

INTRODUÇÃO AO TRABALHO CIENTÍFICO – MAT0148

TEOREMA DE GABRIEL PARA REPRESENTAÇÕES DE QUIVERS

ADRIANA MAYUMI SHIGUIHARA

INTRODUÇÃO

Este texto busca expor os frutos da iniciação científica que realizei sob a orientação do professor Kostiantyn Iusenko de março a novembro de 2020. O projeto se baseou em estudar as representações de quivers, tendo como objetivo final compreender a demonstração do seguinte teorema:

Teorema de Gabriel. *Seja Q uma aljava conexa. São equivalentes:*

- (1) Q tem tipo finito.
- (2) $\Gamma(Q)$ é grafo de Dynkin.
- (3) q_Q é positiva definida.

Embora meus estudos não tenham se restringido a isso, optei aqui por dar enfoque a essa demonstração.

Comecei o projeto pelos resultados básicos de representações de quivers e pela definição da álgebra de caminhos $\mathbf{k}Q$ a partir de uma aljava Q . Na sequência, estudei a equivalência entre $\text{rep}_{\mathbf{k}} Q$, a categoria das representações de dimensão finita de Q , e $\mathbf{k}Q\text{-mod}$, a categoria dos módulos finitamente gerados sobre $\mathbf{k}Q$. As principais referências dessa etapa foram [6], [2] e [1].

Em seguida, aproveitei o conhecimento adquirido na disciplina *Introdução à Álgebra Comutativa*, lecionada pelo professor Kostiantyn Iusenko no primeiro semestre de 2020, para desenvolver a bagagem necessária para a demonstração de (1) \implies (3) exposta neste texto. Essa demonstração envolve avaliar dimensões de variedades com o auxílio de uma determinada ação de grupos algébricos. Para estabelecer a base de geometria algébrica, recorri a [4]. Para a prova de (1) \implies (3) em si, segui [5].

Na parte final dos meus estudos, voltei minha atenção para a prova de (2) \implies (1). Segui principalmente o livro [3], que relaciona as representações indecomponíveis de uma aljava a suas raízes positivas, valendo-se para isso dos funtores de Coxeter.

1. PRELIMINARES

Neste texto, todos os espaços vetoriais são sobre um mesmo corpo algebricamente fechado \mathbf{k} .

1.1. Aljavas e suas representações. Um quiver é um grafo orientado. Formalmente, fazemos a seguinte definição:

Definição 1.1. Um *quiver* ou uma *aljava* Q é uma quádrupla (Q_0, Q_1, s, t) onde

- ◇ Q_0 é um conjunto, cujos elementos são chamados *vértices* de Q ;
- ◇ Q_1 é um conjunto, cujos elementos são chamados *arestas* de Q ;
- ◇ s e t são funções de Q_1 em Q_0 .

Dizemos que $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ é um *subquiver* (ou uma *subaljava*) de Q se $Q'_0 \subset Q_0$, $Q'_1 \subset Q_1$, $s' = s|_{Q'_1}$ e $t' = t|_{Q'_1}$.

Neste texto, trataremos apenas de quivers finitos, ou seja, com Q_0 e Q_1 finitos.

As notações s e t vêm de *source* e *target*, respectivamente, e indicam que, dada uma aresta α de Q , essa aresta sai do vértice $s(\alpha)$ e chega ao vértice $t(\alpha)$.

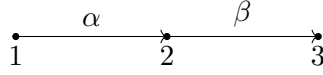
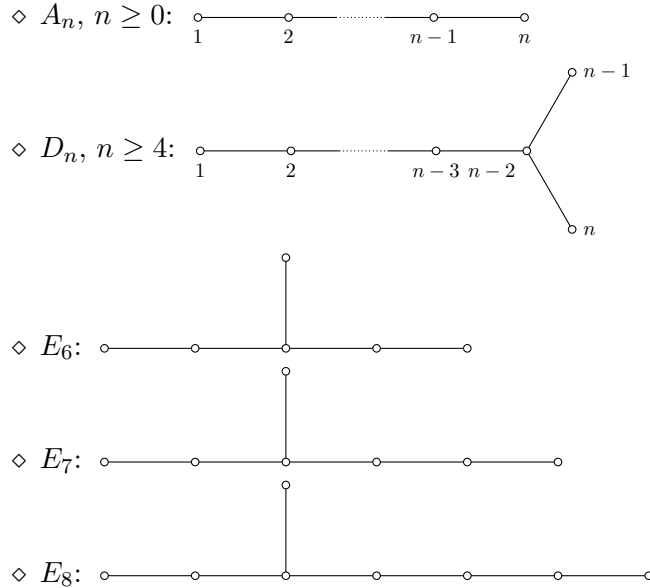


FIGURA 1. Neste exemplo, $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$, $s(\alpha) = 1$, $t(\alpha) = s(\beta) = 2$ e $t(\beta) = 3$.

A seguir definiremos os *grafos de Dynkin*, que caracterizarão os quivers de tipo finito.

Definição 1.2. Os *grafos de Dynkin* de tipos A , D e E são



Observação 1.3. Há outros tipos de grafos de Dynkin, mas não os abordaremos neste texto. Assim, sempre que dissermos “grafos de Dynkin” estaremos nos referindo a A_n, D_n, E_6, E_7 e E_8 .

É interessante estudar quivers ignorando sua orientação, como podemos imaginar pela relevância dos grafos de Dynkin.

Definição 1.4. Dado um quiver Q , chamaremos de *grafo subjacente*, e denotaremos por $\Gamma(Q)$, o grafo obtido removendo a orientação das arestas de Q . Diremos que Q é *conexo* se $\Gamma(Q)$ for conexo, e que Q é *acíclico* se $\Gamma(Q)$ for acíclico.

Neste texto, todos os quivers serão conexos, a menos de menção contrária.

Definição 1.5. Dizemos que V é uma *representação* de uma aljava Q se V associa

- ◊ a cada $i \in Q_0$ um espaço vetorial V_i ;
- ◊ a cada $\alpha \in Q_1$ uma transformação linear $V_\alpha: V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)}$.

Dizemos que V tem *dimensão finita* se $\dim V_i < \infty$ para todo vértice i . Nesse caso, definimos o *vetor dimensão* de V como

$$d(V) := (\dim V_i)_{i \in Q_0}.$$

Convém usar a seguinte notação: se V, W forem representações de um quiver Q e tivermos

$$\dim V_i \leq \dim W_i \quad \forall i \in Q_0$$

e

$$\dim V_j < \dim W_j \quad \text{para algum } j \in Q_0,$$

diremos que a dimensão de W é *menor* que a dimensão de V , ou $d(V) < d(W)$.

Neste texto, abordaremos apenas representações de dimensão finita.

Definição 1.6. Sejam V e W representações de um quiver Q . Um *morfismo de representações* $\rho: V \rightarrow W$ é uma família $(\rho_i)_{i \in Q_0}$, onde $\rho_i: V_i \rightarrow W_i$ são transformações lineares tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_{s(\alpha)} & \xrightarrow{V_\alpha} & V_{t(\alpha)} \\ \rho_{s(\alpha)} \downarrow & & \downarrow \rho_{t(\alpha)} \\ W_{s(\alpha)} & \xrightarrow{W_\alpha} & W_{t(\alpha)} \end{array}$$

comuta para toda aresta α . Ou seja,

$$W_\alpha \rho_{s(\alpha)} = \rho_{t(\alpha)} V_\alpha, \quad \forall \alpha \in Q_1.$$

Se ρ_i for isomorfismo de espaços vetoriais para todo vértice i , dizemos que ρ é um *isomorfismo* e que as representações V e W são *isomorfas*. Nesse caso, escrevemos $V \cong W$.

Temos assim a categoria das representações de Q de dimensão finita sobre o corpo \mathbf{k} , denotada por $\text{rep}_{\mathbf{k}} Q$, ou por $\text{rep } Q$ se o corpo estiver subentendido. Como todas as representações deste texto são sobre o mesmo corpo, usaremos a segunda notação.

Definição 1.7. Sejam $V, W \in \text{rep } Q$. A *soma direta* de V e W é a representação $V \oplus W$ de Q dada por

$$(V \oplus W)_i := V_i \oplus W_i, \forall i \in Q_0$$

e

$$\begin{aligned} (V \oplus W)_\alpha &: (V \oplus W)_{s(\alpha)} \longrightarrow (V \oplus W)_{t(\alpha)} \\ (v, w) &\longmapsto (V_\alpha(v), W_\alpha(w)) \end{aligned}$$

para toda aresta α de Q .

Chamamos V de *indecomponível* se $V \neq 0$ (ou seja, $d(V) \neq 0$) e se V não pode ser decomposta em soma direta de representações não nulas. Em outras palavras, se tivermos

$$V \cong V' \oplus V'',$$

então $d(V') = 0$ ou $d(V'') = 0$.

Definição 1.8. Dizemos que um quiver Q é de *tipo finito* se há apenas um número finito de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis de Q . Caso contrário, dizemos que Q tem *tipo infinito*.

Desejamos demonstrar o teorema de Krull–Schmidt, que nos permite restringir nosso estudo às representações indecomponíveis. Para tanto, usaremos a estrutura de anel de $\text{End}_Q V$, o espaço dos morfismos de V em V , onde V é uma representação de um quiver Q . Seguiremos a prova feita em [2, Section 1.7].

É conhecido o seguinte resultado:

Teorema 1.9. Sejam L um \mathbf{k} -espaço vetorial e $\phi: L \rightarrow L$ um operador linear. Então

$$L \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{k}} L(\lambda),$$

onde

$$L(\lambda) := \{x \in L \mid (\phi - \lambda)^N(x) = 0 \text{ para algum } N \in \mathbb{N}\}.$$

Seja $\rho \in \text{End}_Q V$. Queremos uma decomposição semelhante para uma representação V . Para cada vértice i de Q e cada $\lambda \in \mathbf{k}$, definimos

$$V_i(\lambda) := \{x \in V_i \mid (\rho_i - \lambda)^N(x) = 0 \text{ para algum } N \in \mathbb{N}\}.$$

Como ρ é morfismo de representações, temos

$$\rho_{t(\alpha)} V_\alpha = V_\alpha \rho_{s(\alpha)} \quad \forall \alpha \in Q_1.$$

Sejam $x \in V_{s(\alpha)}(\lambda)$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\rho_{s(\alpha)} - \lambda)^N(x) = 0$. Então

$$\begin{aligned} 0 &= V_\alpha(\rho_{s(\alpha)} - \lambda)^N(x) = V_\alpha(\rho_{s(\alpha)} - \lambda)(\rho_{s(\alpha)} - \lambda)^{N-1}(x) \\ &= (V_\alpha \rho_{s(\alpha)} - \lambda V_\alpha)(\rho_{s(\alpha)} - \lambda)^{N-1}(x) = (\rho_{t(\alpha)} V_\alpha - \lambda V_\alpha)(\rho_{s(\alpha)} - \lambda)^{N-1}(x) \\ &= (\rho_{t(\alpha)} - \lambda) V_\alpha(\rho_{s(\alpha)} - \lambda)^{N-1}(x) = \cdots = (\rho_{t(\alpha)} - \lambda)^N(V_\alpha(x)). \end{aligned}$$

Logo,

$$V_\alpha(V_{s(\alpha)}(\lambda)) \subset V_{t(\alpha)}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbf{k}, \forall \alpha \in Q_1.$$

Podemos então definir representações $V(\lambda)$ de Q por

$$V(\lambda)_i := V_i(\lambda) \quad \forall i \in Q_0, \quad V(\lambda)_\alpha := V_\alpha|_{V_{s(\alpha)}(\lambda)} \quad \forall \alpha \in Q_1.$$

Temos portanto um isomorfismo

$$(1.1) \quad V \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{k}} V(\lambda).$$

No que se segue, usaremos a estrutura natural de anel de $\text{End}_Q V$, com multiplicação dada pela composição de morfismos.

Proposição 1.10. *Se V é uma representação indecomponível de Q e $\rho \in \text{End}_Q V$, então existe $\lambda \in \mathbf{k}$ tal que $\rho - \lambda$ é nilpotente.*

Demonstração. Como V é indecomponível, temos apenas um somando não nulo na decomposição (1.1). Assim, para algum $\lambda \in \mathbf{k}$,

$$V_i = V_i(\lambda) \quad \forall i \in Q_0.$$

Para cada $i \in Q_0$, V_i tem dimensão finita, portanto

$$\exists N_i \in \mathbb{N} \mid (\rho_i - \lambda)^{N_i}(V_i) = 0.$$

Além disso,

$$|Q_0| < \infty \implies N := \max_{i \in Q_0} N_i \in \mathbb{N}.$$

Assim, $(\rho - \lambda)^N = 0$. □

Lema 1.11. *Seja V uma representação indecomponível de Q . Se $\rho \in \text{End}_Q V$, então ρ é nilpotente ou inversível. Além disso, $\text{End}_Q V$ tem um único ideal maximal, que é o conjunto de todos os seus elementos nilpotentes.*

Demonstração. Por 1.10, se $\rho \in \text{End}_Q V$, então existe $\lambda \in \mathbf{k}$ tal que $\rho - \lambda$ é nilpotente. Se $\lambda = 0$, então ρ é nilpotente. Já se $\lambda \neq 0$, então $\rho = (\rho - \lambda) + \lambda$ é a soma de um nilpotente com um inversível, portanto é inversível.

Seja \mathfrak{m} o conjunto dos elementos nilpotentes (ou seja, não inversíveis neste caso) de $\text{End}_Q V$. Se $\rho \in \mathfrak{m}$, então ρ não é inversível, logo $\rho\eta$ e $\eta\rho$ não são inversíveis, para qualquer $\eta \in \text{End}_Q V$. Já se $\rho, \rho' \in \mathfrak{m}$, ambos são nilpotentes, logo $\rho + \rho'$ também o são. Portanto, \mathfrak{m} é um ideal.

Se $\eta \in \text{End}_Q V \setminus \mathfrak{m}$, então η é inversível. Logo, η não pertence a nenhum ideal maximal. Assim, não há ideais maximais não contidos em \mathfrak{m} , portanto \mathfrak{m} é o único ideal maximal de $\text{End}_Q V$. □

Proposição 1.12. *Sejam $V^{(1)}, V^{(2)}, W^{(1)}, W^{(2)}$ representações de Q , e seja*

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho^{(1,1)} & \rho^{(1,2)} \\ \rho^{(2,1)} & \rho^{(2,2)} \end{bmatrix} : V^{(1)} \oplus V^{(2)} \rightarrow W^{(1)} \oplus W^{(2)}$$

um isomorfismo, com $\rho^{(i,j)} : V^{(j)} \rightarrow W^{(i)}$. Se $\rho^{(1,1)}$ é um isomorfismo, então $V^{(2)} \cong W^{(2)}$.

Demonstração. Ver [2, Lemma 1.7.3]. □

Teorema 1.13 (Krull–Schmidt). *Sejam Q uma aljava e $V \in \text{rep } Q$ não nula. Então existem representações indecomponíveis $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(r)}$ de Q tais que*

$$V \cong V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \dots \oplus V^{(r)},$$

onde $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(r)}$ são únicas a menos de ordem e isomorfismos.

Demonstração. Se V for indecomponível, a tese é clara.

Seja V não nula. Suponhamos que valha a tese para representações de dimensão menor que $d(V)$. Se V é decomponível, existem representações V', V'' não nulas com $V = V' \oplus V''$. Necessariamente temos $d(V') < d(V)$ e $d(V'') < d(V)$ (caso contrário, algum dos somandos seria nulo). Então existem decomposições de V e V' em soma direta de representações indecomponíveis, e assim temos uma tal decomposição de V . Isso conclui a prova da existência.

Sejam $V^{(1)} \oplus \dots \oplus V^{(r)}$ e $W^{(1)} \oplus \dots \oplus W^{(s)}$ duas decomposições de V em soma direta de representações indecomponíveis, e seja

$$\rho = \left[\rho^{(i,j)} \right]_{i,j} : V^{(1)} \oplus \dots \oplus V^{(r)} \rightarrow W^{(1)} \oplus \dots \oplus W^{(s)}$$

um isomorfismo, com $\rho^{(i,j)} : V^{(j)} \rightarrow W^{(i)}$. Provaremos por indução em r que $r = s$ e que podemos renumerar os $W^{(i)}$ de forma que $V^{(i)} \cong W^{(i)}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

Se $r = 1$, então V é indecomponível, logo $s = 1$, e por fim $V^{(1)} \cong V \cong W^{(1)}$. Seja $r > 1$, e seja $\eta = [\eta^{(i,j)}]_{i,j}$, com $\eta^{(i,j)} : W^{(i)} \rightarrow V^{(j)}$, a inversa de ρ . Temos

$$\begin{aligned} \left[\eta^{(i,j)} \right]_{i,j} \left[\rho^{(i,j)} \right]_{i,j} &= 1_{V^{(1)} \oplus \dots \oplus V^{(r)}} \\ \implies \sum_{i=1}^s \eta_{r,i} \rho_{i,r} &= 1_{V^{(r)}} \end{aligned}$$

Por 1.11, o único ideal maximal de $\text{End}_Q V^{(r)}$ é o subconjunto formado por todos os seus elementos nilpotentes, e os demais elementos de $\text{End}_Q V^{(r)}$ são inversíveis. Seja \mathfrak{m} esse ideal. Como $1_{V^{(r)}} \notin \mathfrak{m}$, temos que $\eta^{(r,i)} \rho^{(i,r)} \notin \mathfrak{m}$ para algum i . Reordenando $W^{(1)}, \dots, W^{(s)}$, podemos supor que $\eta_{r,s} \rho^{(s,r)} \notin \mathfrak{m}$.

Logo, $\eta^{(r,s)}\rho^{(s,r)}$ é inversível, o que implica que $\rho^{(s,r)}$ é sobrejetivo em cada vértice. Segue também que $\rho^{(s,r)}\eta^{(r,s)}$ não é nilpotente, pois caso contrário

$$\left(\eta^{(r,s)}\rho^{(s,r)}\right)^{t+1} = \eta^{(r,s)}\left(\rho^{(s,r)}\eta^{(r,s)}\right)^t\rho^{(s,r)} = 0$$

para algum $t \in \mathbb{N}$. Assim, $\rho^{(s,r)}\eta^{(r,s)}$ é inversível, logo $\rho^{(s,r)}$ é injetivo em cada vértice. Portanto, $\rho^{(s,r)}$ é isomorfismo.

Por 1.12,

$$V^{(1)} \oplus \dots \oplus V^{(r-1)} \cong W^{(1)} \oplus \dots \oplus W^{(s-1)}.$$

Pela hipótese de indução, $r - 1 = s - 1 \implies s = r$ e podemos reordenar $W^{(1)}, \dots, W^{(s-1)}$ de modo que $V^{(i)} \cong W^{(i)}$ se $1 \leq i \leq r - 1$. Como $\rho^{(s,r)}: V^{(r)} \rightarrow W^{(s)}$ é isomorfismo, resulta que $V^{(i)} \cong W^{(i)}$ para todo i . \square

1.2. Variedades algébricas afins. Desejamos definir o *espaço de representações* de uma aljava para uma certa dimensão. Para isso precisaremos de algumas noções de geometria algébrica.

Definição 1.14. Um subconjunto X do espaço afim $\mathbb{A}^n := \mathbf{k} \times \dots \times \mathbf{k}$ (n vezes) é uma *variedade algébrica afim* se

$$X = V(S)$$

para algum $S \subset \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$, onde

$$V(S) := \{x \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in S, f(x) = 0\}.$$

Neste texto, o termo “variedade” designará apenas variedades algébricas afins (apesar de existir uma definição mais geral de variedades algébricas).

Observação 1.15. Se $S \subset \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ e I é o ideal gerado por S , então $V(S) = V(I)$.

Definição 1.16. Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim.

(a) O *anel das coordenadas* de X é o quociente

$$A(X) := \frac{\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]}{I(X)},$$

onde

$$I(X) := \{f \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n] \mid \forall x \in X, f(x) = 0\}.$$

(b) A *dimensão* de X , denotada por $\dim X$, é definida como a dimensão de Krull de seu anel das coordenadas, ou seja, como o maior comprimento possível de uma cadeia de ideais primos de $A(X)$.

(c) Uma *subvariedade* de X é um subconjunto de X que também é uma variedade.

Observação 1.17. $A(X)$ é mais que um anel; é uma \mathbf{k} -álgebra finitamente gerada. Em particular, temos $\dim A(X) < \infty$, e assim $\dim X < \infty$.

Definição 1.18. A *topologia de Zariski* em \mathbb{A}^n é a topologia obtida definindo os fechados como as variedades afins.

Observação 1.19.

- (a) Os complementares das variedades afins formam de fato uma topologia em \mathbb{A}^n :
 - (i) $V(1)^{\mathbb{C}} = \mathbb{A}^n$,
 - (ii) $V(0)^{\mathbb{C}} = \emptyset$,
 - (iii) $V(I \cap J)^{\mathbb{C}} = V(I)^{\mathbb{C}} \cap V(J)^{\mathbb{C}}$,
 - (iv) $V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_{\lambda})^{\mathbb{C}} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V(I_{\lambda})^{\mathbb{C}}$.
- (b) Se $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, então $\{a\} = V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. Assim, pontos são fechados na topologia de Zariski.

Definição 1.20. Uma variedade afim $X \subset \mathbb{A}^n$ é dita *irredutível* se não pode ser escrita como união de subvariedades próprias distintas.

Observação 1.21. Dada uma variedade X no espaço afim \mathbb{A}^n , um conjunto $Y \subset \mathbb{A}^n$ é uma subvariedade irredutível de $X \iff$ é o conjunto de zeros de um ideal primo de $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ que contém $I(X) \iff$ é o conjunto de zeros de um ideal primo de $A(X)$. Isso dá uma correspondência entre as cadeias de ideais primos em $A(X)$ e as cadeias de subvariedades irredutíveis de X . Assim, A dimensão de X é também o maior comprimento possível de uma cadeia de subvariedades irredutíveis de X . Além disso, sendo $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ um domínio, o espaço afim $\mathbb{A}^n = V(0)$ é irredutível.

Definição 1.22. Se X é um subconjunto qualquer de \mathbb{A}^n , definimos sua *dimensão* como

$$\dim X := \dim \overline{X},$$

onde \overline{X} é o fecho de X na topologia de Zariski, ou seja, a menor variedade afim que contém X .

Definição 1.23. Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ variedades afins.

$$\begin{aligned} \phi: X &\rightarrow Y \\ x &\rightarrow \phi(x) \end{aligned}$$

é um *morfismo de variedades* se existem $\phi_1, \dots, \phi_m \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ tais que $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_m(x))$ para todo $x \in X$.

Proposição 1.24. *Todo morfismo de variedades afins é contínuo.*

Demonstração. Seja $\phi: X \rightarrow Y$ um morfismo de variedades, com $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ variedades afins. Seja $A \subset Y$ um aberto. Então $A = V(I)^{\mathbb{C}}$ para algum $I \triangleleft \mathbf{k}[x_1, \dots, x_m]$. Temos

$$\begin{aligned} x \in \phi^{-1}(A) &\iff \phi(x) \in A \\ &\iff \phi(x) \notin A^{\mathbb{C}} = V(I) \\ &\iff f(\phi(x)) \neq 0, \exists f \in I \\ &\iff f \circ \phi(x) \neq 0, \exists f \in I \\ &\iff x \in V(\{f \circ \phi \mid f \in I\})^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

portanto $\phi^{-1}(A)$ é aberto. \square

Definição 1.25. Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ variedades afins. O *produto* de X e Y , denotado por $X \times Y$, é o subconjunto de \mathbb{A}^{n+m} dado por

$$X \times Y = \{(a_1, \dots, a_{n+m}) \in \mathbb{A}^{n+m} \mid (a_1, \dots, a_n) \in X, (a_{n+1}, \dots, a_m) \in Y\}.$$

Se X_1, X_2, \dots, X_r são variedades afins, definimos

$$\prod_{i=1}^r := \left(\prod_{i=1}^{r-1} \right) \times X_r.$$

Observação 1.26. Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ variedades afins.

- (a) $X \times Y$ é uma variedade afim. Basta ver que, se $X = V(I)$ e $Y = V(J)$, então

$$X \times Y = V(\{f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_{n+1}, \dots, x_m) \mid f \in I, g \in J\}).$$

- (b) Se $Z \subset \mathbb{A}^k$ é uma variedade afim e $\phi: X \times Y \rightarrow Z$ é um morfismo de variedades, então para todo $a \in X$ e todo $b \in Y$ fixados as funções

$$\begin{aligned} \phi(a, \cdot): Y &\rightarrow Z \\ y &\mapsto \phi(a, y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi(\cdot, b): X &\rightarrow Z \\ x &\mapsto \phi(x, b) \end{aligned}$$

são morfismos de variedades. De fato, existem $\phi_1, \dots, \phi_k \in \mathbf{k}[t_1, \dots, t_{n+m}]$ tais que

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \dots, \phi_{n+m}(x, y)), \forall x \in X, \forall y \in Y,$$

onde $\phi_i(x, y) = \phi_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ se $1 \leq i \leq k$. Fixando $x = a$ e denotando $\phi(a, \cdot)$ por φ , temos

$$\varphi(y) = \phi(a, y) = (\phi_1(a, y), \dots, \phi_{n+m}(a, y)), \forall y \in Y.$$

Como $\phi_i(a, \cdot) \in \mathbf{k}[y_1, \dots, y_m]$ para todo i , φ é morfismo. Para $\phi(\cdot, b)$, é análogo.

Proposição 1.27. Sejam X, Y variedades irredutíveis. Então $X \times Y$ também é irredutível.

Demonstração. Ver [4, p. 9]. \square

Proposição 1.28. Sejam X, Y variedades irredutíveis. Então

$$\dim X \times Y = \dim X + \dim Y.$$

Demonstração. Ver [4, p. 25]. \square

1.3. Grupos algébricos. Após definirmos o espaço de representações, apresentaremos também um grupo algébrico que age sobre esse espaço conjugando as representações por isomorfismos. Esta subseção explora os grupos algébricos e as ações de grupos algébricos, dando especial atenção ao $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$.

Definição 1.29. Um *grupo algébrico* é um grupo G que também é uma variedade e tal que as funções

$$\begin{aligned}\mu: G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\iota: G &\rightarrow G \\ x &\mapsto x^{-1}\end{aligned}$$

são morfismos de variedades.

Definição 1.30. Um *morfismo de grupos algébricos* é um morfismo de variedades que também é homomorfismo de grupos.

Definição 1.31. Sejam G um grupo algébrico e X uma variedade. Uma *ação de grupos algébricos* de G sobre X é um morfismo

$$\begin{aligned}\phi: G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x := \phi(g, x)\end{aligned}$$

tal que, se $g, h \in G$ e $x \in X$,

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$$

e $e \cdot x = x$, onde e é o elemento neutro de G .

Definição 1.32. Sejam X uma variedade e G um grupo algébrico que age sobre X . Seja $x \in X$ fixado.

(a) O *estabilizador* de x é o subconjunto de G dado por

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

(b) A *órbita* de x é o subconjunto de X dado por

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

1.3.1. Ações e dimensão.

Lema 1.33. Sejam X e Y variedades, e seja $u: X \rightarrow Y$ um morfismo tal que $\overline{u(X)} = Y$. Se existe $r \in \mathbb{N}$ com

$$\dim u^{-1}(y) = r, \forall y \in u(X),$$

então

$$\dim X = \dim Y + r.$$

Demonstração. Ver [7, Corollary 15.5.5]. □

Teorema 1.34. *Sejam X uma variedade afim e G um grupo algébrico que age sobre X . Para todo $x \in X$,*

$$\dim G \cdot x = \dim G - \dim G_x.$$

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} u: G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

a ação de G sobre X . Fixado $x \in X$, podemos definir $u_x := u(\cdot, x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} u_x: G &\rightarrow X \\ g &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Por 1.26, u_x é morfismo de variedades. Sua imagem é

$$\begin{aligned} u_x(G) &= \{u_x(g) \mid g \in G\} \\ &= \{g \cdot x \mid g \in G\} \\ &= G \cdot x \end{aligned}$$

Assim, podemos trocar o contradomínio de u_x para $\overline{G \cdot x}$. Seja $y \in u_x(G)$, e fixemos $g_y \in u_x^{-1}(y)$. A função

$$\begin{aligned} \phi: u_x^{-1}(x) &\rightarrow u_x^{-1}(y) \\ g &\mapsto g_y g \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. De fato:

(i) Sejam $g, h \in u_x^{-1}(x)$ tais que $\phi(g) = \phi(h)$. Então

$$g_y g = g_y h \implies g_y^{-1} g_y g = g_y^{-1} g_y h \implies g = h,$$

logo ϕ é injetiva.

(ii) Se $g \in u_x^{-1}(y)$, então $g \cdot x = y$, logo

$$\begin{aligned} u_x(g_y^{-1} g) &= (g_y^{-1} g) \cdot x = g_y^{-1} \cdot (g \cdot x) \\ &= g_y^{-1} \cdot y = g_y^{-1} \cdot (g_y \cdot x) \\ &= (g_y g_y^{-1}) \cdot x = e \cdot x \\ &= x. \end{aligned}$$

Assim, $g_y^{-1} g \in u_x^{-1}(x)$. Temos então

$$g = g_y g_y^{-1} g = \phi(g_y^{-1} g),$$

portanto ϕ é sobrejetiva.

(iii) Como G é grupo algébrico, a função

$$\begin{aligned} \mu: G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

é morfismo de variedades. Por 1.26, $\mu(g_y, \cdot)$ é morfismo; por 1.24, é contínuo. Como ϕ é restrição de $\mu(g_y, \cdot)$, é também contínua. Analogamente, sua inversa (dada por $g \mapsto g_y^{-1} g$) é contínua.

O conjunto $u_x^{-1}(y)$ é uma variedade afim, pois é pré-imagem do fechado $\{y\}$ pelo morfismo u_x , que é contínuo por 1.24. Dessa forma, a dimensão da fibra de y é finita e coincide com o tamanho máximo das cadeias de subvariedades irredutíveis de $u_x^{-1}(y)$. Como esse número só depende da topologia, conclui-se que a dimensão é preservada por homeomorfismos, logo todas as fibras de u_x têm dimensão $\dim u_x^{-1}(x)$. Aplicando o lema 1.33,

$$\begin{aligned} \dim G &= \overline{\dim G \cdot x} + \dim u_x^{-1}(x) \\ (1.2) \quad \therefore \overline{\dim G \cdot x} &= \dim G - \dim u_x^{-1}(x) \end{aligned}$$

Por definição, $\dim G \cdot x = \dim \overline{G \cdot x}$, e além disso

$$\begin{aligned} u_x^{-1}(x) &= \{g \in G \mid u_x(g) = x\} \\ &= \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \\ &= G_x. \end{aligned}$$

Portanto, de (1.2) e da igualdade acima, resulta

$$\dim G \cdot x = \dim G - \dim u_x^{-1}(x) = \dim G - \dim G_x.$$

□

1.3.2. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ como grupo algébrico. O conjunto $M_n(\mathbf{k})$ das matrizes $n \times n$ com entradas em \mathbf{k} pode ser visto como o espaço afim \mathbb{A}^{n^2} . Como o determinante de uma matriz é um polinômio nas suas entradas, o $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ (o subconjunto de $M_n(\mathbf{k})$ onde o determinante não se anula) é o complementar da variedade $V(\det X)$.

$\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ visto como $\mathbb{A}^{n^2} \setminus V(\det X)$ não é uma variedade afim, logo não pode ser um grupo algébrico da maneira como definimos. No entanto, se considerarmos \mathbb{A}^{n^2+1} como o conjunto

$$\{(X, x) \mid X \in M_n(\mathbf{k}), x \in \mathbf{k}\},$$

então podemos pensar no $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ como a variedade $\mathcal{G}_n := V(\det X \cdot x - 1)$. De fato, se $(M, m) \in \mathcal{G}_n$, então $\det M \neq 0$. Conversamente, se $\det M \neq 0$, tomamos $m = (\det M)^{-1}$ e obtemos $(M, m) \in \mathcal{G}_n$. Além disso, \mathcal{G}_n é um grupo isomorfo a $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ com a operação

$$(M, m) \cdot (M', m') := (MM', mm'), \quad \forall (M, m), (M', m') \in \mathcal{G}_n.$$

Assim, \mathcal{G}_n é uma variedade afim que também é um grupo. Além disso, é claro pela definição acima que a multiplicação de dois elementos de \mathcal{G}_n é um morfismo de variedades. Se a função que leva um elemento a seu inverso também o for, concluiremos que \mathcal{G}_n é um grupo algébrico.

Se $(X, x) \in \mathcal{G}_n$, então $(X, x)^{-1} = (X^{-1}, x^{-1})$. Queremos que x^{-1} e cada entrada da matriz X^{-1} sejam dados por polinômios em x e nas entradas de X . Temos

$$\det X \cdot x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{\det X},$$

logo $x^{-1} = \det X$. Já para a matriz inversa,

$$X^{-1} = \frac{1}{\det X} \operatorname{adj} X = x \operatorname{adj} X.$$

Portanto, \mathcal{G}_n é realmente um grupo algébrico.

Proposição 1.35. *A dimensão de \mathcal{G}_n é n^2 .*

Demonstração. O morfismo

$$\begin{aligned} \pi: \mathcal{G}_n &\rightarrow M_n(\mathbf{k}) = \mathbb{A}^{n^2} \\ (X, x) &\mapsto X \end{aligned}$$

tem como imagem $\operatorname{GL}_n(\mathbf{k})$. Veremos que $\operatorname{GL}_n(\mathbf{k})$ é denso em \mathbb{A}^{n^2} e que todas as fibras de π têm a mesma dimensão. Em seguida, aplicaremos 1.33.

$$\mathbb{A}^{n^2} = V(\det X)^{\complement} \cup V(\det X) = \overline{V(\det X)^{\complement}} \cup V(\det X)$$

é uma decomposição de \mathbb{A}^{n^2} em união de fechados (=subvariedades) distintos, já que existem matrizes com determinante nulo (a matriz com todas as entradas nulas é uma delas). Como $V(\det X)$ é subconjunto próprio de \mathbb{A}^{n^2} (a matriz identidade por exemplo tem determinante não nulo), resulta que $\overline{V(\det X)^{\complement}}$ não pode ser próprio. Assim,

$$\overline{\operatorname{GL}_n(\mathbf{k})} = \mathbb{A}^{n^2}.$$

Se $(M, m) \in \pi(\mathcal{G}_n)$, então $\pi^{-1}(M, m) = \{M\}$. Logo, todas as fibras de π têm dimensão 0. Portanto, por 1.33,

$$\dim \mathcal{G}_n = \dim \mathbb{A}^{n^2} = \dim \mathbf{k}[x_1, \dots, x_{n^2}] = n^2.$$

□

Corolário 1.36. *Seja $(v_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}_+^n$. Então*

$$\dim \prod_{i=1}^n \mathcal{G}_{v_i} = \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

Demonstração. Definimos o morfismo

$$\begin{aligned} \pi: \prod_{i=1}^n \mathcal{G}_{v_i} &\rightarrow \prod_{i=1}^n M_{v_i}(\mathbf{k}) \\ (X_i, x_i)_{i=1}^n &\mapsto (X_i)_{i=1}^n \end{aligned}$$

e repetimos os argumentos acima, notando que

$$\prod_{i=1}^n M_{v_i}(\mathbf{k}) = \mathbb{A}^{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

□

Observação 1.37. Usando uma definição mais geral de variedades, poderíamos ver o próprio $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ como um grupo algébrico de dimensão n^2 , e valeria resultado análogo a 1.36. Como nos restringimos a definir variedades como conjuntos onde polinômios se anulam, precisamos usar \mathcal{G}_n em vez de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$. No que se segue, sempre que mencionarmos $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ estaremos considerando a estrutura de variedade dada por \mathcal{G}_n . Assim, o texto se manterá consistente, e ao mesmo tempo preservaremos a notação encontrada nos livros.

1.4. Espaço de representações. Tendo visto uma rápida introdução a variedades algébricas e a grupos algébricos, podemos enfim definir o espaço de representações e o grupo algébrico que age sobre ele. Fixemos uma aljava conexa Q .

Definição 1.38. Se $v \in \mathbb{Z}_+^{Q_0}$, definimos o *espaço de representações* de dimensão v como

$$\mathrm{R}(v) := \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}^{v_{s(\alpha)}}, \mathbf{k}^{v_{t(\alpha)}}).$$

Todo elemento $x = (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$ de $\mathrm{R}(v)$ define uma representação de Q , colocando \mathbf{k}^{v_i} em cada vértice i e x_α em cada aresta α .

Podemos identificar os elementos de $\mathrm{R}(v)$ com os pontos da variedade

$$\prod_{\alpha \in Q_1} M_{v_{t(\alpha)} \times v_{s(\alpha)}}(\mathbf{k}),$$

onde consideramos $M_{m \times n}(\mathbf{k})$ como o espaço afim $\mathbb{A}^{m \cdot n}$, de forma natural. Assim, podemos ver $\mathrm{R}(v)$ como uma variedade algébrica afim.

A variedade

$$\mathrm{GL}(v) := \prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}_{v_i}(\mathbf{k})$$

é um grupo algébrico definindo a operação coordenada a coordenada. Podemos definir uma ação de $\mathrm{GL}(v)$ sobre $\mathrm{R}(v)$ por

$$(1.3) \quad g \cdot x := (g_{t(\alpha)} x_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1})_{\alpha \in Q_1},$$

onde

$$g = (g_i)_{i \in Q_0} \in \mathrm{GL}(v), \quad x = (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in \mathrm{R}(v).$$

Isso é uma ação de grupos algébricos, já que cada coordenada é dada por multiplicação de matrizes, e a função $h \mapsto h^{-1}$ de $\mathrm{GL}_{v_i}(\mathbf{k})$ em $\mathrm{GL}_{v_i}(\mathbf{k})$ é morfismo de variedades.

1.5. Funtores de Coxeter. Usaremos os resultados desta subseção quando a aljava Q for tal que $\Gamma(Q)$ é de Dynkin. Observemos que, nesse caso, Q é acíclica, e portanto tem poço e fonte.

Definição 1.39. Sejam Q um quiver e $i \in Q_0$.

- ◊ Se i é poço, denotamos por $S_i^+(Q)$ o quiver obtido invertendo o sentido das arestas ligadas a i .

- ◊ Se i é *fonte*, denotamos por $S_i^-(Q)$ o quiver obtido invertendo o sentido das arestas ligadas a i .

Acima, *inverter uma aresta* α significa obter uma aljava $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ com

$$Q'_0 = Q_0, \quad Q'_1 = Q_1, \quad s'(\alpha) = t(\alpha), \quad t'(\alpha) = s(\alpha),$$

colocando $s'(\beta) = s(\beta)$ e $t'(\beta) = t(\beta)$ para as arestas que não quisermos inverter.

Definição 1.40. Sejam Q um quiver e $i \in Q_0$ um poço. Definimos o funtor $\Phi_i^+ : \text{rep } Q \rightarrow \text{rep } S_i^+(Q)$ da seguinte forma:

- ◊ Nos objetos:

Se V é uma representação de Q ,

$$(\Phi_i^+(V))_j := \begin{cases} V_j, & \text{se } j \neq i \\ \ker \varphi_i, & \text{se } j = i \end{cases}$$

onde, se $N_i = \{\alpha \in Q_1 \mid t(\alpha) = i\}$, definimos uma função

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \varphi_i : \bigoplus_{\alpha \in N_i} V_{s(\alpha)} &\longrightarrow V_i \\ (v_{s(\alpha)})_{\alpha \in N_i} &\longmapsto \sum_{\alpha \in N_i} V_\alpha(v_{s(\alpha)}) \end{aligned}$$

Nas arestas, colocamos

$$(\Phi_i^+(V))_\alpha := \begin{cases} V_\alpha, & \text{se } \alpha \notin N_i \\ \pi_\alpha \iota, & \text{se } \alpha \in N_i \end{cases}$$

onde ι é a inclusão

$$\ker \varphi_i \hookrightarrow \bigoplus_{\beta \in N_i} V_{s(\beta)},$$

e π_α é a projeção

$$\bigoplus_{\beta \in N_i} V_{s(\beta)} \twoheadrightarrow V_{s(\alpha)}.$$

- ◊ Nos morfismos:

Sejam V, W representações de Q , e seja $\rho = (\rho_i)_{i \in Q_0}$ um morfismo de representações. Então

$$(\Phi_i^+(\rho))_j := \begin{cases} \rho_j, & \text{se } j \neq i \\ (\rho_{s(\alpha)})_{\alpha \in N_i} \big|_{\ker \varphi_i}, & \text{se } j = i \end{cases}$$

Definição 1.41. Sejam Q um quiver e $i \in Q_0$ uma fonte. Definimos o funtor $\Phi_i^- : \text{rep } Q \rightarrow \text{rep } S_i^-(Q)$ da seguinte forma:

◊ Nos objetos:

Se V é uma representação de Q ,

$$(\Phi_i^-(V))_j := \begin{cases} V_j, & \text{se } j \neq i \\ \text{coker } \psi_i, & \text{se } j = i \end{cases}$$

onde, se $N_i = \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = i\}$, definimos uma função

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \psi_i: V_i &\longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in N_i} V_{t(\alpha)} \\ v &\longmapsto (\psi_{t(\alpha)}(v))_{\alpha \in N_i} \end{aligned}$$

Nas arestas, colocamos

$$(\Phi_i^+(V))_\alpha := \begin{cases} V_\alpha, & \text{se } \alpha \notin N_i \\ \pi \iota_\alpha, & \text{se } \alpha \in N_i \end{cases}$$

onde ι_α é a inclusão

$$V_{t(\alpha)} \hookrightarrow \bigoplus_{\beta \in N_i} V_{s(\beta)},$$

e π é a projeção

$$\bigoplus_{\beta \in N_i} V_{s(\beta)} \twoheadrightarrow \text{coker } \psi_i.$$

◊ Nos morfismos:

Sejam V, W representações de Q , e seja $\rho = (\rho_i)_{i \in Q_0}$ um morfismo de representações. Se $j \neq i$, definimos $(\Phi_i^-(\rho))_j := \rho_j$. Seja

$$\begin{aligned} \psi'_i: W_i &\longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in N_i} W_{t(\alpha)} \\ w &\longmapsto (\psi_{t(\alpha)}(w))_{\alpha \in N_i} \end{aligned}$$

Definimos $(\Phi_i^+(\rho))_i$ por

$$(v_{t(\alpha)})_{\alpha \in N_i} + \text{im } \psi_i \longmapsto (\rho_{t(\alpha)}(v_{t(\alpha)}))_{\alpha \in N_i} + \text{im } \psi'_i.$$

Φ_i^+ e Φ_i^- são chamados *funtores de Coxeter*.

Proposição 1.42. *Seja V uma representação indecomponível do quiver Q , e seja $i \in Q_0$ um poço. Então ou*

$$\dim V_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

ou a função

$$\varphi_i: \bigoplus_{\alpha \in N_i} V_{s(\alpha)} \rightarrow V_i$$

como em (1.4) é sobrejetora.

Demonstração. Ver [3, Proposition 6.6.5]. □

Proposição 1.43. *Dado um quiver Q , seja $V \in \text{rep } Q$, e seja $i \in Q_0$ um poço. Se φ_i (como em (1.4)) é sobrejetora, então*

$$\Phi_i^- \Phi_i^+ V \cong V.$$

Demonstração. Ver [3, Proposition 6.6.6]. \square

Proposição 1.44. *Seja V uma representação indecomponível de um quiver Q , e seja $i \in Q_0$ um poço. Então $\Phi_i^+ V$ é indecomponível ou 0.*

Demonstração. Ver [3, Proposition 6.6.7]. \square

1.6. Formas de Euler e forma de Tits.

Definição 1.45. A forma bilinear de Euler de uma aljava Q é a função de $\mathbb{Z}^{Q_0} \times \mathbb{Z}^{Q_0}$ em \mathbb{Z} dada por

$$\langle x, y \rangle_Q := \left(\sum_{i \in Q_0} x_i y_i \right) - \left(\sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)} \right),$$

onde $x = (x_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$, $y = (y_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$.

A partir dela, definimos

◊ a forma de Tits de Q , denotada por q_Q , como

$$q_Q(x) := \langle x, x \rangle_Q = \left(\sum_{i \in Q_0} x_i^2 \right) - \left(\sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} \right)$$

◊ a forma simétrica de Euler como

$$(x, y)_Q := \langle x, y \rangle_Q + \langle y, x \rangle_Q$$

Observação 1.46. É útil considerar as formas acima colocando \mathbb{R} em vez de \mathbb{Z} , ou seja, definidas pelas mesmas expressões sobre vetores em \mathbb{R}^{Q_0} e a valores reais. Neste texto será empregada a mesma notação para os dois casos.

Observação 1.47. Pela definição, é claro que

- ◊ a forma bilinear de Euler é bilinear;
- ◊ a forma simétrica de Euler é simétrica;
- ◊ $(x, x)_Q = 2q_Q(x)$ para todo x ;
- ◊ a forma de Tits de Q só depende de $\Gamma(Q)$, já que

$$q_Q(x) = \left(\sum_{i \in Q_0} x_i^2 \right) - \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j r_{i,j} \right),$$

onde $r_{i,j}$ é o número de arestas de Q entre i e j .

Definição 1.48. Uma forma quadrática $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ é dita *positiva definida* se $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}^n$ não nulo.

Proposição 1.49. *Seja Γ' subgrafo do grafo Γ , e sejam q e q' as formas de Tits associadas a Γ e Γ' , respectivamente. Se q for positiva definida, q' também o é.*

Demonstração. Sejam $1, \dots, n$ os vértices de Γ e $1, \dots, m$ os vértices de Γ' , com $m \leq n$. Se q' não é positiva definida, então existe $x = (x_i)_{i=1}^m$ não nulo tal que $q'(x) \leq 0$. Definamos $y = (y_i)_{i=1}^n$ por

$$y_i := \begin{cases} x_i, & \text{se } 1 \leq i \leq m \text{ (i.e. se } i \text{ é vértice de } \Gamma') \\ 0, & \text{se } m < i \leq n \text{ (i.e. se } i \text{ não é vértice de } \Gamma') \end{cases}$$

Assim, $y \neq 0$ e

$$q(y) = q'(x) \leq 0.$$

□

Observação 1.50. A demonstração de 1.49 vale quando tomamos vetores com entradas tanto em \mathbb{Z} quanto em \mathbb{R} .

Definição 1.51. Dado um quiver Q cujo grafo subjacente é de Dynkin, dizemos que $\alpha \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ é uma *raiz* de Q se

$$(\alpha, \alpha)_Q = 2.$$

Proposição 1.52. *Seja Q uma aljava tal que $\Gamma(Q)$ é grafo de Dynkin. Então sua forma simétrica de Euler define um produto interno em \mathbb{R}^{Q_0} .*

Demonstração. A forma simétrica de Euler é uma forma bilinear simétrica. Resta ver que é positiva definida (quando o grafo é de Dynkin).

Se $\Gamma(Q) = D_n$ e $x = (x_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{R}^{Q_0}$, temos

$$\begin{aligned} q_Q(x) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(x_1 x_3 + x_2 x_3 + \sum_{i=3}^{n-1} x_i x_{i+1} \right) \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2} x_3 \right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2} x_3 \right)^2 + \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{2} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 > 0. \end{aligned}$$

A_n é subgrafo de D_{n+1} , logo por 1.49 a forma de Tits de A_n (como função de \mathbb{R}^{Q_0} em \mathbb{R}) também é positiva definida.

Já se $\Gamma(Q) = E_8$,

$$\begin{aligned} q_Q(x) &= \left(\sum_{i=1}^8 x_i^2 \right) - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_5 x_6 + x_7 x_8) \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2} x_2 \right)^2 + \frac{3}{4} \left(x_2 - \frac{2}{3} x_3 \right)^2 + \left(x_4 - \frac{1}{2} x_3 \right)^2 + \frac{5}{12} \left(x_3 - \frac{6}{5} x_5 \right)^2 \\ &\quad + \frac{2}{5} \left(x_5 - \frac{5}{4} x_6 \right)^2 + \frac{3}{8} \left(x_6 - \frac{4}{3} x_7 \right)^2 + \frac{1}{3} \left(x_7 - \frac{3}{2} x_8 \right)^2 + \frac{1}{4} x_8^2 > 0. \end{aligned}$$

E_6 e E_7 são subgrafos de E_8 , logo por 1.49 suas formas de Tits também são positivas definidas.

Como $(x, x)_Q = 2q_Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{Q_0}$, a forma simétrica de Euler é positiva definida sempre que $\Gamma(Q)$ é de Dynkin. \square

Corolário 1.53. *Se Q é um quiver tal que $\Gamma(Q)$ é de Dynkin, então o número de raízes de Q é finito.*

Demonstração. Por 1.52, podemos tomar a norma induzida

$$\|x\|_Q := (x, x)_Q.$$

\mathbb{R}^{Q_0} tem dimensão finita, logo todas as normas são equivalentes. Assim,

$$\|\alpha\| \leq C\|\alpha\|_Q$$

para algum $C \in \mathbb{R}$, sendo a norma da direita a euclidiana. Portanto, o conjunto das raízes de Q está contido em

$$\mathbb{Z}^{Q_0} \cap \{x \in \mathbb{R}^{Q_0} \mid \|x\| \leq 2C\},$$

que é finito. \square

Definição 1.54. Seja Q um quiver com $\Gamma(Q)$ de Dynkin. Chamamos vetores da forma

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{Q_0}$$

de *raízes simples*, e denotamos

$$\alpha_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

se a coordenada não nula é a i -ésima.

Observação 1.55. Raízes simples são raízes. De fato,

$$\begin{aligned} (\alpha_i, \alpha_i)_Q &= 2 \left(\left(\sum_{j \in Q_0} \delta_{i,j} \right)^2 - \left(\sum_{\alpha \in Q_1} \delta_{i,s(\alpha)} \delta_{i,t(\alpha)} \right) \right) \\ &= 2(1 - 0) \\ &= 2, \end{aligned}$$

onde $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker.

Definição 1.56. Uma raiz α é dita *positiva* (respectivamente *negativa*) se

$$\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$$

com $k_i \geq 0$ (respectivamente $k_i \leq 0$) para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lema 1.57. *Toda raiz é positiva ou negativa.*

Demonstração. Ver [3, Lemma 6.4.6]. \square

Definição 1.58. Seja Q um quiver com $\Gamma(Q)$ de Dynkin. Dada uma raiz α de Q , definimos s_α por

$$s_\alpha(x) := x - (x, \alpha)_Q \alpha.$$

Se $\alpha = \alpha_i$, chamamos $s_\alpha = s_{\alpha_i}$ de *reflexão simples* e denotamos por s_i .

Observação 1.59. s_α é a reflexão pelo plano ortogonal a α (com relação ao produto interno dado pela forma simétrica de Euler).

Proposição 1.60. *Sejam Q uma aljava com $\Gamma(Q)$ de Dynkin e α uma raiz de Q . Então*

$$(s_\alpha(x), s_\alpha(x))_Q = (x, x)_Q.$$

para todo $x \in \mathbb{Z}^{Q_0}$.

Demonstração. Como α é raiz, $(\alpha, \alpha)_Q = 2$. Assim

$$\begin{aligned} (s_\alpha(x), s_\alpha(x))_Q &= (x - (x, \alpha)_Q \alpha, x - (x, \alpha)_Q \alpha)_Q \\ &= (x, x)_Q - (x, \alpha)_Q (x, \alpha)_Q - (x, \alpha)_Q (\alpha, x)_Q + ((x, \alpha)_Q)^2 (\alpha, \alpha)_Q \\ &= (x, x)_Q - 2((x, \alpha)_Q)^2 + 2((x, \alpha)_Q)^2 = (x, x)_Q. \end{aligned}$$

□

Definição 1.61. Seja Q um quiver, e fixemos uma numeração $1, \dots, n$ dos seus vértices. O *elemento de Coxeter* de Q correspondente a essa numeração é

$$c := s_1 s_2 \cdots s_n.$$

Observação 1.62. Dada uma raiz α , a reflexão s_α é uma transformação linear inversível (com inversa s_α). Assim, toda reflexão simples pertence ao grupo multiplicativo $\text{GL}_{Q_0}(\mathbb{R})$. O subgrupo \mathcal{W} gerado pelas reflexões simples é chamado *grupo de Weyl*.

Por 1.60, o conjunto das raízes de Q é invariante por todos os elementos de \mathcal{W} . Se $T \in \mathcal{W}$, T é um operador linear em \mathbb{R}^{Q_0} , logo basta que o definamos numa base para que fique completamente determinado. O conjunto das raízes simples forma uma base de \mathbb{R}^{Q_0} , e há apenas finitas maneiras de escolher $(T\alpha_i)_{i \in Q_0}$, já que o conjunto das raízes de Q é finito. Portanto, \mathcal{W} é finito.

Proposição 1.63. *Seja*

$$\beta = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$$

tal que $k_i \geq 0$ para todo i e $k_j \neq 0$ para algum j . Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c^N(\beta)$ tem pelo menos um coeficiente negativo.

Demonstração. O elemento de Coxeter pertence ao grupo finito \mathcal{W} , e portanto tem ordem finita. Seja $M \in \mathbb{N}$ tal que $c^M = 1$. Desejamos mostrar que

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^{M-1} = 0$$

como operador linear em \mathbb{R}^{Q_0} . Como β tem pelo menos um coeficiente positivo, isso implicará que algum dos elementos $c\beta, c^2\beta, \dots, c^{M-1}\beta$ tem pelo menos um coeficiente negativo, e concluiremos a prova.

Suponhamos que existam $v, w \in \mathbb{R}^{Q_0}$ não nulos tais que

$$(1 + c + c^2 + \cdots + c^{M-1})w = v.$$

Então

$$\begin{aligned} cv &= c(1 + c + c^2 + \cdots + c^{M-1})w \\ &= (c + c^2 + \cdots + c^{M-1} + 1)w \\ &= v. \end{aligned}$$

Logo,

$$s_1 \dots s_n v = v \implies s_2 \dots s_n v = s_1 v.$$

Como cada s_i só muda a i -ésima coordenada, temos que $s_1 v$ coincide com v em todas as coordenadas a partir da segunda. Similarmente, $s_2 \dots s_n v$ coincide com v na primeira coordenada. Assim, a igualdade acima implica que

$$s_1 v = v, \quad s_2 \dots s_n v = v.$$

Repetindo o procedimento, temos

$$s_i v = v \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

e portanto

$$v - (v, \alpha_i)_Q = v \implies (v, \alpha_i)_Q = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Isso é uma contradição, já que (por 1.52) a forma simétrica de Euler é não degenerada.

Segue então que

$$\begin{aligned} 1 + c + c^2 + \cdots + c^{M-1} &= 0 \\ \implies (1 + c + c^2 + \cdots + c^{M-1})\beta &= 0 \\ \implies \beta + c\beta + c^2\beta + \cdots + c^{M-1}\beta &= 0 \end{aligned}$$

implicando que $c^N \beta$ tem pelo menos um coeficiente negativo, para algum $N \in \{1, \dots, M-1\}$. \square

2. O TEOREMA DE GABRIEL

Esta seção se dedica à prova do teorema de Gabriel, enunciado abaixo:

Teorema 2.1 (Gabriel). *Seja Q uma aljava conexa. São equivalentes:*

- (1) Q tem tipo finito.
- (2) $\Gamma(Q)$ é grafo de Dynkin.
- (3) q_Q é positiva definida.

A implicação (1) \implies (3) será feita com artifícios da geometria algébrica, como em [5], avaliando dimensão de variedades e utilizando a ação de grupos algébricos definida por (1.3).

Em seguida, demonstraremos (3) \implies (2) de forma bastante direta, apresentando algumas características que um grafo com forma de Tits positiva definida não pode possuir.

Ao final, faremos a prova de (2) \implies (1), com base em [3]. Por meio das reflexões simples e dos funtores de Coxeter, relacionaremos as raízes positivas de Q — que formam um conjunto finito, se considerarmos que $\Gamma(Q)$ é

de Dynkin — e suas representações indecomponíveis, e com isso provaremos que há apenas finitas classes de isomorfismo dessas representações.

(1) \implies (3). Vimos que todo elemento de $R(v)$ define uma representação de Q . Conversamente, toda representação V de Q com $d(V) = v$ define um elemento em $R(v)$ da seguinte forma: para todo $i \in Q_0$, existe isomorfismo $\rho_i: V_i \rightarrow \mathbf{k}^{v_i}$. Queremos definir transformações lineares $y_\alpha: \mathbf{k}^{v_{s(\alpha)}} \rightarrow \mathbf{k}^{v_{t(\alpha)}}$, para cada $\alpha \in Q_1$. O diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_{s(\alpha)} & \xrightarrow{V_\alpha} & V_{t(\alpha)} \\ \rho_{s(\alpha)} \downarrow & & \downarrow \rho_{t(\alpha)} \\ \mathbf{k}^{v_{s(\alpha)}} & \xrightarrow{y_\alpha} & \mathbf{k}^{v_{t(\alpha)}} \end{array}$$

sugere que coloquemos $y_\alpha := \rho_{s(\alpha)}^{-1} V_\alpha \rho_{t(\alpha)}$ para cada aresta α . Com isso, obtemos um elemento $(y_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$ em $R(v)$ que induz uma representação isomorfa a V (via $(\rho_i)_{i \in Q_0}$).

Cada isomorfismo ρ_i acima depende de escolha de base em V_i . Assim, uma mesma representação V poderia levar a dois elementos de $R(v)$ distintos. O resultado abaixo mostra que isso não será um problema para nossa demonstração.

Lema 2.2. $x, x' \in R(v)$ definem representações isomorfas de $Q \iff$ estão na mesma órbita da ação (1.3).

Demonstração. Sejam V e V' as representações referentes a $x = (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$ e a $x' = (x'_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$, respectivamente. Temos $V_i = V'_i = \mathbf{k}^{v_i}$ para todo vértice i e, para toda aresta α , $V_\alpha = x_\alpha$ e $V'_\alpha = x'_\alpha$.

V e V' são isomorfas se, e somente se, existem automorfismos

$$g_i: \mathbf{k}^{v_i} \rightarrow \mathbf{k}^{v_i}, \quad i \in Q_0,$$

tais que, para toda aresta α , o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}^{v_{s(\alpha)}} & \xrightarrow{x_\alpha} & \mathbf{k}^{v_{t(\alpha)}} \\ g_{s(\alpha)} \downarrow & & \downarrow g_{t(\alpha)} \\ \mathbf{k}^{v_{s(\alpha)}} & \xrightarrow{x'_\alpha} & \mathbf{k}^{v_{t(\alpha)}} \end{array}$$

comuta. Vendo as operações lineares como matrizes, os automorfismos de \mathbf{k}^{v_i} podem ser considerados como elementos de $\text{GL}_{v_i}(\mathbf{k})$. Assim,

$$\begin{aligned} V \cong V' &\iff \exists (g_i)_{i \in Q_0} \in \text{GL}(v) \mid g_{t(\alpha)} x_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1} = x'_\alpha \quad \forall \alpha \in Q_1 \\ &\iff \exists g \in \text{GL}(v) \mid g \cdot x = x'. \end{aligned}$$

□

Assim, se a partir de uma representação V obtivermos dois elementos distintos de $R(v)$, eles estarão na mesma órbita. Temos então uma bijeção

entre as órbitas da ação (1.3) e as classes de isomorfismo das representações de Q de dimensão v .

Teorema 2.3. *Seja Q uma aljava conexa. Se Q tem tipo finito, então sua forma de Tits é positiva definida.*

Demonstração. Fixemos $v \in \mathbb{Z}_+^{Q_0}$. Usando 1.13, temos que, para toda representação V de Q com $d(V) = v$,

$$V \cong V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \dots \oplus V^{(r)},$$

com $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(r)}$ indecomponíveis e de dimensão menor que $d(V)$. Como cada $V^{(j)}$ é não nula, temos também que a quantidade de representações indecomponíveis que pode compor V é limitada. Mais precisamente,

$$r \leq \sum_{i \in Q_0} v_i.$$

Assim, se Q tem tipo finito, há apenas um número finito de maneiras de compor uma representação com vetor dimensão igual a v (a menos de isomorfismo). Portanto, o número de órbitas da ação (1.3) é finito.

Como $x \in \text{GL}(v) \cdot x$ para todo $x \in R(v)$, podemos escrever

$$R(v) = \bigcup_{x \in R(v)} \text{GL}(v) \cdot x = \bigcup_{x \in R(v)} \overline{\text{GL}(v) \cdot x}.$$

Removendo as órbitas coincidentes da equação acima, escrevemos $R(v)$ como união finita de fechos de órbitas. Mas $R(v)$ é produto de espaços afins, logo é irredutível por 1.27. Portanto, o fecho de alguma das órbitas é o espaço todo.

Seja $x \in R(v)$ tal que $\overline{\text{GL}(v) \cdot x} = R(v)$. Então

$$(2.1) \quad \dim(\text{GL}(v) \cdot x) = \dim \overline{\text{GL}(v) \cdot x} = \dim R(v) = \sum_{\alpha \in Q_1} v_{t(\alpha)} v_{s(\alpha)},$$

onde a segunda igualdade decorre de 1.28. De 1.36 segue que

$$(2.2) \quad \dim \text{GL}(v) = \sum_{i \in Q_0} v_i^2.$$

De (2.1), (2.2) e 1.34 sai que

$$q_Q(v) = \dim \text{GL}(v) - \dim(\text{GL}(v) \cdot x) = \dim \text{GL}(v)_x.$$

Assim, se a dimensão do estabilizador de x for positiva, a demonstração estará concluída.

Para cada $\lambda \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$, seja

$$\lambda \text{Id}_v := (\lambda \text{Id}_{v_i})_{i \in Q_0},$$

onde $\text{Id}_m \in M_m(\mathbf{k})$ é a matriz identidade para cada $m \in \mathbb{N}$. Temos

$$\begin{aligned} (\lambda \text{Id}_{v_{s(\alpha)}}) x_\alpha (\lambda \text{Id}_{v_{t(\alpha)}})^{-1} &= x_\alpha \quad \forall \alpha \in Q_1, \forall \lambda \in \mathbf{k} \setminus \{0\} \\ \therefore \lambda \text{Id}_v \cdot x &= x \quad \forall \lambda \in \mathbf{k} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Portanto, o subconjunto

$$\mathcal{V} = \{\lambda \text{Id}_v \mid \lambda \in \mathbf{k} \setminus \{0\}\}$$

de $\text{GL}(v)$ está contido em $\text{GL}(v)_x$.

\mathcal{V} é uma variedade, pois pode ser escrito como

$$\mathcal{V} = \left(\prod_{i \in Q_0} V(y_i \cdot Y_i - \text{Id}_{v_i}) \right) \cap \left(\bigcap_{i,j \in Q_0} V(y_i - y_j) \right).$$

Além disso, $\dim \mathcal{V} = 1$ por 1.33, pois o morfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{A}^1 \\ \lambda \text{Id}_v &\mapsto \lambda \end{aligned}$$

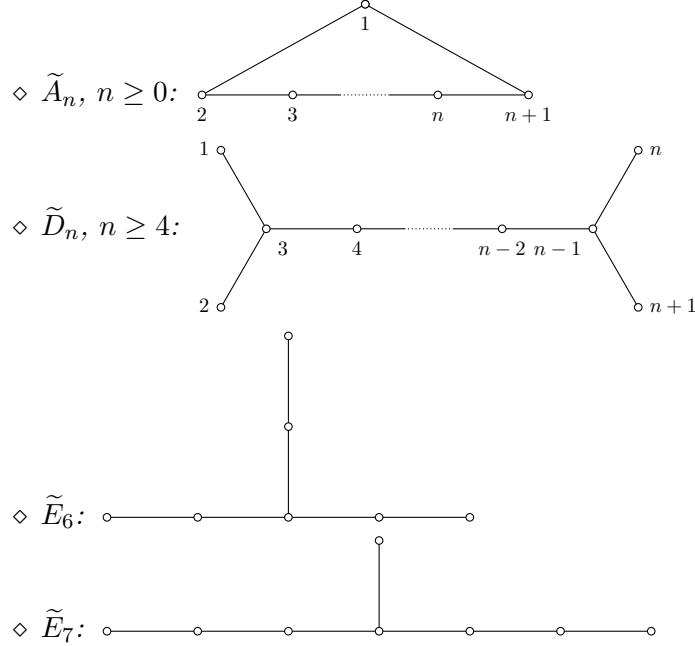
tem imagem $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, e todas as suas fibras têm dimensão 0 (já que cada uma delas é apenas um ponto). Logo,

$$q_Q(v) = \dim \text{GL}(v)_x \geq \dim \mathcal{V} = 1.$$

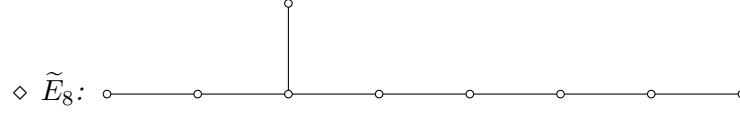
□

(3) \implies (2). Usaremos indução em *árvores*, ou seja, grafos conexos que não contêm ciclos, para provar o lema abaixo.

Lema 2.4. *Seja Q uma aljava cuja forma de Tits é positiva definida. Então $\Gamma(Q)$ não tem nenhum dos grafos a seguir¹ como subgrafo:*



¹ $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ e \tilde{E}_8 são chamados *grafos de Dynkin estendidos*.



Demonstração. Basta ver que as formas de Tits dos grafos acima não são positivas definidas e aplicar 1.49.

A seguir apresentaremos $x = (x_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ não nulo para o qual a forma de Tits tenha valor menor ou igual a zero, para cada um dos grafos \tilde{A}_n , \tilde{D}_n , \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 e \tilde{E}_8 .

	$x_i = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
	$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \{1, 2, n, n+1\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
	$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \{1, 5, 7\} \\ 2 & \text{se } i \in \{2, 4, 6\} \\ 3 & \text{se } i = 3 \end{cases}$
	$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \{1, 7, 8\} \\ 2 & \text{se } i \in \{2, 6\} \\ 3 & \text{se } i \in \{3, 5\} \\ 4 & \text{se } i = 4 \end{cases}$
	$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 8 \\ 2 & \text{se } i \in \{1, 7\} \\ 3 & \text{se } i \in \{6, 9\} \\ 4 & \text{se } i \in \{2, 5\} \\ 5 & \text{se } i = 4 \\ 6 & \text{se } i = 3 \end{cases}$

□

Teorema 2.5. *Seja Q um quiver conexo cuja forma de Tits é positiva definida. Então $\Gamma(Q)$ é um grafo de Dynkin.*

Demonstração. Se $\Gamma := \Gamma(Q)$ só tem um vértice, então $\Gamma = A_1$.

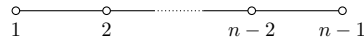
Pelo lema 2.4, Γ não contém ciclos. Como Γ é conexo e finito, é uma árvore finita. Prosseguiremos por indução no número de vértices.

Seja $n > 1$ o número de vértices de Q , e suponhamos que todo grafo conexo com menos que n vértices e com forma de Tits positiva definida seja de Dynkin.

Seja v uma folha (ou seja, um vértice que só tem um vizinho) da árvore Γ . O subgrafo $\Gamma' := \Gamma - v$ é conexo e tem $n - 1$ vértices. Por 1.49, a forma de Tits de Γ' é positiva definida. Então Γ' é de Dynkin pela hipótese de indução. Analisaremos, em cada caso, as possibilidades de Γ a partir da posição original de v .

- $\Gamma' = A_{n-1}$

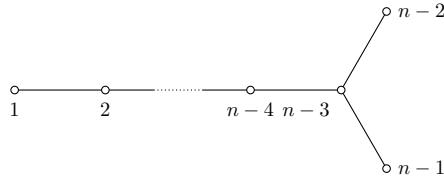
Consideremos a seguinte numeração dos vértices de Γ' :



Se v é vizinho (em Γ) do vértice

- ◊ 1 ou $n - 1$, então $\Gamma = A_n$.
- ◊ 2 ou $n - 2$ (se $n \geq 3$), então $\Gamma = D_n$.
- ◊ 3, e $n = 6$, então $\Gamma = E_6$.
- ◊ 3 ou 4, e $n = 7$, então $\Gamma = E_7$.
- ◊ 3 ou 5, e $n = 8$, então $\Gamma = E_8$.
- ◊ 3, e $n > 8$, então Γ contém \tilde{E}_8 .
- ◊ j tal que $4 \leq j \leq n - 4$, e $n \geq 8$, então Γ contém \tilde{E}_7 .
- ◊ j tal que $n - 5 \leq j \leq n - 3$, e $n \geq 9$, então Γ contém \tilde{E}_8 .
- $\Gamma' = D_{n-1}$ ($n \geq 5$)

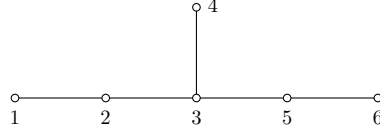
Consideremos a seguinte numeração dos vértices de Γ' :



Se v é vizinho (em Γ) do vértice

- ◊ 1, então $\Gamma = D_n$.
- ◊ j tal que $2 \leq j \leq n - 3$, então Γ contém \tilde{D}_m , para algum inteiro positivo m .
- ◊ $n - 2$ ou $n - 1$, e $n = 5$, então $\Gamma = D_5$.
- ◊ $n - 2$ ou $n - 1$, e $6 \leq n \leq 8$, então $\Gamma = E_n$.
- ◊ $n - 2$ ou $n - 1$, e $n \geq 9$, então Γ contém \tilde{E}_8 .
- $\Gamma' = E_6$ ($n = 7$)

Consideremos a seguinte numeração dos vértices de Γ' :

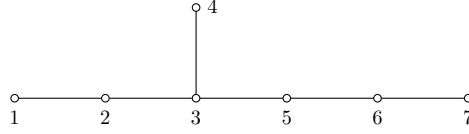


Se v é vizinho (em Γ) do vértice

- ◊ 1 ou 6, então $\Gamma = E_7$.
- ◊ 2, 3 ou 5, então Γ contém \tilde{D}_m , para algum inteiro positivo m .
- ◊ 4, então Γ contém \tilde{E}_6 .

- $\Gamma' = E_7$ ($n = 8$)

Consideremos a seguinte numeração dos vértices de Γ' :

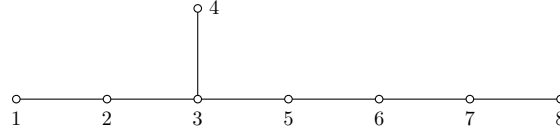


Se v é vizinho (em Γ) do vértice

- ◊ 1, então $\Gamma = \tilde{E}_7$.
- ◊ 2, 3, 5 ou 6, então Γ contém \tilde{D}_m , para algum inteiro positivo m .
- ◊ 4, então Γ contém \tilde{E}_6 .
- ◊ 7, então $\Gamma = E_8$.

- $\Gamma' = E_8$ ($n = 9$)

Consideremos a seguinte numeração dos vértices de Γ' :



Se v é vizinho (em Γ) do vértice

- ◊ 1, então Γ contém \tilde{E}_7 .
- ◊ 2, 3, 5, 6 ou 7, então Γ contém \tilde{D}_m , para algum inteiro positivo m .
- ◊ 4, então Γ contém \tilde{E}_6 .
- ◊ 8, então $\Gamma = \tilde{E}_8$.

Mas 2.4 implica que os casos em que Γ contém \tilde{D}_m , \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 ou \tilde{E}_8 são inválidos. Assim, sobram apenas os casos em que Γ é de Dynkin. \square

(2) \implies (1). Daqui em diante, consideraremos apenas aljavas cujo grafo subjacente é de Dynkin.

Seja V uma representação indecomponível de um quiver Q com n vértices. Numeremos os vértices de Q de acordo com a seguinte regra:

1. Escolhamos um poço de Q como o vértice n .
2. Iteremos os seguintes passos até todos os vértices estarem numerados:

2.1. Suponhamos que já estejam definidos os vértices $n, n-1, \dots, n-k+1$, com $1 \leq k \leq n-1$.

2.2. Atribuíamos $n-k$ a algum vértice de Q que se torne um poço quando removemos de Q os vértices $n, n-1, \dots, n-k+1$.

Como Q é acíclico e finito, qualquer subquiver (possivelmente desconexo) de Q também é acíclico e finito, portanto possui poço. Assim, o algoritmo acima faz sentido. Além disso, a numeração obtida garante que, se existe aresta que começa em i e termina em j , então $i < j$. Logo, $n-k$ é poço em $S_{n-k+1}^+ \cdots S_{n-1}^+ S_n^+(Q)$, e podemos definir

$$V^{(0)} := V, \quad V^{(k)} := \Phi_{n-k+1}^+ \cdots \Phi_{n-1}^+ \Phi_n^+(V), \quad 1 \leq k \leq n.$$

$V^{(n)}$ é uma representação de Q , pois cada aresta foi invertida duas vezes. Podemos então estender a sequência colocando

$$V^{(mn+k)} := \Phi_{n-k+1}^+ \left(V^{(mn+k-1)} \right), \quad 1 \leq k \leq n, \quad m \in \mathbb{N}.$$

A partir daqui assumiremos que os vértices de Q têm essa numeração.

Proposição 2.6. *Sejam Q uma aljava e $V \in \text{rep } Q$. Se $i \in Q_0$ é poço e φ_i (como em (1.4)) é sobrejetora, então*

$$d(\Phi_i^+ V) = s_i(d(V)).$$

Em particular, se existe $M \in \mathbb{N}$ tal que as funções φ_i referentes às representações $V^{(0)}, V^{(1)}, \dots, V^{(M-1)}$ sejam sobrejetoras, então

$$d(V^{(M)}) = s_{n-k+1} \cdots s_{n-1} s_n c^m d(V),$$

onde m, k são inteiros não negativos tais que $M = mn + k$ e $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. Como φ_i é uma transformação linear sobrejetiva,

$$\begin{aligned} \dim \bigoplus_{\alpha \in N_i} V_{s(\alpha)} &= \dim \ker \varphi_i + \dim V_i \\ \implies \dim \sum_{\alpha \in N_i} V_{s(\alpha)} &= \dim \ker \varphi_i + \dim V_i \\ \implies \dim \ker \varphi_i &= \dim \sum_{\alpha \in N_i} V_{s(\alpha)} - \dim V_i \end{aligned}$$

$(\Phi_i^+ V)_i = \ker \varphi_i$, logo

$$\begin{aligned} \dim(\Phi_i^+ V)_i &= \dim \sum_{\alpha \in N_i} V_{s(\alpha)} - \dim V_i \\ &= \dim V_i - (d(V), \alpha_i)_Q \end{aligned}$$

Além disso, se $j \neq i$, então

$$\dim(\Phi_i^+ V)_j = \dim V_j.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 d(\Phi_i^+ V) &= \sum_{j=1}^n \dim(\Phi_i^+ V)_j \alpha_j \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n \dim(V_j) \alpha_j \right) - (d(V), \alpha_i)_Q \alpha_i \\
 &= d(V) - (d(V), \alpha_i)_Q \alpha_i \\
 &= s_i(d(V)),
 \end{aligned}$$

concluindo a primeira parte. Com isso,

$$\begin{aligned}
 d(V^{(k)}) &= d(\Phi_{n-k+1}^+ V^{(k-1)}) = s_{n-k+1}(d(V^{(k-1)})) \\
 &= s_{n-k+1}(d(\Phi_{n-k+2}^+ V^{(k-2)})) = s_{n-k+1} s_{n-k+2}(d(V^{(k-2)})) \\
 &\vdots \\
 &= s_{n-k+1} \dots s_{n-1} s_n(d(V^{(0)})).
 \end{aligned}$$

Em particular,

$$d(V^{(n)}) = c(d(V)).$$

Assim, se $m > 1$,

$$\begin{aligned}
 d(V^{(mn)}) &= d\left(\left(V^{((m-1)n)}\right)^{(n)}\right) = c(d(V^{((m-1)n)})) \\
 &\vdots \\
 &= c^m(V^{(0)}).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 d(V^{(mn+k)}) &= d\left(\left(V^{(mn)}\right)^{(k)}\right) = s_{n-k+1} \dots s_{n-1} s_n(d(V^{(mn)})) \\
 &= s_{n-k+1} \dots s_{n-1} s_n c^m(V^{(0)}).
 \end{aligned}$$

□

A proposição acima mostra uma forma como a aplicação dos funtores de Coxeter pode dar informações sobre uma representação. Isso será muito útil no restante da prova.

Teorema 2.7. *Seja V uma representação indecomponível de uma aljava Q . Então existe inteiro não negativo M tal que*

$$d(V^{(M)}) = \alpha_p$$

para algum $p \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que, para todo $M \in \mathbb{N}$, $V^{(M)}$ não seja uma raiz simples. Por 1.44, as representações $V^{(0)}, V^{(1)}, \dots, V^{(mn-1)}$ são indecomponíveis, qualquer que seja o inteiro positivo m . Então, podemos usar 1.42 para afirmar que as funções φ_i referentes a essas representações são sobrejetoras. Por 2.6, temos

$$d(V^{(mn)}) = c^m d(V).$$

1.63 implica que podemos tomar m tal que $d(V^{(mn)})$ tenha alguma entrada negativa. Isso é uma contradição, pois as entradas de $d(V^{(mn)})$ são dimensões de espaços vetoriais, e portanto são não negativas. \square

Corolário 2.8. *Seja V uma representação indecomponível de uma aljava Q . Então $d(V)$ é uma raiz positiva de Q .*

Demonstração. Por 2.7, existe $M \in \mathbb{Z}$ não negativo com

$$d(V^{(M)}) = \alpha_p,$$

para algum $p \in \{1, \dots, n\}$. Tomemos M mínimo. Se $M = 0$, então $d(V)$ é a raiz positiva α_p . Suponhamos $M > 0$. Por 1.42, as funções φ_i referentes às representações $V^{(0)}, V^{(1)}, \dots, V^{(M-1)}$ são sobrejetoras. Assim, 2.6 garante que

$$s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m} (d(V)) = d(V^{(M)}) = \alpha_p,$$

para determinados $i_1, i_2, \dots, i_m, p \in \{1, \dots, n\}$. Logo, por 1.60,

$$\begin{aligned} (d(V), d(V))_Q &= (s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m} (d(V)), s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m} (d(V)))_Q \\ &= (\alpha_p, \alpha_p)_Q \\ &= 2. \end{aligned}$$

\square

Como toda vetor dimensão de representação indecomponível de Q é uma raiz positiva, sabemos que há no máximo tantos vetores dimensão de representações indecomponíveis quanto há raízes. Entretanto, a quantidade de classes de representações indecomponíveis continua irrestrita, já que poderíamos ter V, W indecomponíveis não isomorfas, mas com mesmo vetor dimensão. Abaixo verificaremos que isso não acontece.

Corolário 2.9. *Sejam V, W representações indecomponíveis da aljava Q . Se $d(V) = d(W)$, então $V \cong W$.*

Demonstração. Sejam M, N os menores inteiros não negativos tais que

$$d(V^{(M)}) = \alpha_p, \quad d(W^{(N)}) = \alpha_q,$$

com $p, q \in \{1, \dots, n\}$. Tais M, N existem por 2.7. Se $M = 0$, então

$$d(W) = d(V) = \alpha_p,$$

portanto qualquer transformação linear não nula entre V_p e W_p dá um isomorfismo entre V e W .

Suponhamos $M > 0$. Verificaremos que $M = N$ e $p = q$.

Sem perda de generalidade, seja $M \leq N$. Por 1.42, as funções φ_i (como em (1.4)) referentes às representações $V^{(0)}, V^{(1)}, \dots, V^{(M-1)}$ e $W^{(0)}, W^{(1)}, \dots, W^{(M-1)}$ são sobrejetoras. Assim, 2.6 implica que

$$\begin{aligned} d(V^{(M)}) &= s_{n-k+1} \cdots s_{n-1} s_n c^m d(V) \\ d(W^{(M)}) &= s_{n-k+1} \cdots s_{n-1} s_n c^m d(W) \end{aligned}$$

onde m, k são inteiros não negativos tais que $M = mn + k$ e $1 \leq k \leq n$. Logo,

$$\begin{aligned} d(W^{(M)}) &= s_{n-k+1} \cdots s_{n-1} s_n c^m d(W) \\ &= s_{n-k+1} \cdots s_{n-1} s_n c^m d(V) \\ &= d(V^{(M)}) \\ &= \alpha_p. \end{aligned}$$

Como N é mínimo, segue que $N \leq M$, e assim $M = N$ e $p = q$. Por definição,

$$\begin{aligned} V^{(M)} &= \Phi_{n-k+1}^+ \cdots \Phi_{n-1}^+ \Phi_n^+ (\Phi_1^+ \cdots \Phi_{n-1}^+ \Phi_n^+)^m (V) \\ W^{(M)} &= \Phi_{n-k+1}^+ \cdots \Phi_{n-1}^+ \Phi_n^+ (\Phi_1^+ \cdots \Phi_{n-1}^+ \Phi_n^+)^m (W) \end{aligned}$$

Usando 1.43, temos

$$\begin{aligned} (\Phi_n^- \Phi_{n-1}^- \cdots \Phi_1^-)^m \Phi_n^- \Phi_{n-1}^- \cdots \Phi_{n-k+1}^- (V^{(M)}) &\cong V \\ (\Phi_n^- \Phi_{n-1}^- \cdots \Phi_1^-)^m \Phi_n^- \Phi_{n-1}^- \cdots \Phi_{n-k+1}^- (W^{(M)}) &\cong W \end{aligned}$$

Como $V^{(M)} = W^{(M)}$, resulta dos isomorfismos acima que $V \cong W$. \square

Com isso, podemos concluir nossa demonstração:

Teorema 2.10. *Seja Q uma aljava tal que $\Gamma(Q)$ é um grafo de Dynkin. Então Q tem tipo finito.*

Demonstração. 2.8 e 2.9 implicam que existe injeção do conjunto das classes de isomorfismo das representações indecomponíveis de Q no conjunto das raízes positivas de Q . Por 1.53, existe apenas um número finito de raízes positivas, portanto Q tem tipo finito. \square

Concluimos, portanto, a prova do teorema de Gabriel.

Existem versões análogas de 1.42, 1.43, 1.44 e 2.6 para fontes — trocando “poço” por “fonte”, “ φ_i ” por “ ψ_i ” (como em (1.5)), “sobrejetora” por “injetora”, “ Φ_i^+ ” por “ Φ_i^- ” e “ Φ_i^- ” por “ Φ_i^+ ” nos enunciados. Essas versões

podem ser encontradas em [3, Chapter 6]. Com esses resultados, é possível demonstrar o teorema a seguir, também conhecido como *teorema de Gabriel*:

Teorema 2.11. *Seja Q um quiver cujo grafo subjacente é de tipo A_n , D_n , E_6 , E_7 ou E_8 . Então há apenas um número finito de representações indecomponíveis de Q , a menos de isomorfismo. Além disso, a função $V \mapsto d(V)$ induz uma bijeção entre as classes de isomorfismo das representações indecomponíveis de Q e as raízes positivas de Q (com respeito ao produto interno dado pela forma simétrica de Euler).*

Já vimos que $V \mapsto d(V)$ induz uma injeção das classes de isomorfismo das representações indecomponíveis de Q nas raízes positivas de Q . Resta apenas verificar que, para cada raiz positiva α , existe uma representação indecomponível cujo vetor dimensão é α . Esse resultado e sua demonstração podem ser consultados em [3, Corollary 6.8.4].

REFERÊNCIAS

- [1] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory.
- [2] Harm Derksen and Jerzy Weyman. *An introduction to quiver representations*, volume 184 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [3] Pavel Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina. *Introduction to representation theory*, volume 59 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. With historical interludes by Slava Gerovitch.
- [4] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.
- [5] Alexander Kirillov, Jr. *Quiver representations and quiver varieties*, volume 174 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.
- [6] Ralf Schiffler. *Quiver representations*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, Cham, 2014.
- [7] Patrice Tauvel and Rupert W. T. Yu. *Lie algebras and algebraic groups*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO