Teorema de Gabriel para representações de quivers II

Adriana Mayumi Shiguihara

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

14 de maio de 2021

O que veremos

Relembrando...

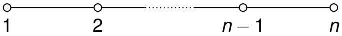
Um *quiver* é um grafo orientado.

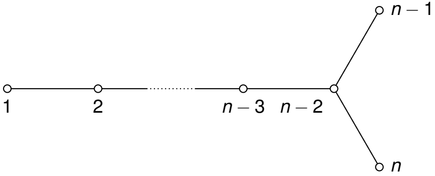
Notação: $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$

- Q_0 são os vértices;
- Q_1 são as arestas;
- Orientação dada por $s, t\colon Q_1 \to Q_0$:
  $\alpha \in Q_1$ sai de $s(\alpha)$ e chega em $t(\alpha)$.

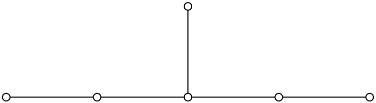
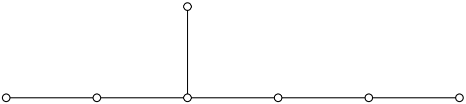
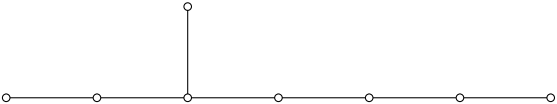
Q sem a orientação é denotado por $\Gamma(Q)$.

Convenções

- **k** é um corpo algebricamente fechado.
- Todos os espaços vetoriais têm dimensão finita.
- Todos os quivers são finitos e conexos.
- Grafos de Dynkin são os grafos de tipo A, D ou E:
  - A_n, $n \geqslant 0$: 

  - D_n, $n \geqslant 4$: 

Convenções

- E_6: 
- E_7: 
- E_8: 

Relembrando...

V é uma *representação de Q* se associa

- $\mathbf{k}$-espaço vetorial V_i a cada vértice i;
- transformação linear $V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$ a cada aresta α.

Notação: $V = (V_i; V_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$.

Exemplo

$$0 \xrightarrow{0} \mathbf{k} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbf{k}^2$$

é uma representação de

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

Relembrando...

Soma direta de V, W de Q:

$$V \oplus W := (V_i \oplus W_i; V_\alpha \oplus W_\alpha),$$

em que

$$V_\alpha \oplus W_\alpha(v, w) = (V_\alpha(v), W_\alpha(w)).$$

Uma representação é *indecomponível* se não é soma direta de representações não nulas.

Relembrando...

V, W representações de Q.
$\rho = (\rho_i)_{i \in Q_0}$ é um *morfismo de representações* $V \to W$ se cada $\rho_i \colon V_i \to W_i$ é **k**-linear e

$$\begin{tikzcd}
V_{s(\alpha)} \arrow[r, "V_\alpha"] \arrow[d, "\rho_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "\rho_{t(\alpha)}"] \\
W_{s(\alpha)} \arrow[r, "W_\alpha"] & W_{t(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

comuta para toda aresta α.

Temos assim a *categoria das representações* de Q, denotada por $\operatorname{rep} Q$.

Teorema de Krull–Schmidt(–Remak–Azumaya?)

Teorema

Q um quiver, $V \in \operatorname{rep} Q$ não nula.

Existem $V^1, V^2, \ldots, V^r \in \operatorname{rep} Q$ indecomponíveis tais que

$$V \cong V^1 \oplus V^2 \oplus \cdots \oplus V^r.$$

Além disso, $V^1, V^2, \ldots, V^r$ são únicas.

Definição

A *forma simétrica de Euler* de Q (em $\mathbb{R}^{Q_0}$), denotada $(\cdot,\cdot)_Q$, é dada pela matriz

$$2\,\mathrm{Id}_n - A,$$

em que A é a matriz de adjacência de $\Gamma(Q)$. Ou seja,

$$(x,y)_Q := 2\left(\sum_{i\in Q_0} x_i y_i\right) - \left(\sum_{\alpha\in Q_1} x_{s(\alpha)}y_{t(\alpha)} + x_{t(\alpha)}y_{s(\alpha)}\right).$$

Forma de Tits

Definição

A *forma de Tits* de Q é a forma quadrática $q_Q\colon \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$q_Q(x) := \frac{1}{2}(x, x)_Q,$$

ou seja,

$$q_Q(x) := \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}.$$

Exemplo

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

$$q_Q(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3$$

Teorema (Gabriel, 1972)

Q um quiver conexo. São equivalentes:

1. Q tem tipo finito.
2. $\Gamma(Q)$ é grafo de Dynkin.
3. q_Q é positiva definida.

Teorema (Gabriel, 1972)

Seja Q tal que $\Gamma(Q)$ é grafo de Dynkin. Então $V \mapsto \mathrm{d}(V)$ induz bijeção entre as classes de rep. indecomponíveis de Q e as raízes positivas de Q.

Contexto

1972 Pierre Gabriel (*Unzerlegbare Darstellungen I*):

- Q é de tipo finito $\iff$ $\Gamma(Q)$ é Dynkin;
- Estabelece correspondência entre raízes e indecomponíveis *a posteriori*.

1973 I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, e V. A. Ponomarev (*Coxeter functors and Gabriel's theorem*):

"In this paper we try to remove to some extent the 'mystique' of this correspondence."

$\Gamma(Q)$ Dynkin $\implies$ tipo finito

Resumo

- Definir *sistema de raízes*;
- Definir *funtores reflexão* $\operatorname{rep} Q \to \operatorname{rep} Q'$, em que Q' é um certo quiver com $\Gamma(Q') = \Gamma(Q)$;
- Provar bijeção entre raízes positivas e classes de representações indecomponíveis usando um resultado que associa os dois conceitos acima.

Sistema de raízes

E um $\mathbb{R}$-e.v. com p.i. $(\cdot,\cdot)$.

Definição

Um *sistema de raízes* é um conjunto finito $R \subset E \backslash \{0\}$ tal que

- span $R = E$
- $\forall \alpha, \beta \in R$,
$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$$
- $\forall \alpha, \beta \in R$,
$$\beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha =: s_\alpha(\beta) \in R$$

Observação

- Com o p.i. euclidiano, $s_\alpha(\beta)$ é reflexão de β pelo hiperplano ortogonal a α.
- $s_\alpha s_\alpha(\beta) = \beta$ para todo $\beta \in E$.

Motivação para a definição

- $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples
- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ subálgebra de Cartan
- Existe um $R \subset \mathfrak{h}^*$ que é sistema de raízes com um certo produto interno
- Podemos recuperar $\mathfrak{g}$ a partir de R

Nosso sistema de raízes

Proposição

Se $\Gamma(Q)$ é Dynkin, então $(\cdot,\cdot)_Q$ é produto interno em $\mathbb{R}^{Q_0}$.

Lembrando:

$$(x,x)_Q := 2\left(\sum_{i\in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha\in Q_1} x_{s(\alpha)}x_{t(\alpha)}\right).$$

Nosso sistema de raízes

Proposição

O conjunto

$$R = \{x \in \mathbb{Z}^{Q_0} \mid (x, x)_Q = 2\}$$

é sistema de raízes de $\mathbb{R}^{Q_0}$ com o p.i. $(\cdot, \cdot)_Q$.

- R é finito.
- $\operatorname{span} R = \mathbb{R}^{Q_0}$, pois a base canônica $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ está contida em R:

$$(\alpha_i, \alpha_i)_Q = 2(1^2 - 0) = 2.$$

Nosso sistema de raízes

- Se $\alpha, \beta \in R$,

$$2\frac{(\alpha,\beta)_Q}{(\alpha,\alpha)_Q} = (\alpha,\beta)_Q \in \mathbb{Z}.$$

- Se $\alpha, \beta \in R$,

$$s_\alpha(\beta) = \beta - (\alpha,\beta)_Q \alpha \in R.$$

Chamamos os elementos de R de *raízes* de Q.

Proposição

Toda raiz é positiva ou negativa.

($x \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ é *positivo* se $x \neq 0$ e $x_i \geqslant 0$ para todo i.)

Raízes simples e reflexões simples

Definição

- Para cada $i \in Q_0$, dizemos que α_i é a *i-ésima raiz simples*.
- $s_i := s_{\alpha_i}$ são as *reflexões simples*.
- O grupo $\mathcal{W}$ gerado pelas reflexões simples é chamado *grupo de Weyl*.
- Chamamos

$$c = s_n \cdots s_1$$

de *elemento de Coxeter*.

Raízes simples e reflexões simples

Observação

- $s_i^{-1} = s_i \quad \forall i \implies c^{-1} = s_1 \cdots s_n$.
- $\mathcal{W}$ é um grupo finito que permuta os elementos de R.

Elemento de Coxeter

Proposição

Seja $\beta \in \mathbb{Z}^{Q_0}$. Existe $k \geqslant 0$ tal que

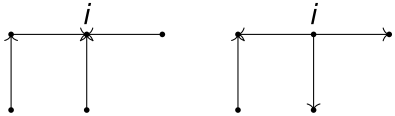
$$c^k(\beta) \ngtr 0.$$

- $\mathcal{W}$ é finito $\implies \exists M > 0$ tal que $c^M = 1$.
- Sejam $\beta > 0$, $\gamma := (1 + c + \cdots + c^{M-1})\beta$.
- $c\gamma = \gamma$
- s_i só muda a i-ésima coord. $\implies s_i\gamma = \gamma$
  $\implies \gamma - (\gamma, \alpha_i)_Q\alpha_i = \gamma \implies (\gamma, \alpha_i)_Q = 0 \quad \forall i$
- $\beta + c\beta + \cdots + c^{M-1}\beta = 0$

Funtores reflexão

Sejam Q um quiver e $i \in Q_0$.

- Se i é *poço*/*fonte*, definimos $S_i^+(Q)$/$S_i^-(Q)$ como o quiver obtido invertendo as arestas ligadas a i ($\implies$ i vira fonte/poço).



Definimos os *funtores reflexão*

$$F_i^+ : \operatorname{rep} Q \to \operatorname{rep} S_i^+(Q),$$

para i poço, e

$$F_i^- : \operatorname{rep} Q \to \operatorname{rep} S_i^-(Q),$$

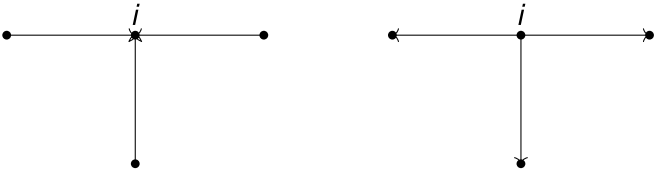
para i fonte.

Definição de F_i^+

Nos objetos: Seja $V \in \operatorname{rep} Q$.

- F_i^+ mantém os espaços vetoriais dos vértices $\neq i$ e troca V_i por

$$\left(F_i^+ V\right)_i := \ker \varphi_i$$



$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = V_\alpha(x_1) + V_\beta(x_2) + V_\gamma(x_3)$$

Definição de F_i^+

- F_i^+ mantém as transformações lineares das arestas longe de i e, para α que chega em i, coloca

$$\left(F_i^+ V\right)_i = \pi_\alpha|_{\ker \varphi_i},$$

em que π_α é a projeção

$$\bigoplus_{t(\beta)=i} V_{s(\beta)} \twoheadrightarrow V_{s(\alpha)}.$$

Definição de F_i^+

Nos morfismos: Seja $\rho = (\rho_i)\colon V \to W$ morfismo em $\operatorname{rep} Q$. F_i^+ mantém as transformações lineares nos vértices $\neq i$ e troca ρ_i por

$$\left(F_i^+\rho\right)_i := \left(\bigoplus_{t(\alpha)=i} \rho_{s(\alpha)}\right)\Bigg|_{\ker \varphi_i}$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r] & V_i & V_2 \arrow[l] & & V_1 & {} \arrow[l] \arrow[r] & V_2 \\
& & & \longrightarrow & & & \\
W_1 \arrow[r] & W_i & W_2 \arrow[l] & & W_1 & {} \arrow[l] \arrow[r] & W_2
\end{tikzcd}$$

Funtores reflexão

Lema

$V \in \operatorname{rep} Q$ indecomponível, i poço. Então vale um dos dois:

1. $V = S(i)$
2. $F_i^+ V$ é indecomponível,

$$F_i^- F_i^+ V \cong V$$

   e

$$\mathrm{d}(F_i^+ V) = s_i(\mathrm{d}\, V).$$

Vale análogo para i fonte.

Uma numeração admissível (invertida)

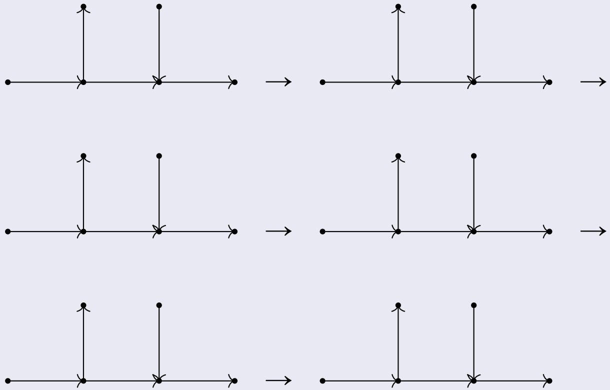
Q acíclico com n vértices.

Podemos numerar os vértices de Q de modo que, se existe aresta $i \to j$, então $i \geqslant j$.

1. Atribua a um poço o número 1.
2. Repita os passos abaixo até terminar a numeração:
   - 2.1 Se k é o menor número ainda não atribuído, remova os vértices $1, 2, \ldots k - 1$.
   - 2.2 Atribua a um poço o número k.

Uma numeração admissível (invertida)

Exemplo



Funtores de Coxeter

Q com numeração admissível $\implies$ faz sentido aplicar

$$\Phi^+ := F_n^+ F_{n-1}^+ \cdots F_1^+, \qquad \Phi^- := F_1^- F_2^- \cdots F_n^-.$$

Φ^+, Φ^- são chamados *funtores de Coxeter*.

$$\Phi^+, \Phi^- \colon \operatorname{rep} Q \to \operatorname{rep} Q$$

Definimos, para $1 \leqslant j \leqslant n$, $k \geqslant 0$,

$$V^{(kn+j)} := F_j^+ \cdots F_1^+ (\Phi^+)^k V.$$

Ideia da prova

- $V \in \operatorname{rep} Q$ é indecomponível $\implies$ $\operatorname{d} V \in R_+$.
- Seja $W \in \operatorname{rep} Q$ indecomponível com $\operatorname{d} W = \operatorname{d} V$. Então $W \cong V$.
- $[V] \mapsto \operatorname{d} V$ é injeção das classes de indecomp. em R_+, que é finito.

Lembrete

$V \in \operatorname{rep} Q$ indecomponível, i poço. Se $V \neq S(i)$, então $F_i^+ V$ é indecomponível e

$$\mathrm{d}(F_i^+ V) = s_i(\mathrm{d}\, V).$$

Assuma numeração admissível.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{rep} Q \arrow[r, "F_1^+"] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & \operatorname{rep} S_1^+(Q) \arrow[r, "F_2^+"] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & \cdots \arrow[r, "F_j^+"] & \operatorname{rep} Q^{(kn+j)} \arrow[d, "\mathrm{d}"'] \\
\mathbb{R}^{Q_0} \arrow[r, "s_1"] & \mathbb{R}^{Q_0} \arrow[r, "s_2"] & \cdots \arrow[r, "s_j"] & \mathbb{R}^{Q_0}
\end{tikzcd}$$

$\Gamma(Q)$ Dynkin $\implies$ tipo finito

A seq.

$$\mathrm{d}\,V, \quad s_1(\mathrm{d}\,V), \quad s_2 s_1(\mathrm{d}\,V), \quad \ldots, \quad s_j \cdots s_2 s_1 c^k(\mathrm{d}\,V), \quad \ldots$$

se mantém positiva enquanto $V^{(kn+j-1)} \neq S(j)$
$(\iff \mathrm{d}\,V^{(kn+j-1)} \neq \alpha_j)$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{rep} Q \arrow[r, "F_1^+"] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & \operatorname{rep} S_1^+(Q) \arrow[r, "F_2^+"] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & \cdots \arrow[r, "F_j^+"] & \operatorname{rep} Q^{(kn+j)} \arrow[d, "\mathrm{d}"'] \\
\mathbb{R}^{Q_0} \arrow[r, "s_1"] & \mathbb{R}^{Q_0} \arrow[r, "s_2"] & \cdots \arrow[r, "s_j"] & \mathbb{R}^{Q_0}
\end{tikzcd}$$

Lembrete

Existe $m \geqslant 0$ tal que $c^m(\mathrm{d}\,V) \not> 0$.

$\Gamma(Q)$ Dynkin $\implies$ tipo finito

Seja $kn + j$ mínimo tal que $s_{j+1}s_j \cdots s_1 c^k(\mathrm{d}\, V) \ngtr 0$.

- $V^{(kn+j)} = S(j+1)$
- $s_j \cdots s_1 c^k(\mathrm{d}\, V) = \mathrm{d}\, V^{(kn+j)} = \alpha_{j+1}$
- $kn + j$ só depende de $\mathrm{d}\, V$.

Seja $W \in \mathrm{rep}\, Q$ indecomp. com $\mathrm{d}\, W = \mathrm{d}\, V$. Como a seq.

$$\mathrm{d}\, W, \quad s_1(\mathrm{d}\, W), \quad s_2 s_1(\mathrm{d}\, W), \quad \ldots, \quad s_j \cdots s_2 s_1 c^k(\mathrm{d}\, W), \quad \ldots$$

é a mesma que para $\mathrm{d}\, V$, valem as mesmas propriedades para W.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{rep} Q \arrow[r, "F_1^+"'] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & \cdots \arrow[r, "F_{j-1}^+"'] & \operatorname{rep} Q^{(kn+j-1)} \arrow[r, "F_j^+"'] \arrow[d, "\mathrm{d}"'] & \operatorname{rep} Q^{(kn+j)} \arrow[d, "\mathrm{d}"'] \\
\mathbb{R}^{Q_0} \arrow[r, "s_1"] & \cdots \arrow[r, "s_{j-1}"] & \mathbb{R}^{Q_0} \arrow[r, "s_j"] & \mathbb{R}^{Q_0}
\end{tikzcd}$$

Lembrete

$V \in \operatorname{rep} Q$ indecomponível, i poço. Se $V \neq S(i)$, então V é indecomponível e

$$V \cong F_i^- F_i^+ V.$$

$$F_j^+ \cdots F_1^+ (\Phi^+)^k W = S(j+1) = F_j^+ \cdots F_1^+ (\Phi^+)^k V$$

Ficou provado que

- se $V \in \operatorname{rep} Q$ é indecomponível, então $\operatorname{d} V \in R_+$;
- se $W \in \operatorname{rep} Q$ é indecomp. tal que $\operatorname{d} W = \operatorname{d} V$, então $V \cong W$.

Ou seja, a função que vai das classes de representações indecomponíveis nas raízes positivas de Q dada por

$$[V] \mapsto \operatorname{d} V$$

está bem def. e é injetora .

Portanto, Q tem tipo finito.

Bijeção entre classes de indecomp. e R_+

Falta provar que a função é sobrejetora, ou seja, que toda raiz positiva é vetor dimensão de alguma rep. indecomponível.

Bijeção entre classes de indecomp. e R_+

Seja $\alpha \in R_+$.

Queremos $V \in \operatorname{rep} Q$ indecomp. tal que $\operatorname{d} V = \alpha$.

- $\exists k \geqslant 0$ tal que $c^k(\alpha) \not> 0$.
- Seja $kn + j$ máximo tal que

$$s_1(\alpha), s_2(\alpha), \ldots, s_j s_{j-1} \cdots s_1 c^k(\alpha) =: \beta$$

  são positivas. Então $\beta > 0$ e $s_{j-1}(\beta) \not> 0$.

Observação

- R é estável por reflexões simples.
- $R = R_- \sqcup R_+$.
- s_i só muda a coordenada i.

- $\beta > 0, s_{j+1}(\beta) < 0 \implies \beta = N\alpha_{j+1} \implies \beta = \alpha_{j+1}$
- Ou seja, $s_j \cdots s_1 c^k(\alpha) = \mathrm{d}\, S(j+1)$.
- Ou ainda,

$$\alpha = c^k s_1 \cdots s_j(\mathrm{d}\, S(j+1)).$$

- $\alpha = \mathrm{d}((\Phi^-)^k F_1^- \cdots F_j^- S(j+1))$?

Definamos

$$V := (\Phi^-)^k F_1^- \cdots F_j^- S(j+1).$$

Provaremos que V é indecomp. e $\alpha = \mathrm{d}\, V$.

$$s_j \cdots s_1 c^k(\alpha) = \alpha_{j+1}$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{rep} Q \arrow[d, "\mathrm{d}"] & \cdots \arrow[l, "F_1^-"'] & \operatorname{rep} Q^{(kn+j-1)} \arrow[l, "F_{j-1}^-"'] \arrow[d, "\mathrm{d}"'] & \operatorname{rep} Q^{(kn+j)} \arrow[l, "F_j^-"'] \arrow[d, "\mathrm{d}"'] \\
\mathbb{R}^{Q_0} & \cdots \arrow[l, "s_1"'] & \mathbb{R}^{Q_0} \arrow[l, "s_{j-1}"'] & \mathbb{R}^{Q_0} \arrow[l, "s_j"']
\end{tikzcd}$$

Referências

I N Bernstein, I M Gel'fand, and V A Ponomarev.
COXETER FUNCTORS AND GABRIEL's THEOREM.
Russian Mathematical Surveys, 28(2):17–32, apr 1973.

Pavel Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina.
Introduction to representation theory, volume 59 of *Student Mathematical Library*.
American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
With historical interludes by Slava Gerovitch.