_n \mathbb{1} \quad \text{e si può scrivere } [H_0, H'] = 0$$

di tutti gli elem. della diagonale, per una digen. di ordine n , no nulli, si agisce come se non ci fosse degenerazione. Perché sia così, bisogna trovare in S_n un operatore auxiliario t.c. $[A, H] = 0$

EFFETTI DI STRUTTURA FINE ATOMO IDROGENICO

e^- in moto nell'orbitale ha una velocità predata rispetto a c ? questione di Dirac ha i g.d.l. di spin ed garantisce i carri relativisticamente covarianti.

Secondo uno sviluppo dell'eq. di Dirac nei termini $\frac{v}{c}$, compare ~~verso~~ nei termini ~~aggiuntivi~~ rispetto al potenziale elettrico. Gli effetti relativistici, pur non varando signif. i valori della energia, si separano, portando a multiplettii non previsti dalla trattazione non relativa. Attivando un campo magnetico, si avanza ora l'effetto Zeeman anomalo.

$$Z=1 \quad H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2M} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2} \quad E_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2a_0} = \frac{1}{2} M v_z^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0}$$

Ora qui non
è rilevante
l'effetto

$$v_z^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{M} \frac{1}{2a_0} ; \quad \text{con } a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{me^2} \Rightarrow v_z^2 = \frac{e^2}{2c} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0) L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{e}{L} \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \quad ; \quad \frac{v_z}{c} = \frac{e^2}{2c} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} . \quad \text{Alla questa è la}$$

Sopra ho usato
 $|q_n\rangle = \alpha_1 |\phi_n^{(1)}\rangle + \alpha_2 |\phi_n^{(2)}\rangle$

e qui mantengo la notazione com

$|A|U_n^{(i)}\rangle$. IMPORTANTE,
PERCHÉ HO UNA COMBINAZIONE DI STATI DEGENERI, ora

costante di struttura fine $\alpha \sim \frac{e}{137}$. $\frac{v_z}{c}$ è piccolo \Rightarrow \vec{L} è nella puma "orbita" e prece ha v piccola. Significano nulla altre. Quando la trattazione non relativistica è accettabile. Ma con una trattazione quanto relativistica compaiono correzioni quadratiche in $\frac{v}{c}$ che inducono interazione fra i livelli \Rightarrow Compiono altre righe spettrali. Entriamo qui termini come perturbazioni di H_0 .

$$H = \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2M}}_{H_0} - \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2}}_{\text{corre. elettrica}} - \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{8\pi^2 c^2}}_{H_{\text{nr}} \text{ correc. cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi^2 c^2} \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{L} \cdot \vec{S}}_{H_{\text{so}} \text{ spin-orbita}} + \underbrace{\frac{k^2}{8\pi^2 c^2} \frac{\partial V}{\partial r}}_{H_{\text{par}} \text{ parmon}}$$

Queste tre correzioni danno lo stesso contributo e sono dell'ordine di α^2 .

$$H_{\text{nr}} \quad E = C \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + M^2 c^4} \quad \frac{v}{c} = \frac{\vec{p}}{Mc} \\ (\text{avvertire})^2 \\ = Mc^2 \left[1 + \frac{\vec{p}^2}{Mc^2} \right]^{\frac{1}{2}} \approx Mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{Mc^2} - \frac{1}{8} \frac{\vec{p}^4}{Mc^4} + \dots \right] = \\ = Mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2M} - \frac{1}{8} \frac{\vec{p}^4}{Mc^2} + \dots$$

H_{so} e^- è in moto con velocità \vec{v} intorno al nucleo. Indiammo nel sistema di riposo di e^- \Rightarrow Nucleo in moto: il nucleo è carico $\Rightarrow \vec{E}$, ma il nucleo è anche in moto $\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$, con $\vec{v} = \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial r} \hat{z}$. Quindi e^- è sottofreno a \vec{E}, \vec{B} .

Ma e^- è una particella dotata di spin $\not{p}_s = -\frac{e}{2m_e} \vec{g} \cdot \vec{S} \Rightarrow$ emerge $\vec{B}_{\text{so}} = -\vec{p}_s \cdot \vec{B}$:

$$\vec{B} = -\frac{\vec{v}^2}{c^2} \times \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\vec{r}^2}{2} \frac{M}{M} = \frac{1}{Mc^2} \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{L}$$

$$\Rightarrow H_{\text{so}} = -\left(-\frac{e^2}{2M} \vec{g} \cdot \vec{S}\right) \frac{1}{Mc^2} \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{L}^2 = \frac{g}{2\pi^2 c^2} \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{L}^2 \vec{S}^2 \quad g \sim 2 \text{ per}$$

Ma allora $\frac{3}{2} = 1$ e non fanno con il termine caruttivo per

sintato prima. Da ragioni che abbiamo fatto: il sistema dell'elettrone è iniziale, nel nostro modello planetario. Bisogna considerare la teoria di Thomas, che fa comparire proprio il e nucleo.

L'interno e' nucleo in Dirac è locale: i punti nel bolo dove c'è n' trova



Pero, quando in Dirac si trova lo sviluppo in $\frac{r}{\rho}$, questa località è attuale non ci più.

Si emerge facendo sviluppo a molla lontana di Dirac l'interazione non è più locale.

$$\text{en. pot} = \int d^3p f(p) V(\vec{r} + \vec{p})$$

$f(p)$ funzione peso.

$$\int d^3p f(p) = 1 \text{ per } \rho \sim \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^3 \Rightarrow V \sim \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^3. \text{ L'effetto } \cancel{\text{è}} \text{ quel valore di } V \text{ l'effetto di } N \text{ è importante, poi crolla.}$$

$$V(\vec{r} + \vec{p}) \stackrel{\text{sviluppo}}{\approx} V(\vec{r}) + \vec{p} \cdot \vec{\nabla} V \Big|_{\vec{p}=0} + \frac{1}{2} \vec{p}^2 \vec{\nabla}^2 V \Big|_{\vec{p}=0}$$

Stiamo prendendo solo i termini diagonali.

↳

$$\int d^3p f(p) V(r) = V(r) \cdot 1, \quad V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ze^2}{r}$$

$$\int d^3p f(p) \vec{p} \cdot \vec{\nabla} V \Big|_{\vec{p}=0} = 0 \quad - \text{ Tutte le componenti non diagonali si integrano a zero.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int d^3p f(p) p^2 \vec{\nabla}^2 V \Big|_{\vec{p}=0} = \frac{1}{2} \cancel{\int} \rho^2 \vec{\nabla}^2 V$$

$$\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2$$

$$\Rightarrow \text{en. pot} \approx V(r) + \frac{\hbar^2}{2mc^2} \vec{\nabla}^2 V. \text{ Nella scrittura presentata prima c'era un } \frac{1}{2}, \text{ ma la struttura è la stessa. Consideriamo } f \text{ densità di carica nello spazio: } f(\vec{r}) = q \delta^3(\vec{r}). \text{ Indichiamo con } \phi(\vec{r}) \text{ il potenziale elettrostatico } \phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \rightarrow \vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0}.$$

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta^3(\vec{r}). \text{ Quindi il laplaciano di } \frac{1}{r} \text{ si scrive come una S di Dirac. Il termine } H_0 = \frac{\hbar^2}{8mc^2} \vec{\nabla}^2 V \text{ è quindi } \frac{\hbar^2}{8mc^2} \left(-\frac{4\pi e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right) \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = \frac{-\hbar^2}{2mc^2} \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right) \delta^3(\vec{r})$$

Uniamo la teoria delle perturbazioni stazionarie.

$$H_{\text{nv}} = -\frac{1}{8} \frac{(\vec{p}^2)^2}{m^3 c^4} = -\frac{1}{2mc^2} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2mc^2} \left(H_0 + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right) \left(H_0 + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right). \text{ Per l'atomo di idrogeno si aveva}$$

$H_0 |\Psi_{\text{nlm}}\rangle = E_n^{(0)} |\Psi_{\text{nlm}}\rangle + S. \text{ Vediamo che non si sono contributi di spin} \Rightarrow H_{\text{nv}} \Psi_{\text{nlm}} \text{ è diagonale nello spin. Ma i degeneri sono con degenerazione } n^2.$

Osserviamo che $[H_{\text{nv}}, L^2] = 0 = [H_{\text{nv}}, L_z]$. Ci sono quindi due operatori, L^2 e L_z che commutano con H_{nv} . Usando la base già data, quindi, questa è la base che diagonalizza H_{nv} . Sfuttiamo quindi la teoria delle perturbazioni nel caso non degenero.

$$\langle \Psi_{\text{nlm}} | H_{\text{nv}} | \Psi_{\text{nlm}} \rangle = E_{n,\text{app}}^{(0)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \langle \Psi_{\text{nlm}} | \left(H_0 + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right) | \Psi_{\text{nlm}} \rangle = E_n^{(0)} \langle \Psi_{\text{nlm}} | \left(H_0 + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

$$\left(H_0 + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right) | \Psi_{\text{nlm}} \rangle = -\frac{1}{2mc^2} \left[\left(E_n^{(0)}\right)^2 + 2E_n^{(0)} \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{n} \cancel{\int} + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cancel{\int} \right)\right]$$

$$\begin{aligned} * \text{In generale } \langle \Psi_{\text{nlm}} | f(r) | \Psi_{\text{nlm}} \rangle &= \int d^3r f(r) R_{nl}(r) | Y_{lm}(\theta, \varphi) \rangle^* \\ &= \int dr r^2 f(r) R_{nl}(r) \left(\int d\Omega | Y_{lm} |^2 \right) \text{ quindi la parte in } m \text{ non } \cancel{\text{interviene}} \end{aligned}$$

In H_0 sarebbe corretto avere ρ , ma è trascurabile la correzione rispetto a H_0 .

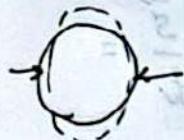
$$\bar{\epsilon}_e^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \psi_k | E_e | \phi_n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \neq 0$$

(1)

$$\bar{\epsilon}_e^{(2)} = \frac{9}{5} (\epsilon_0) d_0^3 \epsilon_e^2 \quad \vec{J} = -\frac{d\bar{\epsilon}_e}{d\vec{E}} = \frac{9}{2} (\epsilon_0) d_0^3 \epsilon_e^2$$

$$\vec{J} = \alpha \vec{E}_e \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{9}{2} (\epsilon_0) d_0^3 \text{ polarizzabilità}$$

15



f:

$\mu/\mu_0/\mu_0/\mu_{\text{atom}}$

$$= \frac{\text{CORREZIONI}}{\text{CORREZIONI RELATIVISTICHE}}$$

$$E = \bar{\epsilon}_{\text{hyp}}^{(0)} + (2\alpha)^2 \epsilon^{(0)} \left\{ \frac{1}{n(j+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n^2} \right\}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}} \quad \text{costante di struttura fine}$$

$$\text{Correzioni} = H_{\text{hyp}} + H_0 + H_S$$

$$\text{Relatività mass shell : } E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

$$= mc^2 \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 \left\{ 1 + \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4} \right\}^{\frac{1}{2}} = mc^2 \left\{ 1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \approx \sqrt{1+x}$$

$$\text{TAYLOR} \quad \approx 1 + \frac{1}{2 \sqrt{1+x}} \Big|_0 x = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right\} \Big|_0 x^2 + \dots$$

$$mc^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^4 c^4} + \dots \right\} \stackrel{\text{Dalla DERIVATA PRIMA}}{\text{Ottimizzazione}} \simeq mc^2 + \frac{p^2}{2M} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{M^2 c^2} \frac{p^2}{m^2 c^2}$$

- VALORE DI ASPETTAZIONE

$$(2\alpha)^2 e^{(0)} \left(\frac{1}{n(j+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n^2} \right)$$

(9)

→ SPIN-ORBITA

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{e}$$

$$\vec{e} = \frac{-1}{e} \frac{\partial V}{\partial n} \frac{\vec{n}}{n}$$

$$\rightarrow \vec{M}_s = -\mu_B g_s \frac{\vec{S}}{k} =$$

$$= -\mu_B g_s H_{SO} = -\vec{M}_s \cdot \vec{B} = +\vec{M}_s \cdot \frac{\vec{v}}{c^2} \times \frac{\vec{n}}{n} \frac{\partial V}{\partial n} \frac{1}{e} =$$

$$= -\mu_B g_s \frac{1}{ne c^2 h} \frac{\partial V}{\partial n} \underbrace{\vec{s} \cdot (\vec{M} \vec{v} \times \vec{n})}_{-L} \rightarrow \mu_B g_s \frac{1}{me c^2 h} \frac{1}{n} \frac{\partial V}{\partial n} \vec{s} \cdot \vec{L}$$

$$V = \text{coulombiano} \propto \frac{1}{n}$$

$$\text{numero} \propto \frac{1}{n^3 l(l+1)(l+k)}$$

- TERMINE DI DARWIN

Princípio di indeterminazione relativistica

$\propto \sim \lambda_{\text{compton}}$

EN. POT.

$$\int d^3 p f(p) V(\vec{n} + \vec{p}')$$



$$\int f(p) d^3 p = 1 \quad \text{in } p \sim \lambda_{\text{compton}}, \text{ se non è zero}$$

$$V(\vec{n} + \vec{p}') \approx V(\vec{n}') + \vec{p}' \cdot \vec{\nabla} V + \frac{1}{2} \vec{p}'^2 \partial^2 V$$

$$\langle \frac{1}{n} \rangle_{ne} = \frac{2}{\frac{d_e n^2}{e \pi \epsilon_0}} \quad \langle \frac{1}{n^2} \rangle_{ne} = \frac{2^2}{2^2 n^3 (l+\frac{1}{2})}$$

$$E_n^{(0)} = -\frac{(mc^2)(2\alpha)^2}{2n^2}$$

quindi l'en. di cinetica
è n^2 volte l'en. di
riposo \rightarrow non relativistica

energia
di
riposo

$$\langle H_{nn} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{mc^2}{n^2} (2\alpha)^2 \left[\frac{1}{n(l+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n^2} \right] = E_n^{(0)} (2\alpha)^2 \left[\frac{1}{n(l+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n^2} \right]$$

nel senso che sono cose piccole
di correzioni al primo ordine sono sopprimute da termini in α^2 . E
 H_{nn} è 10.000 volte più piccola della H_0 .

Cagliari 16 Dicembre 2024

Eduardo Petta

Senza lo spin ci è degenerazione n^2 . Con lo spin $2n^2$.

Rimandare perché gli elem. di matrice non tutti identram. nulli.

$$\text{Abbiamo trovato che } \langle H_{nn} \rangle = E_n^{(0)} (2\alpha)^2 \left\{ \frac{1}{n(l+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n^2} \right\}$$

Ocupiamoci di $H_{SO} = \frac{1}{2n^2} \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{n} \frac{\partial \psi(r)}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{S} = \vec{l} \cdot \vec{S}$. Siccome com-
pone \vec{S} , consideriamo l^z e L^2, S^2, L_z, S_z . Quando ci lo spin,
 $\delta_n = 2n^2$

$$[H_{SO}, L^2] = 0 = [H_{SO}, S^2] = 0 \quad \text{ma} \quad [H_{SO}, L_z] \neq 0 \\ [H_{SO}, S_z] \neq 0$$

Allora, se uso la base che diagonalizza L^2, S^2, L_z, S_z dovo usare la
trattor. nel caso degenero, perché vedo che non c'è sempre dc com-
mutazione. Convienne perciò definire una nuova base in cui
 $\vec{j} = \vec{l} + \vec{S}$ è t.c. $[H_{SO}, L^2] = 0 = [H_{SO}, S^2] = [H_{SO}, \vec{J}^2] = [H_{SO}, J_z]$,
con $\vec{l} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - L^2 - S^2)$.

Quindi: $|\Psi_{nlm_l}\rangle \otimes |\chi_{\frac{1}{2}, m_s}\rangle$ è problematica. Passo a

$$\text{Per } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{n^2} \\ \langle \frac{1}{n^2} \rangle_{ne} = \frac{1}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0} = mc^2 \alpha^2$$

$|\Psi_{nlm_l}\rangle$. C'è sempre degenerazione $2n^2$. Ma prima dove
no diagonalizzare in S_a , qui sfrutto il caso di non degenerazione, con
com i valori medi.

$$H_0, L^2, S^2, L_z, S_z \iff H_0, J^2, L_z, S^2$$

$$\boxed{\text{Studiamo } \langle H_{SO} \rangle_{\vec{l} \cdot \vec{S}}} = E_{l=0}^{(0)} ; \quad \vec{l} \cdot \vec{S} |\Psi_{nlm_l}\rangle = \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2) \\ |\Psi_{nlm_l}\rangle = \frac{1}{2} k^2 [j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2}(s+1)]$$

$$j < \frac{l+\frac{1}{2}}{l-\frac{1}{2}} \quad \text{perché } l-\frac{1}{2} \leq j \leq l+\frac{1}{2} \quad (l>0 \text{ perché non ha senso } j \text{ negativo}).$$

$$\vec{l} \cdot \vec{S} |\Psi_{nlm_l}\rangle = \begin{cases} \text{per } j = l+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} k^2 l & = \frac{1}{2} k^2 l \text{ (} \Rightarrow \text{bene)} \\ \text{per } j = l-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} k^2 (-l-1) & \end{cases} \quad \text{Certo, non} \\ \text{c'è degenera-} \\ \text{mento spin-} \\ \text{-orbita}$$

Il termine di spin-orbita non coinvolge $l=0$. tornando al calcolo
del valore medio:

$$\langle \Psi_{nlm_l} | H_{SO} | \Psi_{nlm_l} \rangle = \frac{1}{2n^2} \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} k^2 \left\{ \begin{array}{l} l \\ (l+1) \end{array} \right\} \langle \Psi_{nlm_l} | \frac{1}{r^3} \vec{l} \cdot \vec{S} | \Psi_{nlm_l} \rangle$$

Compare solo r . Sarà un
valore medio sulla parte in
 r .

$$\text{Ricordiamo che si avrà, per } l^z, \vec{l} \cdot \vec{m}_s \\ \left| l+\frac{1}{2}, m_s \right\rangle = c_+ |m_s, +\frac{1}{2}\rangle + c_- |m_s, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$\left| l-\frac{1}{2}, m_s \right\rangle = c_- |m_s, +\frac{1}{2}\rangle - c_+ |m_s, -\frac{1}{2}\rangle$$

Guardiamo il primo. Siccome nel valor medio non compare lo spin, rimasta $|C_0|^2 + |C_1|^2 = 1$ e resta la parte radiale e l'armonica sferica

$$\int d\Omega |\psi|^2 = \int d\Omega n^2 |R_{nl}(r)|^2 \frac{1}{r^2}$$

Nella scrittura del valor medio avrei dovuto considerare $\langle \psi_{nlm} | H_{nr} | \psi_{nlm} \rangle$ ma basterà in ~~è la stessa~~ scrivere direttamente.

$$\langle \frac{1}{r^3} \rangle_{nl} = \frac{2^3}{2^3 n^3 \ell (\ell + \frac{1}{2}) (\ell + 1)}$$

La divergenza in r nasce dal fatto che

assumiamo che l'è finita arrivare in $r=0$. In realtà è un effetto di restringere l.c. $\ell \rightarrow 0 \Rightarrow \psi \rightarrow 0$.

C'è un altro termine, quello di Darwin, che dà correzioni in $\ell=0$, coincidenti con ψ quando $\ell=0 \Rightarrow \psi \rightarrow \text{un ELENTO}$

~~Non si può avere~~ Sostituendo le quantità si troverebbe che $\ell=0 \Rightarrow \psi$ finito. Ma non ha senso perché non c'è accoppiamento. Ricordando che $a_0 = \frac{k}{mc\alpha} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$

$$\begin{aligned} \langle \psi | \frac{1}{r^3} | \psi \rangle &= \frac{1}{4} \frac{mc^2}{n^2} (2\alpha)^4 \left\{ \frac{\ell}{-(\ell+1)} \right\} \frac{1}{n\ell(\ell+\frac{1}{2})(\ell+2)} \\ &= -\frac{1}{8} E_n^{(0)} (2\alpha)^2 \left\{ \frac{-\ell}{-(\ell+1)} \right\} \frac{1}{n\ell(\ell+\frac{1}{2})(\ell+1)} \quad \ell \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Facciamo comparire } j &\quad \frac{e^{-i\theta}}{n\ell(\ell+\frac{1}{2})(\ell+1)} = \frac{1}{j(j+\frac{1}{2})} \quad j = \ell + \frac{1}{2} \\ &\quad \frac{-(\ell+1)}{n\ell(\ell+\frac{1}{2})(\ell+1)} = -\frac{1}{(j+\frac{1}{2})(j+1)} \quad j = \ell - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{8} E_n^{(0)} (2\alpha)^2 \frac{1}{n(j+\frac{1}{2})} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{j} \\ -\frac{1}{j+1} \end{array} \right\} = E_n^{(0)} \cdot \frac{1}{50}$$

Ma $\langle H_{nr} \rangle$ è stato calcolato con i go senza i g.d.l. di spin. Ma $\langle \psi_{nlm} | H_{nr} | \psi_{nlm} \rangle$ era stata calcolata da $(H_0 + \frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 r})(-\)$ in cui non c'è dipendenza dello spin né dalle variabili angolari, quindi:

$$\langle \psi_{nlm} | H_{nr} | \psi_{nlm} \rangle = \langle \psi_{nlm} | H_{nr} | \psi_{nlm} \rangle \quad \text{perché non ci sono } \frac{1}{r}, \theta, \phi, \text{ e } \psi_{nlm} \text{ è unico}$$

$$\langle H_{nr} \rangle = E_n^{(0)} (2\alpha)^2 \left[-\frac{3}{4n^2} + \frac{1}{n} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{j} \\ \frac{1}{j(j+1)} \end{array} \right\}_{j=\ell-\frac{1}{2}}^{\ell+\frac{1}{2}} \right]$$

$$\langle H_{nr} \rangle + \langle H_{so} \rangle = E_n^{(0)} (2\alpha)^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{4n^2} + \left[\frac{1}{n(j)} - \frac{1}{2n} \frac{1}{j(j+\frac{1}{2})} \right] \\ -\frac{3}{4n^2} + \left[\frac{1}{n(j+1)} + \frac{1}{2n(j+\frac{1}{2})(j+1)} \right] \end{array} \right\}_{j=\ell-\frac{1}{2}}^{\ell+\frac{1}{2}}$$

Risulta che ~~le due~~ i due contributi sono identici:

$$E_n^{(0)} (2\alpha)^2 \left[\frac{1}{n(j+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n^2} \right] \quad \ell \neq 0$$

Resta il termine di Darwin: $H_0 = \frac{\pi k^2}{2m^2 c^2} \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0} \delta^3(\vec{r})$. Dovrei poter usare la base con lo spin. Ma qui lo spin non compare. Invece c'è la parte angolare. Dovrei calcolare $\langle \psi_{nlm} | \delta^3(\vec{r}) | \psi_{nlm} \rangle$

$$\int d^3x \delta^3(\vec{r}) |\psi_{nlm}(\vec{r})|^2 = |\psi_{nlm}(0)|^2 \neq 0 \text{ solo per } \ell=0. \quad \text{Quindi l'unica sol. è per } |\psi_{n00}|^2 \neq 0 \text{ che } j = \ell + \frac{1}{2}, \ell - \frac{1}{2} \Rightarrow j = \frac{1}{2} \text{ unico valore}$$

$\ell=0$ non ha un valore negativo

$$|\psi_{n00}(0)|^2 = |\psi_{n00}(0)|^2 |\psi_{n00}(0,0)|^2 = \frac{4\ell^3}{n^3 c_0^3} \frac{1}{4\pi}$$

$$\text{Per } \ell=0 \text{ allora } \langle H_0 \rangle = \frac{1}{2} mc^2 (2\alpha)^4 \frac{1}{n^3} = -E_n^{(0)} \frac{(2\alpha)^2}{n}$$

Per $\ell=0$ il termine di spin-orbita non c'è, e dico sommiamo

$$\text{cioè} \langle H_{SO} \rangle_{\ell=0} \Rightarrow \langle H_{SO} \rangle + \langle H_0 \rangle = \tilde{\epsilon}_n^{(0)} (2\alpha)^2 \left[\frac{1}{n^2} - \frac{3}{4n^2} - \frac{1}{n} \right] = \tilde{\epsilon}_n^{(0)} (2\alpha)^2 \left[\frac{1}{n} - \frac{3}{4n^2} \right] \quad (\ell=0)$$

$$\rightarrow \text{Ma } \langle H_{SO} \rangle + \langle H_0 \rangle \Big|_{\ell=0} \equiv \langle H_{SO} \rangle + \langle H_0 \rangle \dots$$

$$\text{Allora } \tilde{\epsilon}_{n,j}^{(0)} = \langle H_{SO} \rangle + \langle H_0 \rangle + \langle H_B \rangle = \tilde{\epsilon}_n^{(0)} (2\alpha)^2 \left[\frac{1}{n(j+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n^2} \right]$$

Compone il numero quantico j . La simmetria sferica è data allo stesso prodotto diretto il cui generatore è \mathbf{T} che si conserva

$$= \tilde{\epsilon}_n \rightarrow \tilde{\epsilon}_{n,j} = \tilde{\epsilon}_n^{(0)} + \tilde{\epsilon}_{n,j}^{(\pm)} + \dots = \tilde{\epsilon}_n^{(0)} + \tilde{\epsilon}_n^{(0)} (2\alpha)^2 \left[\frac{1}{n(j+\frac{1}{2})} - \frac{3}{4n^2} \right] + \dots$$

- \vec{L}, \vec{S} non si conservano separatamente (non commutano)
- si separano i livelli con $\ell \neq 0$

CASO $\ell=1$ NOTAZ. SPECTROSCOPICA

$$\begin{matrix} n & \ell_j \\ & \ell = 0 \quad 1 \quad 2 \\ & s \quad p \quad d \end{matrix}$$

$$\begin{cases} j_{\max} = \ell_{\max} + \frac{1}{2} = n-1 + \frac{1}{2} = n-\frac{1}{2} \\ j_{\min} = \frac{1}{2} \\ * \quad \text{Ogni livello si separa in} \\ \quad n \text{ livelli} \end{cases}$$

$$\tilde{\epsilon}_n^{(0)} = \left(-\frac{E_I}{n^2} \right) \quad \tilde{\epsilon}_I \sim 13.6 \text{ eV}$$

$$\alpha^2 \sim \left(\frac{1}{13.6} \right)^2 \quad \alpha^2 \tilde{\epsilon}_I \sim 10^{-3} \text{ eV ordine} \\ \text{delle correzioni}$$

Semplifico per $n=1$

$$\frac{1}{2} \left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right) \quad \tilde{\epsilon}_{1,\frac{1}{2}} = \tilde{\epsilon}_1^{(0)} + \tilde{\epsilon}_1^{(0)} \alpha^2 \left(1 - \frac{3}{4} \right) = \tilde{\epsilon}_1^{(0)} - \frac{1}{4} \alpha^2 \tilde{\epsilon}_I$$

$$2P_{\frac{1}{2}}, 2P_{\frac{3}{2}} \quad \tilde{\epsilon}_{2,\frac{1}{2}} = \tilde{\epsilon}_2^{(0)} + \tilde{\epsilon}_2^{(0)} \alpha^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{16} \right] = \tilde{\epsilon}_2^{(0)} - \frac{5}{64} \alpha^2 \tilde{\epsilon}_I$$

$$2P_{\frac{3}{2}} \quad \text{che si separa} \quad \tilde{\epsilon}_{2,\frac{3}{2}} = \tilde{\epsilon}_2^{(0)} + \tilde{\epsilon}_2^{(0)} \alpha^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{16} \right] = \tilde{\epsilon}_2^{(0)} - \frac{1}{64} \alpha^2 \tilde{\epsilon}_I$$

$$\begin{matrix} n=2 \\ 2S \\ 2P \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} n=1 \\ 1S \\ 1P \end{matrix}$$

EFFETTI DI STRUTTURA FINA

PER L'ATOMO DI IDROGENO

Non compare m_j . Infatti ci inviazza per non notare nello spazio prodotto diretto. \Rightarrow Degenerazione monetale.

Non dipende da ℓ . Degenerazione accidentale: in natura sì. Bisogna quindi tornare alla teoria dei campi, con il Lamb shift, calcolabile in elettrodinamica quantistica.

Griffiths

Come calcolo i valori medi sono integrali?

TEOREMA HELLMANN - FEYNMAN

$$H = H(\lambda) \quad \lambda \text{ parametru}$$

$$H(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle \quad \frac{d}{d\lambda} \langle \psi | \psi \rangle = 0$$

$$\left(\frac{d}{d\lambda} \langle \psi | \psi \rangle \right) | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{d}{d\lambda} | \psi \rangle = 0 \quad \text{e} \langle \psi | \frac{d}{d\lambda} | \psi \rangle$$

$$E(\lambda) = \langle \psi | H(\lambda) | \psi \rangle ; \quad \frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = \left(\frac{d}{d\lambda} \langle \psi | \right) H | \psi \rangle + \langle \psi | H \left(\frac{d}{d\lambda} \psi \right)$$

$$+ \langle \psi | \frac{dH}{d\lambda} | \psi \rangle = \langle \frac{dH}{d\lambda} | \psi \rangle$$

$$\text{Ora, per l'atomo di idrogeno } H = -\frac{k^2}{8\pi n^2} \left\{ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \ell(\ell+1) \right\} +$$

$$- \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{ze^2}{r} . \quad \frac{dH}{d\lambda} = \frac{k^2}{2Mn^2} (2\ell+1) \quad \langle \frac{1}{r^2} \rangle_{nl} = \frac{2M}{k^2} \frac{1}{2\ell+1} \langle \frac{dH}{d\lambda} \rangle_{nl}$$

$$= \frac{2M}{k^2} \frac{1}{2\ell+1} \frac{\partial E_n}{\partial \lambda} . \quad E_n = -\frac{2^2 e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{\ell_0} \frac{1}{2n^2} \quad n = n_0 + \ell + 1 \text{ implicitamente}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \frac{\partial E_n}{\partial \ell} \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{2e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{2\ell n^2} .$$

Come se fosse continua

$$\frac{\partial H}{\partial \epsilon^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z^2}{n^2} \quad \langle \frac{1}{n^2} \rangle_{\text{el}} = -\frac{4\pi\epsilon_0}{2} \langle \frac{\partial H}{\partial \epsilon^2} \rangle_{\text{el}} = -\frac{4\pi\epsilon_0}{2} \frac{\partial E_n}{\partial \epsilon^2} = \dots$$

come
parametro

$\Rightarrow -\frac{4\pi\epsilon_0}{2} \frac{z^2}{2k}$

da $\langle \frac{d^2}{dt^2} \rangle = -\langle \vec{V} \cdot \vec{V} \rangle$

Ricordiamo ora che $\langle \frac{d\psi_i}{dt} \rangle = -\langle \frac{\partial V}{\partial r} \rangle$ dal teo. di Schrödinger. \Rightarrow perché lo stato è stazionario. Ricordiamo allora $H(t)$ e quando deriviamo la forza effettiva $-\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 n^2} \frac{1}{r} + \frac{k^2 \ell(\ell+1)}{2m n^2}$, il risultato è zero e ritroviamo $\langle \frac{1}{n^2} \rangle$ da $\langle \frac{1}{n^2} \rangle$.

PROBLEMI DIPENDENTI DAL TEMPO, TEORIA DELLE PERTURBAZIONI DIPENDENTI DAL TEMPO

Il problema è dinamico. $H = H(t)$, e non c'è l'eq. agli autovalori, che risulta l'eq. di Sch. stazionario.

$$H(t) = H_0 + \lambda V(t)$$

NON DIPENDE DA t

H_0	$H(t)$	H_0
$ \psi_i \rangle$	$0 \psi(t) \rangle$	$ \psi_f \rangle$
\xrightarrow{t}		

es: Sistema atomico \rightarrow Onde e.m. per un tempo finito

Processo di diffusione \rightarrow Le parti interagenti subiscono l'urto ad un tempo di diffusione, e poi tutto passa

$$H_0 |\psi_i\rangle = E_i |\psi_i\rangle \quad \text{SPECTRO DISCRETO} \quad i = 1, 2, \dots$$

$$|\psi\rangle \quad t < t_0 \quad |\psi(t)\rangle = |\psi_i\rangle \quad i \text{ sta anche per "iniziale"}$$

$$\text{Dopo risolvere } H |\psi(t)\rangle = ik \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \quad \text{per } t > t_0$$

$$t > t_0 \quad |\psi_f\rangle = |\psi(t)\rangle = P_i |\psi_i\rangle$$

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI (NON È PERTURATIVO)

$$0 < t < T \quad H = H_0 + \lambda V \quad H_0 |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \rightarrow |\psi_n\rangle \text{ base}$$

$\langle \psi(t) \rangle = \sum_k C_k(t) | \psi_k \rangle$

$\langle \psi_k \rangle$ non ha ruolo fisico, ma serve per i calcoli per i coefficienti

perché lo stato non è stazionario, e cioè anche dipende da t

$$ik \frac{d}{dt} \sum_k C_k(t) e^{-iE_k t} | \psi_k \rangle = H \sum_k C_k(t) e^{-iE_k t} | \psi_k \rangle$$

$$C_k(0) = \delta_{ki} \quad \text{per } | \psi(0) \rangle = | \psi_i \rangle$$

$$ik \sum_k \left(\frac{dc_k}{dt} - i \frac{E_k}{\hbar} C_k \right) e^{-iE_k t} | \psi_k \rangle = \sum_k C_k e^{-iE_k t} [E_k | \psi_k \rangle + 2V | \psi_k \rangle]$$

Stesso facendo da un'eq. agli stati a un'eq. sui coefficienti:

$$\sum_k C_k \left(ik \frac{dc_k}{dt} e^{-iE_k t} | \psi_k \rangle \right) = \sum_k C_k e^{-iE_k t} 2V | \psi_k \rangle$$

$$\langle \psi_n | \left(ik \frac{dc_n}{dt} e^{-iE_n t} \right) = \sum_k C_k e^{-iE_n t} 2 \langle \psi_n | V | \psi_k \rangle$$

$$\frac{E_n - E_k}{\hbar} = \omega_{nk} \text{ PULSAZIONE DI BOHR} \Rightarrow ik \frac{dc_n}{dt} = 2 \sum_k V_{nk} e^{i\omega_{nk} t} C_k$$

Sui coefficienti affatto lo sviluppo perturbativo.

$$C_k(0) = \delta_{ki}$$

Sviluppo in potenze di λ

$$C_k(t) = C_k^{(0)}(t) + \lambda C_k^{(1)}(t) + \lambda^2 C_k^{(2)}(t) + \dots ; \quad t < 0 \quad H = H_0 \quad C_k(0) = \delta_{ki}$$

$$C_k(0) = C_k^{(0)}(0) + \lambda C_k^{(1)}(0) + \lambda^2 C_k^{(2)}(0) + \dots = \delta_{ki} \quad \text{V 2}$$

$$\Rightarrow C_k^{(0)}(0) = \delta_{ki} \quad e \quad C_k^{(l)}(0) = 0 \quad l > 0$$

$$ik \frac{d}{dt} \left\{ C_k^{(0)} + \lambda C_k^{(1)} + \dots \right\} = \lambda \sum_n V_{nk} e^{i\omega_{nk} t} [C_k^{(0)} + \lambda C_k^{(1)} + \dots]$$

$$1^\circ) \quad ik \frac{d}{dt} C_k^{(0)}(t) = 0 \Rightarrow C_k^{(0)}(t) = C_k^{(0)}(0) = \delta_{ni}$$

$$2^\circ) \quad ik \frac{d}{dt} C_k^{(1)}(t) = \sum_n V_{nk} e^{i\omega_{nk} t} C_k^{(0)}(t) = \underbrace{\sum_n V_{ni} e^{i\omega_{ni} t}}_{\text{Sei}}$$

Integro:

$$C_k^{(1)}(t) = \frac{1}{ik} \int dt' V_{ni}(t') e^{i\omega_{ni} t'} \quad \text{con } C_k^{(0)}(0) = 0$$

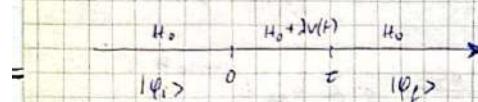
Trasformata di Fourier dell'elmt. di matrice ($V_{ni}(t')$) per una pulsazione ω_{ni} .

L'iterazione porta a una serie detta di Dyson, che non vediamo.

$$c_n^{(1)}(t) = \frac{i}{\hbar k} \int_0^t dt' V_{ni}(t') e^{i\omega_{ni} t'} \quad \omega_{ni} = \frac{E_n - E_i}{\hbar} \quad H(t) = H_0 + \lambda V(t)$$

$$V_{ni}(t) = \langle \varphi_n | V(t) | \varphi_i \rangle \quad |\psi(0)\rangle = |\varphi_i\rangle \quad H_0 |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad |\psi(t)\rangle = \sum_k c_k(t) e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} |\varphi_k\rangle$$



$$t > \tau \quad \langle \varphi_f | \psi(t) \rangle = c_f(t) e^{-\frac{i}{\hbar} E_f t} \quad \text{ESATTA}$$

$$P_{i \rightarrow f}(t) = |\langle \varphi_f | \psi(t) \rangle|^2 = |c_f(t)|^2 \quad \text{ESATTA}$$

Ma non riusciamo risolvere: uniamo lo sviluppo perturbativo

$$c_k(t) = c_k^{(0)}(t) + \lambda c_k^{(1)}(t) + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{TRANSIZIONE } |\varphi_f\rangle \neq |\varphi_i\rangle \quad c_f(t) &= c_f^{(0)}(t) + \lambda c_f^{(1)}(t) + \dots = \\ &= \delta_{fi} + \lambda c_f^{(1)}(t) \Big|_{f \neq i} = \lambda c_f^{(1)}(t) \quad \text{perché per } f \neq i \quad \delta_{fi} = 0 \end{aligned}$$

$$c_f^{(1)}(t) = \frac{i}{\hbar k} \int_0^t dt' V_{fi}(t') e^{i\omega_{fi} t'}$$

$$c_f(t) \simeq \frac{i}{\hbar k} \int_0^t dt' V_{fi}(t') e^{i\omega_{fi} t'} \Rightarrow P_{i \rightarrow f}(t) \simeq \frac{1}{\hbar k^2} \left| \int_0^t dt' \lambda V_{fi}(t') e^{i\omega_{fi} t'} \right|^2$$

Dovremmo trovare $i\hbar \frac{d}{dt} c_n(t) = \lambda \sum_m V_{nm}(t) e^{i\omega_{nm} t} c_m(t)$. Per fermareci al primo ordine, ^{che è quanto si è dovuto fare} abbiamo unato $c_k(t) = c_k(0) = \delta_{ki}$:

$$c_k^{(0)}(0)$$

ed è come se avessimo unato, per i coefficienti dipendenti dal tempo molto prossimi al coeff. all'istante $t=0$. Sei è in $c_k^{(0)}(0)$ ma coincide con $c_k(0) \neq \delta_{ki}$.

Questa approssimazione vale al primo ordine vale quindi per tempi piccoli. Per tempi più estesi gli ordini superiori diventano importanti. Da qui in avanti poniamo dimenticando λ .

Immaginiamo un sistema atomico: un salto ha due livelli ⁱ ~~prodotto~~ uno k è la pulsazione di Bohr. Mandiamo un'onda e.m. monochromatica, ponendo come elemento del freeketto: studiamo cioè una perturbazione periodica. La confrontiamo poi con una costante.

$$H = H_0 + V(t)$$

$$1) \quad V(t) = V_0 \sin \omega t \quad V_{fi}(t) = V_{fi} \sin \omega t = V_{fi} \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

$$c_f^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2i} V_{fi} \int_0^t dt' e^{i\omega_{fi} t'} \{ e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'} \}$$

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \frac{|V_{fi}|^2}{4k^2} \left| \frac{1 - e^{i(\omega_{fi} + \omega)t}}{\omega_{fi} + \omega} - \frac{1 - e^{i(\omega_{fi} - \omega)t}}{\omega_{fi} - \omega} \right|^2$$

2) PERTURBAZIONE COSTANTE

$$V(t) = V \quad c_f^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} V_{fi} \int_0^t dt' e^{i\omega_{fi} t'} = \frac{V_{fi}}{\hbar} \frac{1 - e^{i\omega_{fi} t}}{\omega_{fi}}$$

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \frac{|V_{fi}|^2}{k^2} \left| \frac{1 - e^{i\omega_{fi} t}}{\omega_{fi}} \right|^2 = \frac{|V_{fi}|^2}{k^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega_{fi} t}{2}}{\frac{\omega_{fi}}{2}} \right)^2$$

$$F(t, \omega_{fi})$$

$$2) = \frac{|V_{fi}|^2}{4k^2} \left| e^{i(\omega_{fi} + \omega) \frac{t}{2}} A_+(t, \omega_{fi} + \omega) - e^{i(\omega_{fi} - \omega) \frac{t}{2}} A_-(\omega_{fi} - \omega) \right|^2$$

$$A_{\pm} = \frac{\sin((\omega_{fi} \pm \omega) \frac{t}{2})}{\frac{\omega_{fi} \pm \omega}{2}}$$

ω è variabile. Però usare ω t.c. i due addendi fanno in modo diverso. Guardando A_{\pm} , se $\omega \approx \omega_f$, otterro un picco di risonanza con A_- che domina su A_+ : A_- è allora il termine risonante, mentre A_+ è antirisonante. Oppure, $\omega \approx -\omega_f$. In tal caso, A_+ è risonante, A_- antirisonante.

b) caso $\omega \approx \omega_f$

Ricordiamo che c'è già l'affron per tempi precoci. Ora ci sono anche l'affron con A_- risonante.

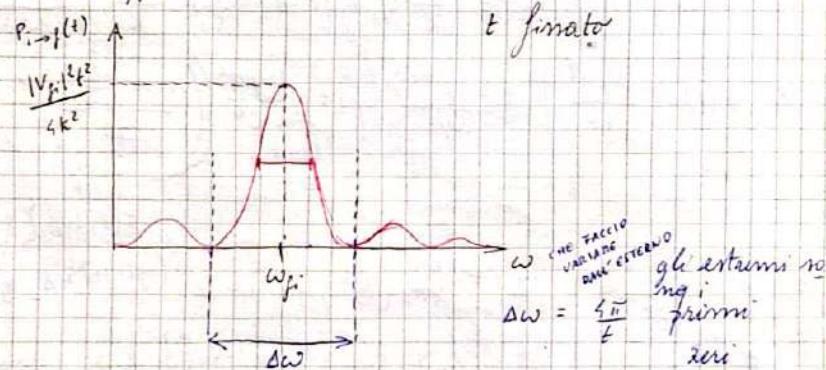
$$P_{i \rightarrow f} \approx \frac{|V_{fi}|^2}{4k^2} F(t, \omega - \omega_f), \quad F(t, \omega = \omega_f) = |A \pm|^2$$

b) caso $\omega \approx -\omega_f$

$$P_{i \rightarrow f} \approx \frac{|V_{fi}|^2}{4k^2} F(t, \omega + \omega_f)$$

a) Scrivendo $F(t, \omega - \omega_f) = \left\{ \frac{\sin(\omega - \omega_f) \frac{t}{2}}{\frac{\Delta \omega(\omega - \omega_f)}{2}} \right\}^2 =$

$= t^2 \left\{ \frac{\sin(\omega - \omega_f) \frac{t}{2}}{(\omega - \omega_f) \frac{t}{2}} \right\}^2$ per evidenziare il massimo, scrivo una funzione di tipo diffettivo



l'altro picco del caso b) si trova nel secondo quadrante ($\omega \approx -\omega_f$). - za l'onda e.m. Oppure valga l'affr. ris. t.c. farà trascurare

$$|P_{i \rightarrow f}(t)|_{\text{MAX}} = \frac{|V_{fi}|^2 t^2}{4k^2} \ll L \Rightarrow t \ll \frac{4k}{|V_{fi}|}$$

1) vogliamo questo perché è una correzione al primo ordine che deve essere corretta, al 2° ordine

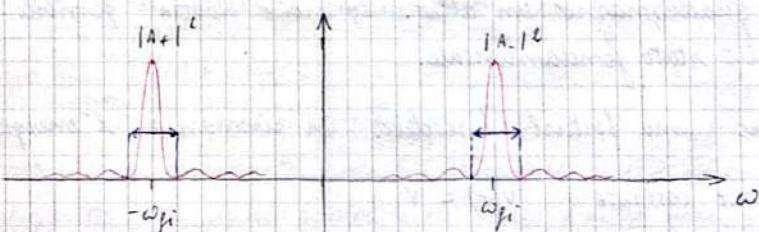
Tempo di scorrimento della perturbazione, t , che è uguale al tempo di oscillazione della perturbazione, T , che è uguale alla durata della perturbazione, Δt .

2) se non fosse così, avrebbe senso che la A_- risone, ma non la A_+ risone. La condizione L'affermazione concorda con t piccolo.

$\omega_f = \frac{E_f - E_i}{\hbar} \quad \omega \approx \omega_f \Rightarrow$ Picco risonante. $\Delta \omega = \frac{4\pi}{t}$ può avere una sorta di incertezza attorno al picco ω_f , incertezza sulla minima di $E_f - E_i$. Invio un'onda monodromia a ω , e vario ω per cercare la risonanza, la quale mi dice che sta avvenendo una transizione, e ottengo una riga.

$$\Delta E = k \Delta \omega = \frac{4\pi k}{t}$$

$\Delta E \sim t$ il tempo t è una variabile esterna, quindi solo qualitativamente ci somigliano col principio di indeterminazione.



la separazione tra i due massimi deve essere maggiore di $\Delta \omega$

$$2\omega_f \gg \Delta \omega$$

$$t \gg \frac{4\pi}{\omega_f} \approx \frac{4\pi}{\omega} = T \text{ periodo che caratterizza}$$

Per A_+ o A_- , il sistema deve avere il tempo di riconoscere che la perturbazione è periodica. Dobbiamo far agire l'onda per $t \gg T$.
Quindi:

$$t \ll \frac{2k}{|V_{fi}|} \quad e \quad t \gg T$$

\rightarrow

$$\frac{1}{\omega_{fi}} \ll t \ll \frac{k}{|V_{fi}|}$$

Ora basta una condizione finita sulla dinamica, i risultati che $|V_{fi}| \ll \hbar \omega_i = E_f - E_i$: dei coefficienti piccoli rispetto ai salti.

MA FISICAMENTE?

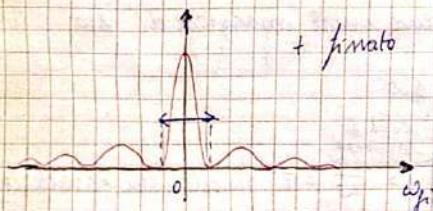
a) $\omega \approx \omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar} \Rightarrow E_f = E_i + \hbar \omega$, $\omega > 0$. La risonanza di questo tipo è l'assorbimento di un quanto di energia indotto da una perturbazione esterna. Con studiamo l'atomo: innanzitutto con ω e guardiamo otteniamo, in risonanza, le righe di assorbimento. ASSORBIMENTO INDOTTO

b) $\omega \approx -\omega_{fi} \Rightarrow E_f = E_i - \hbar \omega$ Mandiamo un quanto e mettiamo guadagniamo un altro. EMISSIONE INDOTTA fumibile se non si è nello stato fondamentale

Quindi con una perturb. periodica, in risonanza, l'energia cambia.

PERTURBAZIONE COSTANTE $V(t) = V$

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \frac{|V_{fi}|^2}{t^2} F(t, \omega_{fi}) = \frac{|V_{fi}|^2 t^2}{t^2} \frac{\sin(\frac{\omega_{fi} t}{2})}{(\frac{\omega_{fi}}{2})^2}$$



L'energia è conservata.

$$E_f \approx E_i \pm \frac{2\pi}{T}$$

CASE CON PERTURBAZIONE COSTANTE IN FUNZIONE DEL TEMPO

Caso non degenerazione $P_{i \rightarrow f} = \frac{|V_{fi}|^2}{t^2} \frac{4}{\omega_{fi}^2} \sin^2 \frac{\omega_{fi} t}{2}$

Ipo: $E_f \neq E_i \Rightarrow \omega_{fi} \neq 0$

CASE DEGENERATO

$\tilde{\epsilon}_f = E_f$ fumibile $\Rightarrow \omega_{fi} = 0 \Rightarrow P_{i \rightarrow f} = \frac{|V_{fi}|^2}{t^2} t^2$ facendo il limite ($\frac{\sin(t)}{t} \rightarrow 1$)

$$\ll 1 \Rightarrow t \ll \frac{k}{|V_{fi}|}$$

Cagliari 18 dicembre 2014

Giordano Ratto

Nel caso dinamico non si parla di autovalori, ma di transizioni tra stati. In ogni caso, ψ avrà autovalori diversi.

Cosa succede con le transizioni a uno stato del continuo?

$$|\psi_f\rangle |\psi(t)\rangle$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE

fumma non lo era

Ricordiamo che $|\psi(0)\rangle = |\psi_i\rangle$

es. DIFFUSIONE DA UN CENTRO DI SCATTERING

Potrei misurare il momento, variabile continua. ~~gli~~ gli autostati del momento non sono qualcosa di fisico (non sono misurabili).

Non misurò mai p_f , ma lo misurò all'intorno di un come con colimato, con una certa ε .

$$\Delta\Omega, \Delta\theta, \varepsilon = \frac{P^2}{2m}$$

ci interessano $\Delta\Omega, \Delta\theta$

Studiamo $|\psi_f\rangle = |\vec{p}\rangle$

Dov'è vero che $\left\{ \begin{array}{l} \vec{p} \in \Delta\Omega \\ \vec{e} \in \Delta\theta \end{array} \right\} \approx \Omega_f$ dominio di stati finali

$$\text{sta probabilità è } P_{i \rightarrow f} = \int_{\Omega} |c_p| |\psi(t)>|^2 d\Omega$$

$E, E + \delta E$
 $\Omega, \Omega + \delta \Omega$

REGIONE
DI ANGOLI
SARDO

$$P_{i \rightarrow f} \approx \frac{1}{k^2} \int |c_i| |v_i \varphi_i>|^2 F\left(t, \frac{E-E_i}{k}\right) p(E) dE.$$

Si noti che ci sono
meno rimeoli su $|v_i|^2$, perché è una dimi-
ta di probabilità. Conta che p ma $c \perp$.

→ trasformiamolo in un integrale di energia: $d\Omega = p^2 d\Omega d\Omega \cdot E = \frac{p^2}{2\pi} \Rightarrow$
 $\Rightarrow p^2 = 2\pi E \quad 2pd\Omega = 2\pi M dE \Rightarrow p d\Omega = M dE$

$$\Rightarrow P_{i \rightarrow f} = \int_{\Omega} p^2 d\Omega |c_p| |\psi(t)>|^2 \cdot \text{Per } f(E) = p^2 \frac{d\Omega}{dE} \Rightarrow p^2 d\Omega = p(E)dE$$

che si calcola perché $p^2 d\Omega = p(M dE) = \frac{\overline{M} dE}{f(E)}$

$$P_{i \rightarrow f} = \int_{\Omega} d\Omega \int dE p(E) |c_p| |\psi(t)>|^2$$

↑
Non lo raffiamo risolvere affatto → PERTURAZIONE

Consideriamo uno stato del continuo $|\alpha>$. $P(\alpha) = \int d\alpha |c_\alpha| |\psi(t)>|^2$

si farà quindi a $d\alpha = g(E, \beta) dE d\beta$. Null' esempio di prima,
 $\beta = \Omega$. Di fatto sto calcolo uno Jacobiano.

$$\int d\beta \int dE g(E, \beta) |c_\alpha| |\psi(t)>|^2$$

consideriamo a al posto di α

Assumiamo che basta solo E : $p = \int dE p(E) |c_E| |\psi(t)>|^2$. Se
 $H|\psi(t)> = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)>$ lo raffiamo risolvere, ma tutto bene.
 Che no?

$$H = H_0 + V(t)$$

Ipo: $V(t) = V$ ma ci è olipendenza dal tempo perché da 0 a t
 si ha $H(t)$, altrimenti H_0 .

$$|c_E| |\psi(t)>|^2 = \frac{1}{k^2} |c_E| |V| |\varphi_i>|^2 F\left(t, \frac{E-E_i}{k}\right)$$

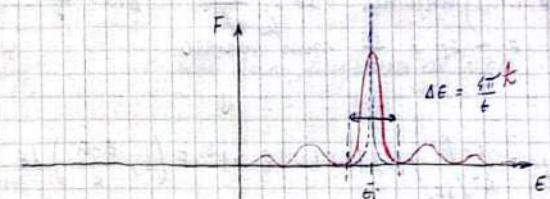
↑
STATO
FINALE

pendentemente da t ,

infatti → l'espressione trovata è per il primo ordine pertur-
bativo.

Inoltre, non ci sono imponzioni int. Consideriamo il limite per t grande.

picco per $E = E_i$:



t grande $\Rightarrow \Delta E \rightarrow 0$ si ha verso una sola dirada, e la norma-
izzazione diventa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F\left(t, \frac{E-E_i}{k}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{E-E_i}{k}\right)^2}{\left(\frac{E-E_i}{k}\right)^2} = \pi k t \delta\left(\frac{E-E_i}{k}\right) = \pi k t \delta(E - E_i)$$

ciò che permette di calcolare l'integrale. Del resto, la transizione avviene per $E = E_i$.

$$P_{i \rightarrow f} \approx \frac{1}{k^2} \int |c_i| |v_i \varphi_i>^2 \pi k t \delta(E - E_i) p(E) dE = \text{ (per } E_f = E_i + \delta E_f)$$

PERTURAZIONE COSTANTE ($E_f = E_i$)

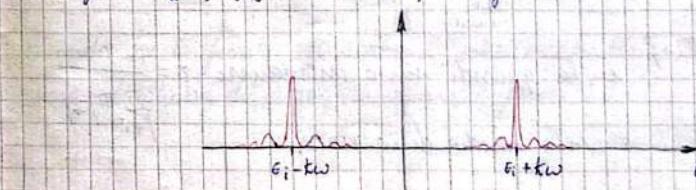
$$= \frac{2\pi k t}{k^2} p(E_f = E_i) |c_{E_f = E_i}| |V| |\varphi_i>^2 \text{ lineare in } t. \text{ Definiamo la}$$

prob. per unità di tempo $\pi_{i \rightarrow f} = \frac{P_{i \rightarrow f}}{t}$

$$= \frac{2\pi}{k} p(E_f = E_i) |c_{E_f = E_i}| |V| |\varphi_i>^2 \text{ REGOLA D'ORO DI FERMI}$$

Cosa succede se usiamo una perturbazione periodica? $V = V \sin \omega t$

$$\pi_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{k} \int (E_f = E_i \pm \hbar\omega) |c_{E_f = E_i \pm \hbar\omega}| |V| |\varphi_i>^2$$



$t \rightarrow \infty$

$$1) |f(\epsilon)| < \epsilon |V| \varphi_i > 1^2 \quad F\left(t, \frac{\epsilon - \epsilon_i}{t}\right)$$

Suffisiamo che $|f(\epsilon)| < \epsilon |V| \varphi_i > 1^2$ non piova. $\epsilon = \epsilon_i + \frac{2\pi}{t} t$ è il numero di integrazione $d\epsilon = \frac{2\pi}{t} dt$ $d\omega = \frac{dt}{t}$. Per t grandi, assumiamo $\epsilon \sim \epsilon_i + \frac{2\pi}{t}$ non fa variazione

↓

$$\pi_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon_i}^{\epsilon_f} |f(\epsilon)| < \epsilon |V| \varphi_i > 1^2 F\left(t, \frac{\epsilon - \epsilon_i}{t}\right) d\epsilon \approx \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon_i}^{\epsilon_f} |f(\epsilon)| < \epsilon_i |V| \varphi_i > 1^2$$

$$\int d\epsilon F\left(t, \frac{\epsilon - \epsilon_i}{t}\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\sin^2\left(\frac{\epsilon - \epsilon_i}{t} z\right)}{\left(\frac{\epsilon - \epsilon_i}{t} z\right)^2} \right) \propto \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\sin^2 z}{z^2} = \frac{2k\pi}{t}$$

per $z = \frac{\epsilon - \epsilon_i}{t} z$ $dz = d\epsilon \frac{t}{2\pi}$

Si può anche pensare alla f come successione di funzioni:

$$f_x(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2 x \alpha}{\alpha^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int dx f(x) \delta_x(\alpha) = f(0). \text{ Infatti in funz. test}$$

$$\text{da } \frac{1}{2\pi} \int dx f(x) \frac{\sin^2 x \alpha}{\alpha^2} ; x = \lambda \alpha \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int dx f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{\pi} f(0) \int dx \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{\pi} f(0) \pi = f(0)$$

VITA MEDIA DI UNO STATO

$$\pi_{i \rightarrow f}, f \neq i \Rightarrow P_{i \rightarrow f} = \pi_{i \rightarrow f} t$$

$$\text{Quale invece } P_{i \rightarrow i} = 1 - P_{i \rightarrow f} = 1 - \sum_{\substack{\text{stato} \\ \text{finale}}} \pi_{i \rightarrow f} t + \dots$$

$$\pi_{ii} = e^{-t \sum_{f \neq i} \pi_{i \rightarrow f}} \text{ e ha quindi senso introdurre } \tau = \frac{1}{\sum_{f \neq i} \pi_{i \rightarrow f}}$$

$$\Rightarrow P_{ii} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau \text{ vita media dello stato.}$$

Allora affinché $t \rightarrow \infty$, è $\pi_{i \rightarrow f} \rightarrow 0$. Quindi dato t è solo lo stato fondamentale è stazionario, perché da solo non transisce. Tutti gli altri eccitati di un atomo fanno invece decadre spontaneamente. Quelli che abbiamo chiamato stati stazionari si realizzano solo nello stato fondamentale.

$$\tau \Gamma \sim t \quad \tau = \frac{t}{\sum \pi_i}$$

Γ sarà una larghezza di riga.

RELAZIONE TEMPO ENERGIA

$$\psi(t) = \psi(\vec{r}, t) \quad \vec{r} = \vec{r}_0 \text{ fissato}$$

corrispondenza di onde monodromia
telle con durata $st \Rightarrow \psi(t)$ definita
localizzata in At.

$$\psi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int dt \psi(t) e^{i\omega t} \rightarrow \omega$$

Sappiamo che $st \Delta \omega \geq \frac{1}{3}$ (l'uguaglianza viene per pacchetti gaussiani).

$$st \Delta \omega \geq t/2 \quad \Delta \omega = \Delta \epsilon \Rightarrow \Delta t \Delta \epsilon \geq \frac{t}{2}$$

tempo caratteristico della vita media.

Tanto più è localizzato lo stato, tanto più grande sono i valori di energia. $\Delta t = \tau$

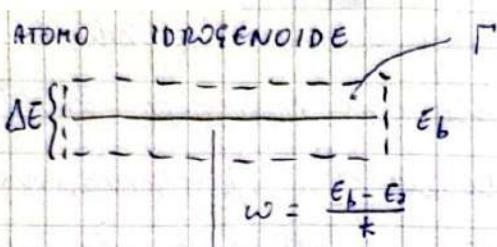
$$\Delta E \underset{\text{inversa}}{\sim} \epsilon$$

$$\tau \Gamma \sim t$$

inversa associata all'energia

Questo perché
è decadimento

Quindi per t finito lo stato non ha valori di energia unici. Γ è una larghezza di riga, in quanti perché?



\Rightarrow LARGHEZZA DI RIGA

• Se non prendo lo stato fond, n'altra

