CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA

Autor: ***ROBERTO PINHEIRO***

ACERVOSABER

Sua fonte de trabalhos e de conhecimentos na NET

Sumário

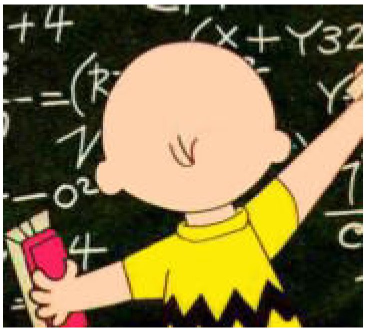
OBJETIVO

Por que motivo muitas pessoas detestam matemática e tem tantas dificuldades no seu aprendizado??? Acredito que isto ocorra pela forma que ela é ensinada nas escolas. O aluno não consegue entender por que deve aprender um mundo de fórmulas e fazer cálculos tão trabalhosos, já que não vê aplicações práticas para uso no seu dia-a-dia. Dessa forma a matéria acaba tornando-se para ele terrivelmente maçante e entediante.

Também é interessante observar que mesmo entre alunos que frequentam cursos de nível superior, muitos enfrentam dificuldades em diversas matérias, por não possuírem um bom domínio de matemática elementar.

Este curso tem por objetivo fazer com que se aprenda matemática elementar de uma forma simples e prazerosa. Nele será abordado a História da Matemática com o relato de diversos acontecimentos históricos para ilustrar a importância da matemática no desenvolvimento das civilizações, desde a Antiguidade até os dias atuais. Além de diversas curiosidades, você ficará conhecendo inúmeras aplicações práticas e situações em que a matemática pode ser útil no nosso dia-a-dia.

INTRODUÇÃO



A palavra matemática originou-se na Grécia. Do grego "mathematike" e do latim "mathematica" significa "a ciência que se ensina" ou "o que é ensinado".

Um dos objetivos do ensino da matemática é fazer com que as pessoas aprendam a resolver os problemas da vida cotidiana. A matemática está presente em todos os ramos de atividade do ser humano. É imprescindível para o desenvolvimento de todas as outras ciências. Muitas vezes a utilizamos sem nos dar conta de sua importância.

Quando o homem se encontra diante de problemas que envolvem a necessidade de quantificar, ele utiliza a linguagem matemática. Isso vem ocorrendo ao longo da história, desde tempos remotos. A possibilidade de matematizar situações da vida é encontrada em praticamente todos os povos, nas mais variadas regiões e culturas. É uma coisa própria do ser humano.

Matematizar é conhecer bem a linguagem matemática, compreender suas idéias e seus métodos e dominar as suas técnicas.

No dia-a-dia a matemática pode nos auxiliar numa infinidade de situações práticas distintas. Utilizamos a Matemática ao conferir as contas de água e luz; ao calcular o reajuste das prestações da casa própria ou a quantidade de adubo necessária em plantações.

A matemática ajuda também a calcular a quantidade de tijolos necessária para se construir uma casa; as dimensões da engrenagem de uma máquina; o desnível necessário para o funcionamento da bomba no sítio e inúmeros outros problemas.

O grande cientista Albert Einstein dizia:

"O princípio criador reside na matemática."

"A matemática goza perante todas as outras ciências de um prestígio especial e isto por uma razão única: é que suas teses são absolutamente certas e irrefutáveis, ao passo que as outras ciências são controvertidas até certo ponto e sempre em perigo de serem derrubadas por fatos recém-descobertos. A matemática goza deste prestígio porque é ela que dá as outras ciências certa medida de segurança que elas não poderiam alcançar sem a matemática."

No curso será abordada a importância da matemática no desenvolvimento das civilizações antigas. Também serão apresentadas diversas situações em que a matemática pode ser útil no nosso dia-a-dia.

Seja bem-vindo(a) ao fascinante mundo da Matemática!!!

AULA 1 - SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

1.1. INTRODUÇÃO

Um **sistema de numeração** é um conjunto de regras que permite escrever todos os números naturais através de símbolos.

Numerais ou algarismos são os símbolos usados para a representação dos números.

Em algumas culturas antigas (Egito, China, Grécia e Roma), os números eram representados por símbolos específicos. Seu valor não dependia da posição, e sim do símbolo. Os números eram representados por símbolos escritos um ao lado do outro, normalmente em ordem decrescente, entre os quais se subtendia a soma.

Os gregos e os romanos usavam letras do alfabeto como algarismos.

No ábaco, as bolinhas são todas iguais, mas o valor de cada bolinha depende do arame em que ela está. Certamente, foi esta característica do ábaco que fez surgir a idéia de dar valores diferentes a um mesmo algarismo, dependendo do lugar em que ele está escrito.

Por exemplo, em 3333, o algarismo 3 assume diferentes valores:

3333

aqui, o 3 vale 3 unidades ou 3
aqui, o 3 vale 3 dezenas ou 30
aqui, o 3 vale 3 centenas ou 300
aqui, o 3 vale 3 unidades de milhar ou 3000

Antes de aparecer o sistema de numeração desenvolvido pelos hindus, o princípio posicional já aparecia em sistemas de numeração, como o dos babilônios, por exemplo.

Porém, foi com o sistema de numeração hindu que o princípio posicional ganhou força total. Mas isto só aconteceu com a criação de um símbolo para o nada (zero).

Algarismos romanos são cada um dos símbolos representativos dos números, no sistema romano de numeração (I, V, X, L, C, D, M).

Algarismos arábicos são cada um dos símbolos representativos dos números, na notação atualmente adotada e que se baseia no sistema decimal de numeração (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Dizemos, por exemplo, que 507 é um número de três dígitos ou três algarismos.

O sistema de numeração que normalmente usamos é o sistema decimal (base 10); no entanto existem outros sistemas de numeração, como por exemplo, o sistema sexagesimal (de base 60) que é usado em medição de ângulos ou em unidades de tempo e o sistema binário (base 2) que é usado em computação.

Daremos enfoque a alguns dos primeiros sistemas, seus símbolos e regras de uso, bem como á evolução na forma de representação dos números, até chegarmos ao sistema utilizado hoje em dia.

1.2. SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIO

Um dos primeiros sistemas de numeração de que se tem notícia é o dos egípcios. Os numerais egípcios também são conhecidos como hieróglifos e foram criados há, aproximadamente, 5 mil anos.

O sistema de numeração egípcio baseava-se em sete números-chave: 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000.

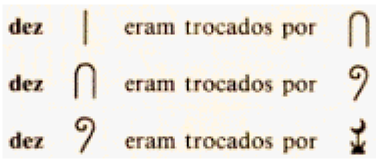
Os egípcios usavam símbolos para representar esses números.

O sistema de numeração criado pelos egípcios tornou possível a escrita de números muito grandes, a partir da idéia de agrupamentos.

No quadro seguinte apresentamos os símbolos para a unidade e para os seis primeiros agrupamentos de dez:

Símbolo Egípcio	Descrição do símbolo	O número na nossa notação
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo a apontar	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

Cada dez símbolos iguais eram trocados por um novo símbolo. Desse modo:



e assim por diante.

Vejamos agora as regras para o uso desses símbolos:

- cada marca só pode ser repetida nove vezes.
- cada dez marcas são trocadas por outra, de um agrupamento superior.
- para saber o valor do número escrito, é preciso somar os valores dos símbolos utilizados.

Dizemos que o sistema egípcio tem base dez, pois as trocas são efetuadas a cada grupo de dez símbolos.

Abaixo temos um exemplo de como se representava o número 3629 na numeração egípcia.

3629 = 

Os hieróglifos egípcios são quase todos figuras da flora e da fauna do Nilo, além dos utensílios que eles utilizavam. Mas a notação egípcia deixou de ser pictográfica para ser ideográfica, quando as figuras já não mais representavam elas mesmas e era preciso decifrá-las. Por exemplo, a flor de lótus, com seu caule, não significava mais flor de lótus e sim mil; um dedo indicador, ligeiramente inclinado, representava dez mil; uma rã ou girino de rabo bem caído representava cem mil; um homem ajoelhado, erguendo os braços para o céu, representava um milhão, etc.

1.3. SISTEMA DE NUMERAÇÃO CHINÊS

Os caracteres tradicionais do sistema numérico chinês são esses:

一	二	三	四	五	六	七	八	九
1	2	3	4	5	6	7	8	9

十	百	千	万
10	100	1000	10000

Esses símbolos são ainda usuais tanto na China como no Japão, mas para os cálculos eles utilizam o sistema indo-arábico.

oitocentos e vinte e quatro

八	百	二	十	四
(8)	(100)	(2)	(10)	(4)

$8 \times 100 + 2 \times 10 + 4$

cinco mil e noventa e sete

五	千	九	十	七
(5)	(1000)	(9)	(10)	(7)

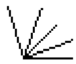
$5 \times 1000 + 9 \times 10 + 7$

1.4. SISTEMA DE NUMERAÇÃO ROMANO

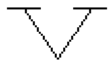
De todas as civilizações da Antiguidade, a dos romanos foi sem dúvida a mais importante. Seu centro era a cidade de Roma. Desde sua fundação, em 753 a.C., até ser ocupada por povos estrangeiros em 476 d.C., seus habitantes enfrentaram um número incalculável de guerras de todos os tipos. Inicialmente, para se defenderem dos ataques de povos vizinhos, mais tarde, nas campanhas de conquista de novos territórios. Foi assim que, pouco a pouco, os romanos foram conquistando a Península Itálica e o restante da Europa, além de uma parte da Ásia e o norte da África. Apesar de a maioria da população viver na miséria, em Roma havia luxo e muita riqueza, usufruída por uma minoria rica e poderosa. Poupas luxuosas, comidas finas e festas grandiosas faziam parte do dia-a-dia da elite romana. Os romanos foram muito espertos. Eles não inventaram símbolos novos para representar os números; usaram as próprias letras do alfabeto.

Os numerais romanos sofreram um longo processo de evolução. Veja alguns exemplos de como os símbolos se transformaram:

O cinco, a princípio, era escrito assim:



indicando os cinco dedos da mão. Depois, com o passar do tempo, ele foi simplificado para:



O cinqüenta teve a seguinte transformação:

O mil teve a seguinte transformação:

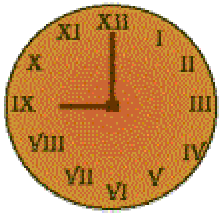
Na época de Cristo, os símbolos que tinham seu uso generalizado eram os seguintes:

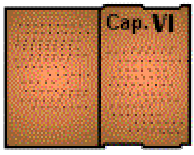
Letras	Valores
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	100

Outras modificações aconteceram. Os romanos, que utilizavam um princípio aditivo, agrupando até quatro símbolos iguais para representar um novo número, passaram a utilizar um princípio subtrativo, que consistia em escrever à esquerda de um símbolo maior, um valor menor que dele devia ser subtraído.

Atualmente os algarismos romanos são usados principalmente:

- Nos números de capítulos de um livro.
- Nas cenas de um teatro.
- Nos nomes de papas e imperadores.
- Na designação de congressos, olimpíadas, assembléias...
- Em alguns mostradores de relógio.





1.4.1. Algarismos romanos - Regras de uso

1) Se à direita de uma cifra romana se escreve outra igual ou menor, o valor desta se soma ao valor da anterior.

Exemplos:

- VI = 6
- XXI = 21
- LXVII = 67

2) A letra "I" colocada diante da "V" ou de "X", subtrai uma unidade; a letra "X", precedendo a letra "L" ou a "C", lhes subtrai dez unidades e a letra "C", diante da "D" ou da "M", lhes subtrai cem unidades.

Exemplos:

- IV = 4
- IX = 9
- XL = 40
- XC = 90
- CD = 400
- CM = 900

3) Em nenhum número se pode pôr uma mesma letra mais de três vezes seguidas.

Exemplos:

- XIII = 13
- XIV = 14
- XXXIII = 33
- XXXIV = 34

4) A letra "V", "L" e a "D" não podem se duplicar porque outras letras ("X", "C", "M") representam seu valor duplicado.

5) A leitura de um número romano muitas vezes exige alguns cálculos. Veja como os romanos faziam para ler, por exemplo, o número XCVI:

Primeiro determinavam a letra de maior valor. C = 100.

Depois subtraíam de C o valor da letra que vem antes. XC = 100 - 10 = 90.

Por fim, somavam ao resultado os valores das letras que vêm depois de C.

XCVI = 90 + 5 + 1 = 96

6) O número 1000 é representado pela letra M. Assim, MM corresponde a 2000 e MMM a 3000. E os números maiores que 3000? Para escrever 4000 ou números maiores que ele, os romanos usavam um traço horizontal sobre as letras que representavam esses números.

7) Um traço multiplica o número representado abaixo dele por 1000. Dois traços multiplica o número abaixo deles por 1 milhão.

O sistema de numeração romano foi adotado por muitos povos, porém assim como no sistema egípcio, também na numeração romana era trabalhoso escrever certos números. Veja:

três mil oitocentos e oitenta e oito: MMMDCCCLXXXVIII

1000+1000+1000+500+100+100+100+50+10+10+10+5+1+1+1

1.5. SISTEMA DE NUMERAÇÃO MESOPOTÂMICO

O simples fato de termos dez dedos inspirou o homem a contar em grupos de 10. Os matemáticos chamaram esta prática de contagem na base dez ou na base decimal.

O sistema de numeração normalmente usado na Mesopotâmia, diferentemente dos utilizados pela maioria das civilizações tanto antigas quanto modernas não era o decimal (base 10) e sim o sexagesimal (base 60). Talvez a base sessenta tenha sido adotada conscientemente e legalizada no interesse da metrologia, pois uma grandeza de sessenta unidades pode ser facilmente subdividida em metades, terços, quartos, quintos, sextos, décimos, dozeavos, quinzeavos, vigésimos e trigésimos, fornecendo assim dez possíveis subdivisões. Qualquer que tenha sido a origem, o sistema sexagesimal de numeração teve vida notavelmente longa, pois até hoje restos permanecem, infelizmente para a consistência, nas unidades de tempo e medida dos ângulos, apesar da forma fundamentalmente decimal de nossa sociedade.

No sistema numérico da Mesopotâmia, a unidade era representada por este sinal , parecido com uma cunha.

Para escrever dez, eles usavam o mesmo símbolo, porém em posição horizontal:  . Assim escreviam os números de 10 a 20 da seguinte forma:

O cinquenta e nove era escrito assim:

Talvez fosse a inflexibilidade do material de escrita mesopotâmio, talvez fosse uma centelha de inspiração o que fez com que os babilônios percebessem que seus dois símbolos para unidades e dezenas bastavam para representar qualquer inteiro, por maior que fosse, sem excessiva repetição. Isso se tornou possível pela invenção, que fizeram, há cerca de 4000 anos, da notação posicional (o mesmo princípio que assegura a eficácia de nossa forma numeral). Isto é, os antigos babilônios viram que seus símbolos podiam ter função dupla, tripla, quádrupla ou em qualquer grau, simplesmente recebendo valores que dependessem de suas posições relativas na representação de um número.

As cunhas no símbolo cuneiforme para cinquenta e nove são agrupadas bem juntas de modo a formar quase o equivalente de uma única cifra. Um espaçamento adequado entre grupos de cunhas pode estabelecer posições, lidas da direita para a esquerda, que correspondem a potências crescentes da base; cada grupo tem então um "valor local" que depende de sua posição.

Dessa forma o número 63 era representado da seguinte forma: , ou seja um grupo de sessenta mais três. O símbolo da esquerda, separado dos outros três, vale sessenta.

Curiosidade: Em 1800 a.C., os sumérios, habitantes do Oriente Médio, desenvolveram o mais antigo sistema numérico conhecido. Em vez dos dez algarismos de hoje (0, 1, 2, 3... até 9), o sistema caldeu tinha 60 símbolos. O sistema de frações sexagesimais foi transferido à Grécia e posteriormente para a Europa, sendo até hoje clara a sua influência, que se perpetuou através do hábito de medir o tempo (1 hora tem 60 minutos; cada minuto tem 60 segundos) e os ângulos (o círculo tem 360º, que é seis vezes 60).

1.6. SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO-ARÁBICO

Os sistemas de numeração egípcio e romano são pouco práticos, pois, para representar certos números, os egípcios e romanos precisavam enfileirar uma grande quantidade de símbolos.

Nas numerações egípcia e romana, para se escrever números muito grandes seria preciso criar novos símbolos: um para o dez mil, outro para o dez milhões, outro para o cem milhões etc. Além disso, apresentavam uma outra dificuldade: era muito trabalhoso efetuar cálculos usando esses critérios. Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração. Eles souberam reunir três características que já apareciam em outros sistemas numéricos da Antiguidade:

- o sistema de numeração hindu é decimal (o egípcio, o romano e o chinês também o eram);

- o sistema de numeração hindu é posicional (o babilônio também era);

- o sistema de numeração hindu tem o zero, isto é, um símbolo para o nada.

Estas três características, reunidas, tornaram o sistema de numeração hindu o mais prático de todos. Não é sem motivo que hoje ele é usado quase no mundo todo.

1.7. ALGARISMOS

1.7.1. Algarismos romanos - Origem e história

De todas as civilizações da Antiguidade, a dos romanos foi sem dúvida a mais importante. Seu centro era a cidade de Roma. Desde sua fundação, em 753 a.C., até ser ocupada por povos estrangeiros em 476 d.C., seus habitantes enfrentaram um número incalculável de guerras de todos os tipos. Inicialmente, para se defenderem dos ataques de povos vizinhos; mais tarde, nas campanhas de conquista de novos territórios. Foi assim que, pouco a pouco, os romanos foram conquistando a Península Itálica e o restante da Europa, além de uma parte da Ásia e o norte da África.

Apesar de a maioria da população viver na miséria, em Roma havia luxo e muita riqueza, usufruída por uma minoria rica e poderosa. Roupas luxuosas, comidas finas e festas grandiosas faziam parte do dia-a-dia da elite romana. Foi nesta Roma de miséria e luxo que se desenvolveu e aperfeiçoou o número concreto, que vinha sendo usado desde a época das cavernas. Eles não inventaram nenhum símbolo novo para representar os números; usaram as próprias letras do alfabeto: I - V - X - L - C - D - M.

1.7.2. Algarismo e algoritmo - Origem e história

É curiosa a origem da palavra algarismo. No ano de 825 d.C. o trono do Império Árabe era ocupado pelo Califa al-Mamum. Ele tinha interesse que seu reino se transformasse em um grande centro de ensino, onde se pudesse dominar todas as áreas do conhecimento. E para atingir esse objetivo, contratou e trouxe para Bagdá os grandes sábios muçulmanos daquela época.

Mohammed ibm-Musa al-Khowarizmi

Entre esses sábios estava o matemático e astrônomo árabe Mohammed ibm-Musa al-Khowarizmi. À ele foi destinado a função de traduzir para o árabe os livros de matemática vindos da Índia. Numa dessas traduções al-Khowarizmi se deparou com aquilo que ainda hoje é considerado, a maior descoberta no campo da matemática: O Sistema de Numeração Decimal.

al-Khowarizmi escreveu vários livros. Num deles, intitulado "Sobre a arte hindu de calcular", baseado provavelmente numa tradução árabe de Brahmagupta, al-Khowarizmi fez uma exposição minuciosa dos numerais hindus. Esse livro foi levado para a Europa e traduzido para a língua latina, que na época era falada pelos estudiosos europeus.

O matemático italiano Leonardo Fibonacci (1180-1250) foi o primeiro europeu a usar os algarismos arábicos. O livro em que Fibonacci descreve o novo sistema de numeração é um clássico célebre completado em 1202 que tem o título de "Liber abaci" (ou livro do ábaco). Até então, os europeus utilizavam os algarismos romanos, como o I (que vale 1), o V (5) e o X (10). Fibonacci também adotou o zero, que os europeus já conheciam, mas na prática, não empregavam.

Leonardo de Pisa (Fibonacci)

Apesar de al-Khowarizmi nunca ter manifestado nenhuma pretensão de originalidade quanto ao sistema, cuja origem hindu ele assumiu como fato, leitores europeus descuidados começaram a atribuir não só o livro, mas a numeração, ao autor. Dessa forma o sistema de numeração ficou conhecido como o de al-Khowarizmi, ou mais descuidadamente, algorismi que acabou dando origem ao termo algarismo.

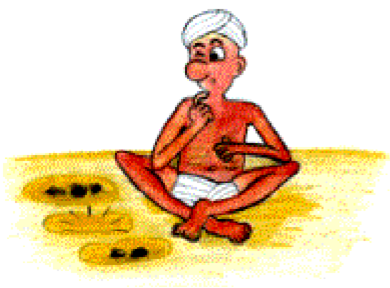
O termo algoritmo também deriva do nome de Al-Khowarizmi e significa, de uma forma geral, qualquer regra especial de processo ou operação (como o método de Euclides para encontrar o máximo divisor comum, por exemplo).

1.7.3. A origem do zero

Ao que tudo indica a noção do zero surgiu na Índia. O uso do zero pelos hindus é registrado no século VII, na obra "Brahmasphutasidanta" (A abertura do universo), do matemático BRAHMAGUPTA.

Muitos cálculos efetuados pelos hindus eram realizados com a ajuda de um ábaco, instrumento que para a época poderia ser considerado uma verdadeira máquina de calcular.

O ábaco usado inicialmente pelos hindus consistia em meros sulcos feitos na areia, onde se colocavam pedras. Cada sulco representava uma ordem. Assim, da direita para a esquerda, o primeiro sulco representava as unidades; o segundo as dezenas e o terceiro as centenas. No exemplo ao lado temos a representação do número 203, ou seja, 2 centenas mais três unidades.



Sulco vazio do ábaco indica que não existe nenhuma dezena. Mas na hora de escrever o número faltava um símbolo que indicasse a inexistência de dezenas. E, foi exatamente isso que fizeram os hindus, eles criaram o tão desejado símbolo para representar o sulco vazio e o chamaram de Sunya (vazio). Dessa forma, para escrever o número representado no ábaco de areia, escreviam o 2 para as centenas, o 3 para as unidades e entre eles faziam o desenho do sulco vazio, para indicar que não havia no número nenhuma dezena.

Ao introduzir o desenho do sulco vazio entre os dois outros símbolos os hindus criaram o zero que, desde aquela época já se parecia com o que usamos hoje. Esses conhecimentos foram transmitidos aos povos árabes, que entraram em contato com os hindus através de atividades comerciais, guerras e conquistas.

Por volta do século XV os árabes invadiram a Europa, para onde levaram, juntamente com seus costumes e conhecimentos, o sistema de numeração que tinham aprendido com os hindus.

A obra de al-Khowarizmi chega à Espanha islamizada no século X. Os símbolos numéricos hindus são adotados pelos comerciantes italianos e propagam-se por toda a Europa. Ganham o nome de algarismos arábicos em contraposição ao sistema numérico romano, ainda utilizado na época. Os europeus por sua vez, introduziram esse sistema nas Américas, quando conquistaram seus territórios e dominaram os povos que neles viviam.

1.7.4. Mudanças na escrita dos algarismos

Antes da invenção da imprensa, que ocorreu no século XV, os livros eram copiados manualmente, um a um. Como cada copista tinha a sua caligrafia, durante os longos séculos de copiagem manual as letras e os símbolos para representar números sofreram muitas modificações.

Além disso, como o sistema de numeração criado pelos hindus foi adotado pelos árabes e passado aos europeus, é natural que, nesse percurso, a forma de escrever os dez algarismos sofresse alterações.

Após a invenção da imprensa, as variações foram pequenas. Os tipos foram sendo padronizados. Mas, mesmo assim, as modificações são inevitáveis.

No visor das calculadoras eletrônicas e dos relógios digitais, os dez algarismos são representados assim:

1.8. APLICAÇÕES DOS SISTEMAS NUMÉRICOS

É bastante lógico que usemos o **sistema decimal** como base para todos os cálculos matemáticos do dia-a-dia pelo simples fato de temos DEZ dedos nas mãos... fica fácil contar nos dedos quando precisamos.

Os babilônios utilizavam o **sistema de numeração sexagesimal** e não o decimal. As medidas usadas para ângulos e para a contagem das horas são heranças do sistema numérico de base 60 usado pelos antigos povos da Mesopotâmia.

Considerada muito prática, a base 60 pode ser dividida por vários números (1, 2, 3, 4, 5, 6 e 12) sem recorrer ao uso de frações. Seus múltiplos também permitem expressar com facilidade alguns fenômenos físicos.

O sistema de frações sexagesimais foi transferido à Grécia e posteriormente para a Europa, sendo até hoje clara a sua influência, que se perpetuou através do hábito de medir o tempo (1 hora tem 60 minutos; cada minuto tem 60 segundos) e os ângulos (o círculo tem 360º, que é seis vezes 60).

Computadores usam o **sistema binário** por um motivo simples: Existem apenas dois níveis de tensão presentes em todos os circuitos lógicos: níveis baixo e alto (que são chamados de 0 e 1 por conveniência... para podermos medi-los sem ter que recorrer a um multímetro!).

O **sistema hexadecimal** também tem o seu lugar: é a forma mais abreviada de escrever um conjunto de bits.

1.9. O ÁBACO - ORIGEM E HISTÓRIA

O ábaco é um aparelho digital de cálculo simples que permite realizar todas as operações aritméticas básicas. Consiste normalmente de um tabuleiro ou moldura de madeira composto de uma série de cordões ou fios paralelos. Nesses fios são enfiadas bolinhas perfuradas, que podem ser movidas livremente.

Ábaco

As operações são efetuadas mudando-se a posição de algumas bolas em relação à outras e, através de uma complexa manipulação pode-se inclusive extrair raízes.

O ábaco durante milhares de anos foi o único instrumento que a humanidade possuía para as operações de calcular. Segundo a lenda, o ábaco foi inventado ao redor do ano 2000 a.C. por um mandarim chinês com o nobre intuito de facilitar ao povo fazer contas e assim conhecer o valor das mercadorias que era obrigado a entregar como impostos. Esse mandarim foi degolado por ordem do Imperador, pois ao mesmo interessava manter o povo na mais completa ignorância.

Na antiga Mesopotâmia, os comerciantes já utilizavam o ábaco. O ábaco também era usado no antigo Egito, de onde foi para a Grécia e para Roma. Além do número de pedras ou botões, os egípcios utilizavam cores em seu ábaco, para facilitar os negócios: bolas brancas, por exemplo, indicavam o crédito a favor do cliente e as negras registravam os débitos.

Um pouco diferente, o ábaco romano consistia de um tabuleiro com diversos sulcos paralelos pelos quais deslizavam pedras ou botões. Seu funcionamento, porém era semelhante ao do ábaco atual. Essa máquina de calcular antiga tinha um importante papel nas transações comerciais. Principalmente lembrando-se que no sistema de numeração greco-romano ainda não existia o zero, o que provocava uma grande dificuldade para o cálculo escrito.

A partir do século XII, na Europa, este sistema de cálculo foi sendo paulatinamente substituído por outros. Atualmente na China e no Japão, o ábaco ainda é usado na maioria das operações aritméticas.

Também em alguns países europeus, como a Grã-Bretanha e na zona de influência da antiga União Soviética, ainda se usa o ábaco nas operações comerciais. Além disso, e de forma mais generalizada, ele continua sendo empregado no ensino das operações básicas de aritmética.

AULA 2 - ARITMÉTICA, GEOMETRIA E ÁLGEBRA

2.1. ARITMÉTICA

Geralmente, as pessoas começam seus estudos de matemática com os números. Aprendem a contar, a escrever os números e a operar com eles (adição, subtração, multiplicação e divisão). De início só conhecem os números naturais (1, 2, 3, 4, 5, ...); depois, aprendem a fazer cálculos com frações. Esses conhecimentos iniciais de matemática costumam ser chamados de aritmética.

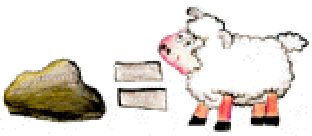
Aritmética é o ramo da Matemática que se ocupa do estudo das propriedades elementares dos números naturais e das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão inteira, potência e extração de raízes inteiras entre esses números.

Curiosidades:

1) **Aritmética - Origem**: Aritmética deriva da palavra grega "arithmos" que significa números.

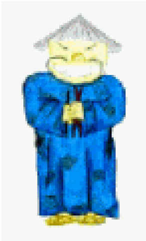
2) **Dígito - Origem**: A palavra dígito vem da palavra latina "digitus", que significa dedo. É claro que isto tem a ver com o uso dos dedos nas contagens.

3) **Cálculo - Origem**: A palavra cálculo vem do latim "calculus", que significa pedrinhas ou pequenas pedras. Acredita-se que à muitos milhares de anos, quando o homem não dominava nenhum sistema de contagem, os pastores para controlar a quantidade de ovelhas de seus rebanhos utilizavam essas pequenas pedras. Pela manhã, o procedimento era o seguinte: para cada ovelha que saía do cercado guardava-se uma pedra num saquinho. No fim do dia cada pedrinha guardada no saquinho pela manhã era retirada assim que cada ovelha retornava ao aprisco, dessa forma eles podiam saber se todas as ovelhas tinham retornado. Essa prática desenvolvida pelos pastores para fazer contas utilizando pedras deu origem a palavra calcular, que é tanto utilizada na matemática e que significa, contar com pedras.



2.1.1. Números negativos - História

Ao contrário dos números naturais e fracionários positivos que tem raízes em experimentações geométricas, os números negativos, os irracionais e os complexos, surgiram da manipulação algébrica, como na resolução de equações de 1º e 2º graus.



Os matemáticos chineses da antiguidade tratavam os números como excessos (números positivos) ou faltas (números negativos). Os chineses realizavam cálculos em tabuleiros, onde representavam os excessos com palitos vermelhos e as faltas com palitos pretos. No entanto, não aceitavam a idéia de um número negativo poder ser solução de uma equação.

Os Matemáticos hindus descobriram os números negativos quando tentavam formular um algoritmo para a resolução de equações quadráticas e permitiram conceber um novo tipo de símbolo para representar dívidas, que posteriormente o Ocidente chamaria de negativo.

Alguns historiadores escreveram que foram problemas com dinheiro que interpretaram o número negativo como perda. A palavra "Negativo" pode ter surgido desta época em que os valores eram NEGADOS quando se obtinha raízes negativas de uma equação.

A primeira vez que explicitamente as regras que regem a aritmética com os números negativos aparecem em uma obra foi na do matemático Brahmagupta que data do ano 628 d.C. Ele não só utilizou os negativos em seus cálculos como os considerou entidades separadas e os dotou de uma aritmética concordante com a dos inteiros. Muitos séculos se passaram para que o interesse pelos números negativos fosse retomado.

Em 1545, ocorreu a primeira sugestão de que certas contas podem ter como resultado um número negativo. A proposta causa espanto porque, na época, parece absurdo algo ser menor que nada, ou seja, zero. Exemplo deste fato seria Michael Stifel (1487- 1567) que se recusou a admitir números negativos como raízes de uma equação, chamando-lhes de "numeri absurdi".

Nos séculos XVI e XVII, muitos matemáticos europeus não apreciavam os números negativos e, se esses números apareciam nos seus cálculos, eles consideravam-nos falsos ou impossíveis.

O italiano Geronimo Cardano, usou os novos números para resolver problemas como o de alguém que gastou mais do que possui no banco, tendo então saldo negativo.

Assim, ele resolveu equações que até então ficavam sem resposta, embora ele próprio considerava os números negativos como "Numeri ficti".

No século XVII, com o nascimento das ciências modernas, amplia-se o uso dos números negativos. Aparecem as primeiras intenções de legitimá-los.

Foi o matemático Albert Girard (1590-1639) o primeiro a reconhecer explicitamente a utilidade algébrica de admitir as raízes negativas e imaginárias como soluções formais das equações; porque ele permitia uma regra geral de resolução na construção de equações através de suas raízes.

No final do século XVII, surgiu a obra de Viéte, esta mais tarde ampliada admitiu que as expressões literais pudessem tomar valores negativos, no entanto, a Álgebra não teria conhecido um tal avanço se esta generalização do número não tivesse sido acompanhada por uma descoberta igualmente fundamental, realizada em 1591 por Viéte e aperfeiçoada em 1637 por Descartes: a notação simbólica literal.

No séculoXVIII foi descoberta uma interpretação geométrica dos números positivos e negativos como sendo segmentos de direções opostas.

A legitimidade dos números negativos deu-se definitivamente por Hermann Hankel (1839-1873) na obra publicada em 1867, "Teoria do Sistema dos Números Complexos". Hankel formulou o princípio de permanência e das leis formais que estabelecem um critério geral de algumas aplicações do conceito de número.

2.1.2. Métodos de Multiplicação e Divisão dos Egípcios

A multiplicação e a divisão dos egípcios eram efetuadas por uma sucessão de duplicações.

- No cálculo do produto de 12 por 27. A multiplicação era efetuada duplicando 12 até que a soma das duplicações excedesse 27.

1	12
2	24
4	48
8	96
16	192

Na coluna da esquerda, eram escolhidos os números que somados resultavam em 27:

1 + 2 + 8 + 16 = 27

Na coluna da direita, eram tomados os valores correspondentes que eram somados.

12 + 24 + 96 + 192 = 324

Este número é o resultado da multiplicação: 12 x 27 = 324

- No cálculo da Divisão de 184 por 8. era dobrado sucessivamente o divisor 8 até que o número de duplicações excedesse o dividendo 184.

1	8
2	16
4	32
8	64
16	128

Na coluna da direita, eram escolhidos os números que somados resultavam em 184:

128 + 32 + 16 + 8 = 184

Na coluna da esquerda, eram tomados os valores correspondentes que eram somados:

1 + 2 + 4 + 16 = 23

Este é o resultado da divisão:

2.2. GEOMETRIA

Também no começo de seus estudos matemáticos, as pessoas entram em contanto com certas figuras, como o triângulo, o quadrado e o círculo, resolvendo os primeiros problemas sobre medidas. Essa parte da matemática é conhecida pelo nome de geometria.

2.2.1. Geometria - Origem e história

O nome Geometria em grego significa medida da terra. (geo = terra; metria = medida).

Todos os anos, no mês de julho, as águas do Rio Nilo inundavam uma vasta região ao longo de suas margens. As águas do Rio Nilo fertilizavam os campos, beneficiando a agricultura do Egito. Cada pedaço de terra às margens desse rio era precioso e tinha que ser muito bem cuidado.

Por volta do ano 3000 a.C. o Faraó Sesóstris repartiu essas terras entre uns poucos agricultores privilegiados.

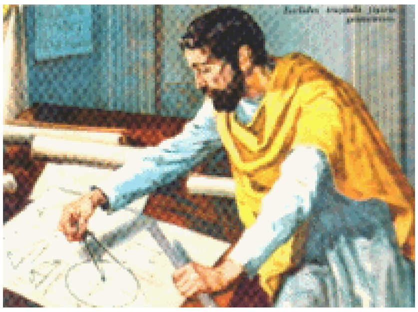
Só que todos os anos em setembro quando as águas baixavam, funcionários do governo faziam a marcação do terreno de cada agricultor. Esses funcionários eram chamados de agrimensores ou estiradores de corda. Isso se explica pelo fato de que usavam cordas com uma unidade de medida assinalada, essa corda era esticada para que se verificasse quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno. Mas na maioria das vezes acontecia da unidade de medida escolhida não caber um número inteiro de vezes nos lados do terreno. Para solucionar o problema da medição das terras, os egípcios criaram um novo número, o número fracionário, que era representado com o uso de frações.

Os construtores recorriam a geometria para fazer edificações. As famosas pirâmides, construídas próximas ao rio Nilo, são um ótimo exemplo disso. Os E-gípcios ganharam tanta fama que os matemáticos gregos iam constantemente ao Egito em busca de novas aplicações na geometria.

As primeiras unidades de medida referiam-se direta ou indiretamente ao corpo humano: palmo, pé, passo, braça, cúbito. Por volta de 3500 a.C. - quando na Mesopotâmia e no Egito começaram a ser construídos os primeiros templos - seus projetistas tiveram de encontrar unidades mais uniformes e precisas. Adotaram a longitude das partes do corpo de um único homem (geralmente o rei) e com essas medidas construíram réguas de madeira e metal, ou cordas com nós, que foram as primeiras medidas oficiais de comprimento.

Por volta de 600 a.C, os matemáticos gregos começaram a sistematizar os conhecimentos geométricos que foram adquirindo, fazendo com que a Geometria deixasse de ser puramente experimental. Entre 600 e 300 a.C., a geometria se firmou como um sistema organizado, e muito disso se deve ao grego Euclides, mestre na escola de Alexandria (Cidade do Egito, famosa por seu farol), que publicou por volta de 325 a.C. "Os Elementos", uma obra contendo treze volumes sobre Aritmética, Geometria e Álgebra.

Os seis primeiros capítulos são sobre Geometria plana elementar; os três seguintes sobre Teoria dos Números; o livro X, sobre incomensuráveis (hoje diríamos que esse livro trata de números irracionais) e os três últimos, sobre Geometria no espaço. Dos treze livros de Euclides os mais admirados têm sido o quinto (sobre a teoria das proporções) e o décimo (sobre os incomensuráveis). Esse trabalho de Euclides foi o texto mais influente de todos os tempos e com maior número de edições publicadas. É tão vasto que alguns historiadores não a-creditaram que fosse obra de um só homem.



Euclides

Em 1637, o filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596-1650) criou a geometria analítica. A nova disciplina é uma espécie de mistura entre a álgebra e a geometria, pois Descartes, ensina a transformar pontos, retas e circunferências em números. Depois mostra como fazer contas com as figuras geométricas. Na geometria analítica, um ponto pode ser escrito como um par de números na forma (1, 2). Uma reta pode ser uma equação como x + y = b.

René Descartes

2.2.2. Aplicações da geometria

Existem muitas situações práticas que envolvem o cálculo de áreas e volumes.

Um azulejista, ao ser chamado para executar um serviço começará seu trabalho calculando a área das paredes que vão ser revestidas. Depois, ele vai comprar o material e, quando pedir os azulejos, o balconista certamente lhe perguntará quantos metros quadrados ele deseja. Assim, calculando a área das paredes, e das portas e janelas, o azulejista poderá pedir a quantidade certa de azulejos, evitando a falta ou o desperdício de material.

Uma vez elaborado o projeto de uma casa, é necessário preparar seu orçamento. É preciso saber, por exemplo, qual a quantidade de tijolos a ser usada na obra. Para isso, devemos saber quantos metros quadrados de parede a casa terá. Esse cálculo é necessário não apenas para saber a quantidade de material que se deve comprar, mas também para avaliar o custo da mão-de-obra que vai ser utilizada.

As caldeiras industriais são fabricadas com chapas de aço. Quando são projetadas, é preciso calcular a área das chapas que vão ser usadas na sua construção. Esse cálculo serve para fazer o orçamento do custo da caldeira e, também, para prever o peso que ela terá.

Os garotos da rua acertaram a bola numa vidraça, e vão ter de comprar uma nova. Você já foi ao vidraceiro comprar um pedaço de vidro? Quando damos as medidas do vidro que queremos, o vidraceiro faz alguns cálculos e diz o preço a pagar.

Esses são alguns dos exemplos que mostram que o cálculo de áreas faz parte do dia-a-dia de muitos profissionais.

O conceito de volume é utilizado na fabricação de embalagens comerciais.

2.3. ÁLGEBRA

Na álgebra representamos números por letras (como a letra "x") e aprendemos a trabalhar com expressões em que as letras representam números.

2.3.1. A variável "aha"

Os egípcios foram os primeiros a representar a variável. Grandes construtores, vivendo numa sociedade complexa com grandes centros urbanos, eles lidavam com inúmeros movimentos, e portanto, com múltiplas formas de variação quantitativa. Logo enfrentaram a questão: como escrever em linguagem numérica um número desconhecido?

Deram um salto genial na história do pensamento humano quando usaram apenas uma palavra para descrever todas as quantidades desconhecidas: aha, que significa pilha, monte ou montão. Essa palavra não determinava apenas uma quantidade, mas qualquer quantidade. Era com ela que os matemáticos egípcios representavam a variável.

2.3.2. Álgebra - Origem e história

Por volta do ano 400 d.C., uma idéia audaciosa de um estudioso de Alexandria começou a mudar toda a história da matemática. Esse estudioso era Diofante de Alexandria, que viveu de 325 a 409 e fugindo da tradição grega que era centrada na geometria, passou a utilizar em seus estudos, símbolos para facilitar a escrita e os cálculos matemáticos. Os símbolos criados por Diofante fizeram com que as expressões, até então escritas totalmente com palavras, pudessem ser representadas com abreviações. Era o ínicio de um novo ramo da matemática: a álgebra.

A principal obra de Diofante que conhecemos é "Arithmetica", tratado que era originalmente em treze livros, dos quais só os seis primeiros se preservaram. Assemelha-se à álgebra babilônica em muitos aspectos; mas enquanto os matemáticos babilônios se ocupavam principalmente com soluções aproximadas de equações determinadas de até terceiro grau, a Arithmetica de Diofante (tal como a temos) é quase toda dedicada à resolução exata de equações, tanto determinadas quanto indeterminadas.

Diofante viveu numa época muito tumultuada, presenciando, por exemplo, a queda do Império Romano, e isso não foi nada bom para a matemática, que teve todo um processo de desenvolvimento interrompido devido ao clima de guerra que se criou e principalmente pela destruição de muitos centros de estudos, fazendo com que a simbologia de Diofante não saísse do estágio inicial.

Só no ano de 650 aproximadamente, com a ascensão do Império Árabe, é que houve uma retomada dos estudos matemáticos. De 786 a 809 no reinado do Califa Harun al-Raschid (o mesmo das mil e uma noites) os muçulmanos conquistaram vários territórios, fazendo surgir grandes cidades, centros de comércio e de artesanato. Todas essas atividades comerciais, as viagens marítimas e através do deserto, provocaram um grande desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos.

Em 809, com a morte de al-Raschid, seu filho al-Mamum assumiu o trono e governou até 833. al-Mamum criou em Bagdá um centro de ensino e contratou os mais brilhantes sábios muçulmanos da época. Entre eles estava Mohamed Ibn-Musa al-Khowarizmi, grande matemático que no ano 825 escreveu um livro dedicado ao estudo das equações chamado Hisab al-jabr w'al-muqãbalah.

Com seu uso, na Europa, o livro ficou conhecido como Al-jabr, que acabou virando Álgebra. Foi com esse livro que os europeus aprenderam o ramo da matemática que leva esse nome.

al-Khowarizmi, deu sua contribuição, mas como muitos matemáticos de diversas épocas, não conseguiu expressar as equações totalmente em símbolos. Isso só aconteceu 700 anos depois (por volta de 1590) com o francês François Viète.

Em 1591, o francês François Viète (1540-1603) foi o primeiro a usar letras como símbolo de incógnitas. Até então as equações, os números e as incógnitas eram apresentados por extenso, de maneira trabalhosa e confusa. Viète passou a representar suas equações utilizando como símbolos as letras do alfabeto. Uma soma, por exemplo, fica assim: $x+y = z$. Isso torna a resolução de problemas extremamente mais fácil.

Curiosamente, Viète não era uma matemático, mas um advogado apaixonado pela matemática. A contribuição de Viète foi tão importante que ele entrou para a história da matemática com o título de "Pai da Álgebra".

Além de Viète, outros matemáticos da mesma época deram suas contribuições para o aperfeiçoamento da álgebra. Entre eles, Robert Record, inglês que criou o símbolo (=) para a expressão (igual a). Esse sinal foi usado foi usado por Thomas Harriot, outro matemático inglês, responsável pela eliminação das poucas palavras que ainda restavam na álgebra de Viète.

A passagem para uma álgebra completamente simbólica foi obra de René Descartes, grande matemático e filósofo francês, que introduziu as seguintes inovações para aperfeiçoar a álgebra de Viète:

1) passou a indicar a multiplicação pelo ponto (.);

2) criou a notação que usamos hoje para os expoentes de uma potenciação;

3) passou a usar as primeiras letras do alfabeto para os coeficientes da incógnita e os termos independentes (se literais) e as últimas letras para representar as incógnitas.

Observação: É claro que sempre existe a possibilidade de confundir letras representando incógnitas com letras que fazem parte de palavras. Por este motivo, logo tornou-se habitual, para simbolizar incógnitas, usar as letras do fim do alfabeto. São as menos usadas nas palavras comuns, e assim há menos possibilidades de confusão. De todas a menos usada é o "x", e por isso é a mais comumente usada para representar uma incógnita.

AULA 3 - SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\wedge$	e
$\vee$	ou
$\cap$	intersecção
$\cup$	união
$\subset$	está contido
$\supset$	contém
$\not\subset$	não está contido
$\not\supset$	não contém
$\in$	pertence
$\notin$	não pertence
$\Rightarrow$	implica acarreta
$\Leftrightarrow$	implicação recíproca, equivalência
$\mid$	tal que
$\exists$	existe
$\exists \mid$	existe um único
$\forall$	qualquer que seja
C_A^B	complementar de A em relação a B
$\varnothing$	cojunto vazio
U	conjnto universo
$\therefore$	portanto

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
Σ	somatória
$n!$	fatorial de “n”
$=$	igual
$\neq$	diferente
$<$	menor
$>$	maior
$\leq$	menor ou igual
$\geq$	maior ou igual
$\|n\|$	módulo de “n”
$\sim$	semelhante
∞	infinito
$\cong$	aproximadamente
$\int$	integral
%	porcentagem
f	função
f^{-1}	função inversa

3.1. SÍMBOLOS MATEMÁTICOS - ORIGEM

» Os símbolos $>$ e $<$ foram criados pelo inglês THOMAS HARRIOT (1560 à 1650) em 1631.

» Os símbolos $\geq$ e $\leq$ foram usados pelo primeira vez pelo francês PIERRE BOUGUER (1698-1758) em 1734.

» O inglês ROBERT RECORD criou o símbolo $=$ (igual a) em 1540.

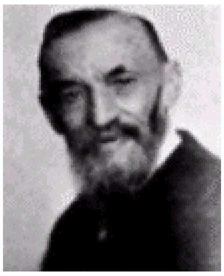
» O símbolo $\cong$ (aproximadamente igual a) foi usado em 1875 por ANTON STEINHAUSER.

» O símbolo $\pm$ foi usado pelo inglês WILLIAM OUGTHRED (1574-1660) em Clavis Mathematicae, publicado em 1631 .

» Devemos ao filósofo e matemático GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ o símbolo $\sim$ (é semelhante). Os símbolos de Leibniz para diferenciação e integração ($\int$) são seus maiores triunfos no campo da notação. Leibniz, na verdade foi um dos maiores formadores de notação, inferior apenas a Euler nesse ponto.

Leibniz

» O italiano GIUSEPPE PEANO (1858-1932), em 1894 introduziu os símbolos $\in$, $\exists$, $\cup$, $\cap$, $\supset$ em seus trabalhos.



Giuseppe Peano

» Muitos dos símbolos matemáticos que usamos atualmente devemos ao matemático suíço LEONHARD EULER (1707-1783). Euler ocupou-se de quase todos os ramos da Matemática Pura e Aplicada sendo o maior responsável pela linguagem e notações que usamos hoje.

Euler

Uma série de símbolos matemáticos foi por ele criado ou aproveitado e estandardizado, como:

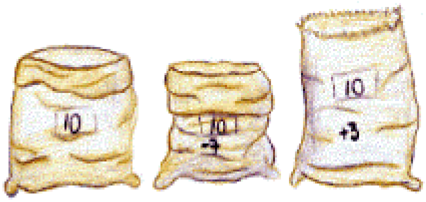
- $f(x)$ - para funções (1734)
- e - para a base dos logaritmos naturais (1727)
- i - para a unidade imaginária (1777)
- $\sum$ - para somatório (1755)
- π - para o número irracional pi (1737)
- lx - para logaritmo de "x"
- a, b, c - para os lados de um triângulo ABC

- A, B, C para os ângulos opostos de um triângulo ABC
- s - para o semiperímetro do triângulo ABC
- r - para o raio do circulo inscrito do triângulo ABC
- R - para o raio do circulo circunscrito do triângulo ABC

Quase todos os símbolos que usamos atualmente em Trigonometria são praticamente os mesmos criados por Euler em 1748.

3.1.1. Sinais (-) e (+) para indicar subtração e soma

A partir dos séculos XV e XVI as grandes mudanças no modo de vida fizeram o homem atuar e trabalhar com quantidades contrárias: dinheiro gasto e ganho, mercadoria vendida e estocada.



Se no início do dia, um comerciante tinha em seu armazém duas sacas de 10 quilogramas cada, e ao findar o dia ele tivesse vendido 7 kilogramas de feijão, para não se esquecer de que naquele saco faltavam 7 kilogramas, ele escrevia o número 7 com um tracinho na frente (-7). Mas se ele resolvesse despejar no outro saco os 3 kilogramas que restavam, escrevia o número 3 com dois tracinhos na frente (+3), para se lembrar que naquele saco havia 3 quilogramas a mais de feijão do que a quantidade inicial.

Outro exemplo a ser mencionado é o do comércio de vinho. Tonéis de vinho que chegavam do fabricante eram cuidadosamente pesados. Se o tonel continha mais vinho do que o especificado, o mesmo era marcado com um sinal em forma de cruz (+). Se o tonel continha menos vinho do que o especificado, o mesmo era marcado com um pequeno traço (-). Dessa forma os sinais + (mais) e - (menos) eram usados no comércio para indicar, respectivamente, excesso ou diferença.

Ao longo do tempo, foram utilizadas várias notações (normalmente em forma de palavras ou letras) para representar a soma e a subtração. O primeiro autor a empregar uma notação especial (não literal) para indicar a adição e a subtração foi o matemático alemão JOHANN WIDMAN, em seu livro sobre aritmética comercial denominado "Rechenung auff allen Kauffmanschafft" publicado em Leipzig em1489. Nos problemas de negócios, a adição era indicada por meio de um traço longo, cortado ao meio por um pequeno traço vertical e a subtração era indicada simplesmente por meio de um traço longo. É possível que Widman tenha colhido a idéia dos sinais + e - ao observar as contas dos homens que trabalhavam no comércio.

No livro In Aritmetica een Sonderlinge Excellet Boeck, publicado em 1537, pelo alemão GIELIS VON DER HOECK, já as duas operações elementares (adição e subtração) aparecem indicadas por sinais que muito se aproximam dos que são usados atualmente.

Para a subtração, continuava o traço horizontal, não muito longo; para a adição, uma cruz do tamanho dos algarismos com que eram representados os números.

Portanto dos sinais, usados outrora pelos comerciantes da Idade Média, surgiram os símbolos " + " e " - " empregados hoje no mundo inteiro.

3.1.2. Origem dos sinais (x) e (.) para indicar multiplicação

O sinal banalíssimo "x", que hoje usamos para representar uma multiplicação é relativamente moderno. Segundo os mais eminentes historiadores, foi inventado pelo geômetra inglês GUILHERME OUGTHRED (1572 à 1660). Ele empregou-o pela primeira vez, no livro Clavis Matematicae publicado em 1631. A chamada Cruz de Santo André, para indicar a multiplicação, foi aceita, com certo júbilo, por todos os matemáticos. Oughtred era religioso e, certamente devoto de Santo André.

Ainda em 1631, THOMAS HARRIOT colocava um ponto entre os fatores para indicar o produto a efetuar. Em 1637, RENÉ DESCARTES já se limitava a escrever os fatores justapostos, indicando, desse modo abreviado, um produto qualquer.

No dia 29 de julho de 1698, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) escreveu uma carta à John Bernoulli com os seguintes comentários:

Não gosto de x como símbolo para multiplicação, pois ele é facilmente confundível com um simples x da álgebra... Freqüentemente eu simplesmente relaciono a multiplicação de duas quantidades por um simples ponto entre elas, como em ZC·LM. Da mesma forma, quando quero designar uma divisão não uso um mas sim dois pontos (:), por ser tão prático quanto...

3.1.3. Origem dos sinais (:) , (÷) , (/) e (—) para indicar divisão

A barra horizontal " — " para indicar divisão é de origem árabe. No século XIII, o matemático italiano Leonardo de Pisa, conhecido como FIBONACCI, foi o primeiro matemático europeu a utilizar essa notação; porém somente no século XVI seu uso tornou-se comum.

O sinal " : " para indicar divisão foi usado primeiramente pelo inglês GUILHERME OUGTHRED em 1647.

O sinal " ÷ ", também foi sugerido pelo famoso filósofo e matemático inglês GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716).

A barra inclinada " / " para indicar divisão foi sugerida em 1845 por De Morgan.

3.1.4. O emprego das letras no cálculo

Os gregos já empregavam letras para designar números e mesmo objetos. É com os gregos que surgem os primeiros vestígios do cálculo aritmético efetuado sobre letras. Diofanto de Alexandria (300 a.C.) empregava as letras com abreviação, mas só tinha um simbolismo perfeitamente sistematizado para uma única quantidade, para as suas potências até a sexta e para os inversos dessas potências.

Em geral, os gregos representavam as quantidades por linhas, determinadas por uma ou duas letras, e raciocinavam como em Geometria. Os cálculos sobre letras são mais numerosos nos autores hindus do que nos gregos. Os árabes do Oriente empregavam símbolos algébricos a partir da publicação da "Aljebr walmukâ bala" de Alkarismí (século IX) e os árabes do Ocidente, a partir do século XII; no século XV, Alcalsâdi introduz novos símbolos. A Álgebra moderna só adquire caráter próprio, independente da Aritmética, a partir de Viète, que sistematicamente substitui a Álgebra numérica pela Álgebra dos símbolos.

AULA 4 - CONJUNTOS

4.1. CONCEITOS BÁSICOS

Conjunto é o agrupamento, a coleção de alguma coisa.

Elementos são os objetos que compõem o conjunto.

Relação de Pertinência: É a relação que indica se um determinado elemento pertence ou não a um determinado conjunto.

Exemplo:

A = {2,4,6,8,10}

2 $\in$ A (2 pertence a "A") 3 $\notin$ A (3 não pertence a "A").

É costume representar os conjuntos com as letras maiúsculas e os elementos com as letras minúsculas.

Curiosidade: A teoria dos conjuntos foi criada pelo matemático russo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 a 1918).

Georg Cantor

4.2. REPRESENTAÇÃO DOS CONJUNTOS

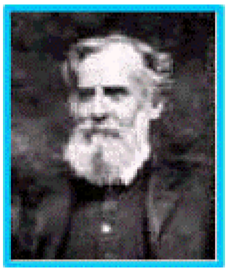
Por enumeração

Exemplo: O conjunto dos números inteiros ímpares menor que 10 é: {1,3,5,7,9}

Por propriedade

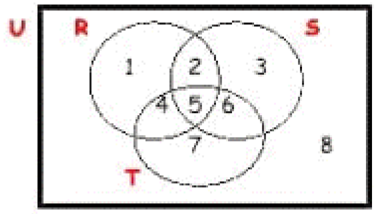
Exemplo: A = {x $\in \mathbb{N}$ | 3 < x < 8}

Por diagrama



John Venn

John Venn idealizou uma forma bastante simples de representar a idéia abstrata dos conjuntos, que são os diagramas.



4.3. TIPOS DE CONJUNTOS

4.3.1. Conjunto vazio

Chama-se vazio e indica-se por "$\varnothing$" o conjunto que não possui elemento algum.

Exemplo:

$A = \{0,1,2,3,4,5\}$

$B = \{x \notin A \mid x > 5\} \Leftrightarrow B = \varnothing$

É o conjunto mais amplo de todos os que estão sendo considerados. Por exemplo, se você está estudando a Geometria Plana, o seu conjunto universo é o Plano.

4.3.3. Subconjunto de um conjunto

Se "A" e "B" são dois conjuntos pode ocorrer que todo elemento de "A" também seja elemento de "B". Quando isso ocorre, dizemos que "A" é um sub-conjunto de "B".

Exemplo:

A = {3,5}

B = {0,1,2,3,4,5,6}

$A \subset B$ (A está contido em B) $B \supset A$ (B contém A)

Observação: O conjunto vazio está contido em todo conjunto.

4.4. OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

4.4.1. Intersecção

Se "A" e "B" são dois conjuntos quaisquer, sua intersecção é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a "A" e "B".

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

$\mathbf{A \cap A = A} \qquad \mathbf{A \cap \varnothing = \varnothing} \qquad \mathbf{A \cap B = B \cap A}$

Exemplo:

A = {a,b,c}

B = {b,c,d}

$A \cap B = \{b,c\}$

Conjuntos disjuntos

Se $A \cap B = \varnothing$, ou seja se "A" e "B" não têm elemento em comum, dizemos que:

"A" e "B" são disjuntos.

4.4.2. União

Se "A" e "B" são dois conjuntos quaisquer, sua união é o conjunto dos elementos que pertencem a "A" ou à "B".

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$A \cup A = A$ $A \cup \varnothing = A$ $A \cup B = B \cup A$

Exemplo:

A = {a,b,c}

B = {b,c,d}

$A \cup B$ = {a,b,c,d}

4.4.3. Diferença de conjuntos

A diferença A - B é o conjunto dos elementos de "A" que não pertencem a "B".

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Exemplo:

A = {a, b, c, d}

B = {c, e, f}

A - B = {a, b, d}

4.4.4. Conjunto complementar (C_A^B)

Quando $B \subset A$, o conjunto dos elementos de "A" que não pertencem a "B" (ou seja: a diferença A - B) chama-se conjunto complementar de "B" em relação a "A".

$C_A^B = A - B$, com $B \subset A$

Exemplo:

A = {0,1,2,3}

B = {0,1}

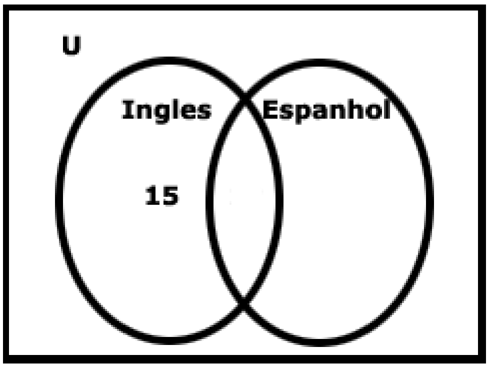
C_A^B = A - B = {2,3}

Exercício:

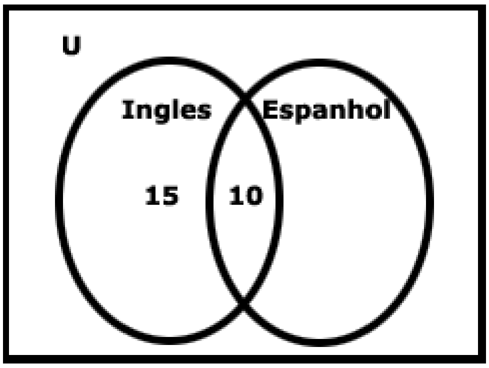
1) Numa empresa de 60 funcionários, 25 são os que falam inglês, 18 os que falam espanhol e 15 os que falam inglês e não falam espanhol. Calcule o número de funcionários dessa empresa que não falam inglês nem espanhol.

Resolução:

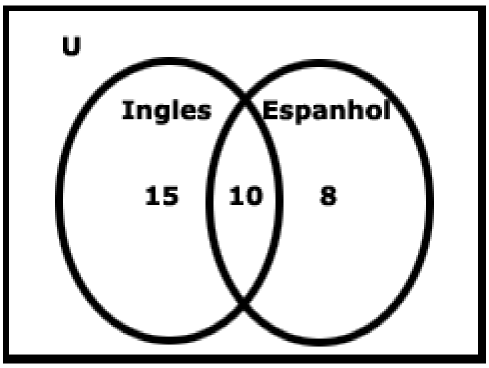
Utilizando o Diagrama de Venn, vamos inicialmente representar os funcionários que falam inglês e não falam espanhol.



Como são 25 funcionários que falam inglês, concluímos que os outros 10 falam inglês e espanhol, conforme indicado abaixo:

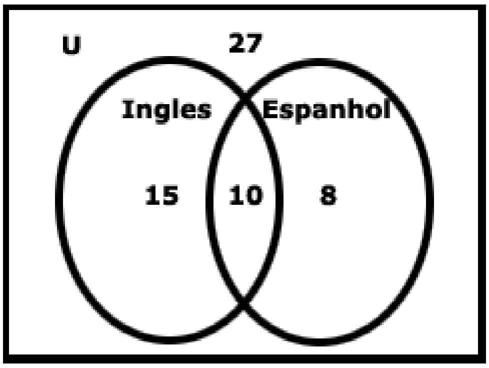


São 18 funcionários que falam espanhol. Como 10 falam inglês e espanhol, concluímos que 8 funcionários falam espanhol mas não falam inglês. Dessa forma temos:



Logo, o número de funcionários que falam inglês **ou** espanhol é: 15 + 10 + 8 = 33 funcionários.

Como a empresa tem 60 funcionários, concluímos que 27 funcionários (60 - 33 = 27) não falam inglês nem espanhol.



OBS.: U = Conjunto Universo

Resposta: 27 funcionários não falam inglês nem espanhol

4.5. NÚMERO DE ELEMENTOS DE UM CONJUNTO

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$n(A)$ = número de elementos do conjunto "A"

$n(B)$ = número de elementos do conjunto "B"

$n(A \cup B)$ = número de elementos do conjunto "$A \cup B$"

$n(A \cap B)$ = número de elementos do conjunto " $A \cap B$ "

Exemplo:

Sendo:

$A = \{a,b,c\}$

$B = \{b,c,d,e\}$

$C = A \cup B$

Determine o número de elementos do conjunto C.

$n(C) = n(A \cup B) = 3 + 4 - 2 = 5$

4.6. PRODUTO CARTESIANO

Dados dois conjuntos A e B, chama-se produto cartesiano de A por B ao conjunto de pares ordenados (x,y) onde $x \in A$ e $y \in B$, ou seja:

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$

Exemplo:

A = {1,2,3}

B = {4,5}

A x B = { (1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5) }

O produto cartesiano de dois conjuntos não é comutativo, ou seja: $A \times B \neq B \times A$ (a não ser que os elementos de "A" sejam iguais aos de "B").

B x A = { (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3) }

Observação: Se o número de elementos de "A" é "m" e o número de elementos de "B" é "n", então o número de elementos de "A x B" é "m x n".

Curiosidade: O termo "produto cartesiano" foi dado em homenagem ao matemático francês René Descartes.

4.7. CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO A

São os possíveis subconjuntos de um conjunto.

Exemplo: Dado A = {1,2,3}, o conjunto das partes de "A" é:

$P(A) = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$

Se A tem n elementos, P(A) tem 2^n elementos.

$P(A) = \{x \mid x \subset A\}$

Em relação ao conjunto A, x é um subconjunto.

Em relação ao conjunto P(A), x é um elemento.

ou seja: $x \subset A$ e $x \in P(A)$

Portanto: $\{1,2\} \subset A$ $\{1,2\} \in P(A)$

4.8. TESTE DE AVALIAÇÃO - CONJUNTOS

1) Dados os conjuntos A = {a, b, c, d}, B = {a, c, e} e C = (b, c, d, e}, determinar o conjunto (A - C) $\cup$ (C - B) $\cup$ (A $\cap$ B $\cap$ C):

a) {a, b, c, e}
b) A
c) {b, c, d}
d) C
e) nenhuma das alternativas anteriores

2) Se A é o conjunto dos inteiros múltiplos de 4 e B o conjunto dos inteiros múltiplos de 6, então A $\cap$ B é o conjunto dos inteiros múltiplos de:

a) 2
b) 6
c) 12
d) 24
e) 36

3) Sejam 3 conjuntos finitos, A, B e C. Determine o número de elementos de A $\cap$ (B $\cup$ C) sabendo-se que n(A $\cap$ B) = 15, n(A $\cap$ C) = 8 e n(A $\cap$ B $\cap$ C) = 3.

a) 10
b) 15
c) 17
d) 20
e) 23

4) Numa classe de 35 alunos, 13 são os que jogam voleibol; 22 os que jogam futebol; 15 os que jogam futebol e não jogam voleibol. Daí podemos concluir que o número de alunos que não joga futebol nem voleibol é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

5) Dado o conjunto A = {1, 3, 5, 6}. Quantos são os subconjuntos de A?

a) 16
b) 15
c) 12
d) 11
e) Nenhuma das alternativas anteriores

6) Dado o conjunto A = {3, 7, 9} é incorreto afirmar que:

a) {3,9} $\subset$ A
b) O conjunto A tem 8 subconjuntos
c) $\varnothing$ é um subconjunto de A
d) {3} $\in$ P(A)
e) {7} $\in$ A

7) Dado os conjuntos A = {2, 3, 5, 7, 8} e B = {2, 4, 5, 6, 7}, o complemento de $A \cap B$, em relação a $A \cup B$ é:

a) {4, 6}
b) {3, 4, 6, 8}
c) {2, 5, 7}
d) {2, 3, 4, 8}
e) {3, 8}

8) Dado os conjuntos A = {1, 2, 3, 5, 6, 8, 11}, B = {0, 1, 3, 5, 7, 8} e C = {0, 1, 2, 5, 6, 7}, o número de elementos de $(A \cup B)$ e de $(B \cup C)$, é respectivamente:

a) 9 e 8
b) 10 e 9
c) 10 e 8
d) 9 e 7
e) 11 e 9

9) Num levantamento feito numa empresa com 80 funcionários, constatou-se o seguinte: 39 falam inglês, 24 falam espanhol, 12 falam francês, 15 falam inglês e espanhol, 7 falam inglês e francês, 4 falam espanhol e francês e 3 falam os três idiomas. Com base nessas informações podemos concluir que o número de funcionários que não falam nenhum dos três idiomas é:

a) 23
b) 19
c) 30
d) 28
e) 25

10) O número de elementos da união de dois conjuntos A e B é $n(A \cup B) = 10$. Se $n(A) = 5$ e $n(A \cap B) = 2$, o número de elementos $n(A - B)$ é:

a) 7
b) 5
c) 3
d) 8
e) Nenhuma das alternativas anteriores

Gabarito

1) b
2) c
3) d
4) c
5) a
6) e
7) b
8) a
9) d
10) c

4.9. CONJUNTOS - RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

A = {a, b, c, d}

B = {a, c, e}

C = (b, c, d, e}

Logo temos:

$(A - C) = \{a\}$

$(C - B) = \{b, d\}$

$(A \cap B \cap C) = \{c\}$

Portanto:

$(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C) = \{a\} \cup \{b, d\} \cup \{c\}$

$(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C) = \{a, b, c, d\}$

Ou seja:

Resposta: $(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C) = A$

Teste 2

A = {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, ...}

B = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, ...}

Logo:

$A \cap B$ = {12, 24, 36, 48, 60, ...}

Observação: Outra forma de resolver esse problema é tirar o MMC entre 4 e 6 (que será visto na aula 6 - Cálculo Elementar)

MMC(4, 6) = 12

Resposta: $A \cap B$ é o conjunto dos inteiros múltiplos de 12

Teste 3

$n(A \cap B) = 15$

$n(A \cap C) = 8$

$n(A \cap B \cap C) = 3$

número de elementos de $A \cap (B \cup C)$ = ?

Para resolver esse problema, vamos utilizar o Diagrama de Venn

- Inicialmente inserimos 3 na área delimitada por $A \cap B \cap C$.

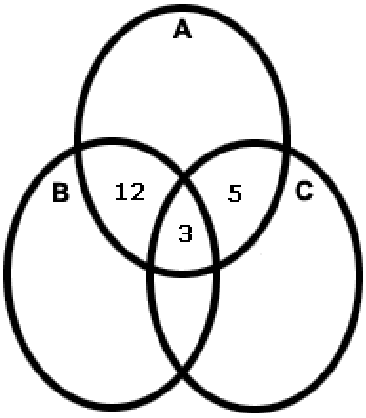
- O número de elementos de $A \cap B$ = 15. Logo o número de elementos de $(A \cap B) - (A \cap B \cap C)$ é:

15 - 3 = 12.

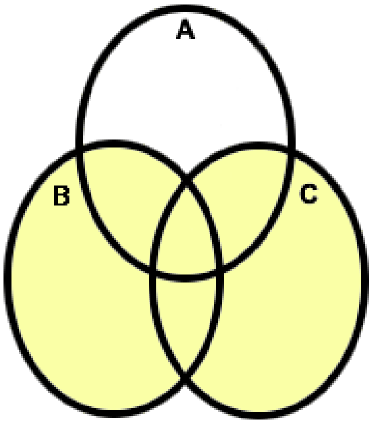
- O número de elementos de $A \cap C$ = 8. Logo o número de elementos de $(A \cap C) - (A \cap B \cap C)$ é:

8 - 3 = 5.

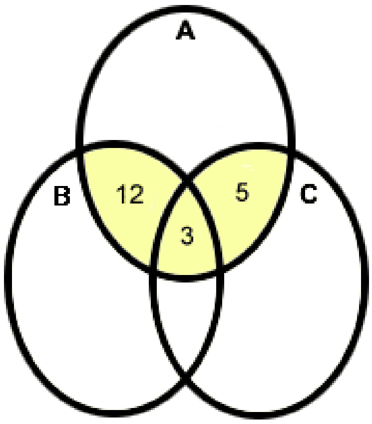
Logo temos:



B ∪ C é indicado pela área em destaque:



Logo, A ∩ (B ∪ C) é indicado pela área em destaque:

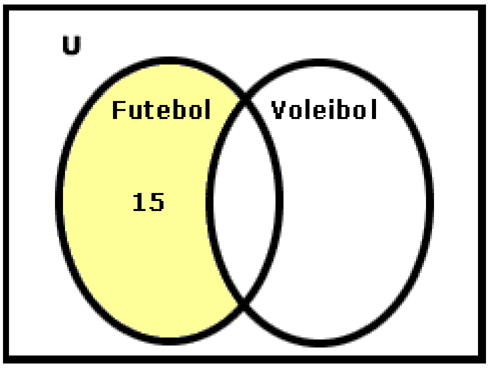


Portanto o número de elementos de A ∩ (B ∪ C) é: 12 + 3 + 5 = 20

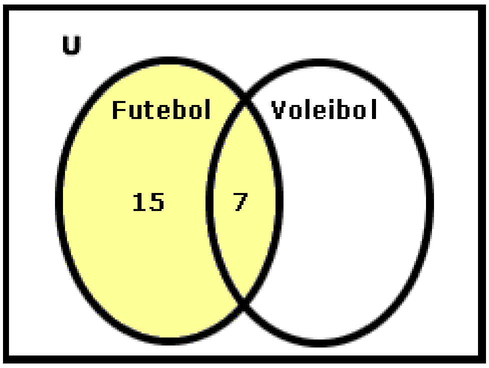
Resposta: Número de elementos de A ∩ (B ∪ C) = 20 elementos

Teste 4

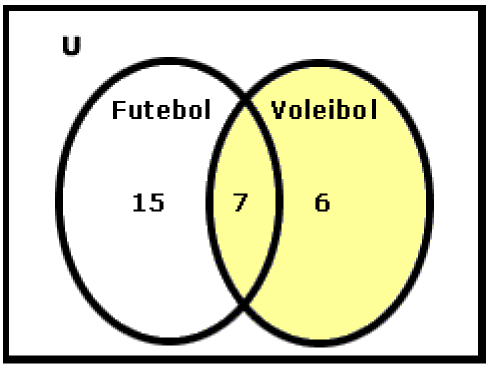
No diagrama de Venn, inicialmente vamos representar os que jogam futebol e não jogam voleibol:



Como são 22 os que jogam futebol, temos:

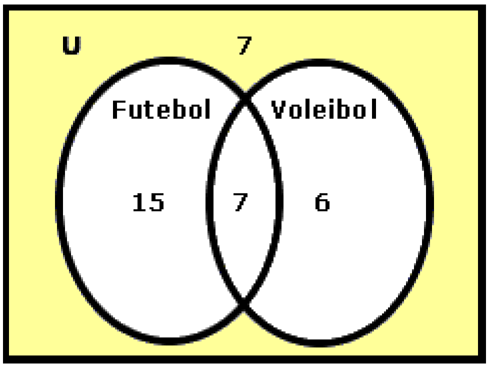


E como são 13 os que jogam voleibol, temos:



Portanto o número de alunos que jogam futebol ou voleibol é: 15 + 7 + 6 = 28 alunos.

Como na classe há 35 alunos, concluímos que 7 alunos (35 - 28 = 7) não jogam futebol nem voleibol.



Resposta: 7 alunos não jogam futebol nem voleibol

Teste 5

A = {1, 3, 5, 6}

O conjunto A tem 4 elementos, logo o número de subconjuntos de A é:

$n(A) = 2^n = 2^4 = 16$

A saber, os subconjuntos de A são: {∅, {1}, {3}, {5}, {6}, {1, 3}, {1, 5}, {1, 6}, {3, 5}, {3, 6}, {5, 6}, {1, 3, 5}, {1, 3, 6}, {1, 5, 6}, {3, 5, 6}, {1, 3, 5, 6}}

Resposta: O número de subconjuntos de A é 16

Teste 6

Dado: A = {3, 7, 9}

É incorreto afirmar que: $\{7\} \in A$, pois {7} é um subconjunto de A.

Portanto o certo seria: $\{7\} \subset A$ ou $\{7\} \in P(A)$ ou $7 \in A$

Resposta: É incorreto afirmar que: $\{7\} \in A$

Teste 7

A = {2, 3, 5, 7, 8} e B = {2, 4, 5, 6, 7}

$(A \cup B) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$(A \cap B) = \{2, 5, 7\}$

O complemento de $A \cap B$ em relação a $A \cup B$, são os elementos que existem em $A \cup B$ e não existem em $A \cap B$, ou seja:

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{3, 4, 6, 8\}$

Resposta: o complemento de $A \cap B$, em relação a $A \cup B$ é {3, 4, 6, 8}

Teste 8

A = {1, 2, 3, 5, 6, 8, 11}, B = {0, 1, 3, 5, 7, 8} e C = {0, 1, 2, 5, 6, 7}

$n(A \cup B) = ?$

$n(B \cup C) = ?$

$(A \cap B) = \{1, 3, 5, 8\}$

$(B \cap C) = \{0, 1, 5, 7\}$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 + 6 - 4 = 9$

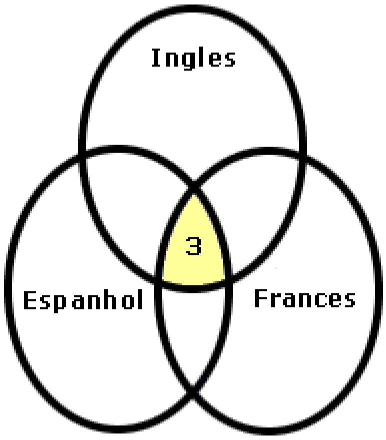
$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) = 6 + 6 - 4 = 8$

Resposta: $n(A \cup B) = 9$ e $n(B \cup C) = 8$

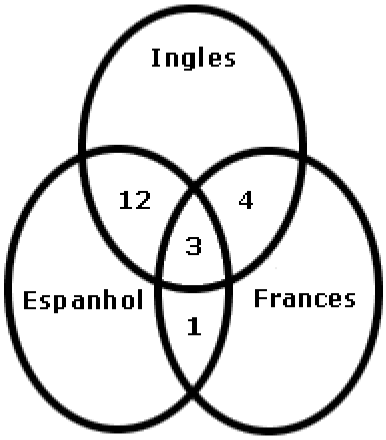
Teste 9

Para resolver esse problema, mais uma vez vamos utilizar o diagrama de Venn.

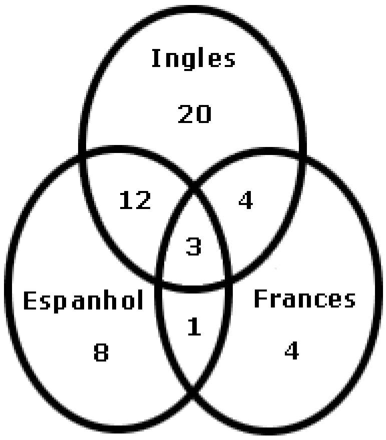
Inicialmente vamos representar nele as pessoas que falam os três idiomas:



Agora vamos representar também os que falam dois idiomas: 15 falam inglês e espanhol, 7 falam inglês e francês, 4 falam espanhol e francês



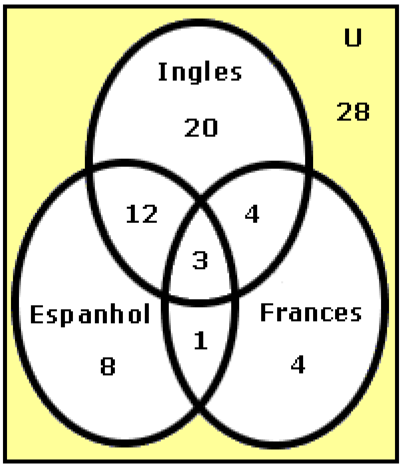
Portanto os que só falam inglês são: 39 - (12 + 3 + 4) = 39 - 19 = 20, os que só falam espanhol são: 24 - (12 + 3 + 1) = 24 - 16 = 8 e os que só falam francês são: 12 - (4 + 3 + 1) = 12 - 8 = 4. Assim temos:



Portanto os funcionários que falam inglês ou espanhol ou francês são:

20 + 12 + 3 + 4 + 8 + 1 + 4 = 52.

Como na empresa trabalham 80 funcionários, concluimos que 28 funcionários (80 - 52 = 28) não falam nenhum dos três idiomas.



Resposta: Na empresa, 28 funcionários não falam nenhum dos três idiomas

---

Teste 10

n $(A \cup B) = 10$

$n(A) = 5$

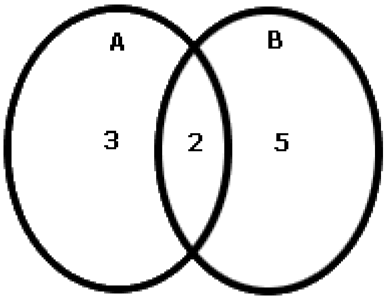
$n(A \cap B) = 2$

n $(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

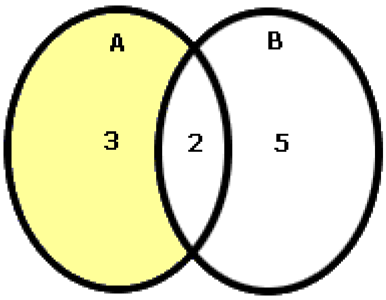
$10 = 5 + n(B) - 2$

$n(B) = 10 - 5 + 2 = 7$

Representando no diagrama de Venn, temos:



n(A - B) é o número de elementos que existem em A e não tem existem em B:



Resposta: n(A - B) = 3

AULA 5 - CONJUNTOS NUMÉRICOS

- Reais (ℝ)
  - Racionais (ℚ)
    - Inteiros (ℤ)
      - naturais (positivos) - (ℕ)
      - não naturais (negativos)
    - Decimais (fracionários)
  - Irracionais
- Complexos

5.1. CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

N= {0,1,2,3,4,5,...}
N= números inteiros positivos com o zero

N^*= {1,2,3,4,5,...}
N^*= números inteiros positivos sem o zero

5.2. CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Z = {...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...}
Z = números inteiros positivos e negativos com o zero

Z* = {...,-3,-2,-1,1,2,3,...}
Z* = números inteiros positivos e negativos sem o zero

Z^+ = {0,1,2,3,4,5,...}
Z^+ = números inteiros positivos com o zero

Z^- = {...,-5,-4,-3,-2,-1,0}
Z^- = números inteiros negativos com o zero

Observação: É convenção geral que o asterisco (*) retira o zero de qualquer conjunto numérico e que um sinal (+) ou (-) à direita, na parte superior ou inferior da letra representativa, indica números positivos ou negativos, respectivamente.

5.3. CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Números racionais são números que podem ser escritos em forma de fração, onde numerador e denominador são números inteiros e o denominador é um número diferente de 0 (zero).

$$\boxed{\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \}}$$

Exemplos:

$-0{,}5 = -\frac{1}{2}$

$2{,}13 = \frac{213}{100}$

$0{,}3333\ldots = \frac{1}{3}$

$-1{,}341414141\ldots = -\frac{719}{450}$

$0{,}18888\ldots = \frac{17}{90}$

Observação: Todos os números inteiros e todas as dízimas periódicas são racionais.

5.4. CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Números irracionais são números que não podem ser escritos em forma de fração.

Exemplos:

$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

$\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots$

$\pi = 3{,}14159\ldots$

$e = 2{,}71828\ldots$

$\varnothing = 1{,}6180339887\ldots$

$0{,}141441444144441\ldots$

Observação: Os números irracionais apresentam infinitas casas decimais, sem repetição periódica.

5.4.1. Números irracionais - Descoberta

Foram os gregos os primeiros a descobrir que havia números como , que não podiam ser expressos em forma de fração, e ficaram um tanto embatucados com isso.

5.4.2. O irracional π - Origem e história

Os egípcios sabiam trabalhar muito bem com razões. Descobriram logo que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é a mesma para qualquer circunferência, e o seu valor é um número "um pouquinho maior que 3". É essa razão que hoje chamamos π.

Para chegar ao valor de π expresso por 3 1/6, que é aproximadamente 3,16, os egípcios há 3 500 anos partiram de um quadrado inscrito em uma circunferência, cujo lado media 9 unidades. Dobraram os lados do quadrado para obter um polígono de 8 lados e calcularam a razão entre os perímetros dos octógonos inscrito e circunscrito e o diâmetro da circunferência.

Os egípcios conseguiram uma aproximação melhor que a dos babilônios, para os quais "o comprimento de qualquer circunferência era o triplo de seu diâmetro", o que indicava o valor 3 para π.

O indiano Brahmagupta deixou-se levar pelas aparências e julgou que o verdadeiro valor de π fosse a raiz quadrada de 10, ou seja, 3,162278...

Por volta de 200 a.C., Arquimedes, calculando as áreas de polígonos de 96 lados, concluiu que π é menor que 3 + 10/70 e maior que 3 + 10/71, ou seja, está entre 3,1408 e 3,1418. Isto está descrito num livro que ele escreveu chamado "A medida de um círculo".

Arquimedes

Com um polígono de 720 lados inscrito numa circunferência de 60 unidades de raio, Ptolomeu, que viveu em Alexandria, no Egito, por volta do século III d.C., conseguiu calcular o valor π como sendo 377/120, que é aproximadamente igual a 3,1416, uma aproximação ainda melhor que a de Arquimedes.

O fascínio pelo cálculo do valor exato de π também tomou conta dos chineses. No século III d.C., Liu Hui, um copiador de livros, conseguiu obter o valor 3,14159 com um polígono de 3 072 lados. Mas no fim do século V, o matemático Tsu Ch'ung-chih foi mais longe ainda: encontrou como valor de π um número entre 3,1415926 e 3,1415927.

Viéte, um dos matemáticos mais importantes do século XVI, calculou π com 10 decimais exatas.

Até o século XV, o melhor valor para π havia sido encontrado pelo matemático árabe al-Kashi: 3,1415926534897932. Mas o cálculo mais impressionante foi efetuado pelo matemático holândes Ludolph van Ceulen (1540-1610) no final do século XVI (em 1596). Começando com um polígono de 15 lados e dobrando o número de lados 37 vezes, Ceulen obteve um valor para π com 20 casas decimais. Logo em seguida, usando um número de lados ainda maior, ele conseguiu uma aproximação com 35 casas decimais! Tamanha deve ter sido a emoção de Van Ceulen que, na sua morte, sua esposa mandou gravar no túmulo o valor de π com as 35 casas decimais.

Em 1824, Gauss escreveu-o com 200 casas; Richter, trinta anos depois, chegava às 500 casas decimais.

Hoje computadores calculam, em segundos, o valor de pi com 100, 1000, 10000, milhões de casas decimais!

Pi=3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821...

Nenhuma aplicação prática, entretanto, requer uma precisão maior que o valor de π com 10 casas decimais: 3,1415926536. Esse valor é facilmente memorizável, utilizando-se a frase que funciona mnemonicamente:

"Nós e todo o mundo guardamos pi usando letra por número."

Basta lembrar que o número de letras de cada palavra corresponde aos algarismos de π.

Em 1737, Euler tornou conhecido o símbolo π para representar esse número irracional.

5.4.3. O Irracional "ø"

ø =1,6180339887...

ø é considerado símbolo de harmonia.

Os matemáticos gregos usaram-no para calcular as dimensões do Partenon de Atenas. Leonardo da Vinci, nos seus trabalhos artísticos; e no mundo moderno, o arquiteto Le Corbusier, com base nele, apresentou, em 1948, "O modulor".

O número de ouro descobre-se:

- Numa infinidade de animais (como na concha Nautilus);
- Nas flores;
- Nos frutos;
- Na formação das árvores;
- Na disposição das folhas em certas plantas;
- Na espiral logarítmica;
- Na construção do decágono regular;
- Na construção do pentágono regular;
- Em vários poliedros regulares;
- Na pirâmide de Queóps;
- Em muitas obras de arte;
- Nas danças clássicas;
- Nas grandes catedrais da Idade Média;
- Na Arquitetura;
- Na Pintura e na Escultura;
- Na Poesia.

5.5. CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

O conjunto dos números reais é formado por todos os números racionais e todos os números irracionais. Pelo que foi exposto, concluímos que:

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

5.6. CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Número complexo é todo número do tipo: a + bi, onde:

$$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$$

- a = parte real;
- bi = parte imaginária

O estudo dos números complexos ou imaginários foi motivado pela necessidade de se dar uma interpretação à raiz quadrada dos números negativos. A interpretação da raiz quadrada de um número negativo constituiu durante o século XV um grande obstáculo para os matemáticos da época.

5.6.1. Curiosidades

Um dos primeiros matemáticos que expôs uma teoria sobre as raízes quadradas de números negativos foi Raffaele Bombeli, que em seu Tratado de Álgebra, publicado em Bologna (1572), mostrou que elas representavam um novo ente algébrico.

Dois séculos depois, estes estudos foram ampliados por Wessel, Argand e Gauss que são considerados os criadores da teoria dos números complexos.

Em 1797 Caspar Wessel descobriu a representação gráfica de números complexos que foi publicada na revista da Academia Dinamarquesa de 1798; porém a obra de Wessel ficou quase desconhecida, por isso o plano de números complexos é hoje chamado usualmente plano de Gauss, embora o matemático alemão Carl Friedrich Gauss não publicasse suas idéias senão cerca de trinta anos depois. É curioso saber que ninguém antes de Wessel e Gauss deu o passo óbvio de pensar nas partes real e imaginária de um número complexo a + bi como coordenadas retangulares de pontos de um plano.

Em 1777 o matemático suiço Leonhard Euler criou o símbolo "i" ´para representar a raiz quadrada de -1.

Carl Friedrich Gauss

5.6.2. Aplicação

A partir do século 19, os números complexos encontraram grande uso no estudo da Mecânica de Fluídos, da Eletricidade e outros fenômenos em meios contínuos. Hoje, são instrumental absolutamente necessário em inúmeros campos da Ciência e Tecnologia.

5.7. INTERVALOS NUMÉRICOS

Dado dois números reais **a** e **b**, com a condição a < b, temos os seguintes tipos de intervalos com extremos **a** e **b**:

5.7.1. Intervalo fechado

É o conjunto formado por todos os números reais compreendidos entre **a** e **b**, inclusive os extremos **a** e **b**.

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

5.7.2. Intervalo aberto

É o conjunto formado por todos os números reais compreendidos entre **a** e **b**, excluindo os extremos **a** e **b**.

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

5.7.3. Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita

É o conjunto formado por todos os números reais compreendidos entre **a** e **b**, incluindo o extremo **a** e excluindo o extremo **b**.

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

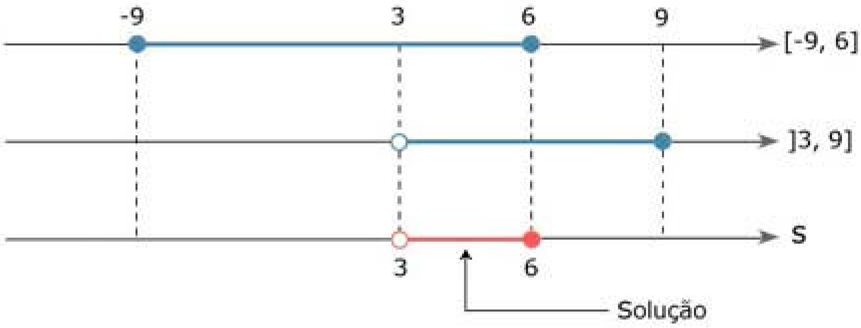
5.7.4. Intervalo fechado à direita e aberto à esquerda

É o conjunto formado por todos os números reais compreendidos entre **a** e **b**, excluindo o extremo **a** e incluindo o extremo **b**.

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Exercício:

1) Calcular [-9, 6] $\cap$]3, 9]



S =]3,6]

$S = \{x \in R \mid 3 < x \leq 6\}$

5.8. TESTE DE AVALIAÇÃO - CONJUNTOS NUMÉRICOS

1) Qual é a afirmativa falsa?

a) $Z^- \cup N^* = Z$
b) $R \supset Q$
c) $Z^- \cap N^* = \varnothing$
d) $Q \cap Z = Q$
e) $Z^+ = N$

2) Considerando o intervalo [1, 5] é correto afirmar que:

a) $\{1, 5\} = [1, 5]$
b) $\{1, 5\} \in [1, 5]$
c) $\{1, 5\} \subset [1, 5]$
d) $\{1, 5\} \supset [1, 5]$
e) nenhuma das alternativas anteriores

3) Qual é a afirmativa falsa?

a) Todo número real pode ser escrito na forma decimal
b) O produto de dois números irracionais não pode ser um número racional
c) Todo número racional pode ser escrito em forma de fração
d) Os números irracionais apresentam infinitas casas decimais, sem repetição periódica
e) Número real é todo número racional ou irracional

4) O intervalo resultante de]1, 3[-]2, 3] é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$

5) Dado os intervalos A =]-1; 2[e B =]0; 3], então $A \cap B$ e $A \cup B$ são, respectivamente:

a)]0; 2] e]-1; 3]
b) [0; 2[e [-1; 3[
c)]0; 2[e]-1; 3]
d) [0; 2[e [-1; 3]
e)]0; 2] e]-1; 3[

Gabarito

1) d
2) c
3) b
4) e
5) c

5.9. RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

A afirmativa $Q \cap Z = Q$ é falsa pois $Q \cap Z = Z$

Resposta: A afirmativa falsa é $Q \cap Z = Q$

Teste 2

[1, 5] é um intervalo fechado que contém todos os números reais de 1 a 5 (inclusive 1 e 5).

{1, 5} é um conjunto com os números 1 e 5.

Logo:

- Não é correto afirmar que $\{1, 5\} = [1, 5]$, pois o conjunto {1, 5} contém somente os números 1 e 5, enquanto o intervalo [1, 5] contém todos os números reais de 1 a 5 (inclusive 1 e 5)

- Não é correto afirmar que $\{1, 5\} \in [1, 5]$, pois {1, 5} é um conjunto (ou subconjunto).

- É correto afirmar que $\{1, 5\} \subset [1, 5]$, pois o conjunto {1, 5} está contido no intervalo [1, 5].

- Não é correto afirmar que $\{1, 5\} \supset [1, 5]$, pois o conjunto {1, 5} não contém [1, 5] e sim o inverso. Ou seja, o correto seria afirmar que $[1, 5] \supset \{1, 5\}$.

Resposta: A alternativa correta é $\{1, 5\} \subset [1, 5]$

Teste 3

O produto de dois números irracionais pode ser um número racional

Exemplo:

$\sqrt{28}$ é um número irracional

$\sqrt{63}$ é um número irracional

$\sqrt{28} \cdot \sqrt{63} = \sqrt{28 \cdot 63} = \sqrt{1764} = 42$

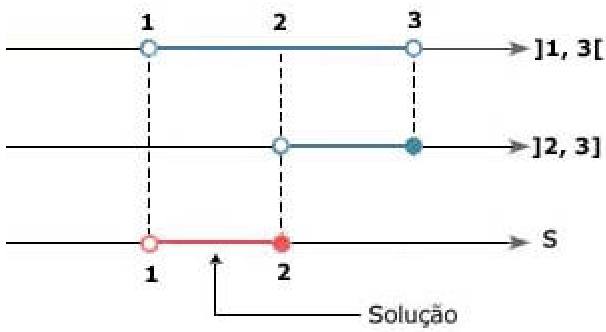
E 42 é um número racional

Resposta: A alternativa falsa é a que diz que: "O produto de dois números irracionais não pode ser um número racional".

Teste 4

]1; 3[-]2, 3]

A solução são os pontos que existem no intervalo]1, 3[e não existem no intervalo]2, 3]



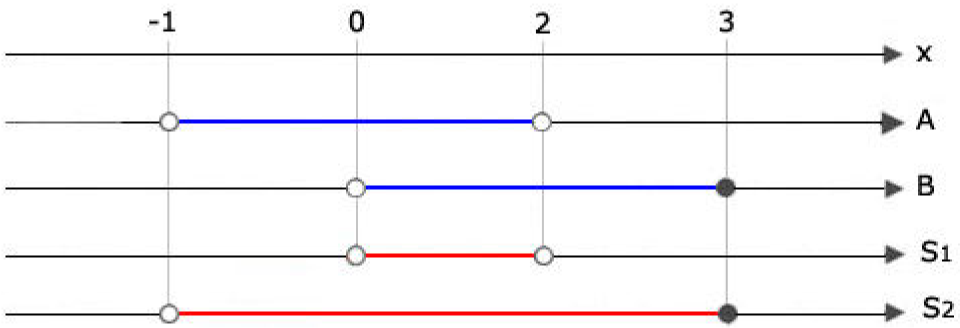
Resposta: {x ∈ ℝ| 1 < x ≤2}

Teste 5

A =]-1; 2[e B =]0; 3]

S1 = A ∩ B = ?

S2 = A ∪ B = ?



Resposta: A ∩ B =]0; 2[e A ∪ B =]-1; 3]

AULA 6 - CÁLCULO ELEMENTAR

6.1. REGRA DOS SINAIS

+	com	+	=	+
+	com	-	=	-
-	com	-	=	+
-	com	+	=	-

Observação: Um número sem sinal à sua esquerda é considerado positivo (maior que zero), ou seja: 3 = +3 ou +3 = 3.

Exemplos:

Soma e Subtração:

- 2 + (+3) = 2 + 3 = 5
- 2 + (-3) = 2 - 3 = -1
- 2 - (-3) = 2 + 3 = 5
- 2 - (+3) = 2 - 3 = -1

Multiplicação:

- (+2) x (+3) = 6
- (+2) x (-3) = -6
- (-2) x (-3) = 6
- (-2) x (+3) = -6

Divisão:

- (+6) / (+3) = 2
- (+6) / (-3) = -2
- (-6) / (-3) = 2
- (-6) / (+3) = -2

6.2. EXPRESSÕES ARITMÉTICAS

- ( ) parênteses
- [ ] colchetes
- { } chaves

Regra: Primeiro resolvem-se os parênteses, depois os colchetes e finalmente as chaves, obedecendo a seguinte ordem: primeiro multiplicação e divisão, depois soma e subtração.

Exercício:

Calcular: 18 - { 7 + [3 x 7 - (5 x 2 - 3) - (2 + 2 x 3)] } + 3

18 - { 7 + [3 x 7 - (10 - 3) - (2 + 6)] } + 3

18 - { 7 + [3 x 7 - 7 - 8] } + 3

18 - { 7 + [21 - 7 - 8] } + 3

18 - { 7 + [21 -15] } + 3

18 - { 7 + 6 } + 3

18 - 13 + 3 = 5 + 3 = 8

Resposta = 8

Observação: Algoritmo é o conjunto de regras operativas cuja aplicação permite resolver um problema formulado por meio de um número finito de operações.

6.3. VALOR ABSOLUTO OU MÓDULO

Módulo de um número real (ou expressão algébrica) é o valor que o numeral representa independentemente do sinal.

Exemplos:

$|-2| = 2$ $|+2| = 2$

$|\sqrt{-3}| = \sqrt{3}$ $|\sqrt{+3}| = \sqrt{3}$

Observação: O módulo de um número real nunca é negativo.

Curiosidade: A regra menos vezes menos dá mais foi criada pelo matemático italiano GIROLAMO CARDANO.

6.4. SINAL DE SOMATÓRIA

A letra grega Σ(sigma), chamada sinal de somatória, é usada para representar, abreviadamente, a adição de várias parcelas quando estas se deduzem de uma mesma expressão algébrica.

Debaixo e em cima da letra Σcolocamos o primeiro e o último valor que toma a variável da expressão algébrica.

Exemplo:

$$\sum_{1}^{6} n^2$$

Que se lê: somatória de n² desde n=1 até n=6

O sinal de somatória indica que devemos substituir, sucessivamente, "n" pelos números naturais 1, 2, 3, 4, 5 e 6 a fim de obter as parcelas da adição representada. Então:

$$\sum_{1}^{6} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

6.5. MÚLTIPLOS E DIVISORES

6.5.1. Divisão não exata

Exemplo: A divisão de 20 por 7 não é exata, pois o resto desta divisão não é zero

$$\begin{array}{r|l} 20 & \underline{7} \\ -\underline{14} & 2 \\ 6 & \end{array}$$

- Dividendo = 20
- Divisor = 7
- Quociente = 2
- Resto = 6

20 = (7 x 2) + 6

Dividendo = (Divisor x Quociente) + Resto

6.5.2. Divisão exata

Dado 2 números inteiros: "a" e "b" (|a| > |b|); se a divisão de "a" por "b" for exata (resto 0), dizemos que "a" é múltiplo de "b" e que "b é divisor de "a".

Indica-se por M(a) o conjunto dos múltiplos de "a" e por D(a) o conjunto dos divisores de "a".

Exemplo: 16 e 4

A divisão de 16 por 4 é exata (resto = 0), portanto 16 é múltiplo de 4 e 4 é divisor de 16.

6.5.3. Teorema

Dado a = b + c, se "x" é divisor de "a" e de "b", então "x" é divisor de "c".

Exemplo: 70 = 49 + 21

7 é divisor de 70 e 49, logo 7 é divisor de 21.

6.6. NÚMEROS PARES E NÚMEROS ÍMPARES

Um número inteiro "a" é par se, e somente se, for múltiplo de 2. Caso contrário o número "a" é ímpar.

Observação: O número 0 (zero) é um número par.

6.6.1. Soma dos "n" primeiros números naturais ímpares

Pitágoras descobriu que n^2 é igual a soma dos n primeiros números naturais ímpares.

Exemplos:

1) Soma dos 3 primeiros números naturais ímpares (1 + 3 + 5) é igual a $3^2 = 9$.

2) Soma dos 5 primeiros números naturais ímpares (1 + 3 + 5 + 7 + 9) é igual a $5^2 = 25$.

3) Soma dos 10 primeiros números naturais ímpares (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 +17 + 19) é igual a $10^2 = 100$.

6.7. NÚMEROS PRIMOS

Número primo é todo número inteiro que é divisível somente por ele mesmo e por ±1 (com exceção dos números 0 e ±1).

Os únicos números pares que são primos são: 2 e -2.

Os números primos são: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...}

6.7.1. Números primos entre si

Dois números inteiros são ditos primos entre si quando não existir um divisor maior do que 1 que divida ambos. Isto significa que o máximo divisor comum dos primos entre si é igual a 1.

Por exemplo, 12 e 13 são primos entre si; porém, 15 e 21 não o são porque ambos são divísiveis por 3.

6.7.2. Curiosidades

1) Muitas pessoas acham que a palavra primo - para denotar os números primos - está associada a alguma analogia de parentesco. Essa idéia é totalmente errada. "Primo" refere-se à idéia de primeiro, e tem sua origem numa velha concepção numérica dos pitagóricos. A noção de número primo foi, muito provavelmente, introduzida por Pitágoras, em 530 AC, sendo que a mesma desempenhou um papel central tanto na matemática como no misticismo pitagórico.

2) O grego Eratóstenes desenvolveu um método conhecido como "crivo de Eratóstenes" para separar os números primos, menores de 100, dos números não primos. O método consiste em se riscar (daí o nome Crivo) primeiro o número 1, que não é primo, em seguida os múltiplos de 2, depois os de 3, depois os de 5 e assim por diante. Os números que restarem são primos.

O grego Eratóstenes, criador de um método especial para separar números primos e não-primos

3) No volume IX da obra "Os Elementos", consta o seguinte teorema: "Números primos são mais do que qualquer quantidade fixada de números primos"; isto é, Euclides dá a prova elementar bem conhecida do fato que há infinitos números primos.

4) O maior número primo conhecido é 2 6972593 –1, que tem 2.098.960 dígitos e foi descoberto em 1/6/99 por Nayan Hafratwala, um participante do GIMPS, um projeto cooperativo para procurar primos de Mersenne.

6.8. NÚMEROS COMPOSTOS

Número composto é todo número que não é primo. Os números compostos são divisíveis por um ou mais números primos.

Os números compostos são: {4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20,...}

6.8.1. Teorema fundamental da Aritmética

Todo número composto é igual à um produto de números primos.

Exemplo:

60 = 2 x 2 x 3 x 5 60 = 2^2 x 3 x 5

6.9. DIVISIBILIDADE

6.9.1. Divisibilidade por 2

Todos os números pares são divisíveis por 2.

6.9.2. Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos é divisível por 3. Exemplo: 991.437

A soma dos algarismos do número é 33 que é divisível por 3, logo 991.437 é divisível por 3.

6.9.3. Divisibilidade por 4

Um número é divisível por 4 quando seus dois últimos algarismos formarem um número divisível por 4.

Exemplo: 547.8<u>36</u>

(36 é divisível por 4, logo 547.836 é divisível por 4)

6.9.4. Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 quando seu último algarismo é 0 (zero) ou 5 (cinco).

Exemplos:

- 17.54<u>5</u>
- 217.24<u>0</u>

6.9.5. Divisibilidade por 6

Um número é divisível por 6 quando é par e divisível por 3.

Exemplo: 7110 (o número é par e divisível por 3).

6.9.6. Divisibilidade por 7

Um número é divisível por 7 se o dobro do último algarismo, subtraído do número sem o último algarismo, resultar um número divisível por 7. Se o número obtido ainda for grande, repete-se o processo até que se possa verificar a divisão por 7.

Exemplo: 20<u>3</u>

3 x 2 = 6

20 - 6 = 14

14 é divisível por 7, logo 203 também é divisível por 7

Exemplo: 219<u>1</u>

1 x 2 = 2

219 - 2 = 21<u>7</u>

7 x 2 = 14

21 - 14 = 7

7 é divisível por 7, logo 2191 também é divisível por 7

6.9.7. Divisibilidade por 8

Um número é divisível por 8 se o número formado pelos seus três últimos algarismos é divisível por 8.

Exemplo: 7112 é divísivel por 8, pois 112 é divisível por 8.

6.9.8. Divisibilidade por 9

Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é divisível por 9.

Exemplo: 198 (a soma dos algarismos é 18 que é divisível por 9)

6.9.9. Divisibilidade por 10

Um número é divisível por 10 quando seu último algarismo é 0.

Exemplo: 432<u>0</u>

6.9.10. Divisibilidade por 11

Um número é divisível por 11 se a soma dos algarismos de ordem par (Sp) menos a soma dos algarismos de ordem ímpar (Si) é um número divisível por 11. Como um caso particular, se Sp-Si=0 ou se Si-Sp=0, então o número é divisível por 11.

Exemplo: 829653

Sp = 5 + 9 + 8 = 22

Si = 3 + 6 + 2 = 11

Sp - Si = 22 - 11 = 11

11 é divisível por 11, logo 829653 é divisível por 11

Exemplo: 3157

Sp = 5 + 3 = 8

Si = 7 + 1 = 8

Sp - Si = 8 - 8 = 0

Sp-Si= 0, logo 3157 é divisível por 11

6.9.11. Teorema

Dado os números inteiros e primos: "a", "b" e "c": Se "c" é divisível por "a" e por "b", então "c" é divisível pelo produto "a x b".

Como consequência desse teorema, temos as regras de divisibilidade por: 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, etc.

Um número é divisível:

- por 6, se é divisível por 2 e por 3
- por 10, se é divisível por 2 e por 5
- por 12, se é divisível por 2 e por 6
- por 14, se é divisível por 2 e por 7
- e assim por diante...

Observação: Podemos aplicar as regras de divisibilidade para qualquer número. Entretanto, a aplicação de algumas é tão trabalhosa que não se justifica o seu uso.

6.10. FATORAÇÃO

Fatorar um número significa decompô-lo em fatores primos.

Exemplos:

$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$70 = 2 \,.\, 5 \,.\, 7$ $\qquad 150 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^2$

6.11. MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC)

O maior divisor comum entre dois ou mais números é chamado máximo divisor comum (MDC)

6.11.1. 1º método

O MDC de vários números ou expressões é igual ao produto dos fatores comuns , elevados respectivamente aos menores expoentes

Observação: Fator é cada elemento de uma multiplicação.

Exercícios:

1) Determinar o MDC dos números 300, 420 e 540.

300	2		420	2		540	2
150	2		210	2		270	2
75	3		105	3		135	3
25	5		35	5		45	3
5	5		7	7		15	3
1			1			5	5
						1	

$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

$MDC = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

MDC = 60

2) Determinar o MDC das seguintes expressões: $300 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot x^3$ e $210 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot x^2$

300	2		210	2
150	2		105	3
75	3		35	5
25	5		7	7
5	5		1	
1				

$300 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot x^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot x^3$

$210 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot x^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot x^2$

$MDC = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot x^2$

MDC = $30 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot x^2$

6.11.2. 2º método: Método das divisões sucessivas

Divide-se o número maior pelo menor, obtendo-se um resto; a seguir divide-se o divisor por esse resto obtendo-se um 2º resto; divide-se o 1º resto pelo 2º resto obtendo-se um 3º resto e assim sucessivamente até obtermos uma divisão exata (resto 0). O último divisor é o MDC.

Observação: Para achar o MDC de três números, acha-se o MDC dos dois primeiros; e depois o MDC do resultado anterior com o 3º número.

Exercícios:

1) Determinar o MDC dos números 620 e 240

Resto (620/240) = 140

Resto (240/140) = 100

Resto (140/100) = 40

Resto (100/40) = 20

Resto (40/ 20) = 0

MDC(620, 240) = 20

2) Determinar o MDC dos números 300, 420 e 540

Resto (540/420) = 120

Resto (420/120) = 60

Resto (120/ 60) = 0

MDC(540,420) = 60

Resto (300/ 60) = 0

MDC(300, 420, 540) = 60

Curiosidade: No volume VII da obra "Os Elementos", Euclides enuncia regras fundamentais para a Teoria dos Números como o conhecido "Algoritmo de Euclides", que permite encontrar o máximo divisor comum entre dois números.

6.12. MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC)

O menor múltiplo comum entre dois ou mais números é chamado mínimo múltiplo comum (MMC).

6.12.1. 1º método

O MMC de vários números ou expressões é igual ao produto de todos fatores elevados respectivamente aos maiores expoentes .

Exercícios:

1) Determinar o MMC dos números 300 e 210

$300 = 2^2 . 3 . 5^2$

$210 = 2 . 3 . 5 . 7$

$MMC(300,210) = 2^2 . 3 . 5^2 . 7$

MMC(300,210) = 2100

2) Determinar o MMC das seguintes expressões: $420 . a^2 . b^4 . x^3$ e $180 . a^3 . b^2 . x$

$420 . a^2 . b^4 . x^3 = 2^2 . 3 . 5 . 7 . a^2 . b^4 . x^3$

$180 . a^3 . b^2 . x = 2^2 . 3^2 . 5 . a^3 . b^2 . x$

$MMC = 2^2 . 3^2 . 5 . 7 . a^3 . b^4 . x^3$

MMC = $1260 . a^3 . b^4 . x^3$

6.12.2. 2º método: Decomposição simultânea

Exercício: Determinar o MMC dos números 300 e 210

300	210	2
150	105	2
75	105	3
25	35	5
5	7	5
1	7	7
1	1	

$MMC(300, 210) = 2^2 . 3 . 5^2 . 7$

MMC(300, 210) = 2100

Teorema:

Se: $a \in \mathbb{N}^*$ e $b \in \mathbb{N}^*$, então:

$$\boxed{MDC(a,b) . MMC(a,b) = a . b}$$

Exercício:

Sabendo-se que o MDC(300, 210) = 30, determine MMC(300, 210).

30 x MMC(300, 210) = 300 x 210

30 x MMC(300, 210) = 63000

MMC(300, 210) = 63000 / 30

MMC(300, 210) = 2100

Curiosidade: Também, no volume VII da obra "Os Elementos", Euclides enuncia uma regra para encontrar o mínimo múltiplo comum de vários números.

6.13. TESTE DE AVALIAÇÃO - CONJUNTOS NUMÉRICOS

1) A soma dos 25 primeiros números ímpares é:

a) 625
b) 620
c) 631
d) 623
e) 627

2) Ordenando os números racionais a = 3/4, b = 17/24 e c= 35/48, obtemos:

a) a < c < b
b) b < a < c
c) c < a < b
d) b < c < a
e) c < b < a

3) Qual dos números abaixo é primo?

a) 747
b) 401
c) 351
d) 301
e) 4367

4) O conjunto A é formado por todos os divisores de 48 ou 60; então o número de elementos do conjunto A é:

a) 16
b) 10
c) 22
d) 18
e) 15

5) O valor de $\sum_{2}^{5} n^2 - 2n$ é:

a) 30
b) 24
c) 22
d) 28
e) 26

6) A alternativa correta é:

a) O maior divisor de um número é ele próprio e o menor é zero
b) Todos os números primos são ímpares
c) O zero tem infinitos divisores
d) O número 1 é múltiplo de todos os números primos
e) Os números 91 e 21 são primos entre si

7) Deseja-se dividir três peças de fazenda que medem respectivamente: 112, 84 e 70 metros em partes iguais e do maior tamanho possível. Sendo assim, as peças devem ser respectivamente divididas em:

a) 8, 7 e 6 partes
b) 8, 6 e 5 partes
c) 9, 8 e 7 partes
d) 9, 7 e 6 partes
e) 10, 8 e 7 partes

8) Uma engrenagem com dois discos dentados tem respectivamente 45 e 75 dentes, sendo que os dentes são todos numerados. Se num determinado momento, o dente número 1 de cada disco estão juntos (em contato), após quantas voltas do disco menor, estes dentes voltarão a ficar juntos novamente?

a) 7
b) 5
c) 6
d) 4
e) nenhuma das alternativas anteriores

9) Num país republicano, considerando que o Presidente deve permanecer 4 anos no cargo, os senadores 6 anos, e os deputados 5 anos e sabendo que em 1960 houve eleições para os três cargos, em que ano serão realizadas novamente eleições para esses três cargos?

a) 2000
b) 1980
c) 2008
d) 1990
e) 2020

10) Dois ciclistas percorrem uma pista circular no mesmo sentido. O primeiro ciclista percorre uma volta na pista a cada 36 segundos e o segundo ciclista percorre uma volta na pista a cada 48 segundos. Tendo os dois ciclistas partidos juntos, depois de quanto tempo se encontrarão novamente no ponto de partida?

a) 3 minutos e 12 segundos
b) 2 minutos e 8 segundos
c) 2 minutos e 24 segundos
d) 3 minutos
e) Nenhuma das alternativas anteriores

Gabarito

1) a
2) d
3) b
4) a
5) e
6) c
7) b
8) b
9) e
10) c

6.14. RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

Conforme Pitágoras a soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2, logo a soma dos 25 primeiros números naturais ímpares é $25^2 = 625$

Resposta: A soma dos 25 primeiros números naturais ímpares é 625

Teste 2

$a = \frac{3}{4}$ $b = \frac{17}{24}$ e $c = \frac{35}{48}$

Para comparar as três frações devemos deixá-las com o mesmo denominador. Isso pode ser feito através do MMC (mínimo múltiplo comum) entre os três denominadores.

MMC (4, 24, 48) = ?

$4 = 2^2$

$24 = 2^3 . 3$

$48 = 2^4 . 3$

MMC(4, 24, 48) = $2^4 . 3 = 48$

Logo:

$$a = \frac{3}{4} = \frac{3 \,.\, 12}{48} = \frac{36}{48}$$

$$b = \frac{17}{24} = \frac{2 \,.\, 17}{48} = \frac{34}{48}$$

$$c = \frac{35}{48}$$

Com os denominadores iguais, basta comparar os numeradores.

Resposta: b < c < a

Teste 3

» 747 é divisível por 3, pois a soma dos algarismos (7 + 4 + 7 = 18) resulta num número divisível por 3.

» 351 é divisível por 3 e por 9, pois a soma dos algarismos (3 + 5 + 1 = 9) resulta num número divisível por 3 e por 9.

» 301 é divisível por 7, pois:

1 x 2 = 2

30 - 2 = 28 que é um número divisível por 7

» 4367 é divisível por 11, pois:

Sp = 4 + 6 = 10 (Sp = soma dos algarismos pares)

Si = 3 + 7 = 10 (Si = soma dos algarismos ímpares)

Sp - Si = 0

Resposta: 401 é o número primo

Teste 4

D(48) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}

D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

D(48) $\cap$ D(60) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

- O número de divisores de 48 é 10

- O número de divisores de 60 é 12

- O número de divisores de 48 e 60 = 6

Logo, o número de divisores de 48 ou 60 é:

D(48) $\cup$ D(60) = 10 + 12 - 6 = 16

Resposta: O número de divisores de 48 ou 60 é 16

Teste 5

$$\sum_{2}^{5} n^2 - 2n = (2^2 - 2\,.\,2) + (3^2 - 2\,.\,3) + (4^2 - 2\,.\,4) + (5^2 - 2\,.\,5)$$

= (4 - 4) + (9 - 6) + (16 - 8) + (25 - 10) = 0 + 3 + 8 + 15 = 26

Resposta: $\sum_{2}^{5} n^2 - 2n$ **= 26**

Teste 6

1) O maior divisor de um número é ele próprio e o menor é zero

<u>Incorreto</u> pois divisão por zero não é permitido.

2) Todos os números primos são ímpares

<u>Incorreto</u>, pois o número 2 é par e é primo.

3) O zero tem infinitos divisores

Correto, o zero pode ser dividido por qualquer número real, com excessão do próprio zero.

4) O número 1 é múltiplo de todos os números primos

Incorreto, o número 1 é divisor (e não múltiplo) de todos os números primos

5) Os números 91 e 21 são primos entre si

Incorreto, pois 91 e 21 são divisíveis por 7.

Resposta: É correto afirmar que: "O zero tem infinitos divisores"

Teste 7

Para que as três peças possam ser divididas em partes iguais e do maior tamanho possível, devemos achar o MDC (máximo divisor comum) entre elas.

MDC (112, 84, 70) = ?

$112 = 2^4 . 7$

$84 = 2^2 . 3 . 7$

$70 = 2 . 5 . 7$

MDC (112, 84, 70) = 2 . 7 = 14

Portanto:

A peça de 112 metros deve ser dividida em 8 partes (pois 112 / 14 = 8).

A peça de 84 metros deve ser dividida em 6 partes (pois 84 / 14 = 6).

A peça de 70 metros deve ser dividida em 5 partes (pois 70 / 14 = 5).

Resposta: As peças devem ser divididas em 8, 6 e 5 partes respectivamente.

Teste 8

Para resolver essa questão devemos achar o MMC (mínimo múltiplo comum) entre 45 e 75.

MMC (45, 75) = ?

$45 = 3^2 . 5$ e $75 = 3 . 5^2$

MMC (45, 75) = $3^2 x\ 5^2 = 9 \times 25 = 225$

Portanto os dentes voltarão a ficar juntos novamente quando:

- A engrenagem maior tiver completado 3 voltas (225 / 75 = 3), ou

- A engrenagem menor tiver completado 5 voltas (225 / 45 = 5).

Resposta: Os dentes voltarão a ficar juntos novamente quando a engrenagem menor tiver completado 5 voltas.

Teste 9

Para resolver essa questão devemos achar o MMC (mínimo múltiplo comum) entre 4, 6 e 5.

MDC (4, 6, 5) = ?

20 + 12 + 3 + 4 + 8 + 1 + 4 = 52.

$4 = 2^2$ $6 = 2 . 3$ 5

MDC (4, 6, 5) = $2^2 . 3 . 5 = 4 . 3 . 5 = 60$

Em 1960 houve eleições para os três cargos, portanto, isso só voltará a acontecer após 60 anos, ou seja: em 2020 (1960 + 60 = 2020).

Resposta: Em 2020 serão realizadas novamente eleições para os três cargos

---

Teste 10

Para resolver essa questão, devemos encontrar o MMC (mínimo múltiplo comum) entre 36 e 48.

MMC (36, 48) = ?

$36 = 2^2 . 3^2$

$48 = 2^4 . 3$

MMC (36, 48) = $2^4 . 3^2 = 16 \times 9 = 144$

Portanto ambos os ciclistas somente voltarão a se encontrar no ponto de partida após 144 s.

144 s = 2 min + 24 s

Resposta: Os dois ciclistas se encontrarão novamente no ponto de partida, após 2min e 24 s.

AULA 7 - FRAÇÕES E DÍZIMA PERIÓDICA

7.1. FRAÇÕES

7.1.1. Introdução

Desde muito cedo, a humanidade pressentiu a existência de outros números, além dos números inteiros. Por exemplo, por força das circunstâncias, muitas vezes, um caçador via-se obrigado a repartir um peixe ou uma outra caça, isto quando só lhe restava uma única unidade. Sendo assim, dividia a mesma em duas partes iguais, ou em quatro partes, ou ainda em um número maior de frações, dependendo do número de pessoas que se encontravam para saciar sua fome. Neste caso, ele já estava usando seus conhecimentos espontâneos sobre frações.

De fato, o estudo das frações surgiu no Egito às margens do Rio Nilo para demarcação de terras. Já os babilônios usavam as frações para registros de suas transações comerciais, representando com os mesmos valores monetários próprios de sua cultura. Por exemplo, metade ou um meio ½ chamavam de ardalha e a quarta parte ou um quarto (¼) chamavam de pada.

No cotidiano, existem inúmeras situações nas quais se empregam frações, como por exemplo, nas eleições vence o candidato que obtiver ½ (metade) do total de votos mais um no primeiro turno ou a maioria simples no segundo; em mapas e plantas com o uso de escalas; razões e proporções empregadas na música, na medicina, na física, na culinária, entre outras.

7.1.2. Definição

Fração é todo número escrito na seguinte forma:

$$\frac{a}{b} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{numerador} \\ \leftarrow \text{denominador} \end{matrix}$$

onde: "a" e "b" são números inteiros e "$b \neq 0$".

Exemplos:

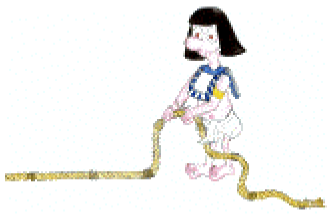
$$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$$

7.1.3. História

"*Os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido à necessidade do conceito de fração e de notação para frações.*"(BOYER, 1979).

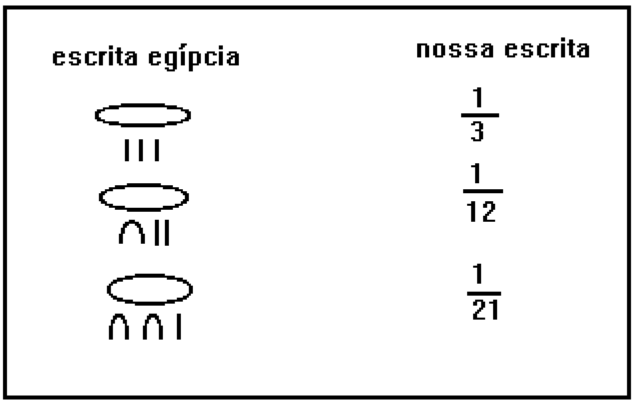
De fato, o estudo de frações surgiu no Egito às margens do rio Nilo, pela necessidade de se realizar a marcação das terras que se encontravam a margem do mesmo.

Todos os anos, no mês de julho, as águas do Rio Nilo inundavam uma vasta região ao longo de suas margens. As águas do Rio Nilo fertilizavam os campos, beneficiando a agricultura do Egito. Cada pedaço de terra às margens desse rio era precioso e tinha que ser muito bem cuidado.



Por volta do ano 3000 a.C. o Faraó Sesóstris repartiu essas terras entre uns poucos agricultores privilegiados. Só que todos os anos em setembro quando as águas baixavam, funcionários do governo faziam a marcação do terreno de cada agricultor. Esses funcionários eram chamados de agrimensores ou estiradores de corda. Isso se explica pelo fato de que usavam cordas com uma unidade de medida assinalada, essa corda era esticada para que se verificasse quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno. Mas na maioria das vezes acontecia da unidade de medida escolhida não caber um número inteiro de vezes nos lados do terreno.

Para solucionar o problema da medição das terras, os egípcios criaram um novo número, o número fracionário, que era representado com o uso de frações. Os egípcios antigos, que inventaram as frações há cerca de 5000 anos atrás, jamais usaram frações maiores que a unidade. E com exceção da fração 2/3, só representavam frações de numerador um. A escrita dessas frações era feita colocando-se um sinal oval sobre o denominador.



No Sistema de Numeração usado pelos egípcios os símbolos se repetiam com muita frequência, tornando os cálculos com números fracionários muito complicados. Com a criação do Sistema de Numeração Decimal, pelos hindus, o trabalho com as frações tornou-se mais simples, e a sua representação passou a ser expressa pela razão de dois números naturais.

Curiosidade: Segundo consta, o matemático hindu Bhaskara foi o primeiro a escrever que não existe a divisão por zero.

Frações entre os antigos egípcios: Os antigos egípcios não usavam frações com numerador maior que 1 nem somavam frações iguais de numerador 1. Assim por exemplo, eles se referiam ao número 2/5 como 1/3 + 1/15. A velha preferência egípcia por frações unitárias continuou na Europa pelo menos até o ano 1100 d.C.

Frações decimais: O conceito de frações decimais tem início na Idade Moderna e segundo o trabalho de Silva (1997), só no decorrer do século XVI, é que os tratados de aritmética apresentam o cálculo fracionário de uma maneira muito próxima ao que está nos livros dos séculos XIX e XX, considerando frações maiores que a unidade e a fração como a expressão de uma divisão.

No entanto, os inconvenientes do cálculo fracionário ainda conduziam alguns matemáticos à procura de resoluções só com a utilização dos inteiros, culminando no final do século com as obras que sistematizavam e difundiam o uso dos números decimais.

A notação moderna das frações de acordo com Silva (1997) se deve aos hindus pela sua numeração decimal de posição e aos árabes que inventaram a famosa barra horizontal para separar o numerador do denominador. Mas o desenvolvimento das frações decimais, pouco a pouco fez transparecer o interesse em prolongar a numeração decimal no outro sentido, isto é, na representação dos números "depois da vírgula", que permitia a razão sem nenhuma dificuldade para todas as frações.

O uso de frações decimais não fazia parte do sistema hindu. Na China Antiga, encontra-se um uso acidental de tais frações, do mesmo modo na Arábia Medieval e na Europa do Renascimento.

Quando Viète recomendou em 1579, o uso das frações decimais no lugar das sexagesimais, utilizando-se de uma barra vertical para separar a parte inteira da fracionária, elas já eram aceitas pelos matemáticos que se encontravam nas fronteiras da pesquisa. No entanto e muito interessante, encontrado no trabalho de Silva (1997), que em 1592, Viète desenvolveu por meio de frações esta fórmula para π.

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

O primeiro tratamento sistemático das frações decimais aparece em, 1582, no trabalho “Die Thiende” do belga Simon Stevin de Bugres, que em 1585, fez uma recomendação a favor da escala decimal tanto para frações quanto para inteiros, concentrando-se em tais decimais, centésimos, milésimos,... como numeradores inteiros, colocando em um círculo acima ou depois de cada dígito a potência de dez assumida como divisor inspirado em Rafael Bombelli. Assim o valor aproximado de π aparecia como:

3 ⓪ 1 ① 4 ② 1 ③ 6 ④ ou ⓪ ① ② ③ ④
3 1 4 1 6

Após dez anos, o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) simplificou a notação eliminando a menção inútil da ordem das frações decimais consecutivas, colocando no alto das unidades simples o signo ^{0}escrevendo então: 578^0657para representar 578,657.

Segundo Silva (1997), o maior impulso ao uso das frações decimais se deu após a invenção dos logaritmos por Johan Napier em 1614. Em sua obra "Descriptio" (a tradução para o inglês em 1616) essas frações aparecem como hoje, com um ponto separando a parte inteira da fracionária e em "O Rhadologia" (1617), descreve os cálculos com o uso de barras, referindo-se à aritmética decimal de Stevin e propõe, então, o uso de um ponto ou de uma vírgula como separatriz decimal.

Mas, foi a partir da obra Nepier "Construction" de 1619 que o ponto decimal se tornou padrão na Inglaterra, já a nossa vírgula foi adotada pelo neerlandês Wilbord Snellius no início do século XVII.

Um fato curioso desse estudo, que merece destaque, segundo Boyer (1996) sobre Bürgi, Galileu e Stevin que respectivamente desenvolvia relógios, era físico e astrônomo e por último, engenheiro. Era inevitável que esses homens preferissem as partes da matemática que prometiam aplicabilidade ao seu problema, tanto que o primeiro e o terceiro ajudaram no desenvolvimento das frações decimais.

7.1.4. Simplificação de frações

Para simplificar uma fração deve-se decompor o numerador e o denominador em fatores primos e a seguir cortar os fatores iguais.

Exercícios:

1) Simplificar a fração $\frac{36}{27}$

$$\frac{36}{27} = \frac{2^2 \text{ x } 3^2}{3^3} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$$

2) Simplificar a fração $\frac{9702}{525}$

$$\frac{9702}{525} = \frac{2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11}{3 \times 5^2 \times 7} = \frac{2 \times 3\ 7 \times 11}{5^2} = \frac{462}{25}$$

7.1.5. Frações mistas

Exemplos:

$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ $\qquad$ $4\frac{7}{8} = \frac{39}{8}$

<u>Exercício</u>:

1) Calcule $5\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} + 2\frac{7}{12}$

$$5\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} + 2\frac{7}{12} = \frac{17}{3} - \frac{5}{4} + \frac{31}{12} = \frac{(4\ .\ 17) - (3\ .\ 5) + 31}{12} = \frac{68 - 15 + 31}{12} = \frac{84}{12} = 7$$

Logo:

$$\boxed{5\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} + 2\frac{7}{12} = 7}$$

Curiosidade: O matemático italiano Leonardo de Pisa (mais conhecido como Fibonacci) costumava colocar a parte fracionária de um número misto antes da parte inteira. Dessa forma, em vez de escrever $11\frac{5}{6}$, ele escrevia $\frac{1}{3}\frac{1}{2}11$. A justaposição de frações unitárias e números inteiros implicava adição. Repare que naquela época a fração $\frac{5}{6}$ era representada pela soma das frações unitárias $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

7.1.6. Transformação de número decimal em fração decimal

Exemplos:

$$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{3}{4}$$

$$1{,}333333... = 1{,}\overline{3} = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$0{,}128 = \frac{128}{1000} = \frac{2^7}{2^3 \times 5^3} = \frac{16}{125}$$

Curiosidade: A notação para frações utilizada pelos babilônios foi a melhor que qualquer civilização tenha possuído até a Renascença.

Exercício:

1) Dividiu-se uma certa quantia entre 3 pessoas. João recebeu 2/5 da quantia - R$ 35,00, Maria recebeu 1/3 da quantia + R$ 20,00 e José recebeu R$ 95,00. Qual é o valor da quantia total e quanto recebeu João e Maria?

Vamos considerar X como a quantia total. Logo, de acordo com o enunciado, temos:

$$X = \frac{2X}{5} - 35 + \frac{X}{3} + 20 + 95$$

$$X = \frac{6X + 5X}{15} + 80$$

$$X = \frac{11X}{15} + 80$$

$$X - \frac{11X}{15} = 80$$

$$\frac{15X - 11X}{15} = 80$$

4X = 80 . 15

4X = 1200

X = 300

Portanto, **a quantia total é R$ 300,00**

João recebeu:

$$\frac{2X}{5} - 35 = \frac{2 \,.\, 300}{5} - 35 = \frac{600}{5} - 35 = 120 - 35 = 85$$

João recebeu R$ 85,00

E Maria recebeu:

$$\frac{X}{3} + 20 = \frac{300}{3} + 20 = 100 + 20 = 120$$

Maria recebeu R$ 120,00

7.2. DÍZIMA PERIÓDICA

7.2.1. Período simples

$\frac{8}{11} = 0{,}727272...$ ← dízima periódica simples

A geratriz de $0{,}\overline{13} = \frac{13}{99}$

A geratriz de $0{,}\overline{114} = \frac{114}{999}$

A geratriz de $0{,}\overline{1025} = \frac{1025}{9999}$

7.2.2. Período composto

Quando o período vem após alguns números na parte decimal que não pertencem a dízima, o período é denominado composto.

Exemplo:

$\frac{64467}{99900} = 0{,}64531531... = 0{,}64\overline{531}...$ ← dízima periódica composta

No denominador incluimos um número formado de tantos noves quantos forem os algarismos do período seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte não periódica.

A geratriz de $0{,}64\overline{531} = \frac{64531 - 64}{99900} = \frac{64467}{99900}$

A geratriz de $0{,}0{,}4495\overline{782} = \frac{4495782 - 4495}{9990000} = \frac{4491287}{9990000}$

A geratriz de $2{,}\overline{132} = 2 + 0{,}\overline{132} = 2 + \frac{132 - 1}{990} = \frac{1980 + 131}{990} = \frac{2111}{990}$

7.3. TESTE DE AVALIAÇÃO - CONJUNTOS NUMÉRICOS

1) Numa viagem de 920 km de distância, Eduardo percorreu 3/4 dessa distância de avião. Do que faltou, percorreu 3/5 de trem e o restante de automóvel. Que distância Eduardo percorreu de automóvel?

a) 94 km
b) 110 km
c) 92 km
d) 104 km
e) 98 km

2) Toda dízima periódica composta:

a) é um número racional
b) é um número irracional
c) é uma soma de dois números imaginários puros
d) tem um período que começa imediatamente após a vírgula
e) é uma soma finita de números decimais

3) O resultado de $0,\overline{33} + 0,1\overline{23}$ é :

a) um número irracional
b) uma dízima periódica simples
c) uma dízima periódica composta
d) um número racional sem repetição periódica
e) nenhuma das alternativas anteriores

4) Uma determinada quantia foi dividida entre 5 irmãos. Alberto recebeu 1/5 da quantia, Bruno recebeu 3/16 da quantia + R$ 180,00, Carlos recebeu 9/50 da quantia + R$ 230,00, Douglas recebeu 1/4 da quantia - R$ 590,00 e Edson recebeu R$ 2370,00. Qual dos cinco irmãos recebeu a maior quantia?

a) Alberto
b) Bruno
c) Carlos
d) Douglas
e) Edson

5) Um corredor depois de percorrer metade do percurso corre mais 7 quilômetros completando 3/4 do percurso total. Qual é a distância total dessa prova em quilômetros?

a) 30
b) 24
c) 22
d) 28
e) 26

Gabarito

1) c
2) a
3) d
4) b
5) d

7.4. RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

De avião percorreu:

$$\text{Avião} = \frac{3}{4} \cdot 920 = 3 \cdot 230 = 690 \text{ Km}$$

Para completar todo o percurso restam: 920 - 690 = 230 Km

De trem percorreu:

$$\text{Trem} = \frac{3}{5} \cdot 230 = 3 \cdot 46 = 138 \text{ Km}$$

De automóvel percorreu o restante do percurso, ou seja:

Automóvel = 230 - 138 = 92 Km

Resposta: Eduardo percorreu 92 Km de automóvel

Teste 2

- Toda dízima periódica (simples ou composta) é um número racional pois pode ser transformada em fração

- Dízima periódica (simples ou composta) não é um número irracional

- Dízima periódica (simples ou composta) não é uma soma de dois números imaginários puros

- Na dízima periódica composta o período não começa imediatamente após a vírgula

- Dízima periódica (simples ou composta) é uma soma infinita de números decimais

Resposta: A alternativa correta é "Toda dízima periódica composta é um número racional"

Teste 3

$$0,\overline{33} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,1\overline{23} = \frac{123-1}{990} = \frac{122}{990} = \frac{61}{445}$$

$$\frac{0,\overline{33}}{0,1\overline{23}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{61}{45}} = \frac{1\,.\,45}{3\,.61} = \frac{45}{183} = \frac{15}{61}$$

O resultado da divisão não é uma dízima periódica, logo:

Resposta: O resultado da divisão é um número racional sem repetição periódica

---

Teste 4

N = Quantia total

$$N = \frac{N}{5} + \frac{3N}{16} + 180 + \frac{9N}{50} + 230 + \frac{N}{4} - 590 + 2370$$

$$N = \frac{N}{5} + \frac{3N}{16} + \frac{9N}{50} + \frac{N}{4} + 2190$$

MMC (5, 16, 50, 4) = 400

$$N = \frac{80N + (25\,.\,3N) + (8\,.\,9N) + 100N}{400} + 2190$$

$$N = \frac{80N + 75N + 72N + 100N}{400} + 2190$$

$$N = \frac{327N}{400} + 2190$$

$$\frac{400N - 327N}{400} = 2190$$

73N = 400 x 2190 = 876000

$$N = \frac{876000}{73}$$

N = 12000

Ou seja, a quantia total é R$ 12.000,00

Agora vamos verificar quanto recebeu cada um:

- Alberto recebeu 1/5 da quantia, ou seja:

12000 / 5 = <u>R$ 2.400,00</u>

- Bruno recebeu 3/16 da quantia + 180, ou seja:

(36000 / 16) + 180 = 2250 +180 = <u>R$ 2.430,00</u>

- Carlos recebeu 9/50 da quantia + 230, ou seja:

(108000 / 50) + 230 = 2160 + 230 = <u>R$ 2.390,00</u>

- Douglas recebeu 1/4 da quantia - 590, ou seja:

(12000 / 4) - 590 = 3000 - 590 = 2410 = <u>R$ 2.410,00</u>

- Edson recebeu <u>R$ 2.370,00</u>

Comparando quanto recebeu cada irmão, concluímos que Bruno foi quem recebeu mais.

Resposta: Bruno foi o irmão que recebeu a maior quantia

Teste 5

X = distância total da prova

X = ?

$$\frac{X}{2} + 7 = \frac{3X}{4}$$

$$\frac{3X}{4} - \frac{X}{2} = 7$$

$$\frac{3X - 2X}{4} = 7$$

X = 7 . 4 = 28

Resposta: A distância total da prova é 28 quilômetros

AULA 8 - DIVISÃO PROPORCIONAL

8.1. DIVISÃO EM DUAS PARTES DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Para decompor um número "M" em duas partes "X_1" e "X_2" diretamente proporcionais a "P_1" e "P_2", deve-se montar um sistema com duas equações e duas incógnitas:

$$X_1 + X_2 = M$$

$$\frac{X_1}{P_1} = \frac{X_2}{P_2}$$

A solução segue das propriedades das proporções:

$$\boxed{\frac{X_1}{P_1} = \frac{X_2}{P_2} \quad \frac{X_1 + X_2}{P_1 + P_2}}$$

Exercícios:

1) Decompor o nº 100 em duas partes diretamente proporcionais à 2 e 3.

$$\frac{X_1}{2} = \frac{X_2}{3} = \frac{100}{2+3} = 20$$

$$\frac{X_1}{2} = 20 \quad \frac{X_2}{3} = 20$$

Resposta: $X_1 = 40$ $X_2 = 60$

2) Determinar dois números X_1 e X_2 diretamente proporcionais a 8 e 3, sabendo-se que a diferença entre eles é 60.

$$\frac{X_1}{8} = \frac{X_2}{3} = \frac{X_1 - X_2}{P_1 - P_2} = \frac{60}{8-3} = \frac{60}{5} = 12$$

$$\frac{X_1}{8} = 12 \quad \frac{X_2}{3} = 12$$

Resposta: $X_1 = 96$ $X_2 = 36$

3) Duas pessoas constituíram uma sociedade, entrando cada uma delas com o mesmo capital. O sócio A permaneceu por 3 anos na sociedade enquanto o sócio B ficou apenas 1 ano e 8 meses. Tendo havido lucro de R$ 84.000,00, qual é a parte de cada sócio?

$$\frac{A}{36} + \frac{B}{20} = \frac{84000}{36 + 20} = \frac{84000}{56} = 1500$$

O sócio A ficará com: 36 x 1500 = 54.000

O sócio B ficará com: 20 x 1500 = 30.000

Resposta: O sócio A ficará com R$ 54.000,00 e o sócio B ficará com R$ 30.000,00

8.2. DIVISÃO EM VÁRIAS PARTES DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Para decompor um número "M" em várias partes "X_1, X_2, ..., Xn" diretamente proporcionais a "P_1, P_2, ... , Pn", deve-se montar um sistema com "n" equações e "n" incógnitas:

$$X_1 + X_2 + \ldots + Xn = M$$

$$\frac{X_1}{P_1} = \frac{X_2}{P_2} = \ldots = \frac{X_n}{P_n}$$

$$\boxed{\frac{X_1}{P_1} = \frac{X_2}{P_2} = \ldots = \frac{X_n}{P_n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n} = K}$$

Exercícios:

1) Decompor o número 120 em três partes diretamente proporcionais à 2, 4 e 6.

$$\frac{X_1}{2} = \frac{X_2}{4} = \frac{X_3}{6} = \frac{120}{2 + 4 + 6} = \frac{120}{12} = 10$$

$$\frac{X_1}{2} = 10 \quad \frac{X_2}{4} = 10 \quad \frac{X_3}{6} = 10$$

Resposta: $X_1 = 20$ $X_2 = 40$ $X_3 = 60$

2) Determinar três números X, Y e Z diretamente proporcionais a 2, 4 e 6, de modo que 2X + 3Y - 4Z = 120.

$$\frac{X}{2}=\frac{Y}{4}=\frac{Z}{6}=\frac{120}{(2\times2)+(3\times4)-(4\times6)}=\frac{120}{-8}=-15$$

$$\frac{X}{2}=-15 \quad \frac{Y}{4}=-15 \quad \frac{Z}{6}=-15$$

Resposta: X_1 = -30 X_2 = -60 X_3 = -90

Curiosidade: A palavra razão vem do latim ratio e significa a divisão ou o quociente entre dois números. A palavra proporção vem do latim proportione e significa uma relação entre as partes de uma grandeza, ou seja, é uma igualdade entre duas razões.

No século XV, o matemático árabe Al-Kassadi empregou o símbolo "..." para indicar as proporções e em 1.537, o italiano Niccola Fontana, conhecido por Tartaglia, escreveu uma proporção na forma 6:3::8:4. Regiomontanus foi um dos matemáticos italianos que mais divulgou o emprego das proporções durante o período do Renascimento.

8.3. DIVISÃO EM DUAS PARTES INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Para decompor um número M em duas partes X_1 e X_2 inversamente proporcionais a P_1 e P_2, deve-se decompor este número M em duas partes X_1 e X_2 diretamente proporcionais a $1/P_1$ e $1/P_2$, que são, respectivamente, os inversos de P_1 e P_2. Assim basta montar o sistema com duas equações e duas incógnitas:

$$X_1 + X_2 = M$$

$$\frac{X_1}{\frac{1}{P_1}}=\frac{X_2}{\frac{1}{P_2}}$$

A solução segue das propriedades das proporções:

$$\boxed{\frac{X_1}{\frac{1}{P_1}}=\frac{X_2}{\frac{1}{P_2}}=\frac{X_1+X_2}{\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}}=K}$$

Exercícios:

1) Decompor o número 120 em duas partes X_1 e X_2 inversamente proporcionais a 2 e 3.

$$\frac{X_1}{\frac{1}{P_1}} = \frac{X_2}{\frac{1}{P_2}} = \frac{X_1 + X_2}{\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}} = \frac{120}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{120}{\frac{3+2}{6}} = \frac{120 \times 6}{5} = 144$$

$$\frac{X_1}{\frac{1}{2}} = 144 \quad \frac{X_2}{\frac{1}{3}} = 144$$

Resposta: $X_1 = 72$ $X_2 = 48$

2) Determinar dois números X_1 e X_2 inversamente proporcionais a 6 e 8, sabendo-se que a diferença entre eles é 10.

$$\frac{X_1}{\frac{1}{6}} = \frac{X_2}{\frac{1}{8}} = \frac{X_1 - X_2}{\frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2}} = \frac{10}{\frac{1}{6} - \frac{1}{8}} = \frac{10}{\frac{4-3}{24}} = 10 \times 24 = 240$$

$$\frac{X_1}{\frac{1}{6}} = 240 \quad \frac{X_2}{\frac{1}{8}} = 240$$

Resposta: $X_1 = 40$ $X_2 = 30$

8.4. DIVISÃO EM VÁRIAS PARTES INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Para decompor um número "M" em várias partes "X_1, X_2, ... , Xn" inversamente proporcionais a "P_1, P_2, ..., Pn", deve-se montar um sistema com "n" equações e "n" incógnitas:

$$X_1 + X_2 + \ldots + Xn = M$$

$$\frac{X_1}{\frac{1}{P_1}} = \frac{X_2}{\frac{1}{P_2}} \ldots \frac{X_n}{\frac{1}{P_n}}$$

A solução segue das propriedades das proporções:

$$\boxed{\frac{X_1}{\frac{1}{P_1}} = \frac{X_2}{\frac{1}{P_2}} \ldots \frac{X_n}{\frac{1}{P_n}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \ldots + \frac{1}{P_n}} = K}$$

Exercícios:

1) Determinar três números X, Y e Z inversamente proporcionais a 2, 4 e 6, de modo que 2X + 3Y - 4Z = 10.

$$\frac{X}{\frac{1}{2}} = \frac{Y}{\frac{1}{4}} = \frac{Z}{\frac{1}{6}} = \frac{2X + 3Y - 4Z}{2.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{4} - 4.\frac{1}{6}} = \frac{10}{\frac{12 + 9 - 8}{12}} = \frac{10}{\frac{13}{12}} = 10 \times \frac{12}{13} = \frac{120}{13}$$

$$\frac{X}{\frac{1}{2}} = \frac{120}{13} \qquad \frac{Y}{\frac{1}{4}} = \frac{120}{13} \qquad \frac{Z}{\frac{1}{6}} = \frac{120}{13}$$

Resposta: X = 60/13 Y = 20/13 Z = 30/13

8.5. DIVISÃO EM DUAS PARTES DIRETA E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Para decompor um número M em duas partes X_1 e X_2 diretamente proporcionais a P_1 e P_2 e inversamente proporcionais a Q_1 e Q_2, deve-se decompor este número M em duas partes X_1 e X_2 diretamente proporcionais a P_1/Q_1 e P_2/Q_2.

$$X_1 + X_2 = M$$

$$\frac{X_1}{\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)} = \frac{X_2}{\left(\frac{P_2}{Q_2}\right)}$$

A solução segue das propriedades das proporções:

$$\boxed{\frac{X_1}{\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)} = \frac{X_2}{\left(\frac{P_2}{Q_2}\right)} = \frac{X_1 + X_2}{\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}} = K}$$

O último número K é que proporciona a solução pois: $X_1 = K.(P_1/Q_1)$ e $X_2 = K.(P_2/Q_2)$

Exercício:

1) Decompor o número 76 em duas partes X_1 e X_2 diretamente proporcionais a 3 e 2 e inversamente proporcionais a 5 e 3.

$$\frac{X_1}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{X_2}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{76}{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}} = \frac{76}{\frac{9 + 10}{15}} = \frac{76}{\left(\frac{19}{15}\right)} = \frac{76 \,.\, 15}{19} = 60$$

$X_1 = (3 \,.\, 60) / 5 = 180 / 5 = 36$

$X_2 = (2 \,.\, 60) / 3 = 120 / 3 = 40$

Resposta: $X_1 = 36$ e $X_2 = 40$

2) Determinar dois números X_1 e X_2 diretamente proporcionais a 3 e 2 e inversamente proporcionais a 4 e 5, sabendo-se que a diferença entre eles é 14.

$$\frac{X_1}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{X_2}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{14}{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}} = \frac{14}{\frac{15-8}{20}} = \frac{14}{\left(\frac{7}{20}\right)} = \frac{14 \,.\, 20}{7} = 40$$

$X_1 = (3 \,.\, 40) / 4 = 120 / 4 = 30$

$X_2 = (2 \,.\, 40) / 5 = 80 / 5 = 16$

Resposta: $X_1 = 30$ e $X_2 = 16$

8.6. TESTE DE AVALIAÇÃO - DIVISÃO PROPORCIONAL

1) Uma empresa que tem três sócios teve R$ 45.000,00 de lucro. Ademir investiu na empresa R$ 2.500,00 durante um ano e meio, Bernardo investiu na empresa R$ 4.000,00 durante 1 ano e César investiu na empresa R$ 6.000,00 durante 7 meses. A parte do lucro que cabe a César é:

a) R$ 13.000,00
b) R$ 15.000,00
c) R$ 12.000,00
d) R$ 16.000,00
e) R$ 14.000,00

2) Para estimular a freqüência as aulas, um professor resolveu distribuir a titulo de prêmio aos alunos, 33 CD's para suas 3 classes, repartidas em partes inversamente proporcionais ao numero de faltas ocorridas durante um mês em cada uma das classes. Após esse período, ele constatou que houve: 10 , 15 e 5 faltas totais respectivamente nas classes 1ªA , 1ªB e 1ªC . O número de CD's que deve ser entregue para a classe 1ªA é:

a) 7
b) 10
c) 9
d) 8
e) 11

3) Uma ponte que interliga duas cidades, foi orçada em R$ 2.000.000,00. O custo da construção deve ser dividido entre elas em partes diretamente proporcionais ao numero de habitantes (20.000 e 60.000 respectivamente) e em partes inversamente proporcionais, ao mesmo tempo, as distâncias das cidades à ponte (5 Km e 10 Km respectivamente). A parte do custo da construção que caberá respectivamente a cada Prefeitura Municipal é:

a) R$ 1.100.000,00 e R$ 900.000,00
b) R$ 800.000,00 e R$ 1.200.000,00
c) R$ 900.000,00 e R$ 1.100,000,00
d) R$ 850.000,00 e R$ 1.150,000,00
e) R$ 1.200.000,00 e R$ 800.000,00

4) Três amigos jogaram R$ 450,00 na Loteria Esportiva, sendo que Alexandre entrou com R$ 180,00, Francisco entrou com R$ 120,00 e Claudemir entrou com R$ 150,00. Ganharam um prêmio de R$ 300.000,00. Ao ser rateado o prêmio, Claudemir ficará com:

a) R$ 100.000,00
b) R$ 80.000,00
c) R$ 90.000,00
d) R$ 110.000,00
e) R$ 120.000,00

5) Todos os eventos relacionados abaixo são inversamente proporcionais, exceto:

a) Número de erros em uma prova e a nota obtida
b) Quantidade de alimento e o número de dias que um náufrago poderá sobreviver
c) Velocidade média e o tempo necessário para se percorrer uma determinada distância
d) Número de operários e o tempo necessário para eles construírem uma casa
e) Número de pessoas em uma festa e a quantidade de salgados que cada um poderá consumir

Gabarito

1) e
2) c
3) b
4) a
5) b

8.7. RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

A = Ademir B = Bernardo C = César

- Ademir investiu na empresa R$ 2.500,00 durante um ano e meio (18 meses):

18 x 2500 = 45000

- Bernardo investiu na empresa R$ 4.000,00 durante 1 ano (12 meses)

12 x 4000 = 48000

- César investiu na empresa R$ 6.000,00 durante 7 meses

7 x 6000 = 42000

$$\frac{A}{45000} = \frac{B}{48000} = \frac{C}{42000} = \frac{45000}{45000 + 48000 + 42000} = \frac{45000}{135000} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{C}{42000} = \frac{1}{3}$$

Portanto, a parte do lucro que cabe a César é: 42000 / 3 = 14000 = R$ 14.000,00

Resposta: A parte do lucro que cabe a César é R$ 14.000,00

Teste 2

A = classe 1ªA

B = classe 1ªB

C = classe 1ªC

$$\frac{A}{\frac{1}{10}} = \frac{B}{\frac{1}{15}} = \frac{C}{\frac{1}{5}} = \frac{33}{\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{5}} = \frac{33}{\frac{3+2+6}{30}} = \frac{33}{\frac{11}{30}} = \frac{33 \times 30}{11} = 3 \times 30 = 90$$

Logo, O número de CD's que deve ser entregue para a classe 1ªA é:

$$\frac{A}{\frac{1}{10}} = 90$$

$$A = \frac{90}{10} = 9$$

Resposta: 9 CD's devem ser entregues para a classe 1ªA

Teste 3

$$\frac{A}{\frac{20000}{5}} = \frac{B}{\frac{60000}{10}} = \frac{2000000}{4000 + 6000} = \frac{2000000}{10000} = 200$$

$$\frac{A}{4000} = 200$$

A = 200 x 4000 = 800000 = R$ 800.000,00

$$\frac{B}{6000} = 200$$

B = 200 x 6000 = 1200000 = R$ 1.200.000,00

Resposta: As cidades devem receber respectivamente R$ 800.000,00 e R$ 1.200.000,00

Teste 4

A = Alexandre F = Francisco C = Claudemir

$$\frac{A}{180} = \frac{F}{120} = \frac{C}{150} = \frac{300000}{180 + 120 + 150} = \frac{300000}{450} = \frac{2000}{3}$$

$$C = \frac{2000 \,.\, 150}{3} = \frac{300000}{3} = 100000$$

Resposta: Claudemir ficará com R$ 100.000,00

Teste 5

a) Número de erros em uma prova e a nota obtida

É inversamente proporcional, pois quanto maior o número de erros, menor será a nota.

b) Quantidade de alimento e o número de dias que um náufrago poderá sobreviver

É diretamente proporcional, pois quanto maior a quantidade de alimento, maior será o número de dias que o náfrago poderá sobreviver.

c) Velocidade média e o tempo necessário para se percorrer uma determinada distância

É inversamente proporcional, pois quanto maior for a velocidade média, menor será o tempo para se percorrer uma determinada distância.

d) Número de operários e o tempo necessário para eles construírem uma casa

É inversamente proporcional, pois quanto maior o número de operários, menor será o tempo necessário para construírem uma casa.

e) Número de pessoas em uma festa e a quantidade de salgados que cada um poderá consumir

É inversamente proporcional, pois quanto maior o número de pessoas em uma festa, menor será a quantidade de salgados que cada um poderá consumir.

Resp.: A alternativa que é diretamente proporcional é a alternativa "b"

9. REGRA DE TRÊS SIMPLES E COMPOSTA

Podemos definir REGRA DE TRÊS ao cálculo ou processo matemático utilizado para resolver problemas que envolvam duas ou mais grandezas diretas ou grandezas inversamente proporcionais.

O problema que envolve somente duas grandezas diretamente é mais comumente chamado de regra de três simples.

9.1. REGRA DE TRÊS SIMPLES

Regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvam quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

Passos utilizados numa regra de três simples:

1º) Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

2º) Identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

3º) Montar a proporção e resolver a equação.

É definido na regra de três os termos de "direta ou inversa", dependendo do tipo de relação que existem entre as duas grandezas envolvidas no processo do problema.

9.1.1. Regra de três simples direta

Exemplo: Com uma área de absorção de raios solares de 1,2 m², uma lancha com motor movido a energia solar consegue produzir 400 watts por hora de energia. Aumentando-se essa área para 1,5 m², qual será a energia produzida?

Área (m^2)	W / h
1,5 ↑	X ↑
1,2	400

Aumentando a área de absorção, a energia produzida será maior (grandezas diretamente proporcionais).

$$\frac{1,5}{1,2} = \frac{X}{400}$$

$$X = \frac{1,5 \, . \, 400}{1,2} = 500$$

Logo, a energia produzida será de 500 watts por hora.

Curiosidade: O matemático hindú Aryabhata escreveu no ano 499 d.C. uma obra intitulada Aryabhatiya sobre astronomia e matemática. Nesta obra, em linguagem floreada, o autor descreve o seguinte: "Na regra de três multiplique-se o fruto pelo desejo e divida-se pela medida. O resultado será o fruto do desejo".

9.1.2. Regra de três simples inversa

Nesta modalidade de regra de três são envolvidas duas grandezas inversamente proporcionais, ou seja, quando existe a variação de uma das grandezas a outra varia, porém de forma contrária, mais na mesma proporção.

A montagem da solução deste tipo de problema é feita invertendo as ordens das grandezas.

Exemplo: Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 300 Km/h, faz um determinado percurso em 4 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso com a velocidade de 240 km/h?

Velocidade (Km/h)	Tempo (h)
300	4
240	X

Diminuindo a velocidade do trem, aumenta o tempo da viagem (grandezas inversamente proporcionais).

$$\frac{300}{240} = \frac{X}{4}$$

$$X = \frac{4 \, . \, 300}{240} = 5$$

Logo, com a velocidade de 240 Km/h, o tempo desse percurso seria de 5 horas.

9.2. REGRA DE TRÊS COMPOSTA

O Método Prático consiste em:

a) Escrever em coluna as variáveis do mesmo tipo, ou seja, aquelas expressas na mesma unidade de medida.

b) Identificar aquelas que variam num mesmo sentido (grandezas diretamente proporcionais) e aquelas que variam em sentidos opostos (grandezas inversamente proporcionais), marcando-as com setas no mesmo sentido ou sentidos opostos, conforme o caso.

c) A incógnita x será obtida da forma sugerida no esquema abaixo, dada como exemplo de caráter geral.

Sejam as grandezas A, B, C e D, que assumem os valores indicados abaixo, e supondo-se, por exemplo, que a grandeza A seja diretamente proporcional à grandeza B, inversamente proporcional à grandeza C e inversamente proporcional à grandeza D, podemos montar o esquema a seguir:

$$\begin{array}{cccccccc} A & & B & & C & & D & \\ a & \uparrow & b & \uparrow & c & \downarrow & d & \downarrow \\ x & & p & & r & & s & \end{array}$$

Neste caso, o valor da incógnita "x" será dado por:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{p} \cdot \frac{r}{c} \cdot \frac{s}{d}$$

$$x = a \cdot \frac{p}{b} \cdot \frac{c}{r} \cdot \frac{d}{s} = \frac{a \cdot p \cdot c \cdot d}{b \cdot r \cdot s}$$

Observem que para as grandezas diretamente proporcionais, multiplicamos x pelos valores invertidos e para as grandezas inversamente proporcionais, multiplicamos pelos valores como aparecem no esquema.

Exercícios:

1) Sabe-se que 4 máquinas, operando 4 horas por dia, durante 4 dias, produzem 4 toneladas de certo produto. Quantas toneladas do mesmo produto seriam produzidas por 6 máquinas daquele tipo, operando 6 horas por dia, durante 6 dias?

Observe que a produção em toneladas é diretamente proporcional ao número de máquinas, ao número de dias e ao número de horas/dia.

Portanto:

Máquinas	Horas / dia	Dias	Toneladas
4 $\uparrow$	4 $\uparrow$	4 $\uparrow$	4 $\uparrow$
6	6	6	X

$$\frac{4}{x} = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}$$

$$X = 4 \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{6}{4} = \frac{216}{16}$$

Resposta: 13,5 toneladas

2) Em uma fábrica, vinte e cinco máquinas produzem 15000 peças de automóvel em doze dias, trabalhando 10 horas por dia. Quantas horas por dia deverão trabalhar 30 máquinas, para produzirem 18000 peças em 15 dias?

Aumentando o número de horas/dia, aumenta o número de peças, diminui o número de dias necessários e diminui o número de máquinas necessárias.

Máquinas	Horas / dia	Dias	Número de peças
25 $\downarrow$	10 $\uparrow$	12 $\downarrow$	15000 $\uparrow$
30	X	15	18000

$$\frac{10}{x} = \frac{15000}{18000} \cdot \frac{15}{12} \cdot \frac{30}{25}$$

$$X = 10 \cdot \frac{18000}{15000} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{25}{30} = 8$$

Resposta: 8 horas por dia

3) Cinco operários deveriam terminar certa obra em 22 dias de trabalho. Após 10 dias de 8 horas de trabalho, ficaram prontos 2/5 da obra. Quantas horas por dia deverão trabalhar daí por diante para terminar a obra no prazo fixado?

Aumentando-se o número de horas trabalhadas, aumenta a parte da obra concluída e diminui o número de dias trabalhados. Logo, para fazer o restante da obra (3/5 da obra) em 12 dias, é necessário uma jornada diária de x horas:

$\downarrow$ 10 dias	$\uparrow$ 8 h	$\uparrow$ 2/5 obra
12 dias	x	3/5 obra

$$\frac{8}{x} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} \cdot \frac{12}{10}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{10} = \frac{24}{30}$$

24 . X = 8 . 30   24 . X = 240   X = 240 / 24   X = 10

Resposta: 10 horas por dia

9.3. TESTE DE AVALIAÇÃO - REGRA DE TRÊS

1) Um trem, á velocidade de 80 quilômetros por hora, vai da cidade A à cidade B em 2 horas. Se o trem percorrer a mesma distância a uma velocidade de 100 km/h, qual será o tempo gasto?

a) 1h 42 min
b) 1h 28 min
c) 1h 40 min
d) 1h 36 min
e) 1h 34 min

2) 50 operários gastam 15 dias de 8 horas para construir 75 m de muro. Quantos dias de 5 horas gastarão 40 operários, para construir 50 m de um muro igual?

a) 24
b) 20
c) 16
d) 22
e) 18

3) Três torneiras idênticas, abertas completamente, enchem um tanque com água em 1h 45min. Se, em vez de 3, fossem 4 torneiras, quanto tempo levaríamos para encher o mesmo tanque?

a) 1h 30min 12s
b) 1h 20min 18s
c) 1h 18min 45s
d) 1h 28min 10s
e) 1h 15 min 15s

4) Uma turma de 20 operários pretende terminar, em 30 dias, certa obra. Ao cabo de 24 dias, fizeram somente 2/3 da obra. Com quantos homens teriam que ser reforçados para concluir a obra no tempo fixado?

a) 20
b) 18
c) 25
d) 30
e) 22

5) O diâmetro da roda menor de um trator é 60 cm e o da maior é 1 m. Enquanto a roda maior dá 240 voltas, quantas dará a menor?

a) 380
b) 410
c) 420
d) 360
e) 400

6) Em 15 dias 20 operários fizeram um quarto de uma obra. A partir daí 2 operários foram afastados por problemas de saúde e não houve reposição. Com esse imprevisto pergunta-se: Quantos dias além do programado se levará para concluir toda a obra?

a) 3
b) 5
c) 4
d) 7
e) 6

7) 10 operários deveriam fazer certo trabalho em 16 dias de 8 horas, porém depois de 12 dias, já haviam feito 4/5 de todo o trabalho. Sendo assim, nos próximos 4 dias, quantas horas devem ser reduzidas no trabalho diário desses operários, a fim de que o serviço fique pronto no tempo aprazado?

a) 2
b) 1
c) 4
d) 6
e) 3

8) Um livro tem 250 páginas de 27 linhas cada página e de 72 letras cada linha. Reimprimindo-se esse livro com os mesmos caracteres, porém fazendo as páginas de 30 linhas cada uma e com 60 letras por linha, o novo livro terá:

a) 272 páginas
b) 20 páginas a menos que o primeiro
c) 18 páginas a mais que o primeiro
d) 232 páginas
e) 20 páginas a mais que o primeiro

9) Um navio foi abastecido com comida suficiente para alimentar 18 pessoas durante 30 dias. Se 20 pessoas embarcarem nesse navio, para quantos dias, no máximo, as reservas de alimento serão suficientes?

a) 28
b) 25
c) 27
d) 24
e) 22

10) Uma montadora de automóveis demora 10 dias para produzir 250 veículos, trabalhando 8 horas por dia. Quantos veículos montará em 16 dias, funcionando 10 horas por dia?

a) 550
b) 450
c) 400
d) 500
e) 420

Gabarito

1) d
2) b
3) c
4) a
5) e
6) b
7) a
8) e
9) c
10) d

9.4. RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

$$\uparrow \begin{array}{l} 80 \text{ km/h} \\ 100 \text{ km/h} \end{array} \quad \downarrow \begin{array}{l} 2 \text{ h} \\ T \end{array}$$

Aumentando-se a velocidade média do trem, diminui-se o tempo gasto para ir da cidade A para a cidade B (grandezas inversamente proporcionais), logo:

$$\frac{2}{T} = \frac{100}{80}$$

$100 \,.\, T = 2 \,.\, 80 \qquad 100 \,.\, T = 160$

$$T = \frac{160}{100} = 1{,}6\,h$$

1 h = 60 min, logo: 0,6 h = 36 min

T = 1,6 h = 1 h + 0,6 h = 1 h + 36 min

Resposta: A uma velocidade média de 100 km/h, o tempo gasto será de 1 h e 36 min

Teste 2

- Aumentando-se o número de dias trabalhados se constrói mais muro (grandezas diretamente proporcionais)

- Aumentando-se o número de dias trabalhados são necessários menos operários (grandezas inversamente proporcionais)

- Aumentando-se o número de dias trabalhados são necessárias menos horas de trabalho por dia (grandezas inversamente proporcionais)

- Esquematizando de acordo com os dados do problema, temos:

$$\downarrow \begin{array}{l} 50 \text{ operários} \\ 40 \text{ operários} \end{array} \quad \uparrow \begin{array}{l} 15 \text{ dias} \\ X \end{array} \quad \downarrow \begin{array}{l} 8h \\ 5h \end{array} \quad \uparrow \begin{array}{l} 75 \text{ m} \\ 50 \text{ m} \end{array}$$

$$\frac{15}{X} = \frac{40}{50} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{75}{50}$$

$$X = \frac{15 \;.\; 50 \;.\; 8 \;.\; 50}{40 \;.\; 5 \;.\; 75} = \frac{300000}{15000} = 20 \text{ dias}$$

Resposta: 20 dias

Teste 3

Aumentando-se o número de torneiras, diminui-se o tempo necessário para se encher o tanque (grandezas inversamente proporcionais)

1h 45min = 60 min + 45 min = 105 min

Esquematizando, temos:

$$\uparrow \begin{array}{l} 3 \text{ torneiras} \\ 4 \text{ torneiras} \end{array} \quad \downarrow \begin{array}{l} 105 \text{ min} \\ T \end{array}$$

$$\frac{105}{T} = \frac{4}{3}$$

4 . T = 3 . 105

$$T = \frac{315}{4} = 78{,}75 \text{ min}$$

78 min = 60 min + 18 min = 1 h + 18 min

1 min = 60 s   0,75 min = 0,75 x 60 = 45 s

Logo, T = 1h + 18min + 45s

Resposta: 1h 18min 45s

Teste 4

A obra deve ficar pronta em 30 dias. Em 24 dias, com 20 operários, foi realizado 2/3 da obra. Portanto, em 6 dias, com N operários, deve ser realizado o restante da obra (1/3 da obra).

- Aumentando-se o número de operários, reduz-se o tempo para realizar a obra (grandezas inversamente proporcionais).

- Aumentando-se o número de operários, uma parcela maior da obra será realizada (grandezas diretamente proporcionais).

Esquematizando, temos:

$$\begin{array}{l|l|l} \uparrow\ 20 \text{ operários} & 24 \text{ dias}\ \downarrow & \uparrow\ 2/3 \text{ obra} \\ \ N & 6 \text{ dias} & \ 1/3 \text{ obra} \end{array}$$

$$\frac{20}{N} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{6}{24} = \frac{2 \times 6}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

N = 2 x 20 = 40 operários

Como já temos 20 operários, será necessário contratar mais 20 operários.

Resposta: Para concluir a obra no tempo fixado é necessário contratar mais 20 operários

Teste 5

- O número de voltas que a roda irá dar aumenta à medida que se diminui o diâmetro da mesma (grandezas inversamente proporcionais).

Esquematizando, temos:

↓		↑	
	100 cm		240 voltas
	60 cm		N

$$\frac{240}{N} = \frac{60}{100}$$

60 . N = 240 . 100 = 24000

N = 24000 / 60 = 400 voltas

Resposta: Enquanto a roda maior dá 240 voltas, a menor dá 400 voltas

---

Teste 6

- Em 15 dias, 20 operários fazem 1/4 obra. Saindo 2 operários e não havendo reposição, para completar o restante da obra (3/4 da obra), serão necessários "T" dias.

- Aumentando-se o número de dias trabalhados, são necessários menos operários (grandezas inversamente proporcionais).

- quanto mais dias trabalhados, mais obra realizada (grandezas diretamente proporcionais)

Esquematizando, temos:

↑		↓		↑	
	15 dias		20 operários		1/4 obra
	T		18 operários		3/4 obra

$$\frac{15}{T} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{18}{20} = \frac{1\ .\ 18}{3\ .\ 20} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$$

3 . T = 15 . 10 = 150

T = 150 / 3 = 50 dias

Se os dois operários não tivessem saído, os 3/4 da obra que faltavam seriam realizados em:

$$\begin{array}{cl@{\qquad}cl} \uparrow & 15 \text{ dias} & \uparrow & 1/4 \text{ obra} \\ & T & & 3/4 \text{ obra} \end{array}$$

$$\frac{15}{T} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

T = 3 x 15 = 45 dias

Porém sem os 2 funcionários são necessários 50 dias, ou seja 5 dias a mais (50 - 45 = 5)

Resposta: São necessários 5 dias além do programado para se concluir toda a obra

---

Teste 7

O trabalho deve ser feito em 16 dias. Em 12 dias foi realizado 4/5 do trabalho. Portanto, em 4 dias deve ser realizado o restante do trabalho (1/5 do trabalho).

- Aumentando-se o número de horas trabalhadas, reduz-se o número de dias trabalhados (grandezas inversamente proporcionais).

- Aumentando-se o número de horas trabalhadas, uma parcela maior do trabalho é realizado (grandezas diretamente proporcionais).

Esquematizando, temos:

$$\begin{array}{cl@{\qquad}cl@{\qquad}cl} \downarrow & 12 \text{ dias} & \uparrow & 8 \text{ horas} & \uparrow & 4/5 \text{ trabalho} \\ & 4 \text{ dias} & & T & & 1/5 \text{ trabalho} \end{array}$$

$$\frac{8}{T} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} \cdot \frac{4}{12} = \frac{4 \times 4}{12} = \frac{16}{12}$$

16 . T = 8 . 12 = 96

T = 96 / 16 = 6 horas

Portanto nos 4 dias seguintes os operários devem trabalhar 6 horas por dia. Como estavam trabalhando 8 horas por dia, conclui-se que a jornada de trabalho deve ser reduzida em 2 horas.

Resposta: 2 horas devem ser reduzidas no trabalho diário dos operários, a fim de que o serviço fique pronto no tempo aprazado

---

Teste 8

O número de caracteres do livro é: 250 páginas x 27 linhas x 72 letras = 486000 caracteres

Reimprimindo-se esse livro <u>com os mesmos caracteres</u>, porém fazendo as páginas de 30 linhas cada uma e com 60 letras por linha, o novo livro terá: :

N = 486000 / (30 x 60) = 486000 / 1800 = 270 páginas

O novo livro terá 270 páginas, ou seja: 20 páginas a mais que o primeiro

Resposta: 20 páginas a mais que o primeiro

Teste 9

Se mais pessoas embarcarem, as reservas de alimentos serão suficientes para menos dias (grandezas inversamente proporcionais)

↑		↓
18 pessoas		30 dias
20 pessoas		T

$$\frac{30}{T} = \frac{20}{18}$$

20 . T = 30 . 18 = 540

T = 540 / 20 = 27 dias

Resposta: As reservas de alimentos serão suficientes para 27 dias

---

Teste 10

- Aumentando-se o número de dias trabalhados, aumenta-se o número de veículos produzidos (grandezas diretamente proporcionais).

- Aumentando-se o número de horas trabalhadas por dia, aumenta-se o número de veículos produzidos (grandezas diretamente proporcionais).

Esquematizando, temos:

$$\uparrow \begin{matrix} 10 \text{ dias} \\ 16 \text{ dias} \end{matrix} \qquad \uparrow \begin{matrix} 250 \text{ veículos} \\ N \end{matrix} \qquad \uparrow \begin{matrix} 8 \text{ h/d} \\ 10 \text{ h/d} \end{matrix}$$

$$\frac{250}{N} = \frac{10}{16} \cdot \frac{8}{10} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

N = 2 . 250 = 500 veículos

Resposta: Montará 500 veículos

AULA 10 - POTENCIAÇÃO

Potência de um número consiste em multiplicar o número por si mesmo um certo número de vezes.

$$a^n = \underbrace{\boxed{a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, \dots \,.\, a}}_{\text{“n” fatores}}$$

a^n = potência
a = base
n = expoente

Exemplo: $3^5 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 243$

A abreviação acima indicada como a^n, foi inventada pelo matemático francês René Descartes, em 1637.

10.1. QUADRADO E CUBO DE UM NÚMERO - ORIGEM

A área de um quadrado de 2 metros de lado é 2 x 2 = 4 metros quadrados. Por causa dessa ligação com o quadrado, diz-se que 4 é o quadrado de 2. O produto de qualquer número multiplicado por si mesmo é o quadrado desse número.

Uma situação semelhante surge em relação ao cubo que é uma figura sólida com todos os ângulos retos e todas as arestas do mesmo tamanho. O volume de um cubo de 2 metros de aresta é 2 x 2 x 2 = 8 metros cúbicos. Por causa disso, diz-se que 8 é o cubo de 2. O produto de três números iguais quaisquer é o cubo desse número.

Os conceitos de quadrado e cubo de um número tiveram sua origem entre os gregos, que se interessaram de modo especial pelas figuras geométricas. Como não existem figuras geométricas que se possam desenhar ou construir representando situações em que quatro ou mais números iguais devam ser multiplicados, não há nomes especiais para x^4, x^5, etc.

Os matemáticos designam essas expressões simplesmente como "x à quarta", "x à quinta" e assim por diante.

10.2. REGRAS

1) Qualquer número elevado a um

Qualquer número elevado à um, é ele mesmo.

$$\boxed{a^1 = a}$$

Exemplo: $3^1 = 3$

2) Qualquer número elevado a zero

Qualquer número elevado a zero é um.

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Exemplo: $5^0 = 1$

3) Produto de potências de mesma base

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

$3^2 \times 3^3 = 35$ $(9 \times 27 = 243)$

$2^3 \times 2^4 \times 2^2 = 29$ $(8 \times 16 \times 4 = 512)$

4) Divisão de potências de mesma base

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Exemplo:

$\dfrac{2^5}{2^2} = 2^3$ $\left(\dfrac{32}{4} = 8\right)$

5) Potência de potência

$$(a^m)^n = a^{m\,n}$$

Exemplo: $(2^2)^3 = 2^6$ $(4^3 = 6^4)$

6) Potência de um produto

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

Exemplo: $2^2 \times 5^2 = (2 \times 5)^2$ $4 \times 25 = 10^2$

7) Potência de um quociente

$$\left(\frac{a^n}{b^n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemplo:

$$\frac{6^2}{2^2} = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$$

8) Potência de expoente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplos:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{8}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^{-2}} = \frac{1}{9}$$

9) Potência de base fracionária e expoente negativo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Exemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2}$$

Observações:

1) Base negativa elevada à expoente par = resultado positivo

Exemplo: $(-2)^2 = +4$

2) Base negativa elevada à expoente ímpar = resultado negativo

Exemplo: $(-2)^3 = -8$

3) $\left(5^2\right)^3$ não é o mesmo que 5^{2^3}, já que em 5^{2^3} efetua-se, antes, $2^3 = 8$ obtendo-se $5^{2^3} = 5^8$, ou seja:

$$\left(5^2\right)^3 = 5^6$$
$$5^{2^3} = 5^8$$

Exercício:

1) Se $3^{3a} = 512$, qual é o valor de 3^{-a}?

$(3^a)^3 = 2^9$

$(3^a)^3 = (2^3)^3$

Se os expoentes são iguais, as bases também são, logo:

$3^a = 2^3 = 8$

Como $3^{-a} = \frac{1}{3^a}$, temos:

$$\boxed{3^{-a} = \frac{1}{8}}$$

10.3. QUADRADO DE UM NÚMERO TERMINADO EM "5"

Método prático:

- \- Elimine o "5" do final.
- \- Multiplique o que restou pelo sucessor.
- \- Coloque "25" ao lado direito desse resultado.

Exemplo:

$(15)^2$	1~~5~~	1 x 2 = 2	225
$(315)^2$	31~~5~~	31 x 32 = 992	99225
$(1945)^2$	194~~5~~	194 x 195 = 37830	3783025

10.4. POTÊNCIA DE UM NÚMERO DECIMAL ENTRE 0 E 1

Exemplo: $(0,25)^2$

1) Elevar o número ao expoente independentemente da vírgula.

$25^2 = 625$

2) Multiplicar o número de casas que vêm depois da vírgula pelo expoente.

2 x 2 = 4

3) Isso significa que o resultado terá 4 algarismos depois da vírgula, então:

$(0,25)^2 = 0,0625$

Outros exemplos:

$(0,4)^3$ $4^3 = 64$ 1 x 3 = 3 (nº de casas decimais) $(0,4)^3 = 0,064$

$(0,11)^3$ $11^3 = 1331$ 2 x 3 = 6 (nº de casas decimais) $(0,11)^3 = 0,001331$

$(0,13)^4$ $13^4 = 28561$ 2 x 4 = 8 (nº de casas decimais) $(0,13)^3 = 0,00028561$

10.5. TESTE DE AVALIAÇÃO - POTENCIAÇÃO

1) Se $2^{11} . 5^{6} = 3{,}2 . 10^{n-3}$, então "n" é igual a:

a) 9
b) 7
c) 11
d) 10
e) 8

2) O produto $2^{15} . 2^{8}$ resulta em um número de quantos algarismos?

a) 12
b) 10
c) 9
d) 8
e) 11

3) Se $7^{-2x} = 0{,}25$, então o valor de 7^{3x} é:

a) 8
b) 16/3
c) 4
d) 15/2
e) 6

4) Se $A = 2^{-3} + \frac{3}{4} - 0{,}5^{2}$ e $B = 0{,}4^{-2}$, então A/B é:

a) 1/8
b) 0,2
c) 1/4
d) 0,1
e) 0,15

5) Dados $A = 33^{100}$, $B = 6^{200}$ e $C = 2^{500}$, podemos afirmar que:

a) A < B < C
b) C < A < B
c) B < A < C
d) C < B < A
e) A < C < B

Gabarito

1) d
2) e
3) a
4) d
5) b

10.6. RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

$2^{11} . 5^6 = 3,2 . 10^{n-3}$

$2^5 . 2^6 . 5^6 = 32 . 10^{-1} . 10^{n-3}$

$2^5 . 10^6 = 2^5 . 10^{n-4}$

$10^6 = 10^{n-4}$

$n - 4 = 6$

$n = 6 + 4$

$n = 10$

Resposta: n = 10

Teste 2

$2^{15} . 5^8$

$2^7 . 2^8 . 5^8 = 2^7 . 10^8 = 128 . 10^8 = 12800000000$

Resposta: O produto $2^{15} . 5^8$ resulta em um número de 11 algarismos

---

Teste 3

$7^{-2x} = 0,25$

$(7^x)^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

$(7^x)^{-2} = 2^{-2}$

Se os expoentes são iguais, para que a igualdade seja verdadeira, as bases também devem ser iguais, ou seja:

$7^x = 2$

Logo, elevando ambos os membros ao cubo, temos:

$(7^x)^3 = 2^3$

$7^{3x} = 8$

Resposta: $7^{3x} = 8$

Teste 4

$A = 2^{-3} + \frac{3}{4} - 0,5^2$

$B = 0,4^{-2}$

A / B = ?

$2^{-3} = \frac{1}{8}$

$0,5^2 = \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Logo:

$A = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{2}{4} = \frac{1+4}{8} = \frac{5}{8}$

$$B = 0{,}4^{-2} = \left(\frac{4}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \frac{25}{4}$$

Logo:

$$\frac{A}{B} = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)}{\left(\frac{25}{4}\right)} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{25} = \frac{20}{200} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Resposta: A/B = 0,1

Teste 5

Para compararmos os três números, devemos deixá-los na mesma base:

$A = 33^{100}$

$B = 6^{200} = (6^2)^{100} = 36^{100}$

$C = 2^{500} = (2^5)^{100} = 32^{100}$

$32^{100} < 33^{100} < 36^{100}$

Logo:

C < A < B

Resposta: C < A < B

AULA 11 - RADICIAÇÃO

Ao inverso da potenciação, que consiste em encontrar um valor que multiplicado por si mesmo um certo número de vezes dá um resultado conhecido, os matemáticos dão o nome de "radiciação" ou "extração de raiz".

Se $a^n = b$, então: $\sqrt[n]{a} = x$

- $\sqrt{\ }$ = radical
- a = radicando
- n = índice
- x = raiz

Exemplo: $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$

Observação: $\sqrt{9} = 3$ e não $\sqrt{9} = \pm 3$. A definição, para o caso de índice "n" par, exige radicando não negativo e raiz não negativa.

11.1. RAIZ - ORIGENS

O Sinal $\sqrt{\ }$ é chamado radical. Foi inventado por um matemático alemão chamado Christoff Rudolff, que o empregou pela primeira vez num livro publicado em 1525. Antes disso, usava-se a letra r (de radix - que quer dizer raiz), e é bem possível que $\sqrt{\ }$ seja simplesmente uma espécie de r deformado.

Por volta de 1700, os matemáticos passaram a distinguir os tipos de raiz usando um número pequeno, exatamente como no caso das potências. Assim a raiz cúbica indica-se por $\sqrt[3]{\ }$; a raiz quarta por $\sqrt[4]{\ }$, e assim por diante. Ao número dá-se o nome de "índice".

Existe uma exceção a essa regra geral dos índices, que diz respeito à raiz quadrada. Para sermos completamente lógicos, ela deveria ser escrita $\sqrt[2]{\ }$. Mas a raiz quadrada é usada tão mais frequentemente que todas as outras juntas, que os matemáticos economizam tempo representando-a apenas por $\sqrt{\ }$.

11.2. REGRAS

1ª regra

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

$$2^{5/2} = \sqrt{2^5}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$2^{-4/3} = \sqrt[3]{2^{-4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}$$

2ª regra

$$\sqrt[n]{a \, . \, b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

Exemplo: $\sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5}$

3ª regra

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplo: $\sqrt[3]{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

4ª regra

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplo: $\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

5ª regra

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}}$$

Exemplo: $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$

11.3. TRANSFORMAÇÃO DE RADICAIS COMPOSTOS EM RADICAIS SIMPLES

$$\boxed{\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}}$$

Onde:

$$c = \sqrt{a^2 - b}$$

Exercício

1) Transforme o radical $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ em um radical simples.

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$$

$$c = \sqrt{6^2 - 20} = \sqrt{36 - 20} = \sqrt{16} = 4$$

$$\therefore \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} - \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5} - 1$$

Logo:

$$\boxed{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1}$$

11.4. PRODUTO DE 2 RADICAIS DE ÍNDICES DIFERENTES

- Calcule o MMC dos dois índices.
- Faça com que os dois radicais fiquem com o MMC calculado como índice.
- Em seguida efetue o produto dos radicandos.

Exercícios

1) Calcular $\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{5}$

MMC(2,3) = 6

$\therefore \sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3}\,.\,\sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{2^3\,.\,5^2} = \sqrt[6]{8 \times 25} = \sqrt[6]{200}$

Logo:

$$\boxed{\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{200}}$$

2) Calcular $\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[4]{5}$

MMC(3,4) = 12

$\therefore \sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^4\,.\,5^3}$

Logo:

$$\boxed{\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^7}}$$

11.5. DIVISÃO DE 2 RADICAIS DE ÍNDICES DIFERENTES

- Calcule o MMC dos dois índices.
- Faça com que os dois radicais fiquem com o MMC calculado como índice.
- Em seguida efetue a divisão dos radicandos. Se a divisão não der resultado inteiro, deixe o radicando resultante em forma de fração simplificada.

Exercícios

1) Calcular $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

MMC(3,2) = 6

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{16}{8}} = \sqrt[6]{2}$$

Logo:

$$\boxed{\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}}$$

2) Calcular $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{4}}$

MMC(2,4) = 8

$$\therefore \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{\frac{8^2}{4}} = \sqrt[4]{\frac{64}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4}$$

Logo:

$$\boxed{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{4}} = 2}$$

11.6. CÁLCULO DE RAIZ QUADRADA

11.6.1. Cálculo de raiz quadrada - origem

Os matemáticos mesopotâmios foram hábeis no desenvolver processos algorítmicos, entre os quais um para extrair a raiz quadrada frequentemente atribuído a homens que viveram bem mais tarde como o grego Arquitas (428 à 365 A.C.) ou Heron de Alexandria (100 D.C. aproximadamente)

11.6.2. 1º método: Método convencional

Normalmente esse é o método ensinado nas escolas. Ele e é muito mais trabalhoso do que o método que veremos posteriormente (método mesopotâmio de extração de raiz quadrada).

Cada 2 algarismos depois da vírgula, equivalem a uma casa decimal (também depois da vírgula) no número formado. Por essa razão devemos sempre ter um número par de algarismos depois da vírgula.

Exercício

Calcule $\sqrt{774}$ com precisão de 2 casas decimais

a) Separe o número de 2 em 2 algarismos, à partir da direita:

$$\sqrt{7.74{,}00.00}$$

b) Coloque na raiz o número que elevado ao quadrado, mais se aproxime do número do 1º grupo (7), sem ultrapassá-lo.

- 3 x 3 = 9 (ultrapassa 7).
- 2 x 2 = 4 (não ultrapassa 7).

Logo colocaremos 2 na raiz.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{7.74{,}00.00} & \quad 2 \\ \cline{2-2} -\underline{4} & 2 \times 2 = 4 \\ \;\;3 & \end{array}$$

c) Ao lado do resto (3) escreve-se o grupo seguinte (74)

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{7.74{,}00.00} & \quad 2 \\ \cline{2-2} -\underline{4}\;\downarrow & 2 \times 2 = 4 \\ \;\;3\;74 & \end{array}$$

d) Do número formado (374) separe o último algarismo (4) e divida o restante (37) pelo dobro da raiz (2 x 2 = 4), calculando o quociente (sem se preocupar com o resto).

37 ÷ 4 » quociente = 9

e) Coloque o quociente (9) à direita do divisor (4) e multiplique o número formado (49) pelo próprio quociente (9)

49 x 9 = 441

f) 441 > 374, portanto reduza o quociente e refaça os cálculos até obter um número menor que 374.

- 48 x 8 = 384 » 384 > 374
- 47 x 7 = 329 » 329 < 374 **OK**

g) 329 < 374, portanto coloque o 7 na raiz e efetue a subtração 374 - 329 = 45

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{7.74,00.00} & 27 \\
\underline{-4}\ \downarrow & 2 \times 2 = 4 \\
\ \ 3\ 74 & 47 \times 7 = 329 \\
-\underline{3\ 29} & \\
\quad\ 45 &
\end{array}
$$

h) Ao lado do resto (45) escreve-se o grupo seguinte (00) e repete-se o procedimento descrito nos ítens "d" à "g"

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{7.74,00.00} & 27 \\
\underline{-4}\ \downarrow\ \ \downarrow & 2 \times 2 = 4 \\
\ \ 3\ 74 & 47 \times 7 = 329 \\
-\underline{3\ 29}\ \ \downarrow & \\
\quad\ 45\ 00 &
\end{array}
$$

$450 \div 54$ » quociente = 8

548 x 8 = 4384 » 4384 < 4500 **OK**

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{7.\,74,\,00.00} & 27{,}8 \\
\underline{-4}\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow & 2 \times 2 = 4 \\
\ \ 3\ \ 74 & 47 \times 7 = 329 \\
-\underline{\ 3\ \ 29}\ \downarrow\ \ \downarrow & 548 \times 8 = 4384 \\
\quad\quad 45\ 00 & \\
\quad\ -\underline{43\ 84} & \\
\quad\quad\ 1\ 16\ 00 &
\end{array}
$$

$1160 \div 556$ » quociente = 2

5562 x 2 = 11124 » 11124 < 11600 **OK**

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{7.\,74,\,00.00} & 27{,}82 \\
\underline{-4}\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow & 2 \times 2 = 4 \\
\ \ 3\ \ 74 & 47 \times 7 = 329 \\
-\underline{\ 3\ \ 29}\ \downarrow\ \ \downarrow & 548 \times 8 = 4384 \\
\quad\quad 45\ 00 & 5562 \times 2 = 11124 \\
\quad\ -\underline{43\ 84} & \\
\quad\quad\ 1\ 16\ 00 &
\end{array}
$$

Logo:

$$\boxed{\sqrt{774} = 27{,}82}$$

11.6.3. 2º método: Método babilônio

É sem dúvida, um método mais simples para a resolução de raiz quadrada. Confiram!

- Seja "$x = a$" a raiz desejada e seja "a_1" uma primeira aproximação dessa raiz.

- Seja "b_1" uma segunda aproximação dada pela equação: $b_1 = a / a_1$.

- Se "a_1" é pequeno demais, "b_1" é grande demais e vice-versa. Logo a média aritmética $a_2 = (a_1 + b_1) / 2$ é uma nova aproximação plausível.

- Como "a_2" é sempre grande demais, a seguinte $b_2 = a / a_2$ será pequena demais e toma-se a média aritmética $a_3 = (a_2 + b_2) / 2$ para obter um resultado ainda melhor. O processo pode ser continuado indefinidamente.

Exercício

1) Calcule $\sqrt{774}$ com precisão de 2 casas decimais

$10^2 = 100$
$20^2 = 400$
$30^2 = 900$ (ultrapassou)

Logo:

- $a = 774$
- $a_1 = 20$ (1ª aproximação)

$$b_1 = \frac{774}{20} = 38,7$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{20 + 38,7}{2} = 29,35 \quad \text{(2ª aproximação)}$$

$$b_2 = \frac{a}{a_2} = \frac{774}{29,35} = 26,37$$

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{29,35 + 26,37}{2} = 27,86 \quad \text{(3ª aproximação)}$$

$$b_3 = \frac{a}{a_3} = \frac{774}{27,86} = 27,78$$

$$a_4 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{27{,}86 + 27{,}78}{2} = 27{,}82 \quad \text{(4ª aproximação)}$$

$$b_4 = \frac{a}{a_4} = \frac{774}{27{,}82} = 27{,}82$$

$$a_4 = b_4 = 27{,}82$$

Logo:

$$\boxed{\sqrt{774} = 27{,}82}$$

Bem mais fácil, não é mesmo?

11.7. TESTE DE AVALIAÇÃO - RADICIAÇÃO

1) Se $5^{0,15} = \sqrt{K}$, então $5^{1,6}$ é igual a:

a) $2K^3$
b) $4K^2 - K$
c) $K^3 - 2K^2$
d) $5K^2$
e) Nenhuma das alternativas anteriores

2) Dados $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $C = \sqrt[6]{26}$, temos:

a) A < B < C
b) C < A < B
c) B < A < C
d) C < B < A
e) A < C < B

3) O resultado de $27^{0,666...} - 12^{0,5} + 3^{0,5}$ é:

a) $9 - \sqrt{3}$
b) $5\sqrt{2}$
c) $6 + \sqrt{2}$
d) $5 + \sqrt{3}$
e) $4\sqrt{3}$

4) Simplificando o radical $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$, obtemos:

a) $2 - \sqrt{2}$
b) $\sqrt{3} - 1$
c) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$
d) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$
e) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

5) O resultado de $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{4^{-1}}$ é :

a) $\sqrt{3}$
b) 1
c) $2 - \sqrt{2}$
d) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$
e) 3/2

Gabarito

1) d
2) e
3) a
4) c
5) b

11.8. RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

$5^{0,15} = K^{\frac{1}{2}} = K^{0,5}$

$5^{0,6} = 5^{0,15} \,.\, 5^{0,15} \,.\, 5^{0,15} \,.\, 5^{0,15} = K^{0,5} \,.\, K^{0,5} \,.\, K^{0,5} \,.\, K^{0,5} = K^2$

$5^{1,6} = 5^1 \,.\, 5^{0,6} = 5 \,.\, K^2$

Resposta: $5^{1,6} = 5K^2$

Teste 2

$A = \sqrt[3]{5},\ B = \sqrt{3},\ C = \sqrt[6]{26}$

Para comparar devemos deixar as raízes com os mesmos índices:

MMC (3, 2, 6) = 6

Logo:

$A = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

$B = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$

$C = \sqrt[6]{26}$

$\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{26} < \sqrt[6]{27}$

A < C < B

Resposta: A < C < B

Teste 3

$27^{0,666...} - 12^{0,5} + 3^{0,5}$

$0,666... = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$27 = 3^3$

Logo:

$27^{0,666...} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

$12^{0,5} = 12^{\frac{1}{2}} = \sqrt{12} = \sqrt{4\ .\ 3} = \sqrt{2^2\ .\ 3} = 2.\sqrt{3}$

$3^{0,5} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Logo:

$27^{0,666...} - 12^{0,5} + 3^{0,5} = 9 - 2.\sqrt{3} + \sqrt{3} = 9 - \sqrt{3}$

Resposta: $9 - \sqrt{3}$

Teste 4

$2.\sqrt{10} = \sqrt{2^2\ .\ 10} = \sqrt{4\ .\ 10} = \sqrt{40}$

Logo:

$\sqrt{7 - 2.\ \sqrt{10}} = \sqrt{7 - \sqrt{40}}$

Sabemos que:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - c}{2}}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b}$$

Logo:

a = 7 b = 40 $c = \sqrt{7^2 - 40} = \sqrt{49 - 40} = \sqrt{9} = 3$

$$\sqrt{7 - 2 \,.\, \sqrt{10}} = \sqrt{7 - \sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7 + 3}{2}} - \sqrt{\frac{7 - 3}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} - \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

Resposta: $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

Teste 5

$A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \,.\, (\sqrt{3} - 1) \,.\, \sqrt{4^{-1}}$

$2 \,.\, \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \,.\, 3} = \sqrt{4 \,.\, 3} = \sqrt{12}$

$\sqrt{4 - 2 \,.\, \sqrt{3}} = \sqrt{4 - \sqrt{12}}$

Sabemos que:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - c}{2}}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b}$$

Logo:

a = 4 b = 12 $c = \sqrt{7^2 - 40} = \sqrt{49 - 40} = \sqrt{9} = 3$

$$\sqrt{4 + 2 \,.\, \sqrt{3}} = \sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4 + 2}{2}} + \sqrt{\frac{4 - 2}{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{3} + 1$$

Logo:

$$A = (\sqrt{3} + 1) \,.\, (\sqrt{3} - 1) \,.\, \sqrt{4^{-1}} = (3 - 1) \,.\, \sqrt{\frac{1}{4}} = 2 \,.\, \sqrt{\frac{1^2}{2^2}} = 2 \,.\, \frac{1}{2} = 1$$

Resposta: 1

AULA 12 - PRODUTOS NOTÁVEIS

O que são produtos notáveis? Como o próprio nome diz, "produtos notáveis" são multiplicações que se destacam na Matemática, por serem frequentemente utilizadas.

Quando se fala "3 ao quadrado", significa que o número 3 está sendo multiplicado por ele mesmo, ou seja: $3^2 = 3 \times 3$. Substituindo o número 3 por "a" (um número qualquer), teríamos a seguinte expressão: $a^2 = a \times a$.

12.1. QUADRADO DA SOMA

O quadrado da soma de dois números (a + b), por analogia é:

$$(a + b)^2 = (a + b) . (a + b)$$

Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação obtemos o seguinte:

$$(a + b)^2 = (a + b) . (a + b)$$

$$(a + b)^2 = a.a + a.b + b.a + b.b$$

ba = ab (a ordem dos fatores não altera o produto), logo:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

Notem que na propriedade distributiva: multiplicamos todos os termos (não se esquecendo das regras dos sinais) e somamos os termos semelhantes.

Temos portanto:

$$\boxed{\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2}}$$

<u>Exemplo</u>: Calcule $(x + 4)^2$

$$(x + 4)^2 = x^2 + (2 . x . 4) + 4^2$$

$$\mathbf{(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16}$$

<u>Curiosidade</u>: No volume 2 da obra "Os Elementos", Euclides afirma que "se uma reta é cortada ao acaso, o quadrado sobre o todo é igual aos quadrados sobre os segmentos e duas vezes o retângulo contido pelos segmentos". Esta é uma maneira prolixa de se dizer o que já foi descrito acima, ou seja: $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

12.2. QUADRADO DA DIFERENÇA

O quadrado da diferença de dois números (a - b), é:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$$

Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação obtemos o seguinte:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$$

$$(a - b)^2 = a.a - a.b - b.a + b.b$$

$-ba = -ab$ (a ordem dos fatores não altera o produto), logo:

$$(a + b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$$

$$\boxed{\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2}}$$

Exemplo: Calcule $(x - 3)^2$

$$(x - 3)^2 = x^2 - (2 \cdot x \cdot 3) + 3^2$$

$$\mathbf{(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9}$$

12.3. PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA

O produto da soma de dois números (a + b) pela diferença de dois números (a - b), é:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a.a - a.b + b.a - b.b$$

$ba = ab$ (a ordem dos fatores não altera o produto), logo:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab + b^2$$

$$\boxed{\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}}$$

Exemplo: Calcule $(x + 5) \cdot (x - 5)$

$$(x + 5). (x - 5) = x^2 - 5^2$$

$$\mathbf{(x + 5). (x - 5) = x^2 - 25}$$

Curiosidade: Ainda no volume 2 da obra "Os Elementos", Euclides mostra em termos geométricos a identidade $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

12.4. PRODUTO DA SOMA PELO TRINÔMIO

O produto da soma de dois números (a + b) pelo trinômio (a^2 - ab + b^2), é:

$$(a + b) . (a^2 - ab + b^2) = a.a^2 - a.a.b + a.b^2 + b.a^2 - b.a.b + b.b^2$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

Logo:

$$\boxed{\mathbf{(a + b) . (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3}}$$

<u>Exemplo</u>: Calcule (x + 2) . (x^2 - 2x + 4)

$$(x + 2) . (x^2 - 2x + 4) = x^3 + 2^3$$

$$\mathbf{(x + 2) . (x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8}$$

12.5. PRODUTO DA DIFERENÇA PELO TRINÔMIO

O produto da diferença de dois números (a - b) pelo trinômio (a^2 + ab + b^2), é:

$$(a - b) . (a^2 - ab + b^2) = a.a^2 + a.a.b + a.b^2 - b.a^2 - b.a.b - b.b^2$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

Logo:

$$\boxed{\mathbf{(a - b) . (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3}}$$

<u>Exemplo</u>: Calcule (x - 2) . (x^2 + 2x + 4)

$$(x - 2) . (x^2 + 2x + 4) = x^3 - 2^3$$

$$\mathbf{(x - 2) . (x^2 + 2x + 4) = x^3 - 8}$$

12.6. CUBO DA SOMA

O cubo da soma de dois números (a + b), é:

$$(a + b)^3 = (a + b) . (a + b) . (a + b) =$$

$$= (a + b) . (a + b)^2 = (a + b) . (a^2 + 2ab + b^2)$$

$= a.a^2 + a.2ab + a.b^2 + ba^2 + b.2ab + b.b^2$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

Logo:

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3\ ab^2 + b^3}$$

Exemplo: Calcule $(x + 2)^3$

$(x + 2)^3 = x^3 + (3 \,.\, x^2 \,.\, 2) + (3 \,.\, x \,.\, 2^2) + 2^3$

$\mathbf{(x + 2)^3 = (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$

12.7. CUBO DA DIFERENÇA

O cubo da diferença de dois números (a - b), é:

$(a - b)^3 = (a - b) \,.\, (a - b) \,.\, (a - b) =$

$= (a - b) \,.\, (a - b)^2 = (a - b) \,.\, (a^2 - 2ab + b^2)$

$= a.a^2 - a.2ab + a.b^2 - ba^2 + b.2ab - b.b^2 =$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

Logo:

$$\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3\ ab^2 - b^3}$$

Exemplo: Calcule $(x - 2)^3$

$(x - 2)^3 = x^3 - (3 \,.\, x^2 \,.\, 2) + (3 \,.\, x \,.\, 2^2) - 2^3$

$\mathbf{(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

12.8. TESTE DE AVALIAÇÃO - PRODUTOS NOTÁVEIS

1) Utilizando produtos notáveis, calcule $1502^2 - 1500^2$. O resultado é:

a) 4500
b) 6000
c) 5004
d) 3002
e) Nenhuma das alternativas anteriores

2) A expressão $3-\sqrt{5}+\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{3+\sqrt{5}}$ é equivalente a:

a) $\sqrt{5}$
b) $3 - (\sqrt{5} / 2)$
c) $1 + (\sqrt{5} / 3)$
d) $3 - \sqrt{5}$
e) Nenhuma das alternativas anteriores

3) O valor da expressão $\dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ é:

a) 5
b) $\sqrt{5} / 2$
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{5} + 1$
e) $\sqrt{5} - 1$

4) Simplificando a expressão $(a+b)-\dfrac{(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)}$, obtemos:

a) (a . b) / (a + b)
b) (a + b)
c) $(a^2 - b^2) / (a . b)$
d) (a - b) / (a + b)
e) 1 / (a - b)

5) Simplificando a expressão $\dfrac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2b}$ obtemos:

a) $a^2 - b^2$
b) $3a^2 + b^2$
c) $a^2 - b$
d) $2a^2 - b^2$
e) $6a^2 + b$

Gabarito

1) d
2) e
3) a
4) c
5) b

12.9. RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

$1502^2 - 1500^2$

$(1500 + 2)^2 - 1500^2 = 1500^2 + (2 \cdot 1500 \cdot 2) + 2^2 - 1500^2 = 1500^2 + 6000 + 4 - 1500^2$

Resposta: $1502^2 - 1500^2 = 6004$

Teste 2

O MMC entre $(3 - \sqrt{5})$ e $(3 + \sqrt{5})$ é: $(3 - \sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{5})$

Assim temos:

$$3 - \sqrt{5} - \frac{(3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5}).(3 + \sqrt{5})} = 3 - \sqrt{5} - \frac{3 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5}}{(3 - \sqrt{5}).(3 + \sqrt{5})}$$

Usando produtos notáveis, o denominador pode ser reduzido a:

$(3 - \sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$

Assim teremos:

$$3 - \sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{4} = 3 - \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2.(3 - \sqrt{5}) - 2\sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{2} = 3 - \frac{4\sqrt{5}}{2} = 3 - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Resposta: $3 - (\sqrt{5} / 2)$

Teste 3

Para sumir com a raiz no denominador, devemos racionalizar o denominador, ou seja, devemos multiplicar o numerador e o denominador por ($\sqrt{5}$ + 1). Assim teremos:

$$\frac{(5-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)} = \frac{5\sqrt{5}+5-5-\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5-1} = \frac{4\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}$$

Resposta: $\dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}$

Teste 4

$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

Logo:

$$(a+b) - \frac{(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)} = (a+b) - \frac{\cancel{(a-b)}\cdot(a^2+ab+b^2)}{\cancel{(a-b)}\cdot(a+b)} = (a+b) - \frac{(a^2+ab+b^2)}{(a+b)}$$

Portanto teremos:

$$\frac{(a+b)\cdot(a+b)-(a^2+ab+b^2)}{(a+b)} = \frac{(a+b)^2-(a^2+ab+b^2)}{(a+b)}$$

Desenvolvendo, temos:

$$\frac{\cancel{a^2}+2ab+\cancel{b^2}-\cancel{a^2}-ab-\cancel{b^2}}{(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$$

Resposta: (a . b) / (a + b)

Teste 5

$(a + b)^3 = a^3 + 3\ a^2b + 3\ ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3\ a^2b + 3\ ab^2 - b^3$

Logo:

$$\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2b}=\frac{(a^3+3\ a^2b+3\ ab^2+b^3)-(a^3-3a^2b+3\,ab^2-b^3)}{2b}$$

Desenvolvendo, temos:

$$\frac{\cancel{a^3}+3\ a^2b+\cancel{3\ ab^2}+b^3\cancel{-a^3}+3a^2b\cancel{-3ab^2}+b^3}{2b}=\frac{6a^2b+2b^3}{2b}=3\,a^2+b^2$$

Resposta: $3\ a^2 + b^2$

AULA 13 - RACIONALIZAÇÃO

13.1. FATOR RACIONALIZANTE

A fração $\frac{3}{\sqrt{2}}$ tem denominador irracional.

Se multiplicarmos o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$, a fração não se altera e na nova fração o denominandor passa s ser racional.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3.\sqrt{2}}{2}}$$

A forma $\frac{3.\sqrt{2}}{2}$ é chamada racionalizada e foi obtida multiplicando ambos os termos por $\sqrt{2}$ que é chamado "<u>fator racionalizante</u>".

<u>Exercícios</u>

1) Racionalizar $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}}$$

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3}}$$

2) Racionalizar $\frac{8}{\sqrt[3]{4^5}}$

$$\frac{8}{\sqrt[3]{4^5}} = \frac{8}{\sqrt[3]{4^5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\frac{8}{\sqrt[3]{4^5}} = \frac{8\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4^6}} = \frac{8\sqrt[3]{4}}{4^2} = \frac{8\sqrt[3]{4}}{16}$$

$$\boxed{\frac{8}{\sqrt[3]{4^5}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}}$$

13.2. FATOR RACIONALIZANTE DE $\sqrt{a} + \sqrt{a}$

O fator racionalizante de $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ é $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

Exemplo

1) Racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}}$$

13.3. FATOR RACIONALIZANTE DE $\sqrt{a} - \sqrt{a}$

O fator racionalizante de $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ é $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

Exemplo

1) Racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Curiosidade: No volume X da obra "Os Elementos", Euclides enuncia um processo para racionalizar denominadores do tipo $(a \pm \sqrt{b})$ e $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$.

13.4. FATOR RACIONALIZANTE DE $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

O fator racionalizante de $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$ é $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a.b} + \sqrt[3]{b^2})$

Exemplo

1) Racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} + 1^2}{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} + 1^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{2+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3}}$$

13.5. FATOR RACIONALIZANTE DE $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$

O fator racionalizante de $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$ é $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a.b} + \sqrt[3]{b^2})$

Exemplo

1) Racionalizar $\dfrac{2}{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{16}}$

Observe que o denominador é do tipo $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a.b} + \sqrt[3]{b^2}$, onde a=6 e b=4.
logo:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{16}} = \frac{2}{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{16}} \cdot \frac{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4}}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{16}} = \frac{2 \cdot (\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4})}{6-4} = \frac{2 \cdot (\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4})}{2}$$

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4}}$$

13.6. TESTE DE AVALIAÇÃO - RACIONALIZAÇÃO

1) O resultado de $\sqrt{\dfrac{108}{5}} - \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ é:

a) $\sqrt{15}$
b) $2\sqrt{5}$
c) $\sqrt{21}$
d) $2 + \sqrt{5}$
e) Nenhuma das alternativas anteriores

2) Racionalizando $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{16}}$, obtemos:

a) $\sqrt[6]{2}\,/\,2$
b) $\sqrt[3]{2}$
c) $2\sqrt[3]{2}$
d) $\sqrt[3]{4}$
e) $\sqrt[6]{2}$

3) Racionalizando $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, obtemos:

a) $4\sqrt{6} - 1$
b) $\sqrt{8}$
c) $3 + \sqrt{5}$
d) $4 + 2\sqrt{6}$
e) Nenhuma das alternativas anteriores

4) Racionalizando $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$, obtemos:

a) $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{104} + \sqrt[3]{82}$
b) $6\sqrt[3]{4} + 3$
c) $2\,.\,(\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12} + 2)$
d) $\sqrt[3]{152} + \sqrt[3]{82} + 3$
e) Nenhuma das alternativas anteriores

5) Racionalizando $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$, obtemos:

a) $-2\sqrt{6}$
b) $-2 - \sqrt{6}$
c) $4 - \sqrt{6}$
d) $-4 - \sqrt{6}$
e) Nenhuma das alternativas anteriores

Gabarito

1) a
2) e
3) d
4) c
5) b

13.7. RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

$$\sqrt{\frac{108}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$108 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3$, logo:

$$\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

Assim, temos:

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

Racionalizando o denominador, temos:

$$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{15}}{5} = \sqrt{15}$$

Resposta: $\sqrt{15}$

Teste 2

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{16}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2\,\sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{(2^2)^2}}{4} = \frac{2\,\sqrt[6]{2^3 \cdot 2^4}}{4} = \frac{2\,\sqrt[6]{2^6 \cdot 2}}{4} = \frac{4\,\sqrt[6]{2}}{4} = \sqrt[6]{2}$$

Resposta: $\sqrt[6]{2}$

Teste 3

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{24}+\sqrt{16}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2^2 \, . \, 6}+\sqrt{4^2}}{3-2} = \frac{2\sqrt{6}+4}{1} = 4+2\sqrt{6}$$

Resposta: $4+2\sqrt{6}$

Teste 4

Vamos racionalizar o denominador:

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3 \times 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3 \times 2}+\sqrt[3]{2^2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$$

Portanto teremos:

$$\frac{\sqrt[3]{144}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{64}}{3-2} = \frac{\sqrt[3]{8 \times 18}+\sqrt[3]{8 \times 12}+\sqrt[3]{4^3}}{1} = 2\sqrt[3]{18}+2\sqrt[3]{12}+4 = 2.(\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{12}+2)$$

Resposta: $2 \, . \, (\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{12}+2)$

Teste 5

Vamos racionalizar o denominador:

$$\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{8}-\sqrt{2})-\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(\sqrt{8}-\sqrt{2})+\sqrt{3}}$$

Portanto, teremos:

$$\frac{\sqrt{16}-\sqrt{4}+\sqrt{6}}{(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4-2+\sqrt{6}}{8-2\sqrt{16}+2-3} = \frac{2+\sqrt{6}}{8-8+2-3} = \frac{2+\sqrt{6}}{-1} = -1 \, . \, (2+\sqrt{6}) = -2-\sqrt{6}$$

Resposta: $-2-\sqrt{6}$

AULA 14 - MÉDIAS

A média entre muitos valores (quantidades ou números), é uma quantidade que estará sempre entre o menor valor e o maior valor. Veremos agora as médias mais comuns:

14.1. MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES

A média aritmética é a mais utilizada no nosso dia a dia. Ela está tão presente em nosso dia-a-dia que qualquer pessoa entende seu significado e a utiliza com frequência. É obtida dividindo-se a soma das observações pelo número delas. Costumamos calcular várias médias aritméticas na vida diária: a média de horas trabalhadas diariamente, a velocidade média, o salário médio de uma empresa, a produção mensal média de uma indústria, a despesa média mensal, a estatura média das pessoas, o consumo médio de gasolina etc.

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

Exercício:

1) Sabe-se que a média aritmética de 4 números distintos, estritamente positivos, é 10. Qual é o maior valor que um desses inteiros pode assumir?

$$10 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \cdot 10 = 40$$

O maior valor que um desses inteiros pode assumir vai ocorrer quando os outros inteiros forem os três menores números inteiros positivos distintos, ou seja: 1, 2 e 3. Logo temos:

$$1 + 2 + 3 + a_4 = 40$$

$$a_4 = 40 - 6$$

$$a_4 = 34$$

14.2. MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Nos cálculos envolvendo média aritmética simples, todas as ocorrências têm exatamente a mesma importância ou o mesmo peso. Dizemos então que elas têm o mesmo peso relativo. No entanto, existem casos onde as ocorrências têm importância relativa diferente. Nestes casos, o cálculo da média deve levar em conta esta importância relativa ou peso relativo. Este tipo de média chama-se média aritmética ponderada. Ponderar é sinônimo de pesar.

No cálculo da média ponderada, multiplicamos cada valor do conjunto por seu "peso", isto é, sua importância relativa.

$$M_{AP} = \frac{P_1 . a_1 + P_2 . a_2 + P_3 . a_3 + \dots + P_n . a_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n}$$

Onde $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ são os respectivos pesos de $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Exercício:

1) Num teste de 50 questões (10 de matemática, 10 de Física, 10 de Química, 10 de Biologia e 10 de História), um estudante acertou 8 de Matemática, 5 de Física, 3 de Química, 4 de Biologia e 6 de História. Calcular a sua nota, sabendo que o peso de cada matéria é:

Matéria	**Peso**
Matemática	3
Física	3
Química	2
Biologia	1
História	1

$$M_{AP} = \frac{(8 . 3) + (5 . 3) + (3 . 2) + (1 . 4) + (1 . 6)}{3 + 3 + 2 + 1 + 1}$$

$$M_{AP} = \frac{24 + 15 + 6 + 4 + 6}{10} = \frac{55}{10}$$

$$M_{AP} = 5,5$$

14.3. MÉDIA HARMÔNICA

A média harmônica de "n" números é o inverso da média aritmética dos inversos desses "n" números.

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

<u>Exercícios:</u>

1) Um carro se desloca da cidade A até a cidade B (distância de 100 km), mantendo na ida uma velocidade média de 90 Km/h e na volta ao local de origem mantendo a velocidade média de 110 Km/h. Qual é a velocidade média durante todo o trajeto?

A velocidade média não é a média aritmética das velocidades e sim a média harmônica. Vamos comprovar o que foi afirmado:

$$v_m = \frac{2d}{\Delta t} \quad \textbf{(I)}$$

onde:

2d = d + d = a distância total percorrida (ida e volta)

Δt = t1 + t2 = tempo total para percorrer o percurso todo (ida e volta)

t1 = d / v1 e t2 = d / v2, logo:

$$\Delta t = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2} = d \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \quad \textbf{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$v_m = \frac{2\cancel{d}}{\cancel{d} \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)}$$

Portanto:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Ou seja: a velocidade média é a média harmônica das velocidades.

Logo:

$$V = \frac{2}{\frac{1}{90} + \frac{1}{110}}$$

$$V = 2 \cdot \frac{(110 \cdot 90)}{110 + 90} = \frac{19800}{200}$$

$$V = 99 \text{ Km/h}$$

Este problema é uma aplicação imediata da média harmônica e a resposta acima deve dar um susto em muita gente descuidada, que imaginaria que a resposta fosse 100 km/h!

14.4. MÉDIA GEOMÉTRICA

É a raiz enésima do produto de "n" termos.

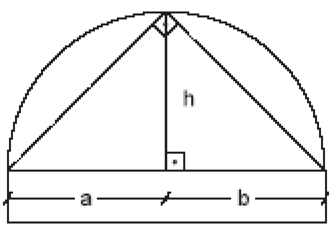
$$\boxed{M_G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}}$$

Exemplos:

- a média geométrica de 4 e 9 é igual a 6;
- a média geométrica de 2 e 8 é igual a 4;

<u>Exercícios:</u>

1) Na fase de perfuração de um túnel, os operários precisam colocar estacas para sustentação. Calcule o comprimento de uma estaca num determinado ponto.



Todo ângulo inscrito numa semi-circunferência mede 90º. Logo, o triângulo formado na figura é um triângulo retângulo e a estaca é a altura desse triângulo.

Do estudo de relações métricas no triângulo retângulo, temos que:

$h^2 = a \cdot b$

Logo:

$h = \sqrt{a \cdot b}$

Podemos dizer, então, que o comprimento da estaca é a média geométrica das distâncias entre o ponto de apoio da estaca e as laterais do túnel.

Curiosidades:

1) Henry Briggs utilizou cálculos de média geométrica para construir a primeira tabela de logaritmos decimais, publicada em 1617.

2) As três médias: aritmética, geométrica e subcontrária (mais tarde chamada de harmônica), já eram conhecidas pelos babilônios. Conta-se que Pitágoras de Samos, matemático grego que viveu por volta do ano 550 a.C., soube das três médias na Mesopotâmia.

Os pitagóricos possuiam uma maneira alternativa de definir as três primeiras médias enunciadas acima; eles utilizavam a noção de proporção. A saber, dados dois números positivos "a" e "b", as médias aritmética, geométrica e harmônica entre "a" e "b" é o número "c" satisfazendo respectivamente as seguintes relações:

$$\frac{a-c}{c-b} = \frac{a}{a} \quad (I) \qquad \frac{a-c}{c-b} = \frac{a}{c} \quad (II) \qquad \frac{a-c}{c-b} = \frac{a}{b} \quad (III)$$

De fato,

isolando "c" na equação (I), obtemos $c = \frac{a+b}{2}$, ou seja c é a média aritmética de "a" e "b";

isolando "c" na equação (II), obtemos $c = \sqrt{a \cdot b}$, isto é "c" é a média geométrica de "a" e "b";

isolando "c" na equação (III), obtemos $c = \frac{2 \cdot a \cdot b}{(a+b)}$, ou seja "c" é a média harmônica de "a" e "b".

3) Arquitas escreveu sobre a aplicação das médias aritmética, geométrica e subcontrária à musica e provavelmente foi Filolaus ou Arquitas o responsável pela mudança de nome da última para "média harmônica".

14.5. MÉDIA QUADRÁTICA

Média quadrática é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos valores.

$$M_Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

Exemplo:

1) Calcular a média quadrática dos números 2, 4, 5 e 6.

$$M_Q = \sqrt{\frac{2^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{4}} \qquad M_Q = \sqrt{\frac{4 + 16 + 25 + 36}{4}} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$$

$$M_Q = 4{,}5$$

14.6. DESIGUALDADES ENTRE AS MÉDIAS CLÁSSICAS

Dados dois números reais positivos, "a" e "b", tais que $a \leq b$, suas médias harmônica M_H, geométrica M_G, aritmética M_A e quadrática M_Q satisfazem as seguintes desigualdades,

$$a \leq M_H \leq M_G \leq M_A \leq M_Q \leq b$$

Sendo que as igualdades ocorrem se, e somente se a = b.

Exemplo:

1) Calculando as médias clássicas dos números 2, 4, e 6, obtemos:

$M_H = 3{,}27$

$M_G = 3{,}63$

$M_A = 4$

$M_Q = 4{,}32$

Ou seja: a média harmônica é sempre a menor das médias e a média quadrática é sempre a maior das médias.

14.7. TESTE DE AVALIAÇÃO - MÉDIAS

1) Sabe-se que os números x e y fazem parte de um conjunto de 50 números, cuja média aritmética é 8,5. Retirando-se x e y desse conjunto, a média aritmética dos números restantes será 8. Se 2x - y = 13, então:

a) y = 18
b) x = 15
c) y = 23
d) x = 20
e) x + y = 35

2) Qual é a média salarial de uma empresa que tem: 4 serventes com salário de R$ 350,00, 8 secretárias com salário de R$ 800,00, 13 técnicos com salário de R$ 1.100,00 e 5 engenheiros com salário de R$ 2.000,00 ?

a) R$ 984,00
b) R$ 1.070,00
c) R$ 872,00
d) R$ 1.130,00
e) R$ 1.032,00

3) A média geométrica entre três números é 5. Quanto devo multiplicar um desses números para que a média geométrica dobre ?

a) 10
b) 12
c) 8
d) 6
e) 15

4) A média aritmética entre três números é 7 e a média geométrica é 6. Sabendo que um deles é o número 6, os outros dois números são:

a) 5 e 10
b) 4 e 11
c) 2 e 13
d) 3 e 12
e) 1 e 14

5) Um carro desloca-se da cidade A para a cidade B, distantes 150 Km uma da outra, com velocidade constante de módulo 80 km/h na ida e com velocidade constante de módulo 120 km/h na volta. Qual é a velocidade média do carro durante todo o tempo de movimento, excluindo o breve intervalo de tempo de parada na cidade B?

a) 100 km/h
b) 96 km/h
c) 101 km/h
d) 99 km/h
e) 98 km/h

Gabarito

1) c
2) b
3) c
4) d
5) b

14.8. RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

Com os dados do problema podemos montar duas equações:

(I) $8{,}5 = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48} + x + y) / 50$

(II) $8 = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48}) / 48$

Logo:

$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48}) = 8 \times 48 = 384$

Substituindo em (I), temos:

$8{,}5 = (384 + x + y) / 50$

$384 + x + y = 50 \times 8{,}5$ $\qquad$ $384 + x + y = 425$

$x + y = 425 - 384$ $\qquad$ $\mathbf{x + y = 41}$

Agora podemos montar o seguinte sistema:

(III) $x + y = 41$

(IV) $2x - y = 13$

Somando a equação III com a IV, temos:

$3x = 54$

$x = 54 / 3$

$\mathbf{x = 18}$

Substituindo o valor de x em (III), temos:

18 + y = 41

y = 41 - 18

y = 23

Resposta: y = 23

Teste 2

M = (4 x 350,00) + (8 x 800,00) + (13 x 1.100,00) + (5 x 2.000,00) / (4 + 8 + 13 + 5)

M = (1.400,00 + 6.400,00 + 14.300,00 + 10.000,00) / 30

M = 32.100,00 / 30

M = R$ 1.070,00

Resposta: R$ 1.070,00

Teste 3

$M_G = 5$

$5 = \sqrt[3]{a.b.c}$

Elevando ambos os membros ao cubo, temos:

$5^3 = a \,.\, b \,.\, c$

a . b . c = 125 **(I)**

$M_G = 10$

$10 = \sqrt[3]{a.b.c.k}$

Elevando ambos os membros ao cubo, temos:

$10^3 = a . b . c . k$

$a . b . c . k = 1000$ **(II)**

Substituindo (I) em (II), temos:

$125 . k = 1000$

Logo:

$k = 1000 / 125$

$k = 8$

Resposta: 8

Teste 4

Dados: $M_A = 7$ $M_G = 6$ $a = 6$ $b = ?$ $c = ?$

$7 = (6 + b + c) / 3$

$6 + b + c = 3 \times 7$

$b + c = 21 - 6$

$b + c = 15$ **(I)**

$6 = \sqrt[3]{6.b.c}$

Elevando ambos os membros ao cubo, temos:

$6^3 = 6 . b . c$

$b . c = 6^2$

$b . c = 36$ **(II)**

De (I), temos:

$b = 15 - c$ **(III)**

Substituindo (III) em (II), temos:

$(15 - c) . c = 36$

$15c - c^2 = 36$

$c^2 - 15c + 36 = 0$

$(c - 12) . (c - 3) = 0$

Portanto:

$c = 12$ ou $c = 3$

Se $c = 12$, $b = 3$

Se $c = 3$, $b = 12$

Resposta: 3 e 12

Teste 5

A velocidade média não é a média aritmética das velocidades e sim a média harmônica (como explicado em exemplo da aula 14), logo:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}}$$

Portanto, teremos:

$$v_m = \frac{2}{\frac{120 + 80}{80 . 120}} = 2 . \frac{80 . 120}{200} = \frac{80 . 120}{100} = \frac{9600}{100} = 96 \text{ km/h}$$

Resposta: 96 Km/h

AULA 15 - MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA

15.1. PORCENTAGEM

Toda fração de denominador 100 representa uma porcentagem, como o diz o próprio nome "por cem".

Exemplo:

$$\frac{12}{100} = 12\%$$

Observe que o símbolo % que aparece no exemplo acima significa "por cento". Devemos lembrar que a porcentagem também pode ser representada na forma de números decimais.

Exemplo:

$$27\% = \frac{27}{100} = 0{,}27$$

Exercícios:

1) Um assalariado ganha R$ 2.200,00 por mês e paga R$ 176,00 para o INPS. Calcule a taxa equivalente ao desconto de INPS.

$$2200 \rightarrow 100\%$$
$$176 \rightarrow x$$

$$x = \frac{176\ .\ 100}{2200} = \frac{17600}{2200} = \frac{176}{22}$$

$$x = 8\%$$

2) Uma televisão custa R$ 300,00. Pagando à vista ganha-se um desconto de 10%. Qual é o preço da televisão a ser pago à vista?

$$300 \rightarrow 100\%$$
$$\text{desconto} \rightarrow 10\%$$

$$\text{desconto} = \frac{10 \cdot 300}{100} = 30$$

x = 300 - 30 = 270

Portanto à vista, a televisão irá custar R$ 270,00

15.2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

O sistema de crédito funciona essencialmente porque as pessoas têm necessidade de consumo imediato e estão dispostas a pagar um preço por isto. Quando se empresta dinheiro a uma pessoa para que esta consuma, pode-se admitir que quem emprestou está deixando de consumir no momento (embora tenha dinheiro para isso) para permitir que outra pessoa o faça. Por essa abstinência, a pessoa que emprestou recebe um "prêmio", o que em finanças recebe o nome de **juros**.

Assim, podemos denominar juros como "prêmio", ou pagamento pelo uso de uma quantidade de dinheiro por um período determinado de tempo. A esta quantidade de dinheiro que é transacionada damos o nome de **capital**, **principal** ou **valor presente**. Portanto, capital pode ser definido como o valor aplicado através de alguma operação tipicamente financeira e também é conhecido como: Valor principal, Valor atual, Valor Aplicado.

O valor dos juros pago nesta transação depende da **taxa de juros**, que é um coeficiente, geralmente dado em porcentagem, que diz respeito a um dado intervalo de tempo. A taxa de juros pode depender de fatores como: o tempo, o risco e a quantidade de dinheiro disponível no mercado para empréstimos

A soma do capital empregado na transação com os juros obtido recebe o nome de **montante** ou **valor futuro**, ou seja:

$$\boxed{FV = PV + J}$$

- FV = Valor Futuro (Montante)
- PV = Valor Presente (Capital ou Principal)
- J = Juros

15.3. JUROS SIMPLES

Se os juros, nos vários períodos, forem calculados sempre sobre o valor do capital inicialmente empregado, diremos que a capitalização é feita no regime de juros simples. Sobre os juros gerados a cada período não incidirão novos juros. Neste tipo de capitalização somente o capital inicial rende juros.

O regime de capitalização simples comporta-se como uma progressão a-ritmética (PA), com os juros crescendo linearmente ao longo do tempo.

Valor Principal ou simplesmente principal é o valor inicial emprestado ou aplicado, antes de somarmos os juros.

O cálculo dos juros simples é realizado usando a fórmula:

$$\boxed{J = PV \cdot i \cdot n}$$

- J = Juros
- PV = Valor Presente (Capital inicial, Principal)
- i = taxa de juros
- n = número de períodos

Observação: É importante lembrar que Taxa (i) e Número de Períodos (n) devem estar sempre na mesma unidade de tempo!

$FV = PV + J$

$FV = PV + PV \cdot i \cdot n$

$$\boxed{FV = PV \cdot (1 + i \cdot n)}$$

Exercício:

1) Calcular os juros e o montante produzidos pelo capital de R$ 1.000,00 aplicado durante 6 meses à taxa de 36% ao ano.

- PV = R$ 1.000,00
- n = 6 meses
- i = 36% ao ano = 3% ao mês = 0,03
- J = ?
- FV = ?

$J = PV \cdot i \cdot n = 1000 \cdot 0{,}03 \cdot 6$

J = R$ 180,00

$FV = PV + J = 1000 + 180$

FV = R$ 1.180,00

15.4. JUROS COMPOSTOS

O regime de juros compostos é o mais comum no dia-a-dia, no sistema financeiro e no cálculo econômico. Nesse regime, os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte. Ou seja, o rendimento gerado pela aplicação será incorporado a ela, passando a participar da geração do rendimento no período seguinte; dizemos, então, que os juros são capitalizados. Chamamos de **capitalização** o momento em que os juros são incorporados ao principal.

O comportamento equivale ao de uma progressão geométrica (PG), incidindo os juros sempre sobre o saldo apurado no inicio do período imediatamente anterior.

Observação: A poupança é uma capitalização do tipo composta já que, se não efetuarmos nenhum saque, o juro do mês seguinte correrá sobre o montante produzido pelo capital inicial acrescido dos juros referentes ao mês anterior.

$J = PV \,.\, i^n$

$FV = PV + J$

$FV = PV + PV.i^n$

$$\boxed{FV = PV.(1+i)^n}$$

Exercício:

1) Depositando R$ 1.000,00 numa aplicação que rende juros compostos de 3% ao mês, qual será o juros e o montante após 6 meses?

- PV = R$ 300,00
- n = 6 meses
- i = 3% ao mês = 0,03
- FV = ?
- J = ?

$FV = 1000.(1+0{,}03)^6 = 1000 . 1{,}19405$

FV = R$ 1194,05

FV = PV + J

J = FV - PV = 1194,05 - 1000

J = R$ 194,05

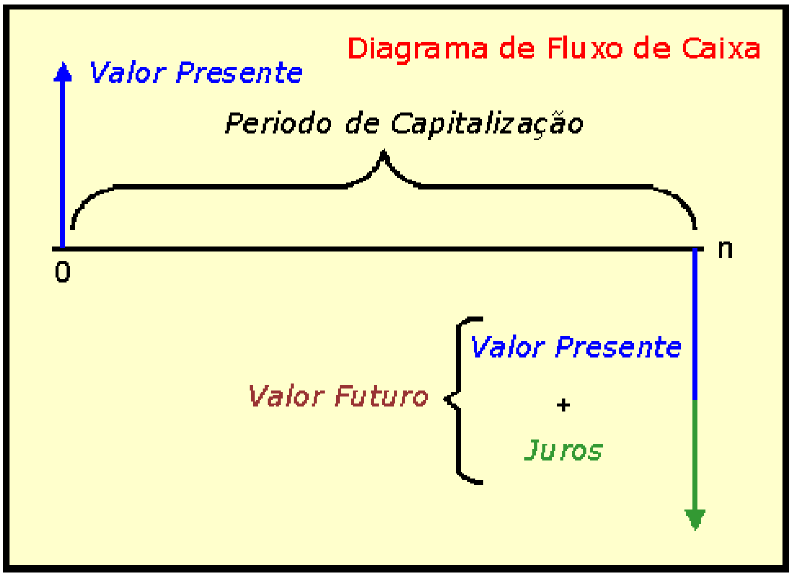
15.5. DIAGRAMA DE FLUXO DE CAIXA

A resolução de problemas de matemática financeira torna-se muito mais fácil quando utilizamos o conceito de fluxo de caixa.

Um diagrama de fluxo de caixa, é simplesmente a representação gráfica numa reta, dos períodos e dos valores monetários envolvidos em cada período, considerando-se uma certa taxa de juros i.

Traça-se uma reta horizontal que é denominada eixo dos tempos, na qual são representados os valores monetários, considerando-se a seguinte convenção:

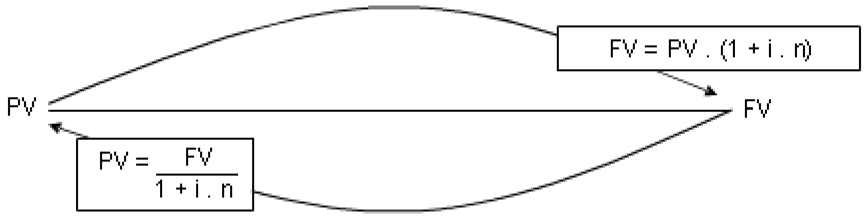
- Seta para cima: entrada de caixa (dinheiro recebido)
- Seta para baixo: saída de caixa (dinheiro pago)



Importante: Existe uma regra básica da matemática financeira que deve ser sempre respeitada:

Não se soma ou subtrai quantias em dinheiro que não estejam na mesma data.

As relações definidas para o cálculo do valor futuro e do valor presente, podem ser visualizadas da seguinte forma:

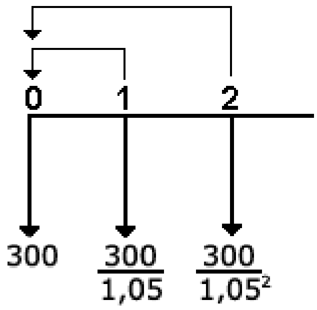


Exercício:

1) Uma loja vende uma determinada TV de 29 polegadas nas seguintes condições: R$ 300,00 de entrada, mais duas parcelas mensais de R$ 300,00, no final de 30 e 60 dias respectivamente. Qual o valor à vista do televisor se a taxa de juros mensal é de 5% ?

Solução:

O problema consiste em trazer todos os capitais futuros para uma mesma data de referência. Neste caso, vamos trazer todos os capitais para a data zero.



$$PV = 300 + \frac{300}{1{,}05} + \frac{300}{1{,}05^2}$$

PV = 300,00 + 285,71 + 272,11

PV = R$ 857,82

15.6. SÉRIES DE PAGAMENTOS

No dia-a-dia podemos verificar vários apelos de consumo e de poupança através de planos de pagamentos que se adaptam aos mais diversos orçamentos, onde são possíveis através do parcelamento ou recomposição de débitos.

O estudo das séries nos fornece o instrumental necessário para estabelecer planos de poupança, de financiamento, de recomposição de dívidas e avaliação de alternativas de investimentos.

Define-se série, renda, ou anuidade, a uma sucessão de pagamentos, exigíveis em épocas pré-determinadas, destinada a extinguir uma dívida ou constituir um capital.

Cada um dos pagamentos que compõem uma série denomina-se termo de uma renda.

Classificação das séries de pagamentos:

1) Quanto ao valor das prestações:

- uniforme: quando os pagamentos que compõem a série são iguais.
- variável: quando os pagamentos que compõem a série não são iguais.

2) Quanto ao número de prestações:

- finitas: quando ocorrem durante um período pré-determinado de tempo.
- infinitas ou perpetuidades: quando os pagamentos ou recebimentos duram de forma infinita.

3) Quanto a periodicidade:

- periódica: quando os pagamentos ou recebimentos ocorrem a intervalos constantes.
- não-periódica: quando os pagamentos ou recebimentos ocorrem em intervalos irregulares de tempo.

4) Quanto ao prazo dos pagamentos:

- antecipada: os pagamentos ocorrem no início da cada período.
- postecipada: os pagamentos ocorrem no fim de cada período.

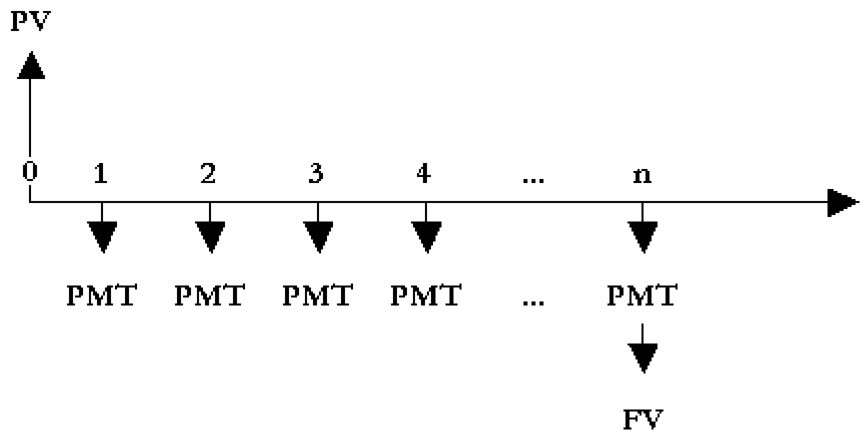
5) Quanto ao primeiro pagamento:

- diferidas ou com carência: quando houver um prazo maior que um período entre a data do recebimento do financiamento e data de pagamento da primeira prestação.
- não diferidas: quando não existir prazo superior a um período entre o início da operação e o primeiro pagamento ou recebimento.

As séries periódicas e uniformes podem ser divididas em séries postecipadas, antecipadas e diferidas.

15.6.1. Séries periódicas e uniformes postecipadas

São aquelas em que os pagamentos ou recebimentos são efetuados no fim de cada intervalo de tempo a que se referir a taxa de juros considerada, e cuja representação gráfica é a seguinte:



PMT = Pagamento periódico igual

O valor presente corresponde à soma dos valores atuais dos termos da série, ou seja:

$$PV = \frac{PMT_1}{(1+i)^2} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{PMT_n}{(1+i)^n}$$

Resumindo esta fórmula através da soma dos termos progressão geometria, tem-se as seguintes fórmulas:

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n} \right]$$

Na fórmula, o termo entre colchetes é conhecido como **Fator de Valor Atual (FVA)**

$$FV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Na fórmula, o termo entre colchetes é conhecido como **Fator de Formação de Capital (FFC)**

<u>Exercício</u>:

1) Uma máquina de lavar roupa é anunciada por $850,00 à vista ou em 4 parcelas mensais iguais, sem entrada. Se a taxa de juros cobrada pela loja é igual a 3% ao mês, qual o valor das prestações?

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n} \right]$$

Logo:

$$PMT = PV \times \left[\frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

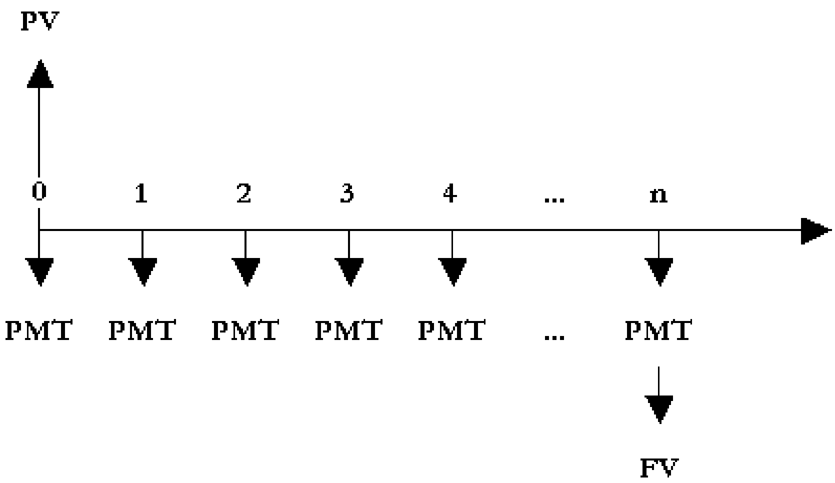
$$\text{PMT} = 850 \, . \left[\frac{0{,}03 \, . \, 1{,}03^4}{1{,}03^4 - 1} \right]$$

$$\text{PMT} = \frac{850 \, . \, 0{,}03 \, . \, 1{,}12550881}{1{,}12550881 - 1} = 228{,}67$$

Resposta: O valor das prestações é R\$ 228,67

15.6.2. Séries periódicas e uniformes antecipadas

São aquelas em que os pagamentos ou recebimentos são efetuados no início de cada intervalo de tempo a que se referir a taxa de juros considerada, e cuja representação gráfica é a seguinte:



PMT = Pagamento periódico igual

As fórmulas para encontrar PV, PMT, FV, possuem uma pequena diferença das séries postecipada, apresentam (1+ i), ou seja, parte paga na data Zero. São elas:

$$PV = PMT \times (1+i) \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n} \right]$$

$$FV = PMT \times (1+i) \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Exercício:

1) Um microcomputador é anunciado por $1.500,00 a vista ou em 6 parcelas mensais iguais, com entrada. Se a taxa de juros cobrada pela loja é igual a 4% ao mês, qual o valor das prestações?

$$PV = PMT \times (1+i) \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

Logo:

$$PMT = PV \times \frac{1}{(1+i)} \times \left[\frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$PMT = 1500 \cdot \frac{1}{1{,}04} \cdot \left[\frac{0{,}04 \cdot 1{,}04^6}{1{,}04^6 - 1}\right]$$

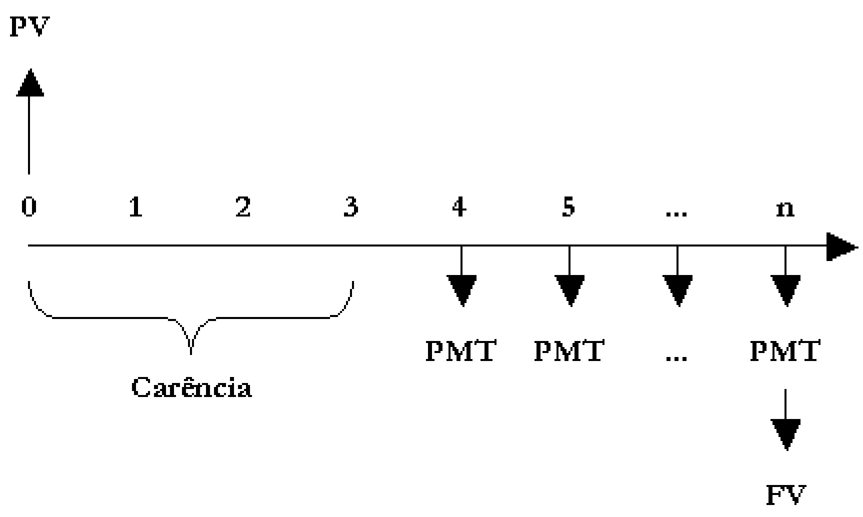
$$PMT = \frac{1500 \cdot 1 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}265319}{1{,}04 \cdot 0{,}265319} = \frac{75{,}91914}{0{,}27593176} = 275{,}14$$

Resposta: O valor das prestações é R$ 275,14

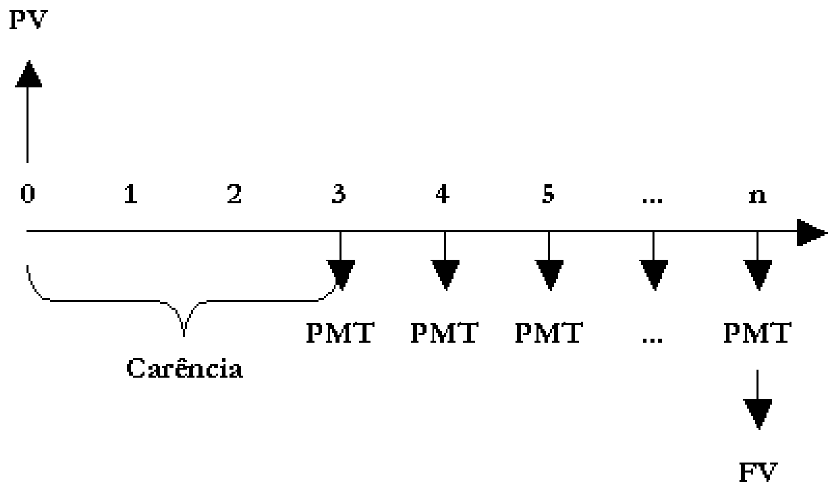
15.6.3. Séries diferenciadas

São aquelas em que o primeiro pagamento ou recebimento só é efetuado depois de decorridos períodos de tempo a que se referir a taxa de juros considerada, e cuja representação gráfica é a seguinte:

Caso de postecipado:



Caso de antecipado:



Exercício:

1) Um aparelho de som é vendido por R$ 539,00 à vista. A prazo, ele é vendido em 6 prestações mensais e iguais, sendo a primeira prestação paga 3 meses após a compra. Determine o valor das prestações sabendo que a taxa é de 4% ao mês.

Considerando uma taxa de juros de 4% ao mês, 3 meses após a compra o valor presente do aparelho de som será:

$539 \times (1 + 0{,}04)^3 = 606{,}30$

Portanto, considerando uma série diferenciada antecipada, teremos:

$$PV = PMT \times (1+i) \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

Logo:

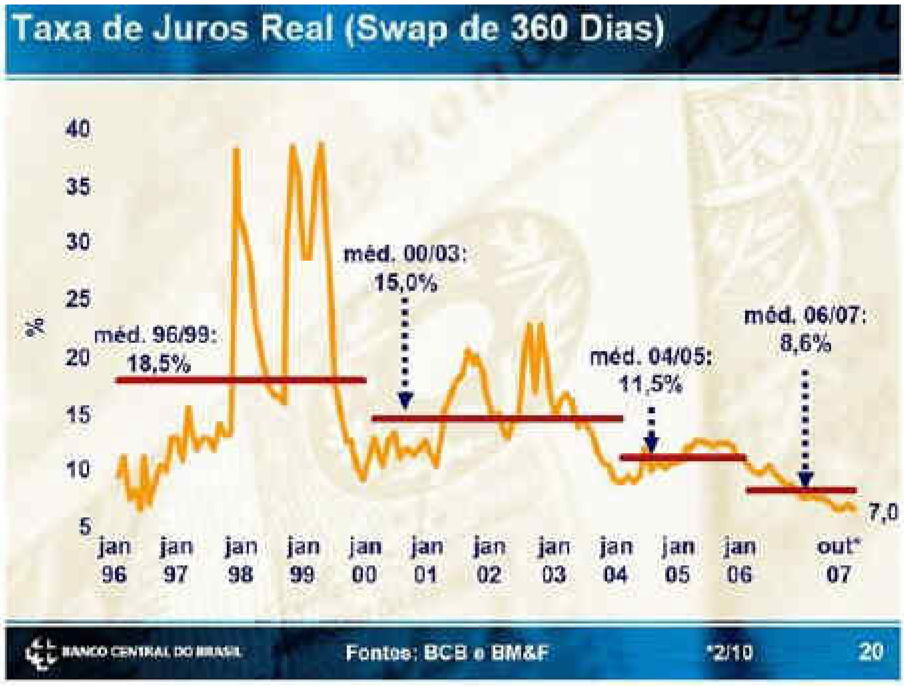
$$PMT = PV \times \frac{1}{(1+i)} \times \left[\frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$PMT = 606{,}30 \,.\, \frac{1}{1{,}04} \,.\, \left[\frac{0{,}04 \,.\, 1{,}04^6}{1{,}04^6 - 1}\right]$$

$$PMT = \frac{606{,}30 \,.\, 1 \,.\, 0{,}05061276}{1{,}04 \,.\, 0{,}265319} = 111{,}21$$

Resposta: O valor das prestações é R$ 111,21

15.7. TAXAS DE JUROS



15.7.1. Taxas proporcionais

São taxas de juros fornecidas em unidades de tempo diferentes que, ao serem aplicadas a um mesmo capital, durante um mesmo prazo, produzem um mesmo montante ao final daquele prazo, no regime de **juros simples**.

Assim, se colocarmos a juros simples, um capital de R$ 1.000,00 a uma taxa de 12% a.a. durante 1 ano ou colocarmos o mesmo capital a uma taxa de 1% a.m. durante 12 meses, encontraremos o mesmo juro.

Taxas como 1% ao mês e 12% ao ano são chamadas de taxas proporcionais, pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem. Taxas proporcionais não são equivalentes.

15.7.2. Taxas equivalentes no regime de capitalização composta

Taxas equivalentes são taxas de juros fornecidas em unidades de tempo diferentes que ao serem aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo prazo produzem um mesmo montante acumulado no final daquele prazo, no regime de juros compostos.

Assim, a diferença entre taxas equivalentes e taxas proporcionais se prende exclusivamente ao regime de juros considerado. **As taxas proporcionais se baseiam em juros simples, e as taxas equivalentes se baseiam em juros compostos**.

Um erro muito comum é achar que juros compostos de 2% ao mês equivalem a juros anuais de 2×12% = 24% ao ano.

Seja o capital P aplicado por um ano a uma taxa anual ia. O montante VF ao final do período de 1 ano será igual a VF = VP . (1 + ia)

Consideremos agora, o mesmo capital P aplicado por 12 meses a uma taxa mensal im. O montante VF' ao final do período de 12 meses será igual a VF' = $VP(1 + im)^{12}$.

Pela definição de taxas equivalentes vista acima, deveremos ter VF = VF'. Portanto, $VP \,.\, (1 + ia) = VP \,.\, (1 + im)^{12}$

Daí concluímos que:

$$\boxed{1 + ia = (1 + im)^{12}}$$

Esta fórmula permite calcular a taxa anual equivalente a uma determinada taxa mensal conhecida.

Exemplo:

1) Qual a taxa de juros anual equivalente a 2% a.m.?

$1 + ia = (1 + im)^{12}$

$1 + ia = (1 + 0{,}02)^{12}$

$1 + ia = 1{,}02^{12}$

$1 + ia = 1{,}2682$

$ia = 1{,}2682 - 1 = 0{,}2682$

ia = 26,82%

Observe que no regime de juros compostos, a taxa de juros de 2% a.m. eqüivale à taxa anual de 26,82% a.a. e não 24% a.a., como poderia parecer para os mais desavisados.

Podemos generalizar a conclusão vista anteriormente, conforme mostrado a seguir. As conversões das taxas podem ser feitas de acordo com as seguintes fórmulas:

- $1 + im = (1 + id)^{30}$ [porque 1 mês = 30 dias]
- $1 + ia = (1 + im)^{12}$ [porque 1 ano = 12 meses]
- $1 + ia = (1 + is)^{2}$ [porque 1 ano = 2 semestres]
- $1 + is = (1 + im)^{6}$ [porque 1 semestre = 6 meses]

Onde:

- ia = taxa de juros anual
- is = taxa de juros semestral
- im = taxa de juros mensal
- id = taxa de juros diária

Todas elas baseadas no mesmo princípio fundamental de que taxas equivalentes aplicadas a um mesmo capital, produzem montantes iguais.

Não é necessário memorizar todas as fórmulas. Basta verificar a lei de formação que é bastante clara. Por exemplo, se it = taxa de juro num trimestre, poderíamos por exemplo escrever:

$1 + ia = (1 + it)^4$ [porque 1 ano = 4 trimestres]

Exemplos:

1) Qual a taxa anual equivalente a 3% ao trimestre?

$1 + ia = (1 + it)^4$

$1 + ia = (1 + 0{,}03)^4$

$1 + ia = 1{,}03^4$

$1 + ia = 1{,}1255$

$ia = 1{,}1255 - 1 = 0{,}1255$

ia = 12,55%

2) Qual a taxa mensal equivalente a 12% ao ano?

$1 + ia = (1 + im)^{12}$

$1 + 0{,}12 = (1 + im)^{12}$

$1{,}12 = (1 + im)^{12}$

Dividindo ambos os expoentes por 12, fica:

$1{,}12^{1/12} = 1 + im$

$\sqrt[12]{1{,}12} = 1 + im$

1,009488 = 1 + im

im = 1,009488 - 1 = 0,009488

im = 0,9488%

15.7.3. Taxa nominal

Quando a unidade de tempo indicada pela taxa de juros não é igual à unidade de tempo do período de capitalização, podemos dizer que esta taxa é nominal. A taxa nominal é fornecida em termos anuais, e os períodos de capitalização podem ser semestrais, trimestrais, mensais ou diários.

É comum se encontrar em problemas envolvendo juros compostos as expressões do tipo:

- "juros de 50% ao ano, capitalizados mensalmente".
- "juros de 10% ao ano, capitalizados trimestralmente".
- "taxa de 15% ao ano, com capitalização semestral".

Nestas expressões podemos observar o que se convencionou chamar de taxa nominal: "a taxa cuja unidade de tempo não coincide com a unidade de tempo do período de capitalização".

É possível entender a taxa nominal como uma "taxa falsa", geralmente fornecida com período em anos, que não devemos utilizar diretamente nos cálculos de juros compostos, pois estas não produzem resultados certos. No lugar desta, devemos usar a taxa efetiva.

15.7.4. Taxa efetiva

Quando a unidade de tempo indicada pela taxa de juros é igual à unidade de tempo do período de capitalização, podemos dizer que esta taxa é efetiva.

Exemplos:

- A taxa de 3% ao mês com capitalização mensal.
- Juros de 10% ao trimestre capitalizado trimestralmente.
- Taxa de 1% ao mês com capitalização mensal.

Nos enunciados acima envolvendo problemas de juros compostos onde se dá a taxa efetiva, frequentemente se esconde ou omite o período de capitalização, ficando subentendido que este é o mesmo indicado pela taxa.

Exemplos:

- Taxa de 5% ao mês – significando 5% ao mês, com capitalização mensal.
- Juros de 15% ao semestre – significando 15% ao semestre com capitalização semestral.

15.7.5. Conversão de Taxa Nominal em Taxa Efetiva

A conversão da taxa nominal em taxa efetiva é feita ajustando-se o valor da taxa nominal proporcionalmente ao período de capitalização. Isto pode ser feito com uma regra de três simples e direta.

Exemplo:

1) Uma aplicação financeira paga juros compostos de 8% ao ano, com capitalização trimestral. Qual é a taxa de juros efetiva praticada nesta aplicação financeira?

As capitalizações são trimestrais. Então, teremos que ajustar a taxa nominal anual de 8% para uma taxa trimestral, usando uma regra de três simples:

- 12 meses (01 ano) ----> 8% juros

- 3 meses ----> 2% juros (i=0,02)

Desta forma, a taxa efetiva praticada é de 2% ao trimestre.

15.7.6. Taxa real

A taxa real é o rendimento (ou custo) de uma operação depois de expurgados os efeitos inflacionários.

15.7.7. Taxa aparente

Denominamos taxa aparente aquela que vigora nas operações correntes. Quando não há inflação, esta taxa é igual à taxa real; porém, quando há inflação, a taxa aparente é formada pela taxa da inflação e pela taxa de juro real, ambas apuradas no mesmo período da taxa aparente.

A expressão que relaciona taxa aparente, taxa real e a taxa de inflação é:

$$\boxed{1 + i_{\text{aparente}} = (1 + i_{\text{real}}) \cdot (1 + i_{\text{inflação}})}$$

- i_{aparente} = taxa aparente
- i_{real} = taxa real
- $i_{\text{inflação}}$ = taxa de inflação

Exemplo:

1) Certa economia apresentou para um determinado período, uma taxa real de 2% e uma inflação de 10%. Qual a taxa aparente dessa economia?

- $i_{aparente} = ?$
- $i_{real} = 2\% = 0{,}02$
- $i_{inflação} = 10\% = 0{,}1$

$$1 + i_{aparente} = (1 + i_{real}) \cdot (1 + i_{inflação})$$

$$1 + i_{aparente} = (1 + 0{,}02) \cdot (1 + 0{,}1)$$

$$1 + i_{aparente} = 1{,}02 \cdot 1{,}1 = 1{,}122$$

$$i_{aparente} = 1{,}122 - 1 = 0{,}122$$

$$\mathbf{i_{aparente} = 12{,}2\%}$$

15.8. DESCONTO SIMPLES

Ao contrair uma dívida a ser paga no futuro, é muito comum o devedor oferecer ao credor um documento denominando título, que é o comprovante dessa operação. De posse desse título, que é usado para formalizar uma dívida que não será paga imediatamente, mas dentro de um prazo estipulado, o devedor poderá negociar o pagamento antecipado da dívida através de um banco.

Normalmente os titulos de crédito são:

- Nota Promissória: é um comprovante da aplicação de um capital com vencimento predeterminado. É um título muito usado entre pessoas físicas ou entre pessoas físicas e uma instituição financeira.

- Duplicata: é um título emitido por uma pessoa jurídica contra seu cliente (pessoa física ou jurídica), para o qual ela vendeu mercadorias a prazo ou prestou serviços a serem pagos no futuro, segundo um contrato.

- Letra de Câmbio: assim como a nota promissória, é um comprovante de uma aplicação de capital com vencimento predeterminado; porém, é um título ao portador, emitido exclusivamente por uma instituição financeira.

Uma situação envolvendo o conceito de desconto ocorre quando uma empresa vende um produto a prazo; neste caso, o vendedor emite uma duplicata que lhe dará o direito de receber do comprador, na data futura, o valor combinado. Caso o vendedor necessite de dinheiro, poderá ir a um banco e efetuar um desconto da duplicata.

De modo análogo ao desconto de duplicatas, uma empresa pode descontar notas promissórias num banco. As notas promissórias surgem quando, por alguma razão, um devedor assume uma dívida junto a um credor; a nota promissória é um papel que representa uma promessa de pagamento ao credor, feita pelo devedor.

Todo título de crédito tem uma data de vencimento; porém, o devedor pode resgatá-lo antecipadamente, obtendo com isso um abatimento denominado desconto. Esse abatimento é a diferença entre o valor futuro do título e o valor atual na data da operação.

O desconto é uma das mais comuns aplicações da regra de juro.

Embora seja freqüente a confusão entre juros e descontos, trata-se de dois critérios distintos. Enquanto no cálculo dos juros a taxa do período incide sobre o capital inicial (VP), no desconto a taxa do período incide sobre o montante ou valor futuro.

O desconto pode ser feito considerando-se como capital o valor nominal ou valor atual. No primeiro caso é denominado desconto comercial, no segundo desconto racional.

O desconto simples, racional ou comercial são aplicados somente aos títulos de curto prazo, geralmente inferiores a 1 ano.

Valor Nominal do Título (N): É a importância declarada no título, a ser paga na data do seu vencimento**.**

Valor Atual do Título (A): Se o título é negociado antes do seu vencimento, deverá ser deduzido o desconto. Valor atual é a diferença entre o valor nominal e o desconto, ou seja:

$$\boxed{A = N - D}$$

15.8.1. Desconto racional (por dentro)

Este desconto é calculado sobre o valor atual do título. A taxa de desconto incide sobre o valor líquido.

$$\boxed{Dr = A.i.n}$$

$$\boxed{D_r = \frac{N\,.\,i\,.\,n}{1 + i\,.\,n}}$$

<u>Exercício</u>:

1) Qual é o desconto por dentro de um título de R$ 8.000,00 pagável dentro de 3 meses à taxa de 10% a.a.?

- N = R$ 8.000,00
- n = 3/12 ano = 0,25 ano
- i = 10% a.a. = 0,1

$$D_r = \frac{8000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}25}{1 + (0{,}1 \cdot 0{,}25)}$$

$$D_r = \frac{200}{1{,}025} = 195{,}12$$

Resposta: O desconto por dentro é de R$ 195,12

15.8.2. Desconto comercial (por fora)

O abatimento incide sobre o valor nominal do título.

$$\boxed{Dc = N.i.n}$$

$$\boxed{D_c = \frac{A \cdot i \cdot n}{1 - i \cdot n}}$$

Desconto bancário: é o desconto comercial com duas pequenas modificações. Os bancos costumam cobrar, como despesas administrativas, uma percentagem sobre o valor nominal do título e o imposto sobre as operações financeiras (IOF).

$$\boxed{Db = Dc + \text{despesas administrativas} + IOF}$$

Exercício:

1) O possuidor de um título a prazo no valor nominal de R$ 80.000,00 descontou-o por fora, faltando 6 meses para seu vencimento, recebendo o líquido de R$ 72.000,00. Qual a taxa anual cobrada?

Dc = N - A = 80000 - 72000 = 8000

n = 6/12 = 0,5 ano

Dc = N . i . n, logo:

i = Dc / (N . n)

i = 8000 / (80000 . 05) = 8000 / 40000 = 0,2

Resposta: A taxa anual cobrada é de 20% a.a.

15.9. TESTE DE AVALIAÇÃO - MATEMÁTICA FINANCEIRA

1) Alberto colocou metade de seu capital a juros simples pelo prazo de 6 meses e o restante, nas mesmas condições, pelo período de 3 meses. Sabendo-se que ao final das aplicações os montantes eram de R$ 11.700,00 e R$ 10.350,00, respectivamente, qual era o capital inicial de Alberto?

a) R$ 17.800,00
b) R$ 18.500,00
c) R$ 17.000,00
d) R$ 18.000,00
e) R$ 20.000,00

2)) Uma loja vende uma televisão LCD nas seguintes condições: 4 parcelas mensais, sem entrada, sendo as duas primeiras parcelas no valor de R$ 300,00 a serem pagas em 30 e 60 dias após a compra e as duas últimas parcelas no valor de R$ 400,00, a serem pagas em 90 e 120 dias após a compra. Sabendo-se que a taxa de juros cobrada é de 6% ao mês, pergunta-se: qual é o valor à vista dessa televisão?

a) R$ 1.120,00
b) R$ 1.080,50
c) R$ 1.240,35
d) R$ 1.202,70
e) R$ 1.170,20

3) Um automóvel foi financiado em uma entrada de R$ 2.500,00 e mais 36 prestações mensais de R$1.000,00, à uma taxa de juros de 3% ao mês. Qual é o preço do carro à vista?

a) R$ 24.332,25
b) R$ 26.126,15
c) R$ 23.172,80
d) R$ 25.675,30
e) R$ 27.054,10

4) Quanto se deve depositar mensalmente, para obter um montante de R$ 10.000,00 ao fim de um ano, sabendo-se que a taxa mensal de remuneração do capital é de 2,5% e que o primeiro depósito é feito ao fim do primeiro mês?

a) R$ 701,55
b) R$ 684,72
c) R$ 780,24
d) R$ 672,90
e) R$ 724,87

5) Carlos depositou, anualmente, R$ 800,00 numa conta de poupança, em nome de seu filho, a juros de 6% a.a. O primeiro depósito foi feito no dia em que seu filho nasceu e o último quando este completou 18 anos. O dinheiro ficou depositado até o dia em que completou 21 anos, quando o montante foi sacado. Quanto recebeu seu filho?

a) R$ 29.210,70
b) R$ 31.214,14
c) R$ 37.842,20
d) R$ 35.248,15
e) R$ 34.120,18

6) Uma determinada máquina industrial tem o preço de R$ 60.000,00, podendo ser financiada com 15% de entrada e o restante em prestações trimestrais, iguais e sucessivas. Sabendo-se que a financiadora cobra juros compostos de 28% a.a., capitalizados trimestralmente, e que o comprador está pagando R$ 5.831,60 por trimestre, a última prestação vencerá em:

a) 3 anos e 9 meses
b) 4 anos
c) 3 anos e 6 meses
d) 4 anos e 3 meses
e) 3 anos

7) Uma aplicação de R$ 6.000,00 rendeu juros de R$ 1.800,00 no prazo de 1 ano. Sabendo-se que neste período a taxa de inflação foi de 15%, qual foi a taxa de juro real obtida pelo aplicador?

a) 10%
b) 13%
c) 8%
d) 16%
e) 20%

8) A propaganda de uma grande loja de eletrodomésticos anuncia: "Compre tudo e pague em 6 vezes. Leve hoje e só comece a pagar daqui a 3 meses". Se a taxa de financiamento é de 4% a.m., qual é o valor da prestação de uma geladeira cujo preço à vista é de R$ 2.000,00?

a) R$ 412,65
b) R$ 385,40
c) R$ 438,25
d) R$ 401,50
e) R$ 370,75

9) Uma empresa descontou uma duplicata em um banco que adota uma taxa de 50% a.a. e desconto comercial simples. O Valor do desconto foi de R$ 2.000,00. Se na operação fosse adotado desconto racional simples, o valor do desconto seria reduzido em R$ 400,00. Nessas condições, o valor nominal da duplicata é de:

a) R$ 7.800,00
b) R$ 8.000,00
c) R$ 9.300,00
d) R$ 8.500,00
e) R$ 9.000,00

10) Renato deve a um banco R$12.000,00 que vencem daqui a 30 dias. Por não dispor, no momento, desse valor, propõe a prorrogação da dívida por mais 60 dias. Admitindo-se a data focal atual (zero) e que o banco adote a taxa de desconto comercial simples de 48% a.a., qual será o valor do novo título?

a) R$ 12.979,20
b) R$ 13.570,91
c) R$ 13.090,91
d) R$ 13.278,34
e) R$ 12.960,00

Gabarito

1) d
2) d
3) a
4) e
5) b
6) c
7) b
8) a
9) b
10) c

15.10. RESOLUÇÃO DO TESTE DE AVALIAÇÃO

Teste 1

FV = C . (1 + i . n)

11700 = 0,5 C . (1 + 6i)

10350 = 0,5 C . (1 + 3i)

Logo temos:

0,5 C = 11700 / (1 + 6i)

0,5 C = 10350 / (1 + 3i)

ou seja:

11700 / (1 + 6i) = 10350 / (1 + 3i)

11700 . (1 + 3i) = 10350 . (1 + 6i)

11700 + 35100.i = 10350 + 62100.i

62100.i - 35100.i = 11700 - 10350

27000.i = 1350

i = 1350 / 27000

i = 0,05

0,5 C = 11700 / [1 + (6 x 0,05)]

0,5 C = 11700 / 1,3

0,65 C = 11700

C = 11700 / 0,65

C = 18000

Resposta: O capital inicial de Alberto era R$ 18.000,00

Teste 2

$$PV = \frac{300}{1{,}06} + \frac{300}{1{,}06^2} + \frac{400}{1{,}06^3} + \frac{400}{1{,}06^4}$$

PV = 283,02 + 267,00 + 335,84 + 316,84 = 1202,70

Resposta: O valor à vista é R$ 1202,70

Teste 3

$$PV = 2500 + PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}\right]$$

$$PV = 2500 + 1000 \cdot \left[\frac{(1+0{,}03)^{36} - 1}{0{,}03 \cdot (1+0{,}03)^{36}}\right] = 2500 + 1000 \cdot \left[\frac{(1{,}03)^{36} - 1}{0{,}03 \cdot (1{,}03)^{36}}\right]$$

$$PV = 2500 + 1000 \cdot \left(\frac{2{,}898278328 - 1}{0{,}03 \cdot 2{,}898278328}\right) = 2500 + 21832{,}25 = 24332{,}25$$

Resposta: O preço do carro à vista é R$ 24.332,25

Teste 4

$$FV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$PMT = FV \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$PMT = 10000 \cdot \left[\frac{0{,}025}{(1+0{,}025)^{12} - 1}\right] = 10000 \cdot \frac{0{,}025}{0{,}344888824} = 724{,}87$$

Resposta: Se deve depositar mensalmente a quantia de R$ 724,87

Teste 5

$$FV = PMT \times (1+i) \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Até seu filho completar os 18 anos obteve-se:

$$FV = 800 \cdot (1+0{,}06) \cdot \left[\frac{(1+0{,}06)^{18} - 1}{0{,}06}\right] = 800 \cdot 1{,}06 \cdot \left(\frac{1{,}06^{18} - 1}{0{,}06}\right)$$

FV = 800 . 1,06 . 30,90565254 = 26208

Esse dinheiro ficou depositado até seu filho completar 21 anos, logo:

FV = 26208 . $(1 + 0{,}06)^3$

FV = 26208 . $1{,}06^3$ = 31214,14

Resposta: O filho de Carlos recebeu R$ 31.214,14

Teste 6

28% a.a. é a taxa nominal. A taxa efetiva, nesse caso, é: 28/4 = 7% ao trimestre

15% (R$ 9.000,00) de entrada. Logo o valor a ser financiado é $ 51.000,00. Assim temos:

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

$$51000 = 5831{,}60 \; . \left[\frac{(1+0{,}07)^n - 1}{0{,}07 \; . \; (1+0{,}07)^n}\right]$$

$$\frac{1{,}07^n - 1}{0{,}07 \; . \; 1{,}07^n} = \frac{51000}{5831{,}60}$$

$$(1{,}07^n - 1) \; . \; 5831{,}60 = 0{,}07 \; . \; 1{,}07^n \; . \; 51000$$

$$5831{,}60 \; . \; 1{,}07^n - 5831{,}60 = 3570 \; . \; 1{,}07^n$$

$$5831{,}60 \; . \; 1{,}07^n - 3570 \; . \; 1{,}07^n = 5831{,}60$$

$$2261{,}60 \; . \; 1{,}07^n = 5831{,}60$$

$$1{,}07^n = \frac{5831{,}60}{2261{,}60}$$

$$1{,}07^n = 2{,}57853$$

$$\log(1{,}07^n) = \log 2{,}57853$$

n. log 1,07 = log 2,57853

$$n = \frac{\log 2{,}57853}{\log 1{,}07} = \frac{0{,}41137219}{0{,}029383777} = 14$$

Ou seja: n = 14 trimestres

14 trimestres = 12 trimestres + 2 trimestres

Cada ano tem 4 trimestres, logo:

14 trimestres = 3 anos e 6 meses

Resposta: A última prestação vencerá em 3 anos e 6 meses

Teste 7

$J = PV \cdot i^n$

J = R$ 1.800,00 PV = R$ 6.000,00 n = 1 (1 ano)

$1800 = 6000 \cdot i$

$i = 1800 / 6000 = 0{,}3$

$1 + i_{aparente} = (1 + i_{real}) \cdot (1 + i_{inflação})$

$1 + 0{,}3 = (1 + i_{real}) \cdot (1 + 0{,}15)$

$1{,}3 = (1 + i_{real}) \cdot 1{,}15$

$1 + i_{real} = 1{,}3 / 1{,}15 = 1{,}1304$

$i_{real} = 1{,}1304 - 1 = 0{,}1304 = 13{,}04\%$

Resposta: A taxa de juros real obtida pelo aplicador é de 13%

Teste 8

Como o primeiro pagamento será feito daqui a 3 meses, se considerarmos uma série diferida antecipada, temos uma carência de 3 meses; se considerarmos uma série diferida postecipada, temos uma carência de 2 meses.

Vamos considerar uma série diferida antecipada.

Nesse caso, após os 3 meses de carência, o valor da geladeira será:

$FV = PV \cdot (1 + i)^n$

$FV = 2000 \cdot (1 + 0{,}04)^3 = 2000 \cdot 1{,}04^3 = 2000 \cdot 1{,}124864 = 2249{,}73$

Portanto vamos utilizar esse valor como valor presente na fórmula abaixo:

$$PV = PMT \times (1+i) \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

$$2249{,}73 = PMT \;.\; (1 + 0{,}04) \;.\; \left[\frac{(1 + 0{,}04)^6 - 1}{0{,}04 \;.\; (1 + 0{,}04)^6}\right]$$

$$2249{,}73 = PMT \;.\; 1{,}04 \;.\; \left[\frac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04 \;.\; 1{,}04^6}\right]$$

2249,73 = PMT . 1,04 . 5,2421368567

2249,73 = PMT . 5,4518223

PMT = 2249,73 / 5.4518223 = 412,65

Resposta: O valor da prestação da geladeira é R$ 412,65

Teste 9

D_c = N . i . n

2000 = N . 0,5 . n **(I)**

$$D_r = \frac{N \;.\; i \;.\; n}{1 + i \;.\; n}$$

$$2000 - 400 = \frac{N \;.\; 0{,}5 \;.\; n}{1 + (0{,}5 \;.\; n)} \quad \textbf{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$1600 = \frac{2000}{1 + 0{,}5.n}$$

1 + 0,5.n = 2000/1600 = 1,25

0,5.n = 1,25 - 1 = 0,25

n = 0,25 / 0,5 = 0,5 ano

Substituindo "n" em (I), temos:

2000 = N . 0,5 . 0,5

N = 2000 / 0,25 = 8000

Resposta: O valor nominal da duplicata é R$ 8.000,00

Teste 10

Taxa de desconto comercial simples = 48% a.a. = 4% ao mês

Se Renato fosse pagar o título hoje (1 mês antes do vencimento), teria o seguinte desconto comercial:

D_c = N . i . n = 12000 . 0,04 . 1 = 480

E pagaria: A = 12000 - 480 = 11520 (A = valor atual na data focal 0 --> hoje)

Agora considere o titulo com a nova data de vencimento (para daqui a 90 dias = 30 + 60). Se Renato fosse pagar hoje esse título teria o seguinte desconto comercial:

$$D_c = \frac{A \cdot i \cdot n}{1 - i \cdot n}$$

$$D_c = \frac{11520 \cdot 0{,}04 \cdot 3}{1 - (0{,}04 \cdot 3)} = \frac{1382{,}4}{0{,}88} = 1570{,}91$$

Portanto o valor nominal do novo título será:

N = A + D_c = 11520 + 1570,91

N = 13090,91

Resposta: O valor nominal do novo título será R$ 13.090,91

AULA 16 - RELAÇÕES E FUNÇÕES

16.1. RELAÇÕES

Dado dois conjuntos "A" e "B", relação "R" é qualquer subconjunto (ou grupo de subconjuntos) do produto cartesiano A x B.

$R \subset A \times B$

Exemplo: Se A x B = {(0,m),(0,n),(0,p),(1,m),(1,n),(1,p)}

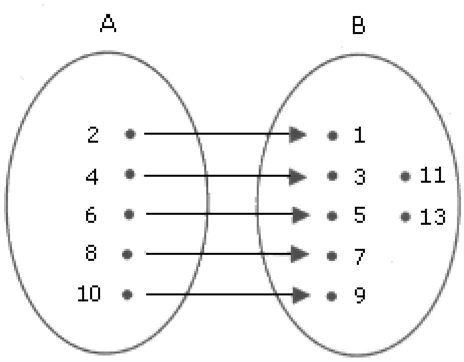
R_1 pode ser {(0,m),(0,n),(1,n)}

R_2 pode ser {(1,m),(1,n)} e assim por diante...

16.2. FUNÇÃO - DEFINIÇÃO

Dado dois conjuntos A e B e uma relação f de A em B, dizemos que f é uma função se, e somente se, para todo elemento x de A existe, em correspondência, um único elemnto y de B, tal que (x,y) ∈f.

$\boxed{\forall x,\ x \in A,\ \exists |\ y \in B\ |\ y = f(x)}$



$f: A \to B$ ou $f(x)$, ou $A \xrightarrow{f} B$

f = {(2,1),(4,3),(6,5),(8,7),(10,9)}

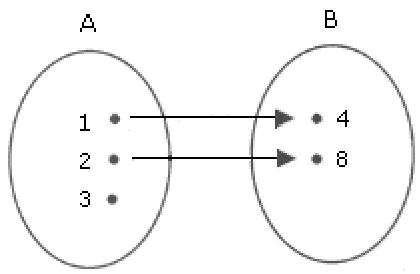
Numa função temos o domínio, o contradomínio e a imagem

- domínio: D(f) = {2,4,6,8,10} (conjunto A)
- contradomínio: CD(f) = {1,3,5,7,9,11,13}
- Imagem: Im(f) = {1,3,5,7,9}, sendo que: f(2)=1, f(4)=3, f(6)=5, f(8)=7, f(10)=9

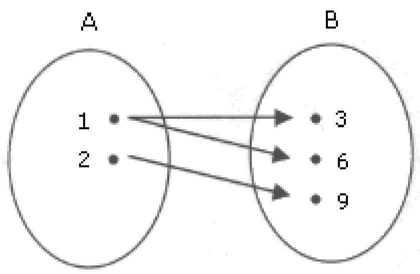
Afirmar que uma grandeza é função de outra significa dizer que a primeira depende da segunda. A cada valor da segunda grandeza corresponde um valor da primeira e, se a segunda muda, a primeira também muda.

Curiosidade: É possível estar em dois lugares ao mesmo tempo? Não, não é possível. A idéia de função origionu-se exatamente na resposta matemática a esta pergunta e se desenvolveu com os estudos do italiano Galileo Galilei, no final do século XVI, a respeito do movimento dos corpos. Em qualquer movimento - seja de uma pedra que cai, de uma nave espacial, de um cavalo no campo - ocorre uma relação especial entre dois conjntos numéricos: os de tempo e os de espaço. A cada instante do primeiro conjunto vai corresponder uma, e somente uma, posição de um determinado corpo em movimento. A partir desta idéia, o conceito de função foi sendo aplicado a todos os movimentos numéricos em que esta relação especial acontece.

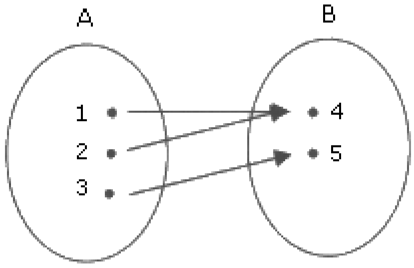
Observações:



Não é função, pois o nº 3 não possui correspondente no conjunto B.



Não é função, pois o nº 1 possui dois correspondentes em B.



É função, pois todos os elementos de A possuem um único correspondente em B.

Curiosidades:

1) Leibniz não é o responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra "função", praticamente no mesmo sentido em que ela é usada hoje. Leibniz foi quem primeiro usou o termo "função" em 1673 no manuscrito Latino "Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus". Leibniz uso o termo apenas para designar, em termos muito gerais, a dependência de uma curva de quantidades geométricas como as sub tangentes e sub normais. Introduziu igualmente a terminologia de "constante", "variável" e " parâmetro".

2) O conceito de função que hoje pode parecer simples é o resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na Antiguidade quando, por exemplo, os matemáticos babilônios utilizaram tabelas de quadrados e de raízes quadradas e cúbicas ou quando os Pitagóricos tentaram relacionar a altura do som emitido por cordas submetidas à mesma tensão com o seu comprimento. Nesta época o conceito de função não estava claramente definido: as relações entre as variáveis surgiam de forma implícita e eram descritas verbalmente ou por um gráfico.

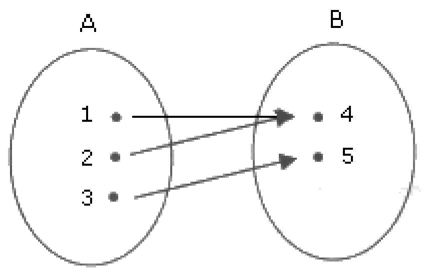
Os nomes Plano Cartesiano e Produto Cartesiano são homenagens ao seu criador René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês. O nome de Descartes em Latim, era Cartesius, daí vem o nome cartesiano. Só no século XVII, quando Descartes introduziu as coordenadas cartesianas, se tornou possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudar analiticamente funções. A Matemática recebe assim um grande impulso, nomeadamente na sua aplicabilidade a outras ciências - os cientistas passam, a partir de observações ou experiências realizadas, a procurar determinar a fórmula ou função que relaciona as variáveis em estudo. A partir daqui todo o estudo se desenvolve em torno das propriedades de tais funções. Por outro lado, a introdução de coordenadas, além de facilitar o estudo de curvas já conhecidas permitiu a "criação" de novas curvas, imagens geométricas de funções definidas por relações entre variáveis.

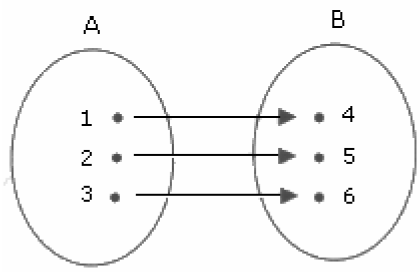
16.3. CLASSES DE FUNÇÃO

16.3.1. Função sobrejetora

Uma função é sobrejetora quando o conjunto imagem é o próprio conjunto B, ou seja: uma função é sobrejetora quando não sobra nenhum elemento no conjunto B sem correspondente no conjunto A.

<u>Exemplos</u>:

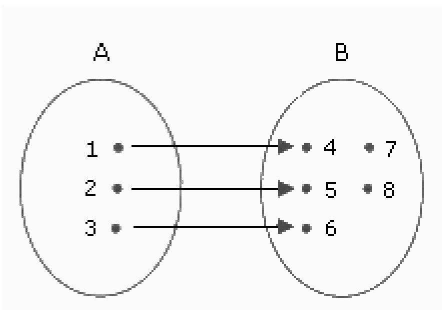


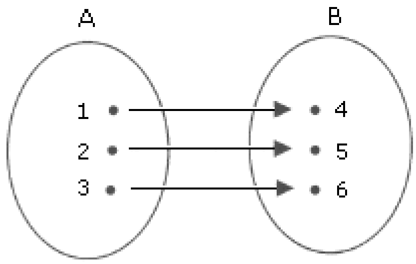


16.3.2. Função injetora

Uma função é injetora quando nenhum elemento de B possui mais que um correspondente em A.

<u>Exemplos</u>:

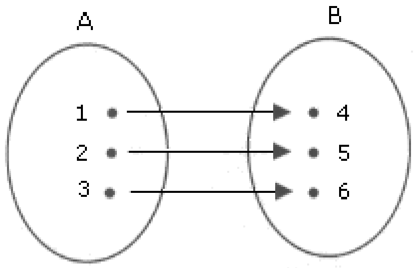




16.3.3. Função bijetora

Uma função é bijetora quando é sobrejetora e injetora simultaneamente.

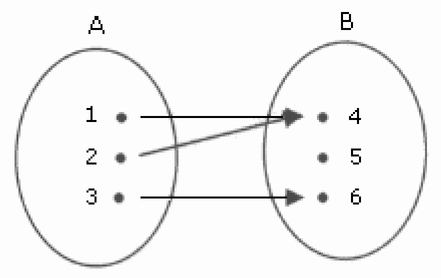
Exemplo:



Observe que não sobre nenhum elemento em "B" sem correspondente em "A" e que para cada elemento de "B" só existe um correspondente em "A".

16.3.4. Função não sobrejetora e não injetora

Exemplo:



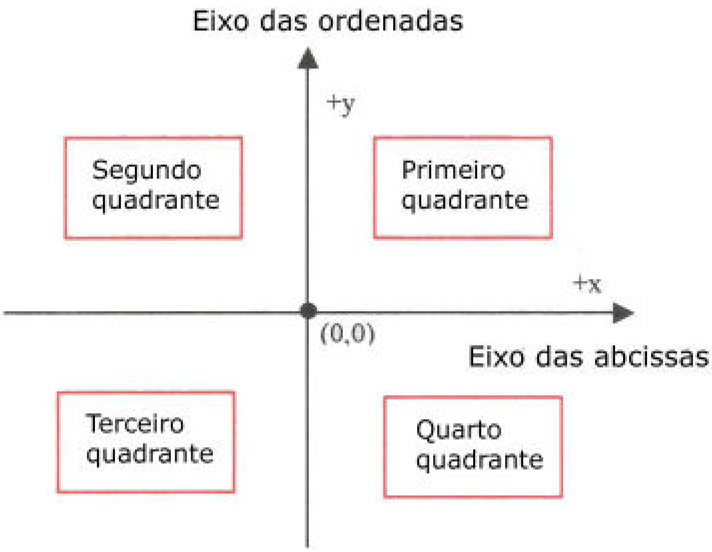
Não é função sobrejetora pois o nº 5 não possui correspondente em "A", e não é função injetora pois o nº 4 possui dois correspondentes em "A".

16.4. COORDENADAS CARTESIANAS

Através das coordenadas cartesianas podemos localizar pontos no plano. Essa localização ocorre de forma bastante simples. Considerando dois eixos perpendiculares, basta definir a distância do ponto em relação ao eixo horizontal e em relação ao eixo vertical. O ponto em que os dois eixos se cortam (0,0) recebe o nome de origem das coordenadas. Dessa forma é adotada a seguinte convenção:

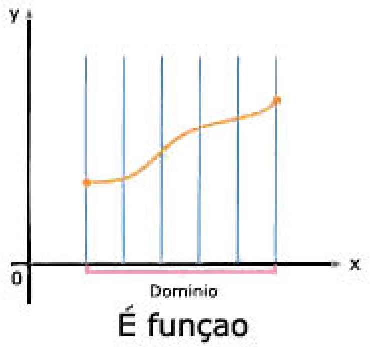
- o eixo horizontal recebe o nome de eixo das abcissas e é positivo à direita da origem das coordenadas e negativo à sua esquerda.
- o eixo vertical recebe o nome de eixo das ordenadas e é positivo acima da origem das coordenadas e negativo abaixo.

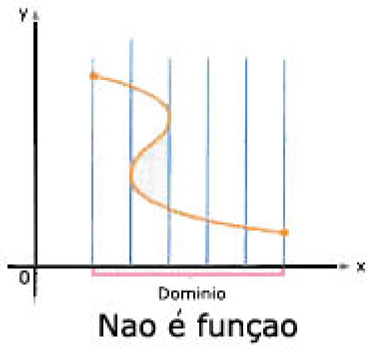
Quando desenhamos os eixos cartesianos, o plano fica dividido em quatro regiões chamadas quadrantes.



Curiosidade: Em 1637, René Descartes descreveu em seu livro "La Geometrie" (A Geometria) um importante método de localização de pontos no plano. Em homenagem a ele esse sistema de coordenadas passou a ser chamado de sistema de coordenadas cartesiano.

Observação: Um gráfico representa uma função se qualquer paralela traçada em relação ao eixo das ordenadas cortá-lo em apenas um ponto.





Aplicações das relações e funções no cotidiano:

Ao lermos um jornal ou uma revista, diariamente nos deparamos com gráficos, tabelas e ilustrações. Estes, são instrumentos muito utilizados nos meios de comunicação. Um texto com ilustrações, é muito mais interessante, chamativo, agradável e de fácil compreensão. Não é só nos jornais ou revistas que encontramos gráficos. Os gráficos estão presentes nos exames laboratoriais, nos rótulos de produtos alimentícios, nas informações de composição química de cosméticos, nas bulas de remédios, enfim em todos os lugares. Ao interpretarmos estes gráficos, verificamos a necessidade dos conceitos de plano cartesiano.

O Sistema ABO dos grupos sangüíneos é explicado pela recombinação genética dos alelos (a,b,o) e este é um bom exemplo de uma aplicação do conceito de produto cartesiano. Uma aplicação prática do conceito de relação é a discussão sobre a interação de neurônios (células nervosas do cérebro).

Ao relacionarmos espaço em função do tempo, número do sapato em função do tamanho dos pés, intensidade da fotossíntese realizada por uma planta em função da intensidade de luz a que ela é exposta ou pessoa em função da impressão digital, percebemos quão importantes são os conceitos de funções para compreendermos as relações entre os fenômenos físicos, biológicos, sociais.

Observamos então que as aplicações de plano cartesiano, produto cartesiano, relações e funções estão presentes no nosso cotidiano.

16.5. CLASSIFICAÇÃO DE FUNÇÕES A PARTIR DE SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

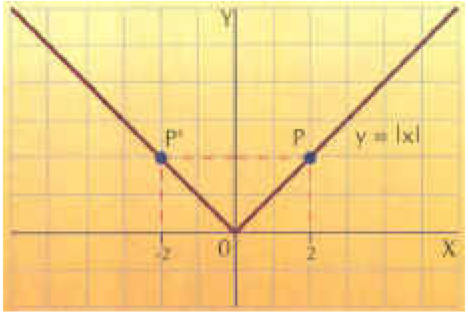
Podemos fazer uma classificação particular de algumas funções, a partir de suas representações gráficas. É o caso dos exemplos seguintes:

16.5.1. Função par

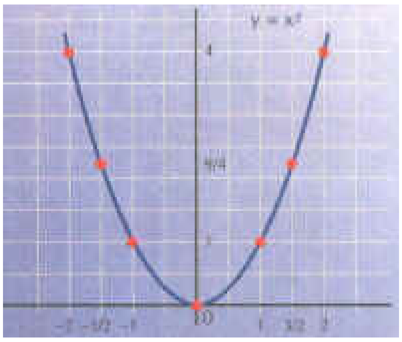
Uma função é par quando é simétrica em relação ao eixo das ordenadas, isto é, quando se verifica: f (x) = f (-x) para $\forall x \in A$.

<u>Exemplos</u>:

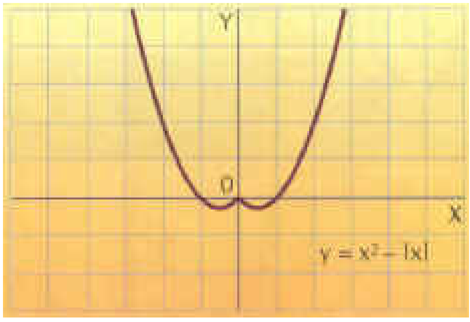
- f (x) = |x| = x
- f (-x) = |-x| = x



- f (x) = x^2
- f (-x) = $(-x)^2 = x^2$



- f (x) = x^2 - |x| = x^2 - x
- f (-x) = $(-x)^2$ - |-x|= x^2 - x



A função cosseno é uma função par.

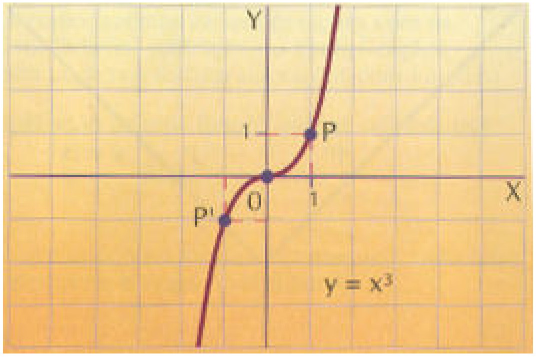
- f (x) = cos x
- f (-x) = cos(-x) = cos x

16.5.2. Função ímpar

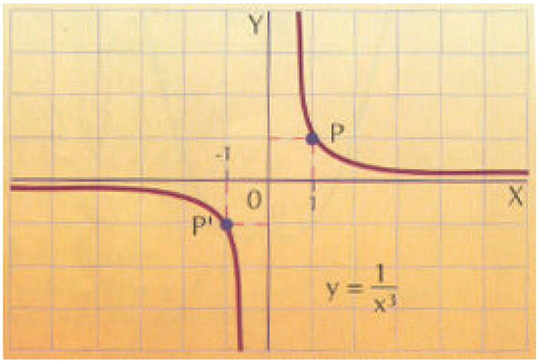
Uma função é par quando é simétrica em relação ao centro de coordenadas, isto é, quando se verifica: f (x) = - f (- x) para $\forall x \in A$.

Exemplos:

- $f(x) = x^3$
- $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$



- $f(x) = 1 / x^3$
- $f(-x) = 1 / (-x)^3 = - 1 / x^3$



A função seno é uma função ímpar.

- f (x) = sen x
- f (-x) = sen(-x) = - sen x

16.5.3. Função limitada

Uma função é limitada se existem números reais "a" e "b" tais que a imagem de todo elemento do domínio pertence ao intervalo fechado de extremos "a" e "b".

As funções y = sen x e y = cos x são limitadas pois: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$.

16.5.4. Função identidade

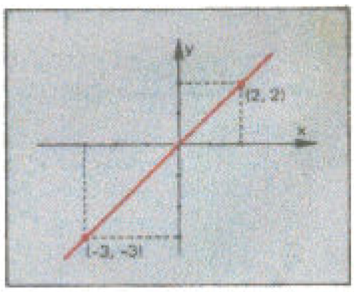
É toda função do tipo: f(x) = x.

<u>Exemplo</u>:

O domínio é $\mathbb{R}$.

O conjunto-imagem é $\mathbb{R}$.

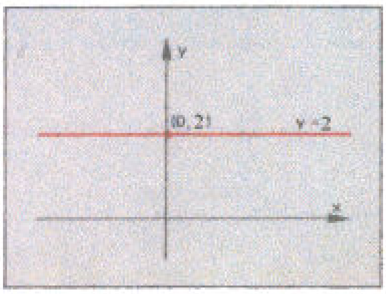
x	y = x
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2



16.5.5. Função constante

É toda função do tipo: f(x) = k, onde "k" é um número real.

Exemplo:



O domínio é $\mathbb{R}$.

O conjunto-imagem é $\{2\}$.

16.5.6. Função periódica

É toda função que se repete periodicamente.

Todas as funções trigonométricas, como por exemplo: sen(x), cos(x), sec(x), cossec(x) são periódicas.

16.5.7. Função linear

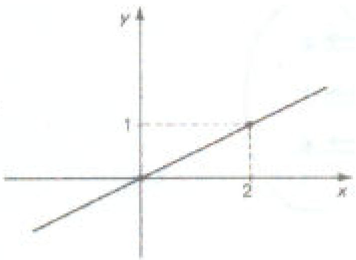
É toda função do tipo f(x) = a.x, onde "a" é um número real não nulo.

O gráfico de f(x) = a.x é uma reta que passa pela origem dos eixos (0,0).

Exemplo:

$y = \frac{1}{2}x$

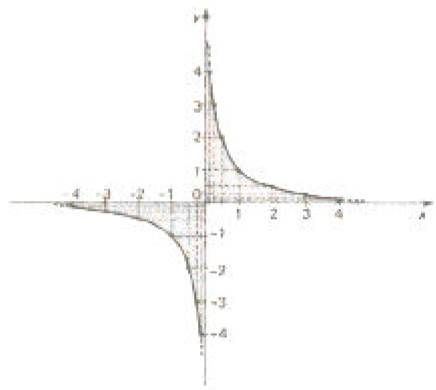
x	y
0	0
2	1



Observação: A função identidade é um caso particular de função linear.

16.5.8. Função recíproca

É toda função do tipo f (x) = 1 / x, com $x \neq 0$.

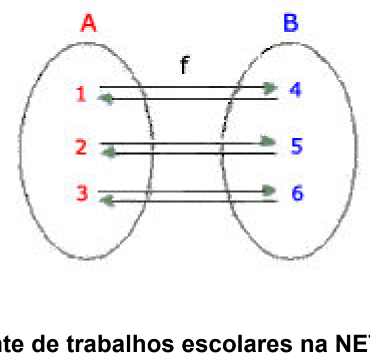


x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

16.5.9. Função inversa

Denomina-se função inversa da função bijetora $f: A \to B$ a função $f^{-1}: B \to A$ que se obtém trocando de posição os elementos de todos os pares ordenados da função f.

Observação: Somente para função bijetora existe função inversa.



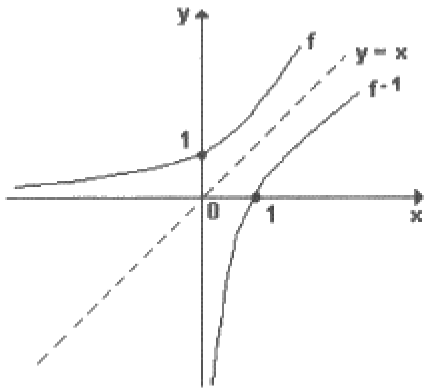
$$f = \{(1,4),(2,5),(3,6)\}$$

$$f^{-1} = \{(4,1),(5,2),(6,3)\}$$

Para se obter a inversa de uma função, devemos proceder da seguinte forma:

- Isola-se o x.
- Troca-se x por y e y por x.

O gráfico abaixo, representa uma função e a sua inversa. Observe que as curvas representativas de f e de f^{-1}, são simétricas em relação à reta y = x, bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.



Exercícios:

1) Determinar a função inversa de y = 2x + 4

$y = 2x + 4$

$2x = y - 4$

$$x = \frac{y - 4}{2}$$

função inversa: trocar "x" por "y" e "y" por "x"

Logo:

$$y^{-1} = \frac{x - 4}{2}$$

2) Determinar a função inversa de $y = \frac{3x + 1}{2x - 3}$, para $\left(x \neq \frac{3}{2}\right)$

y . (2x - 3) = 3x - 1

2xy - 3y = 3x + 1

2xy - 3x = 3y + 1

2x . (y - 3) = 3y + 1

$x = \frac{3y + 1}{2y - 6}$

Logo:

$y^{-1} = \frac{3x + 1}{2x - 6}$

16.5.10. Função composta

A composição de uma função f com outra função g é uma nova função representada por $g \circ f$.

- $f \circ g = f\,[g(x)]$
- $g \circ f = g\,[f(x)]$
- $f \circ f = f\,[f(x)]$
- $g \circ g = g\,[g(x)]$

Observação: O sinal "$\circ$" indica uma operação de composição.

Exercícios:

1) Se f(x) = 3x - 4 e g(x) = x + 4, determinar:

- a) $f \circ g$
- b) $g \circ f$
- c) $f \circ f$
- d) $g \circ g$

a) $f \circ g = f\,[g(x)] = 3 \,.\, (x + 4) - 4 = 3x + 12 - 4$

$\boldsymbol{f \circ g = 3x + 8}$

b) $g \circ f = g\,[f(x)] = (3x - 4) + 4 = 3x - 4 + 4$

$\boldsymbol{g \circ f = 3x}$

c) $f \circ f = f\,[f(x)] = 3 \cdot (3x - 4) - 4 = 9x - 12 - 4$

$\boldsymbol{f \circ f = 9x - 16}$

d) $g \circ g = g\,[g(x)] = (x + 4) + 4 = x + 4 + 4$

$\boldsymbol{g \circ g = x + 8}$

2) Dados $f(x) = 7x$ e $f\,[g(x)] = 56x^2$, calcular $g(x)$.

Vamos substituir "x" por "g(x)" na função f(x):

$f\,[g(x)] = 7 \cdot g(x)$

logo: $56x^2 = 7 \cdot g(x)$

$g(x) = 56x^2 / 7$

$\boldsymbol{g(x) = 8x^2}$

AULA 17 - FUNÇÃO DO 1º GRAU (FUNÇÃO AFIM)

Função do 1º grau ou função afim é toda função do tipo y = ax + b, com $a \neq 0$

O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta.

- a = coeficiente angular da reta
- b = coeficiente linear da reta

Observação: Se b = 0, temos a função linear que é um caso particular da função afim.

17.1. RAIZ OU ZERO DE UMA FUNÇÃO DO 1º GRAU

É o valor de "x" para o qual a função f(x) = ax + b se anula.

ax + b = 0, logo: ax = - b

$$x = -\frac{b}{a}$$

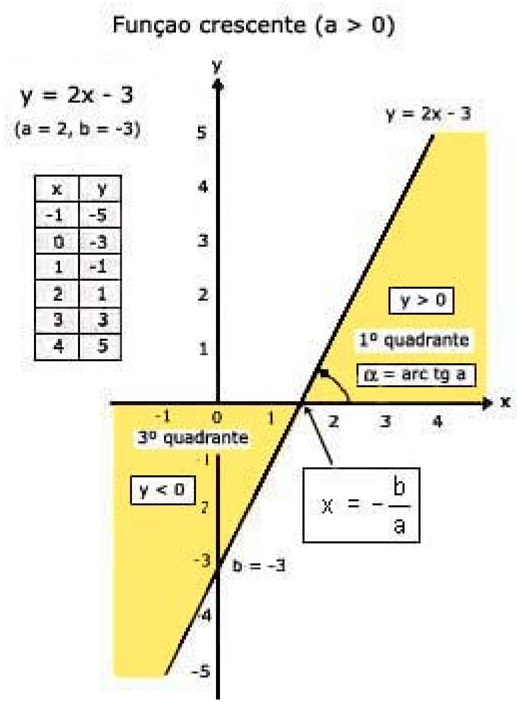
17.2. FUNÇÃO DO 1º GRAU CRESCENTE

A função do 1º grau é crescente, se aumentando os valores atribuídos a "x", aumentam em correspondência os valores calculados para "y".

Uma função do 1º grau é crescente se, e somente se, o coeficiente angular for positivo, ou seja: <u>a > 0</u>.

Exemplos:

- y = 2x - 3 (a = 2, b = -3)
- y = 5x (a = 5, b = 0)
- y = x - 2 (a = 1, b = -2)
- y = 3x + 5 (a = 3, b = 5)



Observações: 1) A raiz ou zero da função y = ax + b é a abcissa do ponto em que a reta corta o eixo dos "x". No exemplo: x = 1,5.

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

x = 1,5

2) O coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo dos "y".

No exemplo: b = -3.

3) O coeficiente angular "a" é o declive da reta, ou seja: $a = \operatorname{tg} \alpha$, portanto:.

$$\alpha = \operatorname{arctg} a$$

α = arc tg 2

$\alpha = 63{,}43^\circ$ ou $\alpha = -116{,}57^\circ$

4) Numa função crescente: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$(1º quadrante) ou $-90^\circ < \alpha < -180^\circ$(3º quadrante).

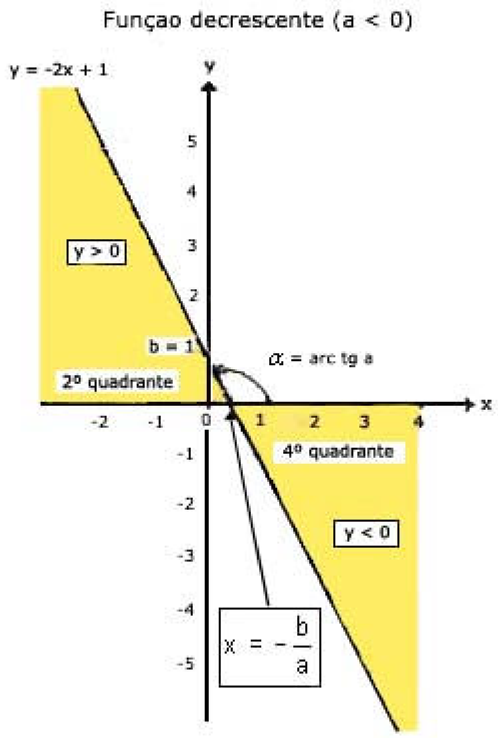
17.3. FUNÇÃO DO 1º GRAU DECRESCENTE

A função do 1º grau é decrescente, se aumentando os valores atribuídos a "x", diminuem em correspondência os valores calculados para "y".

Uma função do 1º grau é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular for negativo, ou seja: $a < 0$.

Exemplos:

- y = -3x - 7 (a = -3, b = -7)
- y = -5x (a = -5, b = 0)
- y = -2x + 1 (a = -2, b = 1)



Observações: 1) A raiz ou zero da função y = ax + b é a abcissa do ponto em que a reta corta o eixo dos "x". No exemplo: x = 0,5.

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{(-2)} = \frac{1}{2}$$

x = 0,5

2) O coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo dos "y".

No exemplo: b = 1.

3) O coeficiente angular "a" é o declive da reta, ou seja: $a = tg\,\alpha$, portanto:.

$$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg} a}$$

α = arc tg -2

$\alpha = 116{,}57°$ ou $\alpha = -63{,}43°$

4) Numa função crescente: $90° < \alpha < 180°$ (2º quadrante) ou $0° < \alpha < -90°$ (4º quadrante).

17.4. ESTUDO DO SINAL PARA UMA FUNÇÃO DO 1º GRAU

a) Para uma função do 1º grau crescente (a > 0), temos:

- Se x > (-b/a) então y > 0 (ou seja: "y" é positivo)
- Se x < (-b/a) então y < 0 (ou seja: "y" é negativo)

b) Para uma função do 1º grau decrescente (a < 0), temos:

- Se x > (-b/a) então y < 0 (ou seja: "y" é negativo)
- Se x < (-b/a) então y > 0 (ou seja: "y" é positivo)

Exercícios:

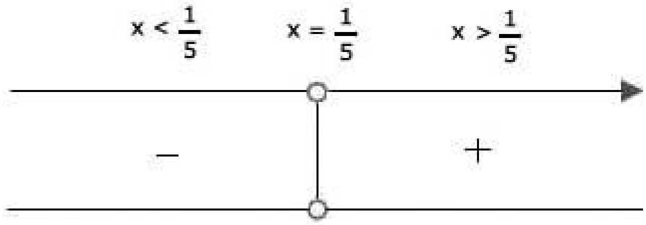
1) Estudar o sinal de f(x) = 5x - 1

Zero da função:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{5}$$

Sinal de a:

a = 5, logo a > 0



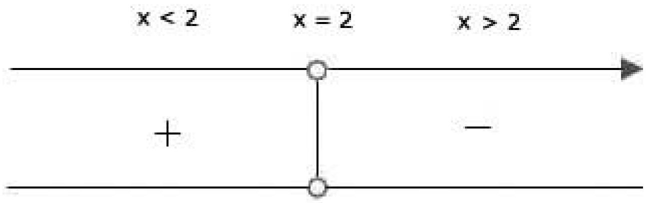
2) Estudar o sinal de f(x) = -x + 2

Zero da função:

$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Sinal de a:

a = -1, logo a < 0



AULA 18 - EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Equação é uma sentença aberta que pode ser expressa por uma relação de igualdade.

Considere a equação: $5x + 12 = 4 - x$

A expressão que está à esquerda do sinal de igual (5x +12) recebe o nome do primeiro membro da equação. A expressão que está à direita do sinal (4 - x), é chmada de segundo membro da equação.

Equação do 1º grau é toda equação que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, onde $a \neq 0$.

18.1. SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO

São os valores que substituídos numa equação, fazem com que a igualdade se verifique. Recebem também o nome de raízes da equação.

Uma equação pode ter várias soluções, uma única solução ou nenhuma solução.

A raiz de uma equação do 1º grau é calculada através da seguinte fórmula:

$ax + b = 0$

$ax = - b$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Curiosidade: O Papiro de Rhind, um dos documentos mais antigos e importantes sobre matemática egípcia, nos mostra que em 1700 a.C. o homem já trabalhava com problemas que envolviam quantidades desconhecidas. No século III, o matemático grego Diofante criou uma teoria sobre a resolução de equações de primeiro grau; porém foi só a partir do século XVI, com o desenvolvimento da notação algébrica, que a teoria das equações passa a ser um ramo independente da Matemática.

18.2. SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Um sistema de equações do 1º grau com 2 equações e 2 incógnitas pode ser resolvido de 3 formas diferentes.

18.2.1. Método da substituição

Consiste em isolar uma incógnita numa equação e substituir o resultado na outra.

Exercício

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \text{ (I)} \\ 3x - y = 2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Isolando-se "x" em (I) obtemos: $x = 2y - 5$

Substituindo este resultado em (II) temos:

$3.(2y - 5) - y = 2$

$6y - 15 - y = 2$

$5y = 2 + 15$

$5y = 17$

$\mathbf{y = 3,4}$

Substituindo o valor de "y" em (II) temos:

$x - (2 \,.\, 3,4) = - 5$

$x = - 5 + 6,8$

$\mathbf{x = 1,8}$

18.2.2. Método da adição

Consistem em conseguir, numa mesma incógnita, coeficientes simétricos e depois somar as duas equações.

<u>Exercício</u>

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \text{ (I)} \\ 3x - y = 2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Podemos multiplicar a equação (I) por - 3, conseguindo em "x" coeficientes simétricos.

$$\begin{cases} -3x + 6y = 15 \text{ (I)} \\ 3x - y = 2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Somando as equações, temos: 5y = 17, logo:

y = 3,4

Substituindo o valor de "y" em (II), temos:

3x - 3,4 = 2

3x = 2 + 3,4

3x = 5,4

x = 1,8

18.2.3. Método gráfico

A solução do sistema é obtida através das coordenadas do ponto onde as retas se interceptam.

<u>Exercício</u>

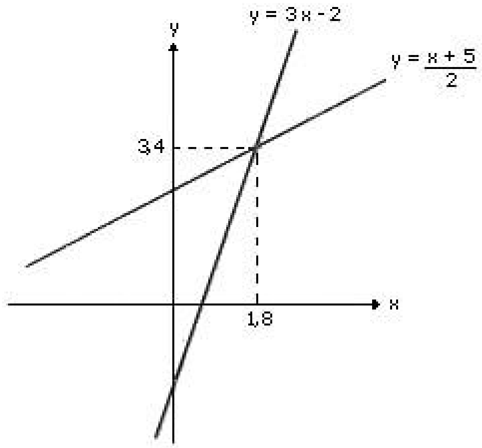
Resolver graficamente o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \text{ (I)} \\ 3x - y = 2 \text{ (II)} \end{cases}$$

de (I) obtemos: $2y = x + 5$, logo:

$$y = \frac{x+5}{2}$$

de (II) obtemos: $y = 3x - 2$



18.3. SISTEMA IMPOSSÍVEL

É aquele que não admite solução simultânea para suas equações.

Exercício

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 6 \text{ (I)} \\ 10x + 6y = 10 \text{ (II)} \end{cases}$$

Isolando "y" em (I), temos:

$$y = \frac{6 - 5x}{3}$$

Substituindo o valor de "y" em (II), temos:

$$10x + 6 \cdot \left(\frac{6 - 5x}{3}\right) = 10$$

$10x + 12 - 10x = 10$ **$12 = 10$**

O que nos leva a concluir que o sistema é impossível.

AULA 19 - INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

Inequação é toda sentença aberta que relaciona duas expressões através dos sinais: $>$, $<$, $\geq$ ou $\leq$.

19.1. INEQUAÇÕES DO 1º GRAU COM 1 VARIÁVEL

19.1.1. Regras

Regra 1: Numa inequação, podemos "passar" uma parcela de um membro para o outro, mudando o sinal da parcela e mantendo o sentido da desigualdade.

Exemplos:

1) $x - 6 > 10$

$x > 10 + 6$

$x > 16$

2) $x + 4 < 16$

$x < 16 - 4$

$x < 12$

Regra 2: Numa inequação podemos "passar" um fator positivo de um membro para outro, mantendo o sentido da desigualdade.

Exemplos:

1) $\frac{x}{2} > 5$

$x > 5 . 2$ $x > 10$

2) $2x < 8$

$x < \frac{8}{2}$ $x < 4$

Regra 3: Numa inequação podemos "passar" um fator negativo de um membro para outro, invertendo o sentido da desigualdade.

Exemplos:

1) $-\frac{x}{3} < 4$

$-x < 4 \cdot 3$ $\quad\quad x > -12$

2) $-2x > 10$

$x < -\frac{10}{2}$

$x < -5$

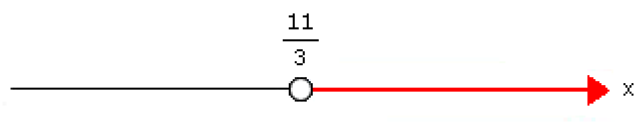
Exercícios:

Resolver as inequações abaixo:

1) $2x + 3 < 5x - 8$

$2x - 5x < -8 - 3$ $\quad\quad -3x < -11$

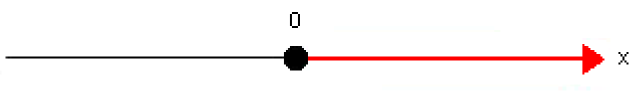
$x > \frac{-11}{-3}$ $\quad\quad x > \frac{11}{3}$



2) $\frac{x}{2} \leq 3x$

$x \leq 6x$ $\quad\quad x - 6x \leq 0$

$-5x \leq 0$ $\quad\quad x \geq 0$

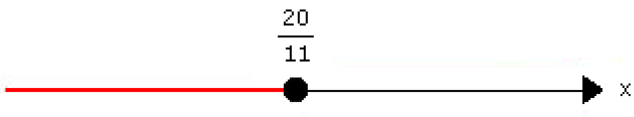


3) $\frac{x}{2} - 1 \leq -\frac{3x}{5} + 1$

$\frac{x}{2} + \frac{3x}{5} \leq 1 + 1$ $\qquad \frac{5x + 6x}{10} \leq 2$ $\qquad \frac{11x}{10} \leq 2$

$11x \leq 20$

$x \leq \frac{20}{11}$



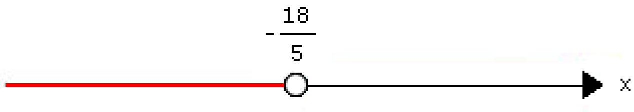
4) $-\frac{2x}{3} - 2 > \frac{x}{6} + 1$

$-\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} > 1 + 2$

$\frac{-4x - x}{6} > 3$

$-5x > 18$

$x < -\frac{18}{5}$



5) $-1 < 2x + 1 \leq 2$

Para resolver esse problema, duas condições devem ser observadas:

- $2x + 1 > -1$
- $2x + 1 \leq 2$

1ª condição: $2x + 1 > -1$

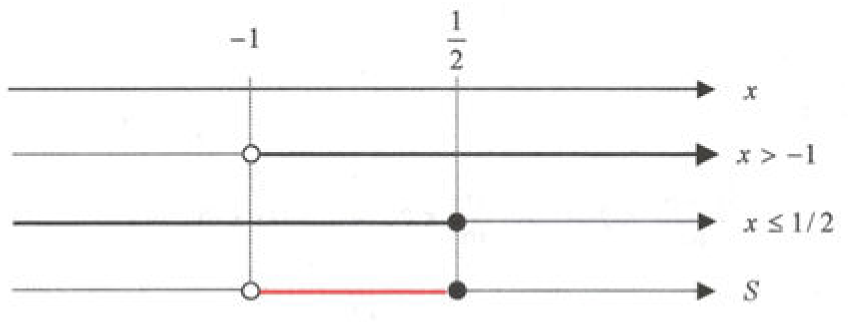
$2x > -1 - 1$ $\quad$ $2x > -2$

$x > -\frac{2}{2}$ $\quad$ $x > -1$

2ª condição: $2x + 1 \leq 2$

$2x \leq 2 - 1$ $\quad$ $2x \leq 1$

$x \leq \frac{1}{2}$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

6) $-2 < 3x + 7 \leq 4x$

Para resolver esse problema, duas condições devem ser observadas:

- $3x + 7 > -2$
- $3x + 7 \leq 4x$

1ª condição: $3x + 7 > -2$

$3x > -2 - 7$ $3x > -9$

$x > -\frac{9}{3}$

$x > -3$

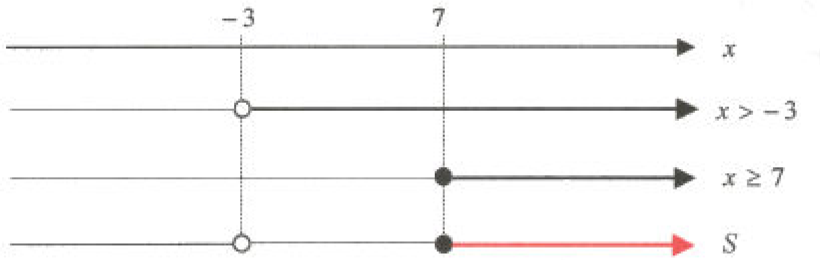
<u>2ª condição</u>: $3x + 7 \leq 4x$

$3x - 4x \leq -7$

$-x \leq -7$

$x \geq \frac{-7}{-1}$

$x \geq 7$



$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7 \}$

19.2. INEQUAÇÕES DO 1º GRAU COM 2 VARIÁVEIS

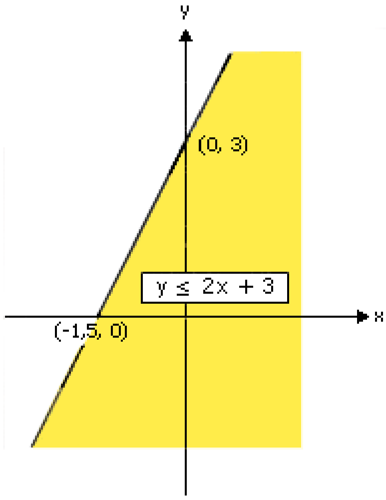
Exercícios:

Resolver as inequações abaixo:

1) $2x - y + 3 \geq 0$

$-y \geq -2x - 3$

$y \leq 2x + 3$

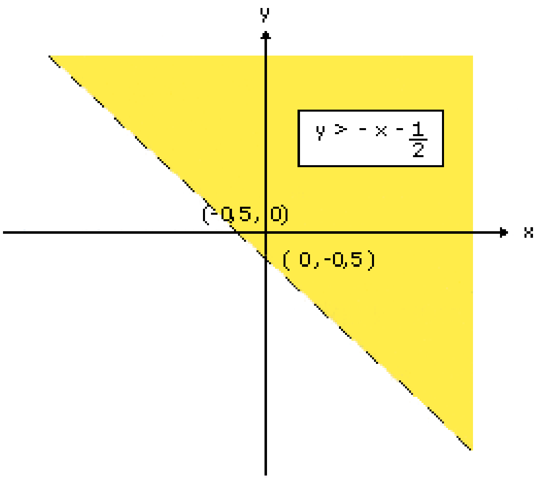


2) $2x + 2y + 1 > 0$

$2y > -2x - 1$

$y > \frac{-2x - 1}{2}$

$y > -x - \frac{1}{2}$



Observação: Note que a reta da fronteira não faz parte do conjunto solução.

19.3. SISTEMA DE INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

Solução de um sistema de inequações é o conjunto de números reais que satisfazem à todas as inequações que compõem o sistema.

19.3.1. Sistema de 2 inequações com 1 variável

Exercícios:

1) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2 < 4 \text{ (I)} \\ x + 4 < 6 \text{ (II)} \end{cases}$$

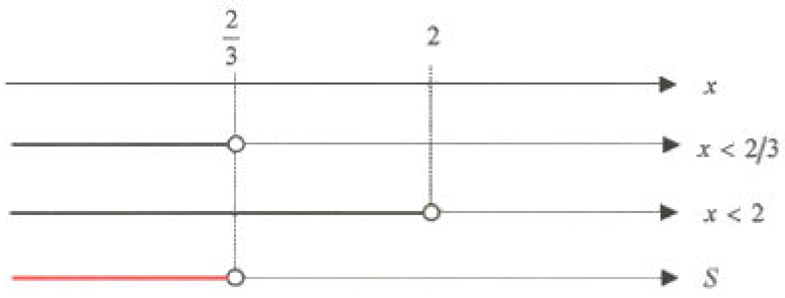
De (I) obtemos:

$3x < 4 - 2$ $3x < 2$

$$x < \frac{2}{3}$$

De (II) obtemos:

$x < 6 - 4$ $x < 2$



A intersecção dos conjuntos determina a solução do sistema. Dessa forma:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3} \right\}$$

2) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5 > 0 \ (I) \\ 2x - 8 \leq 0 \ (II) \end{cases}$$

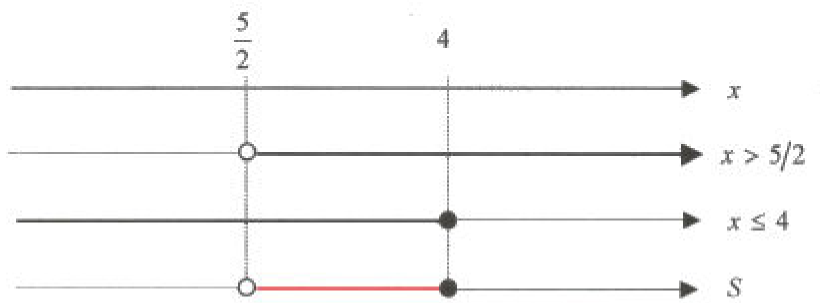
De (I) obtemos:

$2x > 5$

$x > \frac{5}{2}$

De (II) obtemos:

$2x \leq 8$ $\qquad$ $x \leq 4$



A intersecção dos conjuntos determina a solução do sistema. Dessa forma:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} < x \leq 4 \right\}$$

3) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 1 \geq 6 \ (I) \\ 2x + 1 < 2 - x \ (II) \end{cases}$$

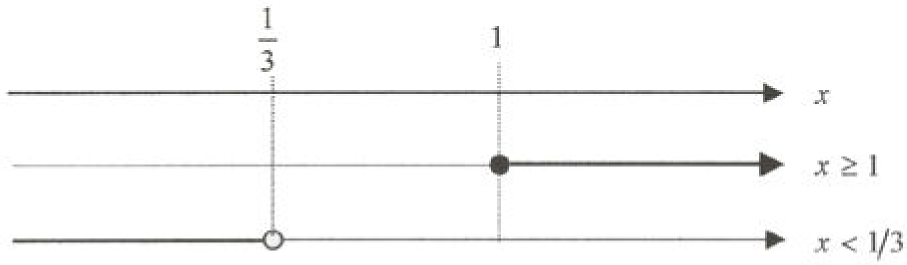
De (I) obtemos:

$5x \geq 6 - 1$ $\qquad$ $5x \geq 5$ $\qquad$ $x \geq 1$

De (II) obtemos:

$2x + x < 2 - 1$ $3x < 1$

$x < \frac{1}{3}$

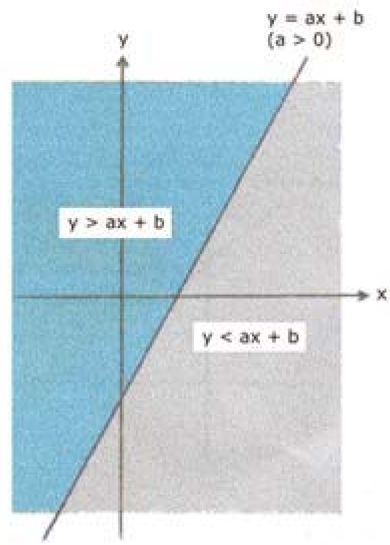


A intersecção dos conjuntos determina a solução do sistema. Dessa forma:

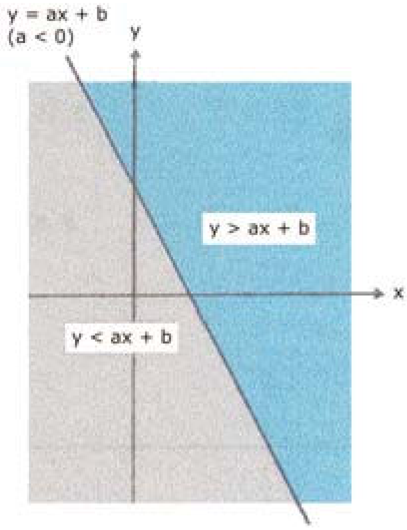
S = Ø

19.3.2. Sistema de 2 inequações com 2 variáveis

Para uma função do 1° grau crescente (a > 0), graficamente temos:



Para uma função do 1° grau decrescente (a < 0), graficamente temos:



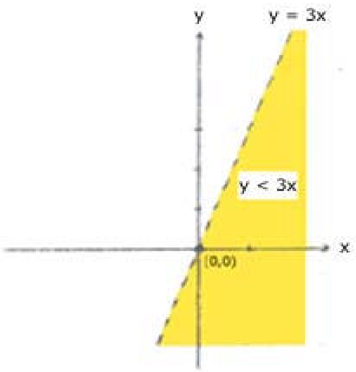
Exercícios:

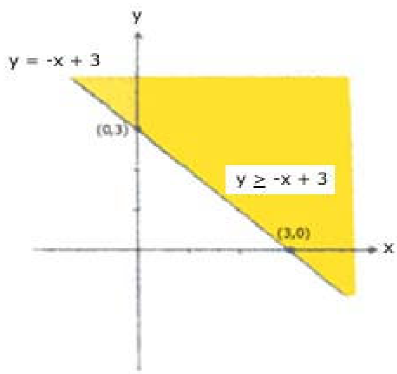
1) Resolver o sistema:

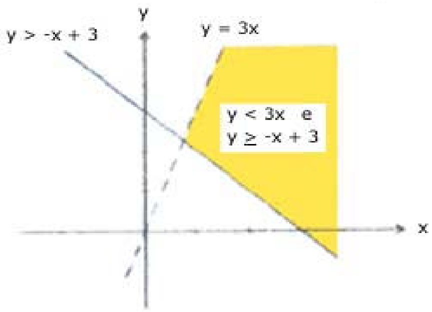
$$\begin{cases} x + y - 3 \geq 0 \ (\mathrm{I}) \\ y - 3x < 0 \ (\mathrm{II}) \end{cases}$$

De (I) obtemos: $y \geq -x + 3$

De (II) obtemos: $y < 3x$







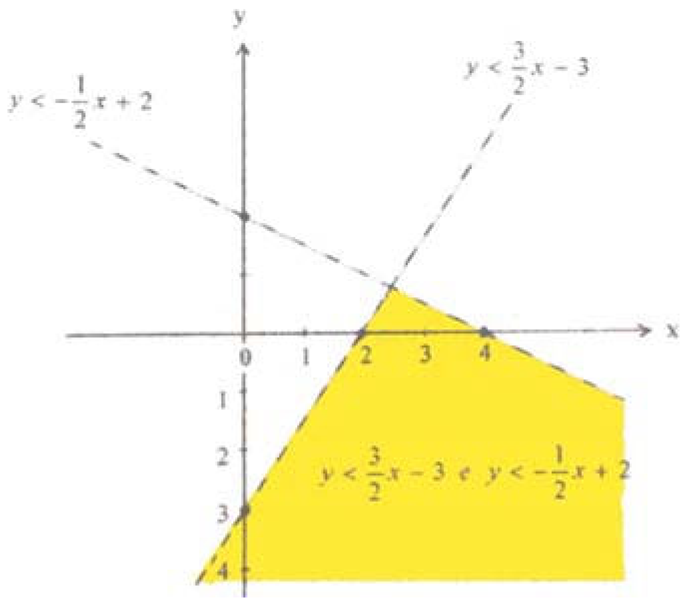
$$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \mid (-x + 3) < y \leq 3x \}$$

2) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y > 6 \ (\mathrm{I}) \\ 4x + 8y < 16 \ (\mathrm{II}) \end{cases}$$

De (I) obtemos: - 2y > - 3x + 6

De (II) obtemos: 8y < - 4x + 16



$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \mid y < \frac{3}{2}x - 3 \ \wedge \ y < -\frac{1}{2}x + 2 \right\}$$

AULA 20 - FUNÇÃO DO 2º GRAU (FUNÇÃO QUADRÁTICA)

Função do 2° grau ou função quadrática é toda função do tipo: $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. O gráfico de uma função do 2° grau é uma parábola..

20.1. RAÍZES DE UMA FUNÇÃO DO 2º GRAU

São os valores de "x" para o qual a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ se anula.

20.1.1. Dedução de fórmula

$ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx = - c$

Vamos multiplicar os 2 termos da equação por "4a":

$ax^2 + bx = - c .(4a)$

$4a^2x^2 + 4abx = - 4ac$

Para completar o quadrado do 1° membro, adicionamos "b " a ambos os membros da equação:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos:

Dividindo os 2 membros da equação por "2a", temos:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Observação:

$b^2 - 4ac = \Delta$

(Δ = discriminante) portanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Se: $\Delta > 0$ => a equação possui 2 raízes reais e distintas.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Se: $\Delta = 0$ => a equação possui 1 raiz real.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- Se: $\Delta < 0$ => a equação não admite solução real.

Curiosidade: O hábito de dar nome de Bhaskara para a fórmula de resolução da equação de 2° grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome de Bhaskara para essa fórmula na literatu-ra internacional), não é adequado pois:

Problemas que recaem numa equação de 2° grau já apareciam, há quase 4.000 anos atrás, em textos escritos pelos babilônicos. Nestes textos o que se tinha era uma receita (escrita em prosa, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos.

Bhaskara que nasceu na índia em 1.114 e viveu até cerca de 1.185 foi um dos mais importantes matemáticos do século 12. As duas coleções de seus trabalhos mais conhecidas são Lilavati ("formosa") e Vijaganita ("extração de raízes"), que tratam de aritmética e álgebra respectivamente, e contêm numerosos problemas sobre equações de lineares e quadráticas (resolvidas também com receitas em prosa), progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros. Até o fim do século 16 não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do 2° grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação.

Isso só começou a ser feito a partir da François Viéte, matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Logo, embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de Bhaskara, não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula de resolução da equação de 2° grau.

20.1.2. Equações completas do 2º grau

É toda equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, (com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$)

<u>Exercícios</u>:

1) Calcular as raízes da equação $x^2 - 8x + 15 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2} = -4 \pm 1$$

$x_1 = -3$ $\quad$ $x_2 = -5$

2) Determine os valores reais de "m" para os quais $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ admite uma única raiz real.

$\Delta = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$4m^2 - 4 \cdot (3m - 2) = 0$

$4m^2 - 12m + 8 = 0$

$m^2 - 3m + 2 = 0$

$(m - 1) \cdot (m - 2) = 0$

$m_1 = 1$ $\quad$ $m_2 = 2$

$S = \{ m \in R \mid m = 1 \text{ ou } m = 2 \}$

20.1.3. Equações incompletas do 2º grau

Uma equação do 2º grau é chamada incompleta se $b = 0$ ou $c = 0$. Uma particularidade das equações incompletas é que não necessitamos da fórmula para resolvê-las.

Exercícios:

1) Calcular a equação $x^2 - 5x = 0$

$x \cdot (x - 5) = 0$

$x = 0$ ou $x - 5 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 5$

2) Calcular a equação $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

3) Calcular a equação $x^2 + 8 = 0$

$x^2 = -8$

$x = \pm\sqrt{-8}$

A equação não admite solução real

20.2. RELAÇÕES ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES

raizes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

20.2.1. Soma das raízes (S)

$S = x_1 + x_2$

$$S = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

$$\boxed{S = -\frac{b}{a}}$$

20.2.2. Produto das raízes (P)

$P = x_1 \cdot x_2$

$$P = \frac{(-b+\sqrt{\Delta}).(-b-\sqrt{\Delta})}{2a\,.\,2a} = \frac{b^2 + b.\sqrt{\Delta} - b\,.\,\sqrt{a} - \sqrt{\Delta^2}}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$P = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\boxed{P = \frac{c}{a}}$$

Observações:

1) Se numa equação do 2º grau, "a = 1", então: ***S = - b*** e ***P = c***, ou seja:

$x^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - Sx + P = 0$

2) Podemos decompor a equação $x^2 + bx + c = 0$ da seguinte maneira:

$x^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + u).(x + v) = 0$

onde: $u + v = b$ e $u \cdot v = c$

Exercícios:

1) Determinar as raízes da equação $x^2 - 9x + 14 = 0$

Dois números que multiplicados resultam 14 e que somados resultam em -9 são: -2 e -7

a = 1, logo: $x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow (x - 2) \,.\, (x - 7) = 0$

Portanto as raízes são:

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 7$

2) Determinar as raízes da equação $x^2 + 2x - 3 = 0$

Dois números que multiplicados resultam -3 e que somados resultam em 2 são: 3 e -1

$a = 1$, logo: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 3) . (x - 1) = 0$

Portanto as raízes são:

$x_1 = -3$ $x_2 = 1$

20.3. VÉRTICE DE UMA PARÁBOLA

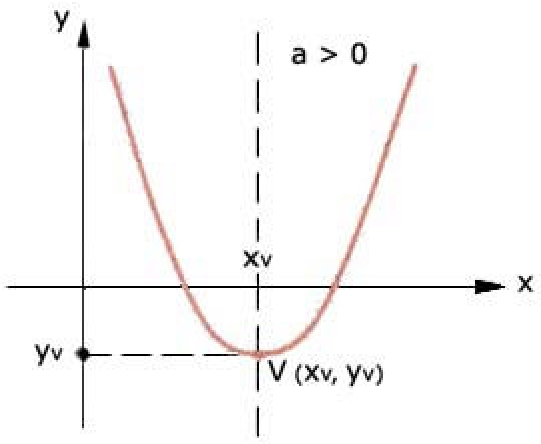
O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

O vértice de uma parábola é:

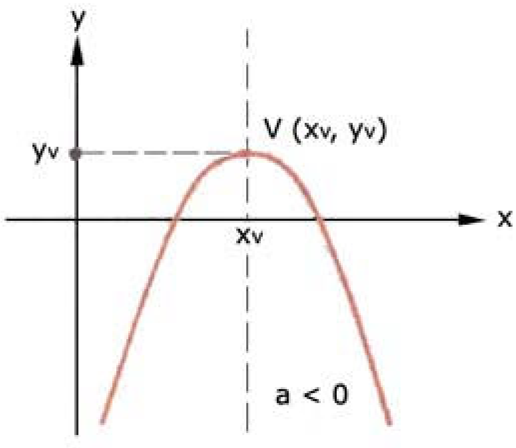
- o seu ponto mais alto (se $a > 0$) ou

- o seu ponto mais baixo (se $a < 0$)

1) Se $a > 0$, a concavidade da parábola é para cima.



2) Se $a < 0$, a concavidade da parábola é para baixo.



20.3.1. Coordenadas do vértice da parábola

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{(I)}$$

Sabemos que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo, (II) em (I), temos:

$$x_v = \frac{-\frac{b}{a}}{2}$$

Logo:

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

$$y_v = a.x_v^2 + b.x_v + c$$

$$y_v = a.\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b.\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$\boxed{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

20.4. DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

20.4.1. Domínio

$D = \mathbb{R}$

20.4.2. Imagem da função

1) Se a > 0, o valor mínimo de "y" é:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$\therefore \ \text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

2) Se a < 0, o valor máximo de "y" é:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$\therefore \ \text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

Exercícios:

1) Determinar as raízes, o vértice, o domínio e a imagem da função $y = x^2 - 2x - 15$

$x^2 - 2x - 15 \Leftrightarrow (x + 3) . (x - 5)$

$x_1 = -3$ $x_2 = 5$

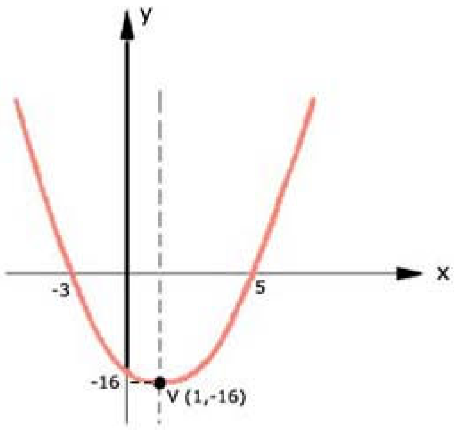
$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2} = 1$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 60 = 64$

$$y_v = -\frac{64}{4} = -16$$

V (1, - 16)



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{ y \in R \mid y \geq -16 \}$

2) Determinar as raízes, o vértice, o domínio e a imagem da função y = -x² + 6x - 9

$\Delta = 36 - 36 = 0$

Logo:

$x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{(-2)} = 3$

x = 3

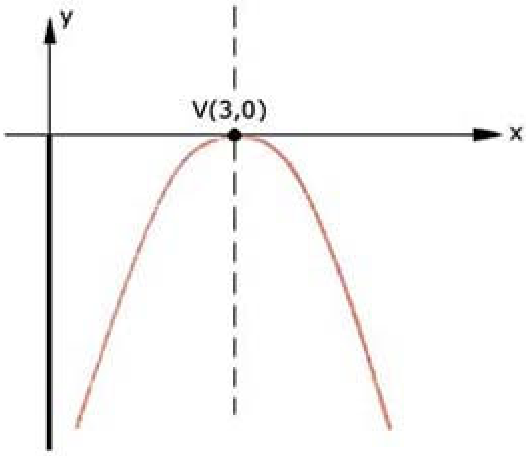
$x_v = -\dfrac{b}{2a} = 3$

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$

$\Delta = 0$

$y_v = 0$

V (3, 0)



D = ℝ

$Im = \{ y \in R \mid y \leq 0 \}$

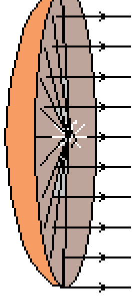
20.5. APLICAÇÃO PRÁTICA DAS PARÁBOLAS

A parábola é uma das figuras mais importantes da Matemática e sua aplicabilidade prática é muito grande. Ela pode ser encontrada em muitas estruturas, físicas ou teóricas no nosso dia-a-dia. Como exemplo, podemos citar as antenas parabólicas, os fogões solares, os estudos de balística e aplicações na economia.

20.5.1. Fogões solares

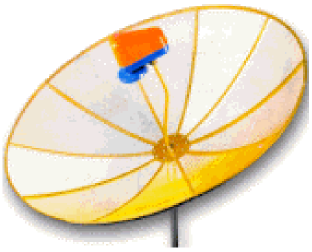
A parábola é a figura geométrica que apresenta como uma das suas caracterís-ticas o fato de refletir todos os raios que nela incidem para um único ponto, chamado de foco da parábola. Esta característica lhe confere muitas utilidades práticas, tais como a utilização da radiação solar para fins domésticos, por exemplo, para cozinhar alimentos. Para isso deve-se concentrar essa radiação em pequenas regiões, utilizando-se lentes ou espelhos. Os fogões solares utilizam espelhos parabólicos para a concentração do calor. Os raios solares incidem na superfície do espelho e ao se refletirem passam pelo foco do espelho. O calor concentrado neste ponto é suficiente para cozinhar alimentos.

20.5.2. Faróis de carros



Se colocarmos uma lâmpada no "foco" de uma parábola e esta emitir um conjunto de raios luminosos que venham a refletir sobre um espelho parabólico de um farol, os raios refletidos sairão todos paralelamente ao eixo que contem o "foco" e o vértice da parábola. Esta é uma propriedade geométrica importante ligada à Ótica que permite valorizar bastante o conceito de parábola.

20.5.3. Antenas parabólicas



Quando um satélite artificial colocado em uma órbita geoestacionária emite um conjunto de ondas eletromagnéticas, estas poderão ser captadas pela sua antena parabólica, uma vez que o feixe de raios atingirá a sua antena que tem formato parabólico e ocorrerá a reflexão desses raios exatamente para um único lugar, denominado o foco da parábola, onde estará um aparelho de recepção que converterá as suas ondas eletromagnéticas em um sinal que a sua TV poderá transformar em ondas que por sua vez significarão filmes, jornais e outros programas que você assiste normalmente.

20.5.4. Radares

Os radares usam as propriedades óticas da parábola, similares às citadas anteriormente para a antena parabólica e para os faróis.

20.5.5. Economia

Imaginemos que uma determinada companhia petrolífera destine determinada verba para a construção de oleodutos ou a compra de caminhões.

O dinheiro pode ser empregado apenas na compra de caminhões ou apenas na construção do oleoduto, ou ainda parte em cada um dos investimentos. Em eco-nomia, o gráfico originado do estudo destes investimentos chama-se curva de possi-bilidade de produção. Essa curva pode ser aproximada por uma função do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$, dando origem a um gráfico que será uma parábola.

Imaginemos agora que uma empresa venda seus produtos de modo que o pre-ço unitário dependa da quantidade de unidades adquiridas pelo comprador. Por e-xemplo, se, sob determinadas restrições, para cada x unidades vendidas o preço unitário é $40 - (x/5)$ reais, então a receita é dada por uma função do segundo grau, chamada função receita. Uma análise da função receita nos permite tomar decisões acertadas no sentido de otimizar a lucratividade da empresa.

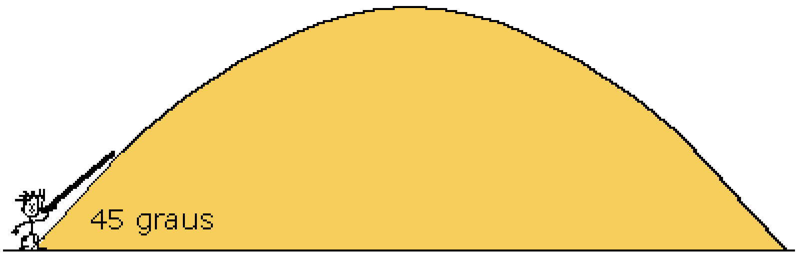
20.5.6. Lançamento de projéteis

A trajetória de um dardo ou de uma pedra lançada ao ar obliquamente ou de uma bala disparada de um canhão, desprezados os efeitos do ar, é uma parábola.

As funções do segundo grau e suas respectivas parábolas são fundamentais nos estudos de balística, ciência que se ocupa do estudo do movimento de projéteis. Conhecidas as velocidades do projétil e o ângulo de elevação, é possível determinar a equação da trajetória que é um arco de parábola.

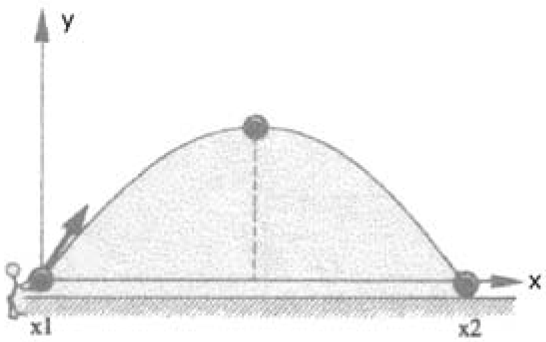
Para uma distância dada, sempre existem dois ângulos de elevação, que enviarão um projétil ao lugar desejado.

Na prática pode ser necessária a mais alta das duas trajetórias para superar um obstáculo, ou o menor deles a fim de se evitar os radares inimigos. A única exceção é o ângulo de 45º, com o qual atingimos o maior alcance possível.



Exercício:

Um corpo lançado, a partir do solo, descreve uma parábola de equação: $y = 120x - 4x^2$ ("x" e "y" em metros). Calcule o alcance do lançamento e a altura máxima atingida.



$- 4x^2 + 120x = 0$

$x \cdot (-4x + 120) = 0$

Logo: x1 = 0 e x2 = 30

O alcance do lançamento é a distância entre os pontos x1 e x2, logo:

alcance do lançamento = 30 metros

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

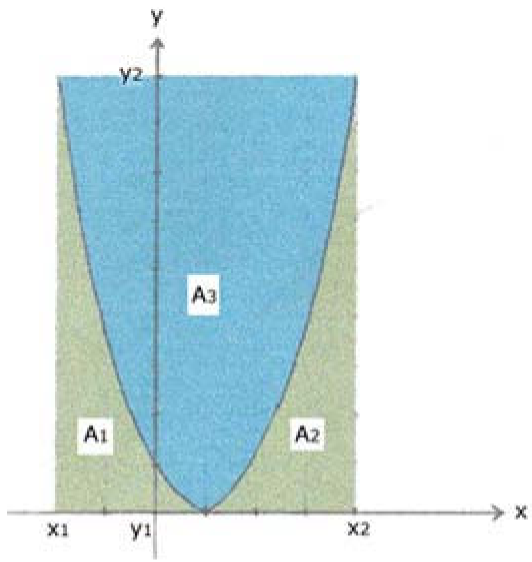
Δ= b² - 4ac = 120² - 4 . (- 4) . (0) = 120²

$$y_v = -\frac{120^2}{(-16)} = \frac{14400}{16} = 900$$

Ou seja:

altura máxima atingida = 900 metros

20.6. CÁLCULO DA ÁREA DE UMA PARÁBOLA



$$A_1 + A_2 = \int f(x)\,dx = \int (ax^2 + bx + c)\,dx = a\int_{x1}^{x2} x^2\,dx + b\int_{x1}^{x2} x\,dx + c\int_{x1}^{x2} dx$$

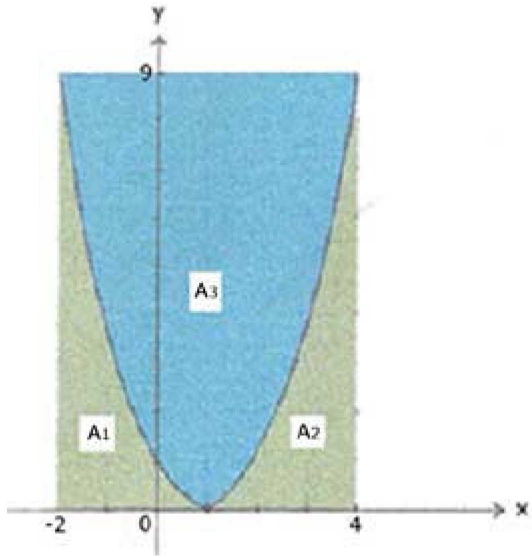
$$A_1 + A_2 = a.\frac{x^3}{3}\Big|_{x_1}^{x_2} + b.\frac{x^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2} + c.x\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$A_3 = [\,(x_2 - x_1)\,.\,(y_2 - y_1)\,] - (A_1 - A_2)$$

Observação: O uso de cálculo integral no cálculo de áreas será explicado com mais detalhes num capítulo à parte.

Exercício:

1) Calcular as áreas formadas pela parábola da equação: $y = x^2 - 2x + 1$ no intervalo ($x = -2$ a $x = 4$)



$$A_1 + A_2 = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{4} - 2.\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{4} + x\Big|_{-2}^{4}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{4^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} - 2.\left[\frac{4^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right] + [4 - (-2)]$$

$$A_1 + A_2 = \frac{64 + 8}{3} - 2.\frac{16 - 4}{2} + 6 = \frac{72}{3} - 12 + 6 = 24 - 12 + 6$$

$$A_1 + A_2 = 18$$

Logo:

$$A_1 = A_2 = 9$$

$$A_3 = (9 . 6) - 18 = 54 - 18$$

$$A_3 = 36$$

20.7. CÁLCULO DE EQUAÇÕES BIQUADRADAS

Equação biquadrada é toda equação do tipo: $y = ax^4 + bx^2 + c$ com $(a \neq 0)$ e $(b \neq 0)$

Regra:

1) Substituir "x^2" por "y" e "x^4" por "y^2".

2) Resolver a equação do 2º grau obtendo "y1" e "y2".

3) Determinar os valores de "x" usando as igualdades:

"$x^2 = y$" e "$x^4 = y^2$"

Exercícios:

1) Resolver a equação: $y = x^4 - 5x^2 + 4$

$x^2 = y$

Logo:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0$

$(y - 1) . (y - 4) = 0$

$\underline{y_1 = 1}$ e $\underline{y_2 = 4}$

$y_1 = 1$, logo: $x^2 = 1$

$x = \pm \sqrt{1}$

$\mathbf{x_1 = 1}$ e $\mathbf{x_2 = -1}$

$y_2 = 4$, logo: $x^2 = 4$

$x = \pm \sqrt{4}$

$\mathbf{x_3 = 2}$ e $\mathbf{x_4 = -2}$

2) Resolver a equação: $y = x^4 - 5x^2 + 21$

$x^2 = y$

Logo:

$x^4 - 5x^2 + 21 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 21 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \,.\, (1).\,(21) = 25 - 84 = -59$

$\Delta < 0$, logo:

O problema não tem solução real

3) Resolver a equação: $y = x^4 - 8x^2 - 9$

$x^2 = y$

Logo:

$x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 8y - 9 = 0$

$(y - 9) \,.\, (y + 1) = 0$

$\underline{y_1 = 9}$ e $\underline{y_2 = -1}$

$y_1 = 9$, logo: $x^2 = 9$

$x = \pm \sqrt{9}$

$\mathbf{x_1 = 3}$ e $\mathbf{x_2 = -3}$

$y_2 = -1$, logo: $x^2 = -1$

$x = \pm \sqrt{-1}$

Ou seja: Não tem raízes reais

20.8. ESTUDO DO SINAL PARA A FUNÇÃO DO 2º GRAU

Consideremos a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ e vamos resolver o seguinte problema:

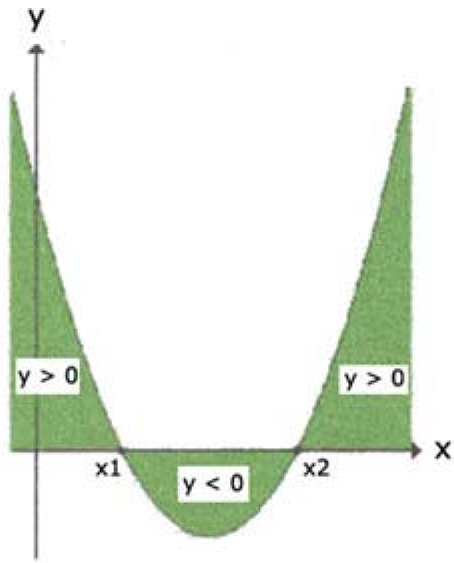
Para que valores de "x" temos: $y > 0$, $y = 0$ e $y < 0$?

Resolver este problema significa determinar o sinal da função $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) para cada "x" real. Esses conceitos serão importantes aos estudarmos inequações do 2º grau.

20.8.1. 1º caso: $\Delta > 0$

Neste caso a função admite 2 raízes reais e distintas: x_1 e x_2 (vamos supor que $x_1 > x_2$).

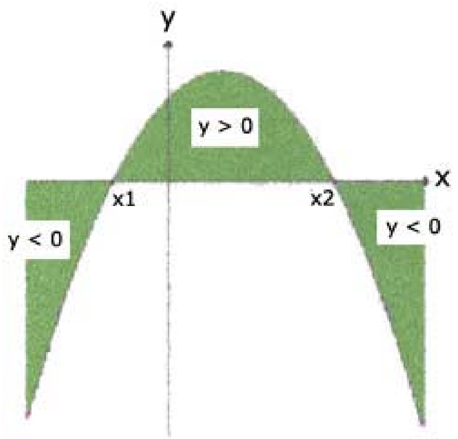
1) a > 0



Como podemos observar acima:

$y > 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$
$y = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$
$y < 0$ para $x_1 < x < x_2$

2) a < 0



Como podemos observar acima:

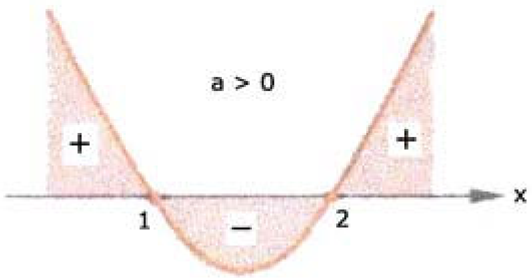
$y > 0$ para $x_1 < x < x_2$
$y = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$
$y < 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$

<u>Exercícios</u>:

1) Estudar o sinal de $y = x^2 - 3x + 2$

$y = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow y = (x - 2) . (x - 1)$

$\mathbf{x_1 = 1}$ e $\mathbf{x_2 = 2}$ $(a > 0)$



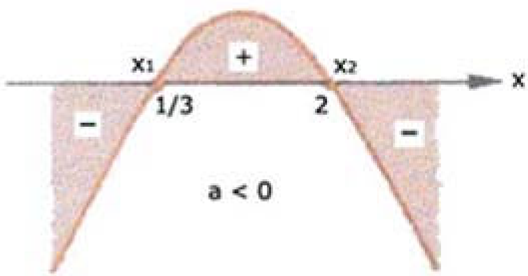
$y > 0$ para $x < 1$ ou $x > 2$
$y = 0$ para $x = 1$ ou $x = 2$
$y < 0$ para $1 < x < 2$

2) Estudar o sinal de $y = -3x^2 + 7x - 2$

$\Delta = (7)^2 - 4 . (-3) . (-2) = 49 - 24 = 25$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+5}{-6} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-5}{-6} = 2$$

$x_1 = 1/3$ e **$x_2 = 2$** $(a < 0)$

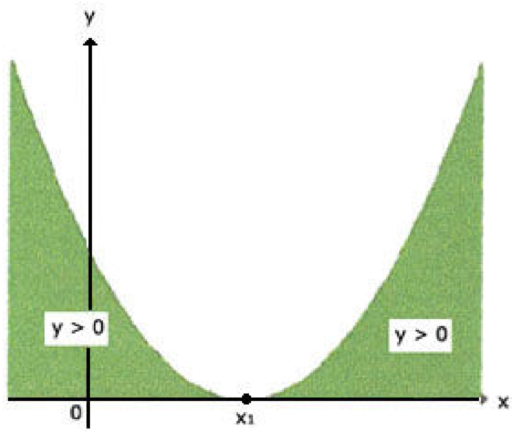


$y > 0$ para $1/3 < x < 2$
$y = 0$ para $x = 1/3$ ou $x = 2$
$y < 0$ para $x < 1/3$ ou $x > 2$

20.8.2. 2º caso: $\Delta = 0$

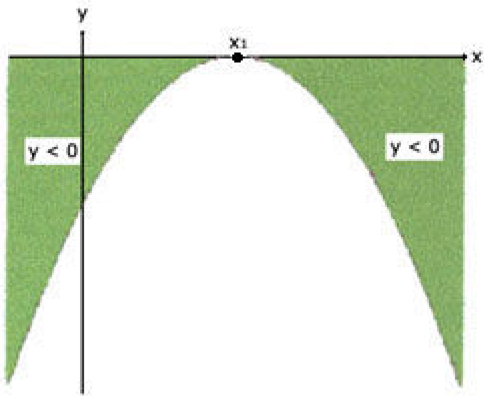
Admite uma única raiz real: x_1

1) a > 0



$y > 0$ para $\forall x, x \in \mathbb{R}$ e $x = x_1$
$y = 0$ para $x = x_1$

2) a < 0



$y < 0$ para $\forall x,\ x \in \mathbb{R}$ e $x = x_1$ $y = 0$ para $x = x_1$

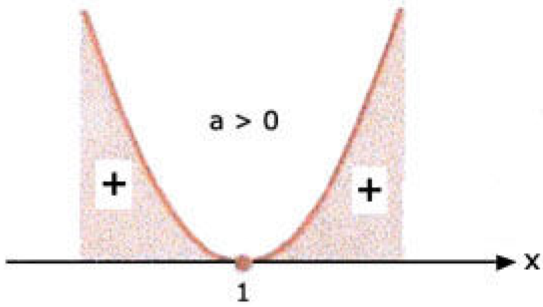
<u>Exercícios</u>:

1) Estudar o sinal de $y = x^2 - 2x + 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (1).(1) = 4 - 4 = 0$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2} = 1$$

e temos: $a > 0$, logo:



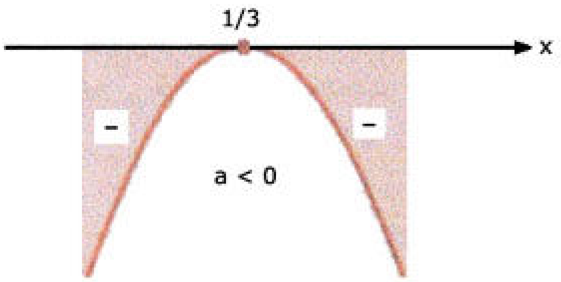
$y > 0$ para $\forall x,\ x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 1$ $y = 0$ para $x = 1$

2) Estudar o sinal de $y = -9x^2 + 6x - 1$

$\Delta = (6)^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-1) = 36 - 36 = 0$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$$

$\mathbf{x_1 = 1/3}$ $(a < 0)$

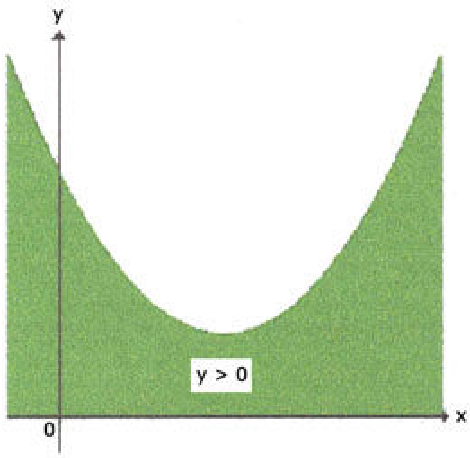


$y < 0$ para $\forall x, x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 1/3$ $y = 0$ para $x = 1/3$

20.8.3. 3º caso: $\Delta < 0$

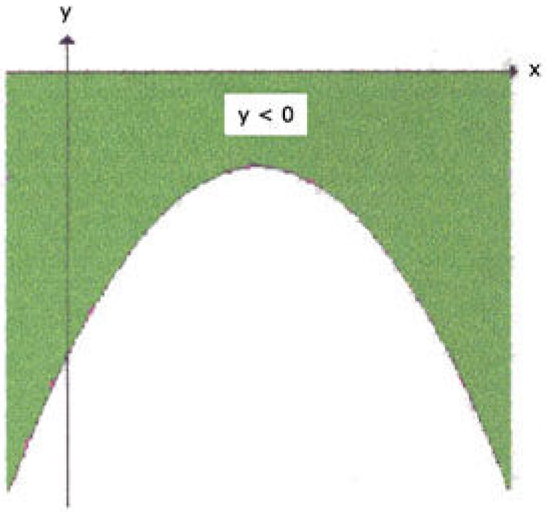
A função não possui raízes reais.

1) a > 0



$y > 0$ para $\forall x, x \in \mathbb{R}$

2) a < 0



$y < 0$ para $\forall x, x \in \mathbb{R}$

Exercícios:

1) Estudar o sinal de $y = x^2 + 3x + 4$

$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot (1).(4) = 9 - 16 = -7$

$(\Delta < 0)\ (a > 0)$

$y > 0$ para $\forall x, x \in \mathbb{R}$

2) Estudar o sinal de $y = -3x^2 + 2x - 1$

$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = 4 - 12 = -8$

$\Delta < 0)\ (a < 0)$

$y < 0$ para $\forall x, x \in \mathbb{R}$

AULA 21 - INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

Inequação é toda sentença aberta que relaciona duas expressões através dos sinais: >, <, ≥ ou ≤

Para resolvermos uma inequação do 2º grau, devemos fazer um estudo do sinal, no sentido de determinarmos para que valores de "x", temos y > 0, y = 0 ou y < 0.

Exercícios:

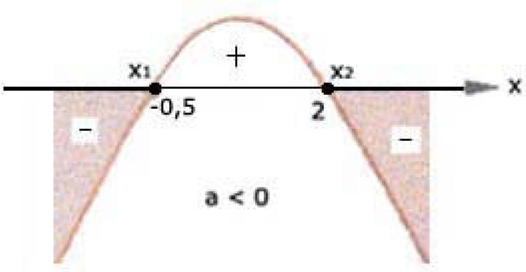
1) Resolver a inequação $-2x^2 + 5x - 2 \leq 0$

$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = 25 - 16 = 9$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+3}{-4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-3}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$\mathbf{x_1 = -0,5}$ e $\mathbf{x_2 = 2}$ $(a < 0)$



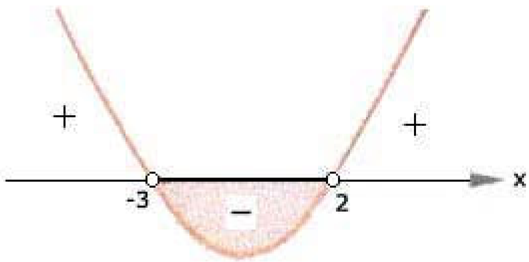
Observação: As bolinhas cheias indicam que os referidos pontos (-0,5 e 2) se incluem no intervalo da resposta.

$$\boxed{S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2 \right\}}$$

2) Resolver a inequação $x^2 + x - 6 < 0$

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 3).(x - 2) = 0$

$\mathbf{x_1 = -3}$ e $\mathbf{x_2 = 2}$ $(a > 0)$



Observação: As bolinhas vazadas indicam que os referidos pontos (-3 e 2) não se incluem no intervalo da resposta.

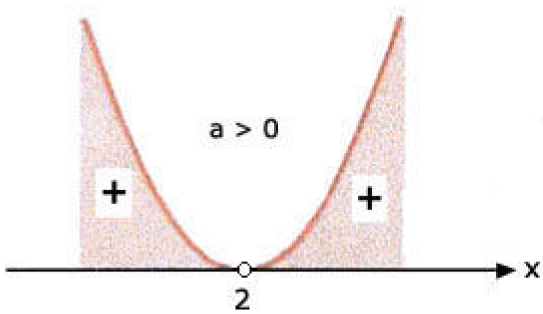
$$\boxed{S = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \}}$$

3) Resolver a inequação $x^2 - 4x + 4 > 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \,.\, (1) \,.\, (4) = 16 - 16 = 0$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

$(a > 0)$



$$\boxed{S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \}}$$

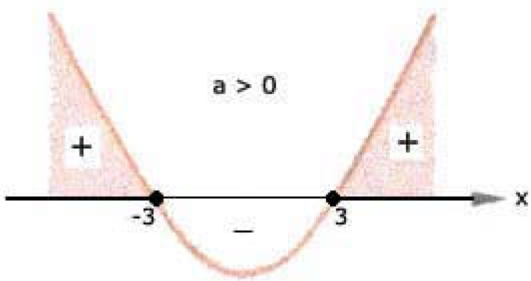
4) Resolver a inequação $x^2 - 9 \geq 0$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9$

$\mathbf{x_1 = -3}$ e $\mathbf{x_2 = 3}$ (a > 0)

(a > 0)

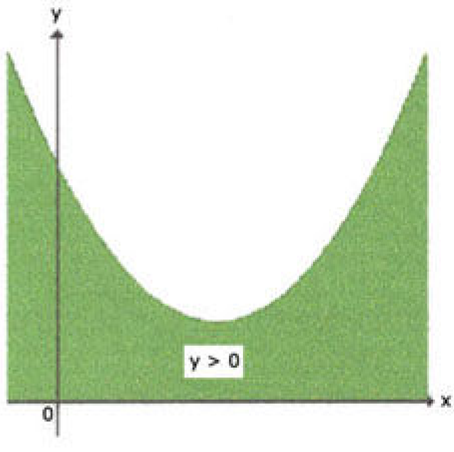


$$\boxed{S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3 \}}$$

5) Resolver a inequação $x^2 + x + 2 > 0$

$\Delta = (1)^2 - 4 . (1) . (2) = 1 - 8 = -7$

$\Delta < 0$ (a > 0)



$$\boxed{S = \mathbb{R}}$$

6) Resolver a inequação $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leq - 5x$

Neste caso temos que resolver duas inequações:

1°) $2x^2 - 3 > x^2 + 1$

2°) $2x^2 - 3 \leq - 5x$

Então, vamos resolver:

1°) $2x^2 - 3 > x^2 + 1$

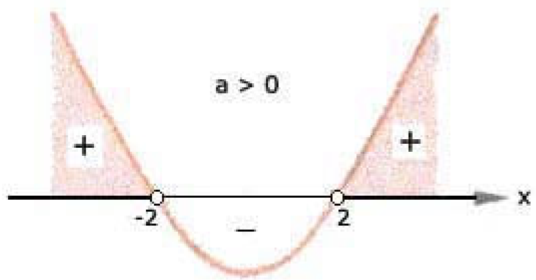
$2x^2 - x^2 > 1 + 3$

$x^2 - 4 > 0$

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$\mathbf{x_1 = - 2}$ e $\mathbf{x_2 = 2}$ $(a > 0)$



$S_1 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2 \}$

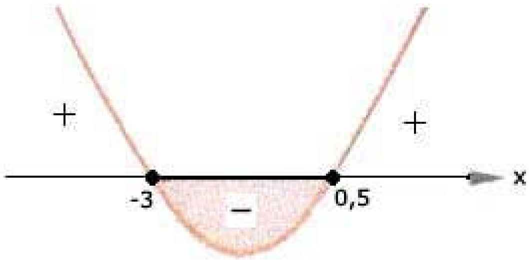
2°) $2x^2 - 3 \leq - 5x$

$2x^2 + 5x - 3 \leq 0$

$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$

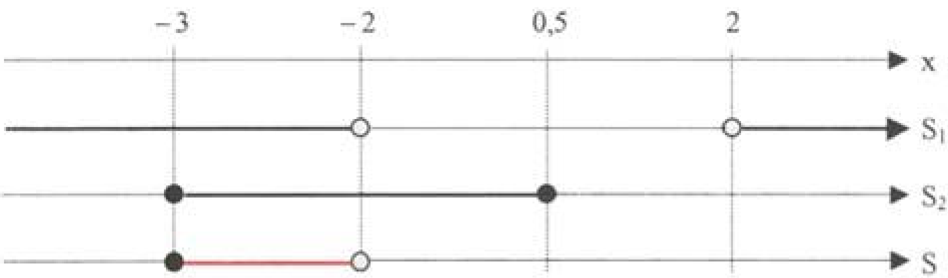
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$



$S_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 0{,}5 \}$

A solução do problema é a intersecção de S1 com S2



$$\boxed{S = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x < 2 \}}$$

7) Determine os valores reais de "m" para os quais $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ admite duas raízes reais e diferentes.

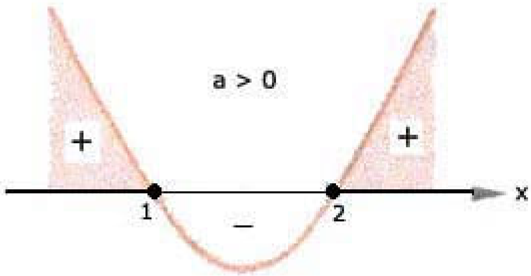
$\Delta > 0$ $b^2 - 4ac > 0$

$4m^2 - 4 . (3m - 2) > 0$ $4m^2 - 12m + 8 > 0$

dividindo tudo por 4: $m^2 - 3m + 2 > 0$

$(m - 1) . (m - 2) > 0$

logo, as raízes são: $\mathbf{m_1 = 1}$ e $\mathbf{m_2 = 2}$ $(a > 0)$



$S = \{ m \in \mathbb{R} \mid m < 1 \text{ ou } m > 2 \}$

8) Determine os valores reais de "m" para os quais $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ não admite raízes reais.

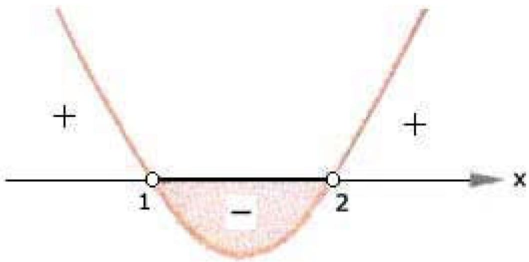
$\Delta < 0 \qquad b^2 - 4ac < 0$

$4m^2 - 4 \cdot (3m - 2) < 0 \qquad 4m^2 - 12m + 8 < 0$

dividindo tudo por 4: $m^2 - 3m + 2 < 0$

$(m - 1) \cdot (m - 2) < 0$

logo, as raízes são: $\mathbf{m_1 = 1}$ e $\mathbf{m_2 = 2}$ $(a > 0)$



$S = \{ m \in \mathbb{R} \mid 1 < m < 2 \}$

AULA 22 - INEQUAÇÕES PRODUTO E QUOCIENTE

22.1. INEQUAÇÃO PRODUTO

É uma inequação onde ocorre o produto de duas ou mais funções.

<u>Exercícios</u>:

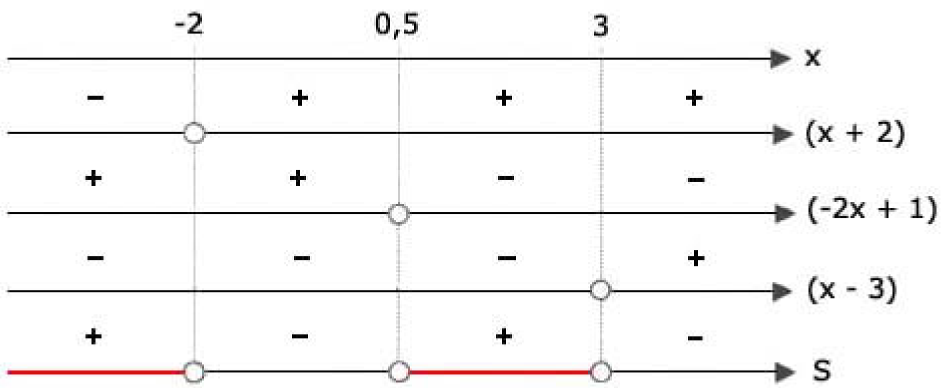
1) Resolver a inequação $(x - 3) . (- 2x + 1) . (x + 2) > 0$

Raízes:

$(x - 3) = 0 \qquad x = 3$

$(-2x + 1) = 0 \qquad x = 0,5$

$(x + 2) = 0 \qquad x = - 2$



$$\boxed{S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 0,5 < x < 3 \}}$$

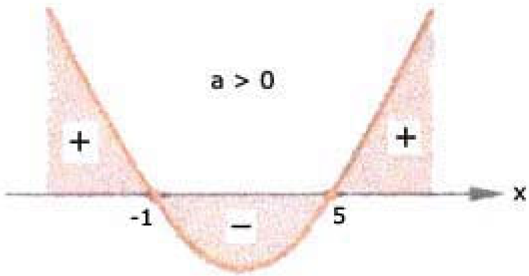
2) Resolver a inequação $(x^2 - 4x - 5) . (-3x + 2) \leq 0$

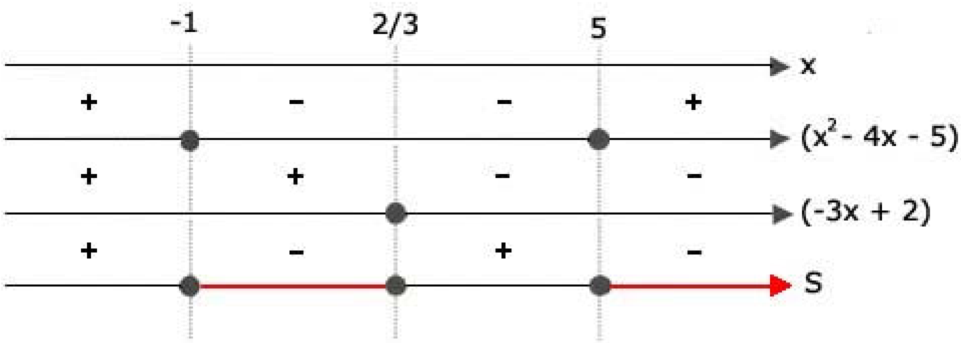
Raízes:

$(-3x + 2) = 0 \qquad -3x = -2 \qquad x = \frac{2}{3}$

$x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad (x + 1) . (x - 5) = 0 \qquad$ **$x_1 = -1$** e **$x_2 = 5$**

(a < 0)





$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq \frac{2}{3} \text{ ou } x \leq 5 \right\}$$

22.2. INEQUAÇÃO QUOCIENTE

É a inequação onde ocorre a divisão entre duas funções.

Exercícios:

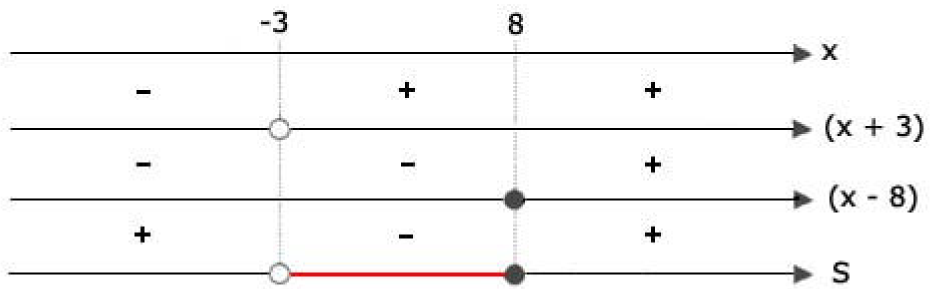
1) Resolver a inequação $\dfrac{2x-5}{x+3} \leq 1$

$$\frac{2x-5}{x+3} \leq 1 \iff \frac{2x-5}{x+3} - 1 \leq 0$$

$$\frac{2x-5}{x+3} - \frac{x+3}{x+3} \leq 0 \qquad \frac{2x-5-x-3}{x+3} \leq 0 \qquad \frac{x-8}{x+3} \leq 0$$

Observação: O denominador deve ser diferente de zero, pois não existe divisão por zero, logo:

$$x + 3 \neq 0 \iff x \neq -3$$



$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 8\}}$$

Observação: Não se deve fazer a seguinte transformação:

$$\frac{2x-5}{x+3} \leq 1 \qquad 2x - 5 \leq x + 3$$

Pois na multiplicação por (x + 3) mantendo o sentido da desigualdade, admite-se (x + 3) > 0 para todo "x" real, o que é falso.

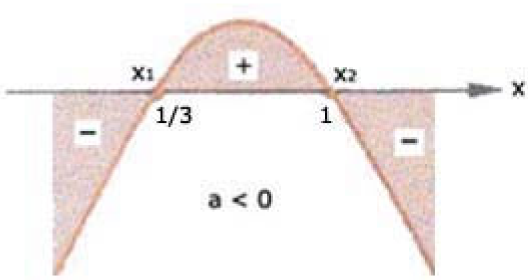
2) Resolver a inequação $\dfrac{-3x^2+4x-1}{-2x+3} \geq 0$

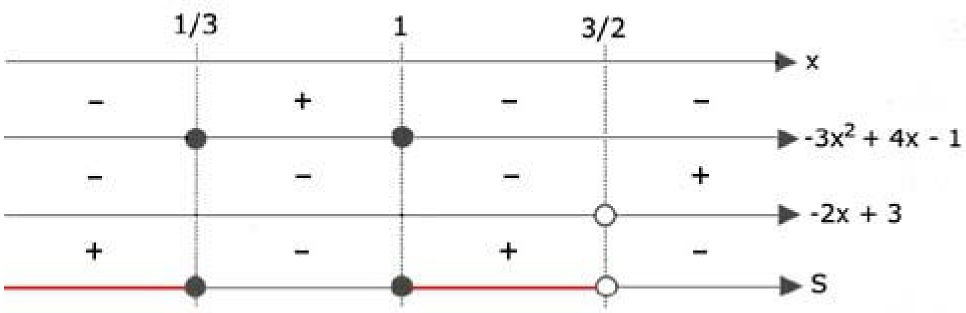
$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = 16 - 12 = 4$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

com (a < 0)





$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } 1 \leq x < \frac{3}{2} \right\}$$

3) Resolver a inequação $\dfrac{x+1}{x-3} \geq -x+2$

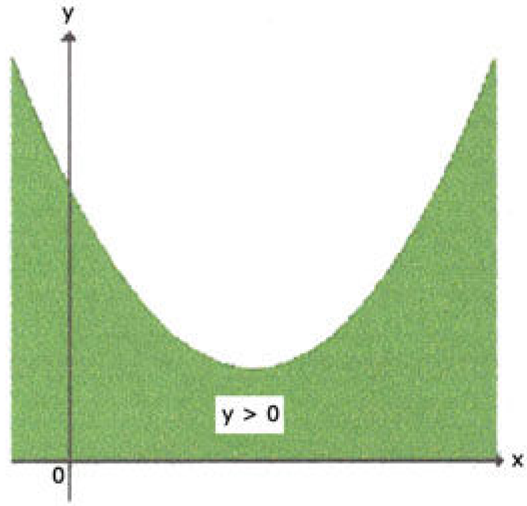
$$\frac{x+1}{x-3} - (-x+2) \geq 0 \qquad \frac{x+1}{x-3} + \frac{(x-2).(x-3)}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{x + 1 + (x^2 - 5x + 6)}{x - 3} \geq 0 \qquad \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 3} \geq 0$$

- raízes:

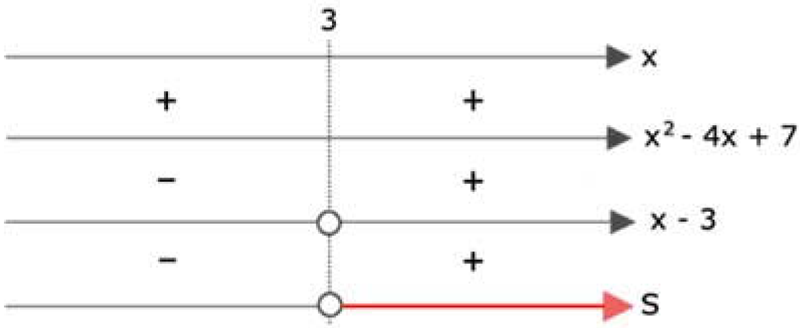
$x^2 - 4x + 7 = 0$ $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 16 - 28 = -12$

Portanto não admite raízes reais



Observação: O denominador deve ser diferente de zero, pois não existe divisão por zero, logo:

$$x - 3 \neq 0 \iff x \neq 3$$



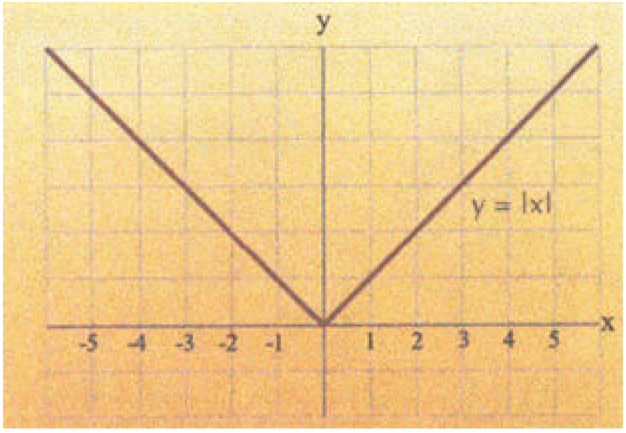
$$\boxed{S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \}}$$

AULA 23 - FUNÇÃO MODULAR

É a função do tipo: $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, onde:

$f(x) = x$, se $x \geq 0$

$f(x) = -x$, se $x < 0$



Exercícios:

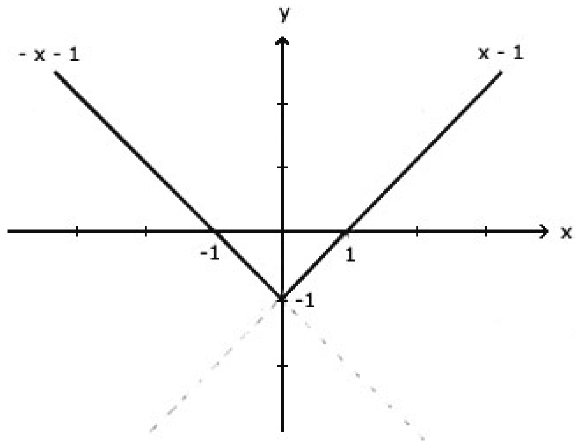
1) Represente graficamente a função $y = |x| - 1$ e dê o seu domínio e imagem.

$|x| = x$, se $x \geq 0$

$|x| = -x$, se $x < 0$

$|x| - 1 = x - 1$, se $x \geq 0$

$|x| - 1 = -x - 1$, se $x < 0$



D = ℝ

Im = { y ∈ ℝ| y ≥ - 1 }

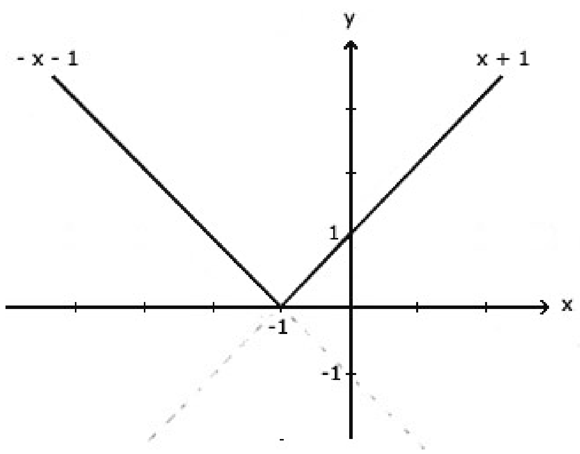
2) Represente graficamente a função y = | x + 1 | e dê o seu domínio e imagem.

| x + 1 | = (x + 1) = x + 1, se (x + 1) ≥ 0 ou x ≥ - 1

| x + 1 | = - (x + 1) = - x - 1, se (x + 1) < 0 ou x < - 1

| x + 1 | = x + 1, se x ≥ - 1

| x + 1 | - x - 1, se x < - 1



D = ℝ

Im = { y ∈ ℝ| y ≥ 0 }

3) Represente graficamente a função y = - | x + 1 | e dê o seu domínio e imagem.

$| x + 1 | = (x + 1),\quad$ se $(x + 1) \geq 0$ ou $x \geq - 1$

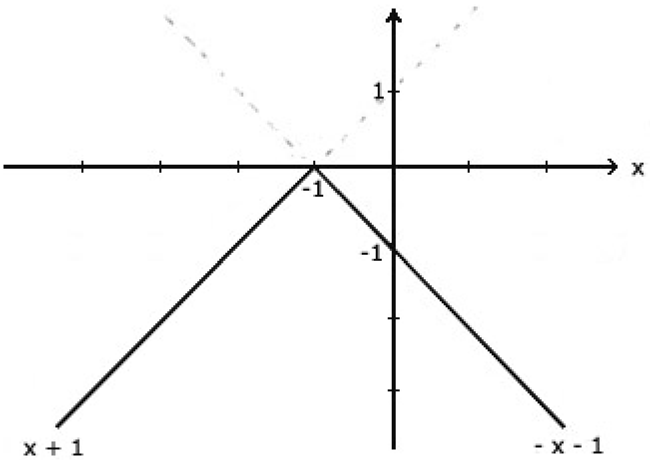
$| x + 1 | = - (x + 1) = - x - 1,\quad$ se $(x + 1) < 0$ ou $x < - 1$

$- | x + 1 | = - (x + 1),\quad$ se $x \geq - 1$

$- | x + 1 | = - (- x - 1),\quad$ se $x < - 1$

$- | x + 1 | = - x - 1,\quad$ se $x \geq - 1$

$- | x + 1 | = x + 1,\quad$ se $x < - 1$



D = $\mathbb{R}$

Im = $\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0 \}$

4) Represente graficamente a função y = | x - 1 | - 1 e dê o seu domínio e imagem.

$| x - 1 | = (x - 1) = x - 1,$ se $x - 1 \geq 0$ ou $x \geq 1$

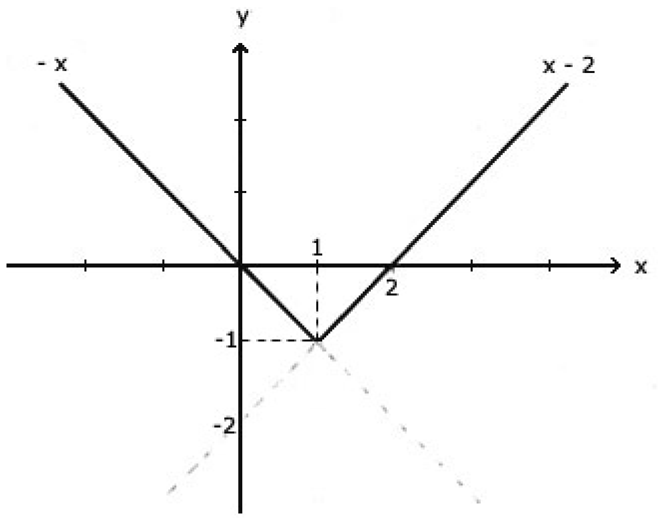
$| x - 1 | = - (x - 1) = - x + 1,$ se $x - 1 < 0$ ou $x < 1$

$| x - 1 | - 1 = x - 1 - 1,$ se $x \geq 1$

$| x - 1 | - 1 = - x + 1 - 1,$ se $x < 1$

$| x - 1 | - 1 = x - 2,$ se $x \geq 1$

$| x - 1 | - 1 = - x,$ se $x < 1$



D = $\mathbb{R}$

Im = { $y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1$ **}**

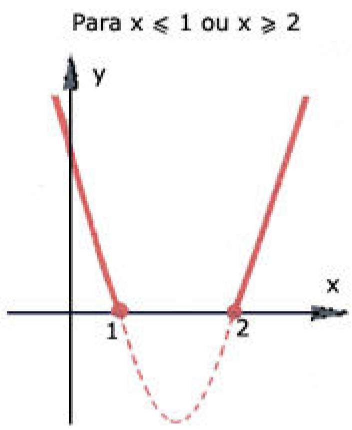
5) Represente graficamente a função $y = | x^2 - 3x + 2 |$ e dê o seu domínio e imagem.

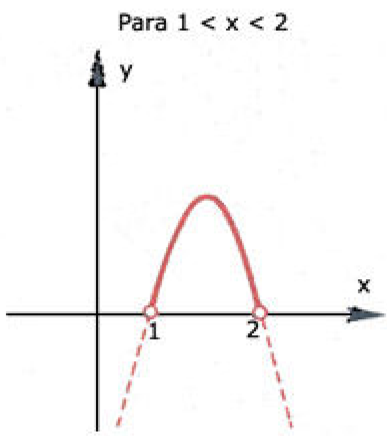
$| x^2 - 3x + 2 | = x^2 - 3x + 2,$ se $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$| x^2 - 3x + 2 | = -(x^2 - 3x + 2) = -x^2 + 3x - 2,$ se $x^2 - 3x + 2 < 0$

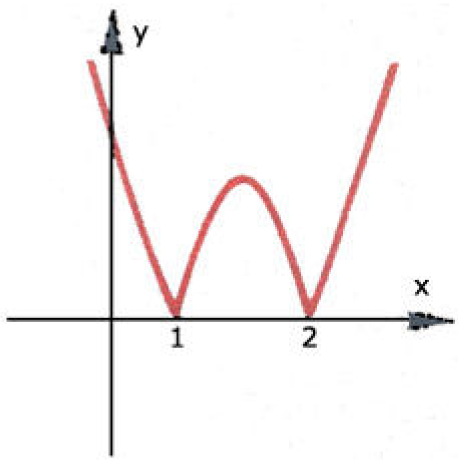
$| x^2 - 3x + 2 | = x^2 - 3x + 2 ,$ para $x \leq 1$ ou $x \geq 2$

$| x^2 - 3x + 2 | = -x^2 + 3x - 2,$ para $1 < x < 2$





Portanto, o resultado é o seguinte gráfico:



D = $\mathbb{R}$

Im = $\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \}$

6) Represente graficamente a função y = | x | - | x - 2 | e dê o seu domínio e imagem.

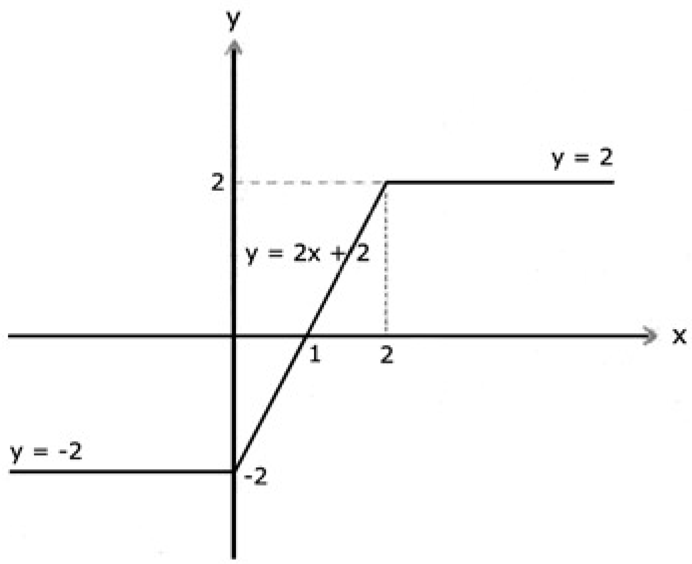
$| x | = x, \quad$ se $x \geq 0$

$| x | = -x, \quad$ se $x < 0$

$| x - 2 | = (x - 2) = x - 2, \quad$ se $(x - 2) \geq 0$ ou $x \geq 2$

$| x - 2 | = -(x - 2) = -x + 2, \quad$ se $(x - 2) < 0$ ou $x < 2$

	0	2	x
- x	x	x	| x |
- x + 2	- x + 2	x - 2	| x - 2 |
- 2	2x - 2	2	| x | - | x - 2 |



D = ℝ

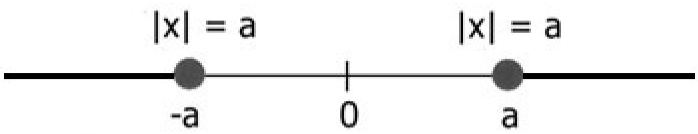
Im = { y ∈ ℝ| y ≥0}

AULA 24 - EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES MODULARES

24.1. EQUAÇÕES MODULARES

Se $a > 0$, vale a seguinte propriedade:

$$\boxed{|\ x\ | = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a}$$



Exemplo: $|\ x\ | = 4 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$

<u>Exercícios</u>:

1) Resolver a equação: $|\ x - 6\ | = 4$

$x - 6 = 4$ $\quad x = 4 + 6$ $\quad x = 10$

$x - 6 = -4$ $\quad x = -4 + 6$ $\quad x = 2$

S = {2, 10}

2) Resolver a equação $| x^2 - 5x + 3| = 3$

$x^2 - 5x + 3 = 3 \quad x^2 - 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = 5$

$x^2 - 5x + 3 = -3 \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$ ou $x = 3$

S = {0, 2, 3, 5}

3) Resolver a equação $|x|^2 + 3\,|x| - 4 = 0$

Fazendo: $| x | = y \quad (y \geq 0)$, temos:

$y^2 + 3y - 4 = 0 \quad (y - 1) \cdot (y + 4) = 0$

$y_1 = 1$ e $y_2 = -4$ (este valor não convém, pois devemos ter $y \geq 0$)

$| x | = y \quad | x | = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ ou $x = -1$

S = {- 1, 1}

4) Resolver a equação $| 3x - 5 | = | x + 3 |$

$3x - 5 = x + 3 \quad 2x = 8 \quad x = 4$

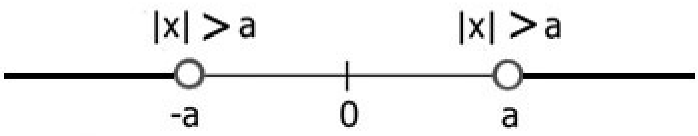
$3x - 5 = -(x + 3) = -x - 3 \quad 4x = 2 \quad x = 1/2$

S = {4, 1/2}

24.2. INEQUAÇÕES MODULARES

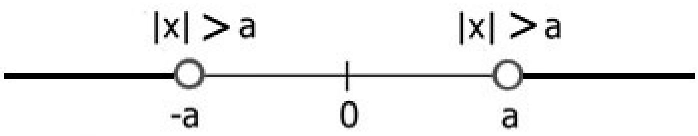
Se a > 0, vale a seguinte propriedade:

$$\boxed{|\ x\ | > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a}$$



Exemplo: | x | > 5 ⇔ x < - 5 ou x > 5

$$\boxed{|\ x\ | < a \Leftrightarrow -a < x < a}$$



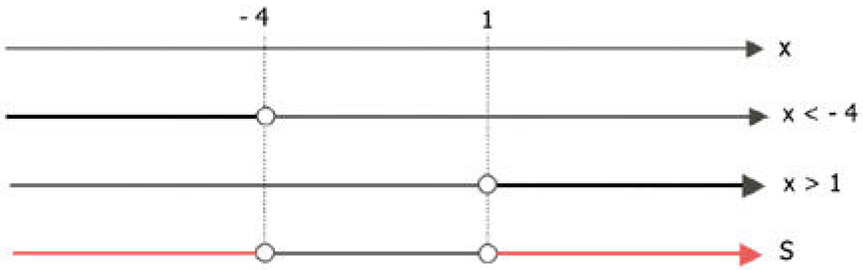
Exemplo: | x | < 2 ⇔ - 2 < x < 2

Exercícios:

1) Resolver a equação: | 2x + 3 | > 5

2x + 3 < - 5 2x < - 8 x < - 4

2x + 3 > 5 2x > 2 x > 1



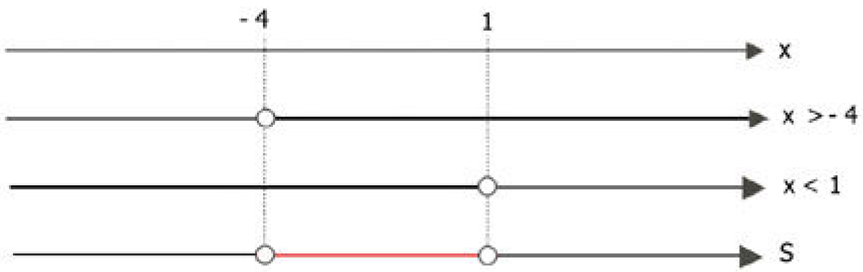
S = {x ∈ ℝ| x < - 4 ou x > 1}

2) Resolver a equação: | 2x + 3 | < 5

| 2x + 3 | < 5 - 5 < 2x + 3 < 5

2x + 3 > - 5 2x > - 8 x > - 4 ou

2x + 3 < 5 2x < 2 x < 1



S = {x ∈ ℝ| -4 < x < 1}