



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени
Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по курсу "Математическая статистика"

Тема Интервальные оценки

Студент Цветков И.А.

Группа ИУ7-63Б

Оценка (баллы) _____

Преподаватель Власов П. А.

Москва — 2022 г.

1 Задание на лабораторную работу

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

1.1 Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
 - (а) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
 - (б) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\bar{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ -доверительного интервала для математического ожидания MX ;
 - (с) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\bar{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ -доверительного интервала для дисперсии DX ;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N — объема выборки из индивидуального варианта:
 - (а) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \bar{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N ;
 - (б) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $y = \bar{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N .

2 Теоретическая часть

Определение доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Определение: Интервальной оценкой параметра θ уровня $\gamma \in (0, 1)$ называется пара статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\bar{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \bar{\theta}(\vec{X})) = \gamma. \quad (2.1)$$

Определение: γ -доверительным интервалом для параметра θ называют реализацию интервальной оценки уровня γ для этого параметра, то есть интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}), \bar{\theta}(\vec{X}))$ с детерминированными границами.

Формулы для вычисления границ доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Таблица 2.1 – Таблица границ доверительных интервалов

Параметры	Центральная статистика	Границы
μ – неизвестно, σ – известно, Оценить μ	$\frac{\mu - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$	$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \bar{X} - \frac{u_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}$ $\bar{\mu}(\vec{X}_n) = \bar{X} + \frac{u_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}$
μ – неизвестно, σ – неизвестно, Оценить μ	$\frac{\mu - \bar{X}}{S(\vec{X}_n)} \sqrt{n} \sim St(n-1)$	$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \bar{X} - \frac{t_{1-\alpha}S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}$ $\bar{\mu}(\vec{X}_n) = \bar{X} + \frac{t_{1-\alpha}S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}$
σ – неизвестно, Оценить σ^2	$\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{S^2(\vec{X}_n)(n-1)}{h_{1-\alpha}}$ $\bar{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{S^2(\vec{X}_n)(n-1)}{h_\alpha}$

В таблице $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$; u_α , t_α , h_α – квантили уровня α нормального распределения, распределения Стьюдента и распределения хи-квадрат соответственно;

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; \quad S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

3 Практическая часть

3.1 Код программы

```
1 function lab_02()
2     X = csvread('test.csv');
3
4     % Оценки мат ожидания и дисперсии
5     mu = CalcMu(X);
6     fprintf("\nВыборочное среднее (оценка мат ожидания) = %.4f\n", mu);
7
8     s2 = CalcS2(X);
9     fprintf("Исправленная выборочная дисперсия (оценка дисперсии) = %.4f\n",
10            s2);
11
12     % Гамма
13     gamma = 0.9;
14     N = length(X);
15
16     % Вычисление доверительных интервалов
17     [lowM, highM] = CalcIntervalM(mu, s2, gamma, N);
18     fprintf("\nИнтервал для M: (%.4f, %.4f)\n", lowM, highM);
19
20     [lowD, highD] = CalcIntervalD(s2, gamma, N);
21     fprintf("Интервал для D: (%.4f, %.4f)\n", lowD, highD);
22
23     % Построение графиков
24     graphMu(X, gamma, N);
25     graphS2(X, gamma, N);
26 endfunction
27
28 function graphS2(X, gamma, N)
29     figure()
30
31     mu = zeros(N, 1);
32     s2 = zeros(N, 1);
33
34     for ind = 1 : N
35         part = X(1:ind);
36         mu(ind) = CalcMu(part);
37         s2(ind) = CalcS2(part);
38     endfor
39
40     % Прямая
41     s2Line = zeros(N, 1);
```

```

42     s2Line(1:N) = s2(N);
43
44     % Для границ
45     s2Low = zeros(N, 1);
46     s2High = zeros(N, 1);
47
48     for ind = 1 : N
49         [s2Low(ind), s2High(ind)] = CalcIntervalD(s2(ind), gamma, ind);
50     endfor
51
52     % Графики
53     plot((5:N), s2Line(5:N), 'g', 'LineWidth', 1);
54     hold on;
55     plot((5:N), s2(5:N), 'b-', 'LineWidth', 1);
56     hold on;
57     plot((5:N), s2High(5:N), 'r—', 'LineWidth', 1);
58     hold on;
59     plot((5:N), s2Low(5:N), 'k', 'LineWidth', 1);
60     hold on;
61
62     grid on;
63     xlabel("n");
64     ylabel("σ");
65
66     legend('S2(xN)', 'S2(xn)', 'σ2up(xn)',
67         'σ2down(xn)');
68 endfunction
69
70 function graphMu(X, gamma, N)
71     mu = zeros(N, 1);
72     s2 = zeros(N, 1);
73
74     for ind = 1 : N
75         part = X(1:ind);
76         mu(ind) = CalcMu(part);
77         s2(ind) = CalcS2(part);
78     endfor
79
80     % Прямая
81     muLine = zeros(N, 1);
82     muLine(1:N) = mu(N);
83
84     % Для границ
85     muLow = zeros(N, 1);
86     muHigh = zeros(N, 1);
87
88     for ind = 1 : N

```

```

89         [muLow(ind), muHigh(ind)] = CalcIntervalM(mu(ind), s2(ind), gamma, ind);
90     endfor
91
92     % Графики
93     plot((1:N), muLine(1:N), 'g', 'LineWidth', 1);
94     hold on;
95     plot((1:N), mu(1:N), 'b-', 'LineWidth', 1);
96     hold on;
97     plot((1:N), muHigh(1:N), 'r—', 'LineWidth', 1);
98     hold on;
99     plot((1:N), muLow(1:N), 'k', 'LineWidth', 1);
100    hold on;
101
102    grid on;
103    xlabel("n");
104    ylabel("μ");
105
106    legend('μ^(x_N)', 'μ^(x_n)', 'μ^{up}(x_n)', 'μ_{down}(x_n)');
107 endfunction
108
109
110 % Доверительный интервал при
111 % σ — неизвестно, σ — неизвестно
112 % Оценить m
113 function [lowM, highM] = CalcIntervalM(mu, s2, gamma, N)
114     alpha = (1 - gamma) / 2;
115     quantileStudent = tinv((1 - alpha), (N - 1));
116
117     lowM = mu - (quantileStudent * sqrt(s2) / sqrt(N));
118     highM = mu + (quantileStudent * sqrt(s2) / sqrt(N));
119 endfunction
120
121
122 % Доверительный интервал при
123 % σ — неизвестно
124 % Оценить σ^2
125 function [lowD, highD] = CalcIntervalD(s2, gamma, N)
126     alpha = (1 - gamma) / 2;
127
128     quantileXi2Low = chi2inv((1 - alpha), (N - 1));
129     quantileXi2High = chi2inv(alpha, (N - 1));
130
131     lowD = s2 * (N - 1) / quantileXi2Low;
132     highD = s2 * (N - 1) / quantileXi2High;
133 endfunction
134
135
136 % Вычисление выборочного среднего

```

```

137 function mu = CalcMu(X)
138     n = length(X);
139
140     mu = sum(X) / n;
141 endfunction
142
143
144 % Вычисление исправленной выборочной дисперсии
145 function s2 = CalcS2(X)
146     n = length(X);
147     mu = CalcMu(X);
148
149     if (n > 1)
150         s2 = sum((X - mu) .^2) / (n - 1);
151     else
152         s2 = 0;
153     endif
154
155 endfunction

```

3.2 Результат работы программы

Вывод программы

```

1
2 Выборочное среднее (оценка мат ожидания) = -15.2209
3 Исправленная выборочная дисперсия (оценка дисперсии) = 0.9680
4
5 Интервал для M: (-15.3698, -15.0720)
6 Интервал для D: (0.7919, 1.2150)

```

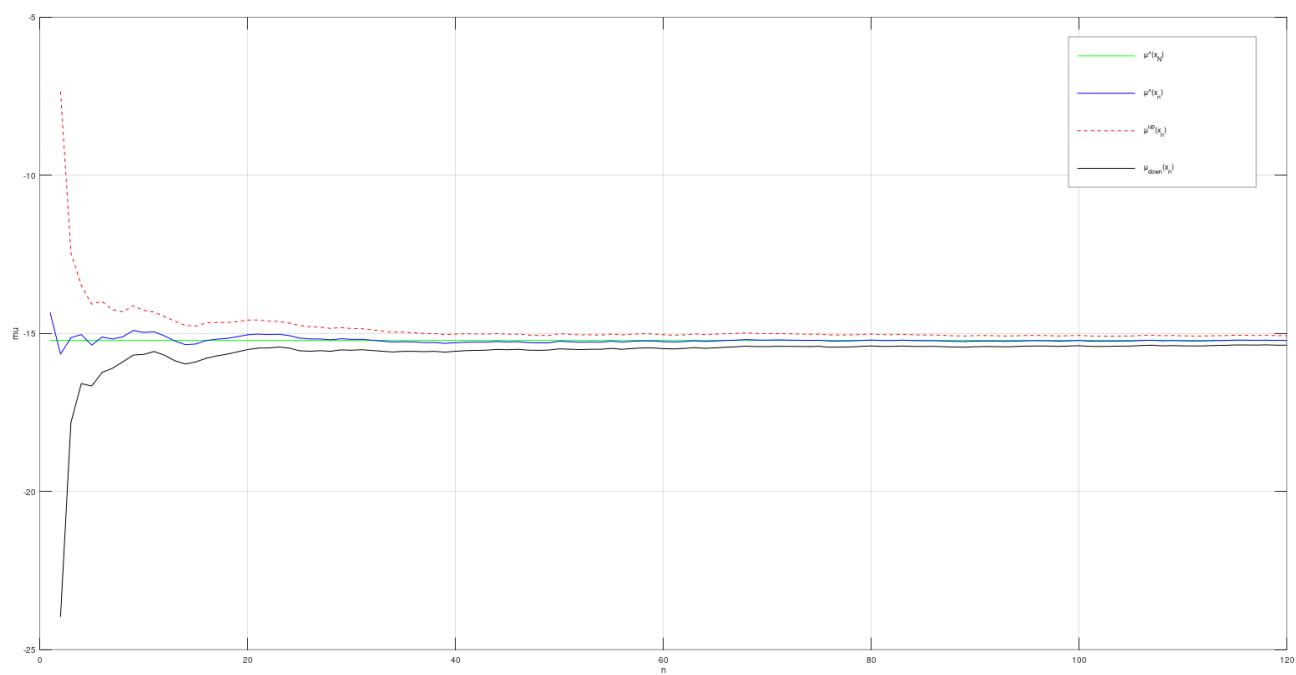


Рисунок 3.1 – Графики для математического ожидания

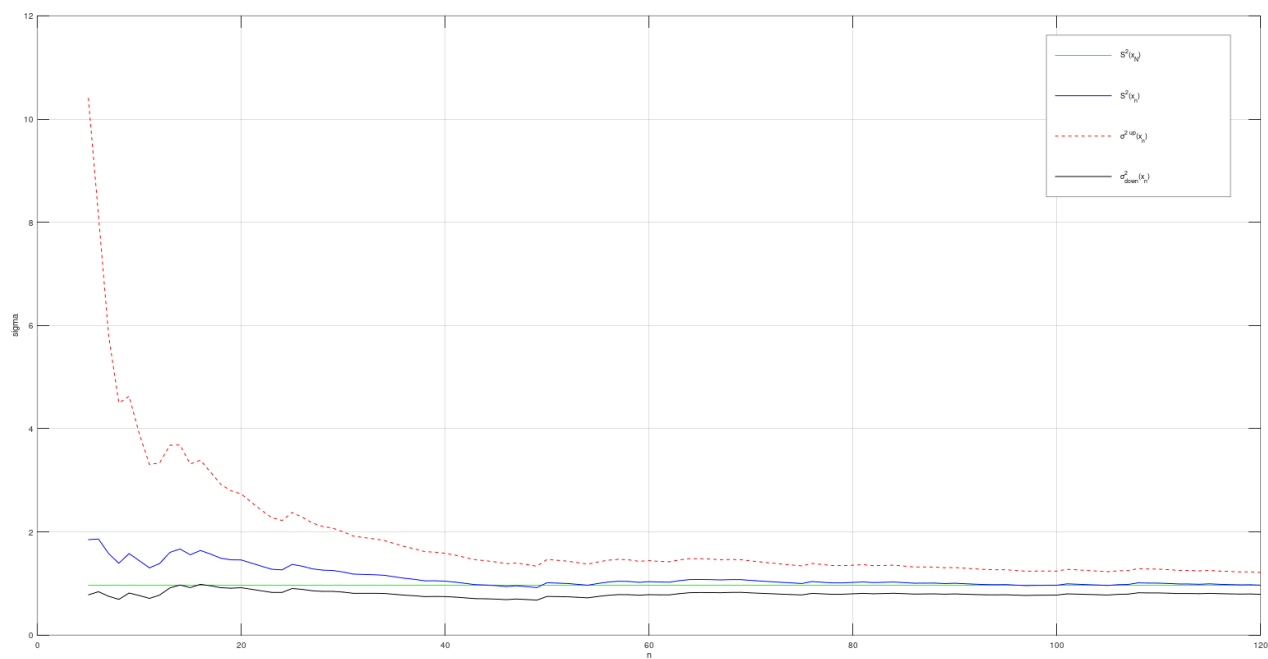


Рисунок 3.2 – Графики для дисперсии