Universidade Agostinho Neto
Faculdade de Ciências Naturais
Departamento de Matemática

Lista de Exercícios de Álgebra Linear I

Números Complexos

---

1. Descrever analiticamente e geometricamente as seguintes relações:

   (a) $Re(z) = 3$
   (b) $Im(z) = -2$
   (c) $Re(z) < 0$
   (d) $Im(z) > 0$
   (e) $Re(z) + Im(z) = -2$
   (f) $Re(z) - Im(z) = 4$
   (g) $Re(z) = Im(z)$
   (h) $5Re(z) - 3Im(z) = 1$
   (i) $-2 \leq Re(z) \leq 2$
   (j) $-2 \leq Im(z) \leq 2$
   (k) $Re(z)Im(z) < 0$
   (l) $Re(z) + Im(z) \leq 1$
   (m) $Re(z) + Im(z) > -2$
   (n) $4Re(z) - 5Im(z) < 1$
   (o) $-3 \leq Re(z) \leq 2$ e $-2 \leq Re(z) \leq 3$
   (p) $-2 \leq Re(z) \leq 2$ e $-2 \leq Re(z) \leq 2$
   (q) $2 \leq Re(z) \leq 4$ e $-2 \leq Im(z) \leq 4$
   (r) $-6 \leq Re(z) \leq -2$ e $-6 \leq Im(z) \leq -2$
   (s) $-3 \leq Re(z) \leq 5$ e $-5 \leq Re(z) \leq -2$
   (t) $-5 \leq Re(z) \leq -3$ e $2 \leq Re(z) \leq 5$

2. Achar os valores de x e y se:

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$$

3. Determinar os números reais a e b sabendo que

$$(-1 + i)a + (1 + 2i)b = 1$$

4. Expressar cada um dos seguintes números como $1, -1, i, -i$:

   (a) i^3
   (b) i^7
   (c) i^{2019}
   (d) i^{2011}
   (e) i^{2038}

5. Efectuar as seguintes operações e o resultado expressar na forma algébrica:

   (a) $(5 + 7i) + (8 + 2i)$
   (b) $(2 + \sqrt{3}i).(5 - 6\sqrt{3}i)$
   (c) $\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$
   (d) $\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$
   (e) $\frac{3(1+i)^2}{(1-i)^2} - \frac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}$
   (f) $\frac{1+i}{i} + \frac{i}{1-i}$
   (g) $(1 + i)^n + (1 - i)^n$

6. Calcular i^n, onde $n \in \mathbb{Z}$

7. Demostrar que

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}} = i^n(1-i)$$

.

8. Provar que:

   (a) $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$

   (b) $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

   (c) $Im(iz) = Re(z)$

   (d) $Im(z_1.z_2) = Re(z_1).Im(z_2) + Im(z_1).Re(z_2)$

9. Se z é um número complexo tal que $|z| = 1,$ calcular $|1+z|^2 + |1-z|^2$

10. Demostrar que $|z - \frac{3}{4}i| = \frac{1}{4}$ se $z = \frac{i-a}{1+2ai},$ onde $a \in \mathbb{R}$

11. Calcular z^2 sendo $z = -|-1+i| + \sqrt{2}i$

12. Achar o número complexo z tal que $|z| = 1$ e $Re(z) = 0$

13. Descrever e construir o gráfco do lugar geométrico representado por cada uma das seguintes condições:

   (a) $|z-1| = 2$

   (b) $Re[z(\overline{z}+2)] = 3$

   (c) $Im(z^2) = 4$

   (d) $|z| = Re(z) + 1$

   (e) $|z+2i| + |z-2i| = 6$

14. Descrever gráficamente a região representada por cada uma das seguintes desigualdades:

   (a) $|z| \leq 1$

   (b) $|z| \geq 1$

   (c) $1 \leq |z+i| \leq 2$

   (d) $Re(z^2) > 1$

   (e) $|z-1| \leq 2|z+1|$

15. Demostrar a identidade

$$|1-zw|^2 - |z-w|^2 = (1-|z|^2).(1-|w|^2)$$

16. Se $|z| < 1$ e $|w| < 1$, demostrar que

$$|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}| < 1,\ z, w \in \mathbb{C}$$

17. Se $z, w \in \mathbb{C},$ demostrar que

$$Re(\frac{z}{z+w}) + Re(\frac{w}{z+w}) = 1$$

18. Provar que

$$|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

19. Achar o módulo de

$$\frac{1 + cos\theta + isen\theta}{1 - cos\theta + isen\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

20. Achar z tal que $|z| - z = 1 + 2i$

21. Se $z = cos\theta + isen\theta, z^n = 1,\ z \neq 1$ e $M = 1 + 2z + 3z^2 + ... + nz^{n-1}$. Achar $Re(M)$ e $Im(M)$

22. Se $w = cos\theta + isen\theta$. Achar $(1 + w)^n$

23. Simplificar $(1 + w)^n$, onde $w = cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}$

24. Achar a soma de $sen^2x + sen^2 3x + sen^2 5x + ... + sen^2(2n - 1)x$

25. Provar que

$$|\frac{Re(z) + Im(z)}{\sqrt{2}}| \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$$

26. Obter a forma polar ou trigonométrica dos seguintes números complexos:
    (a) $z = \sqrt{3} + i$
    (b) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$
    (c) $z = -1 - i$
    (d) $z = -4i$

27. Calcular as potencias indicadas:
    (a) $(1 - i)^5$
    (b) $(\sqrt{3} - i)^6$
    (c) $((-1 + \sqrt{3}i)^7$

28. Efectuar as operações indicadas
    (a) $(-128 + 128\sqrt{3}i)^{\frac{1}{8}}$
    (b) $(4\sqrt{3} - 4i)^{\frac{1}{3}}$

29. Demostrar que

$$(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(cos\frac{n\pi}{4} + isen\frac{n\pi}{4})$$

30. Demostrar que

$$(\sqrt{3} - i)^n = 2^n(cos\frac{n\pi}{6} - isen\frac{n\pi}{6})$$

31. Calcular $(1 + cos\alpha + isen\alpha)^n$

32. Demonstrar que se $z + \frac{1}{z} = 2cos\theta$, então

$$z^m + \frac{1}{z^m} = 2cos(m\theta)$$

33. Usando a forma de Moivre, demostrar as seguintes fórmulas:

    (a) $sen2x = 2cosxsenx$

    (b) $sen3x = 3cos^2xsenx - sen^3x$

34. Resolver a equação em $\mathbb{C}$, $z^2 = 2i$

35. Resolver a equação em $\mathbb{C}$, $z^2 = -3 - 4i$

36. Escrever as expressões seguintes na forma $a + bi$

    (a) $e^{1+\frac{\pi i}{3}}$

    (b) $e^{1-\frac{\pi i}{4}}$

37. Se $z = 6e^{\frac{\pi i}{3}}$, achar o valor numérico de $|e^{iz}|$

38. Se $z = x + iy$, achar o lugar geométrico de:

    (a) $arg(z + 1) = \frac{\pi}{3}$

    (b) $arg(z^2) = \frac{-\pi}{4}$

39. Demostrar que

$$senx + sen2x + ... + sennx = \frac{sen(\frac{n+1}{2})xsen(\frac{nx}{2})}{sen\frac{x}{2}}$$

40. Calcular:

    (a) $ln(i)^{\frac{1}{2}}$

    (b) $ln(1 + i)$

41. Resolver a equação

$$x^{2i} - 2x^i + 2 = 0$$

Data, 18 de Outubro de 2022. [1]

[1] O Docente: Armando Paulino
Email: armandomath83@gmail.com
Compilado por LateX-TeXmaker