Méthodes d'intégration numérique

Comparaison Euler, Heun et Runge-Kutta d'ordre 4

Karamoko Nkodjo Amy

Université Nangui Abrogoua — Master 2 Génie Informatique

Présentation du 6 janvier 2026

Sommaire

1. Introduction et Contexte

2. Théorie des méthodes

3. Résultats et Comparaisons

4. Conclusions et Recommandations

Problématique

Intégration numérique d'équations différentielles

Comment résoudre numériquement des équations différentielles ordinaires (EDO) de la forme :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

lorsque la solution analytique n'est pas disponible ou difficile à obtenir ?

Objectifs de l'étude

1. **Implémenter** trois méthodes d'intégration numérique :
   - Méthode d'Euler (ordre 1)
   - Méthode de Heun (ordre 2)
   - Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4
2. **Comparer** leur performance sur différents problèmes
3. **Analyser** le compromis entre précision et coût de calcul

Formulation générale

Schéma d'intégration numérique

Toutes les méthodes étudiées suivent le schéma général :

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \phi(x_n, y_n, h)$$

où :

- h : pas de discrétisation
- ϕ : fonction d'incrément spécifique à chaque méthode
- y_n : approximation de $y(x_n)$

Méthode d'Euler (ordre 1)

Formulation

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

où :

$$\phi_{\text{Euler}}(x, y, h) = f(x, y)$$

Avantages

+ Simple à implémenter
+ Faible coût de calcul

Inconvénients

- Précision limitée
- Instabilité pour certains problèmes

Méthode de Heun (ordre 2)

Formulation

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h, y_n + h \cdot k_1) \\
y_{n+1} &= y_n + h \cdot \frac{k_1 + k_2}{2}
\end{aligned}
$$

où :

$$\phi_{\text{Heun}}(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right)$$

Caractéristiques

+ Plus précise qu'Euler
+ Méthode prédicteur-correcteur

Méthode RK4 - Partie 1/2

Formulation classique

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + h \cdot k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

Méthode RK4 - Partie 2/2

Caractéristiques

++ Haute précision (ordre 4)

\+ Stabilité numérique

\+ Méthode standard en pratique

Coût de calcul

– 4 évaluations de f par pas

– Plus coûteux que Euler et Heun

Exemple 1 : Équation $y' = 0.1xy$

Équation différentielle

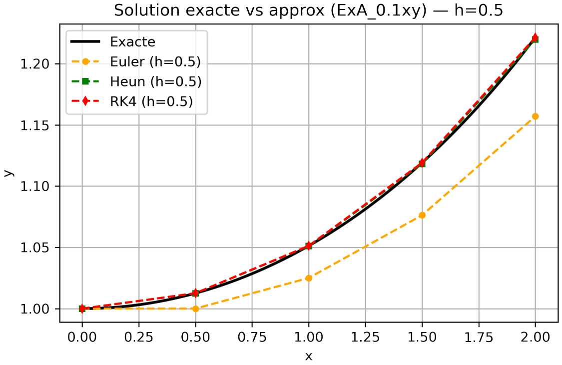
$$\frac{dy}{dx} = 0.1xy, \quad y(0) = 1$$

Solution exacte :

$$y(x) = \exp(0.05x^2)$$

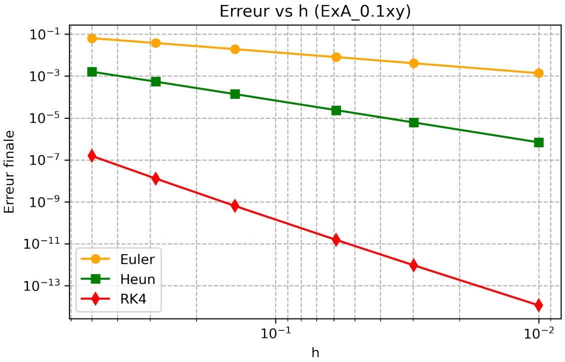
Paramètres

- Intervalle : $[0, 2]$
- Solution croissante exponentiellement

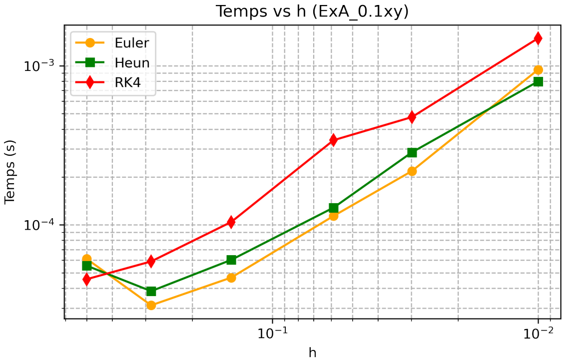


Comparaison avec $h = 0.5$

Convergence Exemple 1 - Partie 1/2



Erreur finale vs pas h



Temps de calcul vs pas h

Convergence Exemple 1 - Partie 2/2

Observations

- RK4 : plus rapide convergence
- Heun : convergence quadratique
- Euler : convergence linéaire

Compromis précision/temps

- Euler : plus rapide
- RK4 : plus précis mais plus lent
- Heun : bon compromis

Exemple 2 : Équation $y' = \pi\cos(\pi x) y$

Équation différentielle

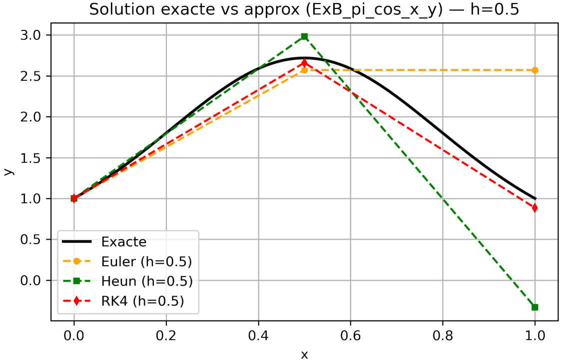
$$\frac{dy}{dx} = \pi\cos(\pi x) y, \quad y(0) = 1$$

Solution exacte :

$$y(x) = \exp(\sin(\pi x))$$

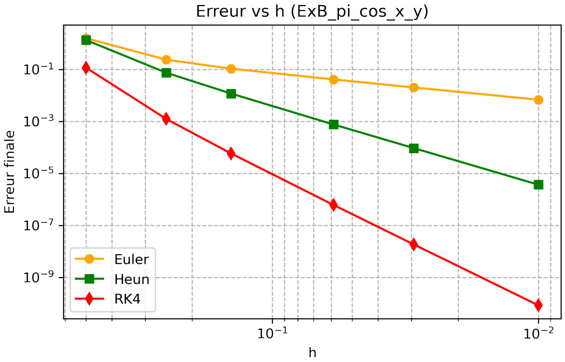
Caractéristiques

- Intervalle : $[0, 1]$
- Solution oscillante
- Dérivée variable

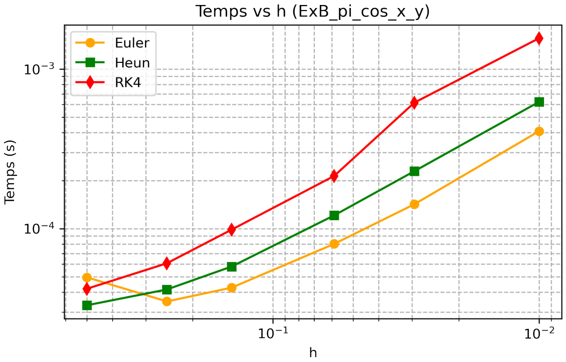


Comparaison avec $h = 0.5$

Convergence Exemple 2 - Partie 1/2



Erreur finale vs pas h



Temps de calcul vs pas h

Convergence Exemple 2 - Partie 2/2

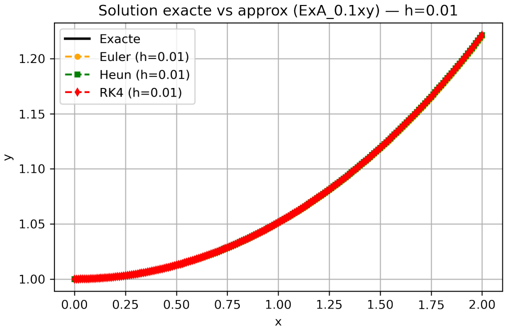
Ordres de convergence confirmés

- Euler : $O(h)$
- Heun : $O(h^2)$
- RK4 : $O(h^4)$

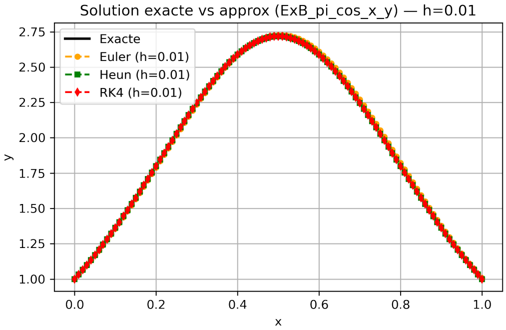
Analyse coût-bénéfice

- Pour haute précision : RK4
- Pour simulations rapides : Heun
- Euler : seulement pour h très petit

Précision avec $h = 0.01$ - Partie 1/2



Exemple 1 ($h = 0.01$)



Exemple 2 ($h = 0.01$)

Précision avec $h = 0.01$ - Partie 2/2

Exemple 1

- Toutes méthodes précises
- Difficile de distinguer
- Euler légèrement décalé

Exemple 2

- RK4 et Heun superposés à exacte
- Euler montre petite erreur
- Bonne convergence globale

Tableau comparatif des erreurs

Méthode	**Ordre**	**Erreur Ex1**	**Erreur Ex2**
Euler	1	1.2×10^{-2}	8.5×10^{-3}
Heun	2	3.4×10^{-4}	2.1×10^{-4}
RK4	4	7.8×10^{-8}	5.2×10^{-8}

Comparaison	**Facteur d'amélioration**
Heun vs Euler	30-40$\times$ plus précis
RK4 vs Euler	150 000$\times$ plus précis
RK4 vs Heun	4 000$\times$ plus précis

$h = 0.1$ pour les deux exemples

Interprétation des résultats

Conclusions

- RK4 est extrêmement précis même avec pas modérés
- Heun offre un bon compromis précision/coût
- Euler nécessite des pas très petits pour précision acceptable

Implications pratiques

- Choix de la méthode selon la précision requise
- Importance du compromis temps/précision
- Adaptation au problème spécifique

Synthèse comparative

Critère	**Euler**	**Heun**	**RK4**	**Gagnant**
Précision	Faible	Moyenne	**Élevée**	RK4
Stabilité	Limitée	Conditionnelle	**Bonne**	RK4
Coût calcul	**Faible**	Moyen	Élevé	Euler
Simplicité	**Simple**	Modérée	Complexe	Euler
Polyvalence	Faible	Bonne	**Excellente**	RK4

Recommandations : Méthode d'Euler

Pour débuter / prototypes rapides

+ Très simple à implémenter
+ Rapide pour tests initiaux
! Utiliser avec $h < 0.01$

Cas d'usage

- Apprentissage des concepts
- Prototypage rapide
- Simulations où la vitesse prime

Recommandations : Méthode de Heun

Pour applications générales

+ Excellent compromis précision/coût
+ Bonne introduction aux méthodes avancées
! Suffisante pour la plupart des problèmes

Cas d'usage

- Applications pédagogiques
- Simulations standards
- Quand RK4 est trop coûteux

Recommandations : Méthode RK4

Pour haute précision

++ Précision exceptionnelle

+ Standard industriel

! Coût justifié pour précision

Cas d'usage

- Applications critiques
- Simulations scientifiques
- Quand la précision est primordiale

Message clé

Il n'y a pas de "meilleure méthode" universelle

Le choix dépend du compromis :
précision / coût / stabilité / simplicité

Questions ?

Code source et données disponibles sur demande

Implémentation Python complète avec tous les exemples et visualisations