RAPPORT FINAL — COMPARAISON DES MÉTHODES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce TP est de comparer cinq méthodes d'intégration numérique appliquées à quatre types d'intégrandes représentatives de différentes classes de problèmes :
— Intégrande **neutre**
— Intégrande **type Chebyshev**
— Intégrande **type Laguerre**
— Intégrande **combinée** (Chebyshev + Laguerre)
Chaque méthode est évaluée selon :
— sa **précision** (erreur absolue par rapport à la valeur exacte adaptée à la méthode)
— son **temps d'exécution**
— son **comportement hors du domaine optimal**
La fonction de base utilisée est :

$$F(x) = 1 + x^2$$

Les valeurs de n testées :

$$n \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}.$$

2 Algorithme général

L'algorithme du TP suit quatre étapes principales :

2.1 Étape 1 — Génération des intégrandes

Nous construisons les quatre intégrandes :
— **Neutre** : $f(x) = F(x)$
— **Chebyshev** : $f(x) = \frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}}$
— **Laguerre** : $f(x) = e^{-x}F(x)$
— **Combinée** : $f(x) = \frac{e^{-x}F(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

2.2 Étape 2 — Implémentation des méthodes d'intégration

Après avoir défini les intégrandes, on implémente les méthodes suivantes :
— **Gauss-Legendre**
— **Gauss-Chebyshev**
— **Gauss-Laguerre**
— **Méthode de Simpson**
— **Spline quadratique**

2.3 Étape 3 — Calcul des valeurs exactes (références)

Chaque méthode impose un **poids spécifique** sur l'intégrande. Pour éviter toute confusion :
— On calcule **la valeur exacte adaptée à la méthode** utilisée.

— On distingue :

$$I_{\text{standard}} = \int f(x)dx, \quad I_{\text{cheb}} = \int \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad I_{\text{lag}} = \int f(x)e^{-x}dx$$

Ainsi, chaque erreur absolue est toujours :

$$\text{Erreur} = |I_{\text{méthode}} - I_{\text{référence correspondante}}|$$

2.4 Étape 4 — Visualisation

Pour chaque intégrande :
— graphique **Erreur**
— graphique **Temps**
Total : 8 graphiques.

3 Présentation des méthodes d'intégration

3.1 Gauss-Legendre

Quadrature adaptée aux intégrales sur $[a, b]$. Exacte pour les polynômes de degré $\leq 2n - 1$. Très performante pour les fonctions lisses.

3.2 Gauss-Chebyshev

Adaptée aux intégrales de type :

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Optimale pour intégrer $f(x)/(1 - x^2)$, avec $f(x)$ la partie régulière.

3.3 Gauss-Laguerre

Adaptée aux intégrales impropres sur $[0, \infty)$ de la forme :

$$\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x}dx$$

, avec $f(x)$ la partie régulière. Évite la troncature du domaine infini.

3.4 Simpson composite

Méthode robuste et efficace pour les intégrandes régulières. Convergence d'ordre 4.

3.5 Spline quadratique

Interpolation spline C^1 puis intégration analytique. Méthode stable mais sensible à la dérivée initiale.

4 Définition des intégrandes testées

4.1 Intégrande Neutre

$$f(x) = 1 + x^2, \quad x \in [0, 2]$$

4.2 Intégrande Chebyshev

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in [-1, 1]$$

4.3 Intégrande Laguerre

$$f(x) = e^{-x}(1 + x^2), \quad x \in [0, \infty)$$

4.4 Intégrande Combinée

$$f(x) = \frac{e^{-x}(1 + x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in [-1, 1]$$

5 Résultats détaillés

5.1 Intégrande NEUTRE

Erreurs :
— Gauss-Legendre : précision machine dès n = 2
— Simpson / Spline : précision comparable
— Gauss-Chebyshev : calcule une intégrale différente
— Gauss-Laguerre : calcule intégrale différente
Temps :
— Gauss-Chebyshev : très rapide
— Simpson : stable
— Spline : plus coûteux
— Gauss-Laguerre : augmente fortement pour n = 32
Conclusion : méthodes robustes = Gauss-Legendre, Simpson, Spline

5.2 Intégrande CHEBYSHEV

Erreurs :
— Gauss-Chebyshev : valeur divergente (double poids, la méthode devient mathématiquement non adaptée)
— Gauss-Laguerre : N'est pas compatible avec la fonction et son domaine → Génère des valeurs très grandes ou instables.
— Simpson / Spline : Convergent, mais très lentement, car la fonction possède une singularité en x=±1

— Gauss-Legendre : converge lentement mais correcte car l'intégrande reste définie sur [1,1].

Conclusion : seule Gauss-Legendre reste exploitable.

5.3 Intégrande LAGUERRE

Erreurs :

- Gauss-Laguerre : extrêmement bonne précision, même si l'intégrande contient déjà le poids (e^{-x})
- Gauss-Legendre : très bonne précision dès n = 16
- Simpson / Spline : correcte mais moins rapide
- Gauss-Chebyshev : erreur faible mais intégrale différente

Conclusion : méthode optimale = Gauss-Laguerre

5.4 Intégrande COMBINÉE

Erreurs :

- Gauss-Chebyshev : divergence, car La fonction n'est pas définie dans le cadre du poids Chebyshev
- Gauss-Laguerre : domaine incompatible
- Simpson / Spline : erreurs très élevées
- Gauss-Legendre : seule méthode qui converge, lentement

Conclusion : seul Gauss-Legendre viable

6 Analyse comparative

6.1 Robustesse hors domaine

Méthode	Robustesse hors domaine
Gauss-Legendre	très robuste
Simpson	robuste
Spline	correcte
Gauss-Chebyshev	faible
Gauss-Laguerre	faible

7 Conclusion générale

- Le choix de la méthode influence la précision
- Une méthode inadaptée peut produire des résultats incohérents
- Gauss-Legendre et Simpson sont fiables universellement
- Gauss-Chebyshev et Gauss-Laguerre : réservées à leur intégrande spécifique
- La gestion des valeurs exactes adaptées à chaque méthode est indispensable