Programmation 1

TD n°13

15 décembre 2020

1 Unification et typage

Arbres et termes

On note Σ une signature algébrique et $\mathbb{X}$ un ensemble infini dénombrable de variables. L'ensemble $T_\Sigma(\mathbb{X})$ est l'ensemble des arbres *finis* dont les nœuds sont des éléments de Σ ou des variables dans $\mathbb{X}$, qui sont alors nécessairement des feuilles.
Plus formellement, on écrit $T_\Sigma(\mathbb{X})$ comme l'algèbre initiale engendrée par Σ et $\mathbb{X}$.
En particulier, si (A, Σ) est une Σ-algèbre, et $f : \mathbb{X} \to A$ est une évaluation des variables alors il existe une unique fonction $f^\dagger : T_\Sigma(\mathbb{X}) \to A$ qui est un morphisme de Σ-algèbres et qui coïncide avec f sur les variables.

Substitutions

Une substitution σ est une fonction de $\mathbb{X}$ vers $T_\Sigma(\mathbb{X})$ qui diffère de l'identité seulement sur un ensemble fini de variables.
On note $t\sigma$ le terme obtenu via $\sigma^\dagger(t)$ lorsque σ est une substitution et t un terme.
On dit qu'une substitution est *plate* lorsque chaque variable est envoyée sur une variable.
On dit qu'une substitution est un *renommage* lorsqu'elle est plate et est une bijection.
Lorsque σ et τ sont deux substitutions, on note $\sigma\tau$ la substitution $\tau^\dagger \circ \sigma$, ce qui se traduit par $t(\sigma\tau) = (t\sigma)\tau$.

Ordre sur les substitutions

On écrit $\sigma \leq \tau$ lorsqu'il existe une substitution θ telle que $\sigma\theta = \tau$. Cet ordre est l'ordre de *généralisation*.

Problème d'unification

Un problème d'unification est un ensemble E fini de contraintes de la forme $t \doteq t'$ où t et t' sont des termes. Une solution à un problème d'unification E est une substitution σ telle que

$$\forall t \doteq t' \in E, t\sigma = t'\sigma$$

Exercise 1 :

The relation $\leq$ on the substitutions is not antisymmetric.

1. Show that $\sigma \leq \tau \wedge \tau \leq \sigma$ if and only if σ and τ differ only by a renaming.
2. Show that if there is a solution to a unification problem, there is only one most general (except renaming).

Exercise 2 :

Apply the "naive" (exponential) unification algorithm seen below (see Figure 1) to the following systems of equations. Can you find unificators other than the mgu ?

1. $\{y \doteq f(x,z), y \doteq f(\dot{3},\dot{5})\}$
2. $\{f(g(x)) \doteq f(z), g(z) \doteq g(g(\dot{3}))\}$
3. $\{\mathsf{a}(x,x) \doteq \mathsf{a}(\mathbf{int}, \mathsf{a}(\mathbf{int},\mathbf{int}))\}$
4. $\{f(x) \doteq f(f(f(x)))\}$
5. $\{\alpha \doteq \beta \to \beta, \beta \doteq \gamma \to \gamma, \gamma \doteq \delta \to \delta\}$

Exercise 3 :

1. Show that the algorithm seen before (c.f. Figure 1) is necessarily exponential.
2. Propose a data structure for the mgu which circumvents the problem mentioned in the previous question.
3. Propose a modification of the rules of the naive algorithm adapted to this new structure.
4. What is the complexity of the algorithm obtained ?

Exercise 4 :

1. Give an example of a closed term from pureML that does not type into monomorphic pureML.
2. Give an example of a closed term which does not type in pureML but which does not reduce to Wrong.

Exercise 5 :

Imagining the natural generalization of the pureML typing rules, type the given program :

```
let r = ref (fun x -> x)
in
  r := (fun n -> n+1);
    !r "abc" ;;
```

Is it well-typed ?

Exercise 6 :

Write a function `length` in OCaml for the following type :

```
type 'a mycroft =
  | Nil
  | Cont of 'a * ('a list) mycroft
```

Explain.

$$
\begin{array}{rll}
(E \cup \{f(s_1,\ldots,s_m) \doteq f(t_1,\ldots,t_m)\}, \theta) \to (E \cup \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_m \doteq t_m\}, \theta) & & \text{(Dec)} \\
(E \cup \{f(s_1,\ldots,s_m) \doteq g(t_1,\ldots,t_n)\}, \theta) \to \mathsf{Fail} & \text{si } f \neq g & \text{(DecFail)} \\
(E \cup \{x \doteq x\}, \theta) \to (E, \theta) & & \text{(Triv)} \\
(E \cup \{x \doteq t\}, \theta) \to (E[x := t], \theta[x := t]) & \text{si } x \notin \mathrm{fv}(t) & \text{(Bind)} \\
(E \cup \{t \doteq x\}, \theta) \to (E[x := t], \theta[x := t]) & \text{si } x \notin \mathrm{fv}(t) & \text{(Bind')} \\
(E \cup \{x \doteq t\}, \theta) \to \mathsf{Fail} & \text{si } t \neq x \in \mathrm{fv}(t) & \text{(Check)} \\
(E \cup \{t \doteq x\}, \theta) \to \mathsf{Fail} & \text{si } t \neq x \in \mathrm{fv}(t) & \text{(Check')}
\end{array}
$$

FIGURE 1 – Algorithme d'unification de ROBINSON.