GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI

COMPLEMENTO PARA
O PROFESSOR

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR 1

CONJUNTOS E FUNÇÕES

ATUAL
EDITORA

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 1, Conjuntos e Funções, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos a sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos à professora Irene Torrano Filisetti a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

Sumário

Capítulo I	— Noções de lógica	1
Capítulo II	— Conjuntos	1
Capítulo III	— Conjuntos numéricos	5
Capítulo IV	— Relações	12
Capítulo V	— Introdução às funções	12
Capítulo VI	— Função constante — Função afim	15
Capítulo VII	— Funções quadráticas	21
Capítulo VIII	— Função modular	41
Capítulo IX	— Outras funções elementares	47
Capítulo X	— Função composta — Função inversa	49
Apêndice I	— Equações irracionais	59
Apêndice II	— Inequações irracionais	72

Capítulo I — Noções de lógica

6.

r	s	r ∨ s
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	(r ∨ s)	p → (r ∨ s)	
V	V	V	
V	F	F	①
F	V	V	
F	F	V	

① $p \to (r \vee s)$ é falsa, por hipótese.

Então, isso significa que p é V, $(r \vee s)$ é F, ou seja, r e s são F.
Como o condicional $(q \wedge \sim s) \leftrightarrow p$ é V e p é V, então $q \wedge \sim s$ é V; portanto, q é V.

Capítulo II — Conjuntos

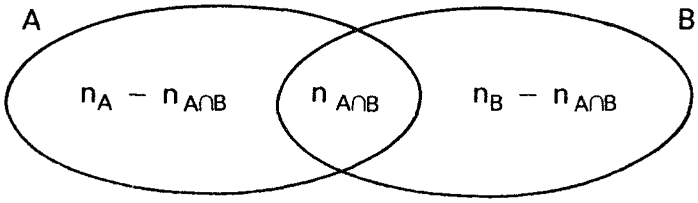
33. $\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow e \in X$
$\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\} \Rightarrow a \in X, e \in X$
$\{b, c, d\} \cap X = \{c\} \Rightarrow c \in X, b \notin X$ e $d \notin X$
$X = \{a, c, e\}$

34. $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$
$A \cap B = \{2, 3, 8\}$
$A \cap C = \{2, 7\} \Rightarrow \begin{cases} \text{2 e 7 pertencem a A} \\ \textit{2 e 7 pertencem a C} \end{cases}$
$B \cap C = \{2, 5, 6\} \Rightarrow \begin{cases} \text{2, 5 e 6 pertencem a B} \\ \textit{2, 5 e 6 pertencem a C} \end{cases}$
$A \cup B = \{1, 2, \ldots, 7, 8\} \Rightarrow$ 9 e 10 não pertencem a $A \cup B$ e, então, *9 e 10 pertencem a C*. Portanto, $C = \{2, 5, 6, 7, 9, 10\}$.

37. Como $(A \cap B) \cap C$ é subconjunto de A, temos $n(A \cap B \cap C) \leqslant 2$; então o número máximo é *2*.

45. $y + 1 \leqslant 6 \Rightarrow y \leqslant 5 \Rightarrow F = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow \overline{F} = \{6, 7, 8\}$

48.



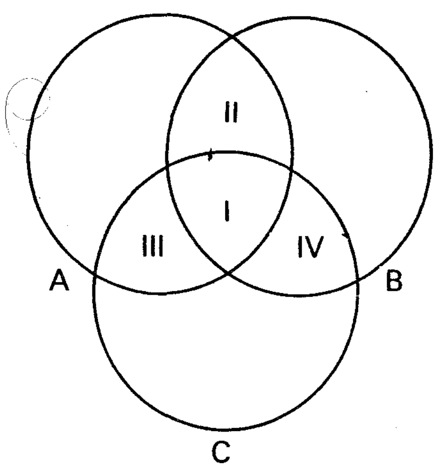
$$n_{A \cup B} = \underbrace{[n_A - n_{A \cap B}]}_{①} + \underbrace{n_{A \cap B}}_{②} + \underbrace{[n_B - n_{A \cap B}]}_{③}$$

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$$

Obs.: ① elementos que pertencem só ao conjunto *A*
② elementos que pertencem a *A* e *B*
③ elementos que pertencem só ao conjunto *B*

49. $n_{(A \cup B)} = n_A + n_B - n_{(A \cap B)}$
$n_{(A \cup B)} = 4 + 5 - 3 = 6$
Então, o número de subconjuntos de $A \cup B$ é $2^6 = 64$.

50.



(I) $n_{A \cap B \cap C}$

(II) $n_{A \cap B} - n_{A \cap B \cap C}$

(III) $n_{A \cap C} - n_{A \cap B \cap C}$

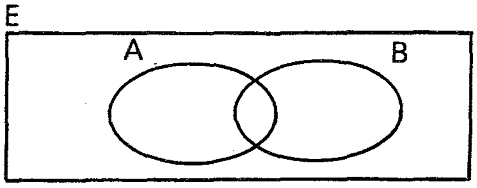
(IV) $n_{B \cap C} - n_{A \cap B \cap C}$

$$n_{A \cup B \cup C} = n_A + \{n_B - (II) - (I)\} + \{n_C - (III) - (IV) - (I)\}$$

$$n_{A \cup B \cup C} = n_A + \{n_B - [n_{A \cap B} - n_{A \cap B \cap C}] - n_{A \cap B \cap C}\} + $$
$$+ \{n_C - [n_{A \cap C} - n_{A \cap B \cap C}] - [n_{B \cap C} - n_{A \cap B \cap C}] - n_{A \cap B \cap C}\}$$

$$n_{A \cup B \cup C} = n_A + n_B + n_C - n_{A \cap B} - n_{A \cap C} - n_{B \cap C} + n_{A \cap B \cap C}$$

52. E: conjunto dos alunos da escola ($n_E = 415$)
A: conjunto dos alunos que estudam inglês ($n_A = 221$)
B: conjunto dos alunos que estudam francês ($n_B = 163$)



$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B} = $$
$$= 221 + 163 - 52 = 332$$

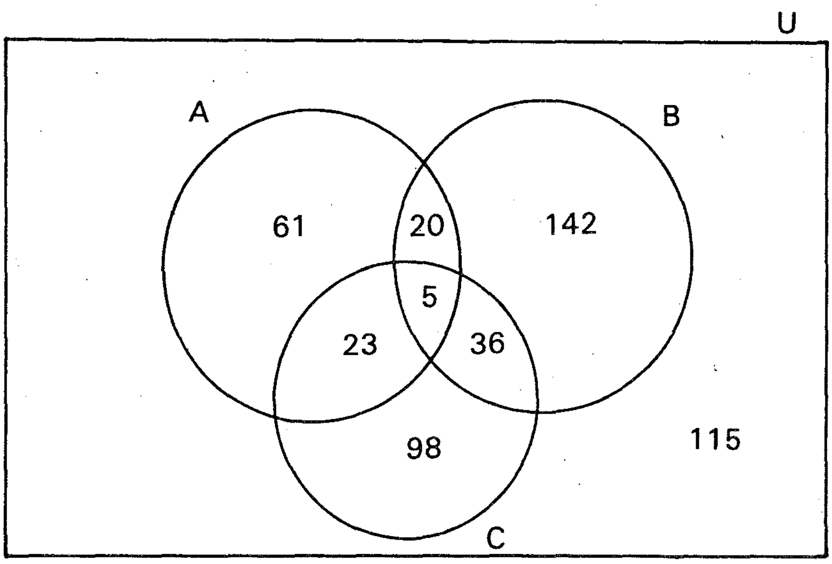
$$n_{\overline{A \cup B}} = n_E - n_{A \cup B} = 415 - 332 = 83$$

53. $[P' \cup (P \cap Q)] = \underbrace{(P' \cup P)}_{\text{conj. universo}} \cap (P' \cup Q) = P' \cup Q$

54. Como $C \subset B$, temos $n(B \cup C) = n(B) = 16$ e daí:
a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$24 = n(A) + 16 - 4$
então, $n(A) = 12$.
Portanto: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 12 - 4 = 8$.
b) $n(A \cap B \cap C) = n(A) - n(A - C) = 12 - 11 = 1$
c) $n[B - (C \cup A)] = n(A \cup B) - n(A) - n(C) + n(A \cap B \cap C) = 24 - 12 - 6 + 1 = 7$
d) $n[(A \cap B) - C] = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 4 - 1 = 3$
e) $n[B - (A \cap B)] = n(B) - n(A \cap B) = 16 - 4 = 12$

55. $\overline{A} = \{e, f, g, h, i\} \Rightarrow e, f, g, h, i \notin A$
$A \cap B = \{c, d\} \Rightarrow c, d \in A$ e $c, d \in B$
$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\} \Rightarrow a, b, c, d, e, f \in A$ ou $\in B$
então, $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$

56. Com base na tabela é possível montar o diagrama dos conjuntos e indicar o número de elementos de cada um.



a) o número de pessoas consultadas:

$n_U = 115 + 61 + 20 + 142 + 5 + 36 + 98 + 23 = 500$

b) o número de pessoas que só consomem a marca *A*:

$n_A - n_{A\cap B} - n_{A\cap C} + n_{A\cap B\cap C} = 109 - 25 - 28 + 5 = 61$

c) o número de pessoas que não consomem as marcas *A* ou *C*:

$n_{\overline{A\cup C}} = n_U - n_{A\cup C} = 500 - (109 + 162 - 28) = 257$

d) o número de pessoas que consomem ao menos duas marcas:

$n_{A\cap B} + n_{B\cap C} + n_{C\cap A} - 2 \cdot n_{A\cap B\cap C} = 25 + 41 + 28 - 10 = 84.$

58. B: conjunto dos indivíduos da raça branca
P: conjunto dos indivíduos da raça preta
A: conjunto dos indivíduos da raça amarela

$$\left.\begin{array}{l} n(B) = 70 \\ n(\overline{P}) = n(A\cup B) = 350 \end{array}\right\} \Rightarrow n(A) = n(A\cup B) - n(B) = 280$$

a) número de indivíduos da comunidade: $2 \cdot n(A) = 560$
b) $n(A) = 280$

59. Matriz: $20\% \cdot 45\% = \dfrac{900}{10\,000}$

Santos: $35\% \cdot 20\% = \dfrac{700}{10\,000}$

Campinas: $x\% \cdot 35\% = \dfrac{35x}{10\,000}$

$$\frac{900}{10\,000} + \frac{700}{10\,000} + \frac{35x}{10\,000} = \frac{30}{100} \Rightarrow x = 40$$

60. a) $$\left.\begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\} \\ B = \{c, d, e, f, g\} \end{array}\right\} \Rightarrow A - B = \{a, b\} \text{ e } B - A = \{e, f, g\}$$
Então: $A \,\triangle\, B = \{a, b\} \cup \{e, f, g\} = \{a, b, e, f, g\}$.

b) $\forall A,\ A - \varnothing = A$ e $\varnothing - A = \varnothing$
$A \,\triangle\, \varnothing = A \cup \varnothing = A$

c) $\forall A,\ A - A = \varnothing$
$A \,\triangle\, A = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

d) $A \,\triangle\, B = (A - B) \cup (B - A)$
$B \,\triangle\, A = (B - A) \cup (A - B)$
Como a união de conjuntos goza da propriedade comutativa, então:
$(A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) \Rightarrow A \,\triangle\, B = B \,\triangle\, A.$

Capítulo III — Conjuntos numéricos

63. Chamando M_4, M_6 e M_{12} os conjuntos de múltiplos, temos:
$M_4 \cap M_6 = M_{12} \Rightarrow M_{12} \subset M_4$ e $M_{12} \subset M_6$
então X é formado por:
5 múltiplos de *12* (que também são múltiplos de *4* e *6*)
$7 - 5 = 2$ múltiplos de *6* (que não são múltiplos de *4* ou *12*)
$12 - 5 = 7$ múltiplos de *4* (que não são múltiplos de *6* ou *12*)
8 números ímpares
num total de $5 + 2 + 7 + 8 = 22$ elementos

73. Seja $r_1 = \frac{a}{b}$, $r_2 = \frac{c}{d}$. Como $r_1 < r_2$, então $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc$.
Seja r a média aritmética entre r_1 e r_2: $r = \frac{ad + bc}{2bd}$.
Comparemos r_1 e r:
$$r_1 - r = \frac{a}{b} - \frac{ad + bc}{2bd} = \frac{ad - bc}{2bd} \Rightarrow r_1 - r < 0 \Rightarrow r_1 < r$$
Comparemos r e r_2:
$$r - r_2 = \frac{ad + bc}{2bd} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{2bd} \Rightarrow r - r_2 < 0 \Rightarrow r < r_2$$
Portanto, existe r, tal que $r_1 < r < r_2$.

76. Dividir a por *40* é o mesmo que multiplicar a pelo inverso de *40*, que é $\frac{1}{40} = 0{,}025$.

77. $\alpha = 1 + 0{,}4 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \ldots = 1{,}41111\ldots = \frac{127}{90}$

78. Renda total do país A: $2 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^7 = 10 \cdot 10^{11}$
Renda total do país B: $1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^7 = 2 \cdot 10^{11}$
A renda *per capita* dos dois países juntos é a renda total dividida pela população total:
$$\frac{10 \cdot 10^{11} + 2 \cdot 10^{11}}{7 \cdot 10^7} = 17\,142.$$
A renda *per capita* dos dois países juntos (novo país) será de aproximadamente *17 000* dólares.

79. Pela lei de Boyle, temos:
$(P + \Delta P)(V + \Delta V) = K$
$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{125}{100} P_1 - P_1 = \frac{25}{100} P_1 = \frac{P_1}{4}.$$

Então: $\left(P + \frac{P}{4}\right)(V + \Delta V) = K$

$$5P(V + \Delta V) = 4K \text{ e } PV = K \Rightarrow \Delta V = \frac{-V}{5}, \text{ isto é,}$$

haverá uma diminuição correspondente à 5ª parte do volume inicial, ou seja, 20%.

82. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}$

83. $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \sqrt{16 - 8\sqrt{2} + 2} = \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2} = 4 - \sqrt{2} \Rightarrow a = 4 \text{ e } b = -1$

84. Comparemos a e g:

$$a - g = \frac{x + y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geqslant 0.$$

Então, $a \geqslant g$.

85. a) Seja $a = \sqrt{2}$.

Então, $a^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$ e $a^6 = (\sqrt{2})^6 = 8$ são racionais.

b) $a^{12} \in \mathbb{Q}$ e $a^7 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^5 = \frac{a^{12}}{a^7} \in \mathbb{Q}$

$a^7 \in \mathbb{Q}$ e $a^5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^2 = \frac{a^7}{a^5} \in \mathbb{Q}$

$a^5 \in \mathbb{Q}$ e $a^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = \frac{a^5}{a^4} = \frac{a^5}{(a^2)^2} \in \mathbb{Q}$

87. Prova-se com contra-exemplos.

Um contra-exemplo é o número racional 2 cuja raiz quadrada *não* é racional.

De fato, se $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, então

$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ é número par $\Rightarrow p$ é par $\Rightarrow p = 2m \Rightarrow$

$\Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2$ é par $\Rightarrow q$ é par.

Mas p e q pares é absurdo, pois $\text{mdc}(p, q) = 1$.

88. Fazendo $r = \frac{x + 1}{x} = -1$, temos $x + 1 = -x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, ou seja,

$$-1 = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{-\frac{1}{2}}.$$

Analogamente, fazendo r assumir cada um dos valores 0, 1, 2 e 3 e tentando calcular x real, só não conseguimos quando $r = 1$.

98. 1º) P(1) é verdadeira porque $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

2º) Admitamos a validade para $n = k$:

$$P(k) = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

e provemos que vale para $n = k + 1$, isto é:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Temos:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + k}_{P(k)} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

99. 1º) $P(0)$ é verdadeira porque $2 = \frac{(0+1)(4+0)}{2}$.

2º) Admitamos a validade para $n = k$:

$$P(k)\colon 2 + 5 + 8 + \dots + (2 + 3k) = \frac{(k+1)(4+3k)}{2}$$

e provemos que vale para $n = k + 1$, isto é:

$$2 + 5 + 8 + \dots + (2+3k) + [2 + 3(k+1)] = \frac{(k+2)(4+3(k+1))}{2}.$$

Temos:

$$\underbrace{2 + 5 + 8 + \dots + (2+3k)}_{P(k)} + [2 + 3(k+1)] =$$

$$= \frac{(k+1)(4+3k)}{2} + 2 + 3(k+1) = \frac{(k+1)(4+3k) + 4 + 6(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{3k^2 + 13k + 14}{2} = \frac{(k+2)(3k+7)}{2}$$

100. 1º) $P(1)$ é verdadeira porque $2^0 = 2^1 - 1$.

2º) Admitamos a validade de $P(k-1)$, isto é,
$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-2} = 2^{k-1} - 1$ e, então, devemos provar que vale $P(k)$, ou seja,
$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-2} + 2^{k-1} = 2^k - 1$.
Temos:

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-2}}_{P(k-1)} + 2^{k-1} = 2^{k-1} - 1 + 2^{k-1} =$$

$$= 2 \cdot 2^{k-1} - 1 = 2^k - 1.$$

101. 1º) $P(1)$ é verdadeira porque $\frac{1(1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1 = 1^2$.

2º) Admitamos que vale para $n = k$, isto é,

$P(k)$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$ e provemos que vale para $n = k + 1$, ou seja:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}.$$

Temos:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2}_{P(k)} + (k + 1)^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 =$$

$$= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + \frac{6(k + 1)^2}{6} = \frac{(k + 1)[k(2k + 1) + 6(k + 1)]}{6} =$$

$$= \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$$

102. 1º) $P(1)$ é verdadeira porque $\left[\frac{1(1 + 1)}{2}\right]^2 = 1 = 1^3$.

2º) Admitamos válida para $n = k$, isto é:

$P(k)$: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{k(k + 1)}{2}\right]^2$ e provemos que vale para $n = k + 1$, isto é:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k + 1)^3 = \left[\frac{(k + 1)(k + 2)}{2}\right]^2$$

Temos:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + k^3}_{P(k)} + (k + 1)^3 = \left[\frac{k(k + 1)}{2}\right]^2 + (k + 1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + \frac{4(k + 1)^3}{4} = \frac{(k + 1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} =$$

$$= \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4} = \left[\frac{(k + 1)(k + 2)}{2}\right]^2$$

104. 1º) $P(1)$ é verdadeira porque $6 \mid 1(1 + 1)(1 + 2)$.

2º) Admitamos válida para $n = k$, isto é, $6 \mid k(k + 1)(k + 2)$ e provemos que vale para $n = k + 1$: $6 \mid (k + 1)(k + 2)(k + 3)$.

Temos:

$$(k + 1)(k + 2)(k + 3) = k(k + 1)(k + 2) + 3(k + 1)(k + 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 6 \mid k(k + 1)(k + 2) \\ 6 \mid 3(k + 1)(k + 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \mid k(k + 1)(k + 2) + 3(k + 1)(k + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \mid (k + 1)(k + 2)(k + 3)$$

105. 1º) $P(0)$ é válida: $2 \mid 0$.

2º) Admitamos verdadeira para $n = k$, isto é, $2 \mid (k^2 + k)$, ou seja, $2 \mid k(k + 1)$ e provemos que vale para $n = k + 1$:

$$2 \mid [(k + 1)^2 + (k + 1)] \Leftrightarrow 2 \mid (k + 1)(k + 2)$$

$$(k + 1)^2 + (k + 1) = (k + 1)(k + 1 + 1) =$$
$$= (k + 1)(k + 2) = k(k + 1) + 2(k + 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 \mid k(k + 1) \\ 2 \mid 2(k + 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \mid k(k + 1) + 2(k + 1) \Rightarrow 2 \mid (k + 1)(k + 2)$$

106. 1º) $P(0)$ é verdadeira, pois $3 \mid (0^3 + 2 \cdot 0)$.

2º) Admitamos $P(k)$ verdadeira, ou seja, $3 \mid (k^3 + 2k)$ e provemos que $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja:

$3 \mid [(k + 1)^3 + 2(k + 1)]$.

Temos:

$$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2) =$$
$$= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 \mid k^3 + 2k \\ 3 \mid 3(k^2 + k + 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \mid (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \mid [(k + 1)^3 + 2(k + 1)].$$

107. 1º) $P(1)$ é válida porque $1 + 1 = (1 + 1)$.

2º) Admitamos que seja válida para $n = k$:

$P(k)$: $(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right) = k + 1$ e provemos que vale para $n = k + 1$, isto é:

$$(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k + 1}\right) = k + 2.$$

Temos:

$$\underbrace{(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)}_{P(k)}\left(1 + \frac{1}{k + 1}\right) = (k + 1)\left(1 + \frac{1}{k + 1}\right) =$$

$$= (k + 1)\left(\frac{k + 1 + 1}{k + 1}\right) = k + 2$$

108. 1º) $P(1)$ é válida: $\frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$.

2º) Admitamos que seja válida para $n = k$:

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k + 1)} = \frac{k}{k + 1}$ e provemos que é válida para $n = k + 1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Temos:

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)}}_{P(k)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

109. 1º) $P(1)$ é verdadeira: $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 1(1+1) = 1 \cdot 2.$

2º) Admitamos que seja válida para $n = k$:

$P(k) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ e provemos que vale para $n = k + 1$:

$$P(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Temos:

$$\underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1)}_{P(k)} + (k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

111. 1º) $P(0)$ é verdadeira: $2^0 > 0$.

2º) Admitamos verdadeira para $n = k$: $2^k > k$, com $k > 1$, e provemos que vale para $n = k + 1$: $2^{k+1} > k + 1$.
Temos: $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k \cdot 2 > k + 2 > k + 1$.

112. 1º) $P(1)$ é verdadeira: $1^3 > \frac{1^4}{4} = \frac{1}{4}.$

2º) Admitamos $P(k)$: $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 > \frac{k^4}{4}$ verdadeira e provemos que vale $P(k+1)$: $1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 > \frac{(k+1)^4}{4}.$

Temos:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + k^3}_{P(k)} + (k+1)^3 > \frac{k^4}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{k^4 + 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4}{4} =$$

$$= \frac{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 + 6k^2 + 8k + 3}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^4}{4} + \frac{6k^2 + 8k + 3}{4} > \frac{(k+1)^4}{4}$$

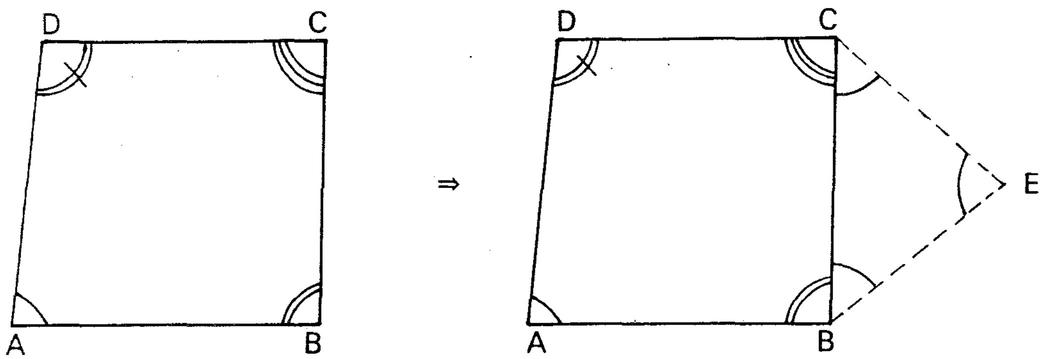
pois $6k^2 + 8k + 3 > 0, \forall k.$

113. 1º) $P(1)$ é válida: $(1 + a)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot a$.

2º) Suponhamos válida para $n = k$: $(1 + a)^k \geqslant 1 + ka$ e provemos que vale para $n = k + 1$: $(1 + a)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)a$.
Temos:
$(1 + a)^{k+1} = (1 + a)^k \cdot (1 + a) \geqslant (1 + ka)(1 + a) = 1 + ka + a + ka^2 \geqslant$
$\geqslant 1 + ka + a = 1 + (k + 1)a.$

115. 1º) $P(3)$ é verdadeira:
$S_3 = (3 - 2) \cdot 180° = 180°$ (soma dos ângulos internos de um triângulo).

2º) Admitamos válido para $n = k$: $S(k) = (k - 2) \cdot 180°$ e provemos que é verdadeira para $n = k + 1$: $S(k + 1) = (k - 1) \cdot 180°$.
Observemos que:



ao acrescentar um vértice (E), na verdade estamos acrescentando, à figura anterior, um triângulo (BCE) cuja soma dos ângulos internos é $180°$.
Então, temos:

$$S_{k+1} = S_k + 180° = (k - 2) \cdot 180° + 180° =$$
$$= 180° (k - 2 + 1) = (k - 1) \cdot 180°$$

116. 1º) $P(0)$ é verdadeira, pois $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, que é unitário e portanto tem $2^0 = 1$ elemento.

2º) $P(1)$ é verdadeira, pois $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\{a\}, \varnothing\}$, que é binário e portanto tem $2^1 = 2$ elementos.

3.º) $P(2)$ é verdadeira, pois $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \varnothing\}$ é quaternário e portanto tem $2^2 = 4$ elementos.

4.º) Admitamos que a proposição seja verdadeira para um conjunto A com k elementos, ou seja, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^k elementos. Provemos que a proposição é verdadeira para um conjunto B com $k + 1$ elementos, ou seja, $\mathcal{P}(B)$ tem 2^{k+1} elementos.
Suponhamos que $B = A \cup \{b\}$, ou seja, b é o elemento que está em B e não pertence a A. Então $\mathcal{P}(B)$ é formado com os subconjuntos de A (que são 2^k) e mais a reunião de $\{b\}$ com cada um desses subconjuntos (que são outros 2^k conjuntos).
Conclusão: $\mathcal{P}(B)$ possui $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ elementos.
Obs.: Para melhor entender, veja como fizemos para passar de $\mathcal{P}(\{a\})$ para $\mathcal{P}(\{a, b\})$.

Capítulo IV — Relações

122. Utiliza-se a propriedade: se X é subconjunto de X' e Y é subconjunto de Y', então $X \times Y$ é subconjunto de $X' \times Y'$ e também vale a recíproca.
Por exemplo:

$$A \times B \subset X' \times Y' \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset X' \Leftrightarrow X' = A \text{ ou } B \text{ ou } C \\ B \subset Y' \Leftrightarrow Y' = B \text{ ou } C \end{cases}$$

então $X' \times Y' = A \times B$ ou $A \times C$ ou $B \times B$ ou $B \times C$ ou $C \times B$ ou $C \times C$.

128. $\left.\begin{array}{l} A = \{0, 1, 2\} \\ B = \{3, 4, 5\} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \times B = \{(0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$.

Verifica-se, diretamente, que somente os pares $(0, 4)$, $(0, 5)$ e $(1, 5)$ satisfazem a relação $y \geqslant x + 4$.
Portanto, $n(D) = 3$.

Capítulo V — Introdução às funções

155. Fazendo $x = 0$, devemos ter:
$f(m \cdot 0) = m \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = m \cdot f(0)$.
Então:
$m = 1 \Rightarrow f(0)$ é qualquer real.
$m \neq 1 \Rightarrow (m - 1) \cdot f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

156. $f(3 + \sqrt{2}) = f(3) \cdot f(\sqrt{2})$

Calculando $f(3)$, vem:

$f(2) = f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = 2 \cdot 2 = 4$

$f(3) = f(2 + 1) = f(2) \cdot f(1) = 4 \cdot 2 = 8$

Então: $f(3 + \sqrt{2}) = f(3) \cdot f(\sqrt{2}) = 8 \cdot 4 = 32.$

157. a) $f(1) = f(0 + 1) = 2 \cdot f(0) + 3 = 3$

$f(2) = f(1 + 1) = 2 \cdot f(1) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

$f(3) = f(2 + 1) = 2 \cdot f(2) + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$

$f(4) = f(3 + 1) = 2 \cdot f(3) + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 45$

$f(5) = f(4 + 1) = 2 \cdot f(4) + 3 = 2 \cdot 45 + 3 = 93$

Observemos que:

$$\begin{aligned}
f(5) = 93 &= 2 \cdot 45 + 3 = \\
&= 2 \cdot (2 \cdot 21 + 3) + 3 = \\
&= 2 \cdot [2 \cdot (2 \cdot 9 + 3) + 3] + 3 = \\
&= 2 \cdot \{2 \cdot [2(2 \cdot 3 + 3) + 3] + 3\} + 3 = \\
&= 2 \cdot \{2 \cdot [2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3] + 3\} + 3 = \\
&= 2 \cdot \{2^3 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3\} + 3 = \\
&= 2^4 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 = \\
&= 3(2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0)
\end{aligned}$$

ou seja: $f(n) = 3(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1)$.

b) 1º) Vale para $n = 1$, isto é, $f(1) = 3 \cdot (2^0) = 3$.

2º) Admitamos verdadeira para $n = k$: $f(k) = 3(2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1)$ e provemos que é válida para $n = k + 1$, ou seja,

$f(k + 1) = 3(2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1)$.

Considerando a função definida, temos:

$f(k + 1) = 2 \cdot f(k) + 3$.

Então:

$f(k + 1) = 2 \cdot [3 \cdot (2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1)] + 3$

$f(k + 1) = 3 \cdot [2 \cdot (2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1)] + 3$

$f(k + 1) = 3 \cdot (2^k + 2^{k-1} + \dots + 2^2 + 2) + 3$

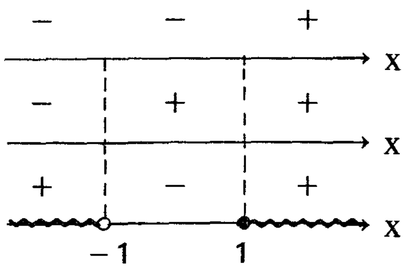
$f(k + 1) = 3 \cdot (2^k + 2^{k-1} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$

165. $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \text{ se } x \geqslant 0 \\ f(x) \neq g(x) \text{ se } x < 0 \end{cases}$

$g(x) = x$

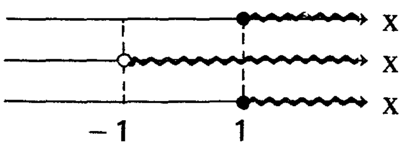
Portanto, $f(x)$ e $g(x)$ não são iguais.

166. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ está definida se $\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0$, ou seja,



$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$.

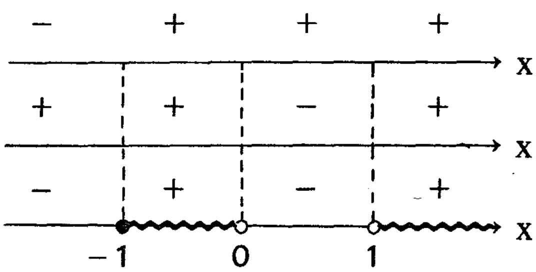
$g(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}}$ está definida se $x - 1 \geqslant 0$ e $x + 1 > 0$, ou seja:



$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$.

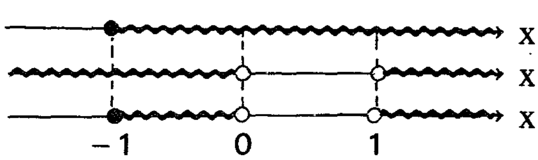
$f(x)$ e $g(x)$ serão iguais somente no conjunto $x \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$.

167. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x^2 - x}}$ está definida se $\dfrac{x + 1}{x^2 - x} \geqslant 0$.



$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 0 \text{ ou } x > 1\}$.

$g(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x^2 - x}}$ está definida se $x + 1 \geqslant 0$ e $x^2 - x > 0$.



$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 0 \text{ ou } x > 1\}$.

Por possuírem exatamente o mesmo domínio, $f(x) = g(x)$.

168. $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$
Não são iguais porque os domínios são diferentes.

Capítulo VI — Função constante — Função afim

175. a) $\begin{cases} a + b = \dfrac{3}{4} & ① \\ a - b = \dfrac{-1}{4} & ② \end{cases}$

Somando membro a membro ① e ②, vem:

$2a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \dfrac{1}{4}$.

Substituindo $a = \dfrac{1}{4}$ em ①, temos $b = \dfrac{1}{2}$. Daí vem:

$a = \dfrac{1}{x - y} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x - y = 4$ ③

$b = \dfrac{1}{x + y} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x + y = 2$ ④

O sistema formado por ③ e ④ é $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Somando membro a membro ③ e ④, vem: $2x = 6 \Rightarrow x = 3$.

Substituindo $x = 3$ em ④, temos: $y = -1$, isto é, $S = \{(3, -1)\}$.

b) Fazendo $\dfrac{1}{x + y + 1} = a$ e $\dfrac{1}{2x - y + 3} = b$, vem:

$\begin{cases} 3a - 2b = \dfrac{5}{12} \\ 2a + 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a + 4b = \dfrac{-5}{6} \\ 6a + 9b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{1}{4}$ e $b = \dfrac{1}{6}$.

Então: $\begin{cases} x + y + 1 = 4 \\ 2x - y + 3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2$ e $y = 1$.

$S = \{(2, 1)\}$.

178. x = n.º de bolas brancas
y = n.º de bolas pretas

após 1.ª retirada: $\dfrac{x - 15}{y} = \dfrac{1}{2}$ ①

após 2.ª retirada: $\dfrac{x - 15}{y - 10} = \dfrac{4}{3}$ ②

Resolvendo o sistema formado por ① e ②, vem: $x = 23$ e $y = 16$.

179. $\left.\begin{array}{l} f(-1) = -a + b = 3 \\ f(1) = a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1$ e $b = 2$

Então, $f(x) = -x + 2$ e daí $f(3) = -1$.

186. A partir do gráfico verificamos que a função $C(x)$ passa pelo ponto $(8, 520)$ e tem coeficiente linear 400.
$C(x) = ax + 400 \Rightarrow C(8) = 8a + 400 = 520 \Rightarrow a = 15$
Portanto, $C(x) = 15x + 400$.
Considerando um custo de *CR\$ 700,00*, vem:
$15x + 400 = 700 \Rightarrow x = 20$ litros.

187. 1. $x \leqslant 25\,068 \Rightarrow f(x) = 0$

$$25\,068 < x \leqslant 83\,561 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{10} - 2\,506{,}80$$

$$x > 83\,561 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{4} - n$$

2. Calculemos o imposto de renda a pagar $f(x)$, para uma renda líquida de *Cr\$ 83 561,00*, valor x.
$f(83\,561{,}00) = 0{,}1 \cdot 83\,561{,}00 - 2\,506{,}80 = 5\,849{,}30$
Para não haver descontinuidade nesse ponto $(83\,561{,}00;\ 5\,849{,}30)$ ao passar da faixa de *10%* para *25%*, deveremos ter:
$5\,849{,}30 = 0{,}25 \cdot 83\,561{,}00 - n \Rightarrow n = 15\,040{,}95$.

188. Seja H a herança,
x a parte da mãe,
$2x$ a parte de cada filho do sexo masculino,
$3x$ a parte da filha.

Então: $H = x + 2 \cdot 2x + 3x = 8x \Rightarrow x = \dfrac{H}{8}$.

mãe: $\dfrac{H}{8}$; cada homem: $\dfrac{H}{4}$; filha: $\dfrac{3H}{8}$

189. $$S = vt \Rightarrow \begin{cases} S = 275 \cdot t_h \\ S = 660 \cdot t_j \\ t_j = t_h - 7 \end{cases} \Rightarrow 275 \cdot t_h = 660(t_h - 7) \Rightarrow t_h = 12$$

Então: $S = 275 \cdot 12 = 3\,300$.
A distância entre São Paulo e Boa Vista é de *3 300 km*.

190. 110 trabalhadores $\begin{cases} \text{100 homens com média salarial 265} \\ \text{10 mulheres com média salarial } x \end{cases}$

$$\frac{100 \cdot 265 + 10x}{110} = 250 \Rightarrow x = 100$$

O salário médio das mulheres é de *CR\$ 100,00*.

191. x = salário/hora de Paulo e Joana.
Paulo trabalhou *40* minutos $\left(\frac{2}{3}\text{ de hora}\right)$ a mais que Joana e, por esse período, recebeu *150*.
Então: $\frac{2}{3}x = 150 \Rightarrow x = 225.$
Portanto, Paulo recebeu $4 \times 225 = 900$ e $\frac{1}{10} \cdot 900 = 90.$
Um décimo do que Paulo recebeu são CR$ 90,00.

192. A engrenagem *a* tem *24* dentes e a engrenagem *c* tem *36* dentes. Ambas as engrenagens dão um número inteiro de voltas quando os números de dentes que "passam" pelo ponto de contato com a engrenagem *b* for um múltiplo comum de *24* e *36*.
O mmc(*24,36*) é *72*. Então, se *c* der duas voltas e *a* der *3* voltas, as duas retornam à situação inicial.

193. Quando o piloto mais veloz (*72* segundos por volta) completar *x* voltas, o piloto menos veloz (*75* segundos por volta) terá dado ($x - 1$) voltas.
Então, temos:
$72x = 75(x - 1) \Rightarrow x = 25.$

205. $f(x)$ passa pelos pontos $(3, 0)$ e $(2, -2)$.
$$\begin{cases} 0 = 3a + b \\ -2 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = -6 \Rightarrow f(x) = 2x - 6$$
$g(x)$ passa por $(0, 1)$ e $(2, -2)$.
$$\begin{cases} 1 = b \\ -2 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-3}{2} \text{ e } b = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{-3}{2}x + 1$$
$h(x)$ passa por $(0, 1)$ e $(-1, -1)$.
$$\begin{cases} 1 = b \\ -1 = -a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 1 \Rightarrow h(x) = 2x + 1$$

a) $f(x) > g(x) \Rightarrow 2x - 6 > \frac{-3}{2}x + 1 \Rightarrow x > 2$

b) $g(x) \leqslant h(x) \Rightarrow \frac{-3}{2}x + 1 \leqslant 2x + 1 \Rightarrow x \geqslant 0$

c) $f(x) \geqslant h(x) \Rightarrow 2x - 6 \geqslant 2x + 1 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant h(x)$

d) $g(x) > 4 \Rightarrow \frac{-3}{2}x + 1 > 4 \Rightarrow x < -2$

e) $f(x) \leqslant 0 \Rightarrow 2x - 6 \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 3$

209. $\dfrac{6{,}3 \cdot 1 + 4{,}5 \cdot 2 + 3x}{6} \geqslant 6{,}5$

$6{,}3 + 9 + 3x \geqslant 39$

$3x \geqslant 23{,}7 \Rightarrow x \geqslant 7{,}9$

211. a) $\dfrac{3x - 2}{1 - x} \leqslant -3 \Rightarrow \dfrac{1}{1 - x} \leqslant 0 \Rightarrow 1 - x < 0 \Rightarrow x > 1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

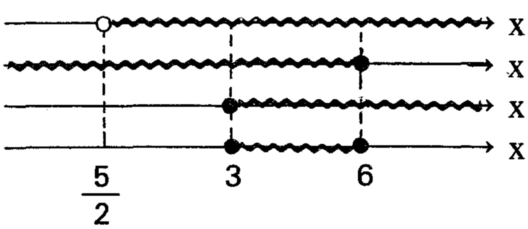
b) $\dfrac{4x - 5}{2x - 1} \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{-3}{2x - 1} \geqslant 0 \Rightarrow 2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{1}{2}\right\}.$

c) $\dfrac{-4 - 3x}{3x + 2} < -1 \Rightarrow \dfrac{-2}{3x + 2} < 0 \Rightarrow 3x + 2 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{-2}{3}$

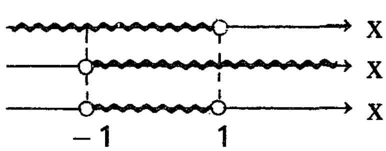
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{-2}{3}\right\}.$

213. c) $\begin{cases} 5 - 2x < 0 \Rightarrow x > \dfrac{5}{2} \\ 3x + 1 \geqslant 4x - 5 \Rightarrow x \leqslant 6 \\ x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 3 \end{cases}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 6\}$

f) $\begin{cases} \dfrac{2x - 5}{1 - x} \leqslant -2 \Rightarrow \dfrac{-3}{1 - x} \leqslant 0 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1 \\ \dfrac{x^2 + x + 3}{x + 1} > x \Rightarrow \dfrac{3}{x + 1} > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

214. *f*(*x*) passa pelos pontos (*−3, 1*) e (*1, −4*).

$\begin{cases} -3a + b = 1 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{-5}{4} \text{ e } b = \dfrac{-11}{4} \Rightarrow f(x) = \dfrac{-5}{4}x - \dfrac{11}{4}$

$g(x)$ passa por $(4, 4)$ e $(1, -4)$.

$$\begin{cases} 4a + b = 4 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{8}{3} \text{ e } b = \frac{-20}{3} \Rightarrow g(x) = \frac{8}{3}x - \frac{20}{3}$$

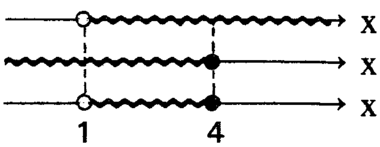
$h(x)$ passa por $(4, 4)$ e $(-3, 1)$.

$$\begin{cases} 4a + b = 4 \\ -3a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{7} \text{ e } b = \frac{16}{7} \Rightarrow h(x) = \frac{3}{7}x + \frac{16}{7}$$

a) $f(x) < g(x) \leqslant h(x)$

$$f(x) < g(x) \Rightarrow \frac{-5}{4}x - \frac{11}{4} < \frac{8}{3}x - \frac{20}{3} \Rightarrow x > 1$$

$$g(x) \leqslant h(x) \Rightarrow \frac{8}{3}x - \frac{20}{3} \leqslant \frac{3}{7}x + \frac{16}{7} \Rightarrow x \leqslant 4$$

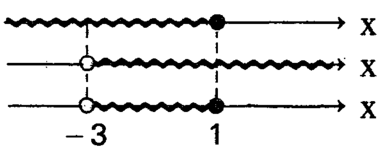


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 4\}$

b) $g(x) \leqslant f(x) < h(x)$

$$g(x) \leqslant f(x) \Rightarrow \frac{8}{3}x - \frac{20}{3} \leqslant \frac{-5}{4}x - \frac{11}{4} \Rightarrow x \leqslant 1$$

$$f(x) < h(x) \Rightarrow \frac{-5}{4}x - \frac{11}{4} < \frac{3}{7}x + \frac{16}{7} \Rightarrow x > -3$$

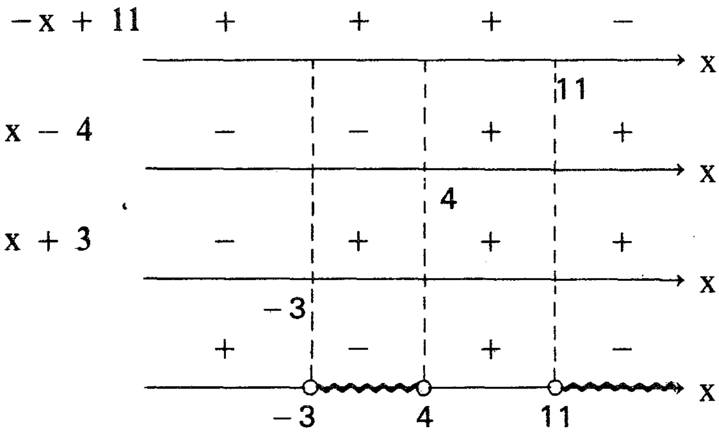


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 1\}$

c) $h(x) \leqslant f(x) < g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} h(x) \leqslant f(x) \Rightarrow \frac{3}{7}x + \frac{16}{7} \leqslant \frac{-5}{4}x - \frac{11}{4} \Rightarrow x \leqslant -3 \\ f(x) < g(x) \Rightarrow \frac{-5}{4}x - \frac{11}{4} < \frac{8}{3}x - \frac{20}{3} \Rightarrow x > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S = \varnothing$$

223. a) $\frac{1}{x - 4} < \frac{2}{x + 3} \Rightarrow \frac{1}{x - 4} - \frac{2}{x + 3} < 0 \Rightarrow \frac{-x + 11}{(x - 4)(x + 3)} < 0$

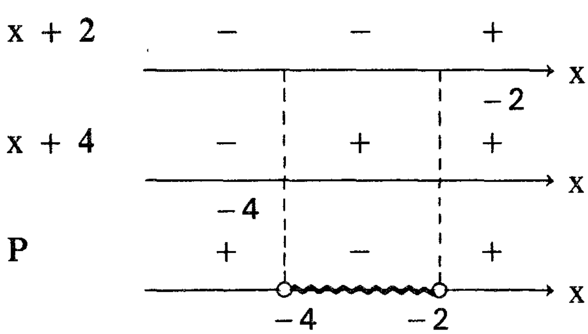


S = $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4 \text{ ou } x > 11\}$.

c) $\dfrac{x+1}{x+2} > \dfrac{x+3}{x+4} \Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{x+3}{x+4} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x+1)(x+4) - (x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)} > 0 \Rightarrow \dfrac{-2}{(x+2)(x+4)} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+2)(x+4) < 0$

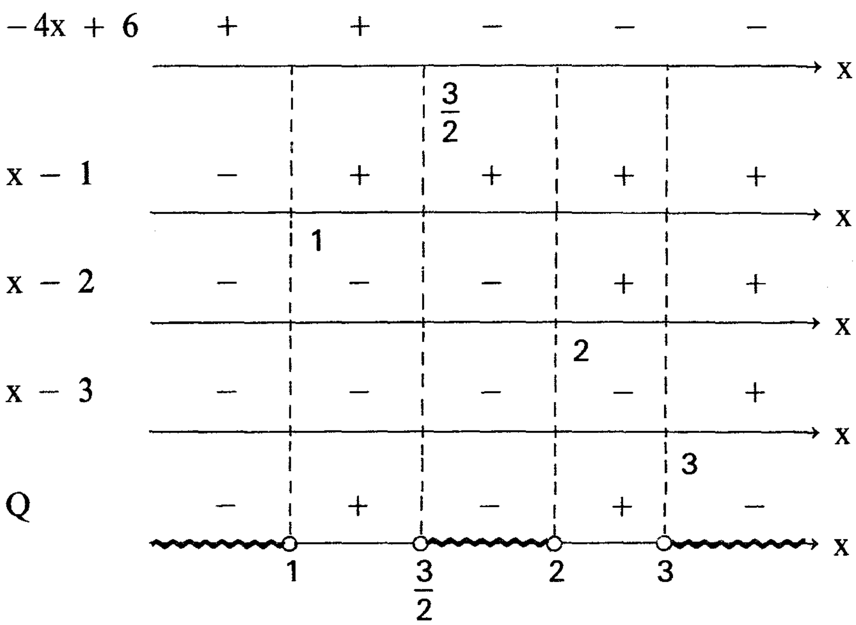


S = $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -2\}$

f) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{x-3} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x-2)(x-3) + 2(x-1)(x-3) - 3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-4x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)} < 0$



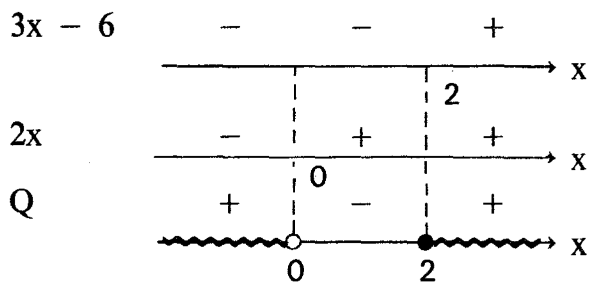
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } \frac{3}{2} < x < 2 \text{ ou } x > 3\right\}.$$

224. $\dfrac{-4}{x} + \dfrac{3}{2} \geqslant \dfrac{-1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-4}{x} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{2} \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-3}{x} + \dfrac{3}{2} \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3x - 6}{2x} \geqslant 0$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

Capítulo VII — Funções quadráticas

226. $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$ está definida se $m^2 - 4 \neq 0$, isto é, se $m \neq 2$ e $m \neq -2$.

227. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Então: $f(-1) = a - b + c = -4$ ①
$f(1) = a + b + c = 2$ ②
$f(2) = 4a + 2b + c = 1$ ③

Resolvendo o sistema formado por ①, ② e ③, temos:

$$\begin{cases} a - b + c = -4 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = -4 \\ 2b = 6 \\ 6b - 3c = 15 \end{cases} \Rightarrow b = 3$$

Substituindo $b = 3$ na 3ª equação, vem $c = 1$.
Substituindo $b = 3$ e $c = 1$ na 1ª equação, vem $a = -2$.
Portanto, $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$.

228. $f(1) = a + b + c = 4$
$f(2) = 4a + 2b + c = 0$
$f(3) = 9a + 3b + c = -2$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 2b + 3c = 16 \\ -6b - 8c = -38 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 2b + 3c = 16 \\ c = 10 \end{cases}$$

Substituindo $c = 10$ na 2ª equação, obtemos $b = -7$.
Substituindo $c = 10$ e $b = -7$ na 1ª equação, vem $a = 1$.
Então: $abc = 1 \cdot (-7) \cdot 10 = -70$.

230. quantidade vendida × preço de venda = receita

$$x \cdot \left(50 - \frac{x}{2}\right) = 1\,250$$

Então, temos: $x^2 - 100x + 2\,500 = 0 \Rightarrow x = 50$.

231. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{12} \Rightarrow \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{7}{12} \\ xy = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \quad ① \\ xy = 12 \quad ② \end{cases}$

Considerando ① e ②, temos: $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 4$.
Como $xy = 12$, então, para $x = 3$, $y = 4$ e para $x = 4$, $y = 3$.
$S = \{(3, 4), (4, 3)\}$.

232. a) $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -1$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x \quad ① \\ 2x + xy = -8 \quad ② \end{cases}$

Substituindo ① em ②, vem:

$2x + x(4 - 2x) = -8 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ (item *a*)
Então, para $x = 4$, $y = -4$ e para $x = -1$, $y = 6$.
$S = \{(4, -4), (-1, 6)\}$.

236. $a \neq 0 \Rightarrow m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$

$\Delta > 0 \Rightarrow (2m + 3)^2 - 4m(m - 1) > 0$

$4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 + 4m > 0$

$16m > -9 \Rightarrow m > \frac{-9}{16}$

Portanto: $m > \frac{-9}{16}$ e $m \neq 1$.

237. $a \neq 0 \Rightarrow m + 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$

$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow (3 - 2m)^2 - 4(m + 2)(m - 1) \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -16m + 17 \geqslant 0 \Rightarrow m \leqslant \frac{17}{16}$

Portanto: $m < \frac{17}{16}$ e $m \neq -2$.

238. $a \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow (m + 1)^2 - 4m(m + 1) = 0 \Rightarrow 3m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = -1$ ou $m = \frac{1}{3}$

Portanto: $m = -1$ ou $m = \frac{1}{3}$.

239. $a = 1 \neq 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow (3m + 2)^2 - 4(m^2 + m + 2) = 0 \Rightarrow 5m^2 + 8m - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \frac{2}{5}$ ou $m = -2$

Portanto: $m = \frac{2}{5}$ ou $m = -2$.

240. $a \neq 0 \Rightarrow m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$

$\Delta < 0 \Rightarrow (2m + 3)^2 - 4(m + 1)(m - 1) < 0 \Rightarrow 12m < -13 \Rightarrow m < \frac{-13}{12}$

Portanto: $m < \frac{-13}{12}$.

241. $a \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow (2m - 1)^2 - 4m(m - 2) < 0 \Rightarrow 4m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{4}$

Portanto: $m < -\frac{1}{4}$.

242. Em $ax^2 + bx + c = 0$, temos $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Em $\dfrac{a}{\alpha}x^2 + \beta bx + \alpha\beta^2 c = 0$, temos:

$$\Delta = \beta^2 b^2 - 4\frac{a}{\alpha}\alpha\beta^2 = \beta^2(b^2 - 4ac)$$

$$x = \frac{-\beta b \pm \beta\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\dfrac{a}{\alpha}} = \alpha\beta \cdot \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou seja, são as mesmas raízes, multiplicadas por $\alpha\beta$.

243. Em $ax^2 + bx + c = 0$, temos $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

244. a) $x_1 + x_2 = \dfrac{5}{2}$

b) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-1}{2}$

c) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{-1}{2}} = -5$

d) Sabendo que $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, então:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{29}{4}.$$

e) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \dfrac{\frac{29}{4}}{\frac{-1}{2}} = \dfrac{-29}{2}$

f) Sabendo que $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$, temos:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{155}{8}.$$

245. $2x^2 - 2mx + 3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{2} \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 = m \\ 3x_2^2 = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x_2' = \frac{-\sqrt{2}}{2} \text{ (rejeitada) ou } x_2'' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto: $4x_2 = m \Rightarrow m = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = 2\sqrt{2}.$

246. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = 47 \end{cases}$

Como as raízes são inteiras e *47* é número primo, então $x_1 = 1$ ou $x_2 = 47$ (ou vice-versa).

Portanto: $|x_1 - x_2| = |1 - 47| = 46.$

247. $\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{s^2} = \dfrac{s^2 + r^2}{r^2s^2}$

Sabendo que $(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2 \Rightarrow r^2 + s^2 = (r + s)^2 - 2rs =$
$= \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - \dfrac{2c}{a} = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}.$

Portanto, vem: $\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{s^2} = \dfrac{s^2 + r^2}{r^2s^2} = \dfrac{\dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\dfrac{c^2}{a^2}} = \dfrac{b^2 - 2ac}{c^2}.$

248. $\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_2 = -m > 0 \Rightarrow m < 0$

$\left.\begin{matrix} x_1 \cdot x_2 = m^2 - m - 12 \\ x_1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Rightarrow m = 4 \text{ ou } m = -3$

então, $m = -3.$

249. $x^2 - 5x + k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \quad (1) \\ x_1 \cdot x_2 = k \quad (2) \end{cases}$

$x^2 - 7x + 2k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' + x'' = 7 \quad (3) \\ x' \cdot x'' = 2k \quad (4) \end{cases}$

Fazendo $x' = 2x_1$ em ③ e ④, vem:

$$\begin{cases} 2x_1 + x'' = 7 \\ 2x_1 \cdot x'' = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(5 - x_2) + x'' = 7 \\ 2 \cdot \dfrac{k}{x_2} \cdot x'' = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' - 2x_2 = -3 \\ \dfrac{x''}{x_2} = 1 \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

Substituindo $x_2 = 3$ em ①, vem $x_1 = 2$.

Em ②, $x_1 \cdot x_2 = k \Rightarrow 2 \cdot 3 = k \Rightarrow k = 6.$

250. Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Já provamos no exercício *243* que $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ e $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Então, temos: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0.$

252. a) $$\begin{cases} S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\dfrac{-b}{a}\right)^2 - 2\dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2} \\ P = (x_1 \cdot x_2)^2 = \dfrac{c^2}{a^2} \end{cases}$$

Portanto: $x^2 - \left(\dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)x + \dfrac{c^2}{a^2} = 0 \Rightarrow a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0.$

b) $$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \dfrac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{-b}{c} \\ \dfrac{1}{x_1} \cdot \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{x_1x_2} = \dfrac{1}{\frac{c}{a}} = \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

Portanto: $x^2 - \left(\dfrac{-b}{c}\right)x + \dfrac{a}{c} = 0 \Rightarrow cx^2 + bx + a = 0.$

c) $$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{b^2 - 2ac}{ac} \\ \dfrac{x_1}{x_2} \cdot \dfrac{x_2}{x_1} = 1 \end{cases}$$

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \left(\dfrac{b^2 - 2ac}{ac}\right)x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

d) Sabendo que $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$, temos:

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(\frac{-b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(\frac{-b}{a}\right) = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} \\ x_1^3 \cdot x_3^3 = \frac{c^3}{a^3} \end{cases}$$

$$x^2 - \left(\frac{-b^3 + 3abc}{a^3}\right)x + \frac{c^3}{a^3} = 0 \Rightarrow a^3x^2 + (b^3 - 3abc)x + c^3 = 0$$

253. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4 \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = 4 \Rightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\left[\frac{2(m-1)}{m}\right]^2 - 2}{1} = 4 \Rightarrow m^2 + 4m - 2 = 0 \Rightarrow m = -2 \pm \sqrt{6}$$

254. Sendo $S = p'$ e $Q = q'$ de um trinômio $g(x)$, em que $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$ são as raízes, temos:

$$\begin{cases} p' = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a + b}{ab} = \frac{p}{q} \\ q' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab} = \frac{1}{q} \end{cases} \Rightarrow g(x) = x^2 - \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}$$

255. $m = 2x - 1$ e $n = 2x + 1$ são ímpares, positivos e consecutivos.
$m \cdot n = 1\,599 \Rightarrow (2x - 1)(2x + 1) = 1\,599 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 1\,599 \Rightarrow x = 20$
Portanto, $m = 39$ e $n = 41 \Rightarrow m + n = 80$.

258. $\Delta = 4 - 12m$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{12 - 4m}{12} = \frac{5}{3} \Rightarrow m = 2$$

259. $\Delta = [2(m - 1)]^2 - 4(-3)(m + 1) = 4m^2 + 4m + 16$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow m^2 + m + 4 = 6 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow m = -2 \text{ ou } m = 1$$

260. $f(x) = mx^2 + (m - 1)x + (m + 2)$ tem máximo se $m < 0$.
$\Delta = (m - 1)^2 - 4m(m + 2) = -3m^2 - 10m + 1$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow \frac{3m^2 + 10m - 1}{4m} = 2 \Rightarrow m = \begin{cases} \frac{1}{3} > 0 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ -1 \text{ (valor procurado)} \end{cases}$$

261. $f(x) = (m - 1)x^2 + (m + 1)x - m$ tem mínimo se $m > 1$.
$\Delta = (m + 1)^2 + 4m(m - 1) = 5m^2 - 2m + 1$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = 1 \Rightarrow \frac{-5m^2 + 2m - 1}{4(m - 1)} = 1 \Rightarrow 9m^2 - 2m + 3 = 0,$$

que não tem soluções reais.

Portanto, $\nexists m \in \mathbb{R} \mid f(x)$ tenha mínimo igual a *1*.

263. Sendo $y = -x^2 + 5x - 1$, verificamos que:

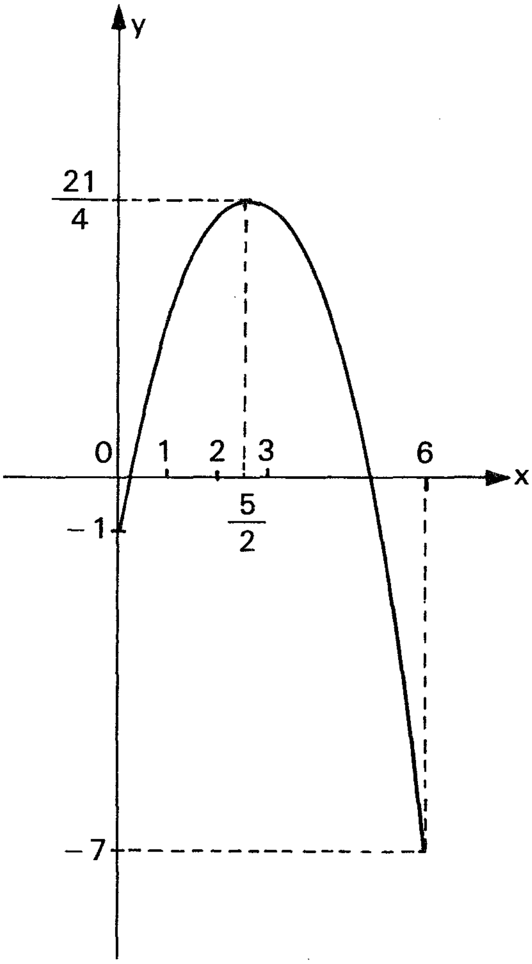
para $x = 0, y = -1$

para $x = 6, y = -7$

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = V\left(\frac{5}{2}, \frac{21}{4}\right)$$

Assim, no intervalo $[0, 6]$,

$$y_M = y_v = \frac{21}{4} \text{ e } y_m = f(6) = -7.$$



265. $y = -2x^2 + bx + c$ passa por $(1, 0)$. Então:

$0 = -2 + b + c \Rightarrow b + c = 2$ ①

$x_V = 3 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 3 \Rightarrow b = 12$ ②

Substituindo ② em ①, vem $c = -10$.

Portanto, $y = -2x^2 + 12x - 10$ e, então, $y = y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-64}{-8} = 8$.

266. $\left.\begin{array}{l} 2x + z = 8 \Rightarrow z = 8 - 2x \\ \text{Seja } y = xz \end{array}\right\} \Rightarrow y = x(8 - 2x) \Rightarrow y = -2x^2 + 8x$

Como $a = -2 < 0$, existe máximo, quando $x_V = \frac{-b}{2a}$.

Então, $x = \frac{-8}{2(-2)} = 2$ e, portanto, $z = 8 - 2x \Rightarrow z = 4$.

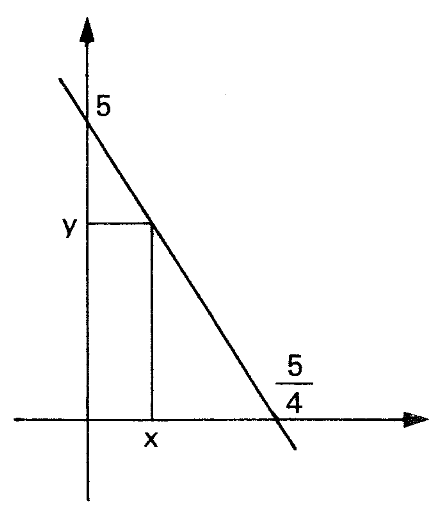
267. Seja um retângulo de lados *a* e *b*.
Então: $2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a.$
A área $y = ab$ é tal que $y = a(10 - a) = -a^2 + 10a.$
Como o coeficiente de a^2 é negativo, existe máximo, que é dado por
$a = \dfrac{-10}{2(-2)} = 5.$
Então, $b = 10 - 5 = 5.$
Ou seja, a área é máxima para o quadrado de lado $5\ cm$.

268. $\left.\begin{array}{l}\text{Seja } x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - x \\ \text{Seja } z = x^2 + y^2\end{array}\right\} \Rightarrow z = x^2 + (36 - 12x + x^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 2x^2 - 12x + 36$

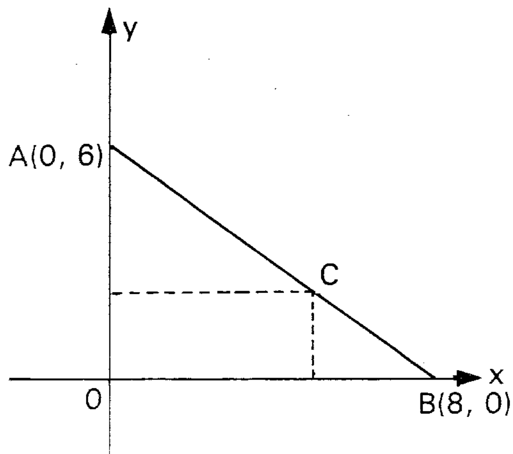
Como $a = 2 > 0$, existe mínimo, dado por $x = \dfrac{12}{2 \cdot 2} = 3.$

Então, $y = 6 - 3 = 3.$

269. Seja a área $z = xy$.
Como um dos vértices pertence à reta $y = -4x + 5$, temos:
$z = x(-4x + 5) = -4x^2 + 5x$
(como $a < 0$, existe máximo).
Então: $x = \dfrac{-5}{2(-4)} \Rightarrow x = \dfrac{5}{8}.$
Então: $y = -4\left(\dfrac{5}{8}\right) + 5 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}.$
Lados do retângulo: $\dfrac{5}{8}$ e $\dfrac{5}{2}$.



270.



Consideremos o triângulo com os catetos sobre os eixos cartesianos.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ passa pelos pontos $A(0, 6)$ e $B(8, 0)$. Determinemos a equação $y = ax + b$ dessa reta:

$$\begin{cases} 6 = a \cdot 0 + b \\ 0 = 8a + b \end{cases} \Rightarrow b = 6 \text{ e } a = \frac{-3}{4}$$

Portanto, $y = \dfrac{-3}{4}x + 6.$

Como o vértice C do retângulo pertence a essa reta, temos:

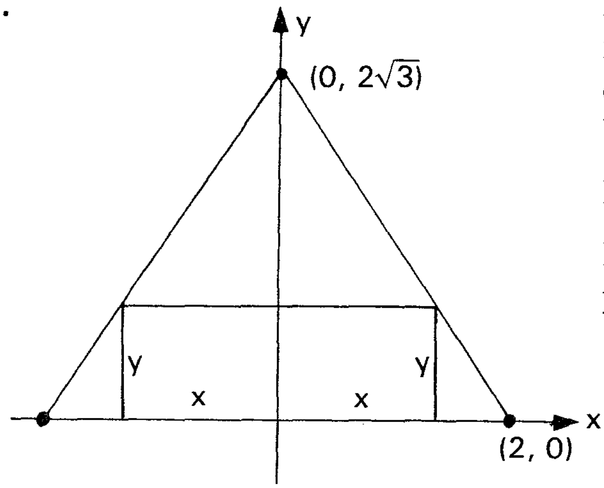
Área $z = xy \Rightarrow z = x\left(\frac{-3}{4}x + 6\right) \Rightarrow z = \frac{-3}{4}x^2 + 6x$

Como $a = \frac{-3}{4} < 0$, então existe máximo.

$$x_V = \frac{-6}{2\left(\frac{-3}{4}\right)} \Rightarrow x_V = 4 \Rightarrow y = 3$$

Portanto, o retângulo tem lados *3* e *4*.

271.



Localizemos o triângulo equilátero conforme a figura ao lado. A altura, estando sobre o eixo y, cortando o lado da base no seu ponto médio.

Por Pitágoras, $h^2 = 4^2 - 2^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$.

Determinemos a reta que passa pelos pontos $(0, 2\sqrt{3})$ e $(2, 0)$:

$$\begin{cases} b = 2\sqrt{3} \\ 0 = 2a + b \Rightarrow a = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ reta $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

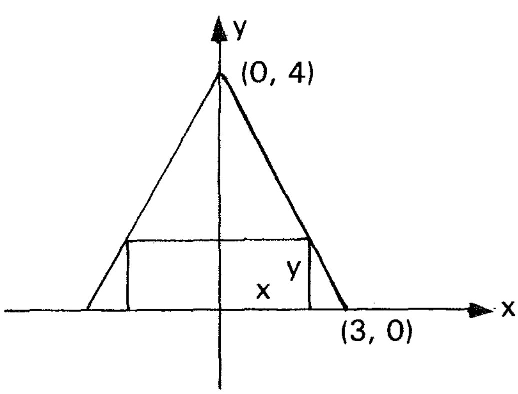
Metade da área do retângulo: $z = xy \Rightarrow z = x(-\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}) \Rightarrow$
$\Rightarrow z = -\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x$.

Como $a = -\sqrt{3}$, negativo, existe máximo.

$$x_V = \frac{-b}{2a}, \text{ vem } x = \frac{-2\sqrt{3}}{2(-\sqrt{3})} = 1 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

Portanto, base $= 2x = 2$ e altura $y = \sqrt{3}$.

272.



Determinemos a reta que passa pelos pontos $(3, 0)$ e $(0, 4)$.

$$\begin{cases} 4 = b \\ 0 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-4}{3} \Rightarrow y = \frac{-4}{3}x + 4$$

Metade da área: $z = xy \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = x\left(\frac{-4}{3}x + 4\right) \Rightarrow z = \frac{-4}{3}x^2 + 4x.$$

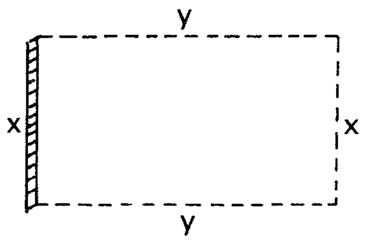
Como $a = \dfrac{-4}{3} < 0$, existe máximo.

$$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-4}{2\left(\frac{-4}{3}\right)} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 2$$

Portanto, base $= 2x = 3$ e altura $y = 2$.

273. $Q(x, -6) \in$ parábola $y = x^2 - 6$; então, $-6 = x^2 - 6 \Rightarrow x = 0$.
Distância horizontal $= 4 - 0 = 4$

274.



$2y + x = 400 \Rightarrow y = \dfrac{400 - x}{2}$

Área $z = xy \Rightarrow z = \dfrac{-x^2}{2} + 200x$

Como $a = \dfrac{-1}{2} < 0$, existe máximo.

Então: $x_V = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-200}{2\left(\frac{-1}{2}\right)} = 200 \Rightarrow y = 100.$

Portanto, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{200}{100} = 2$ ou $\dfrac{y}{x} = \dfrac{100}{200} = \dfrac{1}{2}$.

276. $\left.\begin{array}{l} y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = 2 \\ \Delta = 16 - 12m \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{12m - 16}{12} = 2 \Rightarrow m = \dfrac{10}{3}$

277. $\left.\begin{array}{l} y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = 7 \\ \Delta = m^2 - 4\left(\dfrac{-1}{3}\right)\left(\dfrac{-1}{2}\right) = m^2 - \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\frac{2}{3} - m^2}{4\left(\frac{-1}{3}\right)} = 7 \Rightarrow m^2 - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = -\sqrt{10}$ ou $m = \sqrt{10}$

285. $f(2) = 4a + 2b + c = 0$
$f(3) = 9a + 3b + c = -2$
$f(4) = 16a + 4b + c = 0$
Resolvendo esse sistema, vem $a = 2$.

286. $f(x) = -x^2 + 2x$

$V_{f(x)}$ (1, 1) e zeros: $x = 0$ ou $x = 2$

Como $g(x)$ deve ser simétrico a $f(x)$ em relação à reta $y = 3$, então temos:

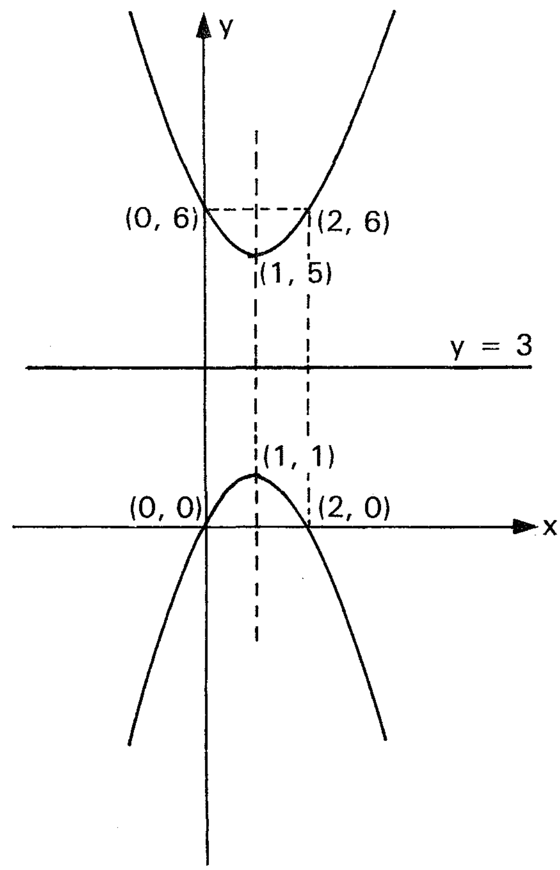
$$\begin{aligned} f(x) &\longrightarrow g(x) \\ \text{ponto } (0, 0) &\longrightarrow \text{ponto } (0, 6) \\ \text{vértice } (1, 1) &\longrightarrow \text{vértice } (1, 5) \\ \text{ponto } (2, 0) &\longrightarrow \text{ponto } (2, 6) \end{aligned}$$

Fazendo $g(x) = ax^2 + bx + c$, devemos ter:

$$\begin{aligned} g(0) &= c = 6 \\ g(1) &= a + b + c = 5 \\ g(2) &= 4a + 2b + c = 6 \end{aligned}$$

e, resolvendo o sistema, vem

$a = 1,\ b = -2,\ c = 6.$



287. Notemos inicialmente que x_1 e x_2 são abscissas dos pontos de interseção das curvas $g(x) = x^2 + x$ e $h(x) = -x^2 - x + 4$; portanto, são as raízes da equação $x^2 + x = -x^2 - x - 4$, ou seja, $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$.

Temos:

$g(x) = x^2 + x \Rightarrow a = 1, b = 1$ e $c = 0$

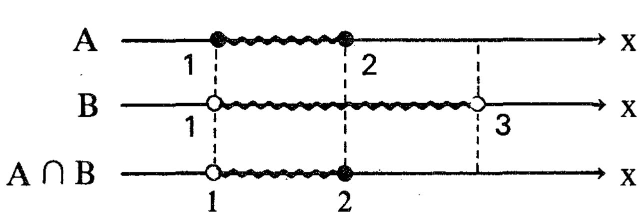
$h(x) = -x^2 - x + 4 \Rightarrow d = -1, e = -1$ e $f = 4$

$$F(x) = \frac{d - a}{3}x^3 + \frac{e - b}{2}x^2 + (f - c)x = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x$$

$$F(x_2) - F(x_1) = F(1) - F(-2) = \frac{7}{3} - \left(-\frac{20}{3}\right) = 9$$

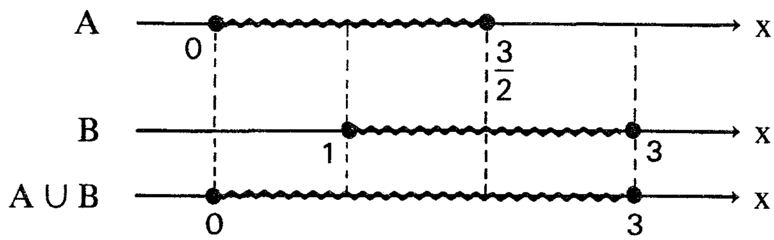
296. $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0 \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 2$

$x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow 1 < x < 3$

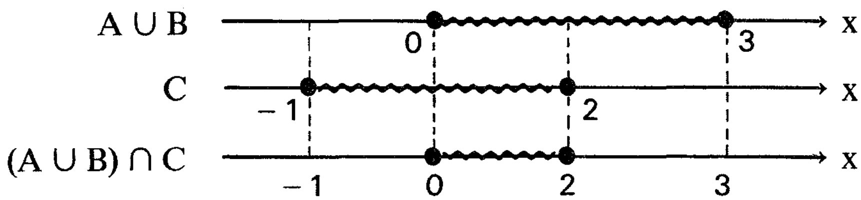


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$

297. $-2x^2 + 3x \geqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$



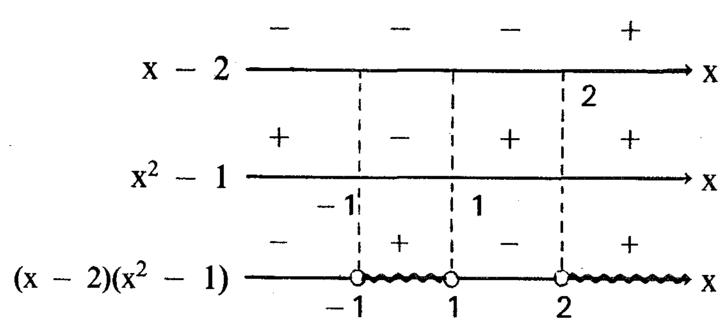
$x^2 - x - 2 \leqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2$



$(A \cup B) \cap C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

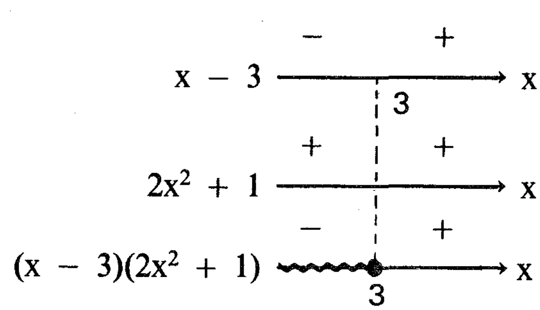
298. $p(a) < 0 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 < 0 \Rightarrow 2 < a < 3$
Calculando $q(a)$ para $a = 2$ e $a = 3$, vem: $q(2) = 20$ e $q(3) = 30$.
Então, para $2 < a < 3$, então $20 < q(a) < 30$, pois nesse intervalo $q(x)$ é crescente.

301. e) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$
$x^2(x - 2) - (x - 2) > 0$
$(x - 2)(x^2 - 1) > 0$



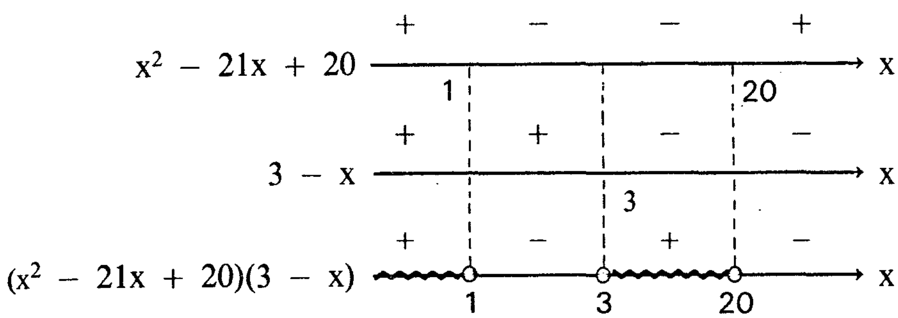
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$.

f) $2x^3 - 6x^2 + x - 3 \leqslant 0$
$2x^2(x - 3) + (x - 3) \leqslant 0$
$(x - 3)(2x^2 + 1) \leqslant 0$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$.

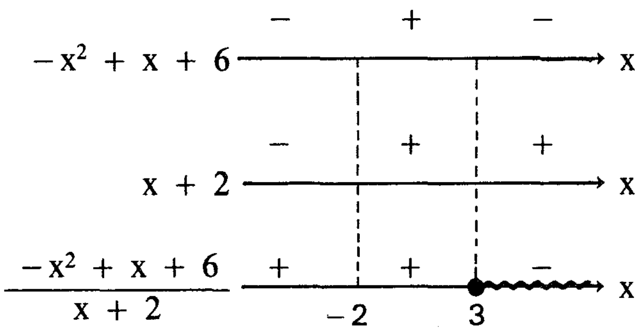
303.



O maior número inteiro que satisfaz a inequação é *19*.

310. $\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 \\ f(-2) = -4 \\ f(-1) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(-2)}{x+2} \leqslant f(-1) \Leftrightarrow \dfrac{-x^2 + 4}{x + 2} \leqslant -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-x^2 + x + 6}{x + 2} \leqslant 0 \Rightarrow$

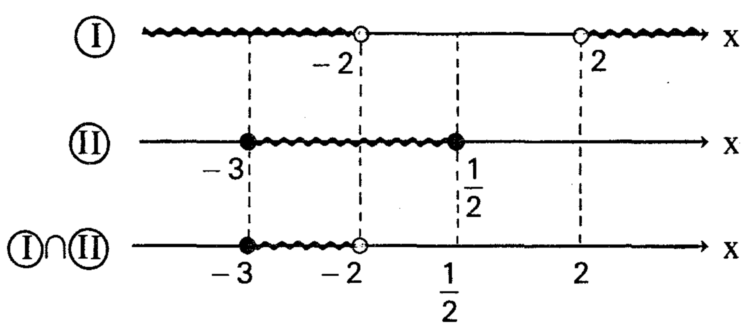


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

315. b) $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leqslant -5x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3 > x^2 + 1 & \text{(I)} \\ 2x^2 - 3 \leqslant -5x & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $2x^2 - 3 - x^2 - 1 > 0$
$x^2 - 4 > 0$

(II) $2x^2 - 3 + 5x \leqslant 0$
$2x^2 + 5x - 3 \leqslant 0$

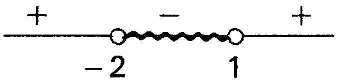


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -2\}$.

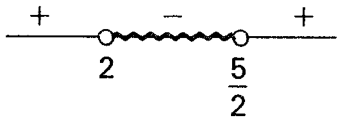
f) $4x^2 - 5x + 4 < 3x^2 - 6x + 6 < x^2 + 3x - 4 \Leftrightarrow$

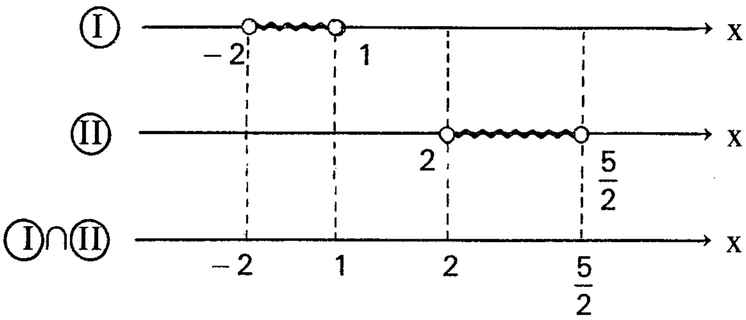
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 5x + 4 < 3x^2 - 6x + 6 & \text{(I)} \\ 3x^2 - 6x + 6 < x^2 + 3x - 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $x^2 + x - 2 < 0$



(II) $2x^2 - 9x + 10 < 0$

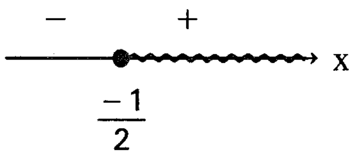




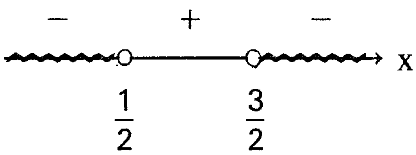
$S = \varnothing.$

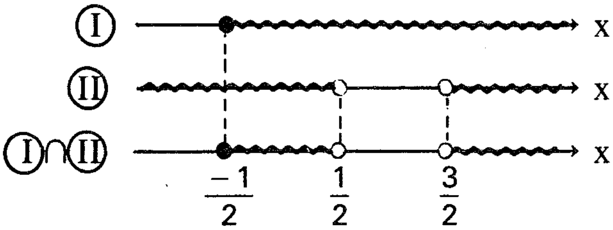
316. c) $\begin{cases} 1 + 2x \geqslant 0 & \text{(I)} \\ -4x^2 + 8x - 3 < 0 & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $1 + 2x \geqslant 0$



(II) $-4x^2 + 8x - 3 < 0$

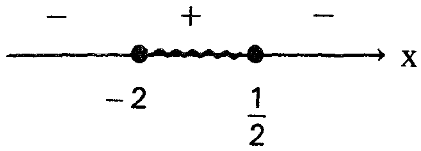




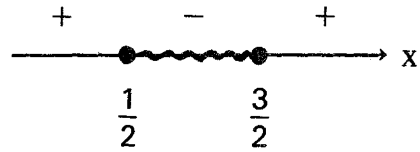
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{3}{2}\right\}.$

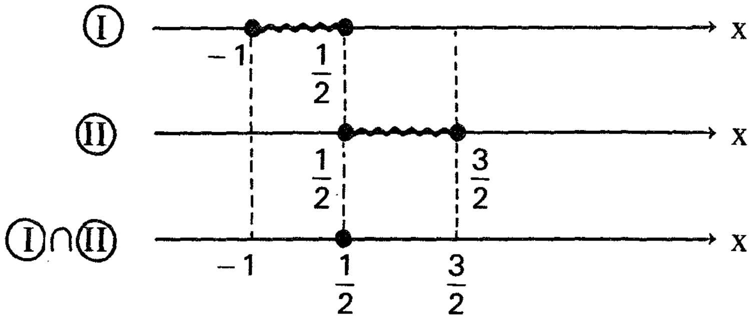
d) $\begin{cases} -2x^2 - x + 1 \geqslant 0 & \text{(I)} \\ 4x^2 - 8x + 3 \leqslant 0 & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $-2x^2 - x + 1 \geqslant 0$



(II) $4x^2 - 8x + 3 \leqslant 0$





$S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

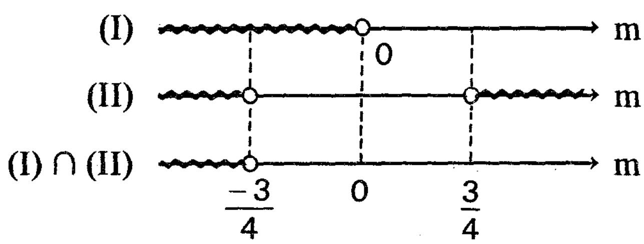
324. c) $\dfrac{x}{x^2 + 4} > \dfrac{x + m}{x^2 + 1} \Rightarrow \dfrac{x}{x^2 + 4} - \dfrac{x + m}{x^2 + 1} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x(x^2 + 1) - (x^2 + 4)(x + m)}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} > 0 \Rightarrow \dfrac{-mx^2 - 3x - 4m}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} > 0$

Como $x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então:

$-mx^2 - 3x - 4m > 0, \forall x$ e daí $-m > 0$ (I) e $\Delta < 0$ (II)

$\Delta < 0 \Rightarrow 9 - 16m^2 < 0 \Rightarrow m^2 > \dfrac{9}{16} \Rightarrow m < \dfrac{-3}{4}$ ou $m > \dfrac{3}{4}$



Então, $m < \dfrac{-3}{4}$.

325. $x^2 + 2x + (p - 10) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4(p - 10) < 0 \Rightarrow$

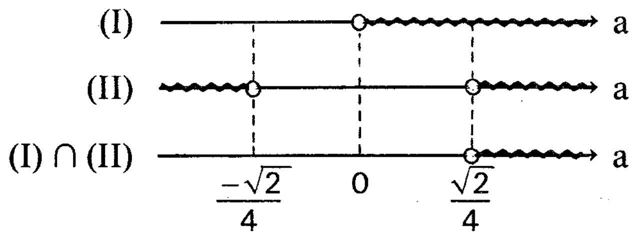
$\Rightarrow 44 - 4p < 0 \Rightarrow p > 11.$

327. $\dfrac{x-a}{x^2+1} < \dfrac{x+a}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{x-a}{x^2+1} - \dfrac{x+a}{x^2} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2ax^2 - x - a}{x^2(x^2+1)} < 0$

Como $x^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ e $x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então devemos ter:
$-2ax^2 - x - a < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e daí $-2a < 0$ (I) e $\Delta < 0$ (II)

$\Delta = 1 - 8a^2 < 0 \Rightarrow a^2 > \dfrac{1}{8} \Rightarrow a < \dfrac{-\sqrt{2}}{4}$ ou $a > \dfrac{\sqrt{2}}{4}$



Portanto, $a > \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

333. Para ter uma raiz positiva e outra negativa, 0 (zero) deve estar entre elas, ou seja, $x_1 < 0 < x_2$, isto é, devemos ter: $(m-2) \cdot f(0) < 0$ e daí
$(m-2)(m+2) < 0 \Rightarrow -2 < m < 2$.

334. Como as raízes devem ter sinais contrários, então devemos ter: $x_1 < 0 < x_2$, ou seja,
$2 \cdot f(0) < 0 \Rightarrow 2 \cdot (k-5) < 0 \Rightarrow k < 5$ (I)
Como $|x_1| < |x_2|$, então $\dfrac{S}{2} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} < 0 \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} < \dfrac{-k}{4} < 0 \Rightarrow k > 0$ (II)
De (I) e (II) vem $0 < k < 5$; então, o menor valor inteiro é $k = 1$.

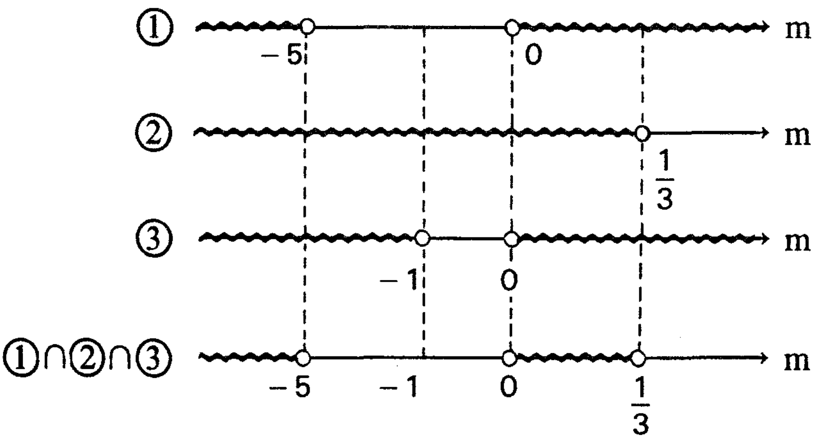
338. $0 < x_1 < x_2 < 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x_1 < x_2 & \text{I} \\ \quad\text{e} & \\ x_1 < x_2 < 2 & \text{II} \end{cases}$

I $0 < x_1 < x_2$ ocorre em três condições:

1 $m \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m(m+5) > 0 \Rightarrow m < -5$ ou $m > 0$

2 $\Delta > 0 \Rightarrow 4(m^2 + 2m + 1) - 4m(m+5) > 0 \Rightarrow m < \dfrac{1}{3}$

3 $\dfrac{S}{2} > 0 \Rightarrow \dfrac{2(m+1)}{2m} > 0 \Rightarrow \dfrac{m+1}{m} > 0 \Rightarrow m < -1$ ou $m > 0$



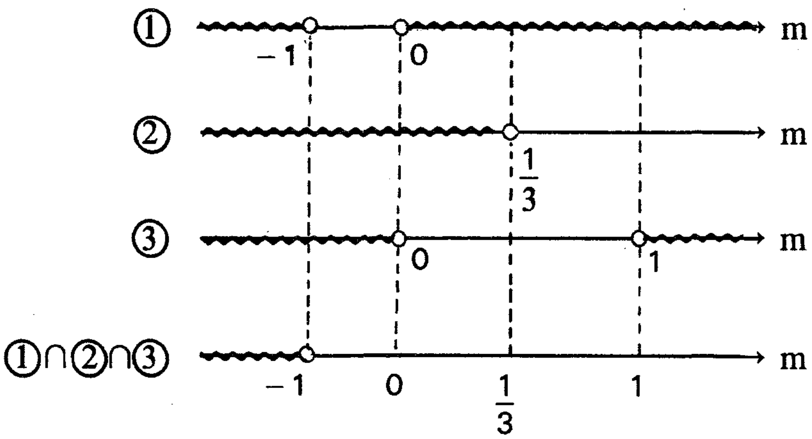
Então: ① $m < -5$ ou $0 < m < \frac{1}{3}$.

(II) $x_1 < x_2 < 2$ ocorre em três condições:

① $m \cdot f(2) > 0 \Rightarrow m(m + 1) > 0 \Rightarrow m < -1$ ou $m > 0$

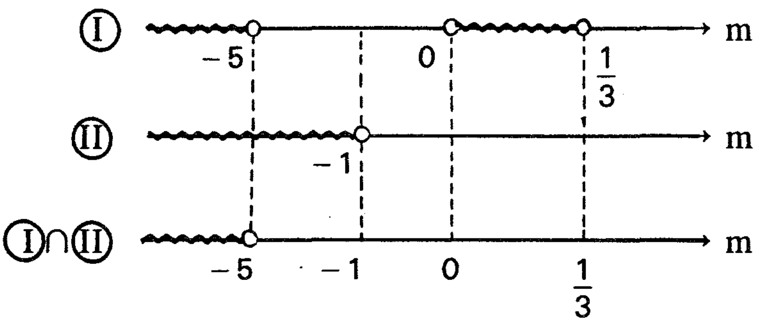
② $\Delta > 0$ (idem item (I)): $m < \frac{1}{3}$

③ $\frac{S}{2} < 2 \Rightarrow \frac{2(m + 1)}{2m} < 2 \Rightarrow \frac{-m + 1}{m} < 0 \Rightarrow m < 0$ ou $m > 1$



Então: (II) $m < -1$.

De (I) e (II), vem:



Resposta: $m < -5$.

339. $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$

$$x_1 < 0 < x_2 < 2 \iff \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \quad \text{(I)} \\ \quad \text{e} \\ x_1 < x_2 < 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $x_1 < 0 < x_2$

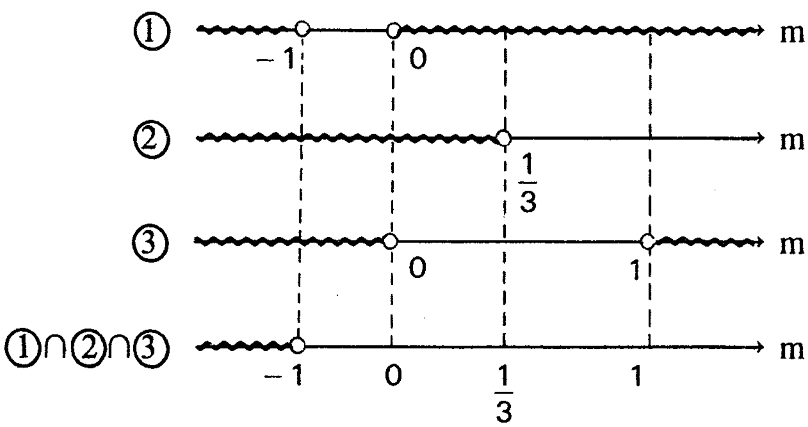
$a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m\,(m + 5) < 0 \Rightarrow -5 < m < 0$

(II) $x_1 < x_2 < 2$

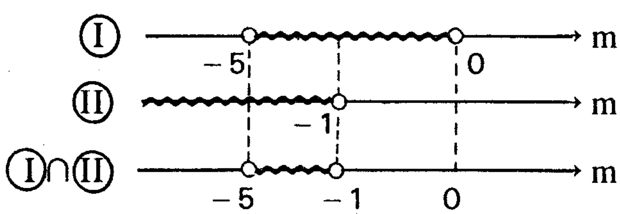
1) $a \cdot f(2) > 0 \Rightarrow m[4m - 4(m + 1) + m + 5] > 0 \Rightarrow m(m + 1) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m < -1$ ou $m > 0$

2) $\Delta > 0 \Rightarrow 4(m + 1)^2 - 4m(m + 5) > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{3}$

3) $\frac{S}{2} < 2 \Rightarrow \frac{-b}{2a} < 2 \Rightarrow \frac{2(m + 1)}{2m} < 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{-m + 1}{m} < 0 \Rightarrow m < 0$ ou $m > 1$



Considerando (I) e (II), temos:



Então: $-5 < m < -1$.

344. $(m + 1)x^2 + 2(m + 1)x + m - 1 = 0$ (raízes negativas)

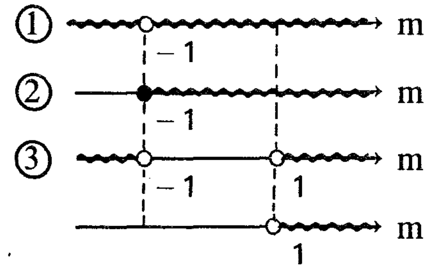
1) $m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$

2) $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow 4(m + 1)^2 - 4(m + 1)(m - 1) \geqslant 0 \Rightarrow m \geqslant -1$

3) $P > 0 \Rightarrow \dfrac{m - 1}{m + 1} > 0 \Rightarrow m < -1$ ou $m > 1$

4) $S < 0 \Rightarrow \dfrac{-2(m + 1)}{m + 1} < 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Portanto, temos:



Então: $m > 1$

346. $(m - 2)x^2 + (3m - 1)x + (m + 1) = 0$ (sinais contrários)

1) $m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$

2) $P < 0 \Rightarrow \dfrac{m + 1}{m - 2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$

Portanto: $-1 < m < 2$.

350. $2x^2 + kx + k - 5 = 0$

1) raízes de sinais contrários $\Rightarrow P < 0 \Rightarrow \dfrac{k - 5}{2} < 0 \Rightarrow k < 5$

2) raiz negativa em valor absoluto menor que a raiz positiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow S > 0 \Rightarrow \dfrac{k}{2} > 0 \Rightarrow k > 0$

De 1) e 2), vem: $0 < k < 5$ e, como $k < \mathbb{Z}$, $k = 1$ é o menor valor.

351. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

a) $m \in A$ e $n \in A$, m e n coeficientes de $x^2 + 2mx + n = 0$; considerando A^2 como o conjunto de pares ordenados que representam o par (m, n), teremos *49* possíveis soluções.

b) As equações que têm raízes reais e distintas são aquelas que verificam a condição $\Delta > 0$, ou seja, $m^2 > n$. Essa condição é satisfeita pelos pares (m, n) seguintes:

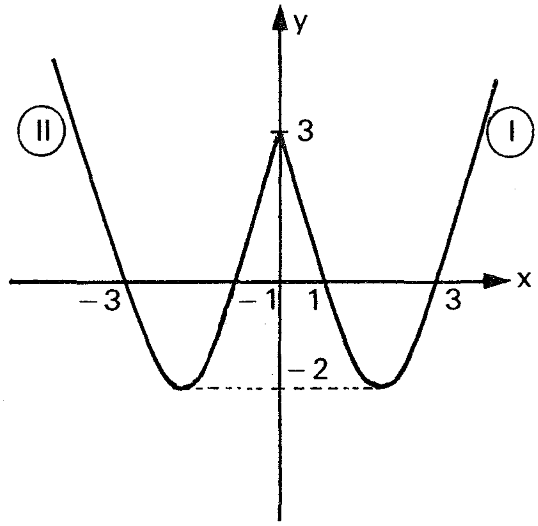
$(-3, -3), (-3, -2), (-3, -1), (-3, 0), (-3, 1), (-3, 2), (-3, 3)$
$(-2, -3), (-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3)$
$(-1, 0)$
$(1, 0)$
$(2, -3), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3)$
$(3, -3), (3, -2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$
num total de *30* pares.

c) As equações que têm raízes reais, distintas e positivas verificam também as condições $P = n > 0$ e $S = -2m > 0$, ou seja, $n > 0$ e $m < 0$. Essas condições são satisfeitas por *6* dos pares do item *b*.

Capítulo VIII – Função modular

368. g) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

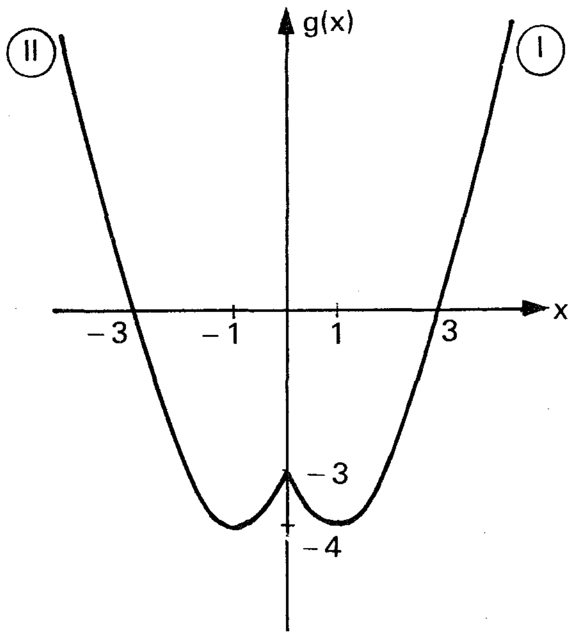
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, \text{ se } x \geqslant 0 \text{ (I)} \\ \text{ou} \\ x^2 + 4x + 3, \text{ se } x < 0 \text{ (II)} \end{cases}$$



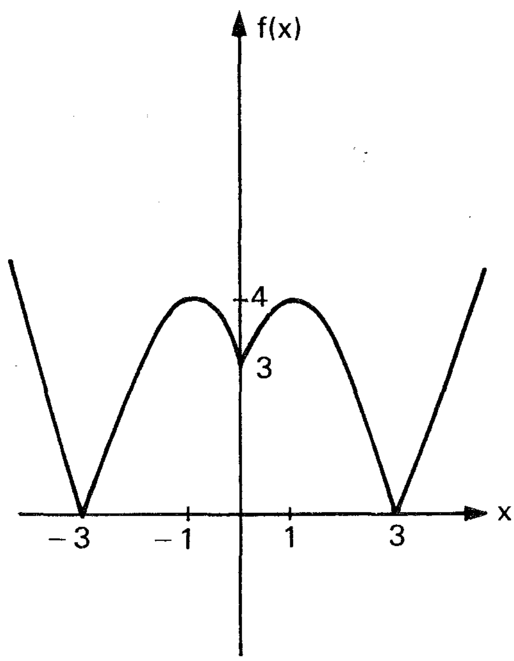
h) $f(x) = |x^2 - 2|x| - 3|$

Consideremos inicialmente a função (sem o módulo):

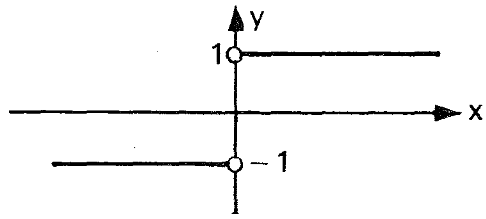
$$g(x) = x^2 - 2|x| - 3 = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, \text{ se } x \geqslant 0 \text{ (I)} \\ \text{ou} \\ x^2 + 2x - 3, \text{ se } x < 0 \text{ (II)} \end{cases}$$



Como a função $f(x) = |g(x)|$, então na região entre -3 e 3 tem sua imagem simétrica em relação ao eixo x.

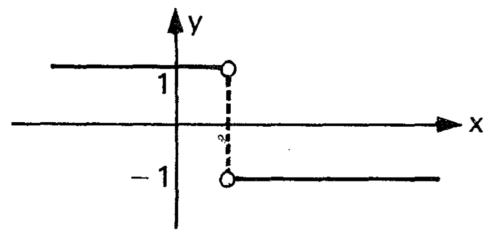


372. $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

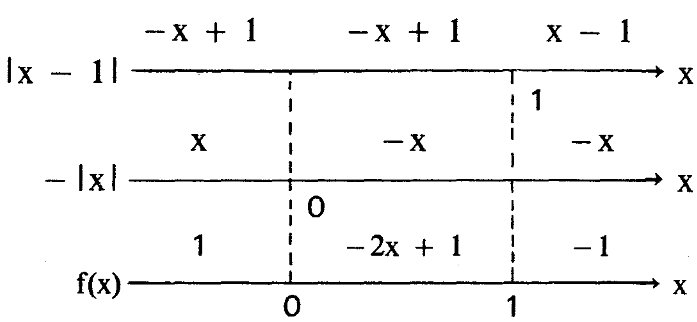


373. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{1-x} =$

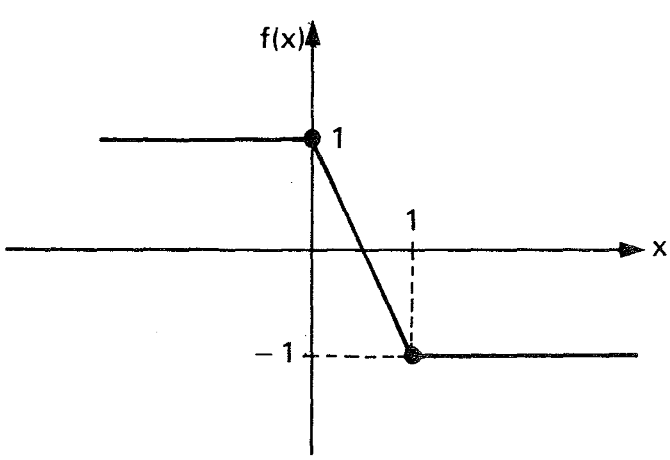
$$= \begin{cases} \dfrac{x-1}{1-x} = -1, \text{ se } x > 1 \\ \dfrac{-(x-1)}{1-x} = 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$



375. a) $|x-1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ \quad \text{ou} \\ -x + 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$ e $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$



$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ -2x + 1, \text{ se } 0 \leqslant x < 1 \\ -1, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$



382. a) $|x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ \text{ou} \\ -x + 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

$$x + |x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ \text{ou} \\ 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

b) $f(x) = g(x) = k$ tem solução única quando o gráfico de f intercepta a reta $y = k$ em um único ponto e isso só ocorre para $k > 1$.

384. d) $|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3$

$x^2 + 2x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 1$

$|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 15x - 3 = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (rejeitada)} \\ \text{ou} \\ x = -13 \end{cases} \\ \text{ou} \\ 2x^2 + 15x - 3 = -x^2 - 2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \text{ (rejeitada)} \\ \text{ou} \\ x = -6 \end{cases} \end{cases}$$

$S = \{-13, -6\}$.

e) $|3x - 2| = 3x - 2$

$3x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{2}{3}$

$$|3x - 2| = 3x - 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 3x - 2, \forall x, x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ 3x - 2 = -3x + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{2}{3}\right\}$.

f) $|4 - 3x| = 3x - 4$

$3x - 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{4}{3}$

$$|4 - 3x| = 3x - 4 \Rightarrow \begin{cases} 4 - 3x = 3x - 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \\ \text{ou} \\ 4 - 3x = -3x + 4, \forall x, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{4}{3}\right\}$.

387. a) $|x + 1| = \begin{cases} x + 1, x \geqslant -1 \\ \text{ou} \\ -x - 1, x < -1 \end{cases}$

$$|x| = \begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

$\lvert x + 1\rvert$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$	x
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$	x	x
$\lvert x + 1\rvert - \lvert x\rvert$	-1	$2x + 1$	1	x
		-1	0	

$$|x + 1| - |x| = \begin{cases} -1, x < -1 \\ 2x + 1, -1 \leqslant x < 0 \\ 1, x \geqslant 0 \end{cases}$$

Portanto, a equação dada fica:

$-1 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$ (rejeitado porque *x* deve ser menor que -1)

$2x + 1 = 2x + 1, \forall x, x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant x < 0$

$1 = 2x + 1 \Rightarrow x = 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0\}$.

b) $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{|x - 1|}{x - 1} \Leftrightarrow \dfrac{|x|}{x} - \dfrac{|x - 1|}{x} = 0$

$\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ -1, x < 0 \end{cases}$ e $\dfrac{|x - 1|}{x - 1} = \begin{cases} 1, x \geqslant 1 \\ \text{ou} \\ -1, x < 1 \end{cases}$

$\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$	-1	1	1	x
$\dfrac{\lvert x - 1\rvert}{x - 1}$	-1	-1	1	x
$\dfrac{\lvert x\rvert}{x} - \dfrac{\lvert x - 1\rvert}{x - 1}$	0	2	0	x
		0	1	

$$\frac{|x|}{x} - \frac{|x - 1|}{x - 1} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 2, 0 \leqslant x < 1 \\ 0, x \geqslant 1 \end{cases}$$

Então, $\dfrac{|x|}{x} - \dfrac{|x - 1|}{x - 1} = 0$ tem $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant 1\}$.

389. e) $\left|\dfrac{2x-3}{3x-1}\right| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3}{3x-1} < -2 \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-3}{3x-1} > 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$

(I) $\dfrac{2x-3}{3x-1} < -2 \Rightarrow \dfrac{8x-5}{3x-1} < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{5}{8}$

(II) $\dfrac{2x-3}{3x-1} > 2 \Rightarrow \dfrac{-4x-1}{3x-1} > 0 \Rightarrow \dfrac{-1}{4} < x < \dfrac{1}{3}$

Fazendo a reunião de (I) e (II), vem:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{5}{8} \text{ e } x \neq \dfrac{1}{3}\right\}$

g) $||x| - 2| > 1 \Leftrightarrow (|x| - 2 < -1 \text{ ou } |x| - 2 > 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (|x| < 1 \text{ ou } |x| > 3) \Rightarrow (-1 < x < 1 \text{ ou } x < -3 \text{ ou } x > 3)$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -1 < x < 1 \text{ ou } x > 3\}.$

390. $\left|2 - \dfrac{1}{x}\right| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant 2 - \dfrac{1}{x} \leqslant 5 \Rightarrow -7 \leqslant \dfrac{-1}{x} \leqslant 3 \Rightarrow$

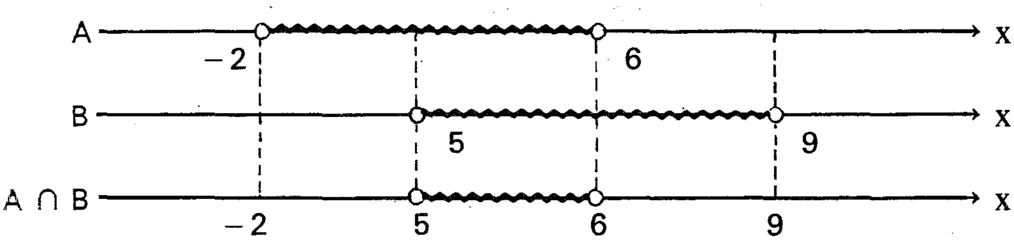
$\Rightarrow -3 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 7 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{x} + 3 \geqslant 0 \text{ e } \dfrac{1}{x} - 7 \leqslant 0\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{3x+1}{x} \geqslant 0 \text{ e } \dfrac{1-7x}{x} \leqslant 0\right) \Rightarrow \left(x \leqslant -\dfrac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant \dfrac{1}{7}\right)$

Todos os números inteiros positivos menores que *30* satisfazem a condição.

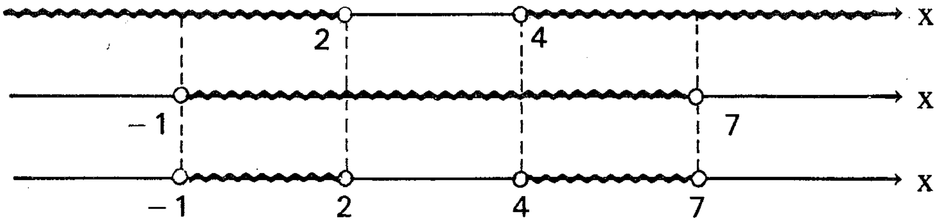
392. $|x - 2| < 4 \Rightarrow -2 < x < 6$ e

$|x - 7| < 2 \Rightarrow 5 < x < 9$



O intervalo $]5, 6[$ tem comprimento igual a *1*.

393. $1 < |x - 3| < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| > 1 \Rightarrow (x < 2 \text{ ou } x > 4) \\ \text{e} \\ |x-3| < 4 \Rightarrow -1 < x < 7 \end{cases}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ ou } 4 < x < 7\}.$

395. $|x - 2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$ ①

$|x^2 - 4| < N \Rightarrow 4 - N < x^2 < 4 + N \Rightarrow \sqrt{4 - N} < x < \sqrt{4 + N}$ ②

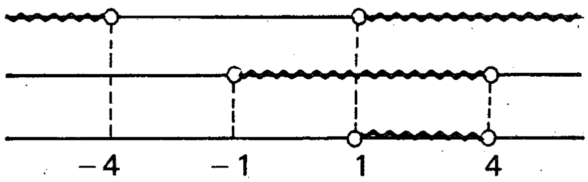
Considerando que ② deve estar contido em ①, o maior valor possível para *N* é *3*.

400. $|x^2 - 4| < 3x \Leftrightarrow -3x < x^2 - 4 < 3x \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > -3x \Rightarrow x^2 + 3x - 4 > 0 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ x^2 - 4 < 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \text{ (II)} \end{cases}$

(I) $x < -4$ ou $x > 1$

(II) $-1 < x < 4$

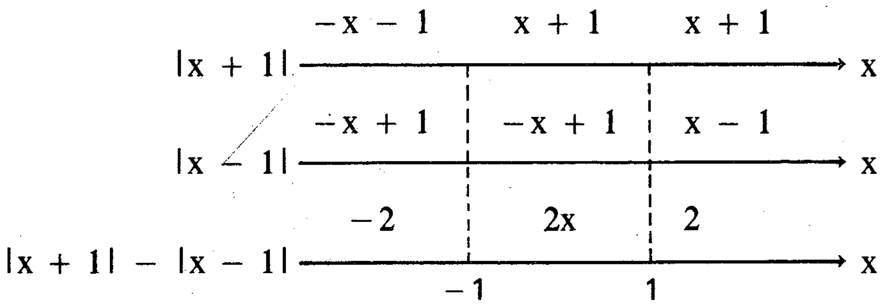
(I) $\cap$ (II)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

404. f) $3\{|x + 1| - |x - 1|\} \leqslant 2x^2 - 4x$

$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, x \geqslant -1 \\ \text{ou} \\ -x - 1, x < -1 \end{cases}$ e $|x - 1| = \begin{cases} x - 1, x \geqslant 1 \\ \text{ou} \\ -x + 1, x < 1 \end{cases}$



Então: $3\{|x + 1| - |x - 1|\} = \begin{cases} -6, x < -1 \\ 6x, -1 \leqslant x < 1 \\ 6, x \geqslant 1 \end{cases}$

1º) se $x < -1$, $-6 \leqslant 2x^2 - 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x + 6 \geqslant 0, \forall x, x \in \mathbb{R}$

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cap \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

2º) se $-1 \leqslant x < 1,\ 6x \leqslant 2x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 5x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 5$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 5\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0\}$

3º) se $x \geqslant 1,\ 6 \leqslant 2x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 3$

$S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 3\} =$

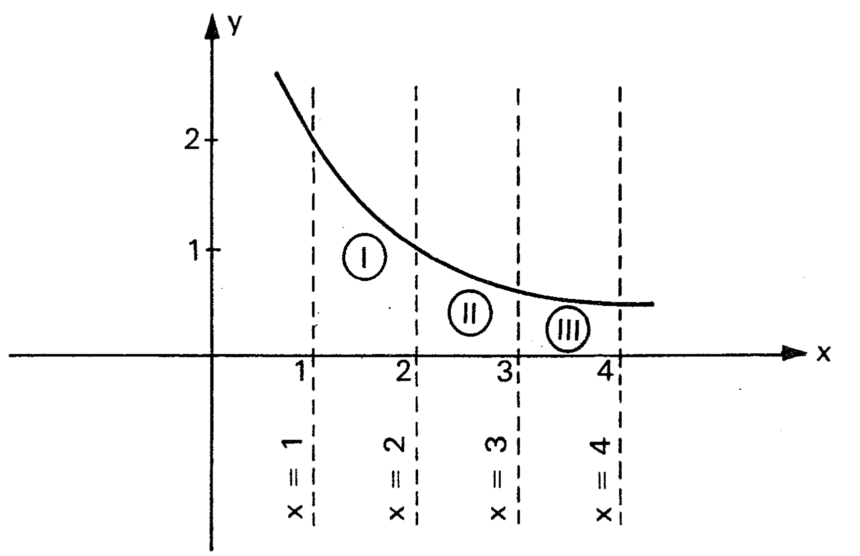
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}.$

Capítulo IX — Outras funções elementares

413.

x	$\frac{2}{x}$
1	2
2	1
3	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{1}{2}$



$$\text{Área do trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

As bases *B* e *b* são os segmentos contidos nas retas $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$, entre o eixo *Ox* e a curva $\frac{2}{x}$. A altura *h* são os intervalos no eixo *Ox* entre essas retas.

$$\left.\begin{aligned} A_I &= \frac{(2 + 1) \cdot 1}{2} = \frac{3}{2} \\ A_{II} &= \frac{\left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot 1}{2} = \frac{5}{6} \\ A_{III} &= \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot 1}{2} = \frac{7}{12} \end{aligned}\right| \Rightarrow A = A_I + A_{II} + A_{III} = \frac{3}{2} + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} = \frac{35}{12}$$

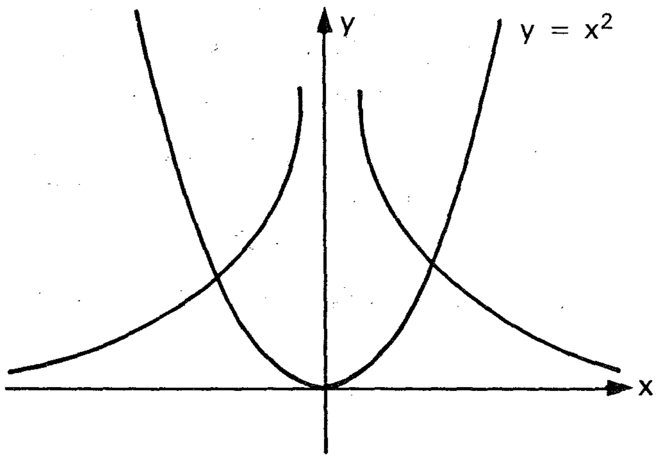
415. $\dfrac{1}{x^2} = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = x^2 = 1$

$S = \{(1, 1), (-1, 1)\}$.



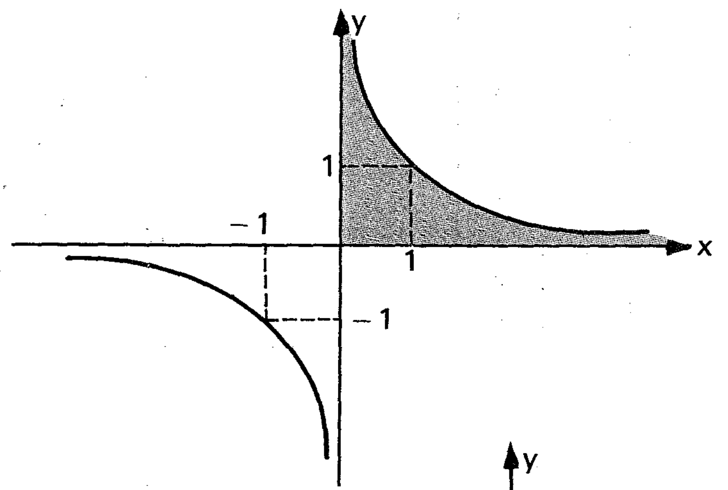
416. $1 + \dfrac{1}{x} = x \Rightarrow \dfrac{x + 1}{x} = \dfrac{x^2}{x} \xRightarrow{x \neq 0} x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

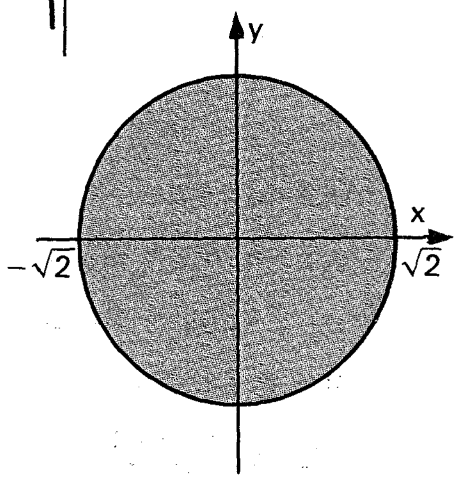
417. $0 \leqslant xy \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x}$

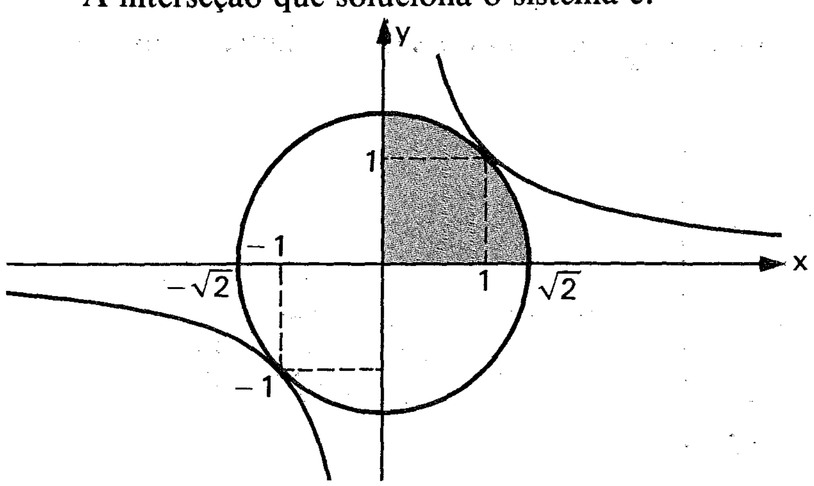
$\updownarrow$

$x^2 + y^2 \leqslant 2$ é o círculo de centro $C(0, 0)$ e raio $\sqrt{2}$.





A interseção que soluciona o sistema é:



Capítulo X — Função composta — Função inversa

425. a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x - 3)^2 + 2 = (x^2 - 6x + 9) + 2 = x^2 - 6x + 11$
b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 + 2) - 3 = x^2 - 1$
c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^2 + 2)^2 + 2 = (x^4 + 4x^2 + 4) + 2 = x^4 + 4x^2 + 6$
d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x - 3) - 3 = x - 6$

426. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 2(-x) - 1 = -x^3 - 3x^2 - 2x - 1$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - 1$

$$\begin{aligned} f(x - 1) &= (x - 1)^3 - 3(x - 1)^2 + 2(x - 1) - 1 = \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3(x^2 - 2x + 1) + 2x - 2 - 1 = \\ &= x^3 - 6x^2 + 11x - 7 \end{aligned}$$

427. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(2x + a) + 2 = 6x + 3a + 2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(3x + 2) + a = 6x + 4 + a$

$(f \circ g) = (g \circ f) \Rightarrow 6x + 3a + 2 = 6x + 4 + a \Rightarrow 3a + 2 = 4 + a \Rightarrow a = 1$

429. $$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (x^2 + ax + b)^2 + 2(x^2 + ax + b) + 3 = \\ &= x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b + 2)x^2 + (2ab + 2a)x + b^2 + 2b + 3 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = (x^2 + 2x + 3)^2 + a(x^2 + 2x + 3) + b = \\ &= x^4 + 4x^3 + (10 + a)x^2 + (12 + 2a)x + 3a + b + 9 \end{aligned}$$

$$(f \circ g) = (g \circ f) \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 & (1) \\ a^2 + 2b + 2 = 10 + a & (2) \\ 2ab + 2a = 12 + 2a & (3) \\ b^2 + 2b + 3 = 3a + b + 9 & (4) \end{cases}$$

A solução desse sistema é $a = 2$ e $b = 3$ e, então: $f = g$.

432. $(f \circ g)(x) = \dfrac{(2x + 3) + 1}{(2x + 3) - 2} = \dfrac{2x + 4}{2x + 1}$

$D(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{-1}{2}\right\}$

$(g \circ f)(x) = 2\left(\dfrac{x + 1}{x - 2}\right) + 3 = \dfrac{5x - 4}{x - 2}$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

433. $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = 3(x^2 - 1) + 2 = 3x^2 - 1$

$[(h \circ g) \circ f](x) = [(h \circ g)f(x)] = 3(2x + 1)^2 - 1 = 12x^2 + 12x + 2$

434. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (1 - x)^2 - (1 - x) + 2 = x^2 - x + 2$

$[h \circ (g \circ f)](x) = h \circ (g \circ f)(x) = 2(x^2 - x + 2) + 3 = 2x^2 - 2x + 7$

435. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - 4\,\text{sen}^2\,2\theta}$

$(f \circ g)(x) = 0 \iff 1 - 4\,\text{sen}^2\,2\theta = 0 \Rightarrow \text{sen}\,2\theta = \pm\frac{1}{2}$ e, então, temos:

$$\text{sen}\,2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ 2\theta = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{ou sen}\,2\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ 2\theta = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

Portanto: $(f \circ g)$ se anula para $\theta = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi$, $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ou $\theta = \frac{7\pi}{12} + k\pi$.

436. $(f \circ g)(x) = 2(ax + b) + 3 = 2ax + 2b + 3$
$(g \circ f)(x) = a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
$(f \circ g) = (g \circ f) \Rightarrow 2b + 3 = 3a + b \Rightarrow b = 3a - 3$
Portanto: $C = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = 3a - 3\}$.

440. $$(f \circ f)(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - x}} = \frac{1}{\frac{1 - x - 1}{1 - x}} = \frac{1 - x}{-x} = \frac{x - 1}{x}$$

$$(f \circ [f \circ f])(x) = \frac{1}{1 - \frac{x - 1}{x}} = \frac{1}{\frac{x - x + 1}{x}} = \frac{x}{1} = x$$

448. $g(x) = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{g(x) - 3}{2}$

$$f(g(x)) = \frac{2x + 5}{x + 1} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{2\left(\frac{g(x) - 3}{2}\right) + 5}{\frac{g(x) - 3}{2} + 1} = \frac{g(x) - 3 + 5}{\frac{g(x) - 3 + 2}{2}} =$$

$$= \frac{2(g(x) + 2)}{g(x) - 1} = \frac{2g(x) + 4}{g(x) - 1} \Rightarrow f(x) = \frac{2x + 4}{x - 1}\ (x \neq 1)$$

450. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + b)^2 = 4x^2 + 4bx + b^2 = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4b = -12 \Rightarrow b = -3$ e $b^2 = 9$

451. $f(x + 1) = \frac{3x + 5}{2x + 1} = \frac{3(x + 1) + 2}{2(x + 1) - 1} \Rightarrow f(x) = \frac{3x + 2}{2x - 1}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

452. $g(x) = 2x + 3$

Trocando x por $f(x)$, vem: $g(f(x)) = 2\,f(x) + 3$.

Mas $g(f(x)) = \dfrac{2x + 5}{x + 1}$.

Então: $2\,f(x) + 3 = \dfrac{2x + 5}{x + 1} \Rightarrow f(x) = \dfrac{-x + 2}{2x + 2}$.

Então: $f\left(\dfrac{-12}{15}\right) = f\left(\dfrac{-4}{5}\right) = \dfrac{\dfrac{4}{5} + 2}{\dfrac{-8}{5} + 2} = 7.$

453. $g(x) = x^2 - x$

Trocando x por $f(x)$, vem: $g(f(x)) = [f(x)]^2 - f(x)$.

Mas $g(f(x)) = x^2 + 13x + 42$.

Então: $[f(x)]^2 - f(x) = x^2 + 13x + 42$

$[f(x)]^2 - f(x) - (x^2 + 13x + 42) = 0$

$\Delta = 1 + 4x^2 + 52x + 168 = 4x^2 + 52x + 169 = (2x + 13)^2$

$$f(x) = \frac{1 \pm (2x + 13)}{2} = \begin{cases} \dfrac{2x + 14}{2} = x + 7 \\[2mm] \dfrac{-2x - 12}{2} = -x - 6 \end{cases}$$

Com coeficientes positivos: $f(x) = x + 7$, cujo termo independente de x é 7.

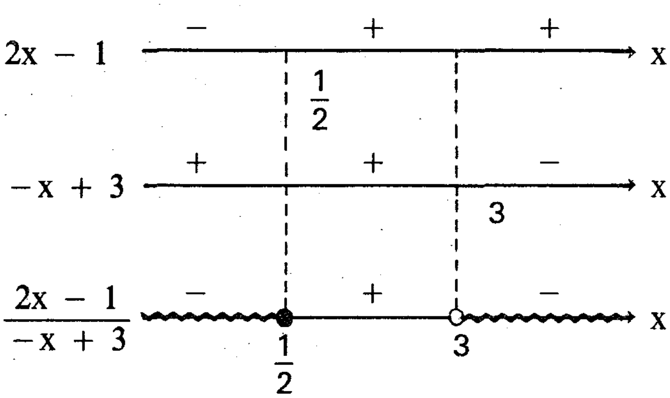
454. a) $f(f(x)) = 2(2x + k) + k = 4x + 3k = 4x - 3 \Rightarrow k = -1$

Então, $f(x) = 2x - 1$.

$$\left.\begin{aligned} f(g(x)) &= 2(-x + t) - 1 = -2x + 2t - 1 \\ g(f(x)) &= -(2x - 1) + t = -2x + t + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2t - 1 = t + 2 \Rightarrow t = 3$$

Então, $g(x) = -x + 3$.

b) $\dfrac{2x - 1}{-x + 3} \leqslant 0$



$x \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou $x > 3$

456. Fazendo $g(x) = y$, $f(g(x)) = f(y)$:

1º) $y \geqslant 2 \Rightarrow g(x) \geqslant 2 \Leftrightarrow 2x + 3 \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant \frac{-1}{2}$

$$f(y) = y^2 - 4y + 3 \Rightarrow f(g(x)) = [g(x)]^2 - 4g(x) + 3 = $$
$$= (2x + 3)^2 - 4(2x + 3) + 3 = 4x^2 + 4x$$

2º) $y < 2 \Rightarrow g(x) < 2 \Leftrightarrow 2x + 3 < 2 \Rightarrow x < \frac{-1}{2}$

$$f(y) = 2y - 3 \Rightarrow f(g(x)) = 4x + 6 - 3 = 4x + 3$$

Portanto: $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 + 4x, \text{ se } x \geqslant \frac{-1}{2} \\ 4x + 3, \text{ se } x < \frac{-1}{2} \end{cases}$

Consideremos, agora, a lei $(g \circ f)(x)$:

$g(f(x)) = 2(x^2 - 4x + 3) + 3 = 2x^2 - 8x + 9$, se $x \geqslant 2$

$g(f(x)) = 2(2x - 3) + 3 = 4x - 3$, se $x < 2$

Então: $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 9, \text{ se } x \geqslant 2 \\ 4x - 3, \text{ se } x < 2 \end{cases}$

458. $f(x) = \begin{cases} 4x - 3, x \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2, x < 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1, x > 2 \\ 1 - x^2, x \leqslant 2 \end{cases}$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

$$= \begin{cases} f(x + 1) = \begin{cases} 4(x + 1) - 3, x + 1 \geqslant 0 \text{ e } x > 2 \text{ (I)} \\ (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 2, x + 1 < 0 \text{ e } x > 2 \text{ (II)} \end{cases} \\ f(1 - x^2) = \begin{cases} 4(1 - x^2) - 3, 1 - x^2 \geqslant 0 \text{ e } x \leqslant 2 \text{ (III)} \\ (1 - x^2)^2 - 3(1 - x^2) + 2, 1 - x^2 < 0 \text{ e } x \leqslant 2 \text{ (IV)} \end{cases} \end{cases}$$

Simplificando essas expressões, temos:

(I) $f(g(x)) = 4x + 1$ se $x > 2$

(II) é impossível

(III) $f(g(x)) = 1 - 4x^2$ se $-1 \leqslant x \leqslant 1$

(IV) $f(g(x)) = x^4 + x^2$ se $x < -1$ ou $1 < x \leqslant 2$

Então: $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x + 1, x > 2 \\ 1 - 4x^2, -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^4 + x^2, x < -1 \text{ ou } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

$$= \begin{cases} g(4x - 3) = \begin{cases} (4x - 3) + 1, 4x - 3 > 2 \text{ e } x \geqslant 0 \text{ (I)} \\ 1 - (4x - 3)^2, 4x - 3 \leqslant 2 \text{ e } x \geqslant 0 \text{ (II)} \end{cases} \\ g(x^2 - 3x + 2) = \begin{cases} (x^2 - 3x + 2) + 1, x^2 - 3x + 2 > 2 \text{ e } x < 0 \text{ (III)} \\ 1 - (x^2 - 3x + 2), x^2 - 3x + 2 \leqslant 2 \text{ e } x < 0 \text{ (IV)} \end{cases} \end{cases}$$

Simplificando essas expressões, temos:

(I) $g(f(x)) = 4x - 2$ se $x > \frac{5}{4}$

(II) $g(f(x)) = -16x^2 + 24x - 8$ se $0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{4}$

(III) $g(f(x)) = x^2 - 3x + 3$ se $x < 0$

(IV) é impossível

Portanto:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 4x - 2, x > \frac{5}{4} \\ -16x^2 + 24x - 8, 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{4} \\ x^2 - 3x + 3, x < 0 \end{cases}$$

459. $f(g(x)) = \begin{cases} 4x^2 - 6x - 1, x \geqslant 1 \\ 4x + 3, x < 1 \end{cases}$

Como $g(x) = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{g(x) + 3}{2}$ e, para $x \geqslant 1$, $g(x) \geqslant -1$.

$$f(g(x)) = \begin{cases} 4\left(\frac{g(x) + 3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{g(x) + 3}{2}\right) - 1, g(x) \geqslant -1 \\ 4\left(\frac{g(x) + 3}{2}\right) + 3, g(x) < -1 \end{cases}$$

Simplificando, encontramos:

$$f(g(x)) = \begin{cases} [g(x)]^2 + 3 \cdot g(x) - 1, g(x) \geqslant -1 \\ 2\,g(x) + 9, g(x) < -1 \end{cases}$$

Portanto: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1, x \geqslant -1 \\ 2x + 9, x < -1 \end{cases}$

463. condição: $f(x) = x^2 - 4x + 6 \geqslant b, \forall x \in \mathbb{R}$ (ou seja, b é o valor mínimo de f)

$y_m = -\frac{\Delta}{4a} = b \Rightarrow \frac{16}{8} = b \Rightarrow b = 2$

464. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, injetora.

Seja $f(a) = 2a^2 - 3a + 4$.

Então: $2x^2 - 3x + 4 = 2a^2 - 3a + 4$.

$$2(x^2 - a^2) - 3(x - a) = 0 \Rightarrow x + a = \frac{3}{2}$$

Mas, como f é injetora, $f(x) = f(a) \Rightarrow x = a$.

Então: $2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$.

475. Notemos que $f(x) = \frac{x + (x - s)}{x(x - s)} = \frac{1}{x - s} + \frac{1}{x}$.

1. Para todo $y \in \mathbb{R}$, se $y = \dfrac{2x - s}{x(s - x)}$, resulta:

$y(xs - x^2) = 2x - s \Rightarrow yx^2 + (2 - ys)x - s = 0.$

Fazendo $g(x) = yx^2 + (2 - ys)x - s$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot g(0) = y(-s) \\ a \cdot g(s) = y(s) \end{array}\right\} \Rightarrow ag(0) \text{ e } ag(s) \text{ têm sinais opostos } \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ existe um $\bar{x}$ tal que $g(\bar{x}) = 0$ e $0 < \bar{x} < s \Rightarrow$

$\Rightarrow$ existe $\bar{x}$ tal que $y = \dfrac{2\bar{x} - s}{\bar{x}(s - \bar{x})}$

então f é sobrejetora.

2. Dados x_1 e x_2 tais que $0 < x_1 < s$ e $0 < x_2 < s$, se $f(x_1) = f(x_2)$, temos:

$$\frac{2x_1 - s}{x_1(s - x_1)} = \frac{2x_2 - s}{x_2(s - x_2)} \Rightarrow (2x_1 - s)(x_2s - x_2^2) = (2x_2 - s)(x_1s - x_1^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow s^2(x_1 - x_2) + s(x_1 + x_2)(x_2 - x_1) + 2x_1x_2(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(s^2 - (x_1 + x_2)s + 2x_1x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

então f é injetora.

476. Seja I_f o conjunto imagem da função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Então, $I_f \subset \mathbb{N}$ ①

Pelo enunciado $m \in \mathbb{N}$ e $\exists n, n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) \geqslant m$.

Então, $m \in \mathbb{N}$ e $m \leqslant f(n)$, ou seja:

$A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leqslant f(n)\} \subset I_f$ e, portanto, $m \in I_f$.

Como $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subset I_f$. ②

De ① e ②, conclui-se que $I_f = \mathbb{N}$, ou seja, que $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função sobrejetora.

477. $f(x) = y$, $I_A(x) = x$ e $I_B(x) = x$

$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$

$(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = I_B(y) = y = f(x)$

480. Ao escolher a imagem de a temos 4 possibilidades.

Escolhida a imagem de a, ao escolher a imagem de b temos 3 possibilidades.

Então, o total é $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades.

481. $f_1 = \{(a, d), (b, d), (c, e)\}$ $f_4 = \{(a, e), (b, d), (c, d)\}$

$f_2 = \{(a, d), (b, e), (c, d)\}$ $f_5 = \{(a, e), (b, d), (c, e)\}$

$f_3 = \{(a, d), (b, e), (c, e)\}$ $f_6 = \{(a, e), (b, e), (c, d)\}$

483. a) Sejam x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$.

Temos:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = x_2$
então f é injetora.

b) Dado um y em $\mathbb{R}$, existe um x em $\mathbb{R}$ tal que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x')$ em que $x' = f(x)$. Então, g é sobrejetora.

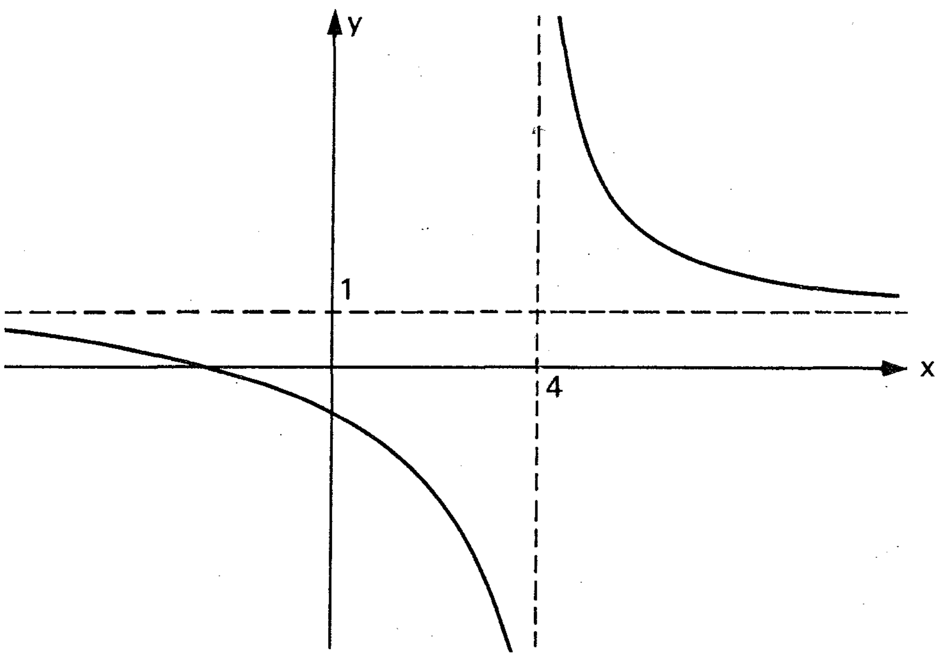
484. a) $f(x) = 2x - 5$

1º) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 5 = 2x_2 - 5 \Rightarrow x_1 = x_2$ é injetora
$I_f = \mathbb{R} \Rightarrow f$ é sobrejetora
Portanto, f é bijetora.

2º) $y = 2x - 5$
Permutando as variáveis x, y, vem:
$$x = 2y - 5 \Rightarrow y = \frac{x+5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}.$$

b) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-4}$

1º) $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1+1}{x_1-4} = \dfrac{x_2+1}{x_2-4} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 - 4) = (x_2 + 1)(x_1 - 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g$ é injetora
Verifica-se que para todo
$y \in \mathbb{R} - \{1\}$,
$\exists x, x \in \mathbb{R} - \{4\} \mid g(x) = y$;
portanto, g é sobrejetora.
Então, g é bijetora.



2º) $y = \dfrac{x + 1}{x - 4}$

Permutando as variáveis, vem:

$$x = \frac{y + 1}{y - 4} \Rightarrow x(y - 4) = y + 1 \Rightarrow y = \frac{1 + 4x}{x - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1 + 4x}{x - 1}.$$

c) $h(x) = x^5$

1º) $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1^5 = x_2^5 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ é injetora

$I_h = \mathbb{R} \Rightarrow h$ é sobrejetora.

Portanto, h é bijetora.

2º) $y = x^5$

Permutando as variáveis, vem:

$x = y^5 \Rightarrow y = \sqrt[5]{x} \Rightarrow h^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$.

487. Determinemos $f(x) = ax + b$:

$$\begin{cases} -3a + b = 4 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-2}{3} \text{ e } b = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{-2}{3}x + 2$$

Permutando as variáveis em $y = \dfrac{-2}{3}x + 2$, vem:

$$x = \frac{-2}{3}y + 2 \Rightarrow y = \frac{-3x}{2} + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3x}{2} + 3 \Rightarrow f^{-1}(2) = 0.$$

494. $f(x) = 3 + 2^{x-1}$

a) $g = f^{-1} : A \to \mathbb{R} \Rightarrow f : \mathbb{R} \to A \Rightarrow A$ é I_f (sim)

b) Verifiquemos se existem valores para x quando $y \leqslant 4$:

$3 + 2^{x-1} \leqslant 4 \Rightarrow 2^{x-1} \leqslant 1 \Rightarrow x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1.$

Como existem valores x para $y \leqslant 4$, então a resposta é *não*.

c) Determinemos a inversa de f:

$y = 3 + 2^{x-1}$

Permutando as variáveis: $x = 3 + 2^{y-1} \Rightarrow x - 3 = 2^{y-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x - 3) = 2^y \Rightarrow y = \log_2 2(x - 3) \Rightarrow g(x) = \log_2 2(x - 3).$

Então: $g\left(\dfrac{11}{2}\right) = \log_2 2\left(\dfrac{11}{2} - 3\right) = \log_2 5.$ (sim)

d) Determinemos $h(x)$:

$f(x) = 3 + 2^{x-1} \Rightarrow f(h(x)) = 3 + 2^{h(x)-1}.$

Mas $f(h(x)) = 3 + 2x$.

Então: $3 + 2^{h(x)-1} = 3 + 2x \Rightarrow 2^{h(x)} = 4x \Rightarrow h(x) = \log_2 4x.$

Então: $h\left(\dfrac{1}{4}\right) = 0.$ (sim)

e) $f(2x + 1) < 1 + 3 \cdot 2^x \Rightarrow 3 + 2^{2x} < 1 + 3 \cdot 2^x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 < 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \Leftrightarrow]0, 1[$ (sim)

f) $g(x) = \log_2 2(x - 3) \Rightarrow g(1) = \log_2 2(1 - 3) =$
$= \log_2 (-4)$ (não está definido) (não)

497. $y = \log_4 (x - 1)$
Permutando as variáveis, temos:
$x = \log_4 (y - 1) \Rightarrow 4^x = y - 1 \Rightarrow y = 4^x + 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = 4^x + 1.$
$(f \circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x)) = 3^{4^x + 1} - 1$
Então: $(f \circ g^{-1})(0) = 3^{4^0 + 1} - 1 = 3^2 - 1 = 8.$

498. $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{a\}$
$$y = \frac{2 + x}{2 - x}$$
Aplicando a regra prática, vem:
$$x = \frac{2 + y}{2 - y} \Rightarrow 2x - xy = 2 + y \Rightarrow 2x - 2 = y(1 + x) \Rightarrow y = \frac{2x - 2}{x + 1}.$$
Domínio: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow a = -1.$

504. f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{se } x \geqslant 2 \\ 2x - 1 & \text{se } -1 < x < 2 \\ -x^2 - 2x - 4 & \text{se } x \leqslant -1 \end{cases}$

1º) $x \geqslant 2$, então $y = x^2 - 4x + 7$; logo, $y \geqslant 3$.
2º) $-1 < x < 2$, então $y = 2x - 1$; logo, $-3 < y < 3$.
3º) $x \leqslant -1$, então $y = -x^2 - 2x - 4$; logo, $y \leqslant -3$.
Aplicando a regra prática, vem:
1º) $y \geqslant 2$ e $x \geqslant 3 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 7 \Rightarrow y^2 - 4y + (7 - x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 2 + \sqrt{x - 3}$
2º) $-1 < y < 2$ e $-3 < x < 3 \Rightarrow x = 2y - 1 \Rightarrow y = \dfrac{x + 1}{2}$
3º) $y \leqslant -1$ e $x \leqslant -3 \Rightarrow x = -y^2 - 2y - 4 \Rightarrow y^2 + 2y + (4 + x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -1 - \sqrt{-x - 3}$
Então:
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geqslant 3 \\ \dfrac{x + 1}{2} & \text{se } -3 < x < 3 \\ -1 - \sqrt{-x - 3} & \text{se } x \leqslant -3 \end{cases}$$

506. $f(x) = 2x + |x + 1| - |2x - 4|$
$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geqslant -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$ e $|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & \text{se } x \geqslant 2 \\ -2x + 4 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

	$x < -1$	$-1 \leqslant x < 2$	$x \geqslant 2$
$\lvert x + 1 \rvert$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$
$-\lvert 2x - 4 \rvert$	$2x - 4$	$2x - 4$	$-2x + 4$
$2x$	$2x$	$2x$	$2x$
$f(x)$	$3x - 5$	$5x - 3$	$x + 5$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{se } x < -1 \\ 5x - 3 & \text{se } -1 \leqslant x < 2 \\ x + 5 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Então, temos:

1º) $x < -1$, $y = 3x - 5$; logo, $y < -8$.

2º) $-1 \leqslant x < 2$, $y = 5x - 3$; logo, $-8 \leqslant y < 7$.

3º) $x \geqslant 2$, $y = x + 5$; logo, $y \geqslant 7$.

Aplicando a regra prática, vem:

1º) $x < -8$ e $y < -1$, $x = 3y - 5 \Rightarrow y = \dfrac{x + 5}{3}$

2º) $-8 \leqslant x < 7$ e $-1 \leqslant y < 2$, $x = 5y - 3 \Rightarrow y = \dfrac{x + 3}{5}$

3º) $x \geqslant 7$ e $y \geqslant 2$, $x = y + 5 \Rightarrow y = x - 5$

Portanto, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 5}{3} & \text{se } x < -8 \\ \dfrac{x + 3}{5} & \text{se } -8 \leqslant x < 7 \\ x - 5 & \text{se } x \geqslant 7 \end{cases}$

Assim: $f^{-1}(42) = 42 - 5 = 37$.

510. d) $(g \circ f) : A \to \mathbb{R}_+$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4(x^2 - 3x) + 9 = 4x^2 - 12x + 9 = y$

Aplicando a regra prática para obter a inversa, vem:

$x = 4y^2 - 12y + 9 \Rightarrow 4y^2 - 12y + (9 - x) = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3 \pm \sqrt{x}}{2}$.

Como $(g \circ f)^{-1} : \mathbb{R}_+ \to A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{3}{2}\right\}$, então $y = \dfrac{3 + \sqrt{x}}{2}$.

e) $(g \circ f) : A \to C$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1 + 4} = \sqrt{x^2 + 3} = y$

Aplicando a regra prática, vem:

$x = \sqrt{y^2 + 3} \Rightarrow x^2 = y^2 + 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 3}$.

Como $(g \circ f)^{-1} : C \to A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$, então $y = \sqrt{x^2 - 3}$.

512. $f: A \to \mathbb{R}_-$ $\quad g: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ $\quad h: \mathbb{R}_+ \to B$

$f(x) = 2x - 1$ $\quad g(x) = x^2$ $\quad h(x) = 4x - 1$

$[h \circ (g \circ f)]: A \to B$

Determinemos $h \circ (g \circ f)$:

1º) $(g \circ f)(x) = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

2º) $[h \circ (g \circ f)](x) = 4(4x^2 - 4x + 1) - 1 = 16x^2 - 16x + 3$

Então: $[h \circ (g \circ f)](x) = y = 16x^2 - 16x + 3$.

Aplicando a regra prática para determinar a inversa, temos:

$x = 16y^2 - 16y + 3 \Rightarrow 16y^2 - 16y + (3 - x) = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2 \pm \sqrt{x + 1}}{4}$.

Como $[h \circ (g \circ f)]^{-1}(x): B \to A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$, então $y = \dfrac{2 - \sqrt{x + 1}}{4}$.

Apêndice I — Equações irracionais

516. $|\sqrt{2 + x}| = x$, então devemos ter $x \geqslant 0$.

$$2 + x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -1 \text{ (rejeitado)} \end{cases}$$

$S = \{2\}$.

517. a) $\left(\dfrac{9 + a}{3}\right)^3 = \left(3 + \dfrac{a}{3}\right)^3 = 27 + 3 \cdot 9 \cdot \dfrac{a}{3} + 3 \cdot 3 \dfrac{a^2}{9} + \dfrac{a^3}{27} =$

$= 27 + 9a + a^2 + (3^{-1} \cdot a)^3$ (V)

b) $2{,}333... = 2 + 0{,}3 + 0{,}03 + ... = 2\dfrac{1}{3}$ (V)

porque $0{,}3 + 0{,}03 ...$ é uma P.G. infinita de primeiro termo $\dfrac{3}{10}$ e razão $\dfrac{1}{10}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow S = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{1}{3}$ e, então, $2 + \dfrac{1}{3} = 2\dfrac{1}{3}$.

c) $\sqrt{x} = 2 - x \Rightarrow x = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$, que tem duas raízes reais e positivas. (V)

d) $|a| - |a + 1| < 0 \Leftrightarrow |a| < |a + 1|$ é *falso*, porque, por exemplo, se $a = -2$, vem: $|-2| < |-2 + 1| \Rightarrow 2 < 1$.

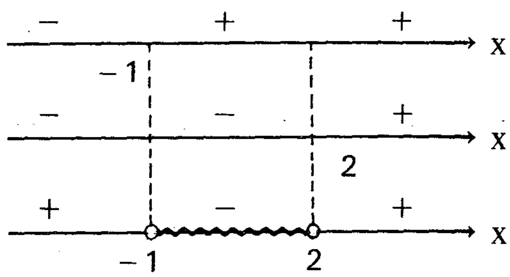
e) $\dfrac{a + d}{2} = \dfrac{5}{12}$ e $\dfrac{b + c}{2} = \dfrac{5}{12} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a + b + c + d}{2} = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b + c + d = \frac{5}{3} \text{ (V)}$$

f) $|x - 1|(x + 1)(x - 2) < 0$

Como $|x - 1| > 0$, sempre, então $(x + 1)(x - 2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$.



Portanto, *f*) é *verdadeiro*.

g) $\dfrac{b^4 - a^2}{(b - \sqrt{a})} = \dfrac{(b^2 - a)(b^2 + a)}{(b - \sqrt{a})} = \dfrac{(b - \sqrt{a})(b + \sqrt{a})(b^2 + a)}{b - \sqrt{a}} =$

$= (b + \sqrt{a})(b^2 + a) = b^3 + b^2a^{\frac{1}{2}} + ab + a^{\frac{3}{2}}$ e, então, *g*) é *falso*.

523. Devemos, inicialmente, verificar se *0* ou *1* são soluções da equação:

$x = 0 \Rightarrow 0^{\sqrt{0}} = \sqrt{0^0}$ (V)

$x = 1 \Rightarrow 1^{\sqrt{1}} = \sqrt{1^1}$ (V)

Resolvendo, vem: $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$

$$x^{2\sqrt{x}} = x^x \Rightarrow 2\sqrt{x} = x \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$$

$S = \{0, 1, 4\}$.

526. e) $\sqrt{x + 1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x + 8}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 1 - 2\sqrt{x + 1} + 1 = x - \sqrt{x + 8} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{x + 1} - 2 = \sqrt{x + 8} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x + 1) - 8\sqrt{x + 1} + 4 = x + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8\sqrt{x + 1} = 3x \Rightarrow 64(x + 1) = 9x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9x^2 - 64x - 64 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-8}{9} \end{cases}$$

Fazendo a verificação, temos:

para $x = 8$: $\sqrt{8+1} - 1 = \sqrt{8 - \sqrt{8+8}} \Rightarrow 3 - 1 = \sqrt{8-4}$ (V)

para $x = \dfrac{-8}{9}$: $\sqrt{\dfrac{-8}{9} + 1} - 1 = \sqrt{\dfrac{-8}{9} - \sqrt{\dfrac{-8}{9} + 8}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{1}{3}} - 1 = \sqrt{\dfrac{-32}{9}}$ (F)

$S = \{8\}$.

530. a) $x + \sqrt{x^2+16} = \dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{x^2+16} + x^2 + 16 = 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{x^2+16} = -x^2 + 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2(x^2+16) = x^4 - 48x^2 + 576 \Rightarrow 64x^2 = 576 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Verificando:

para $x = 3$: $3 + \sqrt{9+16} = \dfrac{40}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow 3 + 5 = \dfrac{40}{5}$ (V)

para $x = -3$: $-3 + \sqrt{9+16} = \dfrac{40}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow -3 + 5 = \dfrac{40}{5}$ (F)

Então: $S = \{3\}$.

b) $\sqrt{x}\,(\sqrt{x+2}) + x + 2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+2x} = -x + 2 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Verificando:

para $x = \dfrac{2}{3}$: $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\sqrt{\dfrac{2}{3} + 2}\right) + \dfrac{2}{3} + 2 = 4 \Rightarrow \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{3} = 4$ (V)

Portanto: $S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

d) $(\sqrt{4x+20})\sqrt{x} = (4 - \sqrt{x})(4 + \sqrt{x}) \Rightarrow \sqrt{4x^2+20x} = 16 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 20x = 256 - 32x + x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x^2 + 52x - 256 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-64}{3} \text{ (rejeitado)} \end{cases}$$

Verificando para $x = 4$:

$$\frac{\sqrt{16 + 20}}{4 + \sqrt{4}} = \frac{4 - \sqrt{4}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{6}{6} = \frac{2}{2} \quad (V)$$

Portanto: $S = \{4\}$.

532. a) Devemos considerar $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1$ ou $x > 1$.

$$\frac{\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{x^2 - (x^2 - 1)}} + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{x^2 - (x^2 - 1)}} = \sqrt{2(x^2 + 1)} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{2(x^2 + 1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} + 2\sqrt{x^2 - (x^2 - 1)} + x + \sqrt{x^2 - 1} = 2(x^2 + 1) \Rightarrow$$

$$2x + 2 = 2(x^2 + 1) \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

Verificando para $x = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{0}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{0}}} = \sqrt{2 \cdot (2)} \Rightarrow 1 + 1 = 2 \quad (V)$$

$S = \{1\}$.

c) $$\frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}}} + \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}}} = \sqrt{x}$$

Devemos considerar $\begin{matrix} x \geqslant 0 \\ x + \sqrt{3} \geqslant 0 \\ x - \sqrt{3} \geqslant 0 \end{matrix} \Rightarrow x > +\sqrt{3}$

$$\frac{(x + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{3}})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}})(\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{3}})} + \frac{(x - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{3}})}{(\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}})(\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{3}})} = \sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x + \sqrt{3})(\sqrt{x}) - (x + \sqrt{3})(\sqrt{x + \sqrt{3}})}{-\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{(x - \sqrt{3})(\sqrt{x}) + (x - \sqrt{3})(\sqrt{x - \sqrt{3}})}{\sqrt{3}} = \sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-x\sqrt{x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{(x + \sqrt{3})^3}}{\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{(x - \sqrt{3})^3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{(x + \sqrt{3})^3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{(x - \sqrt{3})^3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x + \sqrt{3})^3} + \sqrt{(x - \sqrt{3})^3} = 3\sqrt{3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + \sqrt{3})^3 + (x - \sqrt{3})^3 + 2\sqrt{[(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})]^3} = 27x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(x^2 - 3)^3} = -2x^3 + 9x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x^2 - 3)^3 = 4x^6 - 36x^4 + 81x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 27x^2 = 108\ \Rightarrow\ x^2 = 4\ \Rightarrow\ \begin{cases} x = -2 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ x = 2 \end{cases}$$

A verificação para $x = 2$ segue os mesmos passos utilizados na resolução e chega-se a um resultado verdadeiro.
Portanto: $S = \{2\}$.

533. b) Inicialmente, para existência das raízes, devemos ter $x > 0$, $x + \sqrt{x} > 0$ e $x - \sqrt{x} > 0$, ou seja, $x > 1$.

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x}}{3\sqrt{x + \sqrt{x}}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (\sqrt{x + \sqrt{x}})^2 - (\sqrt{x + \sqrt{x}})(\sqrt{x - \sqrt{x}}) = \frac{4\sqrt{x}}{3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{4\sqrt{x}}{3}\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2 - x} = x - \frac{\sqrt{x}}{3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2 - x = x^2 - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{x}{9}\ \Rightarrow\ \frac{2x\sqrt{x}}{3} = \frac{10x}{9}\ \overset{x \neq 0}{\Longrightarrow}\ \sqrt{x} = \frac{5}{3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{25}{9}$$

Verificação:

$$\sqrt{\frac{25}{9} + \sqrt{\frac{25}{9}}} - \sqrt{\frac{25}{9} - \sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{\sqrt{40}}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{\frac{25}{9}}}{3\sqrt{\frac{25}{9} + \sqrt{\frac{25}{9}}}} = \frac{\frac{20}{3}}{\sqrt{40}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$S = \left\{\frac{25}{9}\right\}.$$

c) Notemos inicialmente que a condição para existência das raízes é $x \geqslant 0$.
Temos:

$$\frac{1 + x - \sqrt{2x + x^2}}{1 + x + \sqrt{2x + x^2}} = \frac{\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (1 + x - \sqrt{2x + x^2})(\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}) = (\sqrt{2 + x} + \sqrt{x})(1 + x + \sqrt{2x + x^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{2 + x} - \sqrt{x} + x\sqrt{2 + x} - x\sqrt{x} - (x + 2)\sqrt{x} + x\sqrt{2 + x} =$$

$$= \sqrt{2 + x} + \sqrt{x} + x\sqrt{2 + x} + x\sqrt{x} + (x + 2)\sqrt{x} + x\sqrt{2 + x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}(x + 2) = 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot (2x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3}{2} \text{ (rejeitada)} \end{cases}$$

Verificação:

$$\frac{1 + 0 - \sqrt{0}}{1 + 0 + \sqrt{0}} = \frac{\sqrt{2} + 0}{\sqrt{2} - 0} \quad (V)$$

$S = \{0\}$.

534. $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \sqrt{a + b - 2x}$

(I) $a - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant a$

$b - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant b$

$a + b - 2x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{a + b}{2}$

Então, se $a < b$, temos $x \leqslant a < b$ e, se $a \geqslant b$, temos $x < b \leqslant a$.

(II) $a - x + b - x + 2\sqrt{(a - x)(b - x)} = a + b - 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(a - x)(b - x)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = b \end{cases}$$

Portanto, de (I) e (II), vem:
se $a < b$, $S = \{a\}$ e, se $a \geqslant b$, $S = \{b\}$.

535. $2x + 2\sqrt{a^2 + x^2} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

(I) $a^2 + x^2 \geqslant 0$, quaisquer que sejam x e a reais.

(II) $2x\sqrt{a^2 + x^2} + 2(a^2 + x^2) = 5a^2 \Rightarrow 2x\sqrt{a^2 + x^2} = 3a^2 - 2x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2(a^2 + x^2) = 9a^4 - 12a^2x^2 + 4x^4 \Rightarrow 16a^2x^2 = 9a^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{9a^2}{16} \Rightarrow x = \pm\dfrac{3a}{4}$

Verificando:

para $x = \dfrac{-3a}{4}$: $2\left(\dfrac{-3a}{4}\right) + 2\sqrt{a^2 + \dfrac{9a^2}{16}} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2 + \dfrac{9a^2}{16}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-6a}{4} + 2 \cdot \dfrac{5a}{4} = \dfrac{4a^2}{a} \Rightarrow a = 4a$ (F)

para $x = \dfrac{3}{4}$, vem: $\dfrac{6a}{4} + 2 \cdot \dfrac{5a}{4} = 4a \Rightarrow \dfrac{16a}{4} = 4a$ (V)

Portanto: $S = \left\{\dfrac{3a}{4}\right\}$.

536. $\sqrt{x + a} = \sqrt{x} + \sqrt{b}$

Ⓘ $x + a \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -a$
$x \geqslant 0$
$b \geqslant 0$

Ⓘⓘ $x + a = x + 2\sqrt{bx} + b \Rightarrow 2\sqrt{bx} = a - b$

Como $2\sqrt{bx} \geqslant 0$, então $\begin{cases} a - b \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant b > 0 \text{ (há solução)} \\ a - b < 0 \Rightarrow a < b \text{ (não há solução)} \end{cases}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$$4bx = (a - b)^2 \Rightarrow x = \frac{(a - b)^2}{4b} \Rightarrow \text{se } b = 0 \text{ (não há solução)}$$

Portanto:

$a < b$ ou $b = 0 \Rightarrow S = \varnothing$

$a \geqslant b > 0 \Rightarrow S = \left\{\dfrac{(a - b)^2}{4b}\right\}$

$a = b = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x} \Rightarrow S = \mathbb{R}_+$

537. a) $\dfrac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}} = \sqrt{b}$

Ⓘ Condições iniciais

$\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{a + x} \neq \sqrt{a - x} \Rightarrow$
$\Rightarrow a + x \neq a - x \Rightarrow 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$\left.\begin{matrix} a + x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -a \\ a - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant a \end{matrix}\right\} \Rightarrow -a \leqslant x \leqslant a$
$b \geqslant 0$

Ⓘⓘ $\dfrac{(\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x})(\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x})}{(\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x})(\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x})} = \sqrt{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x})^2}{a + x - (a - x)} = \sqrt{b} \Rightarrow \frac{2a - 2\sqrt{a^2 - x^2}}{2x} = \sqrt{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = a - \sqrt{b}\,x \Rightarrow a^2 - x^2 = a^2 - 2a\sqrt{b}\,x + bx^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b + 1)x^2 - 2a\sqrt{b}\,x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x[(b + 1)x - 2a\sqrt{b}\,] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (rejeitada)} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2a\sqrt{b}}{b + 1} \; (b \neq -1) \end{cases}$$

Assim, como $-a \leqslant x \leqslant a$, vem:

$$-a \leqslant \frac{2a\sqrt{b}}{b + 1} \leqslant a \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2\sqrt{b}}{b + 1} \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -(b - 1) \leqslant 2\sqrt{b} \leqslant b - 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad [-(b - 1)]^2 \leqslant 4b \leqslant (b - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad b \geqslant 1$$

Portanto, se $b \geqslant 1$, $S = \left\{\dfrac{2a\sqrt{b}}{b + 1}\right\}$.

b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x - b}}{\sqrt{b} + \sqrt{x - a}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(I) Condições iniciais

$a \geqslant 0$

$b \geqslant 0$

$x - b \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x \geqslant b$

$x - a \geqslant b \quad \Rightarrow \quad x \geqslant a$

$\dfrac{a}{b} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad a \geqslant b$

Então: $x \geqslant a \geqslant b \geqslant 0$.

(II) $\sqrt{ab} + \sqrt{b(x - b)} = \sqrt{ab} + \sqrt{a(x - a)} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad b(x - b) = a(x - a) \quad \Rightarrow \quad (b - a)x = b^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad x = a + b$ (se $a \neq b$)

Se $a = b$, então $x \geqslant a \geqslant 0$.

Portanto: se $a = b$, $S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x \geqslant a\}$.

se $a \neq b$, $S = \{a + b\}$.

c) $\dfrac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}} = \dfrac{b}{a}$

(I) Condições iniciais

$$\left.\begin{aligned} a + x \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad x \geqslant -a \\ a - x \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad x \leqslant a \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad -a \leqslant x \leqslant a$$

$\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{a + x} \neq \sqrt{a - x} \Rightarrow a + x \neq a - x \Rightarrow x \neq 0$

$\dfrac{b}{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad b > a$

(II) $$\frac{a + x + a - x + 2\sqrt{a^2 - x^2}}{a + x - (a - x)} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{bx - a^2}{a} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - x^2 = \frac{b^2x^2 - 2a^2bx + a^4}{a^2} \quad \Rightarrow \quad (a^2 + b^2)x^2 - 2a^2bx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x[(a^2 + b^2)x - 2a^2b] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0 \text{ (rejeitada)} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2a^2b}{a^2 + b^2} \end{array}\right.$$

$$\text{Mas } -a \leqslant x \leqslant a \Rightarrow -a \leqslant \frac{2a^2b}{a^2 + b^2} \leqslant a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(a^2 + b^2) \leqslant 2ab \leqslant (a^2 + b^2) \Rightarrow \begin{cases} -(a + b)^2 \leqslant 0 \\ \text{e} \\ (a - b)^2 \geqslant 0 \end{cases} \text{verdadeiras, } \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Portanto, para $b > a$, $S = \left\{\dfrac{2a^2b}{a^2 + b^2}\right\}$.

538. (I) $x - a \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant a$

$$\left.\begin{array}{l} b^2 + x^2 - a^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant a^2 - b^2 \\ \text{mas } x^2 \geqslant 0, \forall x, x \in \mathbb{R}; \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 - b^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2 \geqslant b^2 \Rightarrow |a| \geqslant |b|$$

E, se $|a| \geqslant |b|$, então $b^2 + x^2 - a^2 \geqslant 0$ e

$a^2 + x\sqrt{b^2 + x^2 - a^2} \geqslant 0$ se $x \geqslant 0$.

(II) $a^2 + x\sqrt{b^2 + x^2 - a^2} = x^2 - 2ax + a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{b^2 + x^2 - a^2} = x(x - 2a) \Rightarrow$ se $x \neq 0$, $\sqrt{b^2 + x^2 - a^2} = x - 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 + x^2 - a^2 = x^2 - 4ax + 4a^2 \Rightarrow x = \dfrac{5a^2 - b^2}{4a}$; se $a \neq 0$

Como $x > 0$ e $|a| \geqslant |b|$, então $\dfrac{5a^2 - b^2}{4a} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a^2 - b^2 > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$ e, então, $a > 0$.

Portanto: $a > 0$ e $|a| \geqslant |b| \Rightarrow S = \left\{\dfrac{5a^2 - b^2}{4a}\right\}$.

539. $\sqrt{x - 1} = a - x$

(I) $a - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant a$

$x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$

Então, se $a < 1$, não há solução

se $a = 1$, $x = 1$

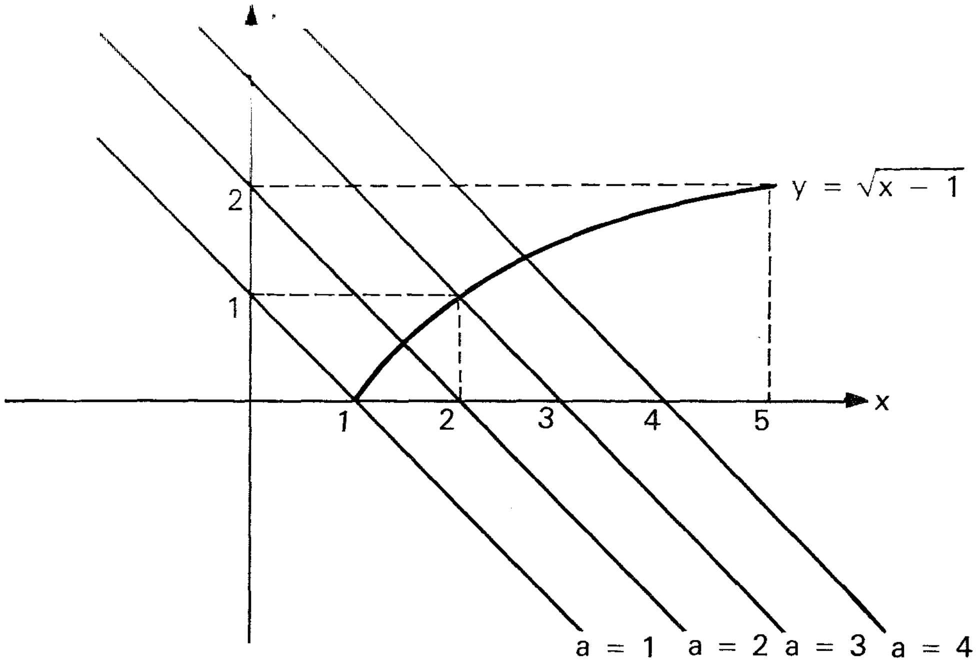
se $a > 1$, $1 \leqslant x \leqslant a$

(II) $x - 1 = a^2 - 2ax + x^2$

$x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{(2a + 1) \pm \sqrt{4a - 3}}{2} \left(\text{se } a \geqslant \dfrac{3}{4}\right)$

(II)



Já sabemos, em (I), que, se $a = 1$, $x = 1$, o que é confirmado pelo gráfico e, pela substituição em (II), verificamos que é satisfeito para $x = \dfrac{(2a+1) - \sqrt{4a-3}}{2}$. Esta escolha se verifica para outros valores de a. Então, são esses os pontos de menor abscissa.

540. a) $\begin{cases} xy = 36 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \text{ (devemos ter } x > 0 \text{ e } y > 0) \end{cases}$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \Rightarrow x + 2\sqrt{xy} + y = 25 \Rightarrow x + y = 13$

Então: $\begin{cases} xy = 36 \\ x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 9) \Rightarrow$
$\Rightarrow (y = 9 \text{ ou } y = 4)$

Verificando: $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5 \Rightarrow 2 + 3 = 5$ e $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 5 \Rightarrow 3 + 2 = 5$.

$S = \{(4, 9), (9, 4)\}$.

b) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy} \text{ (devemos ter } x > 0 \text{ e } y > 0) \\ x + y = 20 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{xy} > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y} \Rightarrow$
$\Rightarrow x > y$

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy} \Rightarrow x - 2\sqrt{xy} + y = 4xy \Rightarrow -2\sqrt{xy} = 4xy - 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{xy} = 10 - 2xy \Rightarrow xy = 100 - 40xy + 4x^2y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x^2y^2 - 41xy + 100 = 0$

Fazendo $xy = z$, temos:

$$4z^2 - 41z + 100 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{25}{4} \Rightarrow xy = \dfrac{25}{4} \\ \text{ou} \\ z = 4 \Rightarrow xy = 4 \end{cases}$$

Verificando:

para $xy = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2\sqrt{xy} + y = 25 \Rightarrow 20 - 2 \cdot \frac{5}{2} = 25 \Rightarrow 20 - 5 = 25$ (falso)

para $xy = 4 \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \cdot 2 \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 2\sqrt{xy} + y = 16 \Rightarrow 20 - 2 \cdot 2 = 16$ (verdadeiro)

Então, temos:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 20x + 4 = 0 \Rightarrow x = 10 \pm 4\sqrt{6} \Rightarrow y = 10 \mp 4\sqrt{6}$$

Portanto: $S = \{(10 + 4\sqrt{6}, 10 - 4\sqrt{6})\}$.

c) (I) $\frac{x}{y} > 0$ e $\frac{y}{x} > 0$

(II) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{17}{4} \Rightarrow 4(x^2 + y^2) = 17xy$

Sabemos que $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$.
Então: $4(100 - 2xy) = 17xy \Rightarrow xy = 16$.
Portanto, temos:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 16 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \Rightarrow y = 2 \\ \text{ou} \\ x = 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

Assim: (I) $\frac{x}{y} = 4$ e $\frac{y}{x} = \frac{1}{4}$ e (II) $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$ e $\frac{y}{x} = 4$

Verificando:

(I) $\sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ (V)

(II) $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ (V)

Então: $S = \{(2, 8), (8, 2)\}$.

d) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7 & (1) \\ x^2 + y^2 + xy = 133 & (2) \end{cases}$

(I) Devemos ter $xy > 0 \Rightarrow x > 0$ e $y > 0$ ou $x < 0$ e $y < 0$

(II) De (1), vem: $xy = 49 - 14(x + y) + (x + y)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow xy = 49 - 14(x + y) + (x^2 + y^2) + 2xy \Rightarrow$
$\Rightarrow -xy = 49 - 14(x + y) + (x^2 + y^2)$

De (2), vem: $x^2 + y^2 = 133 - xy$.

Então: $-xy = 49 - 14(x - y) - 133 - xy \Rightarrow$

$\Rightarrow 14(x - y) = 182 \Rightarrow x - y = 13$ ③

Portanto, ① $- \sqrt{xy} = 7 - 13 \Rightarrow \sqrt{xy} = 6 \Rightarrow xy = 36$ ④

De ③ e ④, temos:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ ou } x = 4.$$

Então, para $x = 9$, $y = 4$ e para $x = 4$, $y = 9$.

Verificando: $(4, 9) \Rightarrow 4 + 9 - \sqrt{36} = 7 \Rightarrow 13 - 6 = 7$ (V)

$(9, 4) \Rightarrow 9 + 4 - \sqrt{36} = 7 \Rightarrow 13 - 6 = 7$ (V)

$S = \{(4, 9), (9, 4)\}$.

541. a) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19 \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 1 + 2\sqrt{x + 6y} \end{cases}$

Ⓘ $x^2 - 3y - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 3y + 1 \Rightarrow -3y - 1 < x < 3y + 1$

$x + 6y > 0 \Rightarrow x > -6y$

Ⓘⓘ $\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19 \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} - 2\sqrt{x + 6y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 15\sqrt{x^2 - 3y - 1} + 3\sqrt{x + 6y} = 57 \\ -15\sqrt{x^2 - 3y - 1} + 10\sqrt{x + 6y} = -5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 13\sqrt{x + 6y} = 52 \Rightarrow x + 6y = 16$ ①

$\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19 \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} - 2\sqrt{x + 6y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 10\sqrt{x^2 - 3y - 1} + 2\sqrt{x + 6y} = 38 \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} - 2\sqrt{x + 6y} = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 13\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 39 \Rightarrow x^2 - 3y = 10$ ②

De ① e ②, vem:

$\begin{cases} x + 6y = 16 \\ x^2 - 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6y = 16 \\ 2x^2 - 6y = 20 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + x - 36 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4$ ou $x = \dfrac{-9}{2}$

Para $x = 4$ temos $y = 2$ e para $x = \dfrac{-9}{2}$ temos $y = \dfrac{41}{12}$.

Verificando: $-3y - 1 < x < 3y + 1$

Para (4, 2), vem: $-7 < 4 < 7$.

Para $\left(\frac{-9}{2}, \frac{41}{12}\right)$, vem: $\frac{-45}{4} < \frac{-9}{2} < \frac{45}{4}$.

Portanto: $S = \left\{(4, 2), \left(\frac{-9}{2}, \frac{41}{12}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2}\sqrt{x+2y} = 4 + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}\sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y} = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases}$

(I) $x + y > 0 \Rightarrow x > -y$
$x + 2y > 0 \Rightarrow x > -2y$

(II) $\begin{cases} \sqrt{2}\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x+2y} = 4\sqrt{2} + 2 \\ -\sqrt{2}\sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y} = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+2y} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 2y = 8$ (1)

$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2}\sqrt{x+2y} = 4 + \sqrt{2} \\ 2\sqrt{x+y} - \sqrt{2}\sqrt{x+2y} = -4 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+y} = \sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x + y = 2$ (2)

De (1) e (2), vem:
$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 8 \\ -x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = -4$

Como $x > -y$, vem $S = \{(-4, 6)\}$.

547. $\sqrt[3]{x+9} = 3 + \sqrt[3]{x-9}$
$x + 9 = 27 + 27\sqrt[3]{x-9} + 9(\sqrt[3]{x-9})^2 + x - 9$
Fazendo $\sqrt[3]{x-9} = y$, temos:
$9y^2 + 27y + 9 = 0 \Rightarrow y^2 + 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$
Então: $\sqrt[3]{x-9} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2\sqrt[3]{x-9} = -3 \pm \sqrt{5} \Rightarrow$
$(2\sqrt[3]{x-9})^3 = (-3 \pm \sqrt{5})^3 \Rightarrow x = \pm 4\sqrt{5} \Rightarrow x^2 = 80.$

548. $(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2})^3 = (\sqrt[3]{2x-3})^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 1 + 3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)} + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x - 2 = 2x - 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)} = -\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)^2(x-2) = -(x-1)(x-2)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)^2(x-2) + (x-1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-1+x-2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)(x-2)(2x-3) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = \frac{3}{2}$
$S = \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$.

549. $(\sqrt[3]{2 - x})^3 = (1 - \sqrt{x - 1})^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - x = 1 - 3\sqrt{x - 1} - 3(x - 1) - (x - 1)\sqrt{x - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 2)\sqrt{x - 1} = 4x - 4 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4)(x - 1) = 16x^2 - 32x + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 - 13x^2 + 32x - 20 = 0$

Tendo notado que *1* é raiz da equação, vamos dividir o 1º membro por $x - 1$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\,13x^2 & +\,32x & -\,20 & \;x - 1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +\,x^2 & & & \;x^2 - 12x + 20 \\
\cline{1-2}
 & -\,12x^2 & +\,32x & -\,20 & \\
 & +\,12x^2 & -\,12x & & \\
\cline{2-4}
 & & 20x & -\,20 & \\
 & & -\,20x & +\,20 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Então: $(x - 1)(x^2 - 12x + 20) = 0 \Rightarrow x = 10$ ou $x = 2$ ou $x = 1$.
Portanto: $S = \{1, 2, 10\}$.

552. $\begin{cases} x + y = 72 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$

Fazendo $A = \sqrt[3]{x}$, $B = \sqrt[3]{y}$ e $A + B = 6$, em
$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$, vem:

$216 = x + y + 18\sqrt[3]{xy} \Rightarrow 216 = 72 + 18\sqrt[3]{xy} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{xy} = 8 \Rightarrow xy = 512.$

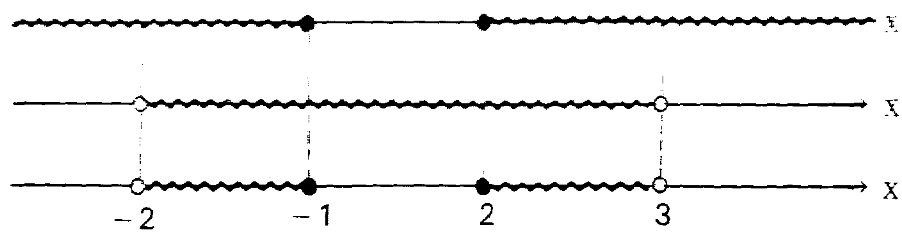
Então: $\begin{cases} x + y = 72 \\ xy = 512 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 72x + 512 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 64 \Rightarrow y = 8 \\ \text{ou} \\ x = 8 \Rightarrow y = 64 \end{cases}$

$S = \{(8, 64), (64, 8)\}$.

Apêndice II — Inequações irracionais

554. c) $\sqrt{x^2 - x - 2} < 2 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 - x - 2 < 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 2 \\ \text{e} \\ -2 < x < 3 \end{cases}$



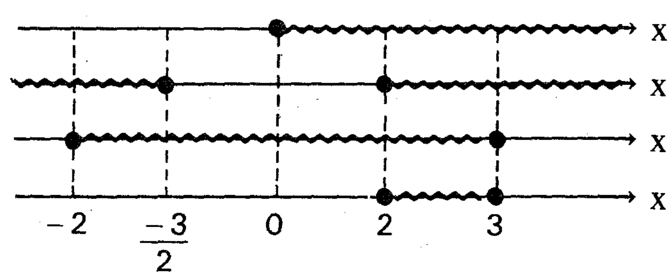
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant -1 \text{ ou } 2 \leqslant x < 3\}.$

e) $\sqrt{2x^2 + x + 3} < 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2x^2 + x + 3 < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 3 \geqslant 0 \\ \quad e \\ 2x^2 + x + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ e \\ \varnothing \end{cases} \Rightarrow S = \varnothing$$

555. f) $\sqrt{2x^2 - x - 6} \leqslant x \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \quad e \\ 0 \leqslant 2x^2 - x - 6 \leqslant x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \quad e \\ 2x^2 - x - 6 \geqslant 0 \Rightarrow \\ \quad e \\ x^2 - x - 6 \leqslant 0 \end{cases}$

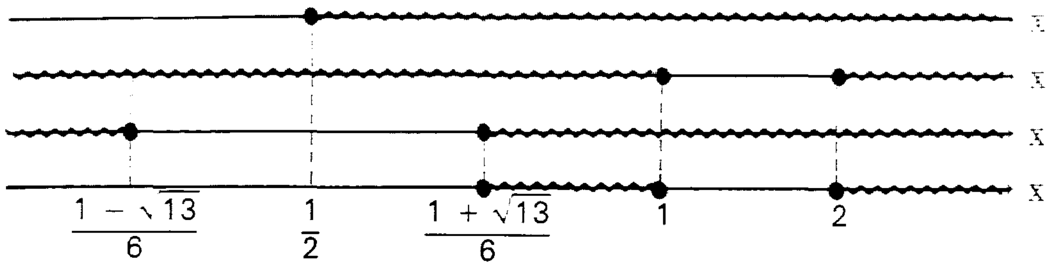
$$\Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \quad e \\ x \leqslant \dfrac{-3}{2} \text{ ou } x \geqslant 2 \\ \quad e \\ -2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}.$

i) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leqslant 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0 \\ \quad e \\ 0 \leqslant x^2 - 3x + 2 \leqslant (2x - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow$

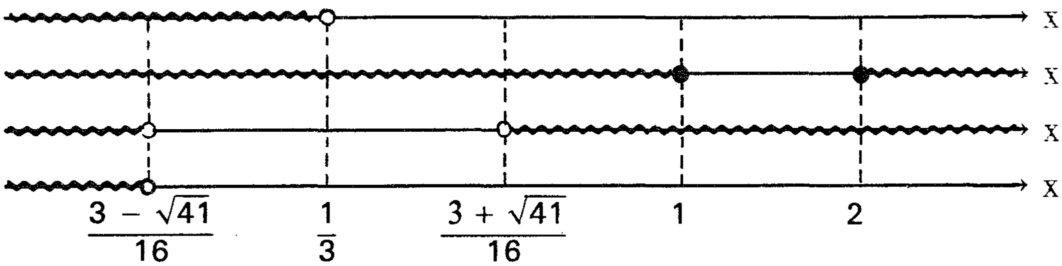
$$\Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \quad e \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \\ \quad e \\ -3x^2 + x + 1 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \quad e \\ x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2 \\ \quad e \\ x \leqslant \dfrac{1 - \sqrt{13}}{6} \text{ ou } x \geqslant \dfrac{1 + \sqrt{13}}{6} \end{cases}$$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1+\sqrt{13}}{6} \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\right\}.$

556. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 1 - 3x \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3x > 0 \\ \text{e} \\ 0 \leqslant x^2 - 3x + 2 < (1 - 3x)^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x > -1 \\ \text{e} \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ -8x^2 + 3x + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ \text{e} \\ x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2 \\ \text{e} \\ x < \frac{3-\sqrt{41}}{16} \text{ ou } x > \frac{3+\sqrt{41}}{16} \end{cases}$$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3-\sqrt{41}}{16}\right\}.$

558. d) $\sqrt{4x^2 - 13x + 7} > 2 \Rightarrow 4x^2 - 13x + 7 > 4 \Rightarrow 4x^2 - 13x + 3 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 3 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 3\right\}$

f) $\sqrt{-5x^2 - 19x + 4} \geqslant -3 \Rightarrow -5x^2 - 19x + 4 \geqslant 0 \Rightarrow -4 \leqslant x \leqslant \frac{1}{5}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant \frac{1}{5}\right\}.$

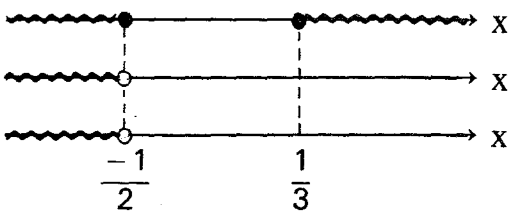
g) $\sqrt{-2x^2 + 5x + 5} \geqslant 3 \Rightarrow -2x^2 + 5x + 5 \geqslant 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x^2 + 5x - 4 \geqslant 0$, em que $\Delta = -7 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \varnothing$

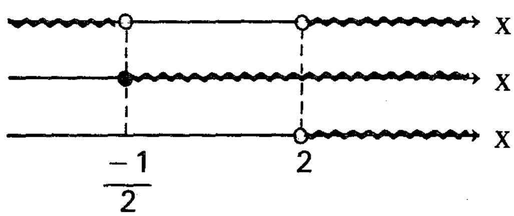
559. d) $\sqrt{6x^2 - x - 1} > 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - x - 1 \geqslant 0 \text{ e } 2x + 1 < 0 \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ 6x^2 - x - 1 > (2x+1)^2 \text{ e } 2x + 1 \geqslant 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$

$$\text{(I)} \begin{cases} 6x^2 + x - 1 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{3} \\ \text{e} \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$

$$\text{(II)} \begin{cases} 6x^2 + x - 1 > (2x+1)^2 \\ \text{e} \\ 2x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ \text{e} \\ 2x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \\ \text{e} \\ x \geqslant -\frac{1}{2} \end{cases}$$

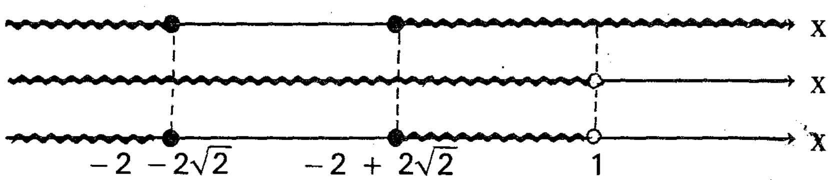


$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{-1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}.$$

f) $\sqrt{x^2 + 4x - 4} \geqslant 2x - 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 4 \geqslant 0 \text{ e } 2x - 2 < 0 \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x^2 + 4x - 4 \geqslant (2x-2)^2 \text{ e } 2x - 2 \geqslant 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$

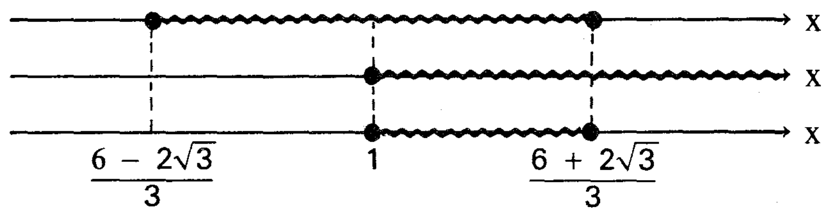
$$\text{(I)} \begin{cases} x^2 + 4x - 4 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -2 - 2\sqrt{2} \text{ ou } x \geqslant -2 + 2\sqrt{2} \\ \text{e} \\ x < 1 \end{cases}$$



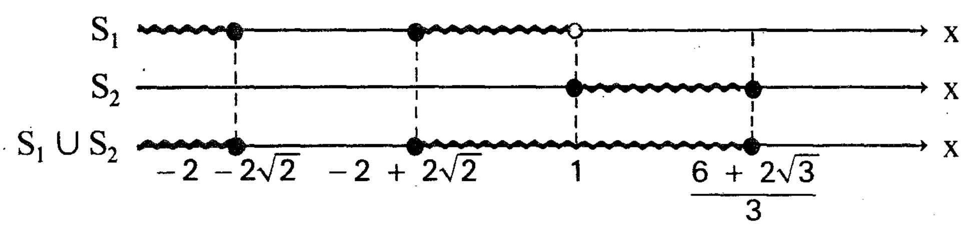
$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 - 2\sqrt{2} \text{ ou } -2 - 2\sqrt{2} \leqslant x < 1\}.$

$$\text{II} \begin{cases} x^2 + 4x - 4 \geqslant 4x^2 - 8x - 4 \\ \quad e \\ 2x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 12x - 8 \geqslant 0 \\ \quad e \\ 2x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6 - 2\sqrt{3}}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{3} \\ \quad e \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$



$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right\}.$$



$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 - 2\sqrt{2} \text{ ou } -2 + 2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

g) $\sqrt{7x - 1} \geqslant x + 2 \Rightarrow \begin{cases} 7x - 1 \geqslant 0 \text{ e } x + 2 < 0 \quad \text{I} \\ \quad \text{ou} \\ 7x - 1 \geqslant (x + 2)^2 \text{ e } x + 2 \geqslant 0 \quad \text{II} \end{cases}$

$$\text{I} \begin{cases} 7x - 1 \geqslant 0 \\ \quad e \\ x + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{7} \\ \quad e \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \varnothing$$

$$\text{II} \begin{cases} 7x - 1 \geqslant x^2 + 4x + 4 \\ \quad e \\ x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 5 \geqslant 0 \\ \quad e \\ x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \varnothing$$

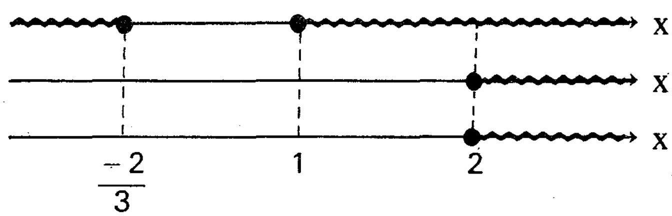
$S = S_1 \cup S_2 = \varnothing.$

h) $\sqrt{4x^2 - 5x + 2} \geqslant x - 2 \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 5x + 2 \geqslant 0 \text{ e } x - 2 < 0 \quad \text{I} \\ 4x^2 - 5x + 2 \geqslant (x - 2)^2 \text{ e } x - 2 \geqslant 0 \quad \text{II} \end{cases}$

$$\text{(I)}\begin{cases} 4x^2 - 5x + 2 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ \text{e} \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

$$\text{(II)}\begin{cases} 4x^2 - 5x + 2 \geqslant x^2 - 4x + 4 \\ \text{e} \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 2 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant \dfrac{-2}{3} \text{ ou } x \geqslant 1 \\ \text{e} \\ x \geqslant 2 \end{cases}$$



$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

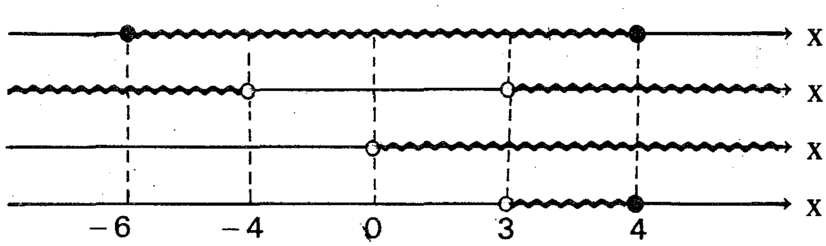
$S = S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}.$

561. b) $\dfrac{\sqrt{-x^2 - 2x + 24}}{x} < 1$

1.ª possibilidade: $x > 0$

$\sqrt{-x^2 - 2x + 24} < x \Rightarrow 0 \leqslant -x^2 - 2x + 24 < x^2$ e $x > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 2x + 24 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ -2x^2 - 2x + 24 < 0 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{e} \\ x < -4 \text{ ou } x > 3 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{cases}$$



$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 4\}.$

2.ª possibilidade: x < 0

$$\frac{\sqrt{-x^2 - 2x + 24}}{x} < 1 \Rightarrow \sqrt{-x^2 - 2x + 24} > x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 24 \geqslant 0 \text{ e } x < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 2x + 24 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{e} \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leqslant x < 0\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leqslant x < 0 \text{ ou } 3 < x \leqslant 4\}.$$

d) $\dfrac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{x} \geqslant 1$

1.ª possibilidade: x > 0

$$\sqrt{-x^2 + 7x - 6} \geqslant x \Rightarrow -x^2 + 7x - 6 \geqslant x^2 \text{ e } x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x^2 + 7x - 6 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$$

2.ª possibilidade: x < 0

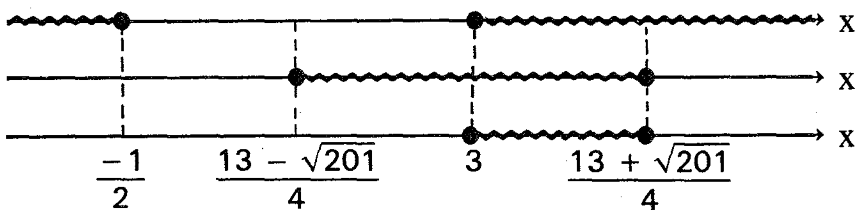
$$\sqrt{-x^2 + 7x - 6} \leqslant x \Rightarrow 0 \leqslant -x^2 + 7x - 6 \leqslant x^2 \text{ e } x > 0$$

Como as condições sobre x são incompatíveis, então $S_2 = \varnothing$.

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}.$$

563. c) $\sqrt{2x^2 - 5x - 3} \leqslant \sqrt{8x + 1} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x^2 - 5x - 3 \leqslant 8x + 1 \end{cases} \Rightarrow$

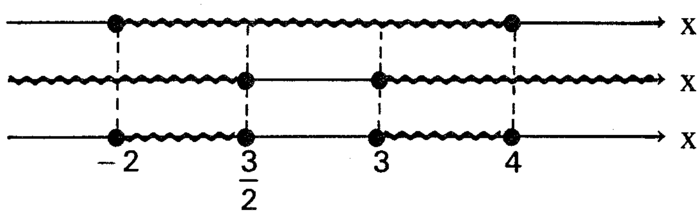
$$\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant \frac{-1}{2} \text{ ou } x \geqslant 3 \\ \text{e} \\ \frac{13 - \sqrt{201}}{4} \leqslant x \leqslant \frac{13 + \sqrt{201}}{4} \end{cases}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant \frac{13 + \sqrt{201}}{4}\right\}.$$

d) $\sqrt{x^2 - 7x + 17} \geqslant \sqrt{8 - 2x - x^2} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + 8 \geqslant 0 \\ \quad e \\ x^2 - 7x + 17 \geqslant -x^2 + 2x + 8 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + 8 \geqslant 0 \\ \quad e \\ 2x^2 - 9x + 9 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \quad e \\ x \leqslant \frac{3}{2} \text{ ou } x \geqslant 3 \end{cases}$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \text{ ou } 3 \leqslant x \leqslant 4\right\}.$

g) $\sqrt{-x^2 - 3x + 2} > \sqrt{x^2 - 5x + 4} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geqslant 0 \\ \quad e \\ -x^2 - 3x + 2 > x^2 - 5x + 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geqslant 0 \\ \quad e \\ -2x^2 + 2x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 4 \\ \quad e \\ \varnothing \end{cases} \Rightarrow S = \varnothing$

h) $\sqrt{x^2 - 2x + 2} < \sqrt{2x^2 - x + 4} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \geqslant 0 \\ \quad e \\ x^2 - 2x + 2 < 2x^2 - x + 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \geqslant 0 \\ \quad e \\ -x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ e \\ \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow S = \mathbb{R}$

564. a) $\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} > \sqrt{2 - x} \Rightarrow \begin{cases} 2 - x \geqslant 0 \quad \text{(I)} \\ \quad e \\ 4 - \sqrt{1 - x} > 2 - x \quad \text{(II)} \end{cases}$

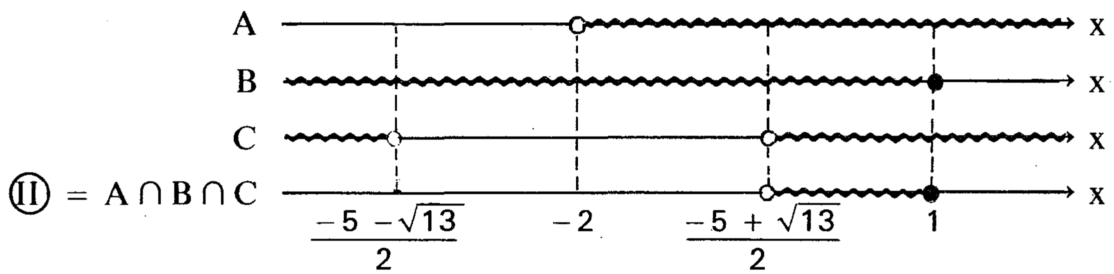
(I) $2 - x \geqslant 0 \Rightarrow -x \geqslant -2 \Rightarrow x \leqslant 2$

(II) $4 - \sqrt{1 - x} > 2 - x \Rightarrow -\sqrt{1 - x} > -x - 2 \Rightarrow$

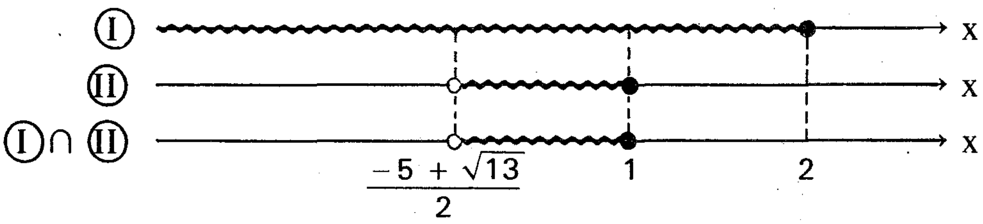
$\Rightarrow \sqrt{1 - x} < x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ \quad e \\ 0 \leqslant 1 - x < (x + 2)^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ \quad e \\ 1 - x \geqslant 0 \\ \quad e \\ x^2 + 4x + 4 > 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ \quad e \\ -x \geqslant -1 \\ \quad e \\ x^2 + 5x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -2 \quad \text{(A)} \\ \quad e \\ x \leqslant 1 \quad \text{(B)} \\ \quad e \\ x < \dfrac{-5 - \sqrt{13}}{2} \ \text{ou} \ x > \dfrac{-5 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{(C)} \end{cases}$$



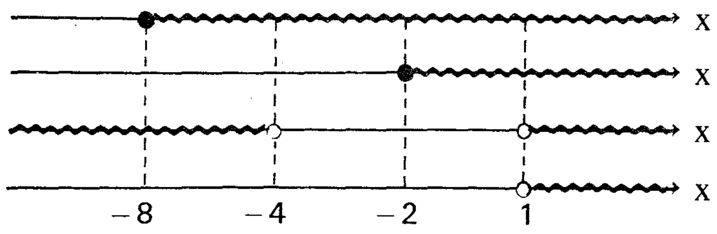
Então, vem:



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} < x \leqslant 1 \right\}.$$

d) $\sqrt[4]{x + 8} < \sqrt{x + 2} \Rightarrow \begin{cases} x + 8 \geqslant 0 \\ \quad e \\ x + 2 > 0 \\ \quad e \\ x + 8 < (x + 2)^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -8 \\ \quad e \\ x > -2 \\ \quad e \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -8 \\ \quad e \\ x > -2 \\ \quad e \\ x < -4 \ \text{ou} \ x > 1 \end{cases}$$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

566. d) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$

(I) $\left.\begin{array}{l} x^2 + 3x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant -1 \\ x^2 - x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow \forall x, x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant -1$

(II) Notemos que, para os valores de x que satisfazem (I), ambos os membros da inequação são positivos e, então, podemos quadrá-la sem necessidade de verificação.

$x^2 + 3x + 2 < 1 + x^2 - x + 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Rightarrow 4x < 2\sqrt{2x^2 - x + 1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} > 2x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - x + 1 \geqslant 0 \text{ e } 2x < 0 \quad \text{(A)} \\ \quad \text{ou} \\ x^2 - x + 1 > 4x^2 \text{ e } 2x \geqslant 0 \quad \text{(B)} \end{array}\right.$$

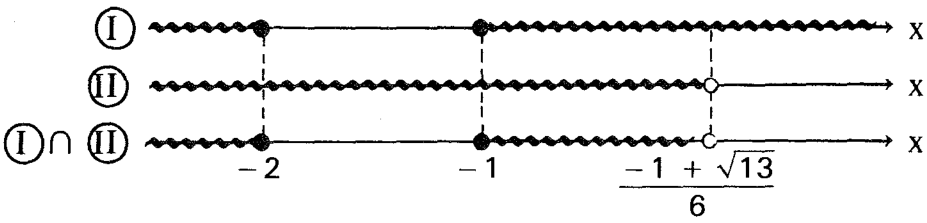
$$\text{(A)} \left\{\begin{array}{l} x^2 - x + 1 \geqslant 0 \\ \quad \text{e} \\ 2x < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \text{e} \\ x < 0 \end{array}\right. \Rightarrow x < 0$$

$$\text{(B)} \left\{\begin{array}{l} -3x^2 - x + 1 > 0 \\ \quad \text{e} \\ 2x \geqslant 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{6} < x < \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6} \\ \quad \text{e} \\ x \geqslant 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$$

De (A) e (B) vem: $x < \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6}$.

Assim:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } -1 \leqslant x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}\right\}.$$

567. $\sqrt{x - 6} - \sqrt{x + 1} > \sqrt{2x - 5}$

$$\text{I}\ \begin{cases} x + 6 \geqslant 0 \\ \quad e \\ x + 1 \geqslant 0 \\ \quad e \\ 2x - 5 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -6 \\ \quad e \\ x \geqslant -1 \\ \quad e \\ x \geqslant \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow x \geqslant \frac{5}{2}$$

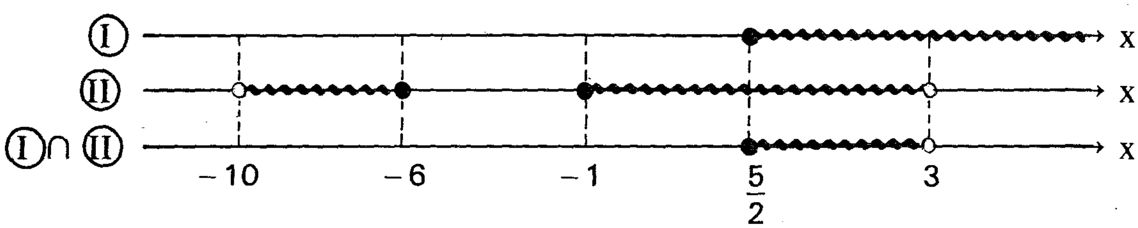
II Como $x + 6 > x + 1$, então para qualquer valor de x, inclusive para os que satisfazem I, $\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} > 0$ e, portanto, podemos quadrar a inequação sem preocupações com verificação.

$x + 6 + x + 1 - 2\sqrt{(x + 6)(x + 1)} > 2x - 5 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 7x + 6} < 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 7x + 6 \geqslant 0 \\ \quad e \\ x^2 + 7x + 6 < 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -6 \text{ ou } x \geqslant -1 \\ \quad e \\ -10 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -10 < x \leqslant -6$ ou $-1 \leqslant x < 3$.

Assim:



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} \leqslant x < 3\right\}$.

568. $x + \sqrt{x^2 - 10x + 9} > \sqrt{x + 2\sqrt{x^2 - 10x + 9}}$

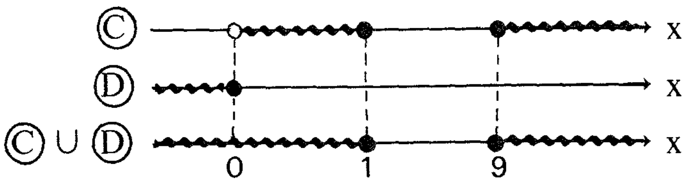
$$\text{I}\ \begin{cases} x^2 - 10x + 9 \geqslant 0 \quad \text{A} \\ \quad e \\ x + 2\sqrt{x^2 - 10x + 9} \geqslant 0 \quad \text{B} \end{cases}$$

A $x^2 - 10x + 9 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 9$

$$\text{B}\ 2\sqrt{x^2 - 10x + 9} \geqslant -x \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 \geqslant 0 \text{ e } -x < 0 \quad \text{C} \\ \quad \text{ou} \\ x^2 - 10x + 9 \geqslant x^2 \text{ e } -x \geqslant 0 \quad \text{D} \end{cases}$$

Ⓒ $\begin{cases} x^2 - 10x - 9 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ -x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 9 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 9$

Ⓓ $\begin{cases} -10x + 9 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ -x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant \dfrac{9}{10} \\ \text{e} \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \leqslant 0$



Assim: Ⓒ ∪ Ⓓ = Ⓑ $\Rightarrow$ $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 9$.

Então: Ⓐ = Ⓑ $\Rightarrow$ Ⓐ ∩ Ⓑ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 9\}$.

(II) $x + \sqrt{x^2 - 10x + 9} > \sqrt{x + 2\sqrt{x^2 - 10x + 9}} \Rightarrow$

$x^2 + x^2 - 10x + 9 + 2x\sqrt{x^2 - 10x + 9} > x + 2\sqrt{x^2 - 10x + 9} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 11x + 9 > (2 - 2x)\sqrt{x^2 - 10x + 9} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 - 2x)\left(-x + \dfrac{9}{2}\right) > (2 - 2x)\sqrt{x^2 - 10x + 9}$

Se $x \leqslant 1$, temos $2(1 - x) \geqslant 0$ e recaímos em

$\sqrt{x^2 - 10x + 9} < -x + \dfrac{9}{2}$

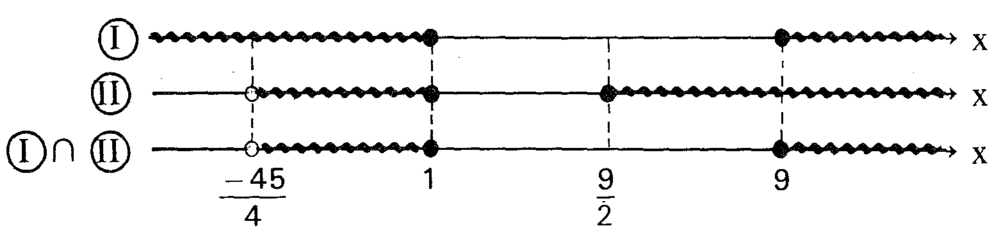
cuja solução é $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{45}{4} < x < 1\right\}$.

Se $x \geqslant 1$, temos $2(1 - x) \leqslant 0$ e recaímos em

$\sqrt{x^2 - 10x + 9} > -x + \dfrac{9}{2}$

cuja solução é $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{9}{2}\right\}$.

Portanto, vem:



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{45}{4} < x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 9\right\}$.