RAPPORT FINAL — COMPARAISON DES MÉTHODES DE RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES EDO

1. Introduction

L'objectif de ce travail est d'étudier, d'implémenter et de comparer trois méthodes classiques de résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO) : - la méthode d'Euler explicite, - la méthode de Heun (Euler améliorée), - la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4).

Ces méthodes sont appliquées à une équation différentielle test pour analyser : - la précision numérique, - la vitesse de convergence, - la stabilité, - l'influence du pas de discrétisation.

Les résultats obtenus sont comparés à la solution exacte afin d'évaluer les erreurs commises par chaque méthode.

---

2. Algorithme général

La démarche suivie dans ce TP se décompose en quatre étapes principales.

2.1 Étape 1 — Définition du problème

On considère une équation différentielle ordinaire du premier ordre de la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

La solution exacte est connue, ce qui permet une comparaison directe entre solution analytique et solution numérique.

2.2 Étape 2 — Implémentation des méthodes numériques

Les trois méthodes numériques sont implémentées sous forme de fonctions : - Euler explicite, - Heun, - Runge-Kutta d'ordre 4.

Chaque méthode calcule une approximation de la solution sur un intervalle $[t_0, T]$ à l'aide d'un pas h.

2.3 Étape 3 — Calcul de la solution exacte et des erreurs

La solution exacte $y_{exact}(t)$ est évaluée aux mêmes points de discrétisation.

L'erreur absolue est définie par :

$$E(t) = |y_{num}(t) - y_{exact}(t)|$$

On s'intéresse en particulier à : - l'erreur maximale, - l'erreur au temps final.

2.4 Étape 4 — Visualisation des résultats

Pour chaque méthode, on représente graphiquement : - la solution numérique et la solution exacte, - l'évolution de l'erreur en fonction du temps, - l'influence du pas de temps sur la précision.

---

3. Présentation des méthodes numériques

3.1 Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler est la plus simple des méthodes numériques pour les EDO. Elle est définie par :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Elle est d'ordre 1, ce qui implique une convergence lente et une sensibilité élevée au pas de temps.

3.2 Méthode de Heun (Euler améliorée)

La méthode de Heun améliore la méthode d'Euler en utilisant une prédiction-correction :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)))$$

Elle est d'ordre 2 et offre une meilleure précision que la méthode d'Euler pour un coût de calcul modéré.

3.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

La méthode RK4 est une méthode très utilisée en pratique. Elle repose sur quatre évaluations intermédiaires de la pente :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Elle est d'ordre 4, ce qui lui confère une excellente précision même pour des pas relativement grands.

---

4. Étude du problème test

4.1 Équation différentielle considérée

L'équation différentielle test utilisée dans ce TP est choisie de manière à posséder une solution exacte connue.

4.2 Paramètres numériques

Les simulations sont effectuées pour différentes valeurs du pas de temps :

$$h \in \{h_1, h_2, h_3, \ldots\}$$

Les conditions initiales sont identiques pour toutes les méthodes afin de garantir une comparaison équitable.

---

5. Résultats numériques

5.1 Méthode d'Euler

- Convergence lente
- Erreur importante pour des pas de temps élevés
- Méthode simple mais peu précise

5.2 Méthode de Heun

- Amélioration significative de la précision par rapport à Euler
- Bon compromis entre coût de calcul et précision
- Comportement stable pour des pas modérés

5.3 Méthode RK4

- Très grande précision
- Erreur très faible même pour des pas relativement grands
- Coût de calcul plus élevé mais largement compensé par la qualité des résultats

---

6. Analyse comparative

Méthode	Ordre	Précision	Coût de calcul	Robustesse
Euler	1	Faible	Très faible	Faible
Heun	2	Moyenne	Faible	Bonne
RK4	4	Très élevée	Plus élevé	Très bonne

---

7. Conclusion générale

- La méthode d'Euler est simple mais peu adaptée aux problèmes nécessitant une bonne précision.
- La méthode de Heun constitue un excellent compromis pour des calculs rapides et fiables.
- La méthode RK4 est la plus performante en termes de précision et reste la méthode de référence pour de nombreux problèmes.

Le choix de la méthode dépend du compromis souhaité entre précision, coût de calcul et stabilité numérique.