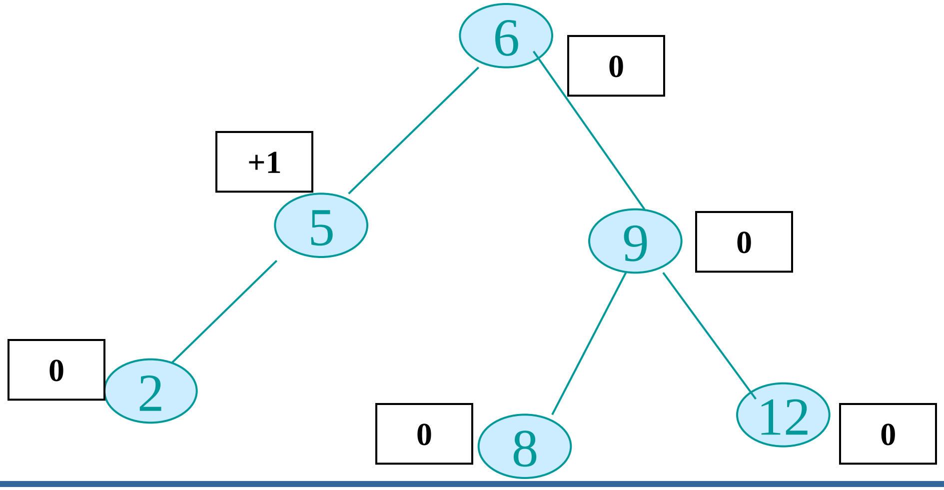
Algorytmy i struktury danych

Wykład 6-7: Zrównoważone drzewa BST

- Drzewa AVL
- Drzewa czerwono-czarne



Drzewa AVL

- Drzewo AVL (1962 – **A**delson-**V**elskij, **L**andis)
  - Drzewo AVL jest rozwinięciem drzewa BST (z zachowaniem wszystkich jego własności);
  - **Dla każdego wierzchołka w drzewie AVL wysokości jego dwóch poddrzew (lewego i prawego) o korzeniu w tym wierzchołku różnią się co najwyżej o 1**;
  - Węzeł drzewa AVL, oprócz pól danych oraz lewego i prawego wskaźnika, ma też pole opisujące różnicę wysokości lewego i prawego poddrzewa;
- Z definicji wynika, że to pole może mieć wartość ze zbioru {-1, 0, 1};

Obliczanie wag wierzchołków drzewa AVL

- Dla każdego wierzchołka drzewa *x* współczynnik zrównoważenia w(x) ma postać

$$w(x) = h(LD(x)) - h(PD(x)),$$

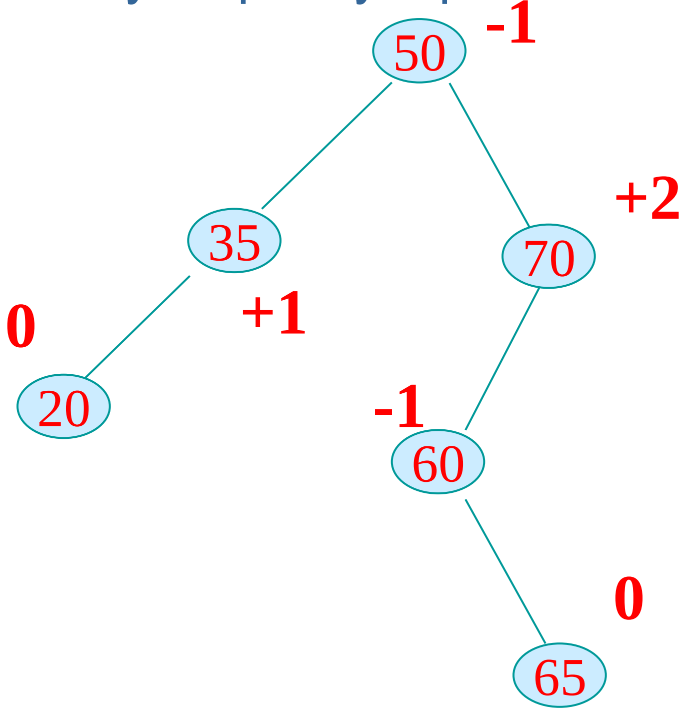
gdzie LD(x) i PD(x) są odpowiednio lewym i prawym poddrzewem o korzeniu *x*;

Drzewo BST jest drzewem AVL

⇔

dla każdego wierzchołka *x*:

$$w(x) \in \{-1, 0, +1\}$$



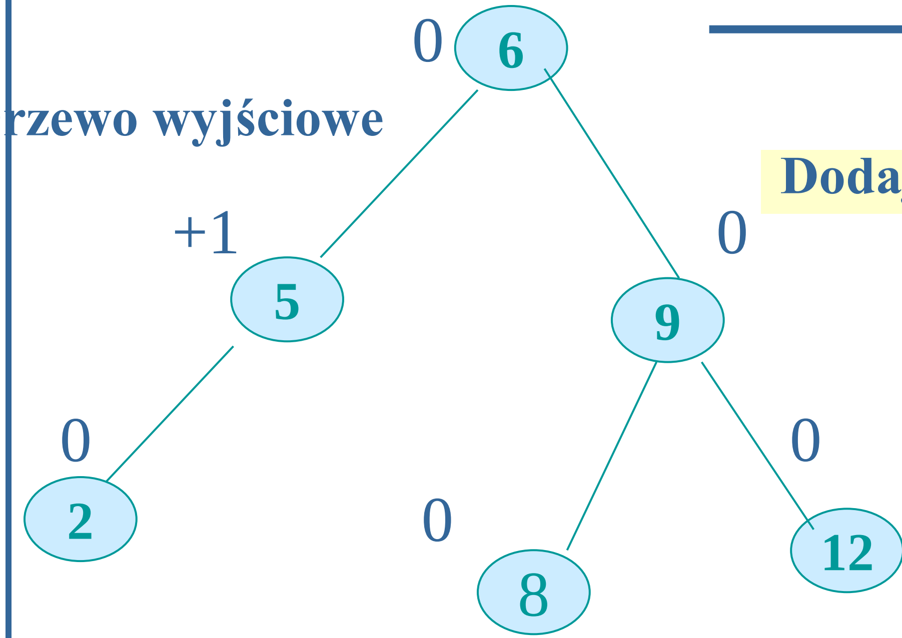
Operacje na drzewie AVL

- ***Wyszukiwanie***
  - Ponieważ drzewo AVL jest też drzewem BST, ta operacja wygląda tak, jak dla zwykłych drzew BST;

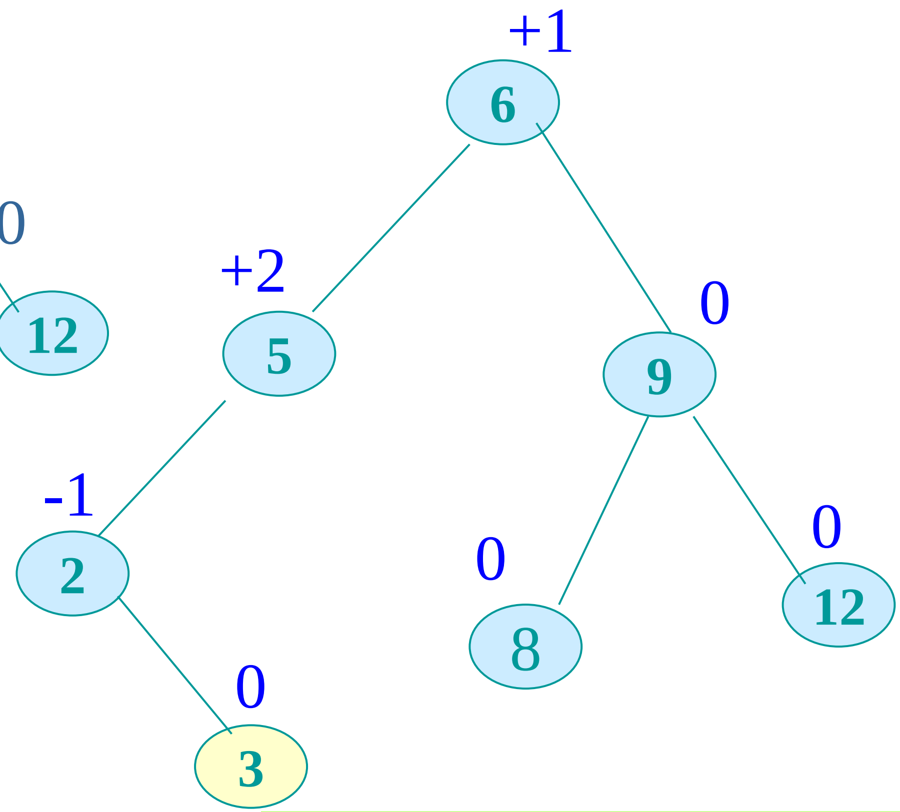
- ***Wstawianie***
  - Polega na wyszukaniu miejsca w drzewie, a następnie wstawieniu elementu (jak w zwykłym drzewie BST);
  - Ponieważ podczas operacji struktura drzewa zmienia się i może nie zostać zachowany warunek AVL (dotyczący różnicy wysokości poddrzew), trzeba tę równowagę przywrócić (podstawą korekty jest tzw. rotacja);

Operacje na drzewie AVL

Drzewo wyjściowe



Dodajemy węzeł z wartością 3

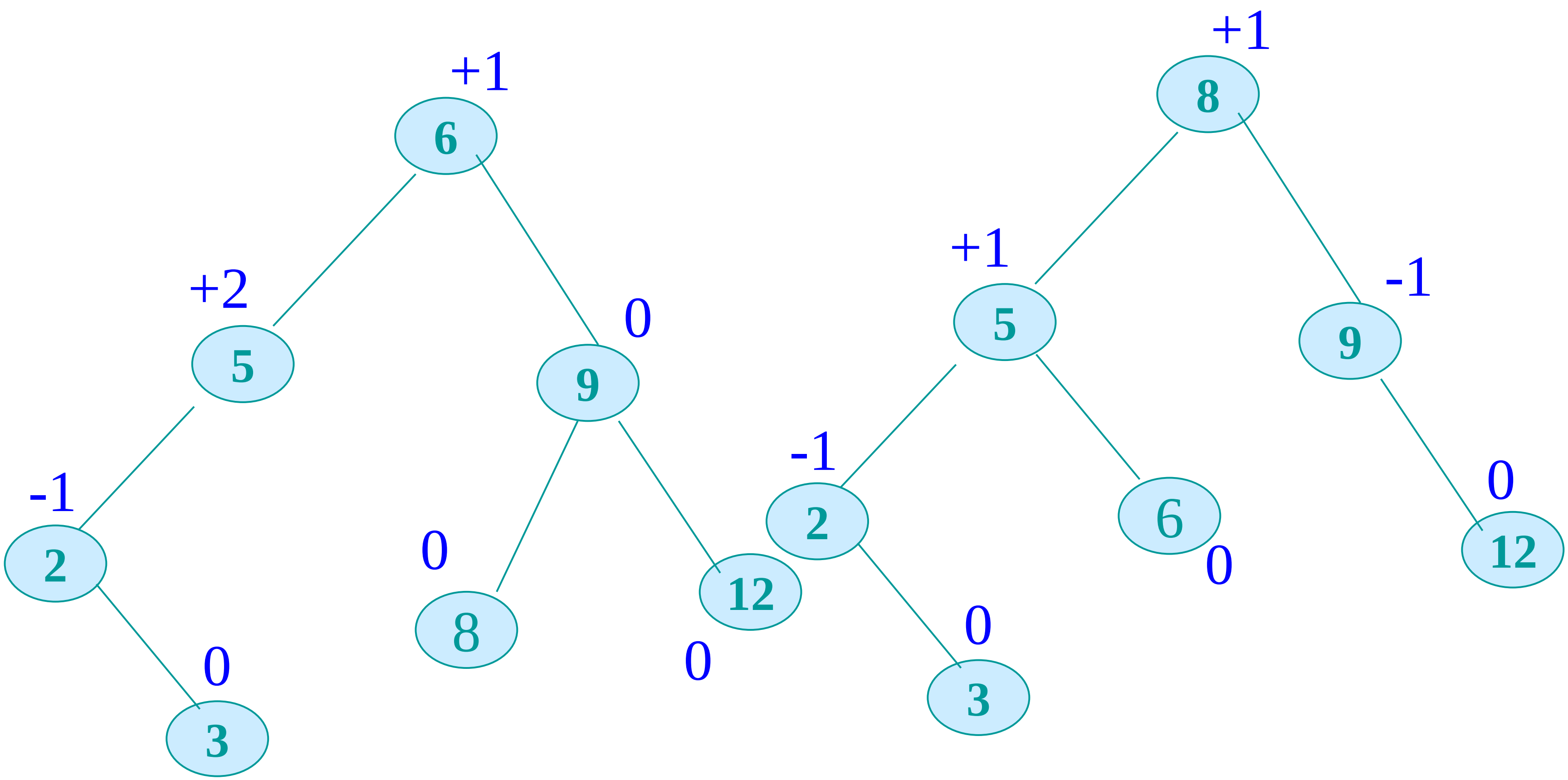


Jak przywrócić równowagę?

Operacje na drzewie AVL

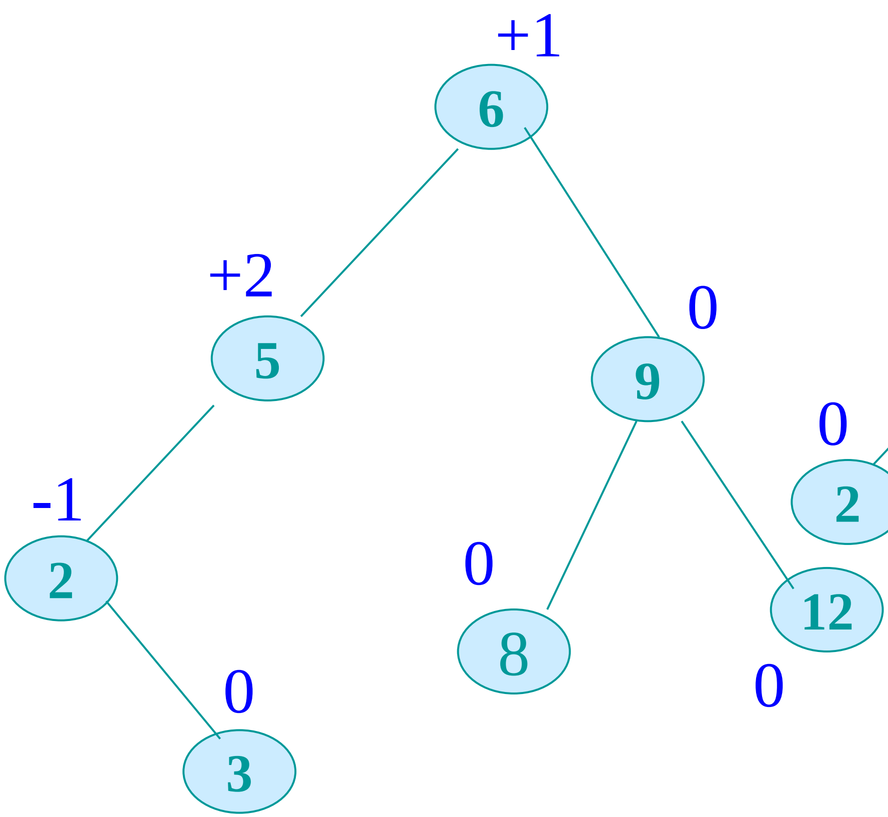
Jak przywrócić równowagę?

Sposób 1

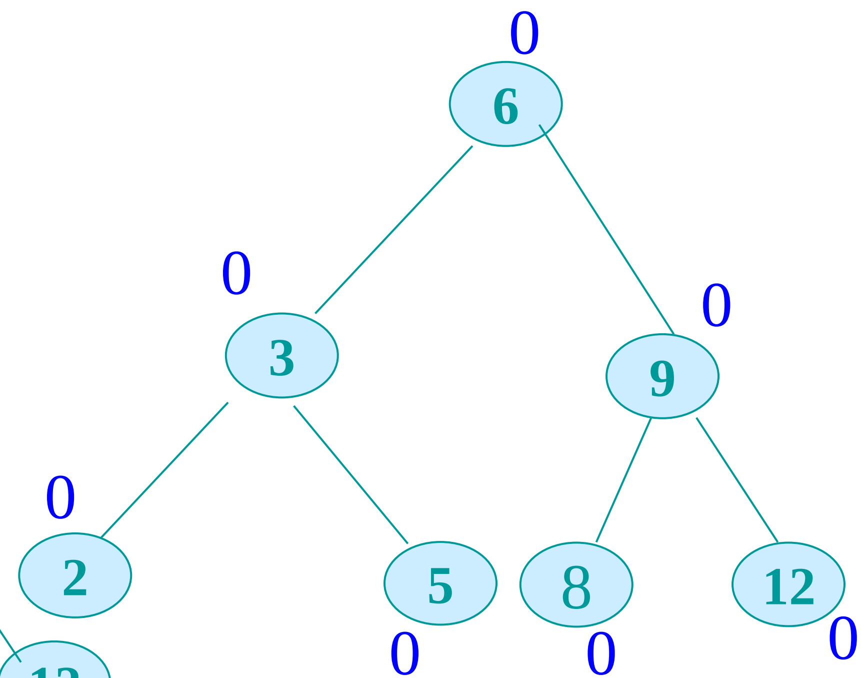


Operacje na drzewie AVL

Jak przywrócić równowagę?



Sposób 2



Podwójna rotacja węzła 3

Operacje na drzewie AVL

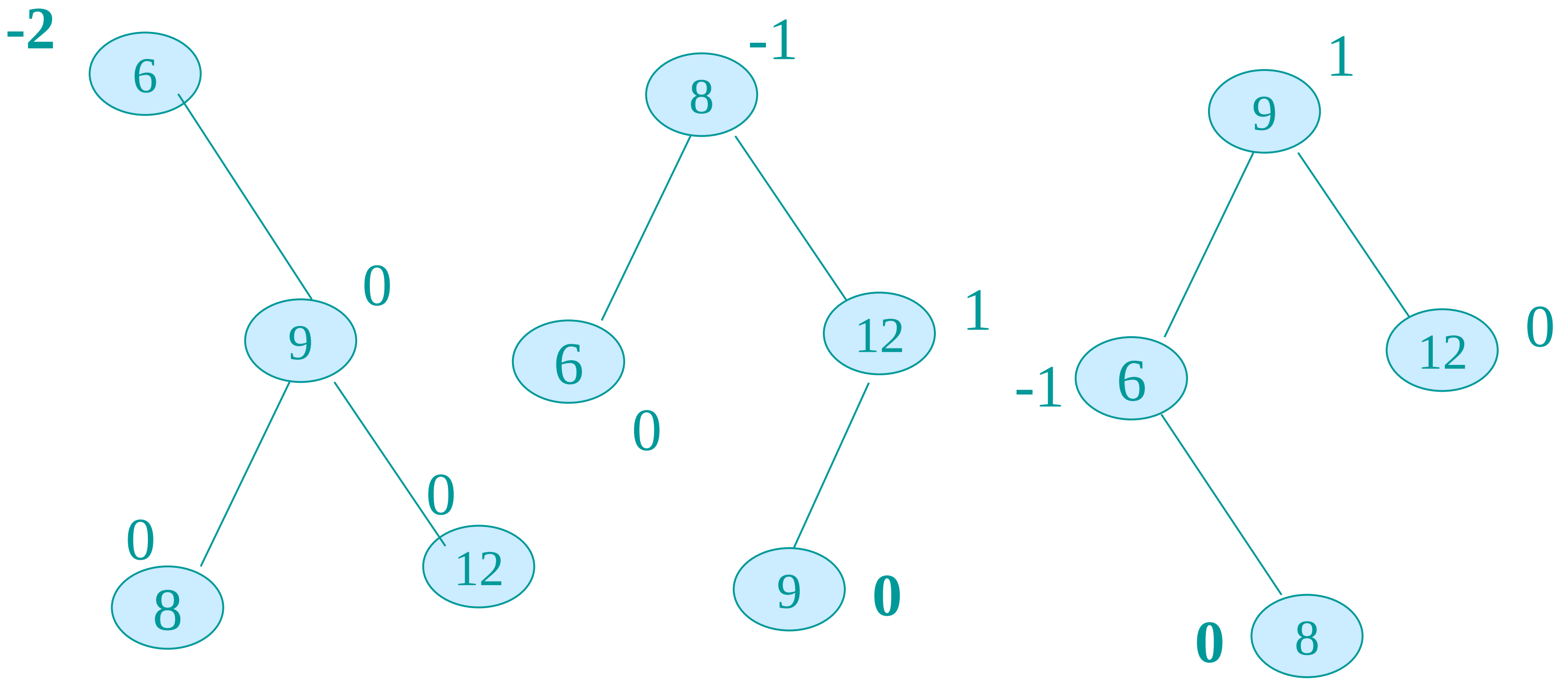
- ***Usuwanie:***
  - Polega na wyszukaniu elementu w drzewie a potem jego usunięciu (patrz BST)
  - Może zajść potrzeba przywrócenia równowagi drzewa (wymagana seria rotacji);

Operacje na drzewie AVL

- *Usuwanie*
  - Usunięcie elementu z drzewa BST może zmniejszyć wysokość poddrzewa (wymagana rotacja dla przywrócenia równowagi))

Operacje na drzewie AVL

W jaki sposób zrównoważyć otrzymane drzewo?

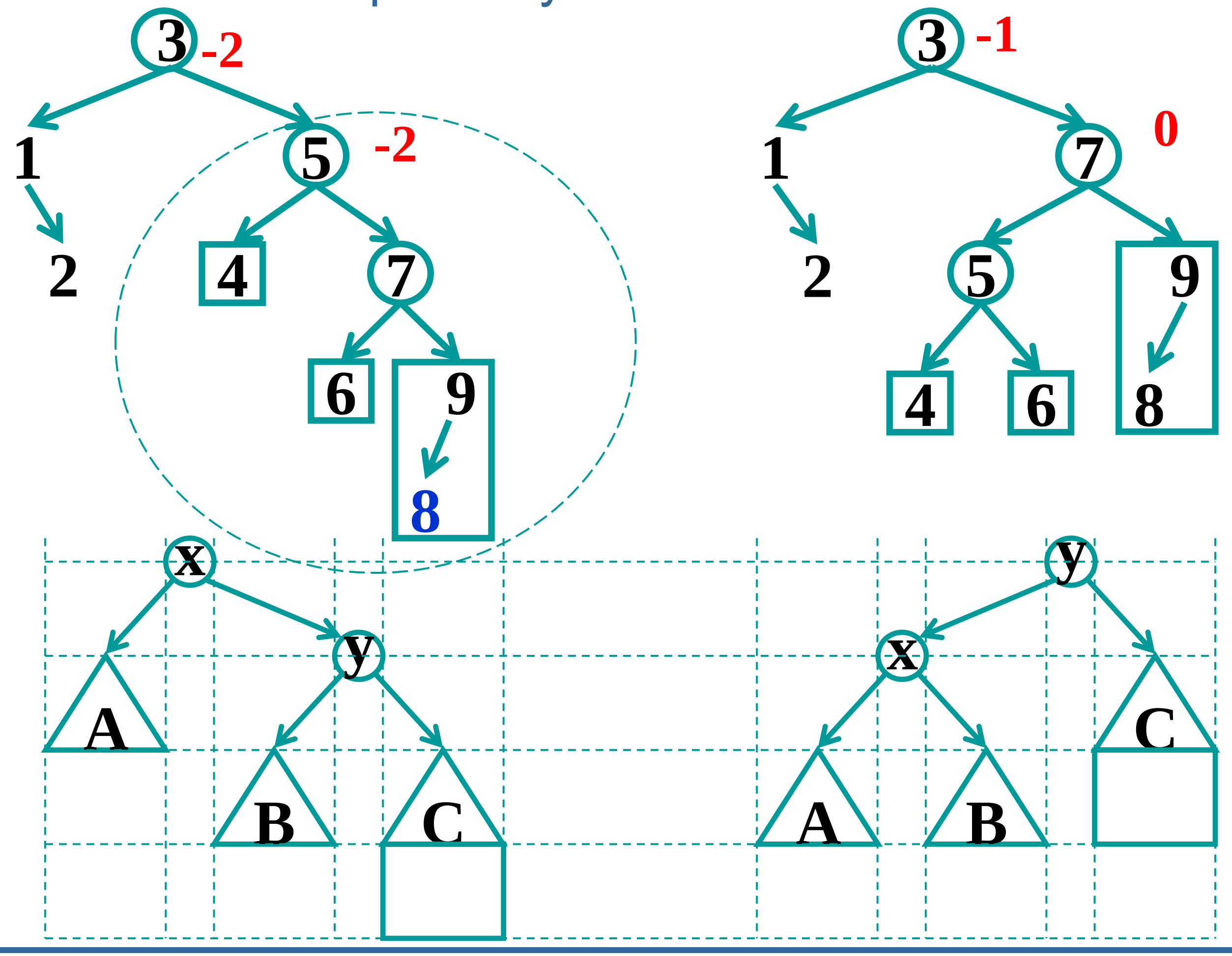


Sposób 1

Inny sposób (rotacja węzła 9 w lewo)

Operacje na drzewie AVL

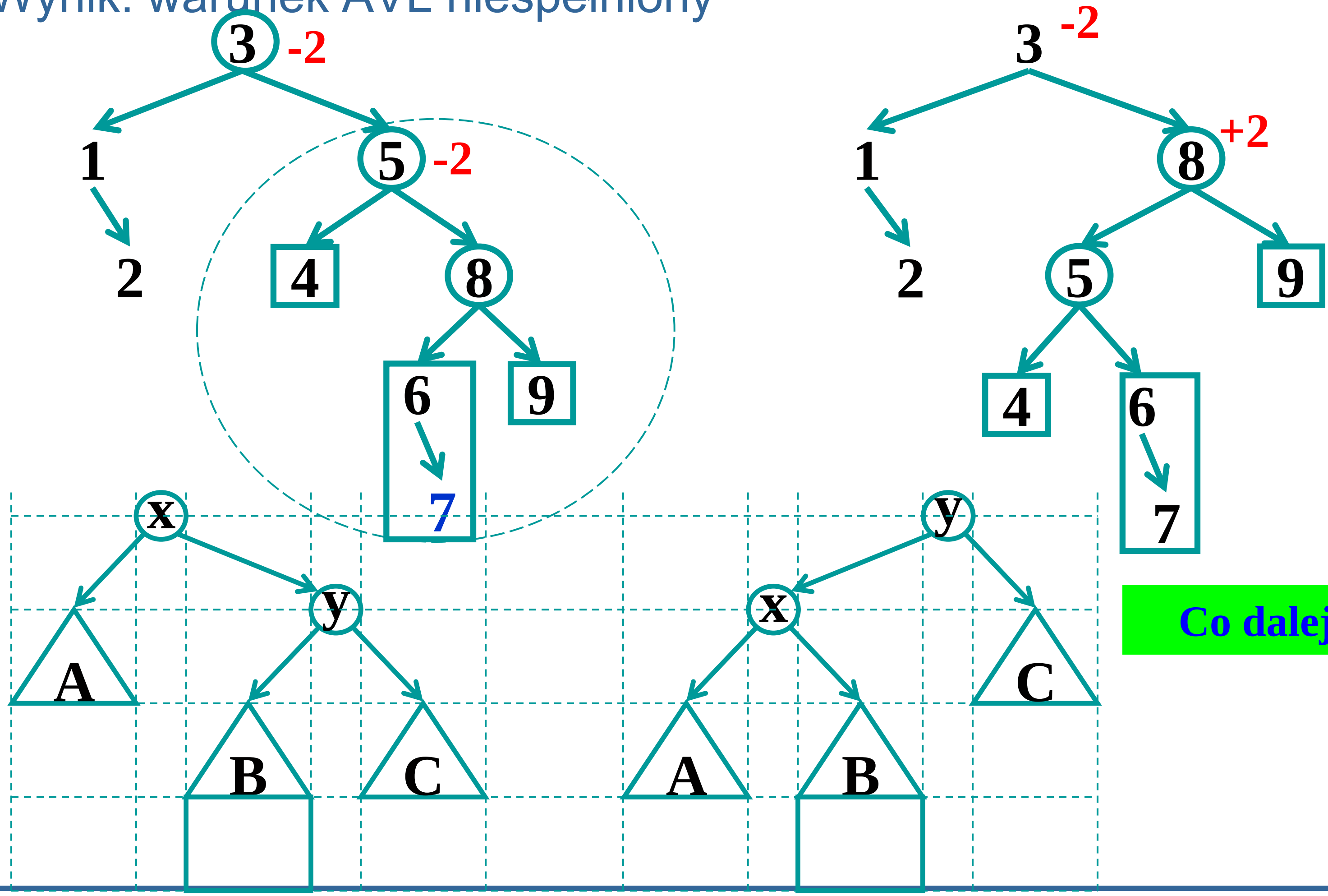
- Przykład 1 (dodanie węzła) – rotacja pojedyncza 7 wokół 5
- Wynik: warunek AVL spełniony



Czy równowagę przywróciłaby rotacja 5 wokół 3?

Operacje na drzewie AVL

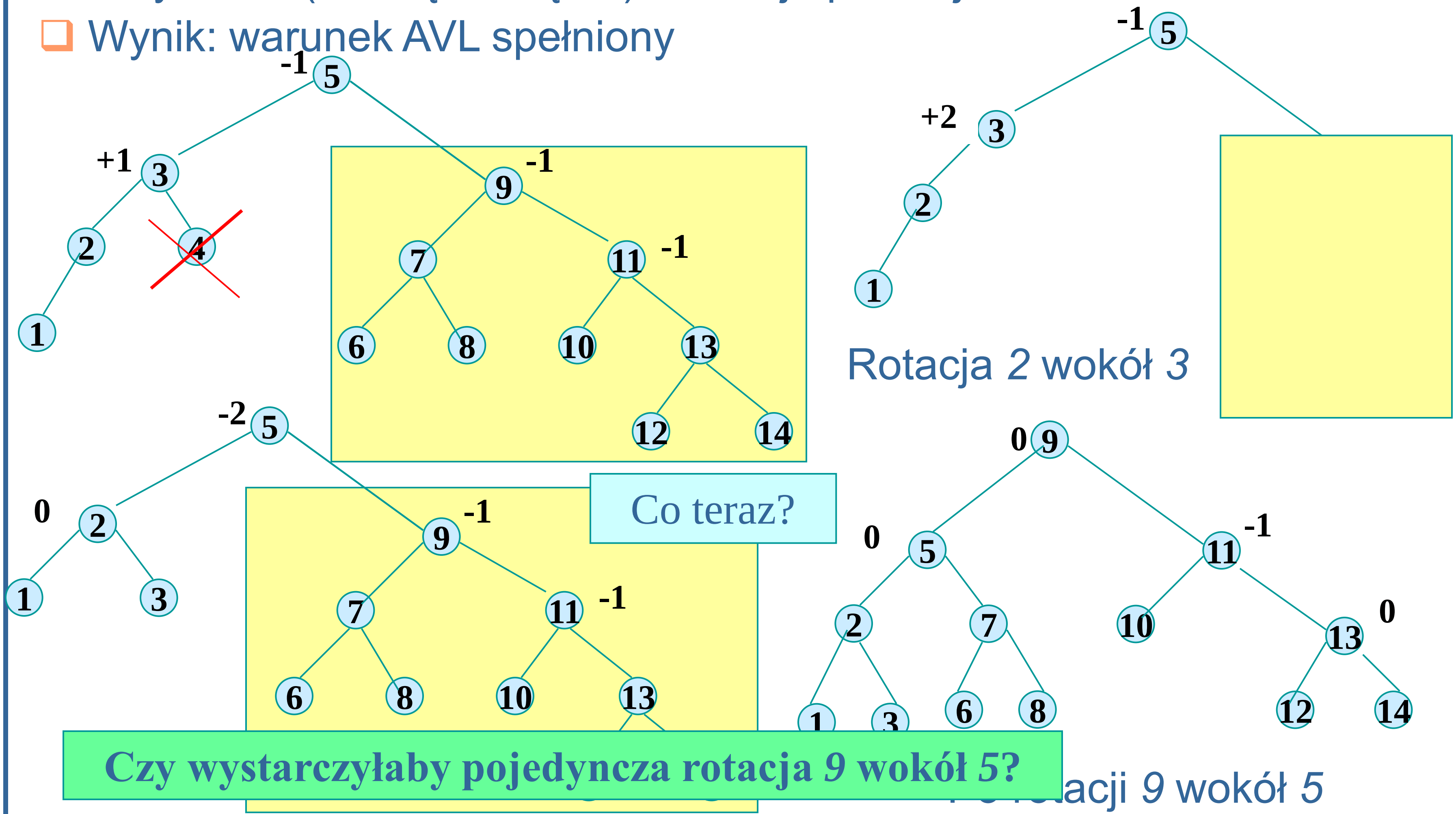
- Przykład 2 (dodanie węzła) – rotacja pojedyncza 8 wokół 5
- Wynik: warunek AVL niespełniony



Co dalej?

Operacje na drzewie AVL

- Przykład 3 (usunięcie węzła) – rotacja podwójna
- Wynik: warunek AVL spełniony



Operacje na drzewie AVL

Wstawianie (*Insert*)

- **Po wstawieniu elementu do drzewa AVL trzeba wykonać co najwyżej 1 rotację pojedynczą lub podwójną w celu jego zrównoważenia;**
- Podczas operacji *Insert* tak samo jak dla zwykłych drzew BST schodzimy po ścieżce od korzenia w dół do węzła zewnętrznego NULL i w jego miejscu tworzymy nowy liść ze wstawianym kluczem.
- Następnie wracamy po ścieżce do korzenia, aktualizując współczynniki zrównoważenia.

Operacje na drzewie AVL

- Jeśli stwierdzamy, że wysokość aktualnie rozważanego poddrzewa nie zmieniła się w stosunku do sytuacji przed wykonaniem *Insert*, to kończymy operację;
- Jeśli wysokość poddrzewa wzrosła (mogła wzrosnąć co najwyżej o 1!), kontynuujemy marsz w górę drzewa;
- Jeśli w wyniku wzrostu wysokości jednego z poddrzew aktualnie rozważanego węzła został w nim zaburzony warunek AVL, to przywracamy go za pomocą rotacji.

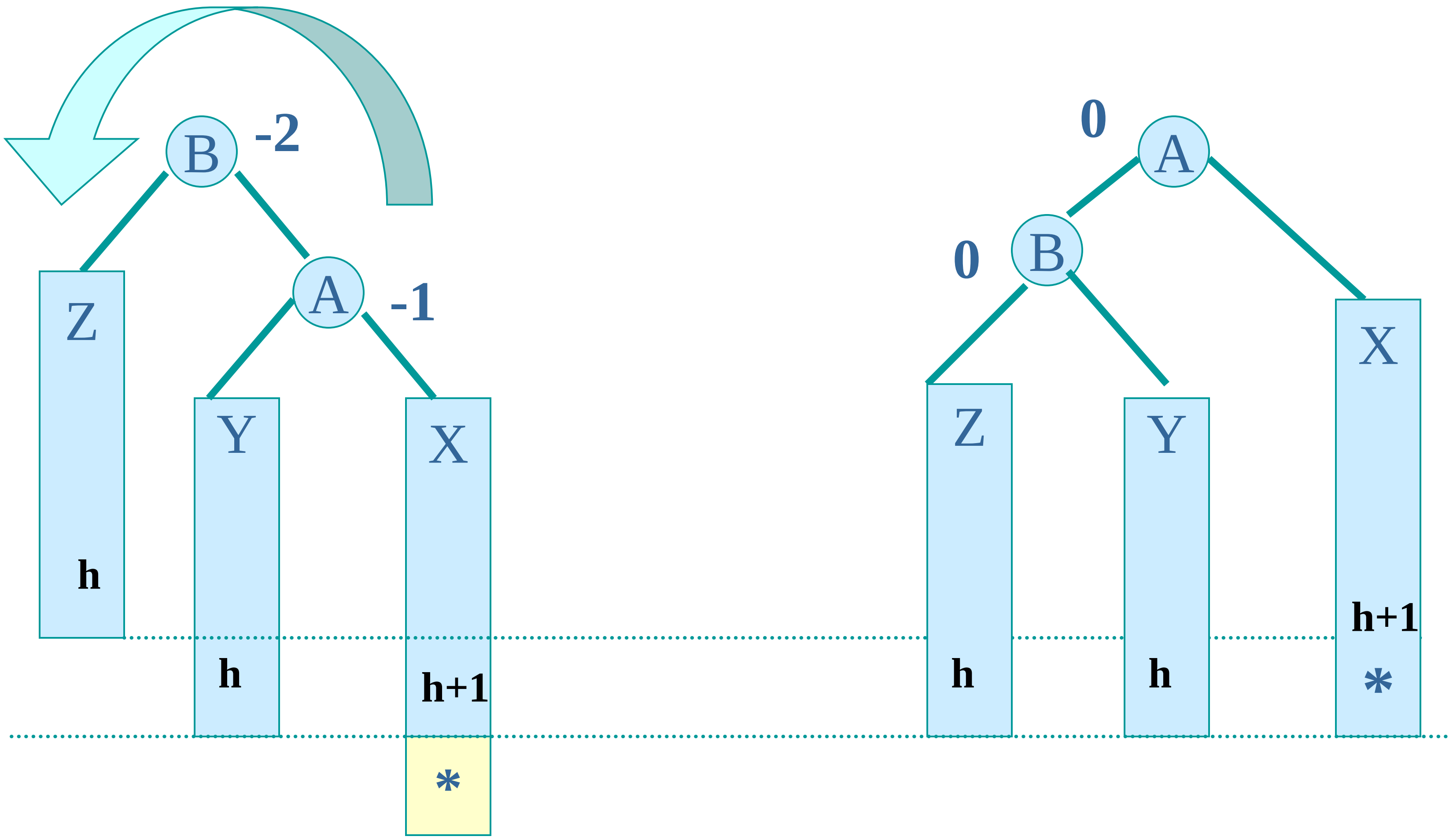
Operacje na drzewie AVL

Wstawianie

- Przypadki charakterystyczne:
  1. Wstawienie węzła do prawego poddrzewa prawego następnika
  2. Wstawienie węzła do lewego poddrzewa lewego następnika
  3. Wstawienie węzła do lewego poddrzewa prawego następnika
  4. Wstawienie węzła do prawego poddrzewa lewego następnika

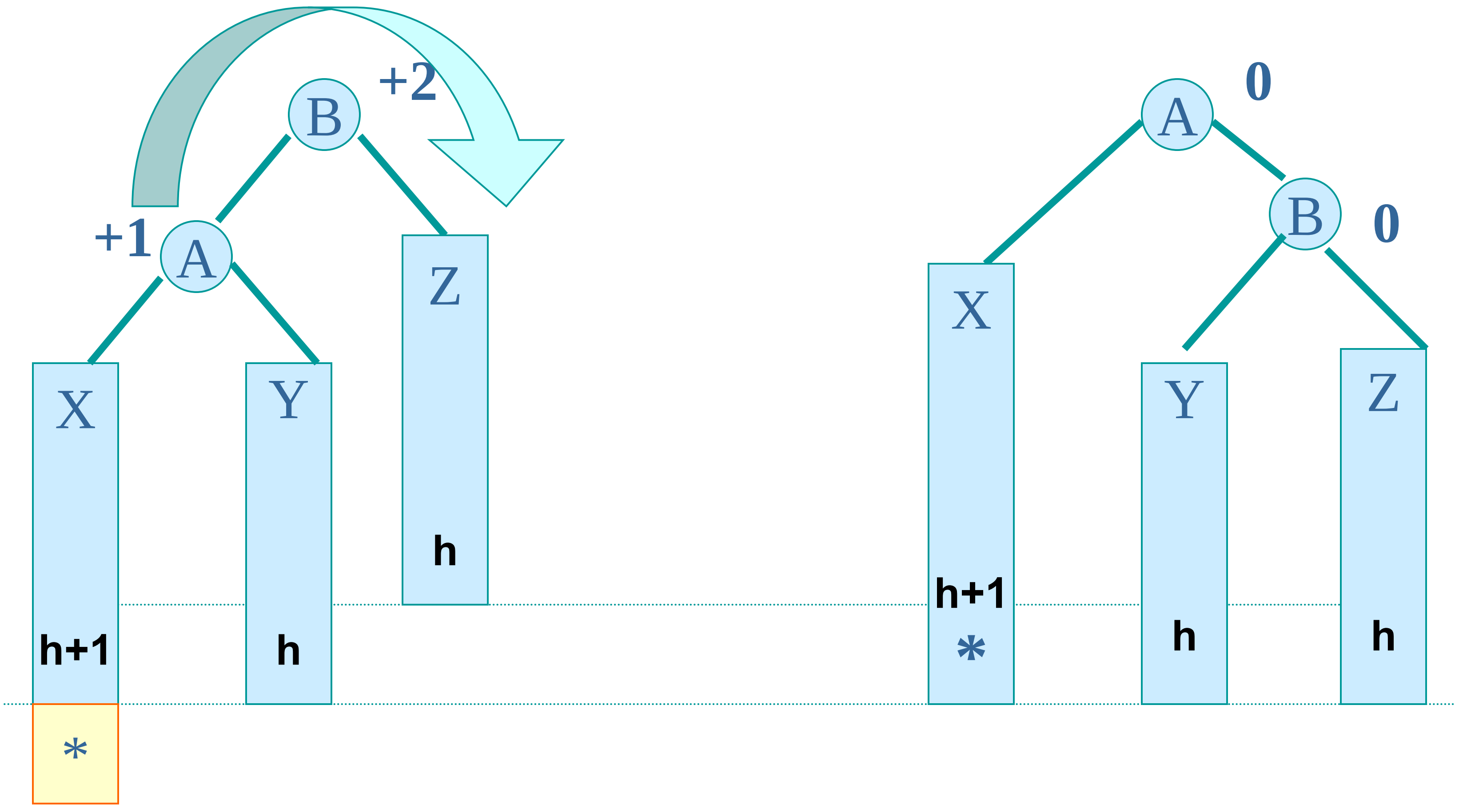
1. Wstawienie węzła do prawego poddrzewa prawego następnika

- **Korekta: rotacja lewa węzła A wokół B**



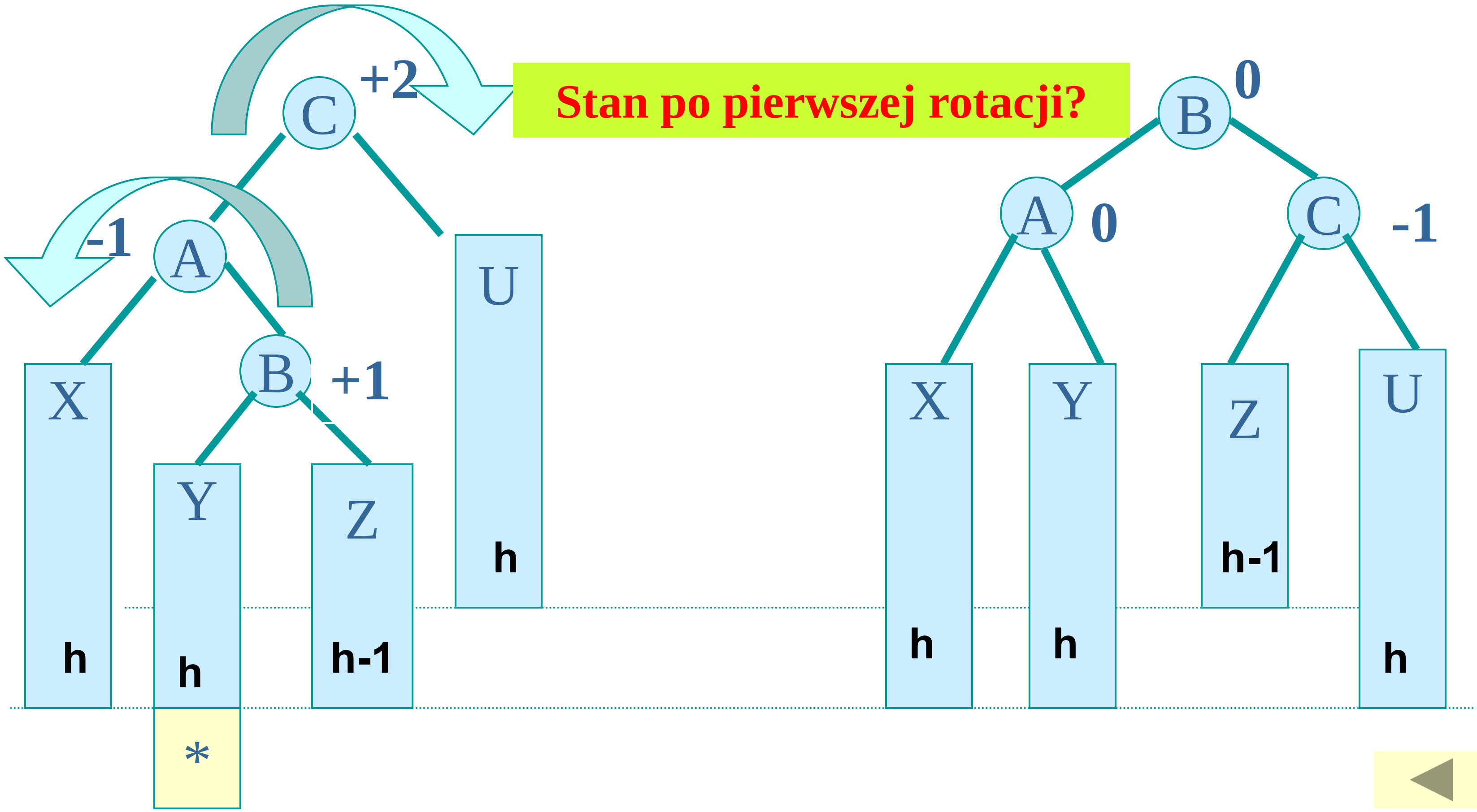
2. Wstawienie węzła do lewego poddrzewa lewego następnika

- **Korekta: rotacja prawa węzła A wokół B**



3. Wstawienie węzła do lewego poddrzewa prawego następnika

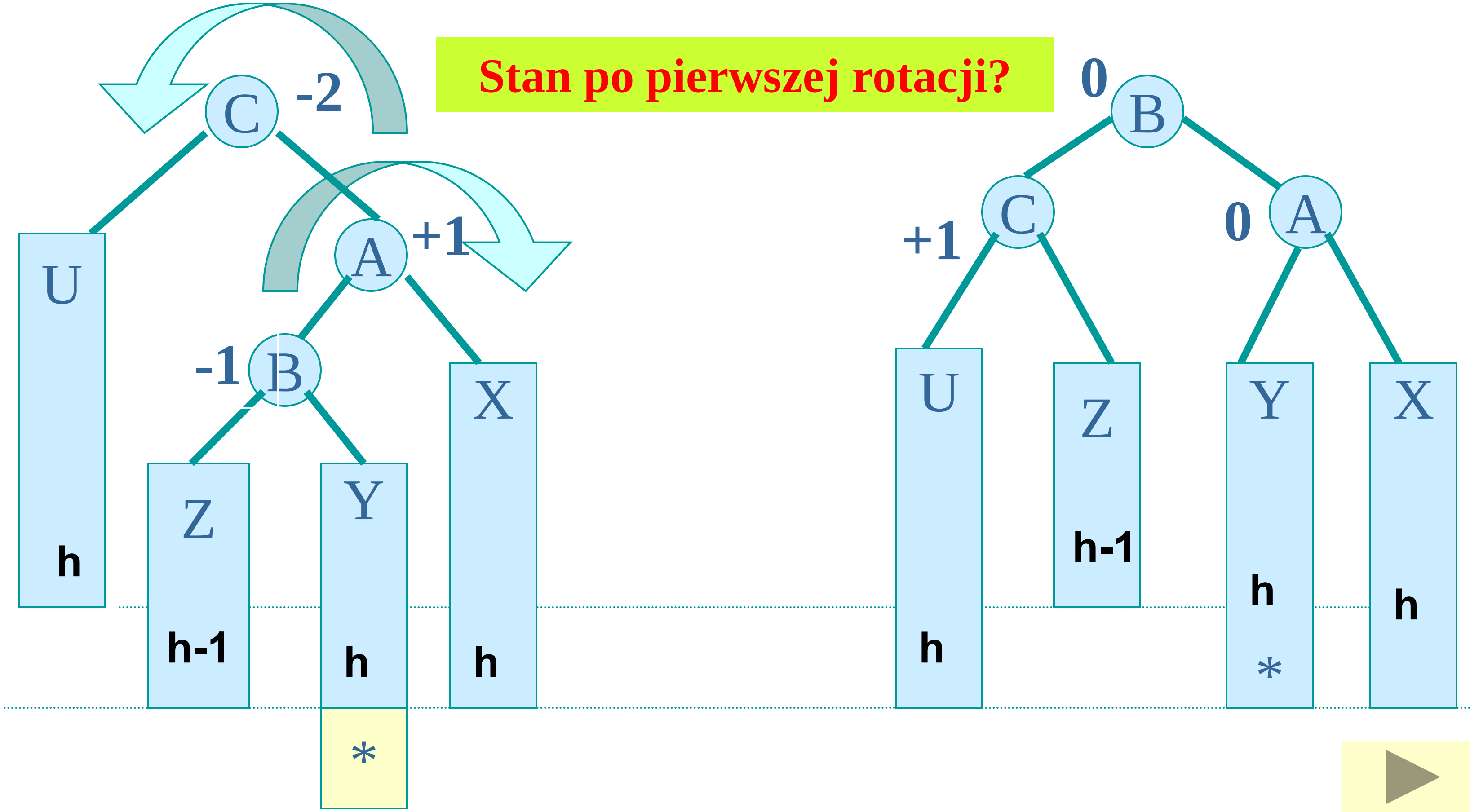
- **Korekta: rotacja lewa węzła B wokół A i prawa węzła B wokół C**



4. Wstawienie węzła do prawego poddrzewa lewego następnika

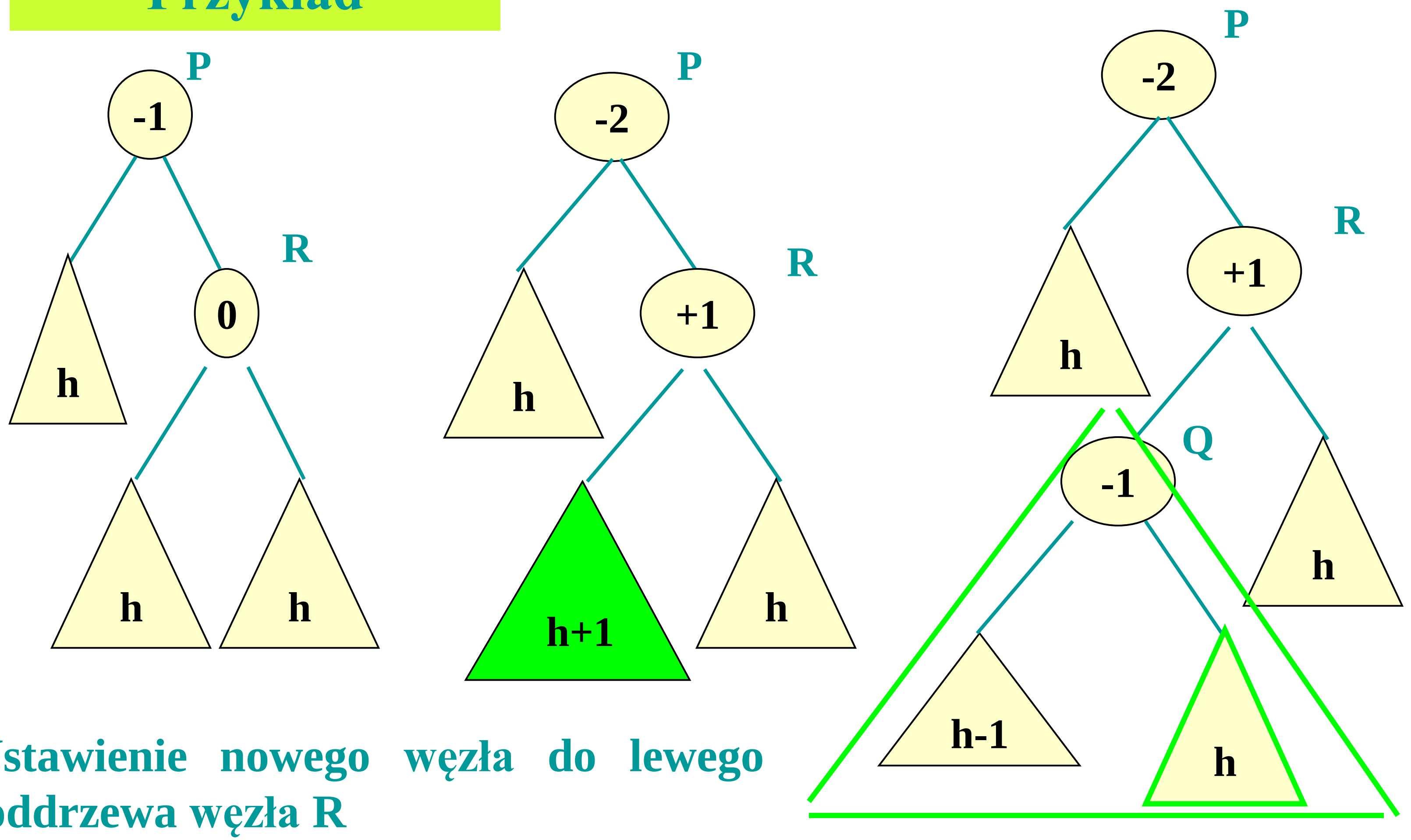
- Korekta: Rotacja prawa węzła B wokół A i lewa węzła B wokół C

Stan po pierwszej rotacji?



Równoważenie drzewa AVL po wstawieniu węzła

Przykład

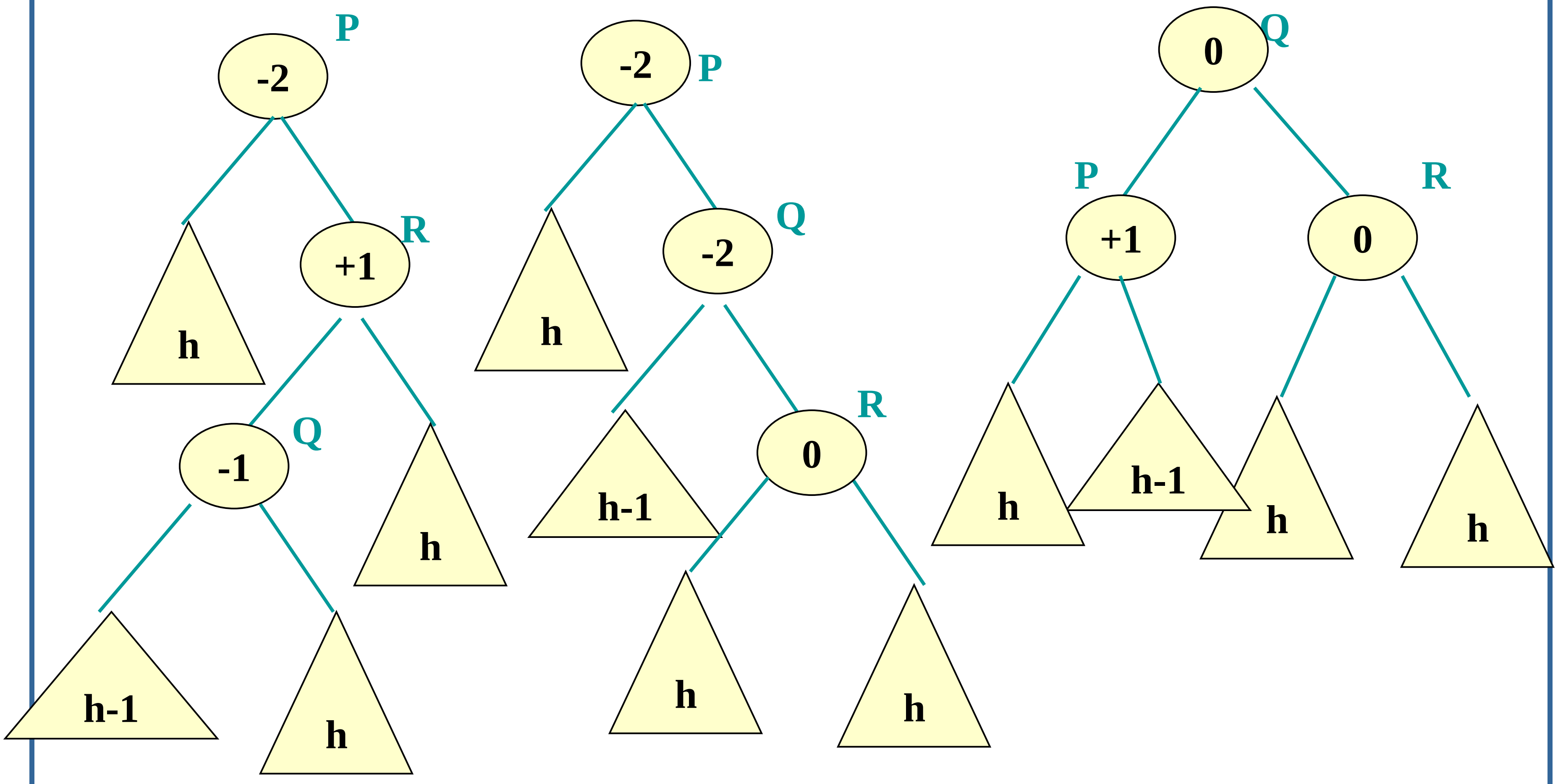


Wstawienie nowego węzła do lewego poddrzewa węzła R

Przypadek? 4

Równoważenie drzewa AVL po wstawieniu węzła

Przykład (cd.)



Przypadek 3: Podwójna rotacja węzła Q: wokół węzła R i wokół węzła P

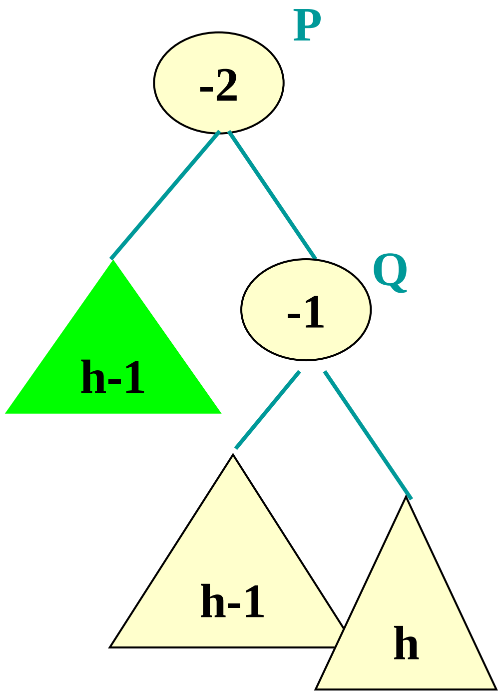
Operacje na drzewie AVL

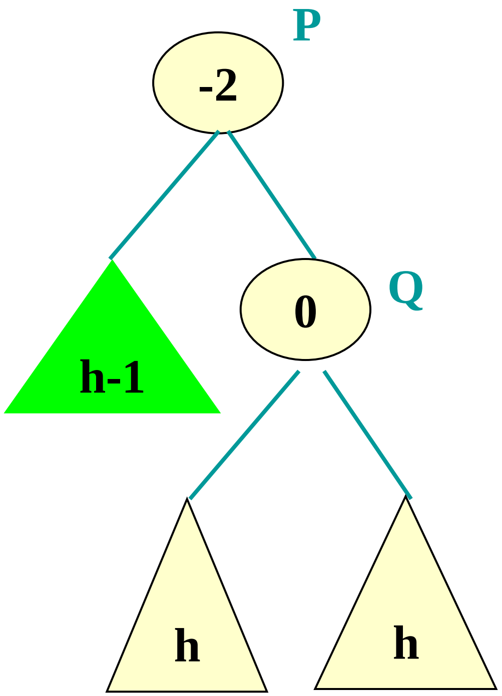
Usuwanie (*Delete*)

- Po usunięciu węzła wracamy po ścieżce do korzenia, aktualizując współczynniki zrównoważenia.
- Jeśli stwierdzamy, że wysokość aktualnie rozważanego poddrzewa nie zmieniła się w stosunku do sytuacji przed wykonaniem *Delete*, kończymy operację.
- Jeśli stwierdzamy, że wysokość poddrzewa spadła (mogła spaść co najwyżej o 1!), to kontynuujemy marsz w górę drzewa.
- Jeśli w wyniku spadku wysokości jednego z poddrzew aktualnie rozważanego węzła został w nim zaburzony warunek AVL, to przywracamy go za pomocą rotacji.
- **Po usunięciu elementu z drzewa AVL może się zdarzyć, że w celu jego zrównoważenia należy wykonać tyle rotacji, ile jest poziomów w drzewie (wysokość drzewa).**

Operacje na drzewie AVL

- Usuwanie - 4 przypadki charakterystyczne:



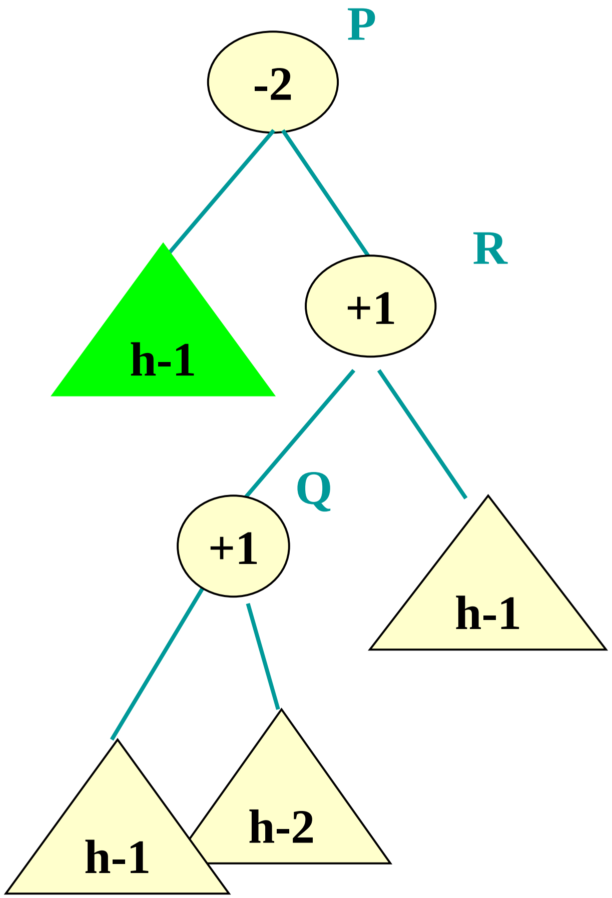


Przypadek 1 (pojedyncza rotacja)

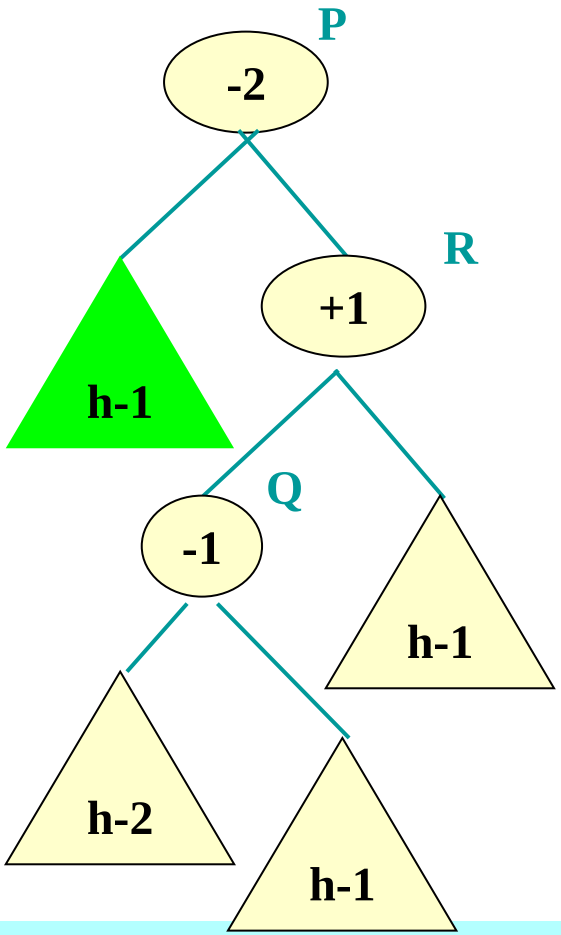
Przypadek 2 (pojedyncza rotacja)

Operacje na drzewie AVL

- Usuwanie - 4 przypadki charakterystyczne:



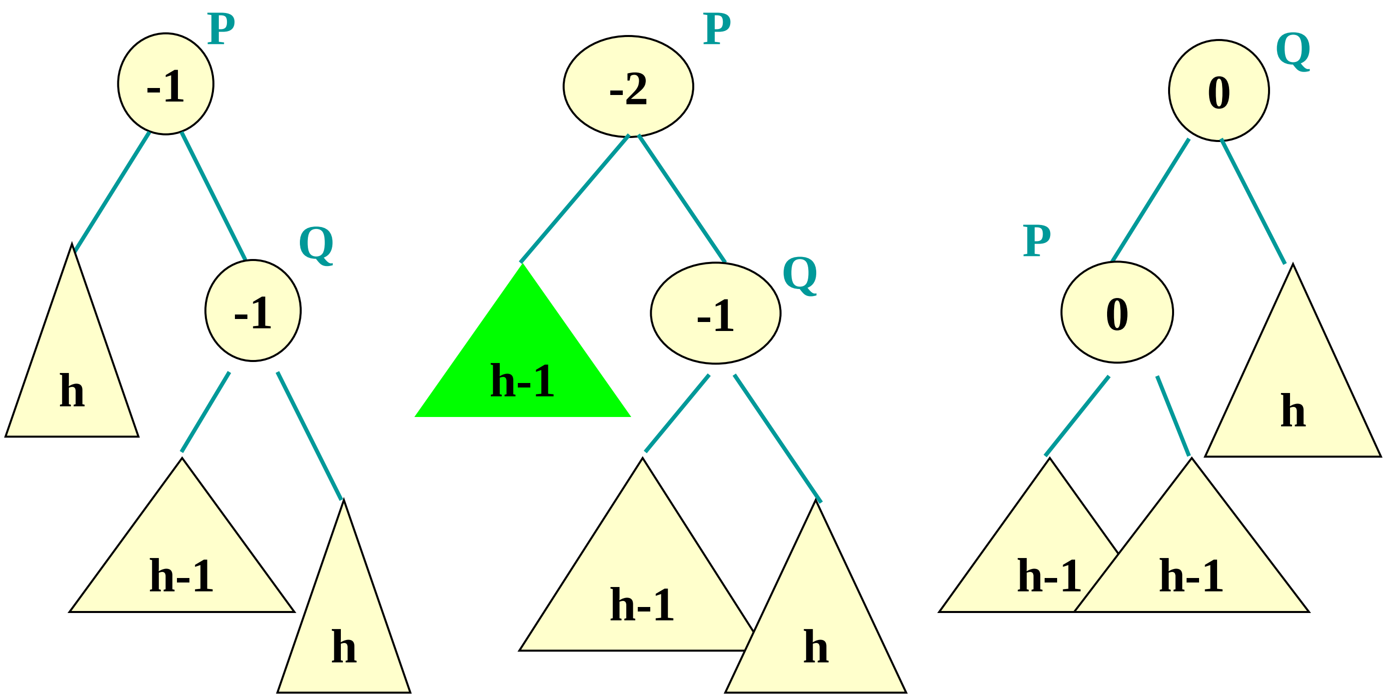
Przypadek 3 (wielokrotna rotacja)



Przypadek 4 (wielokrotna rotacja)

Równoważenie drzewa AVL po usunięciu węzła

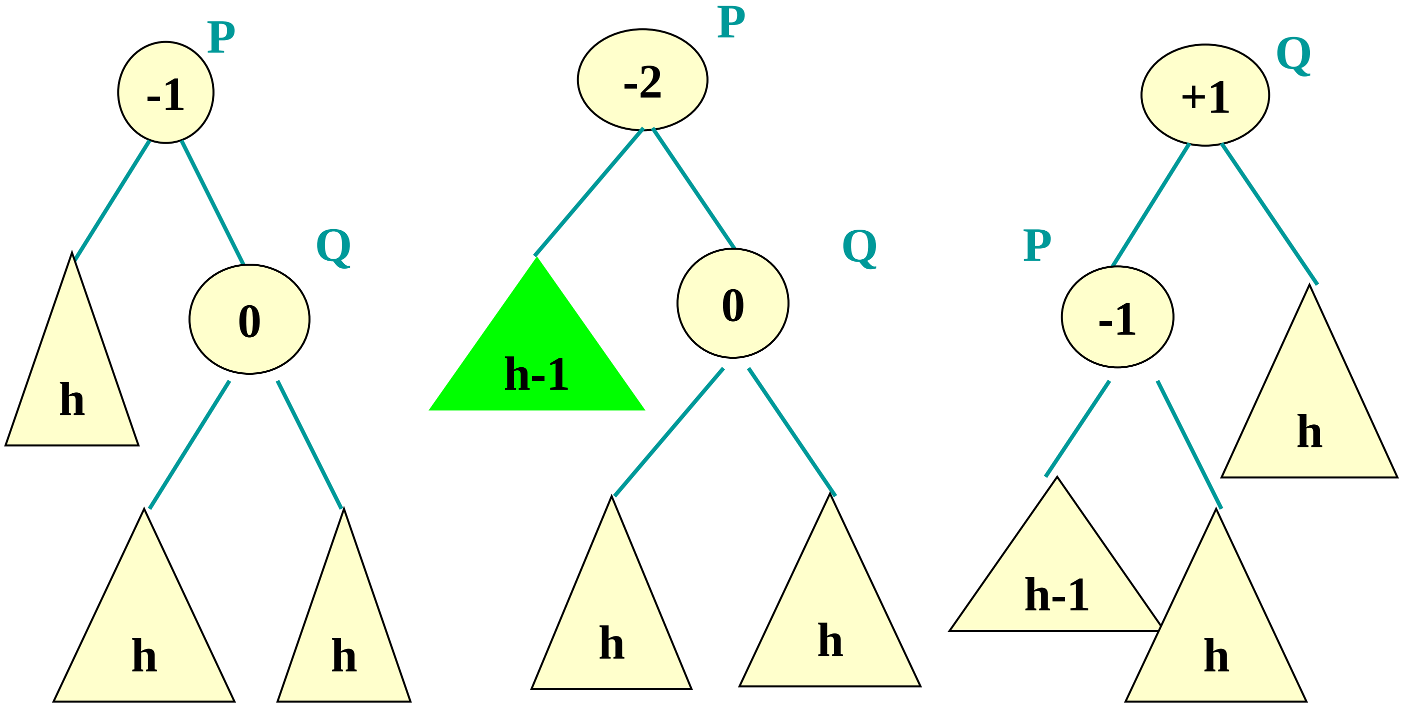
Przykład



Przypadek 1 (pojedyncza rotacja)

Równoważenie drzewa AVL po usunięciu węzła

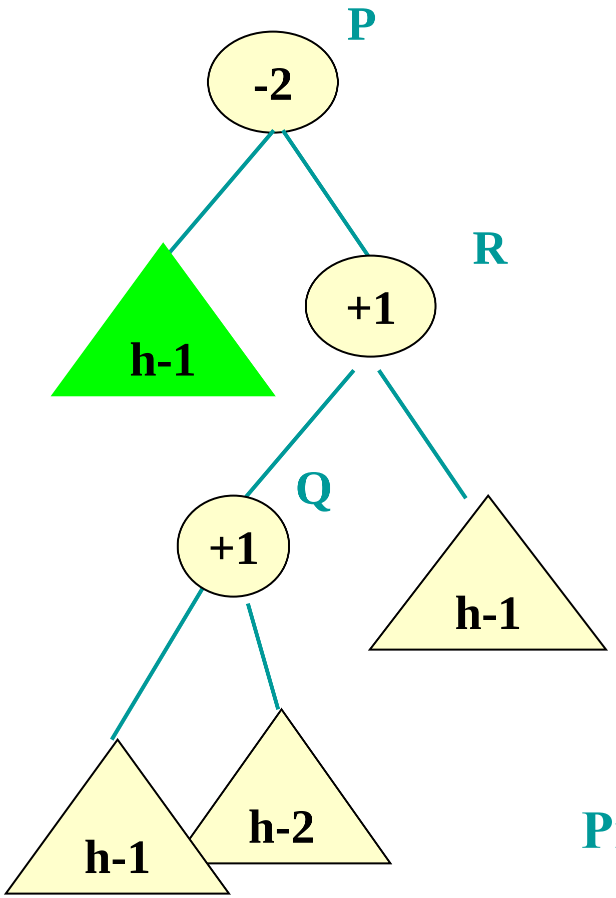
Przykład

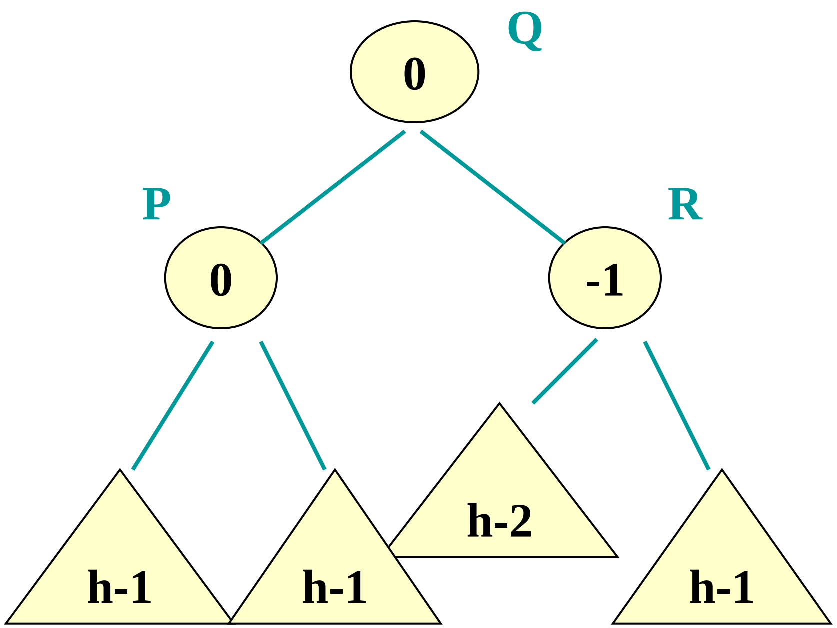


Przypadek 2 (pojedyncza rotacja)

Równoważenie drzewa AVL po usunięciu węzła

Przykład



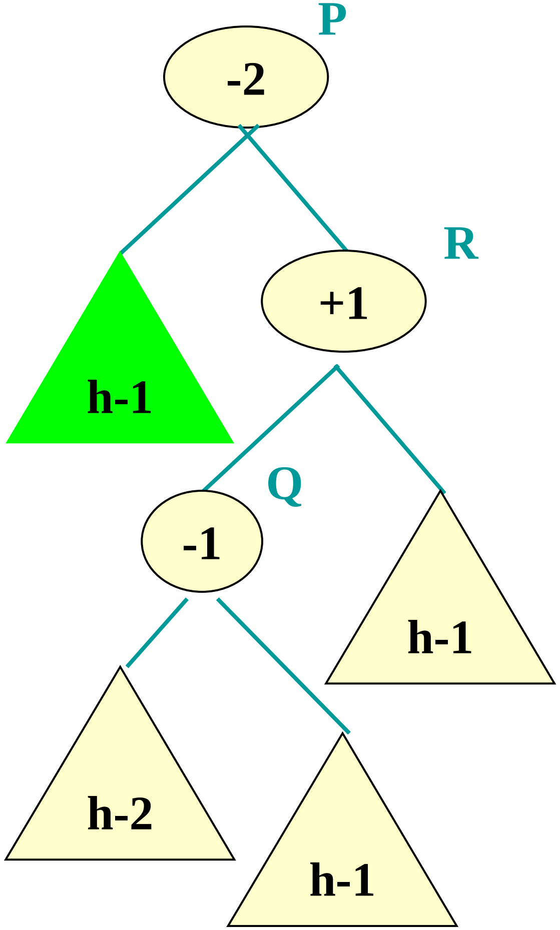


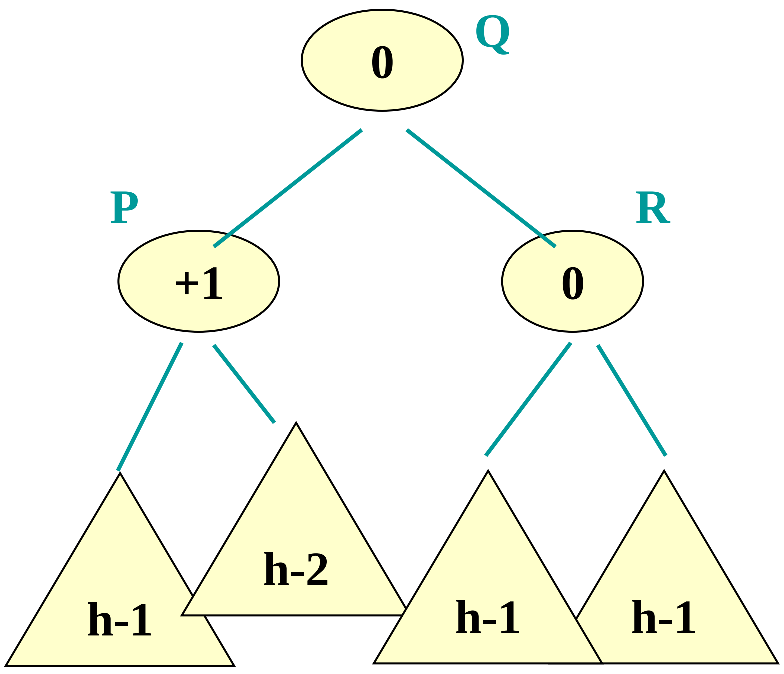
Przypadek 3 (podwójna rotacja)

Jaka?

Równoważenie drzewa AVL po usunięciu węzła

Przykład





Przypadek 4 (podwójna rotacja)

Jaka?

Operacje na drzewie AVL

Koszt operacji usunięcia węzła z drzewa AVL

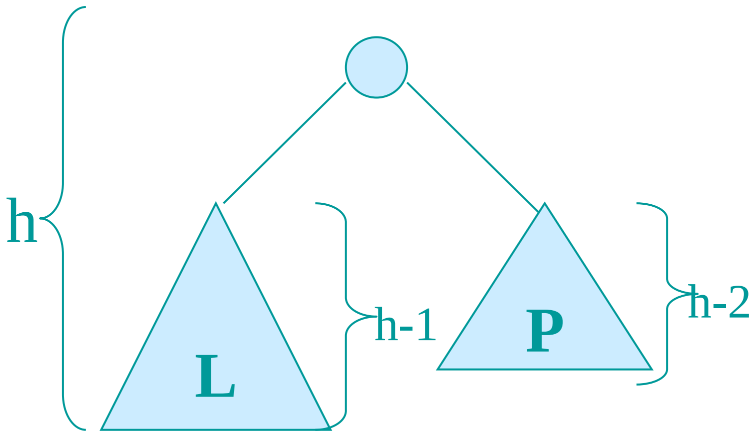
- Rotacje działają w czasie *Θ(1)* - zmieniają się tylko wartości wybranych wskaźników; pozostałe pola węzłów nie są zmieniane;
- Jaka jest minimalna liczba wierzchołków ***n*** w drzewie AVL o wysokości ***h***?

$$n_1 = 1$$

$$n_h = n_{h-1} + n_{h-2} + 1$$

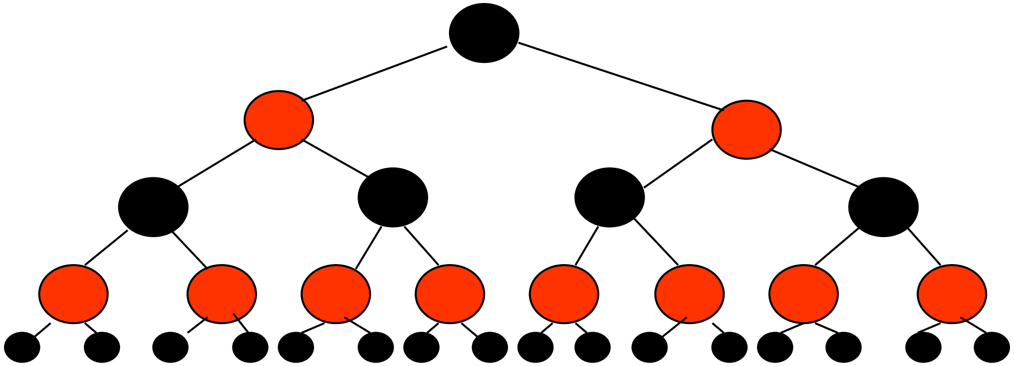
Można udowodnić, że:

$$\mathbf{\lg(n+1) \le h \le 2 \lg n}$$



- Liczba rotacji wynosi zatem co najwyżej **2 lg n**;
- Złożoność obliczeniowa równoważenia drzewa AVL po usunięciu węzła: **Θ(lg n)**

Temat: Drzewa czerwono-czarne



Drzewa czerwono – czarne (RB)

- Drzewo czerwono–czarne (r-b) jest kolejnym rozwinięciem drzewa BST (pierwsza publikacja - 1972 r.);
- Powstało w celu przyspieszenia operacji przetwarzania przez odpowiednią organizację węzłów w drzewie;
- Dzięki zastosowanym metodom równoważenia pesymistyczna złożoność operacji wynosi O(lg n);
- Drzewo r-b powstaje przez rozszerzenie węzła drzewa BST o pole koloru {czerwony, czarny};

Drzewa czerwono – czarne (r-b)

W drzewie czerwono-czarnym:

- wszystkie wartości NULL traktujemy jako <u>zewnętrzne węzły</u> drzewa – <u>liście</u>;
- zwyczajne węzły drzewa r-b (zawierające klucze) nazywamy <u>węzłami wewnętrznymi</u> drzewa;

Drzewa czerwono – czarne (r-b)

Własności drzewa czerwono-czarnego:

(1) Każdy węzeł ma kolor czerwony lub czarny;

(2) Korzeń ma kolor czarny;

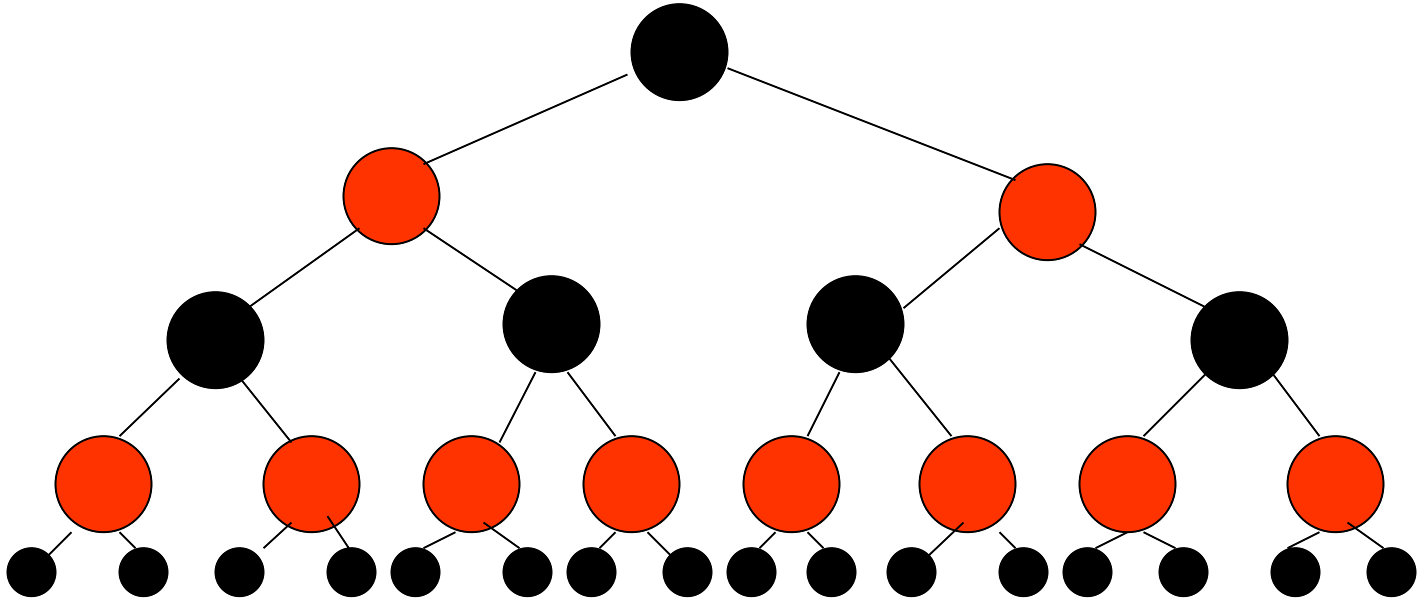
(3) Każdy liść (wskaźnik o wartości NULL) ma kolor czarny;

(4) Jeżeli węzeł jest czerwony, to jego następniki są czarne;

(5) Dla każdego węzła każda droga od węzła do liścia zawiera jednakową liczbę węzłów czarnych;

Drzewa czerwono – czarne

Przykład drzewa czerwono-czarnego:

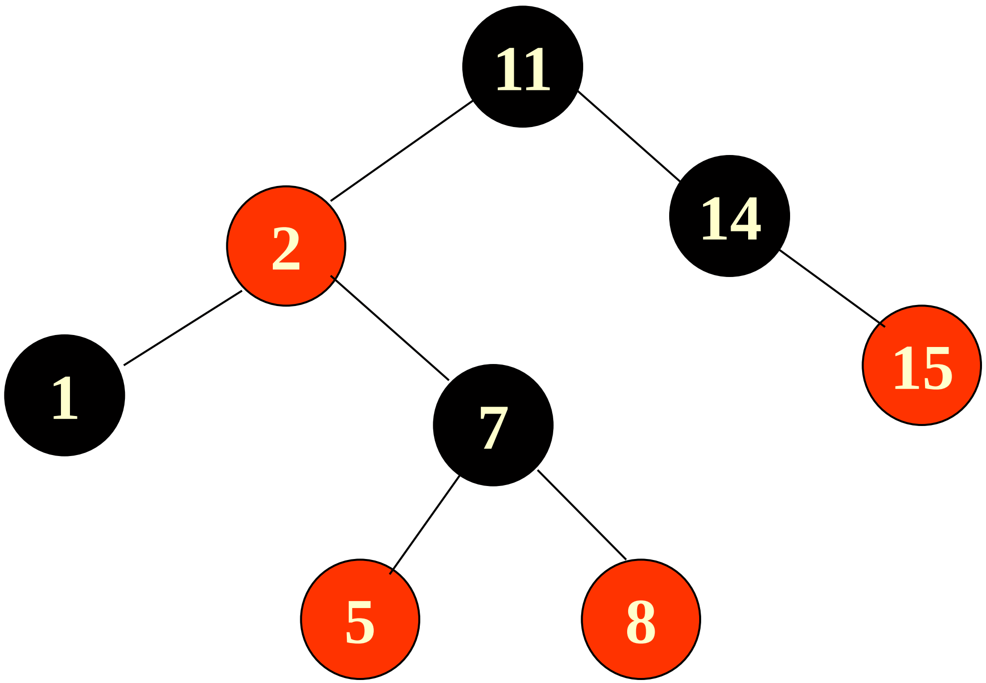


Ile węzłów ma powyższe drzewo?

Odp.: $n_5=2^5-1= 31$

Drzewa czerwono – czarne

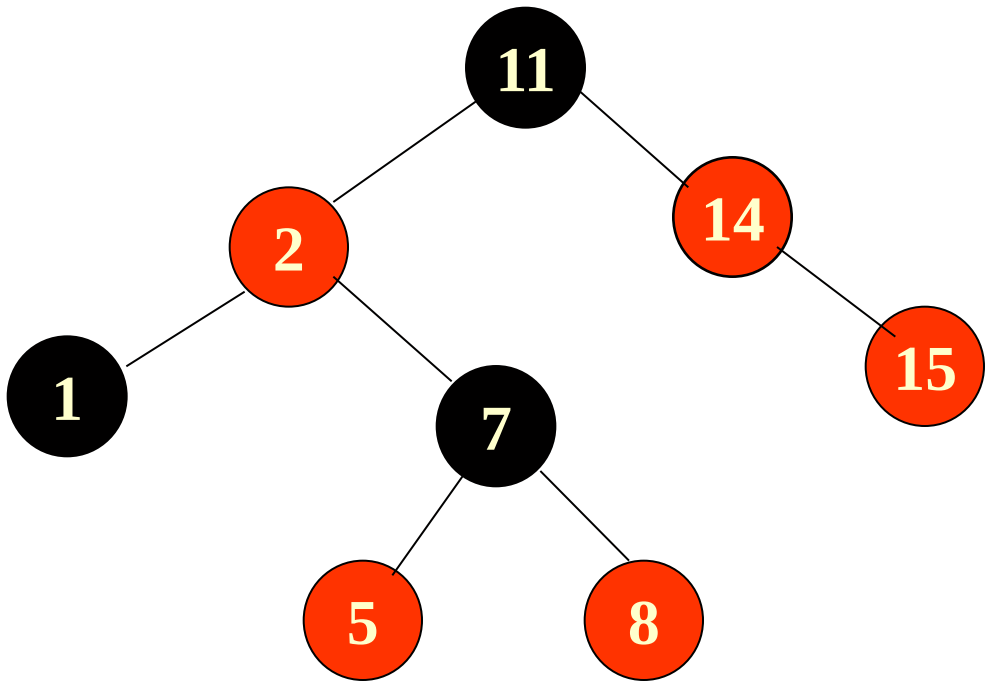
Czy poniższe drzewo jest drzewem czerwono-czarnym? **TAK**



1. Każdy węzeł ma kolor czerwony lub czarny;
2. Korzeń ma kolor czarny;
3. Każdy liść (wskaźnik o wartości NULL) ma kolor czarny;
4. Jeżeli węzeł jest czerwony, to jego następniki są czarne;
5. Dla każdego węzła każda prosta ścieżka od węzła do liścia zawiera jednakową liczbę węzłów czarnych;

Drzewa czerwono – czarne

Czy poniższe drzewo jest drzewem czerwono czarnym? **NIE**



1. Każdy węzeł ma kolor czerwony lub czarny;
2. Korzeń ma kolor czarny;
3. Każdy liść (wskaźnik o wartości NULL) ma kolor czarny;
4. Jeżeli węzeł jest czerwony, to jego następniki są czarne;
5. Dla każdego węzła każda prosta ścieżka od węzła do liścia zawiera jednakową liczbę węzłów czarnych;

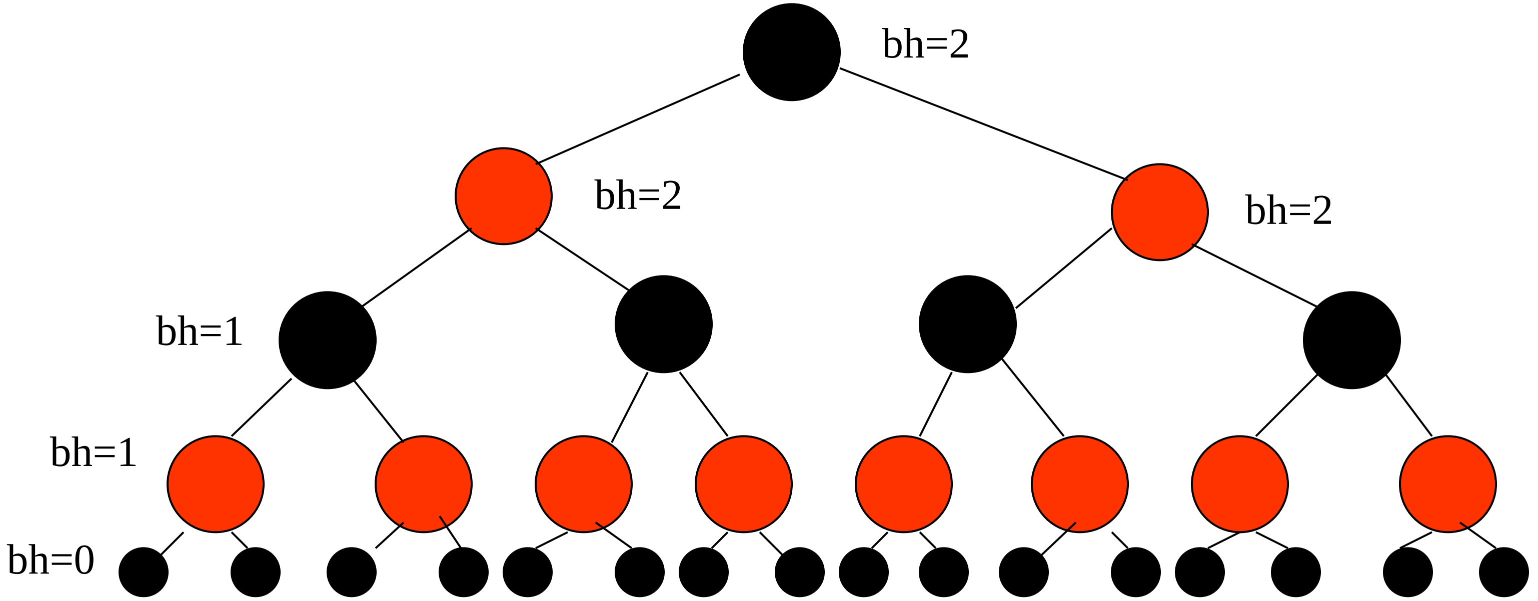
Drzewa czerwono – czarne

- Wysokość węzła: h(x) – wysokość drzewa o korzeniu w x (największa liczba węzłów na drodze z węzła x do liści);

- Czarna wysokość węzła: bh(x) – liczba węzłów czarnych (z uwzględnieniem liścia - NULL) na drodze od tego węzła do liścia (z wykluczeniem tego węzła);

- Czarna wysokość drzewa r-b – czarna wysokość korzenia danego drzewa;

Drzewa czerwono – czarne



Drzewa czerwono – czarne

Lemat 1

Każde poddrzewo r-b o korzeniu w dowolnym węźle *x* posiada co najmniej $n = 2^{bh(x)} - 1$ węzłów wewnętrznych, tzn. $n \geq 2^{bh(x)} - 1$

Lemat 2

Każdy węzeł *x* o wysokości *h(x)* ma czarną wysokość bh(x) spełniającą warunek

$$bh(x) \geq h(x) / 2.$$

Lemat 3

Drzewo czerwono-czarne o *n* węzłach wewnętrznych ma wysokość *h* nie większą niż $2\ lg(n+1)$, tzn.:

$$h \leq 2\ lg(n+1)$$

np.:	**dla n=7**	$h \leq 6$
	dla n=1023	$h \leq 2 \log_2 1024 = 20$
	dla n=4095	$h \leq 2 \log_2 4096 = 24$
	dla n=16383	$h \leq 2 \log_2 16384 = 28$

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- **Wyszukiwanie**

  Ponieważ struktura drzewa nie ulega zmianie operacja wyszukiwania realizowana jest tak samo jak w zwykłym drzewie BST

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- **Wstawianie**
  1. Wstaw węzeł we właściwe miejsce (z zachowaniem własności drzewa BST);
  2. Pokoloruj węzeł na czerwono (***Z*** *wskazuje na nowy węzeł*);
  3. Jeśli trzeba wykonaj korektę drzewa, w zależności od przypadku (jednego z trzech nietrywialnych), który wystąpił.
- Przywracanie własności drzewa czerwono-czarnego następuje tylko w sytuacji, gdy poprzednik dodanego węzła jest czerwony.

Wstawianie

- **Możliwe przypadki:**

Przypadek 0

Z jest korzeniem → przekoloruj wstawiony węzeł na czarno;

Przypadek 1

Zarówno poprzednik (ojciec) jak i bezpośredni sąsiad poprzednika (wuj) są czerwone;

Przypadek 2

Poprzednik (ojciec) jest czerwony a wuj jest czarny;
ponadto Z i jego ojciec są następnikami po przeciwnych stronach,
tj. Z jest prawym następnikiem podczas gdy ojciec lewym lub odwrotnie;

Przypadek 3

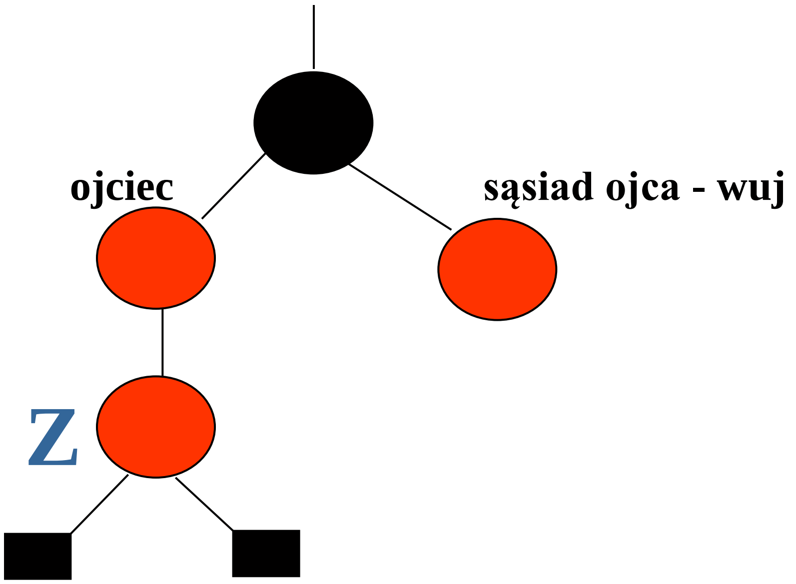
Poprzednik (ojciec) jest czerwony a wuj jest czarny;
ponadto Z i jego ojciec są następnikami po tej samej stronie (prawymi lub lewymi);

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- **Wstawianie**

  Przypadek 1

  Zarówno poprzednik (ojciec) jak i bezpośredni sąsiad poprzednika (wuj) są czerwone;

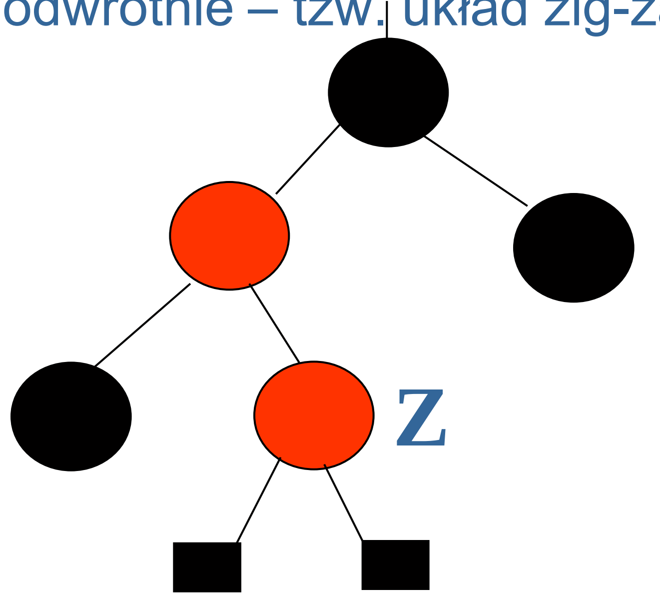


Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- **Wstawianie**

  Przypadek 2

  Poprzednik (ojciec) jest czerwony a wuj jest czarny; ponadto Z i jego ojciec są następnikami po przeciwnych stronach, tj. Z jest prawym następnikiem podczas gdy ojciec lewym lub odwrotnie – tzw. układ zig-zag;

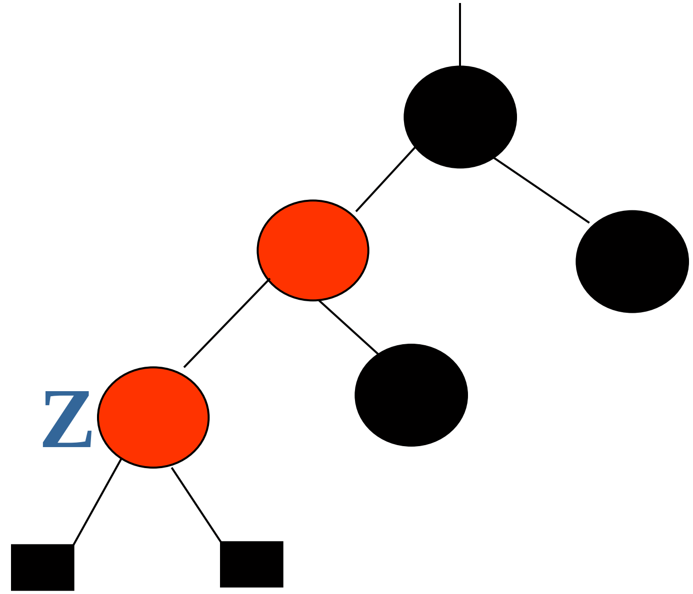


Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- **Wstawianie**

  Przypadek 3

  Poprzednik (ojciec) jest czerwony a wuj jest czarny; ponadto Z i jego ojciec są następnikami po tej samej stronie (prawymi lub lewymi) – tzw. układ zig-zig

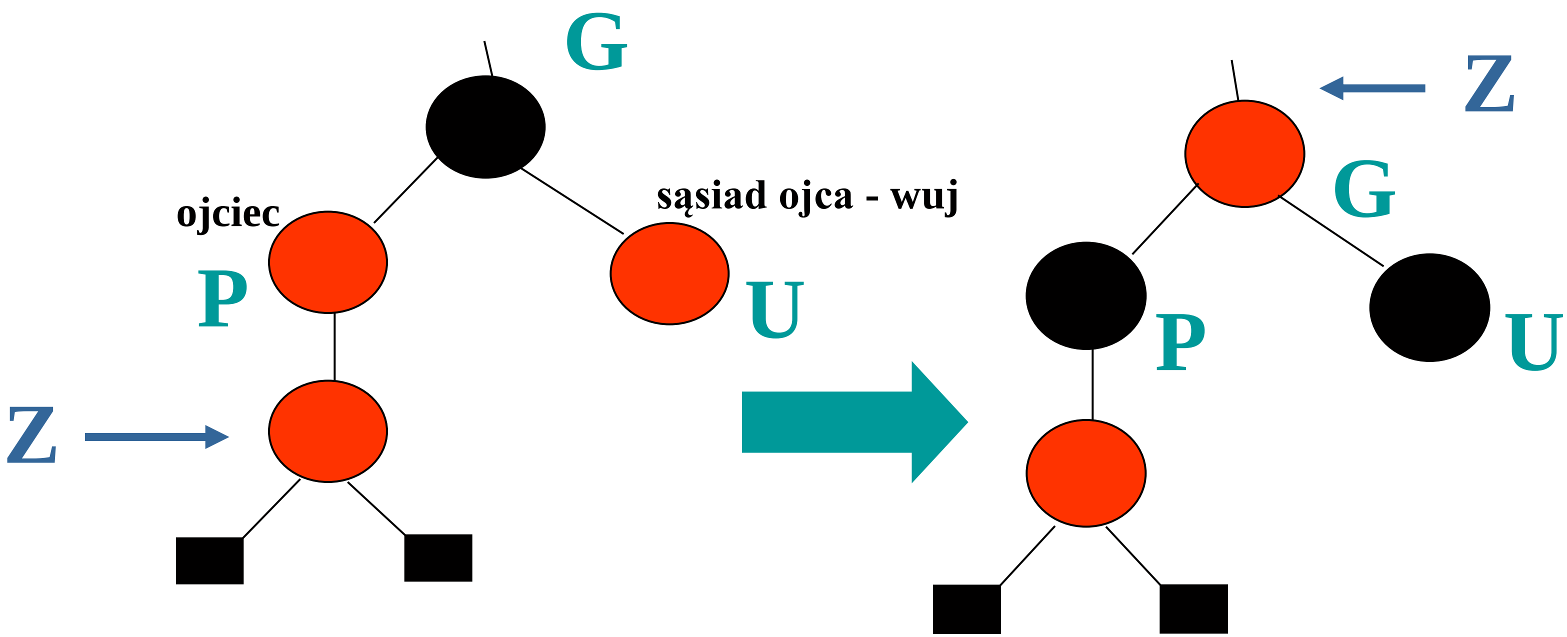


Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Wstawianie - przypadek 1

Zarówno poprzednik (ojciec) jak i bezpośredni sąsiad poprzednika (wuj) są czerwone;

1. **koloruj poprzednik (ojca) i jego sąsiada (wuja) na czarno;**
2. **koloruj poprzednika ojca (dziadka) na czerwono;**
3. **ustaw Z na poprzednika ojca (dziadka);**

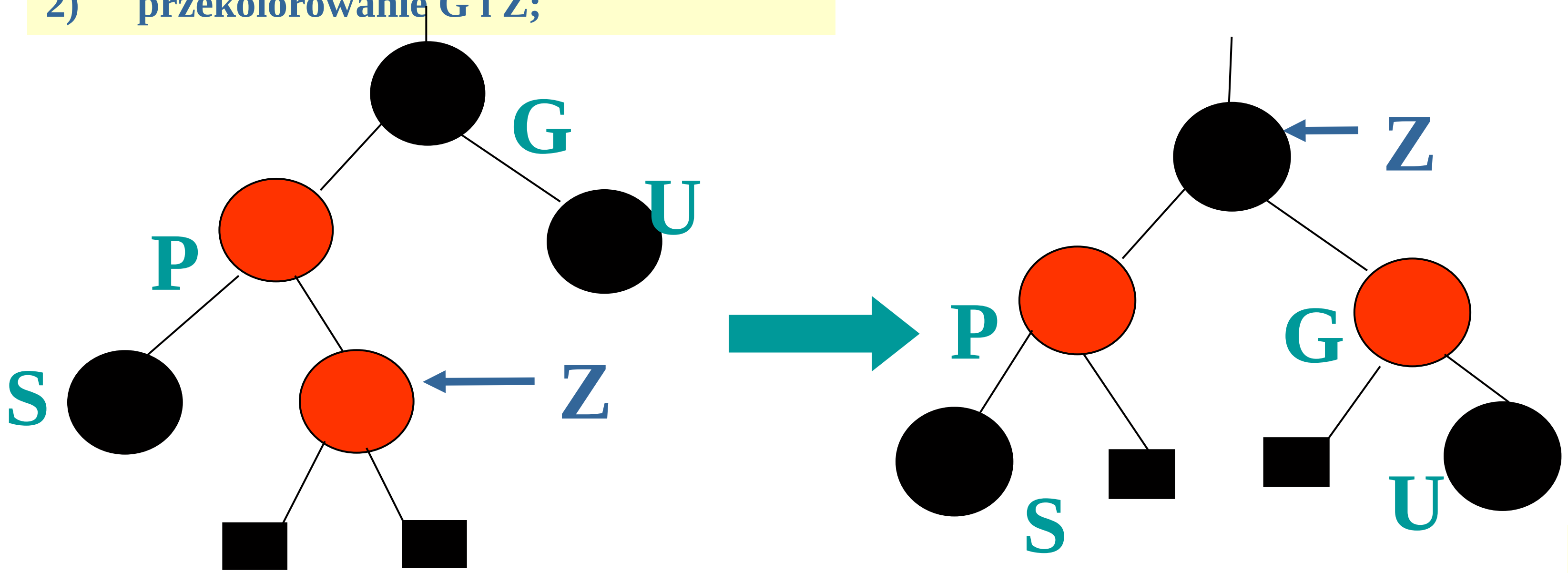


Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Wstawianie - przypadek 2

Poprzednik (ojciec) jest czerwony, a wuj jest czarny;
ponadto X jest prawym następnikiem a ojciec lewym lub odwrotnie (ZIG-ZAG);

1) podwójna rotacja:
- lewa: Z wokół P,
- prawa: Z wokół G;
2) przekolorowanie G i Z;

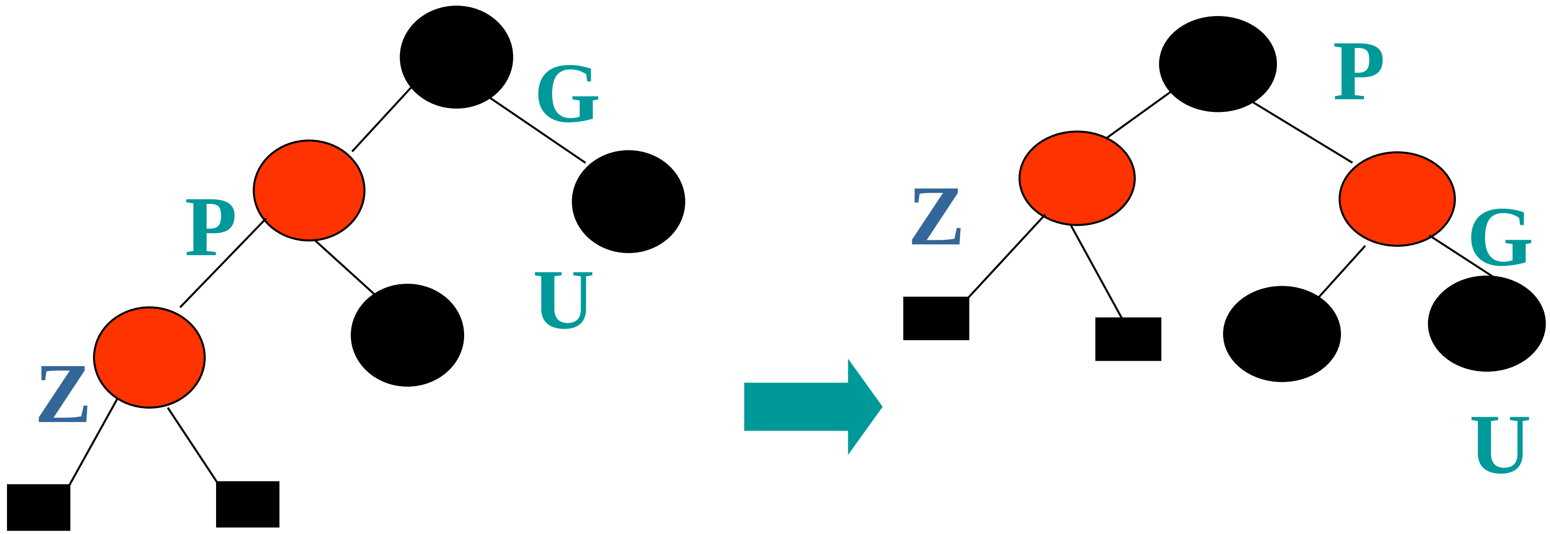


Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Wstawianie - przypadek 3

Poprzednik (ojciec) jest czerwony a wuj jest czarny;
ponadto X i jego ojciec są następnikami po tej samej stronie (ZIG-ZIG) (prawymi lub lewymi);

1) rotacja P wokół G;
2) przekolorowanie P i G;

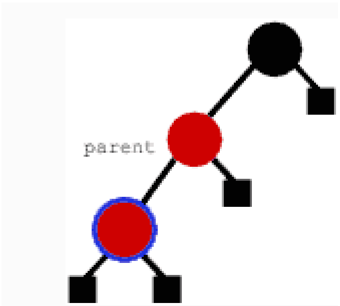


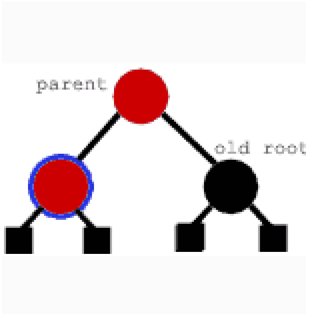
Uwaga: Ten przypadek zachodzi po pierwszej rotacji w Przypadku 2

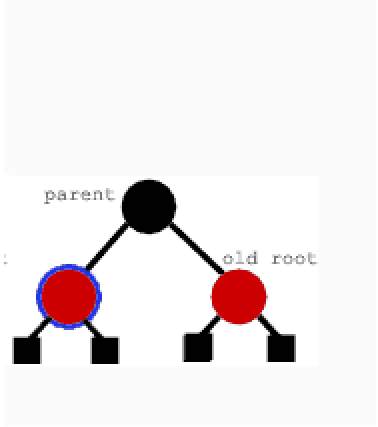
Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład – wstawienie węzła

Przypadek 3



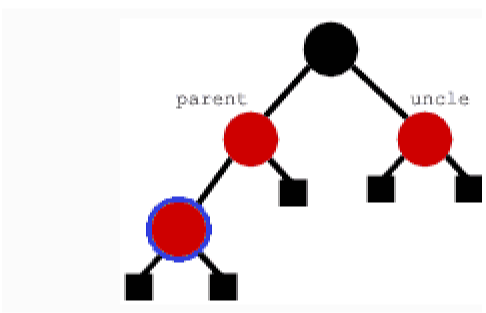




Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład – wstawienie węzła

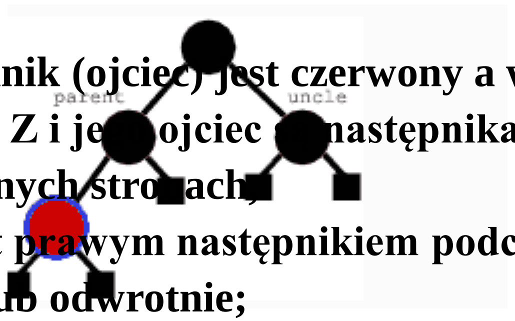
Przypadek?1



<u>Przypadek 1</u>

Zarówno poprzednik (ojciec) jak i bezpośredni sąsiad poprzednika (wuj) są czerwone;

<u>Przypadek 2</u>



Poprzednik (ojciec) jest czerwony a wuj jest czarny; ponadto Z i jego ojciec są następnikami po przeciwnych stronach;
tj. Z jest prawym następnikiem podczas gdy ojciec lewym lub odwrotnie;

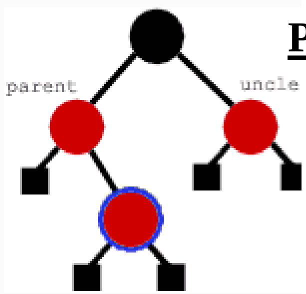
<u>Przypadek 3</u>

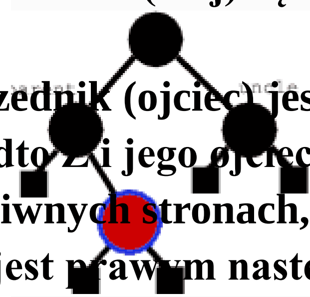
Poprzednik (ojciec) jest czerwony a wuj jest czarny; ponadto Z i jego ojciec są następnikami po tej samej stronie (prawymi
lub lewymi);

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład – wstawienie węzła

Przypadek 1





<u>Przypadek 1</u>

Zarówno poprzednik (ojciec) jak i bezpośredni sąsiad poprzednika (wuj) są czerwone;

<u>Przypadek 2</u>

Poprzednik (ojciec) jest czerwony a wuj jest czarny; ponadto Z i jego ojciec są następnikami po przeciwnych stronach,
tj. Z jest prawym następnikiem podczas gdy ojciec lewym lub odwrotnie;

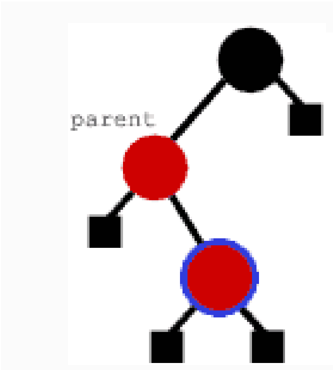
<u>Przypadek 3</u>

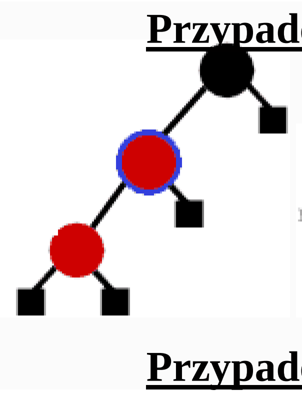
Poprzednik (ojciec) jest czerwony a wuj jest czarny; ponadto Z i jego ojciec są następnikami po tej samej stronie (prawymi
lub lewymi);

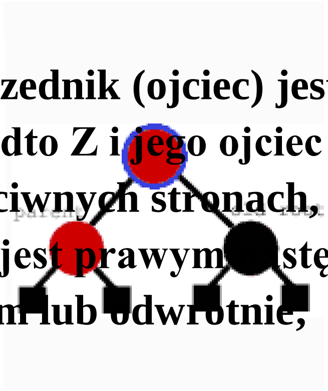
Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład – wstawienie węzła

Przypadek 2







<u>Przypadek 1</u>

Zarówno poprzednik (ojciec) jak i bezpośredni sąsiad poprzednika (wuj) są czerwone;

<u>Przypadek 2</u>

Poprzednik (ojciec) jest czerwony a wuj jest czarny; ponadto Z i jego ojciec są następnikami po przeciwnych stronach, tj. Z jest prawym następnikiem podczas gdy ojciec lewym lub odwrotnie;

<u>Przypadek 3</u>

Poprzednik (ojciec) jest czerwony a wuj jest czarny; ponadto Z i jego ojciec są następnikami po tej samej stronie (prawymi lub lewymi);

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Uwaga:

Przedstawione dalej algorytmy rozpatrywanych operacji na drzewach czerwono-czarnych oparte są na założeniu, ze każdy węzeł drzewa ma następującą strukturę:

- pole ***key***
- pole ***color***
- pole ***left*** // wskaźnik na lewy następnik
- pole ***right*** // wskaźnik na prawy następnik
- pole ***p*** // wskaźnik na poprzednika

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- Wstawianie „*Bottom Up*”

```
RB-INSERT(T, z)          //   z - wskaźnik na dołączany węzeł
y ← nil[T]
x ← root[T]
while x ≠ nil[T]
   do y ← x
      if key[z] < key[x]
         then x ← left[x]
         else x ← right[x]
```

lokalizacja miejsca wstawienia węzła
(nowy węzeł będzie wstawiony po węźle y)

```
p[z] ← y
if y = nil[T]
   then root[T] ← z
   else if key[z] < key[y]
           then left[y] ← z
           else right[y] ← z
```

wstawienie węzła z

```
left[z] ← nil[T]
right[z] ← nil[T]
color[z] ← RED
RB-INSERT-FIXUP(T, z)          //   wywołanie funkcji korekty
```

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- Algorytm funkcji korekty *RB-INSERT-FIXUP(T, z)*:

```
while color[p[z]] = RED
    do if p[z] = left[p[p[z]]]
          then y ← right[p[p[z]]]
               if color[y] = RED
                  then color[p[z]] ← BLACK
                       color[y] ← BLACK
                       color[p[p[z]]] ← RED
                       z ← p[p[z]]
                  else if z = right[p[z]]
                          then z ← p[z]
                               LEFT-ROTATE(T, z)
                       color[p[z]] ← BLACK
                       color[p[p[z]]] ← RED
                       RIGHT-ROTATE(T, p[p[z]])
          else (same as then clause
                       with "right" and "left" exchanged)
color[root[T]] ← BLACK
```

poprzednik z (ojciec) jest czerwony

y wskazuje na sąsiada ojca (wuja)

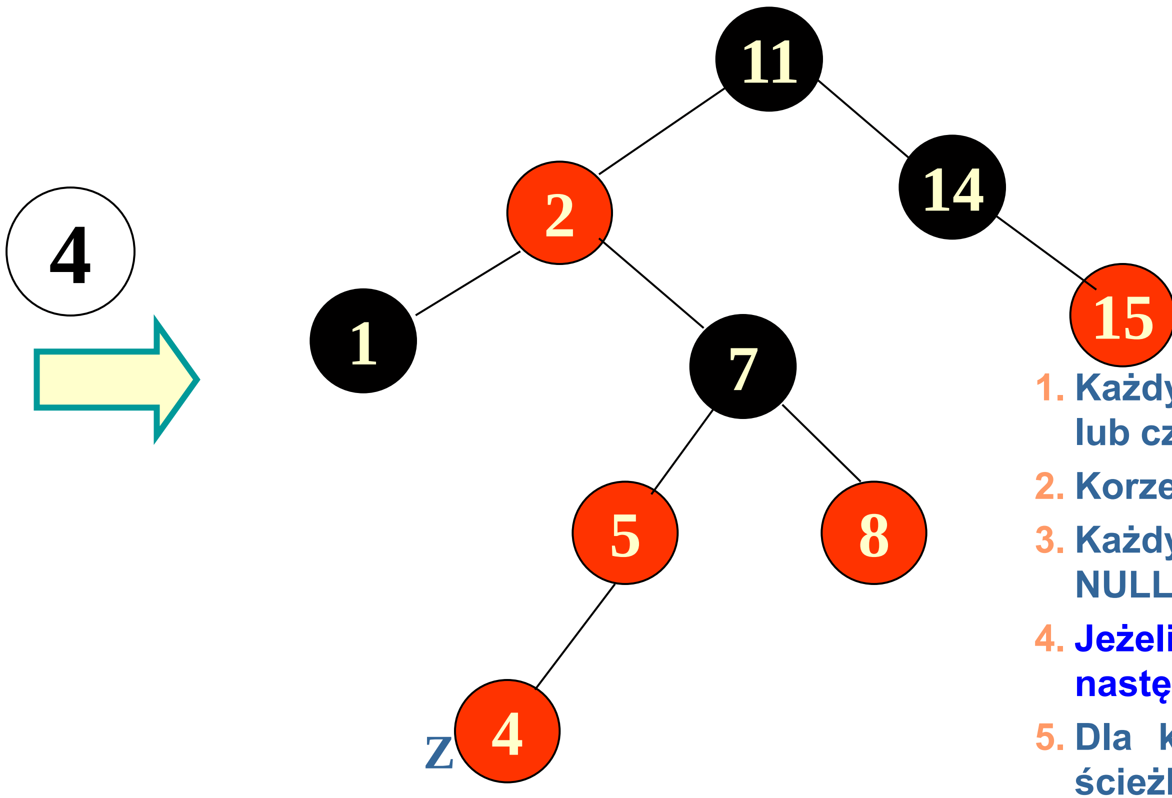
Przypadek 1

Przypadek 2

Przypadek 3

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- Przykład – wstawienie węzła z wartością 4

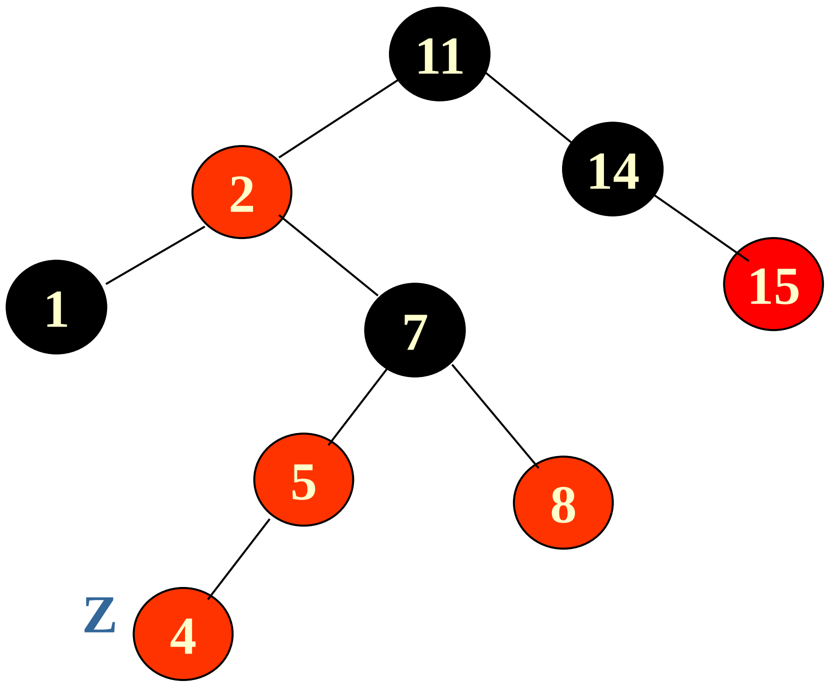


1. Każdy węzeł ma kolor czerwony lub czarny;
2. Korzeń ma kolor czarny;
3. Każdy liść (wskaźnik o wartości NULL) ma kolor czarny;
4. **Jeżeli węzeł jest czerwony, to jego następniki są czarne;**
5. Dla każdego węzła każda prosta ścieżka od węzła do liścia zawiera jednakową liczbę węzłów czarnych.

Czy otrzymane drzewo jest drzewem r-b?

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- **Przykład (cd.)**



Identyfikacja przypadku
(po wstawieniu węzła z kluczem *4*):

- Zarówno poprzednik (ojciec) jak i bezpośredni sąsiad poprzednika (wuj) są czerwone;
- Zachodzi **Przypadek 1**;

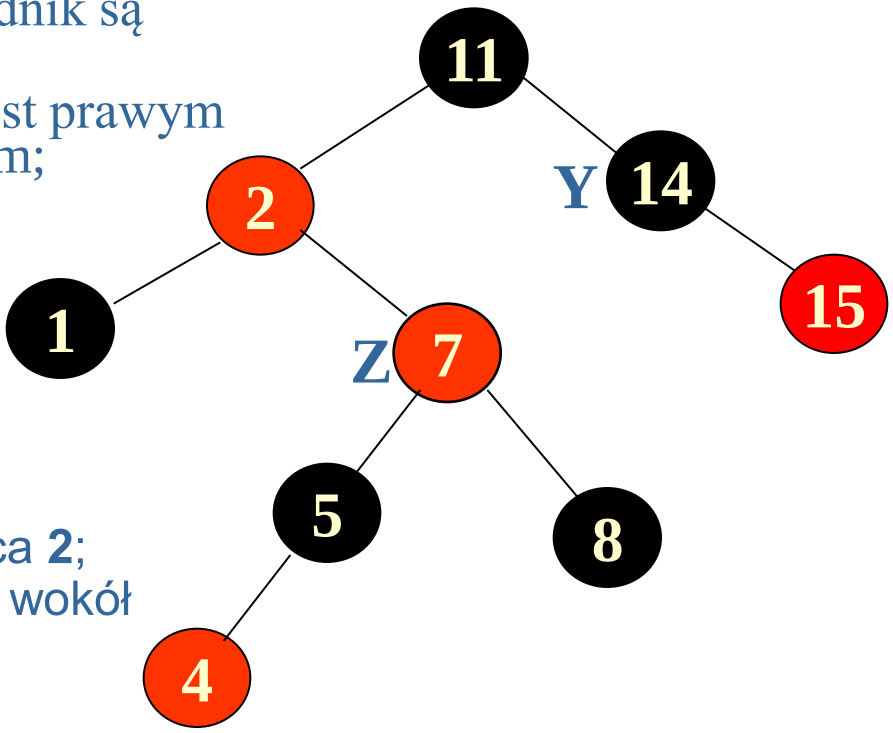
Korekta:

- **koloruj poprzednik (ojca) i jego sąsiada (wuja) na czarno;**
- **koloruj poprzednika ojca (dziadka) na czerwono;**
- **ustaw Z na poprzednika ojca (dziadka);**

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład (cd.)

- Ponownie węzeł Z i jego poprzednik są koloru czerwonego;
- Wuj Y węzła Z jest czarny a Z jest prawym synem, podczas gdy ojciec lewym;
- Zachodzi - **Przypadek 2**;



Korekta:

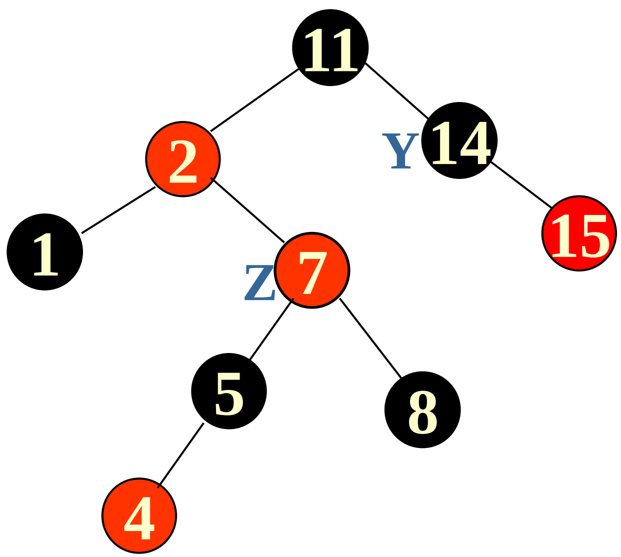
1. wykonaj rotację Z w lewo wokół ojca **2**;
2. wykonaj rotację Z w prawo wokół dziadka ***11***;
3. koloruj dziadka ***11*** na czerwono;
4. koloruj Z na czarno;

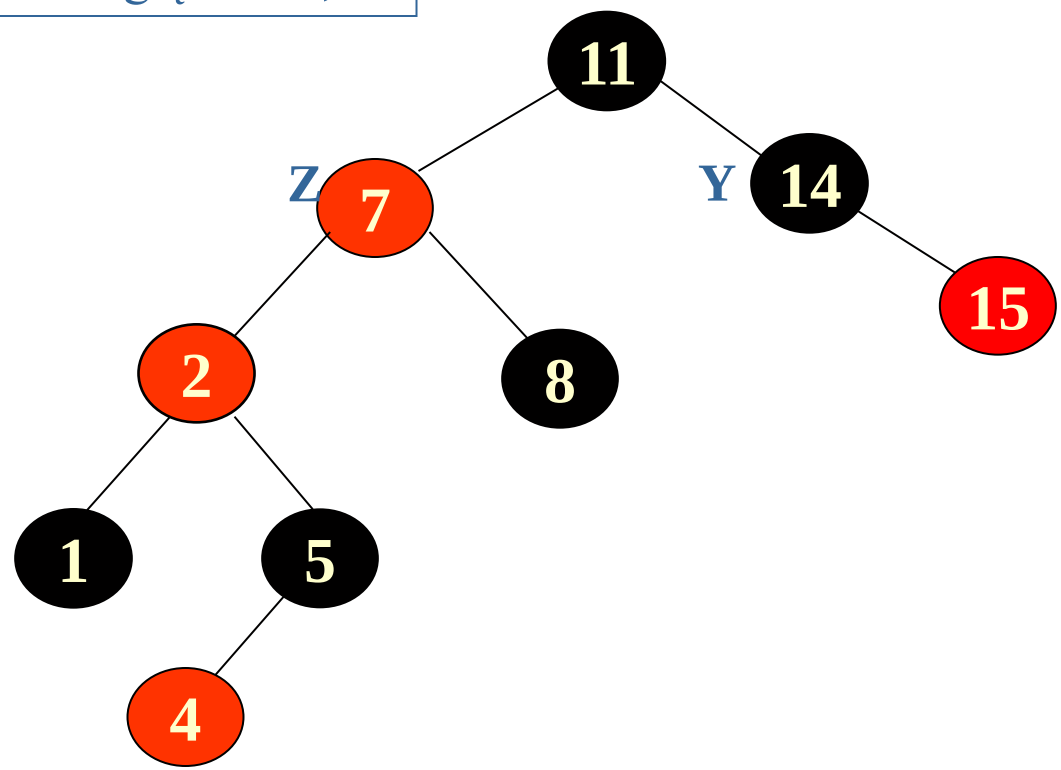
Jak wygląda drzewo po wykonaniu tych operacji?

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład (cd.)

- Po wykonaniu lewej rotacji Z względem 2;

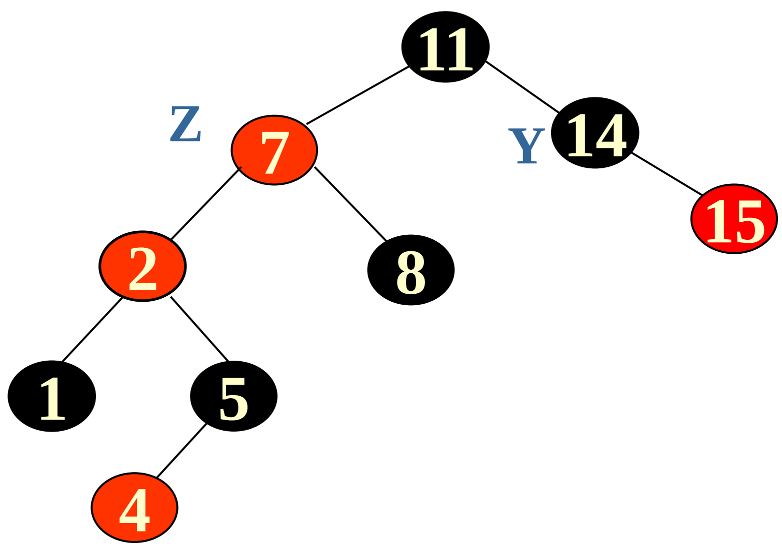


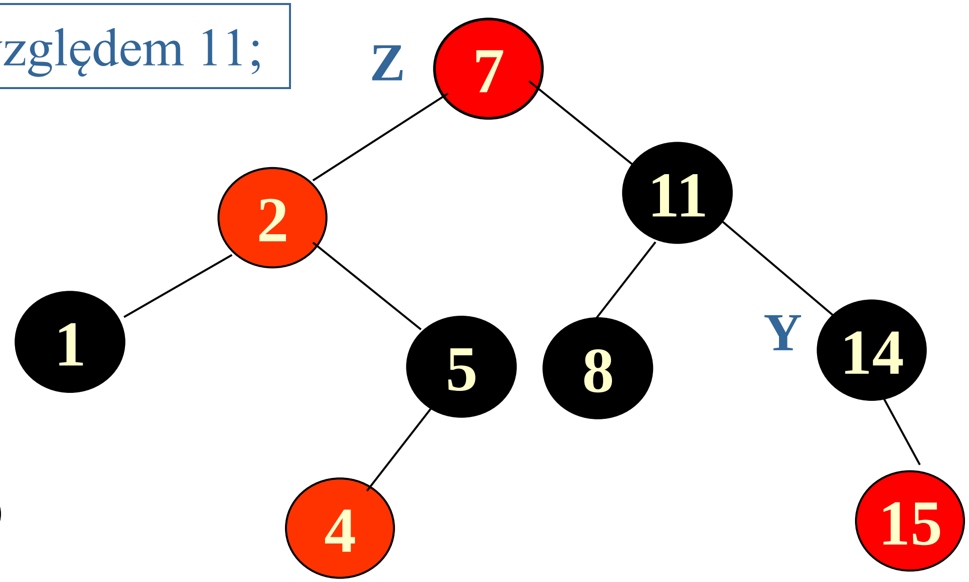


Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład (cd.)

- Po wykonaniu prawej rotacji Z względem 11;

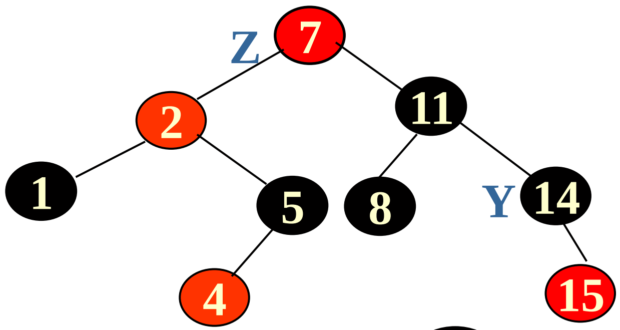


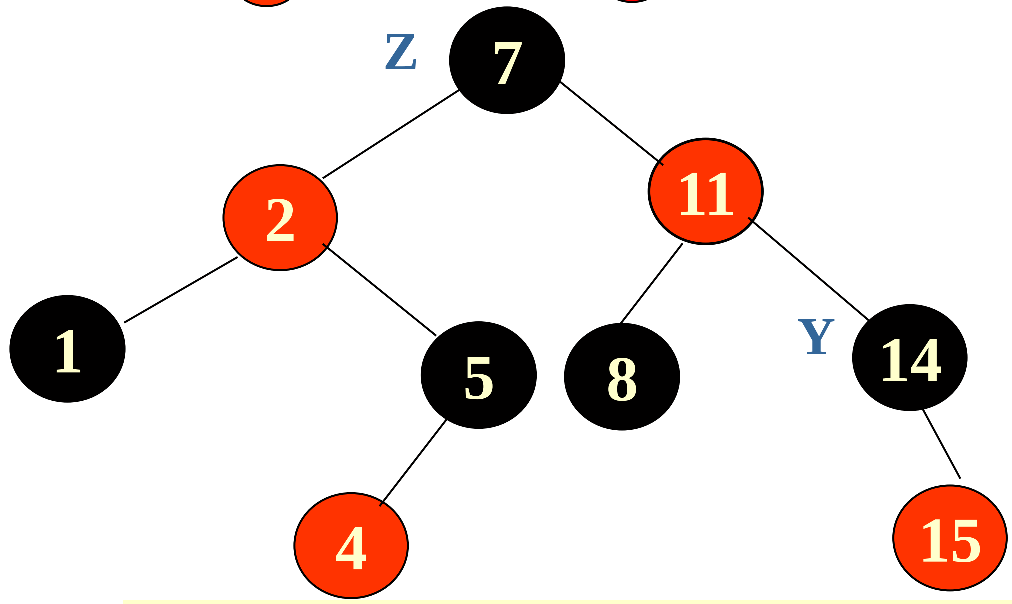


Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład (cd.)

- Po przekolorowaniu Z i 11;





1. **Każdy węzeł ma kolor czerwony lub czarny;**
2. **Korzeń ma kolor czarny;**
3. **Każdy liść (wskaźnik o wartości NULL) ma kolor czarny;**
4. **Jeżeli węzeł jest czerwony, to jego następniki są czarne;**
5. **Dla każdego węzła każda prosta ścieżka od węzła do liścia zawiera jednakową liczbę węzłów czarnych;**

Czy rzeczywiście otrzymaliśmy drzewo czerwono-czarne?

Operacje na drzewie czerwono–czarnym

- **Usuwanie**
  - Jakie zmiany wywołuje usunięcie węzła z drzewa?
  - Czerwonego:
    - Czarne wysokości węzłów nie zmieniają się;
    - Ponadto usuwany węzeł nie mógł być korzeniem (czerwony węzeł nie mógł być korzeniem!);
  - Czarnego:
    - Ścieżki na których leżał usunięty węzeł mają o jeden czarny węzeł mniej: złamanie założeń 4 i 5;
    - Jeżeli usuwany węzeł był korzeniem, może zastąpić go węzeł koloru czerwonego: złamanie zasady 2;

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- **Usuwanie *„Bottom-Up”***
  1. **Usuwanie przebiega analogicznie do operacji w drzewie BST;**
  2. **Korekta po usunięciu węzła czarnego.**

  - ***Założenia:***
    - **Y – węzeł usuwany (fizycznie) w konsekwencji żądania usunięcia wskazanej wartości;**
    - **X – węzeł, który zastępuje Y;**
    - **P – poprzednik węzła Y;**
    - **S – sąsiad (krewny) węzła X;**

S - sibling (brat lub siostra)

  - **Przypadki:**

    (1) S jest koloru czerwonego;

    (2) S jest koloru czarnego oraz ma obydwa następniki czarne;

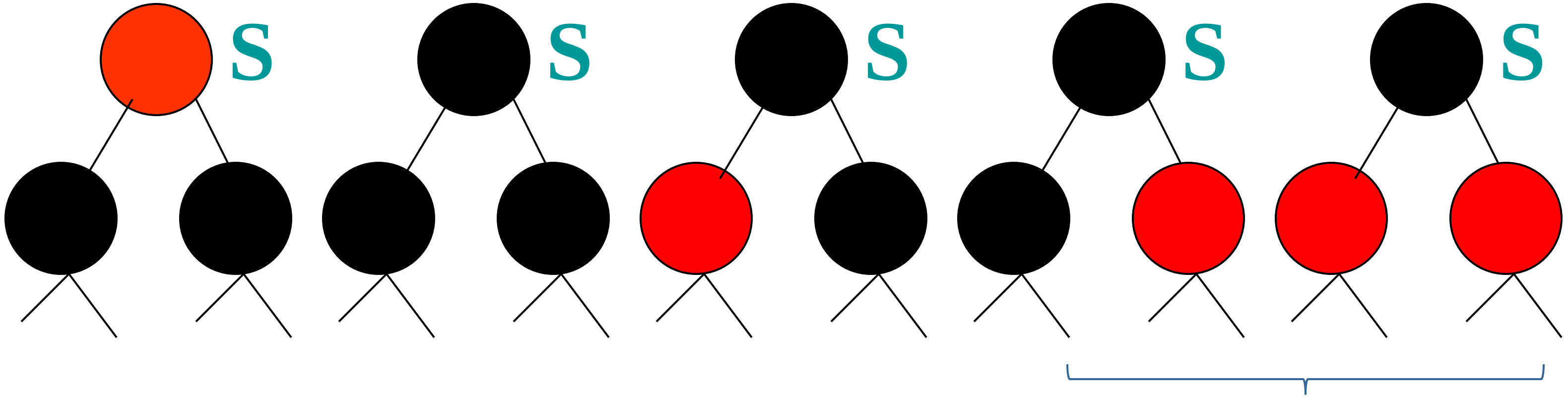
    (3) S jest koloru czarnego, prawy następnik jest czarny a lewy czerwony;

    (4) S jest koloru czarnego, a jego prawy następnik jest koloru czerwonego

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Usuwanie - przypadki:

(1) S jest koloru czerwonego;
(2) S jest koloru czarnego oraz ma obydwa następniki czarne;
(3) S jest koloru czarnego, prawy następnik jest czarny a lewy czerwony;
(4) S jest koloru czarnego, a jego prawy następnik jest koloru czerwonego



Przypadek 1 **Przypadek 2** **Przypadek 3** **Przypadek 4**

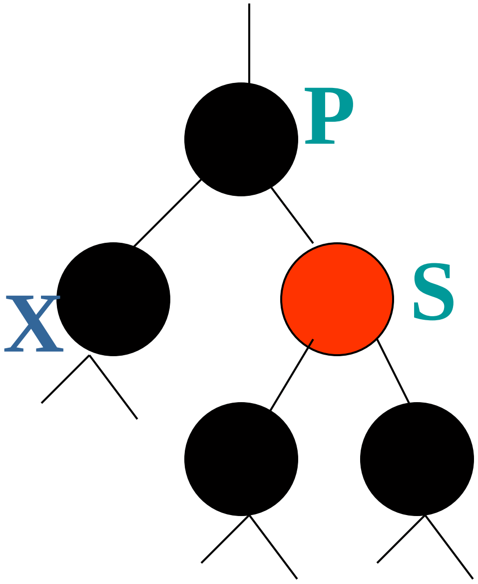
Uwagi

1. Usunięcie węzła czerwonego nie zmienia własności drzewa r-b
2. Funkcja korekty jest wywoływana dla węzła, którym jest zawsze jeden z następników węzła fizycznie usuwanego z drzewa)

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przypadek 1

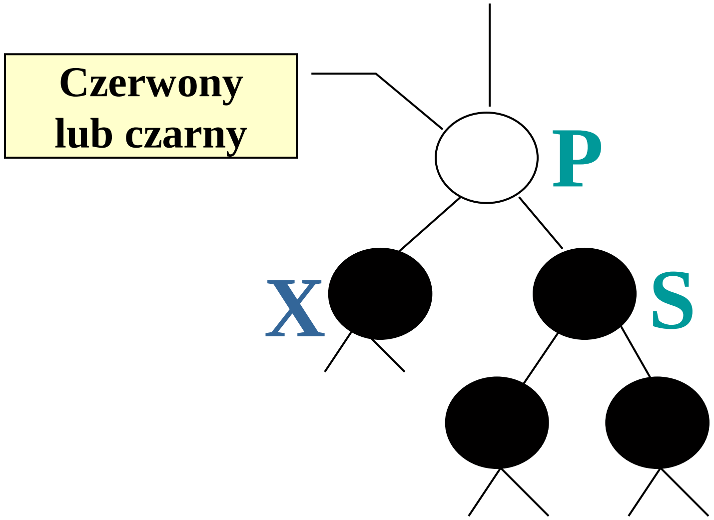
S jest koloru czerwonego;



Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przypadek 2

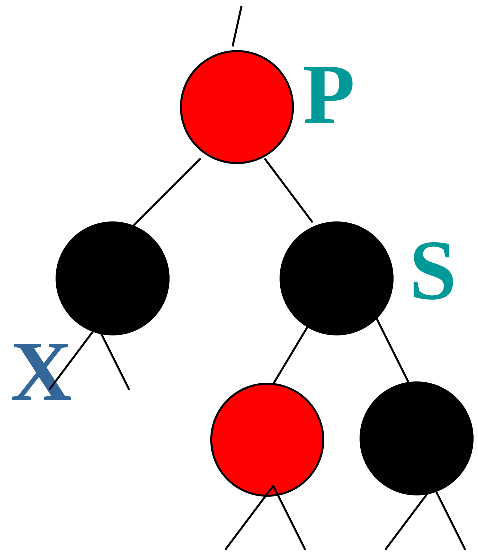
S jest koloru czarnego oraz ma dwóch czarnych potomków;



Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przypadek 3

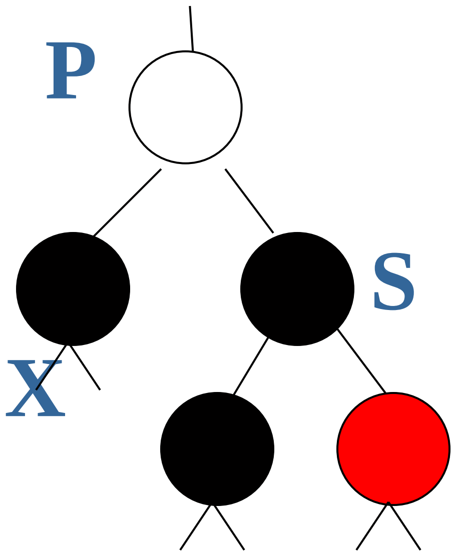
S jest koloru czarnego, prawy następnik jest czarny a lewy czerwony;



Operacje na drzewie czerwono – czarnym

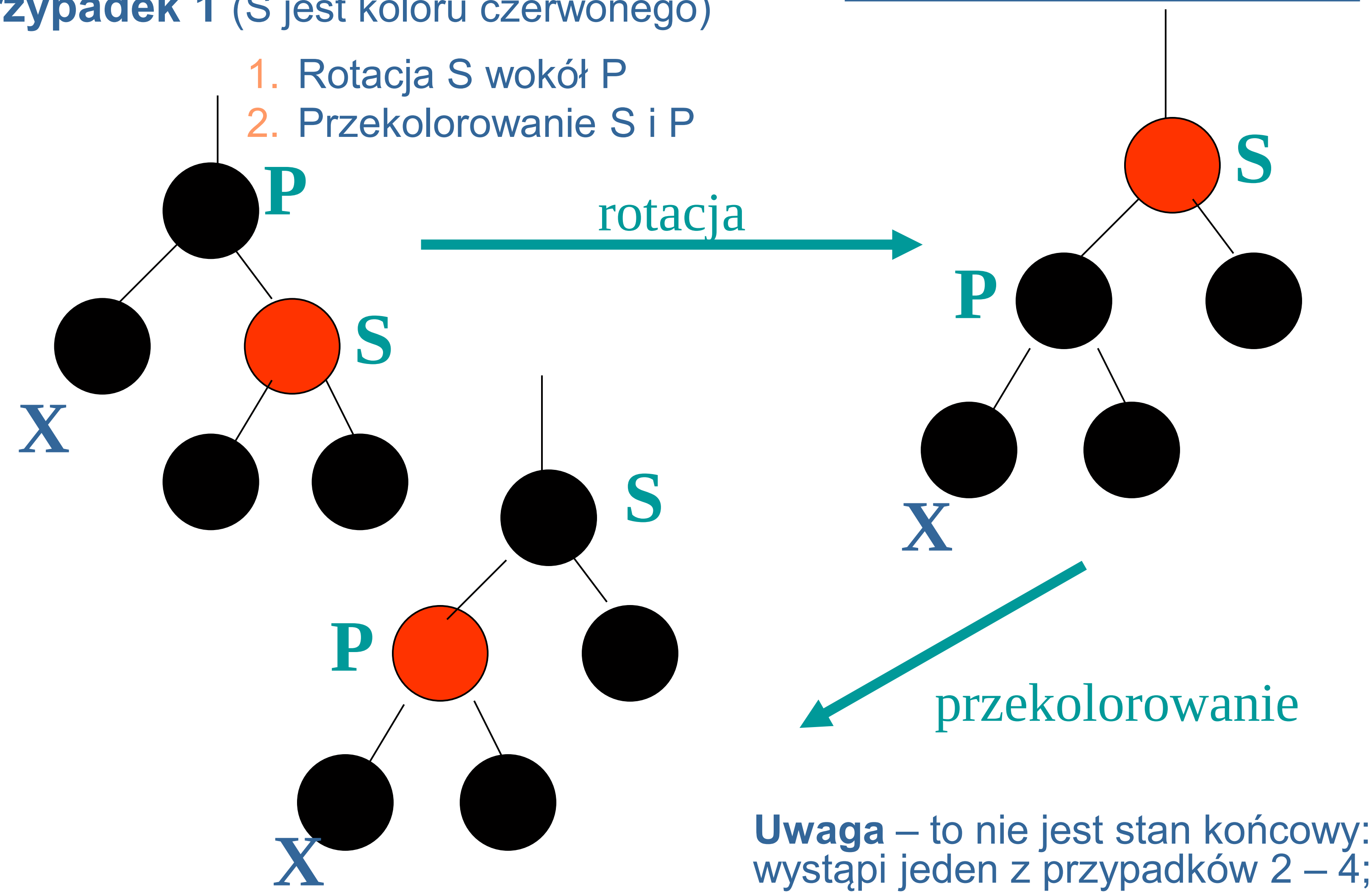
Przypadek 4

S jest koloru czarnego, a jego prawy następnik koloru czerwonego



Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- **Przypadek 1** (S jest koloru czerwonego)
  1. Rotacja S wokół P
  2. Przekolorowanie S i P



Uwaga – to nie jest stan końcowy:
wystąpi jeden z przypadków 2 – 4;

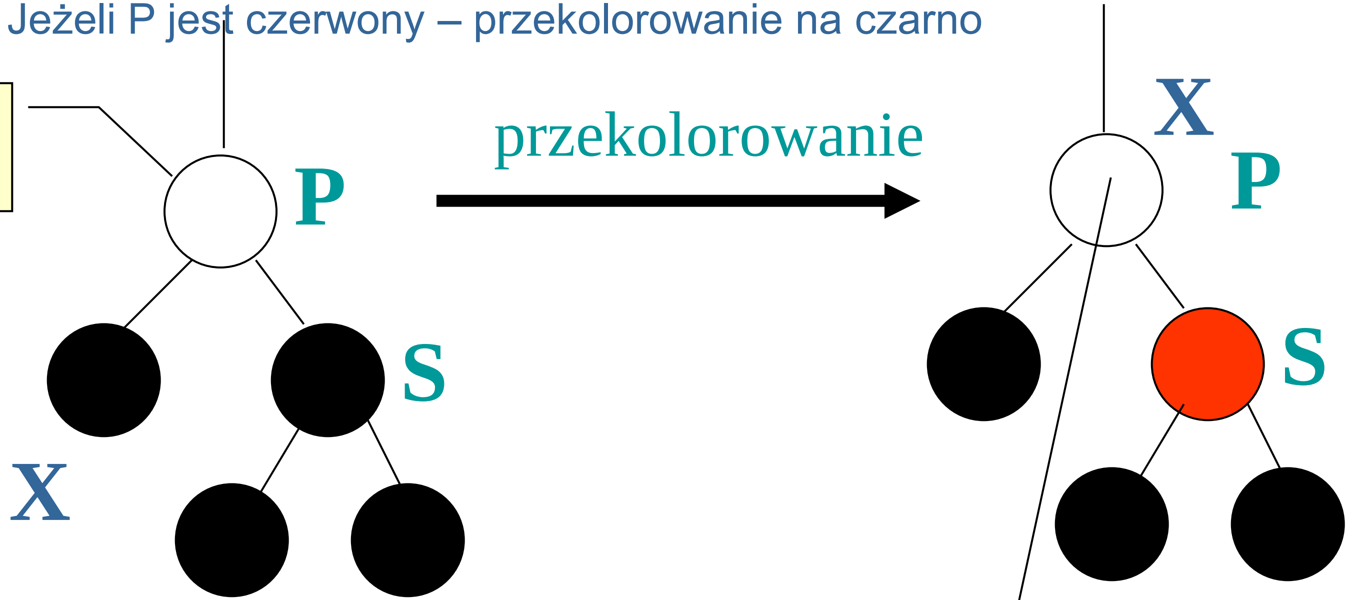
Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przypadek 2

S jest koloru czarnego oraz ma dwóch czarnych potomków;

1. Przekolorowanie S na czerwono
2. Jeżeli P jest koloru czarnego – bez zmian
3. Jeżeli P jest czerwony – przekolorowanie na czarno

Czerwony lub czarny



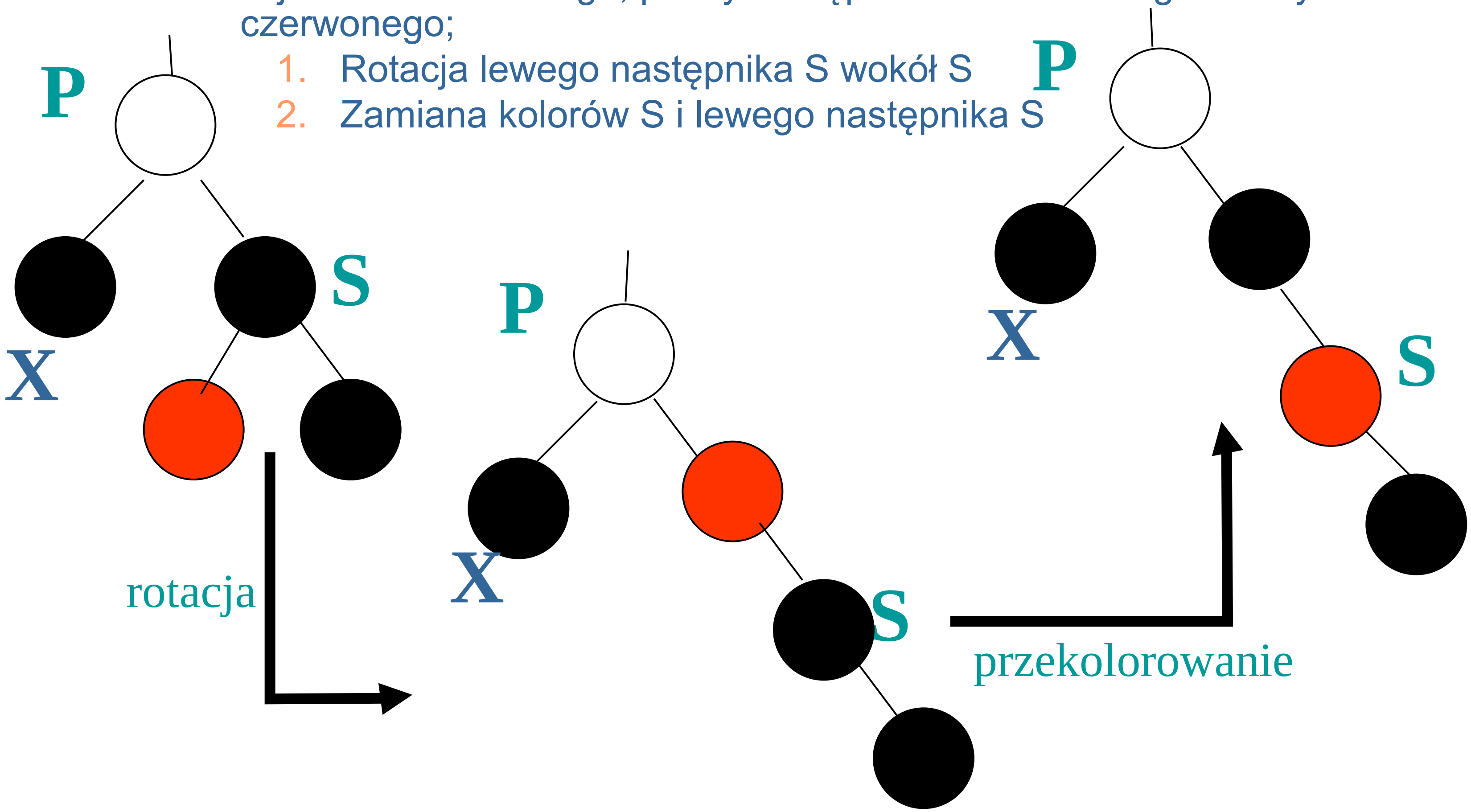
Jeżeli czerwony – propagacja czarnego koloru w górę;

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przypadek 3

S jest koloru czarnego, prawy następnik koloru czarnego a lewy koloru czerwonego;

1. Rotacja lewego następnika S wokół S
2. Zamiana kolorów S i lewego następnika S

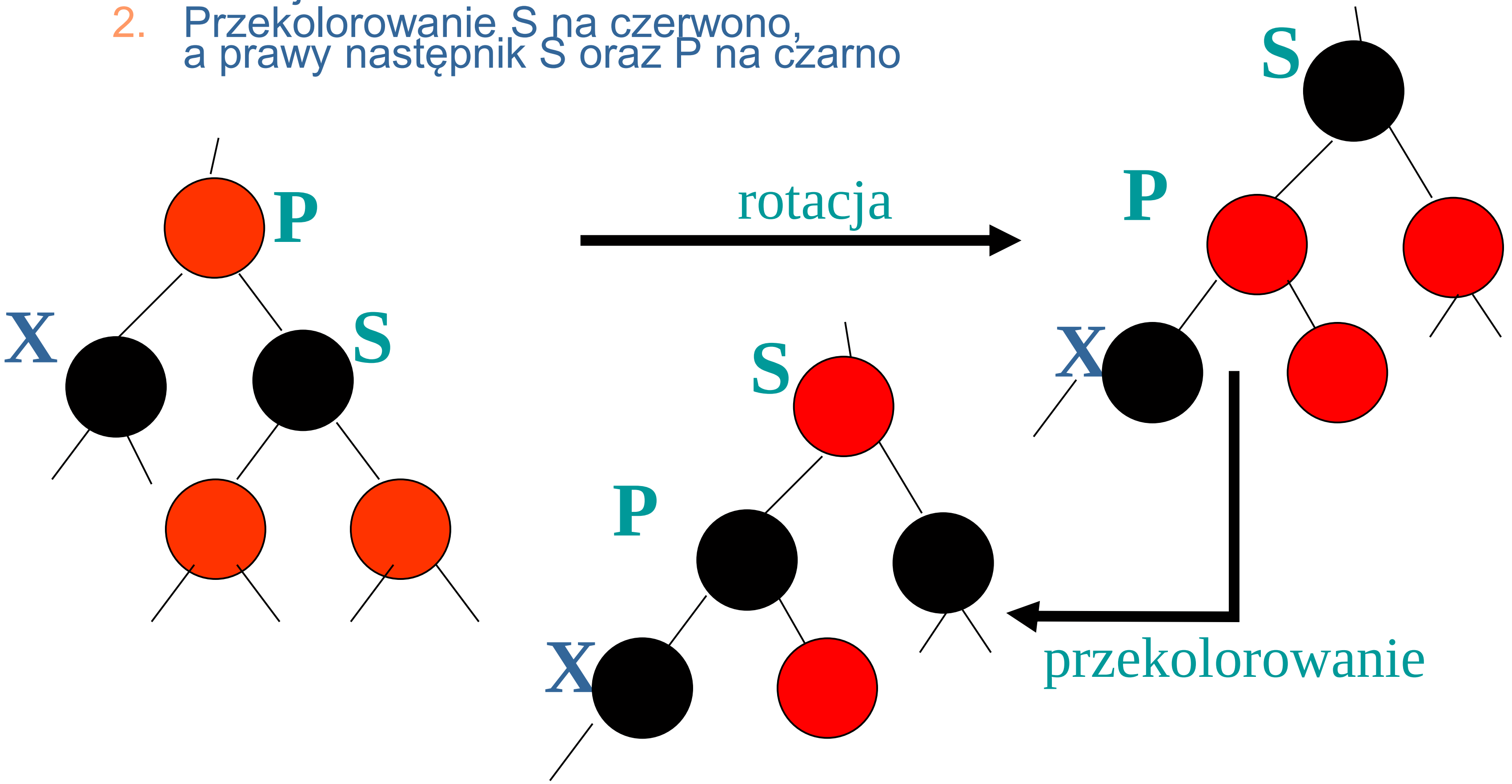


Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przypadek 4

S jest koloru czarnego a prawy następnik koloru czerwonego;

1. Rotacja S wokół P
2. Przekolorowanie S na czerwono, a prawy następnik S oraz P na czarno

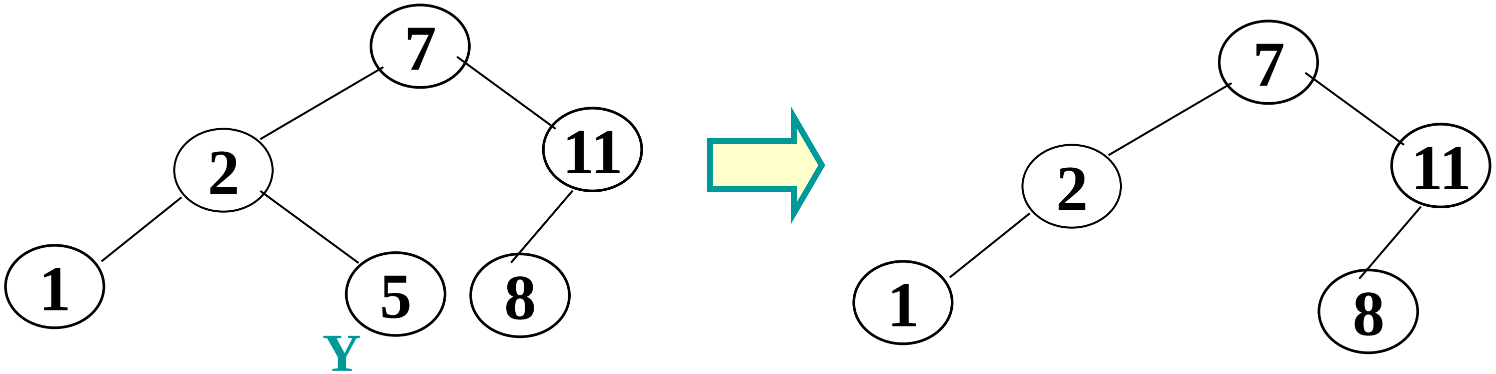


Operacje na drzewie czerwono – czarnym

- **Przypomnienie**

  Usunięcie węzła z drzewa BST prowadzi do jednego z trzech przypadków:

Przypadek 1

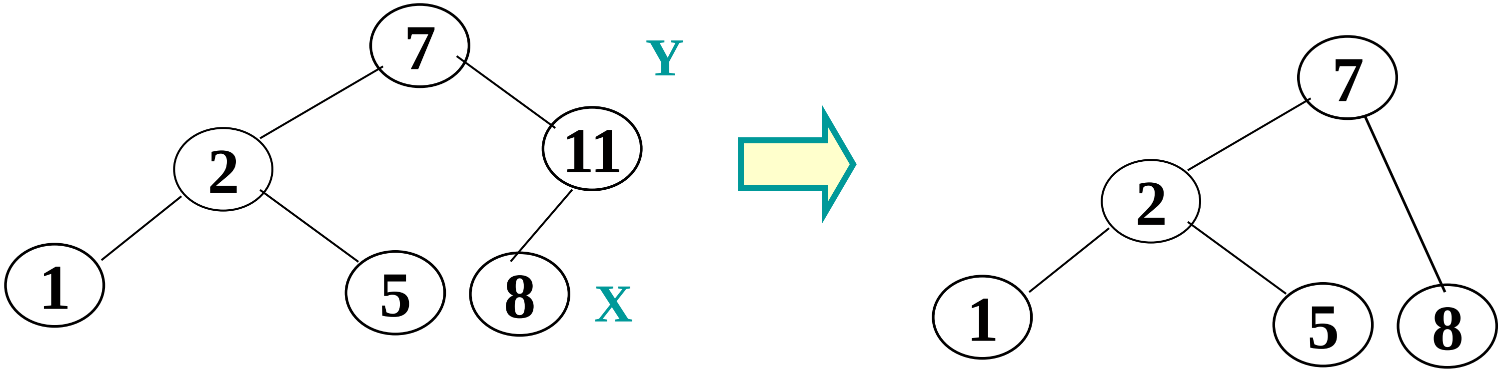


Uwaga:

Węzłem fizycznie usuniętym jest węzeł z wartością 5

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przypadek 2

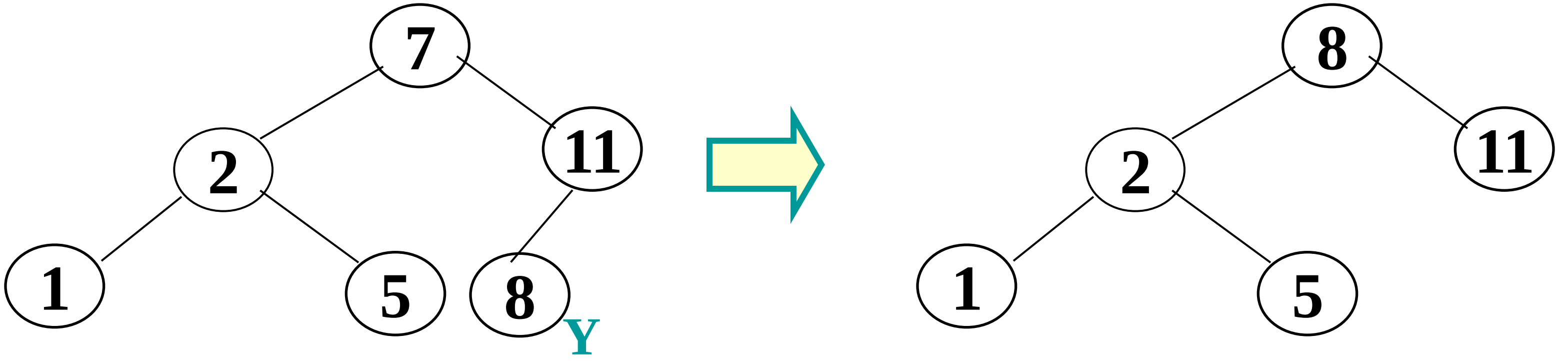


Uwaga:

Węzłem fizycznie usuniętym jest węzeł z wartością 11

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

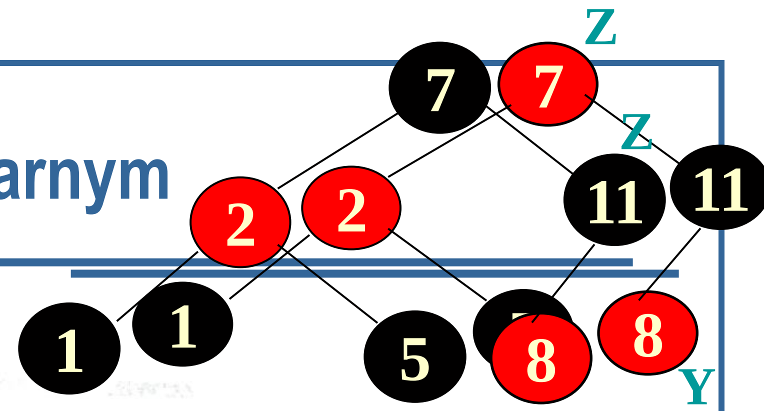
Przypadek 3



Uwaga:

Węzłem fizycznie usuniętym jest węzeł z wartością 8

Operacje na drzewie czerwono – czarnym



- Usuwanie:

```
RB-DELETE(T, z)
if left[z] = nil[T] lub right[z] = nil[T]
    then y ← z
    else y ← TREE-SUCCESSOR(z)
```

wyznaczenie węzła y, który zostanie fizycznie usunięty z drzewa

```
if left[y] ≠ nil[T]
    then x ← left[y]
    else x ← right[y]
```

funkcja korekty jest wywoływana dla lewego lub prawego następnika węzła y (tego, który nie jest *nil*

```
p[x] ← p[y]
if p[y] = nil[T]
    then root[T] ← x
    else if y = left[p[y]]
            then left[p[y]] ← x
            else right[p[y]] ← x
```

usunięcie z drzewa węzła y (jego rolę przejmuje węzeł x)

```
if y ≠ z
    then key[z] ← key[y]
            skopiuj zawartość pozostałych pól z y do z
```

przepisanie y do z

```
if color[y] = BLACK
    then RB-DELETE-FIXUP(T, x)
```

wywołanie funkcji korekty

```
return y
```

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Usuwanie *„Bottom-Up”* – algorytm korekty:

Funkcja korekty jest wywoływana dla lewego lub prawego następnika fizycznie usuwanego węzła y

```
RB-DELETE-FIXUP(T, x)
while x ≠ root[T] i color[x] = BLACK
    do if x = left[p[x]]
          then w ← right[p[x]]
               if color[w] = RED
                  then color[w] ← BLACK                    ▷ Przypadek 1
                       color[p[x]] ← RED                   ▷ Przypadek 1
                       LEFT-ROTATE(T, p[x])                ▷ Przypadek 1
                       w ← right[p[x]]                     ▷ Przypadek 1
               if color[left[w]] = BLACK i color[right[w]] = BLACK
                  then color[w] ← RED                      ▷ Przypadek 2
                       x ← p[x]                            ▷ Przypadek 2
                  else if color[right[w]] = BLACK
                          then color[left[w]] ← BLACK      ▷ Przypadek 3
                               color[w] ← RED              ▷ Przypadek 3
                               RIGHT-ROTATE(T, w)          ▷ Przypadek 3
                               w ← right[p[x]]             ▷ Przypadek 3
                       color[w] ← color[p[x]]              ▷ Przypadek 4
                       color[p[x]] ← BLACK                 ▷ Przypadek 4
                       color[right[w]] ← BLACK             ▷ Przypadek 4
                       LEFT-ROTATE(T, p[x])                ▷ Przypadek 4
                       x ← root[T]                         ▷ Przypadek 4
          else (to samo co po then
                z zamienionymi wskaźnikami „right” i „left”)
color[x] ← BLACK
```

Przypadek 1:
1. Rotacja S wokół P
2. Przekolorowanie S i P

Przypadek 2:
1. Przekolorowanie S
2. Jeżeli P jest koloru czarnego – bez zmian
3. Jeżeli P jest czerwony – przekolorowanie na czarno

Przypadek 3:
1. Rotacja lewego następnika S wokół S
2. Zamiana kolorów S i lewego następnika S

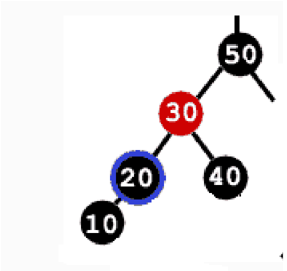
Przypadek 4:
1. Rotacja S wokół P
2. Przekolorowanie S na czerwono, a prawego następnika S oraz P na czarno

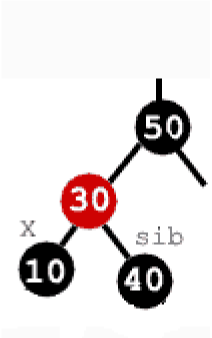
Operacje na drzewie czerwono – czarnym

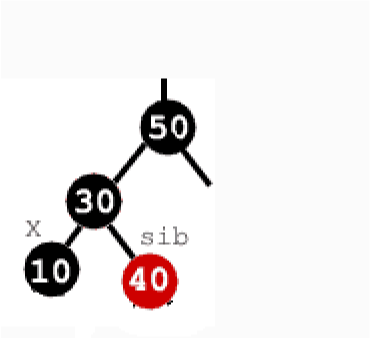
Przypadek?

Przykład – Usuwanie węzła

Przypadek 2







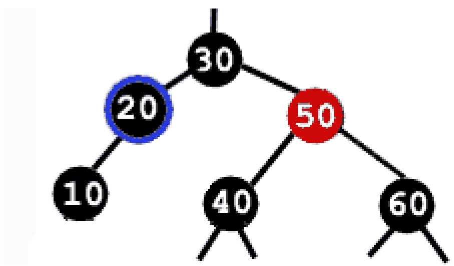
(1) S jest koloru czerwonego;
(2) S jest koloru czarnego oraz ma obydwa następniki czarne;
(3) S jest koloru czarnego, prawy następnik jest czarny a lewy czerwony;
(4) S jest koloru czarnego, a jego prawy następnik koloru czerwonego

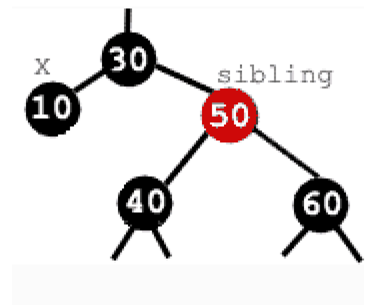
1. Przekolorowanie S na czerwono;
2. Jeżeli P jest koloru czarnego – bez zmian;
3. Jeżeli P jest czerwony – przekolorowanie na czarno

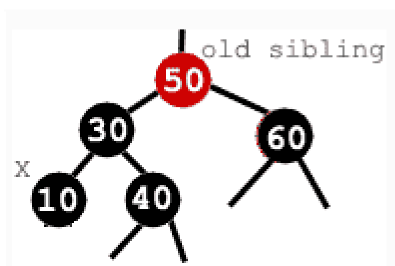
Operacje na drzewie czerwono – czarnym

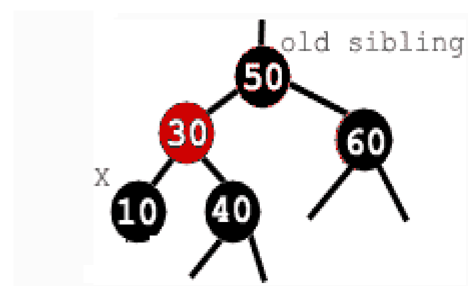
Przykład – Usuwanie węzła

Przypadek 1









(1) S jest koloru czerwonego;
(2) S jest koloru czarnego oraz ma obydwa następniki czarne;
(3) S jest koloru czarnego, prawy następnik jest czarny a lewy czerwony;
(4) S jest koloru czarnego, a jego prawy następnik koloru czerwonego

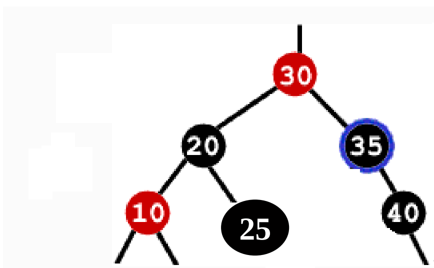
1. Rotacja S wokół P;
2. Przekolorowanie S i P;

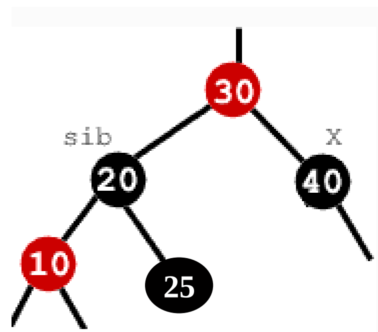
Operacje na drzewie czerwono – czarnym

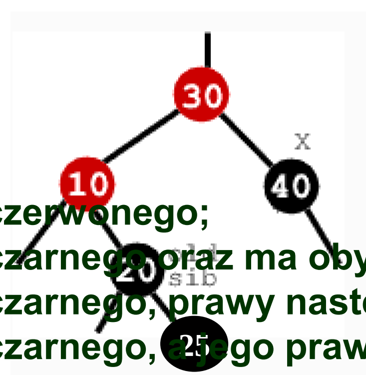
Przykład – Usuwanie węzła

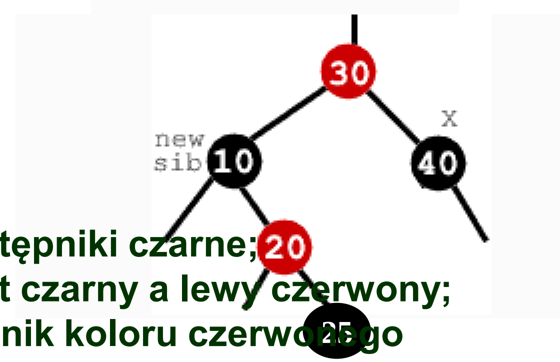
Przypadek 3

1. Rotacja lewego potomka S wokół P
2. Zamiana kolorów S i lewego potomka S;





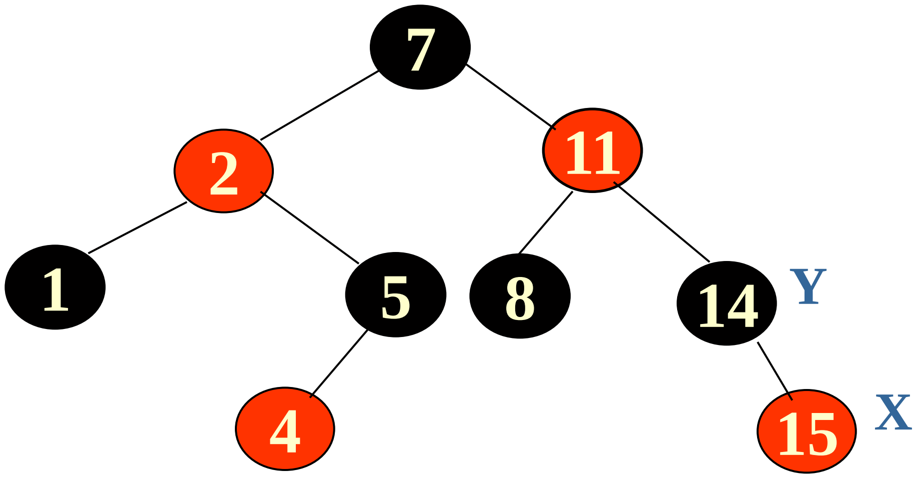




(1) S jest koloru czerwonego;
(2) S jest koloru czarnego oraz ma obydwa następniki czarne;
(3) S jest koloru czarnego, prawy następnik jest czarny a lewy czerwony;
(4) S jest koloru czarnego, a jego prawy następnik koloru czerwonego

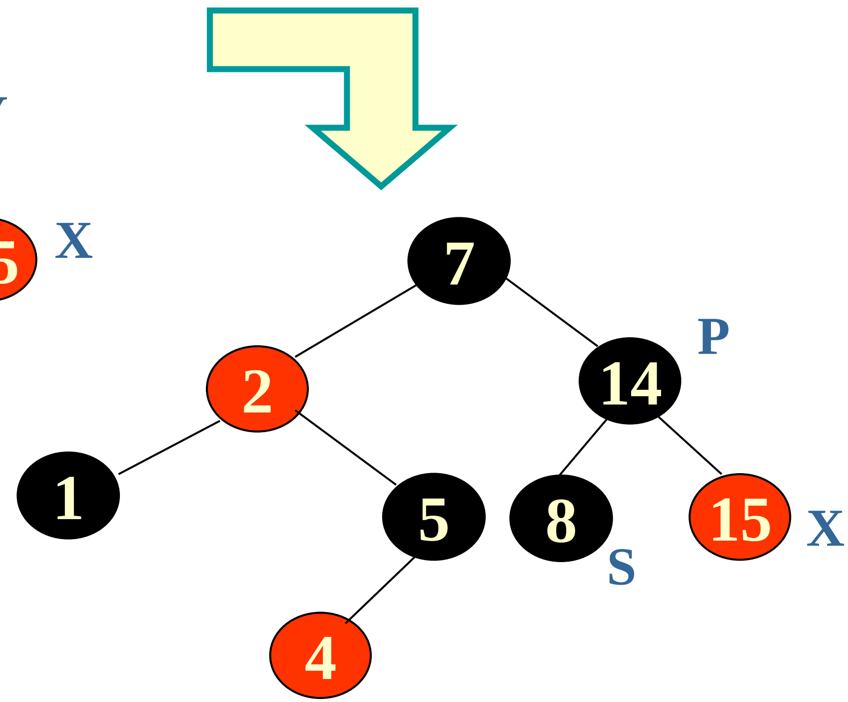
Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład – usunięcie z drzewa wartości 11



<u>**Postępowanie:**</u>

Usuwamy węzeł zgodnie z procedurą dla drzewa BST



Operacje na drzewie czerwono – czarnym

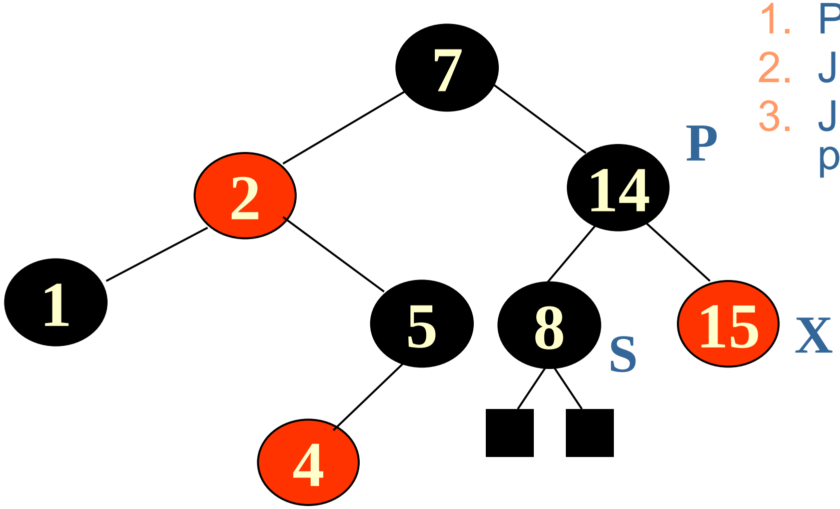
Przykład – usunięcie z drzewa wartości *11 (cd.)*

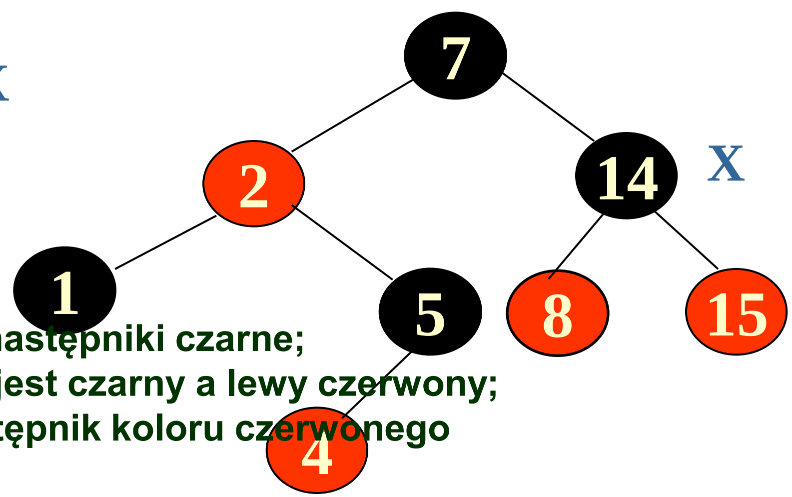
- ***Z którym przypadkiem mamy do czynienia?***

Przypadek 2

(S jest koloru czarnego oraz ma dwa czarne następniki)

1. Przekolorowanie S na czerwono;
2. Jeżeli P jest koloru czarnego – bez zmian;
3. Jeżeli P jest czerwony – kolor musi być propagowany w drzewie w kierunku korzenia;

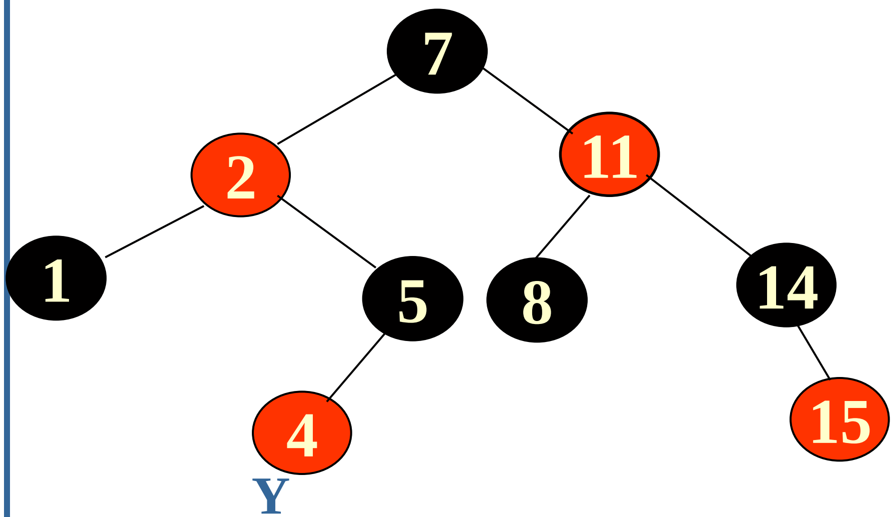




(1) S jest koloru czerwonego;
(2) S jest koloru czarnego oraz ma obydwa następniki czarne;
(3) S jest koloru czarnego, prawy następnik jest czarny a lewy czerwony;
(4) S jest koloru czarnego, a jego prawy następnik koloru czerwonego

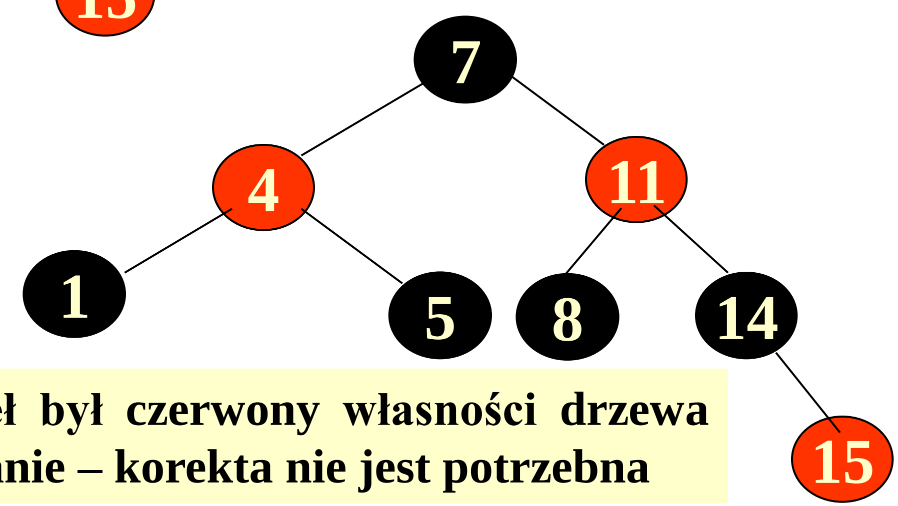
Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład 2 – usunięcie z drzewa wartości 2



<u>**Postępowanie:**</u>

Usuwamy węzeł zgodnie z procedurą dla drzewa BST

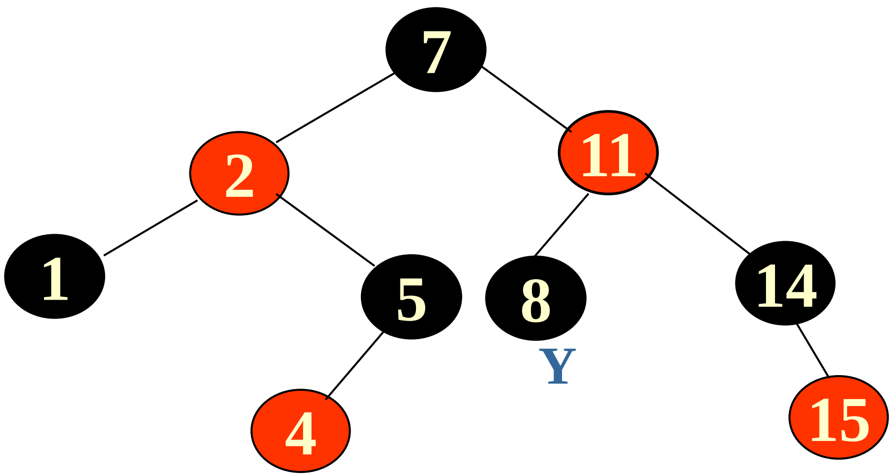


Co dalej?

Ponieważ fizycznie usunięty węzeł był czerwony własności drzewa czerwono-czarnego nie uległy zmianie – korekta nie jest potrzebna

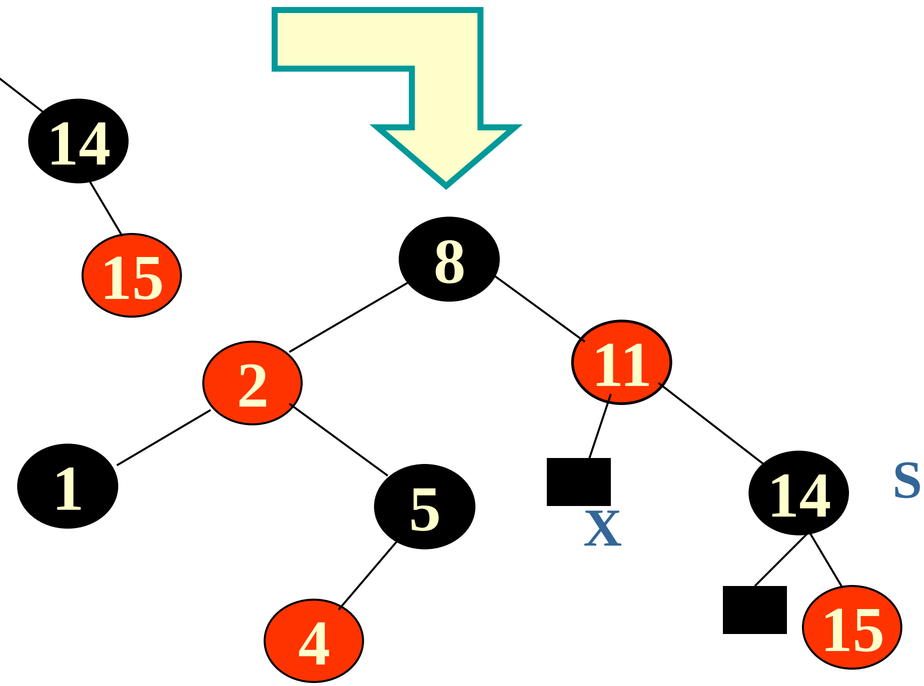
Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład 3 – usunięcie z drzewa wartości 7

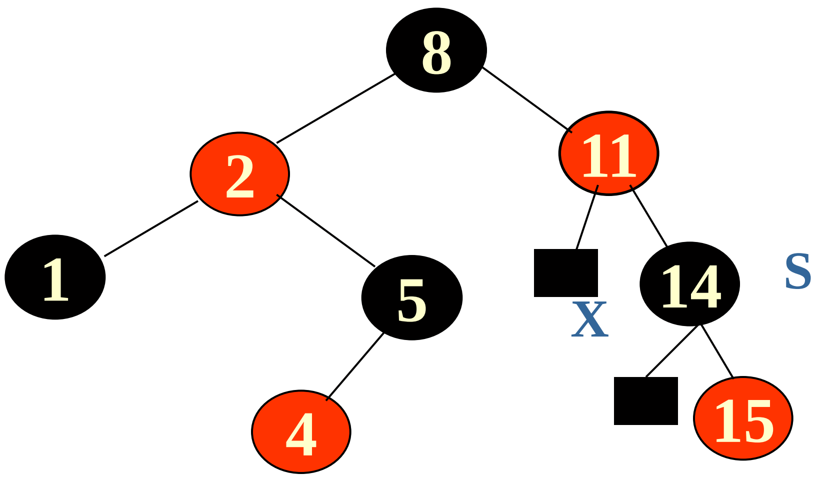


Postępowanie:

Usuwamy węzeł zgodnie z procedurą dla drzewa BST

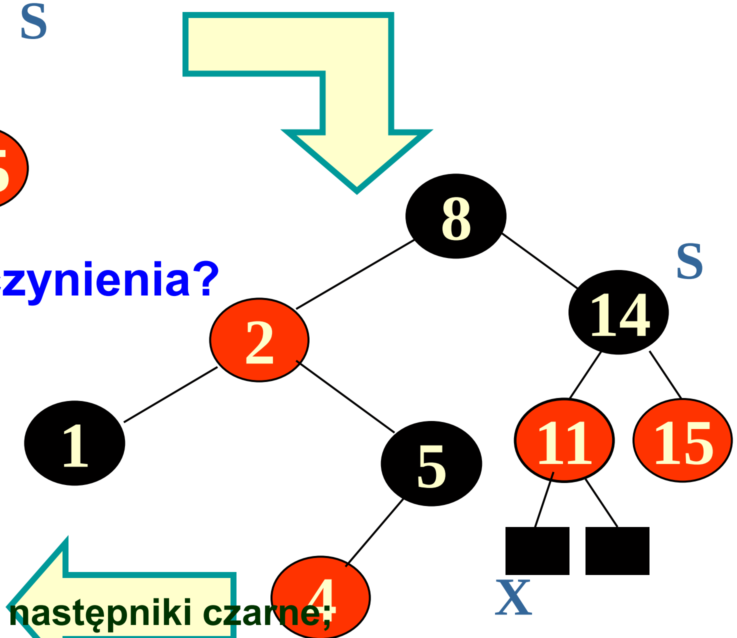


Operacje na drzewie czerwono – czarnym



Przypadek 4

- Rotacja S wokół P
- Przekolorowanie S na czerwono, a prawego następnika S oraz P na czarno

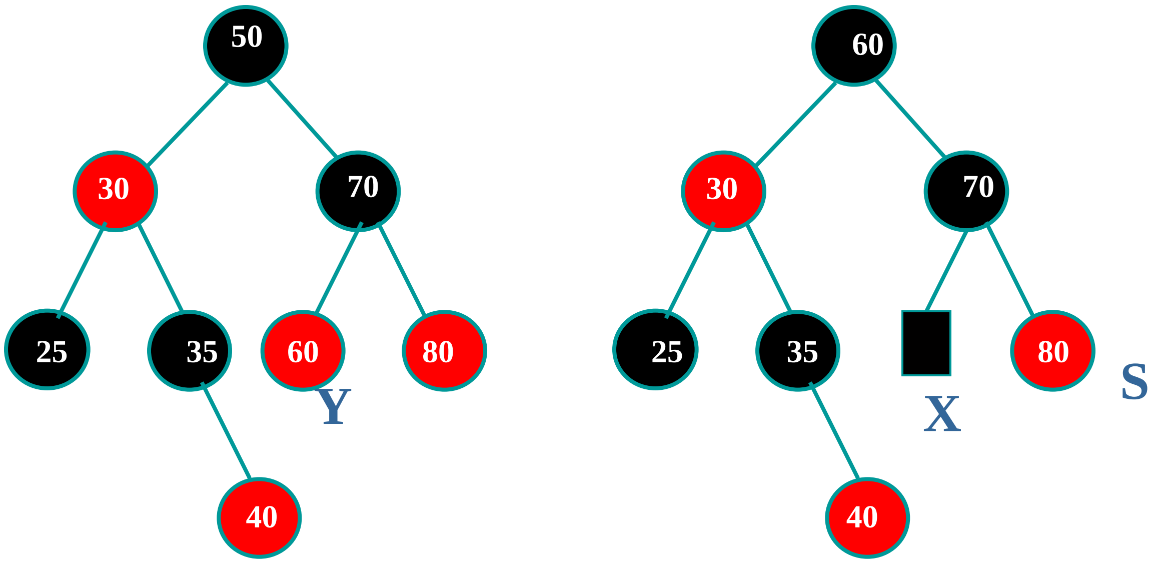


Z którym przypadkiem mamy do czynienia?

(1) S jest koloru czerwonego;
(2) S jest koloru czarnego oraz ma obydwa następniki czarne;
(3) S jest koloru czarnego, prawy następnik jest czarny a lewy czerwony;
(4) S jest koloru czarnego, a jego prawy następnik koloru czerwonego

Operacje na drzewie czerwono – czarnym

Przykład 4 – usunięcie z drzewa wartości 50



Co dalej?

Ponieważ fizycznie usunięty węzeł był czerwony, funkcja korekty nie zostanie wywołana. Drzewo nie utraciło własności drzewa czerwono-czarnego.

Podsumowanie

- Drzewo czerwono-czarne o *n* węzłach wewnętrznych ma wysokość *h* spełniającą warunek

$$h \leq 2 \lg(n+1)$$

- Operacje takie jak dodawanie, usuwanie, wyszukiwanie elementu, wyszukiwanie elementu najmniejszego/największego, wskazanie następnika/poprzednika danego elementu działają w czasie O(lg n)
- Przywracanie własności drzewa r-b po dodaniu nowego węzła jest potrzebne tylko w sytuacji, gdy poprzednik dodanego węzła jest czerwony
- Usunięcie węzła czerwonego nie zmienia własności drzewa r-b (nie jest potrzebna korekta)
- Po usunięciu/dodaniu węzła z/do drzewa czerwono-czarnego wymagane są (w ramach korekty) co najwyżej dwie rotacje

Dziękuję za uwagę