Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по курсу "Математическая статистика"

Тема Интервальные оценки

Студент Цветков И.А.

Группа ИУ7-63Б

Оценка (баллы)

Преподаватель Власов П. А.

Москва — 2022 г.

1 Задание на лабораторную работу

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

1.1 Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;

   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N — объема выборки из индивидуальноговарианта:

   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Теоретическая часть

Определение доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

<u>**Определение**</u>: Интервальной оценкой параметра θ уровня $\gamma \in (0, 1)$ называется пара статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})) = \gamma \tag{2.1}$$

<u>**Определение**</u>: γ-доверительным интервалом для параметра θ называют реализацию интервальной оценки уровня γ для этого параметра, то есть интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))$ с детерминированными границами.

Формулы для вычисления границ доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Таблица 2.1 – Таблица границ доверительных интервалов

Параметры	**Центральная статистика**	**Границы**
μ – неизвестно, σ – известно, Оценить μ	$\frac{\mu-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$	$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{u_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}$ $\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{u_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}$
μ – неизвестно, σ – неизвестно, Оценить μ	$\frac{\mu-\overline{X}}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n} \sim St(n-1)$	$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{t_{1-\alpha}S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}$ $\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{t_{1-\alpha}S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}$
σ – неизвестно, Оценить σ	$\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{S^2(\vec{X}_n)(n-1)}{h_{1-\alpha}}$ $\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{S^2(\vec{X}_n)(n-1)}{h_{\alpha}}$

где $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$; u_α, t_α, h_α — квантилии уровня α нормального распределния, распределения Стьюдента и распределения хи-квадрат соответственно;
$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

3 Практическая часть

3.1 Код программы

```
function lab_02()
    X = csvread('data21.csv');

    % Оценки мат ожидания и дисперсии
    mu = CalcMu(X);
    fprintf("\nВыборочное среднее (оценка мат ожидания) = %.4f\n", mu);

    s2 = CalcS2(X);
    fprintf("Исправленная выборочная дисперсия (оценка дисперсии) = %.4f\n",
        s2);

    % Гамма
    gamma = 0.9;
    N = length(X);

    % Вычисление доверительных интервалов
    [lowM, highM] = CalcIntervalM(mu, s2, gamma, N);
    fprintf("\nИнтервал для M: (%.4f, %.4f)\n", lowM, highM);

    [lowD, highD] = CalcIntervalD(s2, gamma, N);
    fprintf("Интервал для D: (%.4f, %.4f)\n", lowD, highD);

    % Построение графиков
    graphMu(X, gamma, N);
    graphS2(X, gamma, N);
endfunction


function graphS2(X, gamma, N)
    figure()

    mu = zeros(N, 1);
    s2 = zeros(N, 1);

    for ind = 1 : N
        part = X(1:ind);
        mu(ind) = CalcMu(part);
        s2(ind) = CalcS2(part);
    endfor

    % Прямая
    s2Line = zeros(N, 1);
```

```
    s2Line(1:N) = s2(N);

    % Для границ
    s2Low =  zeros(N, 1);
    s2High = zeros(N, 1);

    for ind = 1 : N
        [s2Low(ind), s2High(ind)] = CalcIntervalD(s2(ind), gamma, N);
    endfor

    % Графики
    plot((1:N), s2Line(1:N), 'g', 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((1:N), s2(1:N), 'b-');
    hold on;
    plot((1:N), s2High(1:N), 'r--');
    hold on;
    plot((1:N), s2Low(1:N), 'k');
    hold on;

    grid on;
    xlabel("n");
    ylabel("\sigma");

    legend('S^2(x_N)', 'S^2(x_n)', '\sigma^{2 up}(x_n)', '\sigma^2_{down}(x_n)');
endfunction


function graphMu(X, gamma, N)
    mu = zeros(N, 1);
    s2 = zeros(N, 1);

    for ind = 1 : N
        part = X(1:ind);
        mu(ind) = CalcMu(part);
        s2(ind) = CalcS2(part);
    endfor

    % Прямая
    muLine = zeros(N, 1);
    muLine(1:N) = mu(N);

    % Для границ
    muLow =  zeros(N, 1);
    muHigh = zeros(N, 1);

    for ind = 1 : N
```

```
            [muLow(ind), muHigh(ind)] = CalcIntervalM(mu(ind), s2(ind), gamma, N);
        endfor

        % Графики
        plot((1:N), muLine(1:N), 'g', 'LineWidth', 1);
        hold on;
        plot((1:N), mu(1:N), 'b-');
        hold on;
        plot((1:N), muHigh(1:N), 'r--');
        hold on;
        plot((1:N), muLow(1:N), 'k');
        hold on;

        grid on;
        xlabel("n");
        ylabel("\mu");

        legend('\mu\^(x_N)', '\mu\^(x_n)', '\mu^{up}(x_n)', '\mu_{down}(x_n)');
endfunction


% Доверительный интервал при
% m - неизвестно, sigma - неизвестно
% Оценить m
function [lowM, highM] = CalcIntervalM(mu, s2, gamma, N)
        alpha = (1 - gamma) / 2;
        quantileStudent = tinv((1 - alpha), (N - 1));

        lowM =  mu - (quantileStudent * sqrt(s2) / sqrt(N));
        highM = mu + (quantileStudent * sqrt(s2) / sqrt(N));
endfunction


% Доверительный интервал при
% sigma - неизвестно
% Оценить sigma^2
function [lowD, highD] = CalcIntervalD(s2, gamma, N)
        alpha = (1 - gamma) / 2;

        quantileXi2Low =  chi2inv((1 - alpha), (N - 1));
        quantileXi2High = chi2inv(alpha, (N - 1));

        lowD =  s2 * (N - 1) / quantileXi2Low;
        highD = s2 * (N - 1) / quantileXi2High;
endfunction


% Вычисление выборочного среднего
```

```
function mu = CalcMu(X)
    n = length(X);

    if (n > 0)
        mu = sum(X) / n;
    else
        mu = 0
    endif

endfunction


% Вычисление исправленной выборочной дисперсии
function s2 = CalcS2(X)
    n = length(X);
    mu = CalcMu(X);

    if (n > 1)
        s2 = sum((X - mu) .^2) / (n - 1);
    else
        s2 = 0;
    endif

endfunction
```

3.2 Результат работы программы

Вывод программы

```

Выборочное среднее (оценка мат ожидания) = -15.2209
Исправленная выборочная дисперсия (оценка дисперсии) = 0.9680

Интервал для M: (-15.3698, -15.0720)
Интервал для D: (0.7919, 1.2150)
```

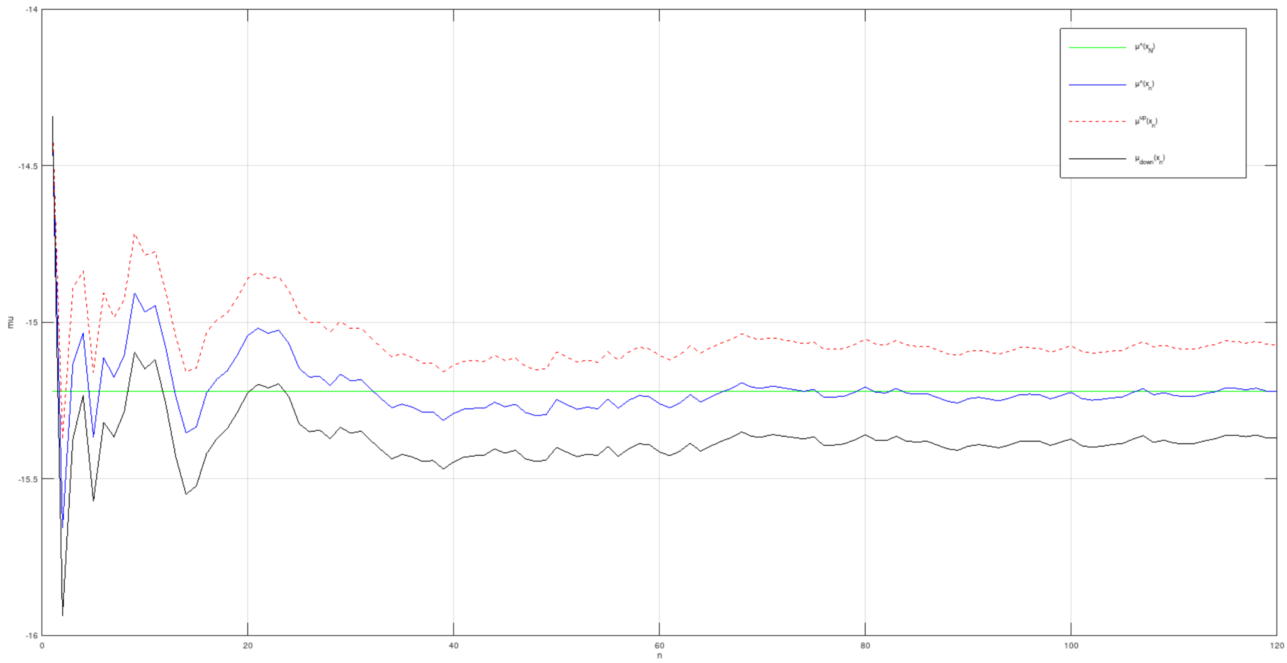

Рисунок 3.1 – Графики для математического ожидания

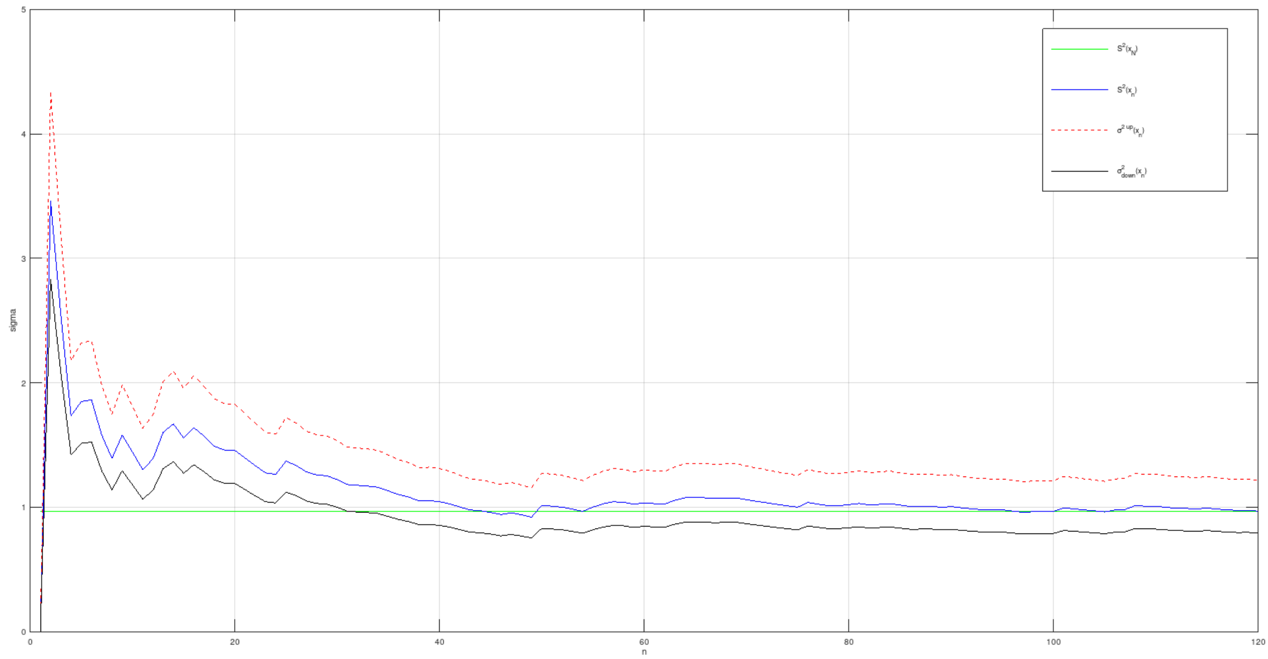

Рисунок 3.2 – Графики для дисперсии