# RAPPORT DE TRAVAUX PRATIQUES

## Intégration numérique et interpolation

### I. Introduction

L’intégration numérique permet d’estimer la valeur d’une intégrale lorsque sa primitive n’est pas facilement calculable.   
Dans ce travail, nous étudions et comparons plusieurs méthodes d’intégration numérique:  
- La méthode des rectangles  
- La méthode du trapèze  
- La méthode de Simpson  
ainsi que deux approches plus avancées fondées sur l’interpolation:  
- Le polynôme de Lagrange  
- La spline quadratique  
Toutes ces méthodes sont appliquées à la fonction test: f(x) = 1 + x² sur [0, 2].

### II. Théorie

1. **Méthodes de Newton-Cotes classiques**

**a. Méthode des rectangles (à gauche)**  
On approxime la fonction f(x) par une constante sur chaque sous-intervalle:  
I\_rect = h Σ f(x\_i)  
**b. Méthode du trapèze**  
On suppose que f(x) varie linéairement entre deux points consécutifs:  
I\_trap = (h/2) [f(a) + 2Σ f(x\_i) + f(b)]

**c. Méthode de Simpson (composée)**  
On approxime f(x) par un polynôme quadratique sur chaque paire d’intervalles:  
I\_simp = (h/3) [f(a) + 4Σ f\_odd + 2Σ f\_even + f(b)]

1. **Interpolation et intégration de Lagrange**  
   Le polynôme d’interpolation de Lagrange est défini par:  
   P\_n(x) = Σ f\_i L\_i(x) avec L\_i(x) = Π (x - x\_j)/(x\_i - x\_j)  
   L’intégrale de f(x) est alors approchée par:  
   I\_L = Σ f\_i ∫ L\_i(x) dx
2. **Spline quadratique**  
   Une spline quadratique est un polynôme du second degré ajusté par morceaux:  
   S\_i(x) = a\_i (x - x\_i)² + z\_i (x - x\_i) + y\_i

### III. Exemple numérique

f(x) = 1 + x² sur [0, 2], avec m = 4 → h = 0.5  
Valeur exacte: I = ∫₀² (1 + x²) dx = 14/3 ≈ 4.6667

|  |  |
| --- | --- |
| Méthode | Résultat |
| Rectangles | 3.75 |
| Trapèzes | 4.75 |
| Simpson | 4.6667 |
| Lagrange | 4.6667 |
| Spline quadratique | 4.6667 |

### V. Conclusion

Ce travail a permis de comprendre la théorie et la mise en œuvre des méthodes d’intégration numérique,  
d’établir le lien entre les formules de Newton-Cotes et l’interpolation de Lagrange,  
et de valider expérimentalement la précision des différentes méthodes.  
Pour une fonction quadratique telle que f(x) = 1 + x²,  
Simpson, Lagrange et Spline donnent une intégration exacte,  
tandis que les autres approches restent de bonnes approximations.