Comparaison des méthodes d'intégration numérique

Analyse détaillée : 5 méthodes $\times$ 4 intégrandes

Karamoko Nkodjo Amy

Université Nangui Abrogoua — Master 2 Génie Informatique

Présentation du 6 janvier 2026

Sommaire

1. Contexte et Motivation
2. Les 4 Intégrandes
3. Résultats Détaillés
   - Intégrande Neutre
   - Intégrande Chebyshev
   - Intégrande Laguerre
   - Intégrande Combinée
4. Synthèse et Patterns
5. Conclusions et Recommandations

Les 5 méthodes : vue d'ensemble

Méthode	Type	Cas idéal
Gauss-Legendre	Quadrature	Fonctions lisses
Simpson	Composite	Robustesse générale
Spline	Interpolation	Dérivées disponibles
Gauss-Chebyshev	Quadrature spécialisée	Singularités en ± 1
Gauss-Laguerre	Quadrature spécialisée	Domaines infinis

Question de recherche

Comment se comportent ces 5 méthodes sur 4 **intégrandes représentatives** ?

Critères d'évaluation

1. **Précision** : Erreur absolue vs valeur exacte adaptée
2. **Performance** : Temps d'exécution
3. **Robustesse** : Comportement hors domaine optimal
4. **Convergence** : Évolution avec $n \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$
5. **Adaptabilité** : Applicabilité à différents types de fonctions

Protocole expérimental

Fonction de base (même pour tous)

$$F(x) = 1 + x^2$$

Intégrandes dérivées

4 variantes de $F(x)$ pour tester différents défis :

- Sans modification (cas simple)
- Avec singularité (terme $1/\sqrt{1-x^2}$)
- Avec décroissance (terme e^{-x})
- Avec les deux (cas difficile)

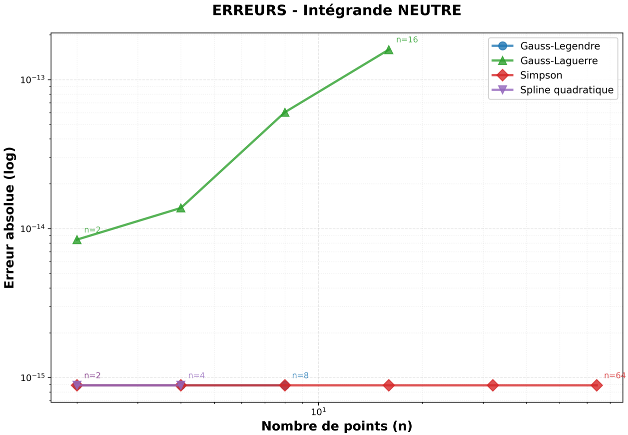
Les 4 Intégrandes : définition

Type	Formule	Domaine
Neutre	$f(x) = 1 + x^2$	$[0, 2]$
Chebyshev	$\dfrac{1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$	$[-1, 1]$
Laguerre	$e^{-x}(1 + x^2)$	$[0, \infty)$
Combinée	$\dfrac{e^{-x}(1 + x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$	$[-1, 1]$

Note importante

Chaque intégrande impose un poids naturel à la méthode de quadrature.

Neutre — Résultats numériques



Observations clés

- **Gauss-Legendre** : Précision machine
- **Simpson** : Erreur 8.9×10^{-16}
- **Spline** : Précision comparable

Neutre — Résultats spéciaux

Méthodes pondérées

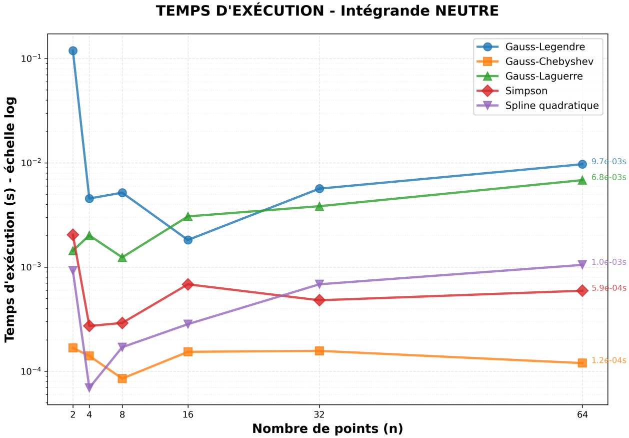
- **Gauss-Chebyshev** : Intégrale différente*
- **Gauss-Laguerre** : Intégrale différente*

* Les méthodes calculent une intégrale pondérée différente

Explication

Gauss-Chebyshev calcule $\int f(x)/\sqrt{1-x^2}dx$
Gauss-Laguerre calcule $\int f(x)e^{-x}dx$
Pas $\int f(x)dx$ comme attendu !

Neutre — Résultats de temps



Observations

- **Gauss-Chebyshev** : Très rapide
- **Spline** : Rapide pour petit n
- **Simpson** : Stable
- **Gauss-Legendre** : Modéré
- **Gauss-Laguerre** : Variable

Neutre — Leçon fondamentale

La rapidité n'implique pas la pertinence

Une méthode de Gauss est **exacte** pour l'intégrale qu'elle est conçue à approximer, mais peut devenir non pertinente si l'intégrande ne respecte pas sa structure de poids.

Neutre — Méthode la plus adaptée

Gauss-Legendre

- **Précision** : Précision machine ($\approx 10^{-16}$)
- **Domaine** : Intégrales standards $\int_a^b f(x)\,dx$
- **Robustesse** : Peu sensible à la forme de f
- **Compromis global** : Précision / coût numérique

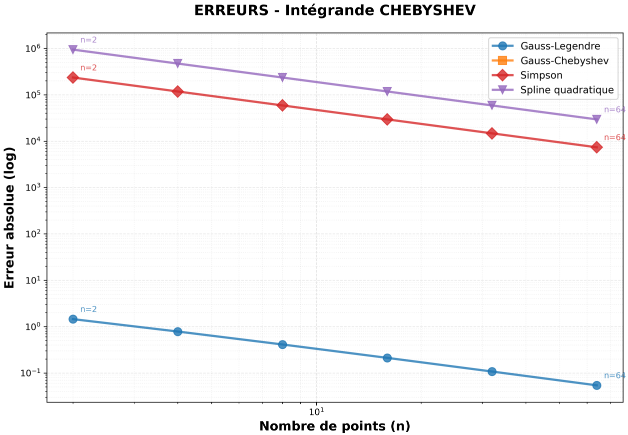
Recommandation pratique

Pour une fonction lisse **sans poids particulier** :

$$\boxed{\text{Gauss-Legendre} \quad \text{ou} \quad \text{Simpson}}$$

Les méthodes pondérées seulement si le poids est présent.

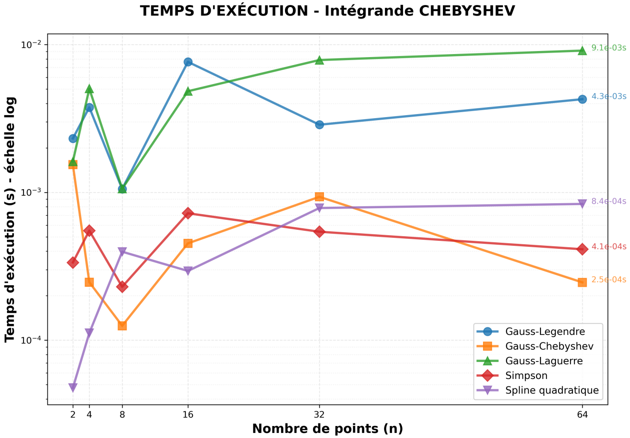
Chebyshev — Résultats d'erreur



Catastrophe numérique

- **Gauss-Chebyshev** : Divergence
- **Gauss-Laguerre** : Énormes
- **Simpson** : Important
- **Spline** : Pire que Simpson
- **Gauss-Legendre** : Seule stable

Chebyshev — Résultats de temps



Observations

- **Gauss-Chebyshev** : Très rapide
- **Gauss-Laguerre** : Très rapide
- **Gauss-Legendre** : Légèrement plus coûteuse
- **Simpson** : Stable
- **Spline** : Comparable

Tous les temps sont de l'ordre de la milliseconde

Gauss-Chebyshev : Double poids

Gauss-Chebyshev INCLUT le poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$I_{Cheb} = \sum w_i \cdot f(x_i) \quad \text{où } w_i \propto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Notre intégrande contient **déjà** ce poids :

$$f(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Résultat : **Poids double** !

$$I_{calcule} = \int \frac{(1+x^2)}{(\sqrt{1-x^2})^2} dx = \int \frac{1+x^2}{1-x^2} dx \quad \rightarrow \textbf{DIVERGE}$$

Chebyshev — Explications complémentaires

Simpson et Spline : Mal adaptés aux singularités

Simpson et Spline supposent que la fonction est :

- Continue et **dérivable** sur tout le domaine
- Sans pôles ou singularités

Avec des singularités en ± 1, les dérivées divergent.
Résultat : Convergence très lente.

Gauss-Legendre : La sauveuse

Quadrature généraliste qui fonctionne sur tout intervalle fini $[a, b]$.
Converge lentement sur singularités, mais reste stable.

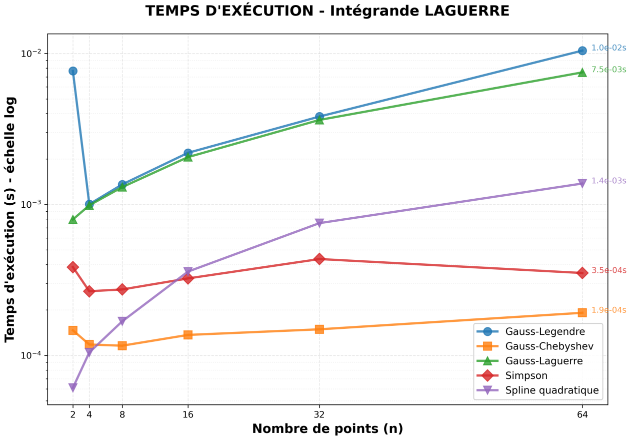
Verdict sans appel

- Gauss-Chebyshev : Inadaptée (double poids)
- Simpson / Spline : Trop lentes
- Gauss-Laguerre : Domaine incompatible
- **Gauss-Legendre** : Seule viable

Leçon clé

Avec des singularités, les méthodes spécialisées **inadaptées divergent drastiquement**. Seule une méthode généraliste peut sauver la situation.

Laguerre — Résultats de temps

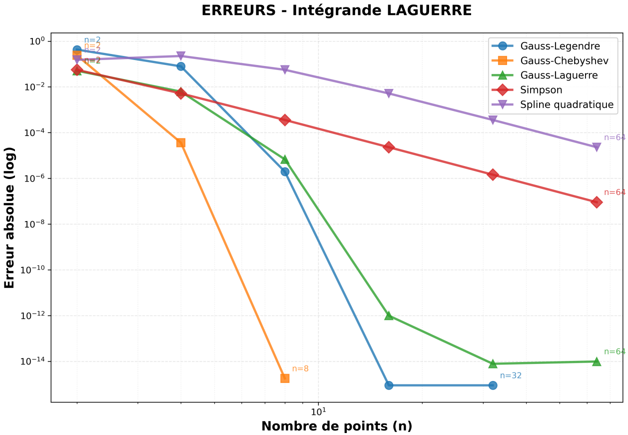


Observations

- **Gauss-Chebyshev** : Très rapide
- **Simpson** : Rapide et stable
- **Spline** : Légèrement plus lent
- **Gauss-Laguerre** : Modéré
- **Gauss-Legendre** : Temps corrects

Gauss-Laguerre combine vitesse raisonnable + précision optimale

Laguerre — Résultats d'erreur



Succès remarquable

- **Gauss-Laguerre** : Excellence
- **Gauss-Legendre** : Très bonne
- **Gauss-Chebyshev** : Bonne*
- **Simpson** : Lente
- **Spline** : Moins précis

* mauvaise intégrale

Adéquation parfaite

Gauss-Laguerre est **construite** pour intégrer :

$$I = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-x} dx$$

Notre intégrande est exactement :

$$f(x) = e^{-x}(1 + x^2) \quad \text{sur } [0, \infty)$$

Les **nœuds et poids** sont optimisés pour ce cas.

Laguerre — Pourquoi Gauss-Laguerre excelle(2/2)

Résultats numériques

- $n = 2$: Erreur $\approx 5 \times 10^{-2}$
- $n = 16$: Erreur $\approx 10^{-15}$ (précision machine)
- **Convergence exponentielle**

Laguerre — Verdict

Cas idéal pour une méthode spécialisée

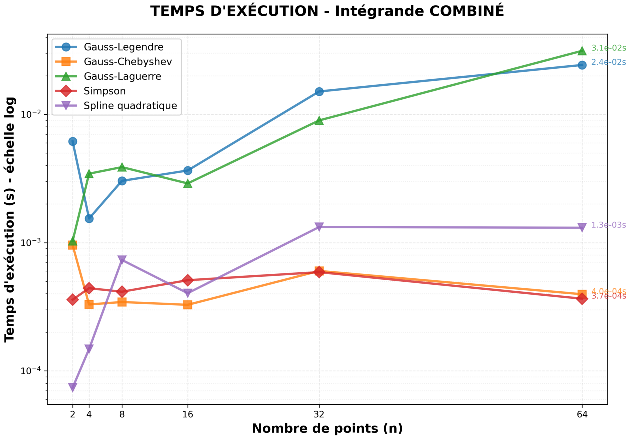
Quand le domaine et la structure correspondent parfaitement, les méthodes spécialisées sont **imbattables**.

Gagnant : Gauss-Laguerre

- Convergence exponentielle rapide
- Domaine infini traité naturellement
- Précision proche de la machine

Recommandation pratique

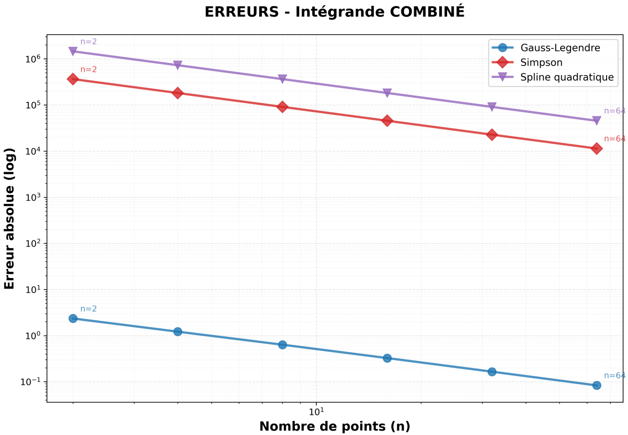
Pour des intégrales sur $[0, \infty)$ avec décroissance exponentielle : Gauss-Laguerre est le choix optimal.



Observations

- **Gauss-Chebyshev** : Très rapide
- **Simpson** : Rapide
- **Spline** : Rapide
- **Gauss-Legendre** : Temps raisonnables
- **Gauss-Laguerre** : Rapide

Pièges : Les temps sont trompeurs !



Échec généralisé

- **Gauss-Chebyshev** : Divergence
- **Gauss-Laguerre** : Aberrant
- **Simpson** : Énormes
- **Spline** : Énormes
- **Gauss-Legendre** : Seule convergence

Combinée — Analyse du problème (1/2)

Le cas limite : cumul des difficultés

L'intégrande combinée présente :

1. **Singularités** en $x = \pm 1$: $1/\sqrt{1-x^2} \to \infty$
2. **Décroissance exponentielle** : e^{-x} sur domaine fini $[-1, 1]$
3. **Interaction problématique** : $e^{-x}/\sqrt{1-x^2}$

Pourquoi Gauss-Chebyshev échoue ?

- × Domaine correct : $[-1, 1]$ (OK)
- × Mais calcule : $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- × Notre $f(x)$ contient DÉJÀ $1/\sqrt{1-x^2}$
- × $\Rightarrow$ Double poids : divergence !

Combinée — Analyse du problème (2/2)

Pourquoi Gauss-Laguerre échoue ?

- Domaine incorrect : $[0, \infty)$ (NON) vs $[-1, 1]$ (OK)
- Mais calcule : $\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx$
- Notre $f(x)$ contient DÉJÀ e^{-x}
- $\Rightarrow$ Double exponentielle + mauvais domaine

Combinée — Analyse du problème (2/3)

Pourquoi Simpson/Spline échouent ?

- × Généralistes, mais nécessitent régularité
- × Singularités en ± 1 brisent les hypothèses
- × Évaluation près de ± 1 instable numériquement

Combinée — Verdict

Quand tout échoue, la robustesse prime

- Gauss-Chebyshev : Divergence (inadaptée)
- Gauss-Laguerre : Aberrant (domaine incompatible)
- Simpson/Spline : Erreurs énormes
- **Gauss-Legendre** : Seule convergence viable

Leçon finale

Gauss-Legendre n'est pas la plus rapide, ni la plus précise en cas idéal, mais elle est la **plus robuste et adaptable**.

Tableau comparatif global

Méthode	Neutre	Chebyshev	Laguerre	Combinée
Gauss-Legendre	Excel.	Viable	Très bonne	Seule
Simpson	TB	Échec	Correct	Échec
Spline	TB	Échec	Correct	Échec
Gauss-Chebyshev	Inadapté	Diverge	Bonne*	Diverge
Gauss-Laguerre	Inadapté	Aberrant	Optimal	Aberrant

* = mauvaise intégrale calculée

Pattern 1 : La spécialisation a un coût

- Gauss-Chebyshev Diverge si la singularitést déjà incluse
- Gauss-Laguerre excelle sur Laguerre, échoue ailleurs
- **Implication :** Vérifier que le domaine correspond

Pattern 2 : La généralité offre la robustesse

- Gauss-Legendre fonctionne sur tous les cas
- Simpson fonctionne sur cas réguliers
- **Implication :** En cas de doute, privilégier la robustesse

Pattern 3 : Vitesse $\neq$ Pertinence

- Gauss-Chebyshev rapide sur Neutre, mais inadapté
- Gauss-Laguerre rapide mais mauvais domaine
- **Implication :** Toujours vérifier la valeur calculée

Robustesse : le critère caché

Méthode	Robustesse hors domaine
Gauss-Legendre	**Très robuste**
Simpson	Robuste
Spline	Correcte
Gauss-Chebyshev	Faible
Gauss-Laguerre	Faible

Conclusion

Pour une **application générale** ou **incertaine** : **Gauss-Legendre** est le choix par défaut.

Résumé des Découvertes

1. L'**adaptation au problème est critique**
   Choisir la bonne méthode pour la bonne intégrande peut améliorer la précision de 10+ ordres de grandeur (Laguerre).

2. **Gauss-Legendre est l'outil universel**
   Elle ne gagne jamais sur cas idéal, mais elle ne perd jamais non plus.

Résumé des Découvertes (suite)

3. **La vitesse est trompeuse**
   Une mauvaise intégrale calculée rapidement reste une mauvaise intégrale.

4. **Les méthodes spécialisées sont puissantes mais fragiles**
   Elles excèllent dans leur domaine, échouent catastrophiquement ailleurs.

Recommandations pratiques (1/2)

Pour fonctions régulières (domaine fini)

→ Gauss-Legendre ou Simpson
Les deux convergent rapidement et de manière stable.

Pour singularités de type Chebyshev

→ Gauss-Legendre + **transformation adaptée**
Ou directement Gauss-Chebyshev si vous êtes certain du domaine.

Recommandations pratiques (2/2)

Pour domaines infinis + exponentielle

→ Gauss-Laguerre
C'est sa spécialité, elle est imbattable.

Pour cas difficiles ou incertains

→ Gauss-Legendre + vérification numérique
Plus lent, mais fiable.

Questions ?

Code source et données disponibles sur demande

Tous les graphiques générés via Python + Matplotlib