Fundamentos da Matemática II

Inder Jeet Taneja
Aldrovando L. A. Araújo

2ª Edição
Florianópolis, 2010

Governo Federal

Presidente da República: Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro de Educação: Fernando Haddad

Secretário de Ensino a Distância: Carlos Eduardo Bielschowky

Coordenador Nacional da Universidade Aberta do Brasil: Celso Costa

Universidade Federal de Santa Catarina

Reitor: Alvaro Toubes Prata

Vice-Reitor: Carlos Alberto Justo da Silva

Secretário de Educação a Distância: Cícero Barbosa

Pró-Reitora de Ensino de Graduação: Yara Maria Rauh Müller

Pró-Reitora de Pesquisa e Extensão: Débora Peres Menezes

Pró-Reitor de Pós-Graduação: Maria Lúcia de Barros Camargo

Pró-Reitor de Desenvolvimento Humano e Social: Luiz Henrique Vieira Silva

Pró-Reitor de Infra-Estrutura: João Batista Furtuoso

Pró-Reitor de Assuntos Estudantis: Cláudio José Amante

Centro de Ciências da Educação: Wilson Schmidt

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas: Tarciso Antônio Grandi

Centro de Filosofia e Ciências Humanas: Roselane Neckel

Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade à Distância

Coordenação de Curso: Neri Terezinha Both Carvalho

Coordenação de Tutoria: Jane Crippa

Coordenação Pedagógica/CED: Roseli Zen Cerny

Coordenação de Ambientes Virtuais/CFM: Nereu Estanislau Burin

Comissão Editorial

Antônio Carlos Gardel Leitão

Albertina Zatelli

Elisa Zunko Toma

Igor Mozolevski

Luiz Augusto Saeger

Roberto Corrêa da Silva

Ruy Coimbra Charão

Laboratório de Novas Tecnologias - LANTEC/CED

Coordenação Pedagógica

Coordenação Geral: Andrea Lapa, Roseli Zen Cerny

Núcleo de Formação: Nilza Godoy Gomes

Núcleo de Pesquisa e Avaliação: Claudia Regina Flores

Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais

Design Gráfico

Coordenação: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Projeto Gráfico Original: Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart Braga, Natal Anacleto Chicca Junior

Redesenho do Projeto Gráfico: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Diagramação: Natália de Gouvêa Silva

Ilustrações: Anita de Freitas Bitencourt

Capa: Thiago Felipe Victorino

Design Instrucional

Coordenação: Juliana Machado

Design Instrucional: Alessandra Zago Dahmer, Elenira Oliveira Vilela

Revisão do Design Instrucional: Márcia Maria Bernal

Revisão Gramatical: Maria Tereza de Queiroz Piacentini

Ficha Catalográfica

T164f Taneja, Inder Jeet

Fundamentos de Matemática II / Inder Jeet Taneja, Aldrovando L. A. Araújo. – 2. ed. – Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2009.

131p.

ISBN 978-85-99379-71-4

1. Matemática. II. Araújo, Aldrovando L. A. III. Título.

CDU 51

Elaborada pela Bibliotecária Eleonora M. F. Vieira – CRB – 14/786

Sumário

Fundamentos da Matemática II

Neste trabalho discutimos um número de resultados e métodos, especialmente da área de combinatória e teoria elementar de probabilidade. A apresentação não omite provas de resultados importantes, ainda que não seja centrada nelas. No entanto, meramente expor os fatos sem algum argumento que os justifique, seria terrivelmente distante do espírito de um curso superior em matemática. Assim, sempre que possível, damos provas dos resultados importantes desde que seus argumentos não estejam demasiadamente além do escopo da disciplina para a qual foram escritas estas notas. Outro ingrediente que consideramos essencial é a resolução de problemas, e neste ponto é onde nossas notas se concentram. Todos os conceitos e teoremas são exaustivamente explorados nos exercícios. De fato, dada a tipicidade do assunto, acreditamos que a sua melhor exposição possa ser realizada na forma de resolução de exercícios que exemplifiquem argumentos fundamentais e outros, nos quais o estudante deve explorar os conhecimentos adquiridos no texto e nos exercícios resolvidos. Muitos detalhes de argumentos ou seus refinamentos se encontram nos exercícios. É imprescindível que o estudante tente fazer todos os exercícios das notas. De preferência, tente resolver os já resolvidos, sem conhecimento prévio da solução proposta, e em caso de fracasso sim, verifique a resolução.

Todo o trabalho está divido em quatro capítulos. Os conteúdos das notas compreendem: regras básicas de contagem, números fatoriais e princípio de indução, combinações, permutações e arranjos simples e com repetição, problemas combinatórios com restrições, princípio da inclusão e exclusão, binômio de Newton e triângulo de Pascal, espaços de probabilidade finitos, probabilidade condicional e eventos independentes.

Inder Jeet Taneja

Aldrovando L. A. Araújo

Informações Históricas

O surgimento e o desenvolvimento da análise combinatória tem se dado paralelamente ao desenvolvimento de outros ramos da matemática, tais como a álgebra, a teoria dos números e a probabilidade. Desde a antiguidade, Problemas de Combinatória têm atraído a atenção dos matemáticos. Por exemplo, o problema dos quadrados mágicos que são matrizes quadradas de números com a propriedade de que a soma dos elementos de qualquer coluna, linha ou diagonal é o mesmo valor, aparece em um livro chinês datado de 2200 a. C. Os quadrados mágicos de ordem 3 foram estudados com fins místicos. Os coeficientes binomiais, que são os coeficientes inteiros da expansão de $(a+b)^n$, eram conhecidos no século XII. O triângulo de Pascal, que é uma disposição triangular dos coeficientes binomiais, foi desenvolvido no século XIII.

Pode-se considerar que no ocidente a combinatória surgiu no século XVII com os trabalhos de Blaise Pascal e de Pierre Fermat sobre a teoria de jogos de azar. Estes trabalhos, que formaram os fundamentos da teoria da probabilidade, continham os princípios para determinar o número de combinações de elementos de um conjunto finito, e assim se estabeleceu a tradicional conexão entre combinatória e probabilidade.

O termo "combinatória", tal e qual o usamos atualmente, foi introduzido por Wilhem Leibniz em sua "*Dissertatio de Arte Combinatória*". De grande importância para a consolidação da combinatória foi o artigo Ars Conjectandi (a arte de conjeturar), escrito por J. Bernoulli. Este trabalho estava dedicado a estabelecer as noções básicas de probabilidade. Para isto, foi necessário introduzir também um bom número de noções básicas de combinatória, que foram usadas fortemente nas aplicações ao cálculo de probabilidades. Pode-se dizer que com os trabalhos de Leibniz e Bernoulli se iniciam com o estabelecimento da combinatória como uma nova e independente área da matemática.

O matemático suíço Leonard Euler foi quem desenvolveu, em princípios do século XVIII, uma autêntica escola de matemática combinatória. Em seus artigos sobre partição e decomposição de inteiros positivos em somas, estabeleceu as bases de um dos métodos fundamentais para o cálculo de configurações combinatórias, o método das funções geradoras. Também é considerado o pai da teoria dos grafos pela colocação e solução dos problemas das Pontes de Königsberg, usando pela primeira vez conceitos e métodos da teoria dos grafos. Dos primeiros problemas de teoria dos grafos surgiram as tentativas de solução de alguns problemas cotidianos e também da colocação de alguns jogos matemáticos, tais como o problema das Pontes de Königsberg, o problema da disposição de rainhas em um tabuleiro de xadrez com certas restrições, problemas de transporte, o problema do agente de viagem, etc.

O problema das quatro cores, formulado nos meados do século XIX, (quatro cores são suficientes para colorir as regiões de um mapa de tal maneira que regiões com fronteira tenham cores distintas) deixou de ser um mero jogo matemático para ser uma fonte de importantes problemas e resultados em teoria dos grafos, de interesse tanto teórico como prático. Este foi um dos problemas teóricos mais desafiadores na história da combinatória devido à simplicidade de seu enunciado.

Na Inglaterra, nos finais do século XIX, Arthur Cayley fez importantes contribuições à teoria de enumeração de grafos. Por esta época, o matemático George Boole usou métodos de combinatória em conexão com o desenvolvimento da lógica simbólica e com as idéias e métodos que Henri Poincaré desenvolveu em relação aos problemas de topologia. Um dos fatores mais importantes que contribuíram para o grande desenvolvimento que teve a combinatória desde 1920 foi a teoria dos grafos. A importância dessa disciplina se apóia no fato de que os grafos podem servir como modelos abstratos para modelar uma grande variedade de relações entre objetos de um conjunto. Suas aplicações se estendem a campos tão diversos como a investigação de operações, química, mecânica estatística, física teórica e problemas sócio-econômicos. A teoria de redes de transporte pode ser vista como um capítulo da teoria dos grafos.

A teoria da probabilidade teve sua criação por Blaise Pascal e Pierre de Fermat motivada por uma disputa relativa a jogos de azar em 1654. Um nobre francês, Antoine Gombaud, com interesse em jogos de azar, colocou um problema relativo a um jogo de dados para Pascal, que conduziu a uma extensa correspondência entre Pascal e Fermat na qual eles estabeleceram pela primeira vez os princípios fundamentais da teoria. O cientista Christian Huygens, um professor de Leibnitz, tomou conhecimento desta correspondência e, pouco depois, publicou o primeiro livro em probabilidade, intitulado De Ratiociniis in Ludo Alea. Em síntese, era um tratado fundado em problemas associados à teoria dos jogos de azar. Em função do forte apelo de tais jogos, a teoria da probabilidade logo se tornou popular, e se desenvolveu rapidamente durante o século XVIII. As maiores contribuições, durante este período foram de Jakob Bernoulli (1654-1705) e Abraham de Moivre (1667-1754). Em 1812 Pierre de Laplace (1749-1827) introduziu um conjunto novo de idéias e técnicas em seu livro, Théorie Analytique des Probabilités. Antes dele, a probabilidade estava concentrada no desenvolvimento de uma teoria matemática dos jogos de azar. Laplace, no entanto, aplicou as idéias da probabilidade a muitos outros problemas científicos e práticos. Teoria de erros, matemática aturial e mecânica estatística são alguns exemplos das aplicações da teoria da probabilidade desenvolvidos no século XIX.

Entre os matemáticos que contribuíram para a teoria da probabilidade, depois de Laplace, destacam-se Chebyshev, Markov, von Mises, e Kolmogorov. No entanto, a axiomatização da teoria só se deu no século XX. Em 1933, o matemático russo Kolmogorov em uma monografia, desenvolveu uma abordagem axiomática que se constituiu na base para a moderna teoria da probabilidade. (O trabalho de Kolmogorov está disponível em inglês com o título de *Foundations of Probability Theory*, Chelsea, New York, 1950.) Desde então, estas idéias tem sido refinadas e a teoria da probabilidade é hoje parte de uma disciplina mais geral conhecida como Teoria da Medida.

Blaise Pascal

Filósofo e matemático francês (1623 – 1662). Aos dezoito anos inventou a primeira máquina digital, chamada "Pascalinne", para levar a cabo o processo de adição e subtração.

Fonte:
www.somatematica.com.br/biograf/pascal.php

Pierre Fermat

Advogado e oficial do governo francês (1601 – 1665). A matemática era o seu passatempo. Em 1636, Fermat propôs um sistema de geometria analítica semelhante àquele que Descartes proporia um ano depois. Em uma correspondência com Pascal, fundou a teoria matemática da probabilidade.

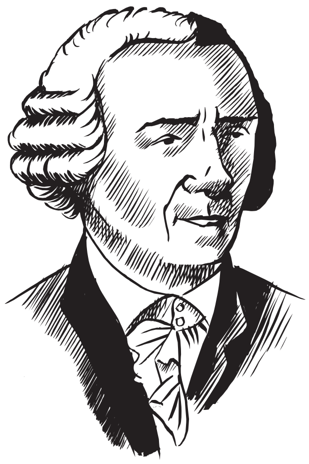
Fonte:
www.somatematica.com.br/biograf/fermat.php

Wilhem Leibniz

Matemático e filósofo alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716).

J. Bernoulli

Jean Bernoulli (1667 – 1748) foi discípulo de Leibniz.

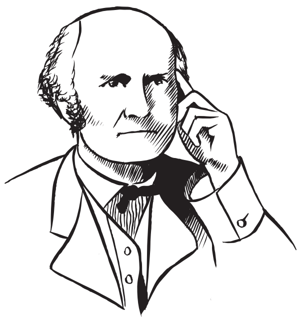


Leonard Euler

Leonhard Euler (1707 – 1783) foi o matemático mais prolífico na história. Seus 866 livros e artigos representam aproximadamente um terço do corpo inteiro de pesquisas em matemática, teorias físicas e engenharia mecânica publicadas entre 1726 e 1800.

Fonte:
www.somatematica.com.br/biograf/euler.php

Arthur Cayley



Matemático inglês (1821- 1895) que foi motivado pelo problema de calcular o número de isômeros de hidrocarbonetos saturados.

George Boole

O trabalho de Boole (1814 – 1864) foi fundamental para a evolução dos computadores. A Álgebra Booleana tem aplicações na estrutura dos computadores modernos e nas ligações telefônicas.

Fonte:
www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/boole.html

Henri Poincaré

Matemático, físico e filósofo (1854 – 1912). No âmbito das matemáticas aplicadas, estudou numerosos problemas de óptica, eletricidade, telegrafia, capilaridade, elasticidade, termodinâmica, mecânica quântica, teoria da relatividade e cosmologia.

Capítulo 1

Noções Básicas

Capítulo 1
Noções Básicas

Neste capítulo apresentaremos algumas noções básicas de matemática já vistas anteriormente no ensino médio. Apresentaremos conhecimentos de fatoriais, somatórios, produtórios, etc. Também apresentaremos a noção de princípio de indução. Estes assuntos serão utilizados freqüentemente nos capítulos posteriores.

1.1 Fatorial de um Número Natural

Ao produto $1.2.3$ indicamos $3!$ e lemos **três fatorial** ou **fatorial de três**.

Assim:

$$5! = 5.4.3.2.1$$
$$4! = 4.3.2.1\,.$$

Por convenção:

$$0! = 1$$
$$1! = 1\,.$$

Estas convenções podem parecer estranhas inicialmente, mas veremos no decorrer do capítulo que são as únicas que oferecem compatibilidade com o conceito de fatorial de um número natural $n \geq 2$.

Definição 1.1. *Seja n um número natural qualquer. Dizemos que*

$$n! = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0 \\ n(n-1)! \text{ se } n > 0. \end{cases}$$

De fato, adotamos $0!=1$**. Então:**

Se $n=1$, $1!=1(1-1)!=1.0!=1$.

Se $n=2$, $2!=2(2-1)!=2.1!=2.1=2$.

Se $n=3$, $3!=3(3-1)!=3.2!=3.2.1=6$.

E assim por diante:

$$n!=n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1.$$

Observação 1.1. Algumas vezes adota-se o símbolo $\lfloor n$ para indicar $n!$. Desse modo, $\lfloor 3=3.2.1$, $\lfloor 2=2.1$, etc.

Exemplo 1.1. $5!=5.4.3.2.1=120$.

Exemplo 1.2. $8!=8.7.6.5.4.3.2.1=40320$.

Exemplo 1.3. $5!+\frac{3!}{3!}=5!+\frac{3.2.1}{3.2.1}=5!+1=120+1=121$.

Exemplo 1.4. Simplifique as expressões

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$;

b) $\frac{(n-2)!}{(n-3)!}$;

c) $\frac{n!-(n+1)!}{n!}$;

d) $\frac{(n+1)!-(n-1)!}{n!-(n-1)!}$.

Solução.

a) $\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}=n(n-1)$.

b) $\frac{(n-2)!}{(n-3)!}=\frac{(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}}=n-2$.

É possível simplificar porque o fatorial é sempre diferente de zero.

c) $\dfrac{n!-(n+1)!}{n!}=\dfrac{n!-(n+1)n!}{n!}=\dfrac{\cancel{n!}(1-n-1)}{\cancel{n!}}=-n$.

d) $\dfrac{(n+1)!-(n-1)!}{n!-(n-1)!}=\dfrac{(n+1)n(n-1)!-(n-1)!}{n(n-1)!-(n-1)!}$

$$=\frac{\cancel{(n-1)!}\left(n^2+n-1\right)}{\cancel{(n-1)!}\,(n-1)}=\frac{n^2+n-1}{n-1}.$$

Encontrar o valor da variável (letra, incógnita, etc...).

Equações
Igualdade entre duas expressões matemáticas que se verifica para determinados valores das variáveis. Fonte: Dicionário Houaiss.

Exemplo 1.5. Resolva as seguintes equações:

a) $n!=5(n-1)!$;

b) $(n-1)!=120$;

c) $(n+5)!+(n+4)!=35(n+3)!$;

d) $\dfrac{x!}{(x-2)!}=30$;

e) $\dfrac{(x+1)!}{(x-1)!}=56$;

f) $\dfrac{(n+1)!-n!}{(n-1)!}=8n$;

g) $\dfrac{2(n+1)!+(n-1)!}{n!-(n-1)!}=13$.

Solução.

Para resolver equações com fatorial é conveniente primeiro simplificar os fatoriais, fazer as operações na forma simplificada e depois buscar as soluções das equações. Veja as soluções abaixo:

a) $n\cancel{(n-1)!}=5\cancel{(n-1)!}$

$\Rightarrow n=5$.

b) $(n-1)!=5!$

$\Rightarrow (n-1)=5$

$\Rightarrow n=6$.

c) $(n+5)(n+4)\cancel{(n+3)!}+(n+4)\cancel{(n+3)!}=35\cancel{(n+3)!}$

$$\Rightarrow (n+5)(n+4)+(n+4)=35$$

$$\Rightarrow (n+4)(n+6)=35$$

$$\Rightarrow n^2+10n+24=35$$

$$\Rightarrow n^2+10n-11=0$$

$$\Rightarrow n'=1 \text{ e } n''=-11.$$

Agora, $n''=-11$ não é válido, pois não é natural, então a única solução da equação dada é $n=1$.

Retome a definição 1.1 e você notará que fatorial é uma operação definida apenas para números naturais.

d) $x(x-1)\cancel{(x-2)!}=30\cancel{(x-2)!}$

$$\Rightarrow x^2-x=30$$

$$\Rightarrow x^2-x-30=0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+5)=0$$

$$\Rightarrow x'=6 \text{ ou } x''=-5.$$

Aqui também, $x''=-5$ não é válido, pois não é natural, então a única solução da equação dada é $x=6$.

e) $\dfrac{(x+1)x\cancel{(x-1)!}}{\cancel{(x-1)!}}=56$

$$\Rightarrow x^2+x=56$$

$$\Rightarrow x^2+x-56=0$$

$$\Rightarrow (x+8)(x-7)=0$$

$$\Rightarrow x'=-8 \text{ ou } x''=7.$$

Da mesma forma, $x'=-8$ não é válido, pois não é natural, então a única solução da equação dada é $x=7$.

f) $\dfrac{(n+1)n(n-1)!-n(n-1)!}{(n-1)!}=8n$

$$\frac{n[n+1-1]\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=8n.$$

Após a simplificação obtemos

$$\Rightarrow n(n+1-1)=8n$$
$$\Rightarrow n=8.$$

g) $$\frac{2(n+1)n\cancel{(n-1)!}+\cancel{(n-1)!}}{n\cancel{(n-1)!}-\cancel{(n-1)!}}=13$$

$$\Rightarrow \frac{2(n+1)n+1}{n-1}=13$$

$$\Rightarrow 2n^2+2n+1=13n-13$$

$$\Rightarrow 2n^2-11n+14=0$$

$$\Rightarrow n'=\frac{7}{2} \text{ ou } n''=2.$$

Como n é natural, então $n''=2$ é a única solução da equação.

Lista de Exercícios 1

1) Calcule:

a) $\dfrac{7!+5!}{5!}$.

b) $\dfrac{7!}{3!4!}$.

2) Simplifique:

a) $\dfrac{n!+(n+1)!}{n!}$.

b) $\dfrac{(n+2)!n!}{\left[(n+1)!\right]^2}$.

3) Obtenha n, tal que:

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!}=10$.

b) $n!+(n-1)!=6(n-1)!$.

2) Calcule $x \in \mathbb{N}$ nas equações abaixo:

a) $\dfrac{x!+(x+1)!+(x-1)!}{x!+(x-1)!}=7$.

b) $\dfrac{20(x-1)!-(x+1)!}{x!}=0$.

1.2 Somatório e Produtório

Nesta seção explicaremos a notação de somatório e produtório. Daremos alguns exemplos para você entender melhor o assunto.

1.2.1 Somatório

A notação somatória (Σ) é utilizada para representar numa forma reduzida a soma de um determinado número de *expressões, funções, números,* etc. Por exemplo,

i) $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots+n;$

ii) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1.2+2.3+\ldots+n(n+1);$

iii) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3;$

iv) $\sum_{i=2}^{6} 5 = 5+5+5+5+5 = 5.5 = 25;$

v) $\sum_{i=1}^{7} 3i = 3.1+3.2+3.3+\ldots+3.7 = 3(1+2+3+\ldots+7);$

vi) $\sum_{i=1}^{4} 15 = 15+15+15+15 = 4.15 = 60;$

vii) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{4} 2^i.3^j = \sum_{i=1}^{2}\left(2^i.3^2+2^i.3^3+2^i.3^4\right)$

$$=\left(2+2^2\right)3^2+\left(2+2^2\right)3^3+\left(2+2^2\right)3^4$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{2}2^i\right)\left(\sum_{j=2}^{4}3^j\right);$$

viii) $\sum_{i=2}^{3}\left(2^i+3^i\right) = \left(2^2+3^2\right)+\left(2^3+3^3\right)$

$$=2^2+2^3+3^2+3^3$$

$$=\sum_{i=2}^{3}2^i+\sum_{i=2}^{3}3^i;$$

O que é mais simples, escrever 2 + 2 + 2 + 2 + 2 ou 5 · 2 ? Escrever 3 · 3 · 3 · 3 ou 3^4 ? Os símbolos de somatório e produtório também simplificam a notação de expressões como $1+2+3+4+5+6+7+8=\sum_{i=1}^{8} i$ e $3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11=\prod_{i=1}^{5}(2i+1)$.

O símbolo usado é um sigma maiúsculo, letra grega.

Note que o índice inferior denota o início e o superior, o final.

ix) $\sum_{i=0}^{2} 2^i + \sum_{i=3}^{5} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \sum_{i=0}^{5} 2^i$;

x) $\sum_{i=0}^{3} a_{3-i} = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$

$= a_0 + a_1 + a_2 + a_3$

$= \sum_{i=0}^{3} a_i$.

A noção do **somatório** explicada acima possui algumas propriedades, dadas a seguir:

Propriedade
Propriedade é sinônimo de atributo; condição é o mesmo que requisito. Fonte: LIMA et alli (2003, p. 2-3)

i) Seja k uma constante arbitrária, então:

a) $\sum_{i=1}^{n} k a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$;

b) $\sum_{i=1}^{n} k = n k$;

ii) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right)$;

iii) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

iv) $\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$;

v) $\sum_{i=0}^{n} a_{p-i} = \sum_{i=p-n}^{p} a_i$

Exemplo 1.6.

Chamamos expandir como representação da expressão, por exemplo $\sum_{i=1}^{8} i$ = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8

a) Expanda a expressão

$$\sum_{i=3}^{7} \frac{3i^2}{i+1} .$$

b) Escreva a expressão usando a notação de somatório:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{5.7} .$$

c) Avalie $\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})$ considerando $a_0 = 0$.

Solução.

a) Podemos escrever

$$\sum_{i=3}^{7}\frac{3i^2}{i+1} = 3\sum_{i=3}^{7}\frac{i^2}{i+1}$$

$$= 3\left[\frac{3^2}{3+1}+\frac{4^2}{4+1}+\frac{5^2}{5+1}+\frac{6^2}{6+1}+\frac{7^2}{7+1}\right]$$

$$= 3\left[\frac{9}{4}+\frac{16}{5}+\frac{25}{6}+\frac{36}{7}+\frac{49}{8}\right].$$

b) Podemos escrever

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{5.7} = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{i(i+2)}.$$

c) Podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})$$

$$= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1})$$

$$= (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + \ldots + (a_n - \cancel{a_{n-1}})$$

$$= -a_0 + a_n$$

$$= a_n, \text{ pois } a_0 = 0.$$

1.2.2 Produtório

A notação **produtório** $(\prod)$ é utilizada para representar numa forma reduzida *uma expressão, números, funções, etc.*, colocados em certa ordem e separados por sinal de produto $(\cdot)$. Por exemplo,

O símbolo usado é um pi maiúsculo, letra grega.

i) $1.2.3.4 \ldots n = \prod_{i=1}^{n} i = n!$;

ii) $x.x^2.x^3.\ldots.x^n = \prod_{i=1}^{n} x^i$;

iii) $\prod_{i=1}^{n}(2i-1) = 1.3.5.\ldots.(2n-1)$;

iv) $\prod_{i=r}^{s} x_i = x_r . x_{r+1} . \dots . x_s \qquad r \leq s$;

v) $\prod_{i=1}^{n} (-i) = (-1)(-2)\dots(-n)$

$$= (-1)^n .1.2. \dots .n$$

$$= (-1)^n \, n!;$$

vi) $\prod_{i=1}^{4} i(i+1) = (1.2)(2.3)(3.4)(4.5)$

$$= (1.2.3.4)(2.3.4.5)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{4} i\right)\left(\prod_{i=1}^{4} (i+1)\right);$$

vii) $\prod_{i=1}^{5} 4i = (4.1)(4.2)(4.3)(4.4)(4.5)$

$$= 4^5 \, 1.2.3.4.5$$

$$= 4^5 \prod_{i=1}^{5} i;$$

viii) $\prod_{i=1}^{4} 4 = 4.4.4.4 = 4^4$;

ix) $\prod_{i=1}^{3} (i+1)^3 = 2^3.3^3.4^3 = (2.3.4)^3 = \left(\prod_{i=1}^{3} (i+1)\right)^3$.

A definição do **produtório** explicada acima satisfaz algumas propriedades, dadas a seguir:

i) $\prod_{i=1}^{n} a_i \, b_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$;

ii) Seja k um número natural fixo arbitrário, usualmente chamado de constante, então:

a) $\prod_{i=1}^{n} k = k^n$;

b) $\prod_{i=1}^{n} k \, a_i = k^n \prod_{i=1}^{n} a_i$;

c) $\prod_{i=1}^{n} a_i^{\,k} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{k}$.

Exemplo 1.7. Expanda e simplifique a expressão

$$\frac{\prod_{j=0}^{n} (j+1)}{\prod_{i=1}^{n} i}.$$

Solução. Podemos escrever

$$\frac{\prod_{j=0}^{n} (j+1)}{\prod_{i=1}^{n} i} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n}$$

$$= \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \ldots \cdot \cancel{n} \cdot (n+1)}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \ldots \cdot \cancel{n}}$$

$$= n+1.$$

Lista de Exercícios 2

1) Expanda as seguintes somas:

a) $\sum_{i=1}^{6} 2i$;

b) $\sum_{i=0}^{6} x^i$.

3) Escreva as expressões abaixo, usando a notação de somatório:

a) $1+3+5+7+9$;

b) $-1+4-9+16-25+36$.

3) Expanda os seguintes produtos:

a) $\prod_{j=2}^{n} (3j+7)$;

b) $\prod_{i=1}^{4} \left(i^3 - 7i + 3 \right)$

4) Escreva as expressões abaixo usando a notação de produtório:

a) $1.3.5.7.9$;

b) $p(p+1)(p+2)...(p+n)$.

O axioma da indução é o último dos axiomas de Peano (que define os números naturais). Ele está presente (pelo menos de forma implícita) sempre que, ao afirmarmos a veracidade de uma preposição referente aos números naturais, verificamos que ela é verdadeira (n = 1, n=2, n=3) e dizemos "e assim por diante".

1.3 Princípio de Indução

Vamos analisar a seguinte soma:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+...+2n-1 \cdot$$

n	S_n
1	$1 = 1^2$
2	$1+3=4=2^2$
3	$1+3+5=9=3^2$
4	$1+3+5+7=16=4^2$
5	$1+3+5+7+9=25=5^2$
$\vdots$	

Deduzir
Concluir (algo) pelo raciocínio; inferir. Fonte: Dicionário Houaiss. Matematicamente, o raciocínio dedutivo é um poderoso instrumento de se chegar a conclusões a partir de fatos conhecidos e de uma estrutura lógica que os articule.

Considerando os próximos valores de n, podemos deduzir que:

i) $S_n = S_{n-1} + 2n - 1$;

ii) $S_n = n^2$.

A pergunta que surge aqui é se realmente isso é verdade para qualquer número natural n. Os cálculos acima não provaram isso. Então, em vez de fazer deduções arbitrárias, podemos apresentar um princípio conhecido como *princípio de indução*, que garante as afirmações estabelecidas.

Proposição 1. 1. Seja a um número inteiro. Uma proposição $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$ se:

i) $P(a)$ é verdadeira;

ii) para todo $r \geq a$, se $P(r)$ é verdadeira, então $P(r+1)$ também é verdadeira.

Para aplicarmos este *princípio de indução matemática*, devemos seguir os seguintes passos:

1° Passo (Base de indução): Verificar se $P(n)$ é verdadeira para $n = a$.

2° Passo (Hipótese de indução): Assumir $P(k)$ verdadeira, hipótese da indução, com k fixado arbitrariamente.

3° Passo (Tese de indução): Provar que $P(k+1)$ é verdadeiro.

Conclusão: Sendo verificados os três passos, podemos concluir que $P(n)$ é válida para qualquer valor de $n \geq a$.

Teste se a propriedade que está sendo estudada vale para o seu valor inicial.

Descreva o que significa esta propriedade valer para um valor k qualquer.

Mostre que utilizando o fato da propriedade valer para k significa que ela vale para seu sucessor (k + 1).

Vamos aplicar este princípio de indução para resolver alguns exemplos.

Exemplo 1.8. Prove por indução que

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 1.$$

Solução. Para $n = 1$ tem-se

$$1\frac{(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1 \text{ (vale).}$$

Supomos que o resultado vale para $n = r$, ou seja,

$$1+2+\ldots+r=\frac{r(r+1)}{2}.$$

Vamos mostrar que vale para $n = r+1$, ou seja, precisamos mostrar que

$$1+2+\ldots+r+(r+1)=\frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

Agora,

$$1+2+\ldots+r+(r+1)=\frac{r(r+1)}{2}+r+1$$

$$= \frac{r(r+1)+2(r+1)}{2}$$

$$= \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

Logo, o resultado vale para $r+1$. Assim, concluímos que o resultado vale para todo $n \geq 1$.

$\forall$ é um quantificador universal que significa que qualquer número satisfaz esta propriedade.

Exemplo 1.9 Prove por indução matemática que

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \; x \in \mathbb{R}, \; x \neq 1 \quad \forall n \geq 1,$$

onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

Solução.

1° Passo: (Base de indução). Para $n=1$

$$\sum_{i=0}^{1} x^i = 1 + x$$

e

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1.$$

Portanto a afirmação é verdadeira para $n=1$.

2° Passo: (Hipótese de indução). Vamos supor que a fórmula é válida para $n=k$, isto é,

$$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} \text{ (hipótese).}$$

3° Passo: (Tese de indução). Devemos mostrar que a afirmação é válida para $n=k+1$. Temos

$$\sum_{i=0}^{k+1} x^i = 1 + x + \ldots + x^k + x^{k+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} x^i + x^{k+1} \text{ (hipótese)}$$

$$= \frac{x^{k+1}-1}{x-1} + x^{k+1}$$

$$= \frac{x^{k+1}-1+x^{k+1}(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{x^{k+2}-1}{x-1}.$$

Isso diz que

$$\sum_{i=1}^{k+1} x^i = \frac{x^{(k+1)+1}-1}{x-1} \text{ (vale para } n = k+1).$$

Logo, se a fórmula vale para $k \geq 1$ então também vale para $k+1$. Portanto, concluímos pelo princípio de indução, para qualquer inteiro $n \geq 1$, que

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad x \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.10. Usando princípio de indução, prove que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2, \quad \forall n \geq 1.$$

Solução. Vimos no exemplo 1.8 que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Portanto, precisamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

1° Passo: $n = 1$

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1$$

$1 = 1$ (verdadeira).

2° Passo: Vamos supor que a afirmação vale para $n = k$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

3° Passo: Vamos provar que a mesma afirmação também vale para $n = k+1$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Agora,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$
$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$
$$= \frac{(k+1)^2\left[k^2 + 4(k+1)\right]}{4}$$
$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Assim, a fórmula vale para $k+1$ se for válida para k. Logo, pelo princípio de indução ela é válida para qualquer $n \geq 1$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

ou seja,

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2, \qquad \forall n \geq 1.$$

Exemplo 1.11. Utilizando o princípio de indução, mostre que a soma dos cubos de três inteiros consecutivos é um múltiplo de 9.

Solução. Vamos considerar

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Devemos mostrar que a expressão acima é um múltiplo de 9.

1° Passo: Para $n = 1$.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 9.4,$$

que é múltiplo de 9.

2° Passo: Para $n = k$, suponha que a expressão

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$$

é um múltiplo de 9, ou seja, existe um $t \in \mathbb{N}$ tal que

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9t.$$

3° Passo: Vamos mostrar que $n = k+1$, ou seja,

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \text{ é múltiplo de 9.}$$

Podemos escrever

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$$

$$=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+27+3.3k(k+3)$$

$$=k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+27+9k^2+27k$$

$$=9t+27+9k^2+27k$$

$$=9\left(t+3+k^2+3k\right)=9p,$$

onde $p=t+3+k^2+3k$.

Logo, podemos concluir que a expressão

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$$

é um múltiplo de 9.

Conseqüentemente, a afirmação $\forall n \geq 1$ é verdadeira.

Analogamente, também podemos provar que o resultado é válido para $n \in \mathbb{Z}$, pois neste caso escrevemos $n=-n$.

Exemplo 1.12. Utilizando o princípio de indução, prove que

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^m = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^m.$$

Solução.

1° Passo: Para $n=1$.

$$\prod_{i=1}^{1} a_i^m = a_1^m = \left(\prod_{i=1}^{1} a_i\right)^m.$$

2° Passo: Vamos supor que o resultado vale para $n=k$, isto é:

$$\prod_{i=1}^{k} a_i^m = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^m.$$

3° Passo: Vamos provar que o resultado é válido para $n=k+1$, ou seja,

$$\prod_{i=1}^{k+1} a_i^m = \left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i\right)^m.$$

Agora,

$$\prod_{i=1}^{k+1} a_i^m = \prod_{i=1}^{k} a_i^m a^m{}_{k+1}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k} a_i \right)^m a^m{}_{k+1} \text{ (usando 2° Passo)}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k} a_i a_{k+1} \right)^m$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i \right)^m \text{ (vale).}$$

Portanto, usando o princípio de indução concluímos que a afirmação $\forall n \geq 1$ é verdadeira.

Lista de Exercícios 3

Prove, utilizando o princípio da indução:

1) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \geq 1.$

Você notou que este exercício abriu a seção 1.6? Agora você vai resolvê-lo.

2) $\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2, \quad n \geq 1.$

Capítulo 2

Números Binomiais

Capítulo 2

Números Binomiais

Neste capítulo apresentaremos o Binômio de Newton e o triângulo de Pascal. Estes dois assuntos são importantes nas aplicações em análise combinatória, apresentada no capítulo a seguir.

Coeficientes
Coeficientes são números reais, em geral inteiros, que multiplicam as incógnitas ou variáveis de uma expressão. Na seção 2.4 você perceberá porque chamamos a expressão definida a seguir de coeficientes binomiais.

2.1 Coeficientes Binomiais

Definiremos como se calculam os coeficientes binomiais. As fórmulas a seguir permitem calcular todos os elementos do Triângulo de Pascal sem a necessidade de calcular os elementos anteriores e permitem o cálculo dos binômios de Newton, que serão estudados a seguir.

Definição 2.1. *Dados dois números naturais, n e p, sendo $n \geq p$, chamamos de coeficiente binomial ou número binomial ou número combinatório a expressão definida por*

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 1, & \text{se } p = 0 \\ \dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}, & \text{se } p \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

ou

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}, \quad n \geq p, \quad n, p \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Podemos verificar facilmente que as expressões (1) e (2) são equivalentes. De fato, multiplicando e dividindo (1) por $(n-p)!$, temos

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!\,p!}$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Notação. *Há várias formas de denotar a expressão* $\binom{n}{p}$*: por* $C_{n,p}$*, por* C_n^p*, por* n_{c_p} *, etc. Neste trabalho sempre utilizaremos* $C_{n,p}$.

Veja a seguir alguns exemplos de simplificação da expressão $C_{n,p}$.

Exemplo 2.1.

a) $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5!}{2!\ 3!} = \dfrac{5.4.\cancel{3!}}{2!\ \cancel{3!}} = \dfrac{20}{2} = 10$.

b) $C_{5,1} = \dfrac{5!}{1!(5-1)!} = \dfrac{5!}{4!\ 1!} = \dfrac{5.\cancel{4!}}{1!\ \cancel{4!}} = 5$.

c) $C_{7,5} = \dfrac{7!}{5!(7-5)!} = \dfrac{7!}{5!\ 2!} = \dfrac{7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}\ 2!} = \dfrac{42}{2} = 21$.

d) $C_{p,p-5} = \dfrac{p!}{(p-5)!(p-p+5)!} = \dfrac{p!}{(p-5)!\ 5!} = C_{p,5}$.

Observação 2.1. *As seguintes relações são importantes e serão utilizadas posteriormente:*

i) $C_{i,1} = \dfrac{i!}{(i-1)!\ 1!} = \dfrac{i\,\cancel{(i-1)!}}{\cancel{(i-1)!}\ 1!} = i$.

ii) $C_{i+1,2} = \dfrac{(i+1)!}{(i+1-2)!\ 2!} = \dfrac{(i+1)i\,\cancel{(i-1)!}}{\cancel{(i-1)!}\ 2!} = \dfrac{i(i+1)}{2!}$.

iii) $C_{i+2,3} = \dfrac{(i+2)!}{(i+2-3)!\ 3!} = \dfrac{(i+2)(i+1)i\,\cancel{(i-1)!}}{\cancel{(i-1)!}\ 3!} = \dfrac{i(i+1)(i+2)}{3!}$.

Às vezes chamamos Cn,p por coeficiente binomial de n por p, e neste caso n é conhecido como numerador do coeficiente binomial e p como denominador do coeficiente binomial, mas de qualquer maneira Cn,p não tem nada ver com número racional $\frac{n}{p}$, ou seja,

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} \neq \frac{n}{p}.$$

2.1.1 Coeficientes Binomiais Complementares

Os coeficientes binomiais $C_{7,2}$ e $C_{7,5}$ têm o mesmo numerador, e a soma de seus denominadores é igual ao numerador. O mesmo ocorre com $C_{6,4}$ e $C_{6,2}$. Coeficientes binomiais desse tipo são conhecidos como complementares. Veja definição a seguir.

Definição 2.2. *Coeficientes binomiais complementares são aqueles que têm o mesmo numerador e cuja soma dos denominadores é igual ao nume-*

rador, isto é, dois coeficientes binomiais $C_{n,p}$ e $C_{n,q}$ são complementares se $p+q=n$.

Exemplo 2.2.

a) $C_{8,3}$ e $C_{8,5}$ são complementares, pois $3+5=8$.

b) $C_{5,3}$ e $C_{5,2}$ são complementares, pois $3+2=5$.

2.1.2 Igualdade Entre Dois Binomiais

Dois binomiais, $C_{n,p}$ e $C_{n,q}$, são iguais se, e somente se, $p=q$ ou $p+q=n$, isto é,

Os coeficientes binomiais complementares são sempre iguais.

$$C_{n,p}=C_{n,q} \Leftrightarrow p=q \text{ ou } p+q=n.$$

Exemplo 2.3.

a) $C_{11,x}=C_{11,5} \Leftrightarrow x=5$ ou $x+5=11 \Rightarrow x=6$
$\Leftrightarrow x=5$ ou $x=6$.

b) $C_{8,4}=C_{8,x} \Leftrightarrow x=4$, pois ou $x+4=8 \Rightarrow x=4$.

Esta conclusão se enuncia genericamente da seguinte forma:

Proposição 2.1. *É válida a relação*

$$C_{n,p}=C_{n,n-p}, \quad \forall n,p \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \geq p,$$

onde é o conjunto de números naturais positivos.

A demonstração segue direto da propriedade de igualdade entre dois binomiais e do fato de que $n-p+p=n$

Observe os exemplos abaixo em que equações contém incógnitas nos binômios de Newton.

Exemplo 2.4. Obtenha n tal que

$$\frac{C_{n,2}}{C_{n,3}}=\frac{3}{4}.$$

Solução. Temos

$$\frac{C_{n,2}}{C_{n,3}}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\dfrac{n!}{(n-2)!\,2!}}{\dfrac{n!}{(n-3)!\,3!}}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{(n-3)!\,3!}{(n-2)!\,2!}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{(n-3)!}\;3.\cancel{2!}}{(n-2)\,\cancel{(n-3)!}\;\cancel{2!}}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{n-2}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow n-2=4$$

$$\Rightarrow n=6.$$

Exemplo 2.5. Obtenha n tal que $C_{n,2}=15$.

Solução. Podemos escrever

$$15=C_{n,2}=\frac{n!}{(n-2)!\,2!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\,2!}$$

$$\Rightarrow\;30=n(n-1)$$

$$\Rightarrow n^2-n-30=0$$

$$\Rightarrow(n-6)(n+5)=0$$

$$\Rightarrow n=6 \text{ ou } n=-5.$$

Como n é positivo, então $n\neq-5$, ou seja, $n=6$.

Lista de Exercícios 1

1) Efetue as expressões:

a) $C_{3,0}+C_{3,1}+C_{3,2}$;

b) $C_{5,0}+C_{5,2}+C_{5,4}$.

2) Determine o valor de x em cada uma das seguintes expressões:

a) $C_{16,x+1} = C_{16,3x-1}$;

b) $C_{10,x^2-5} = C_{10,-5x+1}$.

3) Obtenha n tal que:

a) $C_{n,3} = 1$;

b) $C_{n-1,2} = 36$.

4) Considere $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. Obtenha x tal que:

Esta notação será discutida no capítulo seguinte. Por enquanto, utilize esta fórmula apenas para treinar sua habilidade de calcular com fatoriais e comparar combinações.

a) $A_{x,2} - C_{x,2} = 10 - x$;

b) $A_{x+1,2} - C_{x-1,2} = 24$.

2.2 Relação de Stifel

A *relação de Stifel* é bem conhecida em análise combinatória e tem suas aplicações em desenvolvimento do **Binômio de Newton**. É dada por

$$C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1}.$$

De fato

Atenção: estude esta demonstração tentando compreender as idéias que estão sendo utilizadas e também analisando, de cada linha para a seguinte, a validade de cada operação.

$$\begin{aligned}
C_{n,p} + C_{n,p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)p!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right] \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{\cancel{p}+1+n-\cancel{p}}{(n-p)(p+1)}\right] \\
&= \frac{n!(n+1)}{p!(n-p-1)!(n-p)(p+1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(p+1)!\big(n+1-(p+1)\big)!}$$

$$= C_{n+1,p+1}.$$

Exemplo 2.6. Calcule

a) $C_{9,6} + C_{9,7}$;

b) $C_{8,5} + C_{8,6}$.

Solução.

a) Aplicando a relação de Stifel, podemos escrever

$$C_{9,6} + C_{9,7} = C_{10,7} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120\,.$$

b) Aplicando a relação de Stifel, podemos escrever

$$C_{8,5} + C_{8,6} = C_{9,6} = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9.8.7}{1.2.3} = 84\,.$$

Exemplo 2.7 Resolva a equação

$$C_{x+1,2} = C_{x,1} + C_{4,2}\,.$$

Solução. Comparando-a com a relação de Stifel,

$C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1}$, temos

$C_{x,1} + C_{4,2} = C_{x+1,2}$

$\Leftrightarrow C_{4,1} + C_{4,2} = C_{5,2}$

$\Leftrightarrow x = 4$.

Lista de Exercícios 2

Ao resolver os exercícios, atente para o fato de que matematicamente um problema está resolvido se for mostrado que não há solução possível

1) Complete:

$$C_{5,1} + C_{5,2} = C_{\square,2}\,.$$

Note que aqui o n é tratado como uma constante e a resposta encontrada será em função de n.

2) Resolva em x a equação

$$C_{n,3} = x\,C_{n,4}\,.$$

3) Obtenha x tal que

$$C_{12,2x} = C_{12,x+9}\,.$$

4) Obtenha x e y tal que

$$C_{10,x} + C_{10,2x-5} = C_{11,y}\,.$$

2.3 Triângulo de Pascal

A seguinte disposição de números em termos de coeficientes binomiais é conhecida como *Triângulo de Pascal*.

	0	1	2	3	4	5	...
$L_0 : 0$	$C_{0,0}$						
$L_1 : 1$	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$					
$L_2 : 2$	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$				
$L_3 : 3$	$C_{3,0}$	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$			
$L_4 : 4$	$C_{4,0}$	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$C_{4,3}$	$C_{4,4}$		
$L_5 : 5$	$C_{5,0}$	$C_{5,1}$	$C_{5,2}$	$C_{5,3}$	$C_{5,4}$	$C_{5,5}$	
...	...	...	...	...	...	...	...

Tabela 1

A tabela acima pode ser representada equivalentemente como:

	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
...	...	...	...	...	...	...	...

Tabela 2

A disposição de números dadas na tabela 1 ou tabela 2 é chamada *Triângulo de Pascal*.

Aplicando a *relação de Stifel*, podemos observar que a cada dois termos consecutivos de uma linha, obtemos a linha seguinte. Por exemplo,

$$C_{3,1} + C_{3,2} = C_{4,2},$$

ou

$$3 + 3 = 6.$$

Para construir o ***Triângulo de Pascal*** devemos observar os seguintes passos:

- A primeira coluna é formada exclusivamente pelo número 1, pois $C_{n,0} = 1$.
- A segunda coluna é formada pela seqüência 1,2,3,... iniciando o primeiro elemento da coluna a partir da segunda linha da tabela.
- O último elemento de cada linha é sempre 1, pois $C_{n,n} = 1$.
- Os penúltimos elementos das linhas formam a seqüência 1, 2, 3,...
- Os outros elementos da tabela são obtidos aplicando a relação de Stifel.

2.3.1 Propriedades do Triângulo de Pascal

A seguir damos algumas propriedades do triângulo de Pascal.

Propriedade 2.1. *Dois coeficientes eqüidistantes dos extremos são iguais, ou seja, em uma mesma linha do triângulo de Pascal, elementos eqüidistantes dos extremos são iguais.*

Demonstração. Considere uma linha genérica de numerador n de triângulo de Pascal dada por

$$C_{n,0} \;\; C_{n,1} \;\; C_{n,2} \; \dots \; C_{n,p} \; \dots \; C_{n,n-p} \; \dots \; C_{n,n-1} \;\; C_{n,n} \, .$$

Podemos observar que $C_{n,p}$ e $C_{n,n-p}$ são eqüidistantes dos extremos, pois p elementos procedem $C_{n,p}$ e p elementos sucedem $C_{n,n-p}$. Além disso, $C_{n,p}$ e $C_{n,n-p}$ são complementares, pois $p+n-p=n$. Sabemos que elementos complementares são iguais.

Portanto,

$$C_{n,p} = C_{n,n-p} \, .$$

■

Propriedade 2.2. (Teorema das linhas) *A soma dos coeficientes binomiais situados numa mesma linha (de numerador n) de um triângulo de Pascal é sempre 2^n. Isto é,*

$$\sum_{i=0}^{n} C_{n,i} = C_{n,0} + C_{n,1} + \dots + C_{n,n} = 2^n \cdot$$

Análise:

Linha							Soma
$n=0$ (L_0):	1						1 ou $1=2^0$
$n=1$ (L_1):	1	1					$1+1=2=2^1$
$n=2$ (L_2):	1	2	1				$1+2+1=4=2^2$
$n=3$ (L_3):	1	3	3	1			$1+3+3+1=8=2^3$
$n=4$ (L_4):	1	4	6	4	1		$1+4+6+4+1=16=2^4$
e sucessivamente	...	...	...	...	...	...	...

Tabela 3

Por exemplo,

i) $\sum_{i=0}^{5} C_{5,i} = 2^5$;

ii) $\sum_{i=0}^{3} C_{3,i} = 2^3$;

iii) $C_{4,0} + C_{4,1} + C_{4,2} + C_{4,3} + C_{4,4} = 2^4$.

Demonstração. Vamos demonstrar a propriedade usando o princípio da indução ou indução matemática.

Lembre-se que vimos este método de demonstração no item 1.3 Princípio de Indução desta disciplina.

1° Passo: $n = 0$

$$C_{0,0} = 1 = 2^0 \qquad \textbf{(vale).}$$

2° Passo: Vamos supor que a afirmação é válida para $n = i$, ou seja,

$$C_{i,0} + C_{i,1} + \ldots + C_{i,i} = 2^i.$$

3° Passo: Vamos provar que $n = i + 1$, ou seja, precisamos provar que

$$C_{i+1,0} + C_{i+1,1} + \ldots + C_{i+1,i+1} = 2^{i+1}.$$

Aplicando a relação de Stifel podemos escrever

$$C_{i+1,1} = C_{i,0} + C_{i,1}$$

$$C_{i+1,2} = C_{i,1} + C_{i,2}$$

$$\vdots$$

$$C_{i+1,i} = C_{i,i-1} + C_{i,i}.$$

Também sabemos que

$$C_{i+1,0} = C_{i,0}$$

e

$$C_{i+1,i+1} = C_{i,i}.$$

Logo, podemos escrever

$$C_{i+1,0} + C_{i+1,1} + \ldots + C_{i+1,i+1} = C_{i+1,0} + C_{i+1,1} + \ldots + C_{i+1,i} + C_{i+1,i+1}$$

$$= C_{i,0} + C_{i,0} + C_{i,1} + C_{i,1} + \ldots + C_{i,i} + C_{i,i}$$

$$= 2\left[C_{i,0} + C_{i,1} + \ldots + C_{i,i}\right]$$

$$= 2\,2^{i} \qquad \text{(utilizando 2° passo – hipótese)}$$

$$= 2^{i+1}.$$

Logo, o resultado vale $\forall\, n \geq 0$.

■

Exemplo 2.8. Qual é o valor da soma

$$S = \sum_{i=1}^{n} i\, C_{n,i}\ ?$$

Solução. Temos

$$S = \sum_{i=1}^{n} i\, C_{n,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i\, \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-1-(i-1))!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} n\, C_{n-1,i-1}$$

$$= n\left[C_{n-1,0} + C_{n-1,1} + \ldots + C_{n-1,n-1}\right]$$

$$= n\, 2^{n-1}.$$

Propriedade 2.3 (Teorema das colunas). *A soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal (começando no primeiro elemento da coluna) é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna sobre a última parcela de soma, isto é, a soma dos* n *primeiros termos da coluna* p *é igual ao termo* $n+1$ *da coluna* $p+1$, *ou seja,*

$$C_{n,n} + C_{n+1,n} + \ldots + C_{n+p,n} = C_{n+p+1,n+1},$$

ou

$$\sum_{i=0}^{p} C_{n+i,n} = C_{n+p+1,n+1}, \qquad \forall\, n \geq 0.$$

Análise:

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	...
1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
...	...	...	...	...	...

Então, a soma dos primeiros três termos da coluna C_1 é dada por $1+2+3=6$, que é o valor do terceiro termo da coluna C_2. Por exemplo,

i) $C_{4,4}+C_{5,4}+C_{6,4}=C_{7,5}$.

ii) $C_{7,7}+C_{7,8}+C_{7,9}+C_{7,10}=C_{8,11}$.

Demonstração. Vamos demonstrar a propriedade usando a indução matemática sobre p. Seja n um número inteiro fixo.

1° Passo: $p=0$

$C_{n,n}=C_{n+1,n+1}=1$ (vale).

2° Passo: Vamos supor que a afirmação é válida para $p=i$, ou seja,

$C_{n,n}+C_{n+1,n}+\ldots+C_{n+i,n}=C_{n+i+1,n+1}$.

3° Passo: Vamos provar que $p=i+1$, ou seja, precisamos provar que

$C_{n,n}+C_{n+1,n}+\ldots+C_{n+i+1,n}=C_{n+i+2,n+1}$.

Vamos considerar o lado esquerdo da expressão acima. Podemos escrever

$$C_{n,n}+C_{n+1,n}+\ldots+C_{n+i+1,n}$$

$$=C_{n+i+1,n+1}+C_{n+i+1,n} \quad \text{(por hipótese, 2º passo)}$$

$$=\frac{(n+i+1)!}{(n+1)!i!}+\frac{(n+i+1)!}{n!(i+1)!}$$

$$=\frac{(n+i+1)!}{n!i!}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{i+1}\right]$$

$$= \frac{(n+i+1)!(n+i+2)}{n!i!(n+1)(i+1)}$$

$$= \frac{(n+i+2)!}{(n+1)!(i+1)!}$$

$$= C_{n+i+2,\, n+1},$$

o que é o lado direito da expressão.

Logo, o resultado vale $\forall\ p \geq 0$. ■

Vamos aplicar a propriedade acima para resolver alguns exemplos.

Exemplo 2.9. Qual é o valor da soma $S = \sum_{i=1}^{30} i(i+1)(i+2)$?

Solução. Utilizando a observação 2.1 podemos escrever

$$S = \sum_{i=1}^{30} i\,(i+1)(i+2)$$

$$= \sum_{i=1}^{30} 3!\, C_{i+2,3}$$

$$= 6\left[C_{3,3} + C_{4,3} + \ldots + C_{32,3}\right]$$

$$= 6\, C_{33,4} \qquad \text{(pela propriedade 2.3)}$$

$$= 6\frac{33!}{4!(33-4)!}$$

$$= \frac{33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 6$$

$$= 245520.$$

Exemplo 2.10. Calcule a soma

$$S = \sum_{i=1}^{n} i^2 .$$

Solução. Pelo princípio de indução, sabemos que

$$S = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Mas demonstraremos o mesmo resultado aplicando a propriedade 2.3.

Pela observação 2.1 vimos que temos valores de $C_{n,i}$ do tipo $i, i(i+1), i(i+1)(i+2)$, etc.

Então queremos escrever i^2 em termos de $i, i(i+1),$ etc. Para tal, vamos considerar

$$i^2 = Ai(i+1) + Bi + C\,.$$

Após comparação dos coeficientes dos dois lados e simplificando, obtemos $A=1$, $B=-1$ e $C=0$.

Então podemos escrever $i^2 = i(i+1) - i$. Logo

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} [i(i+1) - i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} i(i+1) - \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} C_{i+1,2} - \sum_{i=1}^{n} C_{i,1} \quad \text{(aplicando a observação 2.1)} \\
&= 2\, C_{n+2,3} - C_{n+1,2} \quad \text{(pela propriedade 2.3)} \\
&= 2\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3} - \frac{(n+1)n}{1.2} \\
&= n(n+1)\left[\frac{n+2}{3} - \frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Exempo 2.11. Calcule o valor da soma

$$S = \sum_{i=1}^{n} (3i-1)i^2\,.$$

Solução. Temos

$$S = \sum_{i=1}^{n} (3i-1)i^2 = 2.1^2 + 5.2^2 + 8.3^2 + \ldots + (3n-1)n^2\,.$$

Vamos escrever $(3i-1)i^2 = 3i^3 - i^2$ em termos de $i, i(i+1)$, $i(i+1)(i+2)$ etc.

Temos

$$3i^3 - i^2 = Ai(i+1)(i+2) + Bi(i+1) + Ci + D$$

$$= Ai^3 + (3A+B)i^2 + (2A+B+C)i + 1.$$

Comparando os coeficientes e simplificando, obtemos

$$A = 3,\ B = -10,\ C = 4 \text{ e } D = 0.$$

Isto implica em

$$3i^3 - i^2 = 3i(i+1)(i+2) - 10i(i+1) + 4i.$$

Logo

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} (3i-1)i^2 \\ &= 3\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) - 10\sum_{i=1}^{n} i(i+1) + 4\sum_{i=1}^{n} i \\ &= 3\sum_{i=1}^{n} 3!\,C_{i+2,3} - 10\sum_{i=1}^{n} 2!\,C_{i+1,2} + 4\sum_{i=1}^{n} C_{i,1} \quad \text{(pela observação 2.1)} \\ &= 18\,C_{n+3,4} - 20\,C_{n+2,3} + 4\,C_{n+1,2} \quad \text{(pela propriedade 2.3)} \\ &= 18\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - 20\frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3} + 4\frac{n(n+1)}{1\cdot 2} \\ &= n(n+1)\left[\frac{3(n+2)(n+3)}{4} - \frac{10(n+2)}{3} + 2\right] \\ &= \frac{n(n+1)(9n^2+5n-2)}{12}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S = \sum_{i=1}^{n} (3i-1)i^2 = \frac{n(n+1)(9n^2+5n-2)}{12}.$$

Propriedade 2.4 (Teorema das Diagonais). *A soma dos elementos de uma diagonal (isto é, de uma paralela à hipotenusa) do Triângulo de Pascal (começando no primeiro elemento da diagonal) é igual ao elemento que está imediatamente abaixo da ultima parcela. Em outras palavras, podemos dizer que a soma dos* p *termos da diagonal de ordem* n *é igual ao termo* p *da coluna de ordem* $n+1$*, isto é,*

$$\sum_{i=0}^{p} C_{n+i,i} = C_{n,0} + C_{n+1,1} + \ldots + C_{n+p,p} = C_{n+p+1,p}.$$

Análise:

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	...
1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
...	...	...	...	...	...	...	...

Por exemplo,

i) $C_{4,0} + C_{5,1} + C_{6,2} = C_{7,2}$;

ii) $C_{10,0} + C_{11,1} + C_{12,2} + C_{13,3} = C_{14,3}$.

Demonstração. Utilizando as propriedades de combinação complementares, isto é, $C_{n,p} = C_{n,n-p}$, $\forall\, n \geq p$, podemos escrever

$$\sum_{i=0}^{p} C_{n+i,i} = C_{n,0} + C_{n+1,1} + C_{n+2,2} + \ldots + C_{n+p,p}$$

$$= C_{n,n} + C_{n+1,n} + C_{n+2,n} + \ldots + C_{n+p,n}$$

$$= C_{n+p+1,n+1} \text{ (aplicando propriedade 2.3)}$$

$$= C_{n+p+1,p}.$$

■

Propriedade 2.5. *Valem as seguintes desigualdades:*

a) $C_{n,p} < C_{n,p+1}$ se $p < \dfrac{n-1}{2}$;

b) $C_{n,p} > C_{n,p+1}$ se $p > \dfrac{n-1}{2}$.

Interpretação: *Os resultados (a) e (b) afirmam que na primeira metade de cada linha os elementos estão em ordem crescente (cada termo é menor que o seguinte, $C_{n,p} < C_{n,p+1}$) e que na segunda metade os elementos estão em ordem decrescente (cada termo é maior que o anterior, $C_{n,p} > C_{n,p+1}$).*

Demonstração. Simplificando, obtemos

$$C_{n,p+1} - C_{n,p} = \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} - \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$= \frac{n!(n-p) - n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{n!(n-2p-1)}{(p+1)!(n-p)!}.$$

Como $n!$, $(p+1)!$ e $(n-p)!$ são positivos, então o sinal de $C_{n,p+1} - C_{n,p}$ é o mesmo de $n-2p-1$.

Logo

$$C_{n,p+1} - C_{n,p} \begin{cases} > 0, & n-2p-1 > 0 \\ < 0, & n-2p-1 < 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$C_{n,p+1} - C_{n,p} \begin{cases} > 0, & p < \dfrac{n-1}{2} \\ < 0, & p > \dfrac{n-1}{2} \end{cases}.$$

■

Resumindo, até o momento estudamos os seguintes assuntos:

Relação de Stifel

$$C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1}.$$

Teorema das Diagonais

$$C_{n,0} + C_{n+1,1} + \ldots + C_{n+p,p} = C_{n+p+1,p}.$$

Teorema das Linhas

$$C_{n,0} + C_{n,1} + \ldots + C_{n,n} = 2^n.$$

Teorema das Colunas

$$C_{n,n} + C_{n+1,n} + \ldots + C_{n+p,n} = C_{n+p+1,n+1}.$$

Binomiais Complementares

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}, \quad n \geq 0, \quad n \geq p \geq 0.$$

Lista de Exercícios 3

1) Prove, fazendo as contas, que $C_{n+2,p+2} = C_{n,p} + 2C_{n,p+1} + C_{n,p+2}$.

2) Calcule $\sum_{i=0}^{n}(i+1)C_{n,i}$.

3) Calcule o valor da soma

a) $S = \sum_{i=15}^{75} i(i+1)$.

b) $S = \sum_{i=1}^{n} i(2i+1)$.

2.4 Binômio de Newton

Vamos analisar o desenvolvimento da expressão

$$(a+b)^n,$$

para cada valor de n:

- para $n = 0$: $(a+b)^0 = 1$;
- para $n = 1$: $(a+b)^1 = a+b = 1a+1b$;
- para $n = 2$: $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$;
- para $n = 3$: $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$;
- para $n = 4$: $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$;
- para $n = 5$: $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$ e assim por diante.

Uma simples análise nas identidades acima verifica que:

- à medida que o expoente aumenta, o número de termos de desenvolvimento também aumenta;
- o número de termos do desenvolvimento da expressão $(a+b)^n$ é $n+1$. Assim, $(a+b)^3$ tem quatro termos, $(a+b)^5$ tem seis termos, etc.;

Você se lembra de que falamos em coeficientes binomiais desde o início? É devido ao seu uso na expansão da potência de uma soma que ele recebe este nome.

- as seqüências dos **coeficientes** da expressão $(a+b)^n$ formam o Triângulo de Pascal.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
...	...	...	...	...	...	...

Assim, através da relação de Stifel é possível determinar qualquer termo da expressão de $(a+b)^n$.

Novamente escrevendo o desenvolvimento da expressão $(a+b)^n$ em termos de números binomiais, temos:

$$(a+b)^0 = C_{0,0}$$

$$(a+b)^1 = C_{1,0}\,a + C_{1,1}\,b$$

$$(a+b)^2 = C_{2,0}\,a^2 + C_{2,1}\,a\,b + C_{2,2}\,b^2$$

$$(a+b)^3 = C_{3,0}\,a^3 + C_{3,1}\,a^2\,b + C_{3,2}\,a\,b^2 + C_{3,3}\,b^3$$

$$(a+b)^4 = C_{4,0}\,a^4 + C_{4,1}\,a^3\,b + C_{4,2}\,a^2\,b^2 + C_{4,3}\,a\,b^3 + C_{4,4}\,b^4$$

$$\vdots$$

$$(a+b)^n = C_{n,0}\,a^n + C_{n,1}\,a^{n-1}\,b + C_{n,2}\,a^{n-2}\,b^2 + \ldots + C_{n,n-1}\,a\,b^{n-1} + C_{n,n}\,b^n .$$

Podemos, então, verificar que:

- o coeficiente de cada termo é da forma $C_{n,i}$, onde i varia de 0 a n;
- em qualquer termo o elemento a é elevado a um expoente $n-i$;
- em qualquer termo o elemento b é elevado a um expoente i.

De modo geral,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\,a^{n-i}b^i . \qquad (3)$$

A expressão (3) é chamada de ***Binômio de Newton***.

A seguir demonstraremos a validade da expressão do Binômio de Newton, dada por (3), pelo princípio de indução.

1° Passo: Para $n=1$,

$$(a+b)^1=(a+b),$$

e

$$C_{1,0}\,a+C_{1,1}\,b=1a+1b=a+b.$$

Logo

$$(a+b)=C_{1,0}\,a+C_{1,1}\,b.$$

2° Passo: Vamos supor que a afirmação (3) é válida para $n=k$, ou seja,

$$(a+b)^k=\sum_{i=0}^{k}C_{k,i}\,a^{k-i}b^i,\ k\geq 1.$$

3° Passo: Vamos provar a afirmação (3) para $n=k+1$, ou seja, precisamos verificar que

$$(a+b)^{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}C_{k+1,i}\,a^{k+1-i}b^i.$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&=(a+b)(a+b)^k\\ &=(a+b)\sum_{i=0}^{k}C_{k,i}\,a^{k-i}b^i \quad \text{(2º passo – hipótese de indução)}\\ &=(a+b)\big[C_{k,0}\,a^k+C_{k,1}\,a^{k-1}b+C_{k,2}\,a^{k-2}b^2\\ &\quad+\ldots+C_{k,k-1}\,a\,b^{k-1}+C_{k,k}\,b^k\big]\\ &=C_{k,0}\,a^{k+1}+(C_{k,1}+C_{k,0})a^kb+(C_{k,2}+C_{k,1})\,a^{k-1}b^2\\ &\quad+\ldots+(C_{k,k}+C_{k,k-1})\,a\,b^k+C_{k,k}\,b^{k+1}.\end{aligned} \tag{4}$$

Aplicando a relação de Stifel e utilizando as identidades

$$C_{k,0}=C_{k+1,0}\ \text{e}\ C_{k,k}=C_{k+1,k+1},$$

obtemos, da expressão (4),

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1,0}\, a^{k+1} + C_{k+1,1}\, a^k b + \ldots + C_{k+1,k}\, a b^k + C_{k+1,k+1}\, b^{k+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1,i}\, a^{k+1-i} b^i ,$$

o que prova o resultado para $n = k+1$. Logo, pelo princípio de indução, podemos concluir a validade da afirmação (3) para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Observação 2.2. *Às vezes, a expressão* $(a+b)^n$ *é chamada de Binômio, e seu desenvolvimento (3) é conhecido como Binômio de Newton.*

2.4.1 Termo Geral do Binômio

Vamos escrever

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^{n} T_{i+1} ,$$

onde

$$T_{i+1} = C_{n,i}\, a^{n-i} b^i , \quad 0 \le i \le n . \tag{5}$$

A expressão (5) é chamada de ***termo geral do binômio***, e o coeficiente $C_{n,i}$ é o ***coeficiente binomial*** do $(i+1)$- ésimo termo. Por exemplo,

i) O coeficiente de 8° termo da expressão $(a+b)^{10}$ é $C_{10,7}$;

ii) O coeficiente de 4° termo da expressão $(a+b)^{13}$ é $C_{13,3}$.

Exemplo 2.12 Escreva a representação por somatório do seguinte binômio: $(a-b)^n$.

Note que essa forma de representar uma subtração por uma soma com um termo negativo facilita os cálculos e permite o uso padrão do termo geral do binômio.

Solução. Podemos escrever

$$(a-b)^n = [a+(-b)]^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i} (-b)^i .$$

Como $(-b)^i = (-1)^i b^i$, então

Aqui está sendo utilizada a distributividade da potência em relação à multiplicação. Por que você acha que esta mudança foi feita?

$$(a-b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i} (-1)^i b^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_{n,i}\, a^{n-i} b^i .$$

Exemplo 2.13. Determine o termo geral do desenvolvimento de $(a-b)^n$.

Solução. Sabemos que

$$(a-b)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_{n,i}\, a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^{n} T_{i+1},$$

onde

$$T_{i+1} = (-1)^i C_{n,i}\, a^{n-i} b^i, \quad 0 \le i \le n$$

é o termo geral da expressão $(a-b)^n$.

Exemplo 2.14. Desenvolva o binômio

$$(x+y)^4.$$

Solução. Aplicando o desenvolvimento do Binômio de Newton, podemos escrever

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= C_{4,0}\, x^4 + C_{4,1}\, x^3 y + C_{4,2}\, x^2 y^2 + C_{4,3}\, x y^3 + C_{4,4}\, y^4 \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4.\end{aligned}$$

Exemplo 2.15. Desenvolva o binômio $(x-y)^5$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned}(x-y)^5 &= \sum_{i=0}^{5} (-1)^i C_{5,i}\, x^{5-i} y^i \\ &= (-1)^0 C_{5,0}\, x^5 + (-1) C_{5,1}\, x^4 y + (-1)^2 C_{5,2}\, x^3 y^2 \\ &\quad + (-1)^3 C_{5,3}\, x^2 y^3 + (-1)^4 C_{5,4}\, x y^4 + (-1)^5 C_{5,5}\, y^5 \\ &= x^5 - 5x^4 y + 10x^3 y^2 - 10x^2 y^3 + 5x y^4 - y^5.\end{aligned}$$

Exemplo 2.16. Calcule o 7° termo do desenvolvimento de $(2+y)^8$.

Solução. Podemos escrever

$$(2+y)^8 = \sum_{i=0}^{8} T_{i+1},$$

onde

$$T_{i+1} = C_{8,i}\, 2^{8-i} y^i.$$

Agora, para $i = 6$, temos

$$T_7 = C_{8,6}\, 2^2 y^6 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} 4 y^6 = 112 y^6 .$$

Exemplo 2.17. Calcule o 6° termo do desenvolvimento de $(x-3)^7$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} T_6 = T_{5+1} &= C_{7,5}(-1)^5\, x^2 3^5 \\ &= 3^5 \frac{7.6}{1.2}(-1)x^2 \\ &= 21.81.3(-1)x^2 \\ &= -63.81x^2 \end{aligned}$$

termo independente
É comum em matemática fazer referência em uma equação ao termo em que a incógnita não aparece. A este termo chamamos de termo independente da incógnita ou simplesmente termo independente.

Exemplo 2.18. Verifique se existe termo independente de a no desenvolvimento de

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^7 .$$

Solução. Sabemos que

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= C_{7,i}\, a^{7-i} \left(\frac{1}{a}\right)^i \\ &= C_{7,i}\, a^{7-i} a^{-i} \\ &= C_{7,i}\, a^{7-2i} . \end{aligned}$$

Para que T_{i+1} seja independente de a, é necessário que $7 - 2i = 0$, ou seja, $i = \frac{7}{2}$.

Como $i \in \mathbb{N}$, logo $i = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$. Portanto, não existe o termo independente de a.

Exemplo 2.19. Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de

$$\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^8 .$$

Solução. Sabemos que

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= C_{8,i}\left(\frac{1}{x}\right)^{8-i}(x^3)^i \\ &= C_{8,i}\, x^{-8+i}x^{3i} \\ &= C_{8,i}\, x^{-8+4i}. \end{aligned}$$

Para o termo independente de x, devemos ter o expoente igual a zero, ou seja,

$$-8+4i=0 \Rightarrow i=2,$$

isto é,

$$\begin{aligned} T_3 &= C_{8,2}x^{-8+8} \\ &= C_{8,2} \\ &= \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28. \end{aligned}$$

Exemplo 2.20. Desenvolva $(x-3y)^4$.

Solução. Temos

$$a=x, b=-3y \text{ e } n=4.$$

Logo

$$\begin{aligned} (x-3y)^4 &= \sum_{i=0}^{4} C_{4,i}\, x^{4-i}(-3y)^i \\ &= C_{4,0}\,x^4 + C_{4,1}\,x^3(-3y) + C_{4,2}\,x^2(-3y)^2 \\ &\quad + C_{4,3}\,x(-3y)^3 + C_{4,4}(-3y)^4 \\ &= x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4. \end{aligned}$$

Portanto

$$(x-3y)^4 = x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4.$$

Exemplo 2.21. Determine o 6º termo do desenvolvimento de

$$\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9.$$

Solução. Temos

$$T_{i+1} = C_{n,i}\, a^{n-i} b^i .$$

Agora,

$$a = x, b = \frac{1}{\sqrt{x}}, n = 9 \text{ e } i = 5 .$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} T_6 &= C_{9,5}\, x^{9-5} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 x^{-5/2} \\ &= 126 x^{4-5/2} \\ &= 126 x^{3/2} . \end{aligned}$$

Exemplo 2.22. Um dos termos do desenvolvimento de

$$\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{12}$$

não depende de x. Qual é?

Solução. Sabemos que

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= C_{12,i}\, x^{12-i} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^i \\ &= (-1)^i\, C_{12,i}\, x^{12-i} x^{-2i} \\ &= (-1)^i\, C_{12,i}\, x^{12-3i} . \end{aligned}$$

Para que T_{i+1} seja independente de x, devemos ter $12 - 3i = 0$ ou $i = 4$.

Logo

$$\begin{aligned} T_5 &= (-1)^4\, C_{12,4}\, x^{12-12} \\ &= C_{12,4} = \frac{12!}{8!\, 4!} \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 11 \cdot 5 \cdot 9 \\ &= 495 . \end{aligned}$$

Exemplo 2.23. Escreva o termo em b^6 da expressão $(2+b^2)^9$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= C_{9,i}\, 2^{9-i} \left(b^2\right)^i \\ &= C_{9,i}\, 2^{9-i} b^{2i}. \end{aligned}$$

Para obter o termo em b^6, devemos fazer $2i=6$, isto é, $i=3$.

Logo,

$$\begin{aligned} T_4 &= C_{9,3}\, 2^6 b^6 \\ &= \frac{9.8.7}{1.2.3} 2^6 b^6 \\ &= 84.2^6 b^6. \end{aligned}$$

Exemplo 2.24. Dê o coeficiente do termo em x^8 no desenvolvimento de $(x-3)^{10}$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= C_{10,i}\, x^{10-i} (-3)^i \\ &= (-1)^i C_{10,i}\, x^{10-i} 3^i. \end{aligned}$$

Para obter o coeficiente do termo em x^8, devemos fazer $10-i=8$, isto é, $i=2$.

Logo

$$\begin{aligned} T_3 &= (-1)^2 C_{10,2}\, x^8 3^2 \\ &= 9\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} x^8 \\ &= 405 x^8. \end{aligned}$$

Portanto, o coeficiente do termo em x^8 é 405.

2.4.2 Propriedades

A seguir apresentaremos duas propriedades interessantes do binômio de Newton.

Ordem
Na fórmula do termo geral do binômio chamamos de ordem ao termo i.

Propriedade 2.6. *No desenvolvimento de $(a+b)^n$, a soma dos coeficientes de ordem par é igual a soma dos coeficientes de ordem ímpar.*

Demonstração. Sabemos que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i} b^i .$$

Vamos considerar $a=1$ e $b=-1$. Obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{n} C_{n,i} (-1)^i \\ &= C_{n,0} - C_{n,1} + C_{n,2} - C_{n,3} + \ldots + (-1)^n C_{n,n} \\ &\Rightarrow C_{n,1} + C_{n,3} + \ldots = C_{n,0} + C_{n,2} + \ldots , \end{aligned}$$

o que **demonstra** a propriedade. ■

Por que você acha que o que foi feito demonstra a igualdade entre a soma dos termos de ordem par e a soma dos de ordem impar?

Propriedade 2.7. *No desenvolvimento de $(a+b)^n$, a soma dos coeficientes é igual a 2^n, ou seja,*

$$\sum_{i=0}^{n} C_{n,i} = 2^n .$$

Demonstração. Sabemos que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i} b^i .$$

Vamos considerar $a=b=1$. Logo

$$2^n = \sum_{i=1}^{n} C_{n,i}$$

ou

$$C_{n,0} + C_{n,1} + \ldots + C_{n,n} = 2^n .$$ ■

Observe que este resultado já foi demonstrado anteriormente de uma outra maneira, quando foram estudadas as propriedades do triângulo de Pascal. Esta propriedade é equivalente ao ***Teorema das linhas***, discutido no item 2.2.

Exemplo 2.25. Determine as somas dos coeficientes do desenvolvimento de $(x^2+x)^{10}$.

Solução. Podemos escrever

$$\left(x^2+x\right)^{10}=\sum_{i=0}^{n} C_{10,i}\left(x^2\right)^{10-i}x^i .$$

Para obter soma dos coeficientes, devemos considerar $x=1$, isto é,

$$2^{10}=\sum_{i=0}^{10} C_{10,i} .$$

Observação 2.3. *Considere um polinômio*

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n ,$$

então

$$P(1)=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n .$$

A soma dos coeficientes de um polinômio em x é o valor numérico do polinômio para $x=1$.

Exemplo 2.26. Determine o termo máximo no desenvolvimento de

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{21} .$$

Solução. O termo geral é dado por

$$T_{i+1}=C_{21,i}\,1^{21-i}\left(\frac{1}{2}\right)^i=C_{21,i}\left(\frac{1}{2}\right)^i .$$

Sabemos que cada termo é maior que o anterior (até certo valor de i) **, ou seja,**

Você se lembra em que local demonstramos este fato? Se não, retome no texto e procure o teorema, propriedade ou proposição que garante esta afirmação.

$$\begin{aligned}
&T_{i+1}>T_i\\
&\Rightarrow C_{21,i}\left(\frac{1}{2}\right)^i>C_{21,i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\\
&\Rightarrow \frac{21!}{i!(21-i)}\left(\frac{1}{2}\right)^i>\frac{21!}{(i-1)!(22-i)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\\
&\Rightarrow \frac{(22-i)!}{(21-i)!}>\frac{i!}{(i-1)!}2\\
&\Rightarrow 22-i>2i\\
&\Rightarrow 22>3i\Rightarrow i<\frac{22}{3} .
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$T_{i+1} > T_i \quad \forall i \in \{0,1,2,\ldots,7\}.$$

Analogamente,

$$T_{i+1} < T_i \quad \forall i \in \{8,\ldots,21\}.$$

Logo

$$T_1 < T_2 < T_3 < \ldots < T_7 < T_8 > T_9 > \ldots > T_{21}.$$

Portanto, o termo máximo é T_8, isto é,

$$T_8 = C_{21,7}\left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

Alternativamente, se fizermos o cálculo de cada um desses números veremos que $T_7 < T_8$ e, por outro lado, $T_9 < T_8$. Logo, o termo máximo é T_8.

Exemplo 2.27. Calcule

a) $\sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, x^i$;

b) $\sum_{i=0}^{n} i\, C_{n,i}\, x^i$;

c) $\sum_{i=0}^{n} i\, C_{n,i}$.

Solução.

a) Sabemos que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i} b^i.$$

Considerando $a = 1$ e $b = x$, obtemos

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, x^i.$$

b) Podemos escrever

$$\sum_{i=0}^{n} i\, C_{n,i}\, x^n = \sum_{i=1}^{n} i\, C_{n,i}\, x^i.$$

pois, para $i = 0$, o valor da expressão é zero.

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} i\, C_{n,i}\, x^i = \sum_{i=1}^{n} i \frac{n!}{(n-i)!\,i!} x^i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{n\,(n-1)!}{((n-1)-(i-1))!\,(i-1)!} x\, x^{i-1}$$

$$= n\,x \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(i-1))!\,(i-1)!} x^{i-1}$$

$$= n\,x\,(1+x)^{n-1}.$$

c) Fazendo $x=1$ em (b) obtemos

$$\sum_{i=0}^{n} i\, C_{n,i} = n\, 2^{n-1}.$$

Observação 2.4. *O desenvolvimento do binômio de Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i} b^i$$

é válido ainda que n *não seja um inteiro positivo. Mas este estudo não faz parte deste trabalho.*

Lista de Exercício 4

1) Determine o termo independente de x no desenvolvimento de

   a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$;

   b) $\left(2x-\frac{1}{3x}\right)^8$.

2) Calcule a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de

   a) $(x+y)^{10}$;

   b) $(x-1)^8$.

3) Calcule o termo central no desenvolvimento de $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{12}$.

Capítulo 3

Análise Combinatória:
Permutações e Combinações

Capítulo 3
Análise Combinatória: Permutações e Combinações

A análise combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto. Por exemplo: imagine que você é administrador do órgão de trânsito e precisa emplacar os veículos, que código você criaria? Quantas placas diferentes posso fazer com, por exemplo, 2 letras e 4 algarismos, como era antigamente? Por que quando foi alterado o código de emplacamanento, a decisão foi por aumentar uma letra e não um algarismo? A análise combinatória se ocupa de problemas do dia-a-dia como este.

Na análise combinatória consideramos conjuntos cujos elementos são agrupados sob certas condições. Tais condições serão estabelecidas e estudadas no decorrer do curso.

Por exemplo,

- A é o conjunto de números de dois algarismos distintos formados a partir dos dígitos 1 e 2, ou seja,

$$A = \{11, 12, 21, 22\}, \ \# A = 4,$$

onde o símbolo # representa o número de elementos.

Neste caso, temos 4 elementos no conjunto A e escrevemos que $\# A = 4$ (cardinal de A é quatro).

- B é o conjunto das seqüências de letras que se obtêm mudando-se a ordem das letras da palavra sol, ou seja,

$$B = \{sol, slo, osl, ols, lso, los\}, \quad \# B = 6.$$

Neste caso, o conjunto B tem 6 elementos.

- C é o conjunto de números de três algarismos, todos distintos, formados a partir dos dígitos 0, 1, 2, 3 e 4. Então temos

$$C = \{012, 021, 013, 031, 014, 041, \ldots\}.$$

Observe que nesse caso há um número grande de possibilidades. Desse modo, é trabalhoso obter todos os elementos agrupados deste conjunto. A seguir apresentaremos algumas técnicas de agrupamento de determinados elementos. Estas técnicas são conhecidas como *Princípio Fundamental de Contagem* ou *regras gerais de Análise Combinatória*.

3.1 Princípio Fundamental de Contagem

Antes de apresentarmos este princípio, daremos dois resultados, conhecidos como **regra da soma e regra do produto**.

- Regra da Soma

A regra da soma nos diz que se um elemento pode ser escolhido de m formas e um outro elemento pode ser escolhido de n formas, então a escolha de um ou outro elemento se realizará de $m+n$ formas, desde que tais escolhas sejam independentes, isto é, nenhuma das escolhas de um elemento pode coincidir com uma escolha do outro. Matematicamente, se A e B são dois conjuntos disjuntos com m e n elementos respectivamente, então $A \cup B$ possui $m+n$ elementos.

- Regra do Produto

A regra do produto diz que se um elemento a pode ser escolhido de m formas diferentes, e se depois de cada umas dessas escolhas um outro elemento b pode ser escolhido de n formas diferentes, a escolha do par (a,b), nesta ordem, poderá ser realizada de mn formas. Mais precisamente, se considerarmos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, poderemos formar mn pares ordenados (a,b) onde $a_i \in A$ e $b_j \in B$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. A verificação deste resultado é bem simples, veja o diagrama a seguir:

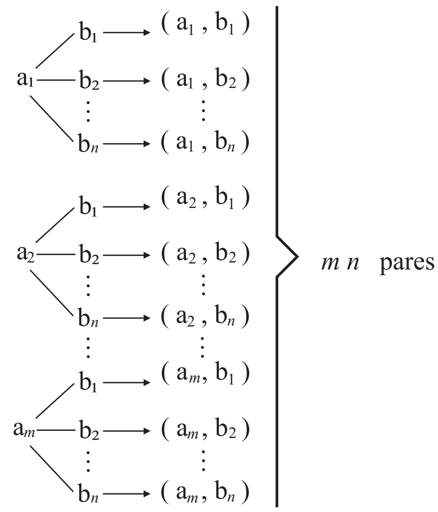


Figura 3.1

Exemplo 3.1. Temos três cidades X, Y e Z. Existem duas rodovias que ligam X com Y, e quatro que ligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas podemos chegar até Z?

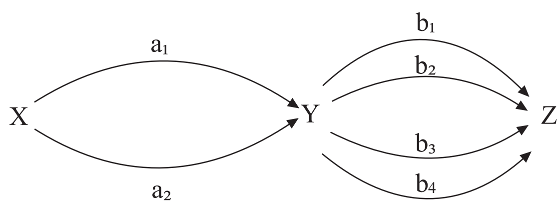


Figura 3.2

Solução. Seja A o conjunto das rodovias que ligam X com Y, então $A = \{a_1, a_2\}$. Seja B o conjunto das rodovias que ligam Y com Z, então $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Conforme a regra acima, temos $2.4 = 8$ formas de chegar de X até Z.

Exemplo 3.2. Uma moça possui 5 blusas e 6 saias distintas. De quantas formas ela pode vestir uma blusa e uma saia?

Solução. $5 \cdot 6 = 30$.

Exemplo 3.3. Numa festa existem 40 homens e 50 mulheres. Quantos casais diferentes podem ser formados?

Solução. $40 \cdot 50 = 2000$.

Exemplo 3.4. Para fazer uma viagem de ida e volta de Florianópolis a Joinville, podemos ir ou voltar de carro, ônibus ou avião. De quantos modos podemos escolher os transportes?

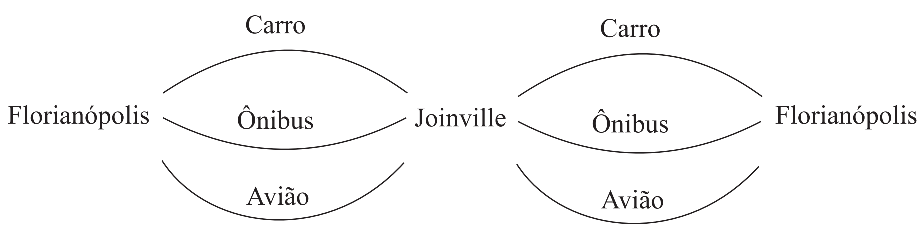


Figura 3.3

Temos três possibilidades de ida e três de volta. Conforme a regra acima, podemos fazer essa viagem de $3.3 = 9$ formas.

Observação 3.1. *No exemplo 3.4, se não desejamos usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida, o número de possibilidades de volta se reduz de 3 para 2, então temos* $3 \cdot 2 = 6$ *formas de realização dessa viagem. Veja a seguir a regra mais geral desses tipos de situações.*

Lema 3.1. O número de pares ordenados (a_i, a_j) tais que $a_i, a_j \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *e* $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$, $i = j = 1, 2, \ldots, m$ *é* $m(m-1)$.

A demonstração do lema acima é óbvia. Isso pode ser analisado através da figura abaixo:

$$(a_1, a_2), (a_1, a_3), \ldots, (a_1, a_m) \rightarrow (m-1) \quad \text{pares}$$

$$(a_2, a_1), (a_2, a_3), \ldots, (a_2, a_m) \rightarrow (m-1) \quad \text{pares}$$

$$\vdots$$

$$(a_m, a_1), (a_m, a_2), \ldots, (a_m, a_{m-1}) \rightarrow (m-1) \quad \text{pares}$$

O número de pares é

$$\underbrace{(m-1) + (m-1) + \ldots + (m-1)}_{m \text{ vezes}} = m(m-1).$$

Exemplo 3.5. Quantos números com dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1 a 9?

Solução. Seja $A = \{1, 2, ..., 9\}$. Considere dois números a e b tais que $a, b \in A$, $a \neq b$, então cada número pode ser considerado um par de dígitos (a, b), $a \neq b$, onde temos $9.8 = 72$ formas diferentes de dois algarismos distintos.

Exemplo 3.6. Um edifício tem 5 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

Solução. $5 \cdot 4 = 20$.

A seguir daremos um resultado mais geral.

Proposição 3.1. *Consideremos* r *conjuntos de* n_i *elementos cada:*

$$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in_i}\},\ i = 1, 2, ..., r.$$

Então, o número de $r-$uplas *ordenadas (seqüência de* r *elementos)* do *tipo* $(x_1, x_2, ..., x_r)$ *é* $n_1 \cdot n \cdot ... \cdot n_r$, $r \geq 2$, *onde* $x_i \in A_i$, $i = 1, 2, ..., r$.

***r*-uplas**
Esta notação é comum em matemática para generalizar a forma do português que fala de dupla, tripla, quádrupla, quíntupla, para seqüências ordenadas com 2, 3, 4 e 5 elementos. Para uma seqüência ordenada com qualquer número **r** de elementos, dizemos uma r-upla.

A demonstração da proposição 3.1 pode ser feita aplicando o princípio de indução.

Esta demonstração fica como exercício para você: siga os passos do princípio de indução e converse com seu tutor sobre a demonstração que você fez.

A seguir veremos outros exemplos:

Exemplo 3.7. Uma moeda é lançada 5 vezes. Qual é o número de seqüências possíveis de caras e/ou coroas?

Solução. Sabemos que cada lançamento tem duas possibilidades: cara ou coroa. Como temos 5 lançamentos, então o resultado procurado é $2.2.2.2.2 = 2^5 = 32$ seqüências possíveis de cara e/ou coroa.

Exemplo 3.8. De quantas formas podemos responder um questionário com 10 perguntas cuja resposta para cada pergunta pode ser sim, não ou não sei?

Solução. Vamos representar as perguntas do questionário por um conjunto

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_{10}\},$$

onde cada $a_i\ (i = 1, 2, ..., 10)$ tem três possibilidades de respostas, ou seja

$$a_i \in \{\text{sim, não, não sei}\}.$$

Logo, pela proposição 3.1, temos $\underbrace{3.3.\ \dots\ .3}_{10\ \text{vezes}} = 3^{10}$ possibilidades.

Exemplo 3.9. Cinco dados são lançados simultaneamente. Quantas seqüências de resultados são possíveis, se considerarmos cada elemento de uma seqüência como o número obtido em cada dado?

Solução. Sabemos que quando lançamos um dado temos seis possibilidades: aparecer um dos seis números, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Como cinco dados são lançados simultaneamente, então temos no total

$$6.6.6.6.6 = 6^5,$$

seqüências de resultados possíveis.

Proposição 3.2. *Consideremos um conjunto A com m $(m \geq 2)$ elementos. Então o número de $r-uplas$ ordenadas (seqüências com r elementos) formadas com elementos distintos, dois a dois, de A é*

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-(r-1)),$$

ou seja, se $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ é o conjunto com m $(m \geq 2)$ elementos então o número de seqüências do tipo $\underbrace{(a_j, \dots, a_i, \dots, a_k)}_{r\ \text{elementos}}$ com

$$\begin{cases} a_i \in A, & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ a_i \neq a_p, & i \neq p \end{cases}$$

é $m(m-1)\dots(m-r+1)$.

A demonstração pode ser feita aplicando o princípio de indução.

Faça esta demonstração como um exercício para você.

Exemplo 3.10. Seis atletas participam de uma corrida. Quantos resultados possíveis existem para 1°, 2° e 3° lugares?

Solução. Na corrida, cada atleta pode chegar em 1°, 2° ou 3° lugar, então cada resultado consta de uma tripla ordenada (a, b, c) onde $a = 1^\circ$ lugar, $b = 2^\circ$ lugar e $c = 3^\circ$ lugar. a, b, c pertence ao conjunto de atletas mas $a \neq b$, $b \neq c$ e $a \neq c$. Logo, o número de resultados possíveis é

$$\underbrace{6}_{1^\circ\ \text{lugar}} \cdot \underbrace{5}_{2^\circ\ \text{lugar}} \cdot \underbrace{4}_{3^\circ\ \text{lugar}} = 120.$$

Exemplo 3.11. De quantos modos 5 pessoas podem ficar numa fila indiana?

Solução. Cada modo corresponde uma $5-$upla ordenada de pessoas $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Logo, o resultado procurado é

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Lista de Exercícios 1

1) Um homem vai a um restaurante disposto a comer um só prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece 8 pratos distintos de carne e 5 pratos diferentes de sobremesa. De quantas formas pode o homem fazer sua refeição?

2) Numa festa existem 80 homens e 90 mulheres. Quantos casais diferentes podem ser formados?

3) Um edifício tem 8 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

4) Um homem possui 10 ternos, 12 camisas e 5 sapatos. De quantas formas poderá ele vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos?

5) De quantas formas podemos responder a 12 perguntas de um questionário, cujas respostas para cada pergunta são sim ou não?

6) Uma prova consta de 20 testes tipo verdadeiro ou falso. De quantas formas uma pessoa poderá responder aos 20 testes?

7) Quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) podemos formar com os dígitos 1,2,3,7,8?

8) Quantos números telefônicos com 7 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?

3.2 Arranjos

Se temos um conjunto $A=\{x_1,\ldots,x_m\}$ de m elementos, chamamos de arranjos dos m elementos tomados r a r $(a \le r \le m)$ a quaisquer $r-$uplas, (seqüência de r elementos) formados com elementos de A, todos distintos.

Os arranjos podem ser simples ou com repetições.

3.2.1 Arranjos Simples

Você já se perguntou de quantas formas é possível preencher um cartão de Mega Sena? Neste caso você deve escolher 6 números dentre as 60 dezenas e não pode escolher duas vezes o mesmo número. Este é um problema que possui as características do arranjo simples.

O arranjo simples é aquele onde não ocorre a repetição de qualquer elemento em cada grupo de r elementos. Seja $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ e A_S o conjunto dos arranjos simples dos m elementos tomados r a r. Então, cada arranjo é uma seqüência de r elementos, em que cada elemento pertence a X, e são todos distintos. Pelo principio fundamental da contagem, o número de arranjos em A_S será

$$\begin{aligned} A_S &= m(m-1)\ldots(m-(r-1)) \\ &= \frac{m!}{(m-r)!}, \quad 1 \le r \le m. \end{aligned}$$

Em particular, se $r=1$, então $A_S=m$. (Às vezes, arranjo simples é conhecido como arranjo sem repetição).

Exemplo 3.12. Em um conjunto de 5 elementos são formados agrupamentos de elementos distintos tomados 2 a 2. Quantas seqüências de elementos é possível obter?

> **Solução.** Seja $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $m=5$ e $r=2$. O número de arranjos simples desses 5 elementos tomados 2 a 2 é
>
> $$\# A_S = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5.4 = 20.$$

Nesse caso o conjunto de arranjos simples tomados 2 a 2 é dado por

$$A_S = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_1, x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_1, x_3x_2, x_3x_4, x_3x_5,$$
$$x_4x_1, x_4x_2, x_4x_3, x_4x_5, x_5x_1, x_5x_2, x_5x_3, x_5x_4\},\ \#A_S = 20.$$

Aqui

$$x_ix_j \neq x_jx_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1,2,3,4 \text{ e } 5.$$

Exemplo 3.13. De um baralho de 52 cartas, 2 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas seqüências de cartas é possível obter?

Solução. Em cada resultado temos um par ordenado de cartas (x, y) em que x é a primeira e y é a segunda carta extraída. Observe que x e y são distintas e a extração é feita sem reposição. Logo, o número de arranjos simples é

$$A_S = 52 \cdot 51 = 2652.$$

Exemplo 3.14. Consideremos os dígitos 1, 2, 3 e 4. Quantos números de 2 algarismos distintos podem ser formados?

Solução. Os números de 2 algarismos têm o algarismo das unidades e o algarismo das dezenas. Logo, existem 2 posições para serem preenchidas. Se considerarmos um dos quatros dígitos na 1° posição, então temos 3 dígitos a serem colocados na 2° posição (os algarismos são distintos). Portanto, temos $4 \cdot 3 = 12$ números de 2 algarismos diferentes que podem ser formados com 4 dígitos.

Exemplo 3.15. Dado o conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, quantos subconjuntos de 2 elementos X possui?

Solução. Para formar uma seqüência de grupos de elementos de 2 a 2, temos $4.3 = 12$ possibilidades. Mas queremos formar subconjuntos onde $\{x_i, x_j\} = \{x_j, x_i\}$. $(i, j = 1,2,3,4)$. Logo temos $\frac{12}{2} = 6$ possibilidades de formar subconjuntos de X com 2 elementos:

$$\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}.$$

3.2.2 Arranjo com Repetição

Neste caso todos os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo de r elementos. Vamos considerar $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ e vamos representar por A_R o número de arranjos, com repetição de elementos, tomados r a r. Então cada arranjo com repetição é uma seqüência de r elementos, em que cada elemento pertence a X. Pelo principio fundamental da contagem, o número de arranjos A_R será

$$A_R = \underbrace{m.m.m. \dots .m}_{r \text{ vezes}} = m^r, \quad r \in \mathbb{N}^*.$$

Em particular, quando $r = 1$, $A_R = m$.

Exemplo 3.16. Em um conjunto de 4 elementos são formados agrupamentos dos elementos dois a dois, onde aparecem elementos repetidos em cada grupo. Quantas seqüências de elementos são possíveis obter?

> **Solução.** Temos $m = 4$ e $r = 2$. Logo, a resposta será $4^2 = 4.4 = 16$. Veja o conjunto abaixo para conferir $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
>
> $$A_{X(R)} = \{x_1x_1, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_1, x_2x_2, x_2x_3,$$
>
> $$x_2x_4, x_3x_1, x_3x_2, x_3x_3, x_3x_4, x_4x_1, x_4x_2, x_4x_3, x_4x_4\},$$
>
> $$\# A_{X(R)} = 16.$$

Exemplo 3.17. Numa sorveteria há 15 sabores diferentes de sorvete. Considerando que não se podem misturar sabores, de quantas maneiras 5 pessoas podem fazer seus pedidos?

> **Solução. Cada pessoa tem 15 escolhas para o seu pedido. Como são 5 pessoas, então são $15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 = 15^5$ maneiras de fazer o pedido.**

Lista de Exercícios 2

1) Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

2) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha com cinco alternativas por questão?

3) De quantos modos diferentes podem ser escolhidos um presidente e um secretário de um conselho que tem 12 membros?

4) De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?

5) Quantos números de quatro dígitos são maiores que 2400 e:

   a) Têm todos os dígitos diferentes.

   b) Não têm dígitos iguais a 3,5 ou 6.

   c) Têm as propriedades a) e b) simultaneamente.

6) Quantos são os números naturais de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

7) Em uma banca há 5 exemplares iguais da revista A, 6 exemplares iguais da revista B e 10 exemplares iguais da revista C. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca é possível formar?

8) Quantos números diferentes podem ser formados multiplicando alguns (ou todos) dos números 1, 5, 6, 7, 7, 9, 9, 9?

9) Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos os passageiros podem se sentar, respeitando-se as preferências?

10) Fichas podem ser azuis, vermelhas ou amarelas; circulares, retangulares ou triangulares, finas ou grossas. Quantos tipos de fichas existem?

3.3 Permutações

Nesta seção apresentaremos diversas formas de permutações, tais como: permutação, permutação com alguns elementos distintos e permutações simples circulares.

3.3.1 Permutação Simples

Seja $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ um conjunto com m elementos. Chamamos de permutação dos m elementos todo arranjo em que $r = m$, ou seja, uma permutação de m objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se P_m representa o número das permutações simples dos m objetos, então

$$P_m = m(m-1)(m-2)\ldots .2.1 = m!.$$

Em particular, se $m = 1$, então $P_1 = 1$.

Exemplo 3.18. *Seja* $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, *então as permutações dos elementos de* X *são todos os arranjos constituídos de 3 elementos. Assim, temos* $3.2.1 = 6$ *permutações. Veja todas as possibilidades abaixo:*

$$(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_2), (x_2, x_1, x_3), (x_2, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_2), (x_3, x_2, x_1).$$

Exemplo 3.19. De quantas formas podem ficar 8 pessoas em fila indiana?

Solução. Observe que temos 8 possibilidades de uma pessoa ficar no 1° lugar, 7 possibilidades de uma pessoa ficar no 2° lugar e assim por diante. Logo, temos

$$P_8 = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 8!$$

número de possibilidades.

Exemplo 3.20. De quantas maneiras 10 moças e 10 rapazes podem formar pares para uma dança?

Solução. A primeira moça tem 10 possibilidades de escolher. A segunda moça tem 9 possibilidades e assim sucessivamente. Como temos 10 moças e 10 rapazes, a última moça terá uma possibilidade. Portanto, pelo princípio de multiplicação, temos $10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 10!$ maneiras de formar pares para a dança.

Exemplo 3.21. Quantos são os anagramas da palavra LIVROS?

Solução. Cada anagrama da palavra LIVROS é uma ordenação das letras L, I, V, R, O, S. Assim, o número de anagramas da palavra LIVROS é $P_6 = 6!$.

Anagrama
Na língua portuguesa, anagrama é a transposição de letras de palavra ou frase para formar outra palavra ou frase diferente (*Natércia*, de *Caterina*; *amor*, de *Roma*; *Célia*, de *Alice*, etc.). Matematicamente, consideramos todas as ordens diferentes em que se podem colocar as letras de uma palavra, ainda que não sejam formadas novas palavras.

Exemplo 3.22. Quantos são os anagramas da palavra LIVROS que começam e terminam por consoante?

> **Solução.** A consoante inicial pode ser escolhida de 4 maneiras (L, V, R, S), e a final, de 3 maneiras. As quatro letras restantes podem ser escolhidas de qualquer maneira, ou seja, $P_4 = 4!$ modos.
>
> Logo, a resposta é
>
> $$4 \cdot 3 \cdot 4! = 12 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 288.$$

3.3.2 Permutações com Elementos Repetidos

A seguir daremos uma fórmula para calcular permutações de elementos, nem todos distintos. Inicialmente, vamos considerar um exemplo com a palavra ARI que tem todos os elementos distintos. Então, pela fórmula de permutação simples, podemos formar $P_3 = 3! = 6$ anagramas da palavra ARI:

ARI, RAI, RIA, AIR, IAR, IRA.

Agora vamos supor que duas dessas três letras são iguais, ou seja, vamos considerar a palavra OVO, então temos a seguinte configuração dos anagramas:

OVO, VOO, VOO, OOV, OOV, OVO

Observe, neste caso, que alguns dos elementos são iguais, ou seja, temos apenas 3 anagramas diferentes:

OVO, VOO, OOV.

A seguir deduziremos uma fórmula para o cálculo de permutações em que alguns elementos são repetidos.

Vamos calcular o número de permutações que podemos formar quando alguns elementos a serem permutados são iguais. Inicialmente, consideramos n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1 e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1.

Vamos representar $P_n^{n_1}$ o número de permutações nessas condições e calculemos esses números.

Cada permutação de n elementos é uma n-upla ordenada em que aparecem n_1 elementos iguais a a_1, e o restante, $n-n_1$ elementos distintos

$$\underbrace{(-,-,-,\ldots,-)}_{n \text{ elementos}}.$$

Das n posições que existem na permutação, vamos escolher $n-n_1$ posições para colocar os elementos distintos de a_1. Então existem $C_{n,n-n_1}$ modos de escolher essas posições.

Para cada escolha de $(n-n_1)$ posições, existem $(n-n_1)!$ modos em que os $(n-n_1)$ elementos podem ser permutados. Logo, existem

$$C_{n,n-n_1}(n-n_1)! = \frac{n!}{n_1!},$$

formas de dispormos os elementos distintos de a_1 na permutação.

Uma vez colocados esses elementos distintos, a posição dos elementos repetidos a_1 fica determinada (de uma só forma) pelos lugares restantes. Logo, existem $\frac{n!}{n_1!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1. Isto é,

$$P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}.$$

Em geral, se consideramos n elementos, dos quais

$$\begin{gathered} n_1 \text{ são iguais a } a_1 \\ n_2 \text{ são iguais a } a_2 \\ \vdots \\ n_r \text{ são iguais a } a_r, \end{gathered}$$

então podemos calcular o número de permutações, nessas condições, através da fórmula

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}.$$

Em particular, quando $n_1 = n_2 = ... = n_r = 1$, então temos a fórmula de permutação simples

$$P_n^{1,1,...,1} = P_n = n!,$$

que é o número de permutações de n elementos distintos.

Exemplo 3.23. Quantos anagramas existem na palavra SIMPLES?

Solução. Temos

$$S \rightarrow 2 \text{ vezes}$$

$$I \rightarrow 1 \text{ vez}$$

$$M \rightarrow 1 \text{ vez}$$

$$P \rightarrow 1 \text{ vez}$$

$$L \rightarrow 1 \text{ vez}$$

$$E \rightarrow 1 \text{ vez}$$

Assim, $n = 7$, $n_1 = 2$, logo

$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = 7.6.5.4.3 = 7.30.12 = 84.30 = 2520$ anagramas.

Exemplo 3.24. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Solução. Aqui as letras A e Á são consideradas iguais. Temos 3 letras A, 2 letras M, 2 letras T, 1 letra C, 1 letra I e 1 letra E. Logo,

$$P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200$$

anagramas da palavra MATEMÁTICA.

3.3.3 Permutações Circulares

A pergunta é de quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares eqüidistantes em torno de um círculo, considerando equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação. Vamos denotar estas permutações por PC_n.

Antes de calcular o valor de PC_n, vamos considerar um exemplo simples: quando $n = 3$. Seja $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Utilizando a fórmula de permutação simples, temos $P_3 = 3! = 6$ modos de colocar 3 objetos distintos em 3 lugares. Veja as figuras abaixo:

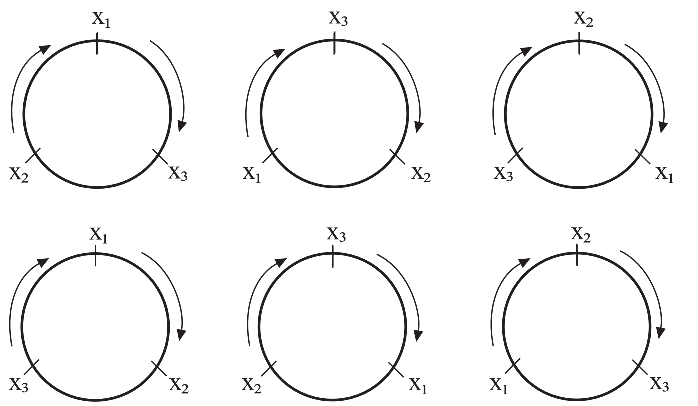


Figura 3.4

Temos as seguintes posições:

$$x_1, x_2, x_3, \quad x_3, x_1, x_2, \quad x_2, x_3, x_1,$$

$$x_1, x_3, x_2, \quad x_3, x_2, x_1, \quad x_2, x_1, x_3.$$

Para facilitar, colocamos os objetos no sentido anti-horário.

Em caso de colocação de objetos numa forma circular, as colocações

$$x_1, x_2, x_3, \qquad x_3, x_1, x_2, \qquad x_2, x_3, x_1$$

são iguais, pois estão na mesma ordem.

Analogamente, as colocações

$$x_1, x_3, x_2, \qquad x_3, x_2, x_1, \qquad x_2, x_1, x_3$$

também são iguais, pois estão na mesma ordem. Logo, temos apenas duas formas de colocar três objetos $\{x_1, x_2, x_3\}$ em círculo, que são

$$x_1, x_2, x_3 \quad \text{e} \quad x_1, x_3, x_2.$$

Portanto, neste caso, $PC_3 = 2$.

Podemos escrever também

$$PC_3 = \frac{3!}{3} = (3-1)! = 2! = 2\,.$$

Em geral, temos a seguinte fórmula:

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!\,.$$

Vamos analisar a fórmula dada acima para $n = 4$. Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Queremos colocar estes quatro objetos distintos em círculo. De quantos modos podemos fazer isso, entendendo que as disposições que podem coincidir por rotação são consideradas iguais? Pela fórmula de permutação simples, a resposta é $P_4 = 4! = 24$, e pela fórmula de permutação circular, é $PC_4 = (4-1)! = 3! = 6$.

Vamos conferir esta situação através das figuras:

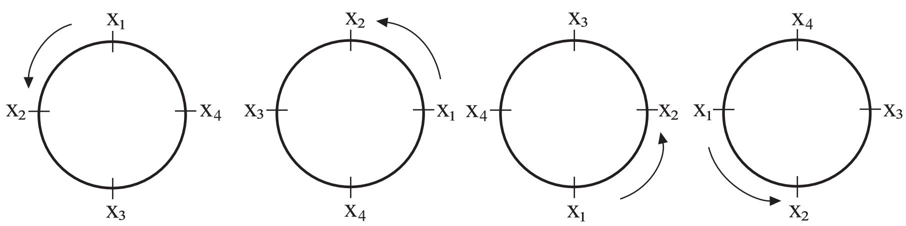


Figura 3.5

Observemos que as quatro disposições colocadas em circulo são iguais, ou seja,

- $x_1x_2x_3x_4 = x_2x_3x_4x_1 = x_3x_4x_2x_1 = x_4x_1x_2x_3 \quad \#1$.

Analogamente, podemos conferir igualdade entre as seguintes situações, respectivamente,

- $x_1x_4x_2x_3 = x_3x_1x_4x_2 = x_2x_3x_1x_4 = x_4x_2x_3x_1 \quad \#1$
- $x_1x_2x_4x_3 = x_2x_4x_3x_1 = x_4x_3x_1x_2 = x_3x_1x_2x_4 \quad \#1$
- $x_1x_3x_4x_2 = x_3x_4x_2x_1 = x_4x_2x_1x_3 = x_2x_1x_3x_4 \quad \#1$
- $x_1x_3x_2x_4 = x_3x_2x_4x_1 = x_2x_4x_1x_3 = x_4x_1x_3x_2 \quad \#1$
- $x_1x_4x_3x_2 = x_4x_3x_2x_1 = x_3x_2x_1x_4 = x_2x_1x_4x_3 \quad \#1$.

Logo, a resposta é

$$PC_4 = \frac{4!}{4} = (4-1)! = 3! = 6$$

permutações de 4 objetos dispostos em torno de um círculo.

Exemplo 3.25. De quantas maneiras podemos colocar 6 crianças numa roda?

Solução. $PC_6 = (6-1)! = 5! = 120$.

Exemplo 3.26. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 8 crianças, de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

Solução. No total temos 8 crianças. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$. Excluindo as duas determinadas crianças, restam agora 6 crianças. Podemos formar $PC_6 = (6-1)! = 5! = 120$ rodas com essas seis crianças $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

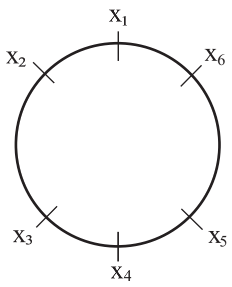


Figura 3.6

Temos agora 6 maneiras diferentes de colocar uma dessas duas crianças, e temos 5 maneiras diferentes de colocar a segunda criança, x_8,

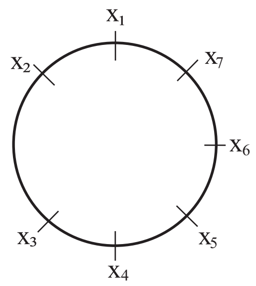


Figura 3.7

que não pode ficar entre x_6 e x_7, nem entre x_7 e x_1, pois as crianças x_7 e x_8 não podem ficar juntas.

Logo, temos

$$5! \cdot 6 \cdot 5 = 120 \cdot 30 = 3600$$

maneiras diferentes de colocar 8 crianças numa roda, onde duas determinadas crianças não podem ficar juntas.

Exemplo 3.27. Temos 5 meninas e 5 meninos. De quantas maneiras eles podem formar uma roda, de modo que meninos e meninas se alternem?

Solução. Podemos formar $PC_5 = 4!$ rodas somente com as meninas. Agora se colocarmos os meninos entre essas 5 meninas, teremos que escolher as posições um por um, ou seja, o 1° menino tem 5 maneiras diferentes de ficar entre essas 5 meninas. Como dois meninos não podem ficar juntos, então o segundo menino tem 4 maneiras diferentes de ficar entre essas 5 meninas, e assim por diante. Logo, temos

$$4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!5! = 24 \cdot 120 = 2880$$

formas diferentes de colocar 5 meninas e 5 meninos de modo que meninas e meninos fiquem de forma alternada.

Em geral, se temos m meninas e m meninos, então temos

$$(m-1)!m!$$

formas diferentes de colocar m meninas e m meninos numa roda, onde meninos e meninas se alternem.

Lista de Exercícios 3

1) Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO:

   a) Que começam por consoante e terminam por vogal?

   b) Que têm as letras C, A, P juntas nessa ordem?

   c) Que têm as letras C, A, P juntas em qualquer ordem?

   d) Que têm as vogais e as consoantes intercaladas?

   e) Que têm a letra C no 1° lugar e a letra A no 2° lugar?

f) Que têm a letra C no 1° lugar ou a letra A no 2° lugar?

g) Que têm a letra C no 1° lugar ou a letra A no 2° lugar ou a letra P no 3° lugar?

2) Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.

a) Que lugar ocupa o número 62417?

b) Qual é o número que ocupa o 66° lugar?

c) Qual é o 200° algarismo escrito?

d) Qual é a soma dos números assim formados?

3) De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

4) De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

5) Quantas são as permutações dos números $(1,2,...,10)$ nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

6) De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

a) Em dois grupos de 6?

b) Em três grupos de 4?

c) Em um grupo de 5 e um grupo de 7?

d) Em seis grupos de 2?

e) Em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

7) Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e o do Iraque e o dos Estados Unidos não podem sentar juntos?

8) Um cubo de madeira tem uma face de cada cor. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre essas faces?

9) Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6000000, podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8?

10) De quantos modos 5 meninos e 5 meninas podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

3.4 Combinações

Nesta seção apresentaremos a noção de combinações em duas formas diferentes. Uma, combinação simples, e outra, combinação completa.

3.4.1 Combinações Simples

Imagine que você é um artista e tem à sua disposição matrizes com as três cores primárias. Quantas cores diferentes você pode obter misturando duas matrizes? E 3? As combinações simples referem-se a este tipo de problemas, nos quais interessa a escolha. Veja, tanto faz misturar o azul primeiro ou o vermelho primeiro, o resultado final será a mesma cor.

Assim, as combinações simples respondem à seguinte questão: de quantos modos podemos escolher r objetos distintos entre m objetos distintos dados?

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ um conjunto com m elementos. Chamamos de ***combinação simples*** dos m objetos ou elementos, tomados r a r, os subconjuntos de X constituídos de r elementos.

Por exemplo, se temos $X = \{a, b, c, d\}$ um conjunto com 4 elementos, então podemos formar 6 subconjuntos de dois elementos, ou seja, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{c,d\}$, $\{a,c\}$, $\{b,d\}$ e $\{a,d\}$ quando já entendemos que $\{a,b\} = \{b,a\}$. Pela definição, observem que combinação é um subconjunto de um conjunto, portanto não depende de ordem dos elementos.

Por outro lado, é importante notar a diferença entre uma combinação (conjunto) e uma seqüência, pois numa combinação não importa a ordem dos elementos, e numa seqüência importa a ordem dos elementos.

- Cálculo do número de combinações

O número de combinações simples de ordem r de m objetos é dado por $C_{m,r}$, ou seja,

$$C_{m,r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}, \quad 0 \leq r \leq m$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{r!}, \quad 0 \leq r \leq m.$$

Você se lembra de ter visto esta fórmula anteriormente? Não é por acaso que a notação de números binomiais e de combinações é a mesma. Volte ao início do capítulo 2 e compare.

Podemos também escrever

$$C_{m,r} = \frac{A_{m,r}}{r!}$$

ou

$$A_{m,r} = r!\,C_{m,r},$$

onde $A_{m,r}$ é o número de arranjos de m elementos tomados r a r.

Em particular, temos $C_{m,m} = 1$, $C_{m,0} = 1$ e $C_{0,0} = 1$.

Exemplo 3.28. Queremos formar uma comissão de 4 membros e dispomos de 15 membros. Quantas comissões podem ser formadas?

Solução. Observe que cada comissão é um subconjunto de 4 elementos. Assim, as comissões devem ser combinações dos 15 membros tomados 4 a 4. Logo, o número de comissões é:

$$C_{15,4} = \frac{15!}{4!\,11!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{\cancel{11!}\ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 15 \cdot 13 \cdot 7 = 1365.$$

Exemplo 3.29. Quantas saladas contendo exatamente 3 frutas podemos formar se dispomos de 12 frutas diferentes?

Solução. Para o cálculo do número de saladas deve ser usado o conceito de combinações. Para formar uma salada basta escolher 3 das 12 frutas, o que pode ser feito de

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3!\,9!} = \frac{12.11.10}{3.2.1} = 220 \text{ modos diferentes.}$$

Exemplo 3.30. Vamos considerar duas retas paralelas. Marcamos 4 pontos sobre uma reta R_1 e 9 pontos sobre outra reta, R_2. Quantos triângulos existem com vértices em 3 desses 13 pontos?

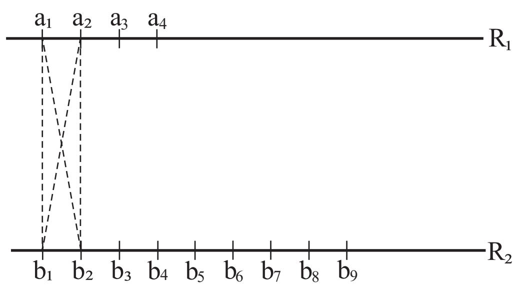


Figura 3.8

Solução. Para formar um triângulo necessitamos três pontos. Vamos considerar inicialmente um ponto em a_1 na reta R_1 e dois pontos, b_1 e b_2, na reta R_2. O número de triângulos desse tipo é $4C_{9,2}$. Analogamente consideremos um ponto em b_1 na reta R_2 e consideremos dois pontos, a_1 e a_2, na reta R_1. Assim formamos um triângulo. O número de triângulo desse tipo é $9C_{4,2}$. Logo, o número total de triângulos é:

$$4C_{9,2} + 9C_{4,2} = 4\frac{9!}{7!2!} + 9\frac{4!}{2!2!}$$

$$= 144 + 54 = 198\,.$$

Você teria certeza de que estas são as únicas formas de se construir tais triângulos? Pense nisso...

Exemplo 3.31. Em um grupo de 8 homens e 5 mulheres, de quantos modos podemos escolher 7 pessoas, incluindo pelo menos dois homens?

Solução. São as seguintes alternativas:

7 homens	0 mulher
6 homens	1 mulher
5 homens	2 mulheres
4 homens	3 mulheres
3 homens	4 mulheres
2 homens	5 mulheres

A resposta é

$$C_{8,7}.C_{5,0}+C_{8,6}.C_{5,1}+C_{8,5}.C_{5,2}+C_{8,4}.C_{5,3}$$

$$+C_{8,3}.C_{5,4}+C_{8,2}.C_{5,5}$$

$$=\frac{8!}{7!}\frac{5!}{5!}+\frac{8!}{6!2!}\frac{5!}{4!}+\frac{8!}{5!\,3!}\frac{5!}{2!\,3!}$$

$$+\frac{8!}{4!\,4!}\frac{5!}{3!\,2!}+\frac{8!}{5!\,3!}\frac{5!}{4!}+\frac{8!}{6!\,2!}\frac{5!}{5!}$$

$$=8+\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}5+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}$$

$$+\frac{8+7+6}{1\cdot 2\cdot 3}5+\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}$$

$$=8+140+560+2800+280+28$$

$$=3816.$$

Exemplo 3.32. De quantos modos podemos dividir 10 pessoas em dois grupos de 5 pessoas cada?

Solução. O primeiro grupo pode ser escolhido de $C_{10,5}$ modos. Escolhido o primeiro grupo, sobram 5 pessoas, e só há 1 modo de formar o segundo grupo. Em cada grupo sabemos que há elementos idênticos, ou seja, $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $\{a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}\}$ é idêntico a $\{a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}\}$, $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, o que foi contado duas vezes. Logo a resposta é

$$\frac{C_{10,5}}{2}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2}=136.$$

3.4.2 Combinações Completas

Agora também serão escolhidos elementos dentre os elementos de um conjunto maior, entretanto o mesmo elemento pode ser escolhido mais de uma vez. Imagine um sorteio de bingo, no qual a bolinha sorteada fosse devolvida ao globo e um mesmo número pudesse aparecer mais de uma vez na cartela. Esta é uma situação que pode ser matematicamente representada por uma combinação completa. Note que o número de cartelas possíveis aumenta consideravelmente.

Dados m elementos distintos, chamamos combinações completas, de ordem ou classe r dos m elementos, os agrupamentos sem repetição ou com repetição, formados com r dos elementos dados, de maneira que um agrupamento difere do outro pela natureza de seus elementos.

Em geral, $C_{m,r}$ é o número de modos de escolher r objetos distintos entre m objetos distintos dados, e $CR_{m,r}$ é o número de modos de escolher r objetos, distintos ou não, entre m objetos distintos dados. Por exemplo, se temos um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ com 4 elementos e queremos escolher 3 elementos. Neste caso, sabemos que $C_{4,3} = \frac{4!}{3!} = 4$ maneiras de escolher 3 objetos distintos dos 4 elementos dados. A escolha é a seguinte:

$$x_1x_2x_3\,,\quad x_1x_2x_4\,,\quad x_2x_3x_4 \;\text{ e }\; x_1x_3x_4\,.$$

Mas no caso de combinações completas, a escolha não é necessariamente por elementos distintos, ou seja, podemos escolher

$$\begin{array}{lllll}
x_1x_1x_1 & x_1x_1x_2 & x_1x_1x_3 & x_1x_2x_4 & x_1x_4x_3 \\
x_2x_2x_2 & x_2x_2x_1 & x_2x_2x_3 & x_2x_2x_4 & x_1x_3x_4 \\
x_1x_2x_3 & x_3x_3x_3 & x_3x_3x_1 & x_3x_3x_2 & x_3x_3x_4 \\
x_4x_1x_4 & x_4x_4x_4 & x_4x_4x_1 & x_4x_4x_2 & x_2x_3x_4\,.
\end{array}$$

Neste caso temos $CR_{4,3} = 20$.

A fórmula para o cálculo de combinações completas é dada por:

$$CR_{m,r} = P_{m+r-1}^{m,r-1} = \frac{(m+r-1)!}{m!\,(r-1)!}\,.$$

Exemplo 3.33. De quantos modos podemos comprar 5 refrigerantes em um supermercado que vende 3 tipos de refrigerantes?

Solução. Neste problema deve ser aplicada a noção de combinação completa. Logo, conforme a fórmula acima, temos

$$CR_{5,3} = P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21\,.$$

Exemplo 3.34. Dispondo de 6 cores diferentes, de quantas maneiras distintas podemos pintar 7 objetos idênticos? (Cada objeto deve ser pintado com uma única cor.)

> **Solução.** Precisamos decidir quantas vezes cada cor será utilizada. É um problema de combinações completas. Isto será igual a
>
> $$CR_{6,7} = P_{12}^{6,6} = \frac{12!}{6!\,6!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 11\cdot 7\cdot 4\cdot 3 = 924\,.$$

3.4.3 Combinações Completas e Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Podemos estudar combinações completas através das equações lineares com coeficientes unitários. Antes, vamos ver alguns exemplos.

(i) Consideremos a equação linear $x_1 + x_2 = 7$. Então, as soluções inteiras não negativas são dadas pelos seguintes pares ordenados:

$$(0,7),\ (1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1)\ \text{e}\ (7,0).$$

Ao todo, temos 8 soluções inteiras não negativas.

(ii) Agora, vamos considerar a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 7$. Então, para resolver por tentativa, teremos um trabalho muito grande e podemos errar durante o processo da resolução do problema. Vamos analisar da seguinte maneira: no desenho abaixo, os pontos estão representando 7 unidades.

$$[\bullet\quad \bullet\quad \bullet\quad \bullet\quad \bullet\quad \bullet\quad \bullet]$$

Vamos dividir as 7 unidades em três partes ordenadas, de modo que em cada parte se tenha um número maior ou igual a zero.

Vamos separar os módulos por duas barras, indicando-os por 3 variáveis a escolher. Abaixo estão algumas possibilidades:

$$\Big[\underset{3}{\overset{x_1}{\bullet\quad \bullet\quad \bullet}}\ \Big|\ \underset{2}{\overset{x_2}{\bullet\quad \bullet}}\ \Big|\ \underset{2}{\overset{x_3}{\bullet\quad \bullet}}\Big]$$

$$\Big[\underbrace{\overset{x_1}{\bullet}}_{2}\Big|\underbrace{\bullet\;\;\bullet\;\;\overset{x_2}{}\;\;\bullet\;\;\bullet}_{4}\Big|\underbrace{\overset{x_3}{\bullet}}_{1}\Big]$$

$$\Big[\underbrace{\bullet\;\overset{x_1}{}\;\bullet}_{2}\Big|\underbrace{\overset{x_2}{}}_{0}\Big|\underbrace{\bullet\;\;\bullet\;\;\overset{x_3}{\bullet}\;\;\bullet\;\;\bullet}_{5}\Big]$$

$$\Big[\underbrace{\bullet\;\;\overset{x_1}{\bullet}\;\;\bullet}_{3}\Big|\underbrace{\bullet\;\;\bullet\;\overset{x_2}{}\;\bullet\;\;\bullet}_{4}\Big|\underbrace{\overset{x_3}{}}_{0}\Big]$$

$$\Big[\underbrace{\bullet\;\overset{x_1}{}\;\bullet}_{2}\Big|\underbrace{\bullet\;\overset{x_2}{}\;\bullet}_{2}\Big|\underbrace{\bullet\;\;\overset{x_3}{\bullet}\;\;\bullet}_{3}\Big]\quad .$$

Assim, temos 9 símbolos:

$$\bullet \rightarrow 7 \text{ e } \big| \rightarrow 2 .$$

O número de permutações desses símbolos é dado por

$$P_9^{7,2} = \frac{9!}{7!\,2!} = 36 ,$$

que é o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 .$$

Em geral, o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = m$$

é dado por

$$P_{m+r-1}^{m,r-1} = \frac{(m+r-1)!}{m!\,(r-1)!}$$

ou, equivalentemente,

$$CR_{m,r} = P_{m+r-1}^{m,r-1} = C_{m+r-1,r-1} .$$

Logo,

$$CR_{m,r} = P_{m+r-1}^{m,r-1} = C_{m+r-1,r-1} .$$

Assim podemos dizer que a resolução, quando se procuram soluções inteiras e não-negativas, da equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = m$$

equivale à combinação completa de m objetos distintos, de classe r dos m elementos, em agrupamentos com ou sem repetição.

Exemplo 3.35. Quantas são as soluções inteiras não negativas de $a+b+c+d=3$?

Solução. Aqui temos $m=3$, $r=4$. Logo,

$$P_{3+4-1}^{3,4-1} = P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20.$$

Exemplo 3.36. Quantas são as soluções inteiras não negativas de $a+b+c+d<5$?

Solução. Neste caso, temos cinco possibilidades de equações diferentes:

$$a+b+c+d=0 \quad \Rightarrow P_3^{0,3} = \frac{3!}{3!0!} = 1;$$

$$a+b+c+d=1 \quad \Rightarrow P_4^{1,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4;$$

$$a+b+c+d=2 \quad \Rightarrow P_5^{2,3} = \frac{5!}{1!3!} = 10;$$

$$a+b+c+d=3 \quad \Rightarrow P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 20;$$

$$a+b+c+d=4 \quad \Rightarrow P_7^{4,3} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35.$$

Logo, temos

$$P_7^{4,3} + P_6^{3,3} + P_5^{2,3} + P_4^{1,3} + P_3^{0,3} = 35+20+10+4+1 = 70.$$

Alternativamente, outra resolução possível é a introdução de uma variável extra para ter sinal de igualdade, ou seja, existe $e \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$a+b+c+d+e=5 \quad P_9^{5,4}$$

e, como estamos trabalhando com o sinal de < (estritamente menor), então as possibilidades quando $a+b+c+d=5$ ($P_8^{5,3}$) devem ser excluídas.

Logo, a resposta é

$$P_9^{5,4} - P_8^{5,3} = \frac{9!}{5!\,4!} - \frac{8!}{5!3!}$$

$$= \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$= 126 - 56 = 70\,.$$

Exemplo 3.37. Encontre o número de soluções inteiras não negativas não inferior a 2 da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$.

Solução. É dado que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17 \qquad \textbf{(1)}$$

Como todos estes números devem ser maiores que 2, diremos $x_i > 2 \quad \forall i = 1,2,3,4$, ou seja, $x_i - 2 > 0$. Vamos substituir

$x_i - 2 = y_i \quad i = 1,2,3$ e 4 na equação (1).

Então, temos

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 17 - 8 = 9. \qquad \textbf{(2)}$$

Para resolver a equação (1) com condição é equivalente a resolver a equação (2). Pela fórmula, temos

$$CR_{9,4} = C_{12,3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220.$$

Logo, há 220 soluções inteiras não negativas da equação (1) que respeitam a condição posta.

Exemplo 3.38. Encontre o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15 \text{ com } x_i \geq 3.$$

Solução. Vamos substituir

$$y_1 = x_1 - 3,\ y_2 = x_2 \text{ e } y_3 = x_3,$$

então temos

$$y_1 + y_2 + y_3 = 12.$$

O número de soluções inteiras não negativas da equação $y_1 + y_2 + y_3 = 12$ é dada por

$$C_{12,3} = P_{14}^{12,2} = \frac{14.13}{1.2} = 91$$

Exemplo 3.39. Encontre o número de soluções inteiras não negativas para a inequação

$$0 < x_1 + x_2 + x_3 < 5.$$

Solução. Neste caso, devemos encontrar as soluções das equações:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \Rightarrow P_3^{1,2} = 3;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad \Rightarrow P_4^{2,2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad \Rightarrow P_5^{3,2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad \Rightarrow C_{3,2} = P_6^{4,2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Logo, pelo princípio aditivo, o número procurado é

$$3 + 6 + 10 + 15 = 34.$$

Lista de Exercícios 4

1) Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres.

a) Quantas comissões podem ser formadas?

b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar de uma comissão, se nela estivesse uma determinada mulher?

2) Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

3) Em um torneiro no qual cada participante enfrenta todos os demais uma única vez, 780 partidas são realizadas. Quantos são os participantes?

4) Um homem tem 5 amigas e 7 amigos. Sua esposa tem 7 amigas e 5 amigos. De quantos modos eles podem convidar 6 amigas e 6 amigos, se cada um deve convidar 6 pessoas?

5) Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e o dígito 8 exatamente 2 vezes?

6) Uma fila de cadeiras no cinema tem 20 poltronas. De quantos modos 6 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

7) Quantas são as soluções inteiras não-negativas de

$$x + y + z + w = 3\,?$$

8) Quantas são as soluções inteiras não-negativas de

$$x + y + z + w < 6\,?$$

9) Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z = 10$?

10) Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z < 10$?

Capítulo 4

Elementos de Probabilidade

Capítulo 4

Elementos de Probabilidade

Neste capítulo apresentaremos a noção de probabilidade em espaços finitos e provaremos suas propriedades. Além disso, discutiremos a noção de independência de eventos e a noção de probabilidade condicional.

A teoria da probabilidade é a teoria matemática responsável pela descrição dos fenômenos classificados como aleatórios. Dizemos que um fenômeno é determinístico quando, repetido em condições semelhantes, conduz a resultados idênticos. Aqueles experimentos que repetidos sob mesmas condições conduzem a resultados diferentes são denominados aleatórios. Por exemplo, quando lançamos um dado, o resultado pode ser qualquer um dos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. O lançamento de um dado é um exemplo de um experimento aleatório, uma vez que não podemos determinar antecipadamente qual é o resultado que redundará do experimento. Inúmeros fenômenos na natureza têm esta característica, e é responsabilidade da probabilidade descrever e estuda-los. Vamos, neste trabalho, estudar fenômenos aleatórios simples e através deles proporcionar a apresentação de alguns conceitos fundamentais da teoria das probabilidades.

Quando estudamos certo *experimento,* devemos começar pela descrição de seus possíveis *resultados*. Estes possíveis resultados formam um conjunto que denotaremos por S e que usualmente chamamos de *espaço amostral*. Vejamos um exemplo: o lançamento de uma moeda. Os possíveis resultados são: cara (H) e coroa (T). Logo, nosso espaço amostral pode ser representado pelo conjunto $S = \{H, T\}$. Consideremos outro exemplo: o lançamento de um dado. Agora os resultados possíveis formam o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Vamos assumir nesta apresentação que o espaço amostral S é finito. Você notará que para este estudo, em espaço amostral finito, você utilizará todo o conhecimento de Análise Combinatória visto nos capítulos anteriores deste material. Existem estudos na Matemática de probabilidade com espaços amostrais infinitos, mas este estudo extrapola a intenção e o nível de complexidade deste curso.

Todo subconjunto de S é chamado de *evento*. Portanto, se estamos lançando um dado, o subconjunto $E = \{2,4,6\} \subset S$ pode ser pensado como o evento de ter saído um número par. A interseção de dois eventos corresponde ao evento no qual ocorreram. Dois eventos são ditos *exclusivos* se nunca ocorrem simultaneamente. Por exemplo, o evento $O = \{1,3,5\}$ e o evento $E = \{2,4,6\}$ são exclusivos, pois $E \cap O = \varnothing$.

A cada evento gostaríamos de atribuir um número positivo que determinasse Qual é a chance de tal evento ocorrer. Aos eventos que sempre ocorrem, devemos atribuir o valor 1 indicando a chance total de ocorrer. O espaço todo sempre ocorre, e portanto, ao espaço amostral, atribuímos o valor 1. Quando lançamos um dado várias vezes, vê-se que a chance de um evento elementar, isto é, um evento formado por um resultado apenas, tem a mesma chance de ocorrer que qualquer outro. Portanto, sendo equiprováveis, devemos atribuir para cada evento elementar o valor $1/6$. O evento $E = \{2,4,6\}$ ocorre quando sair qualquer um dos números 2,4,6. Segue que existem 3 casos em 6 possíveis resultados que favorecem o evento E ocorrer. É natural atribuir a probabilidade do evento E ocorrer ao quociente dos resultados favoráveis pelos resultados possíveis, isto é, probabilidade de $\mathrm{E} = \frac{\# E}{\# S} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

4.1 Noções de Probabilidade

Antes de estudarmos noções de probabilidade, vamos apresentar, de modo formal, alguns conceitos básicos.

- Experimentos Aleatórios

São aqueles que, mesmo repetidos várias vezes sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis. A cada experimento correspondem, em geral, vários resultados possíveis. Estes experimentos também são conhecidos como experimentos não-determinísticos. Por exemplo,

i) Jogue um dado e observe o número mostrado na face de cima.

ii) Jogue uma moeda quatro vezes e observe o número de caras obtido.

iii) Em uma linha de produção, fabrique peças em série e conte o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24 horas.

iv) Uma lâmpada é fabricada. Em seguida é ensaiada quanto à duração da vida, pela colocação em um soquete e anotação do tempo decorrido (em horas) até queimar.

- Espaço Amostral Ω (ômega)

É o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Considerando cada um dos experimentos acima, o espaço amostral de cada um deles será:

Ω 1: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Ω 2: {0, 1, 2, 3, 4}.

Ω 3: {0, 1, 2, ..., n}, onde n é o número máximo de peças que pode ser produzido em 24 horas.

Ω 4: $\{t \ / \ t \geq 0\}$.

- Evento (E)

Chamamos evento qualquer subconjunto do espaço amostral Ω de um experimento aleatório. Um evento é sempre definido por uma sentença.

Se E = Ω, então E é chamado evento certo.

Se E = $\varnothing$, então E é chamado evento impossível.

Exemplo 4.1. No lançamento de um dado, onde Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6},

a) obter um número par na face superior. A = {2, 4, 6};

b) obter um número menor ou igual a seis na face superior. B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = Ω;

c) obter um número maior do que seis na face superior. $C = \varnothing$.

Podemos combinar eventos usando as várias operações com conjuntos:

- o evento $A \cup B$ ocorre se, e somente se, ocorre A ou ocorre B (ou ambos);
- o evento $A \cap B$ ocorre se, e somente se, ocorrem A e B;
- o evento A^c, complemento de A, ocorre se, e somente se, não ocorre A.

Dois eventos, A e B, são ditos *mutuamente exclusivos* se são disjuntos, isto é, se $A \cap B = \varnothing$. Em outras palavras, A e B são mutuamente exclusivos se não ocorrem simultaneamente.

Exemplo 4.2. Vamos considerar o seguinte experimento: lançar um dado e observar o número que aparece na face voltada para cima. Então o espaço amostral é Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Seja A o evento "ocorrer número par", B: "ocorrer número impar" e C: "ocorrer número primo", ou seja, A = {2, 4, 6}; B = {1, 3, 5} e C = {2, 3, 5}. Então

$A \cup C = \{2,3,4,5,6\}$ é o evento "ocorrer um número par ou um número primo".

$B \cap C = \{3,5\}$ é o evento "ocorrer um número primo impar";

$C^c = \{1,4,6\}$ é o evento "não ocorrer número primo".

Observe que A e B são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \varnothing$.

- Axiomas de Probabilidade

Dados Ω um espaço amostral, $P(A)$, probabilidade do evento A, é uma função definida nas partes de Ω que associam a cada evento um número real, satisfazendo os seguintes axiomas:

Axioma 1. *Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.*

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. *Se* A e B *são eventos mutuamente exclusivos, então*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Axioma 4. *Se* $A_1, A_2, \ldots$ *é uma seqüência de eventos mutuamente exclusivos, então*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots.$$

Desses axiomas, decorrem os seguintes resultados

Teorema 4.1. *Se* $\varnothing$ *é o conjunto vazio, então* $P(\varnothing) = 0$.

Demonstração. Seja A um conjunto qualquer, então A e $\varnothing$ são disjuntos e $A \cup \varnothing = A$. Pelo Axioma 3, temos

$$P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing) \Leftrightarrow P(A) = P(A) + P(\varnothing).$$

Subtraindo $P(A)$ de ambos os membros da igualdade acima, temos

$$P(A) - P(A) = P(A) + P(\varnothing) - P(A) \Leftrightarrow 0 = P(\varnothing).$$

■

Teorema 4.2. *Se* A^c *é o complemento de um evento* A, *então*

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Demonstração. O espaço amostral Ω pode ser decomposto nos eventos mutuamente exclusivos A e A^c, ou seja, $\Omega = A \bigcup A^c$. Pelos Axiomas 2 e 3, temos

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \Leftrightarrow P(A^c) = 1 - P(A).$$

■

Teorema 4.3. *Se* $A \subset B$ *então* $P(A) = P(B) - P(B - A)$.

Demonstração. Podemos escrever $B = A \cup (B - A)$, que é uma união disjunta. Agora usamos o item 3 da definição de probabilidade e obtemos $P(B) = P(A) + P(B - A)$ e finalmente $P(A) = P(B) - P(B - A)$.

■

Teorema 4.4. *Se* $A \subset B$, *então* $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração. Se $A \subset B$, então B pode ser decomposto nos eventos mutuamente exclusivos A e $B \mid A$ (como mostra a figura abaixo), ou seja, $B = A + B \mid A$.

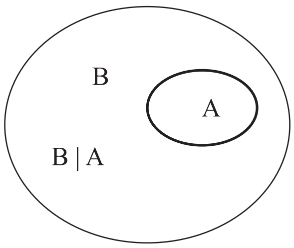


Figura 4.1

Aqui dizemos que $B \mid A$ é o mesmo que $B - A$.

Assim, $B = A \cup (B \mid A) \Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B \mid A) = P(A) + P(B \mid A)$

(pelo Axioma 3).

Como $P(B / A) \geq 0$, vem que $P(B) \geq P(A)$ ou $P(A) \leq P(B)$.

■

Observação 4.1 *Esse resultado também segue imediatamente do problema anterior:* $P(A) = P(B) - P(B - A) \leq P(B)$, *pois* $P(B - A) \geq 0$.

Teorema 4.5 *Se* A *e* B *são dois eventos quaisquer, então*

$$P(A \mid B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Demonstração. Como o evento A pode ser decomposto nos eventos mutuamente exclusivos $A \mid B$ e $A \cap B$,

$$A = (A \mid B) \cup (A \cap B),$$

da figura abaixo

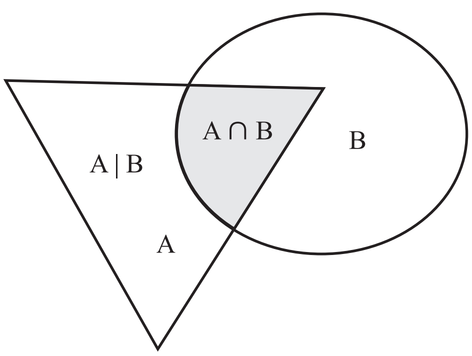


Figura 4.2

resulta que

$$A = (A \mid B) \cup (A \cap B) \Leftrightarrow P(A) = P(A \mid B) + P(A \cap B),$$

(pelo axioma 3),

ou

$$P(A \mid B) = P(A) - P(A \cap B).$$

■

Teorema 4.6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração.

Como $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ e $B = (B - A) \cup (A \cap B)$, onde as uniões são disjuntas, temos

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B).$$

Somando estas igualdades, obtemos

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) + P(A \cap B) \\ &= P(A - B) + P(B - A) + 2P(A \cap B). \end{aligned}$$

Além disso, podemos escrever $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$, que é uma união disjunta e, portanto,

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B),$$

que combinado com a identidade anterior gera

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

■

O teorema 4.6 pode ser estendido usando-se o mesmo argumento do princípio da inclusão e da exclusão para se obter a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots P(A_n) + & \\ -P(A_1 \cap A_2) - \cdots - P(A_{n-1} \cap A_n) + & \\ +P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + & \\ +(-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n). & \end{aligned}$$

Exemplo 4.3. Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter 2 caras? Qual é a probabilidade de obter pelo menos 2 caras?

Solução. Começamos exibindo o nosso espaço amostral:

$$S=\left\{\begin{matrix}(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),\\(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\end{matrix}\right\}.$$

Segue que os resultados possíveis são $\#S=8$ e os resultados favoráveis para a obtenção de exatamente duas caras estão no conjunto

$$E=\{(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\}.$$

Logo, a probabilidade de obter exatamente 2 caras é: $p=\dfrac{\#E}{\#S}=\dfrac{3}{8}$.

Para a segunda pergunta, os resultados favoráveis estão no conjunto

$$A=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\},$$

e portanto, a probabilidade procurada é

$$p=\frac{\#A}{\#S}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Exemplo 4.4. Dois dados são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de que a soma dos números obtidos nas faces de cima dos dados seja 6?

Solução. Precisamos exibir o nosso espaço amostral. Vamos exibi-lo através de uma tabela,

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	**(1,5)**	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	**(2,4)**	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	**(4,2)**	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)

onde colocamos, em negrito, os resultados favoráveis, isto é, aqueles cuja soma dos números é 6. As possibilidades são 5 em um universo de 36. Logo, a probabilidade procurada é $p=\dfrac{5}{36}$.

Exemplo 4.5. Dois estudantes numa sala de aula de 30 estudantes nasceram no mesmo dia do ano. Qual é a probabilidade de tal evento ocorrer?

Solução. O espaço amostral de nosso problema é o conjunto dos pares de dias de nascimento dos estudantes desta sala. Como cada estudante pode ter nascido em qualquer dia dos 365 de um ano, existem $365^{30} = 7,4 \times 10^{76}$ pares de tais datas. Para resolver o problema de maneira mais fácil, vamos calcular a probabilidade do evento complementar, ou seja, quando nenhum dos estudantes possua datas de nascimento iguais. Temos então 30 estudantes e queremos alocar datas de nascimento de modo a nunca termos duas iguais. Usando nossa combinatória dos capítulos anteriores, temos 365 possibilidades para o primeiro estudante, 364 para o segundo, pois sua data de nascimento não pode coincidir com a do primeiro, 363 para o terceiro, ..., 336 para o último. Logo a probabilidade de que todos tenham dias de nascimento diferentes é

$$p = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times 336}{365^{30}} = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{336}{365} = 0,294 \cdot$$

Logo a probabilidade de que ao menos um par de estudantes tenha dias de nascimento iguais é $p = 1 - 0,294 = 0,706$. Observe que neste problema usamos a igualdade $P(A^c) = 1 - P(A)$, onde por A^c denotamos o complementar de A em S.

Exemplo 4.6. Seis dados são lançados. Qual é a probabilidade de todos os números serem diferentes?

Solução. O número de resultados possíveis de nosso experimento é 6^6. O número de resultados favoráveis ao evento em questão é o número de permutações de 6 elementos, que é $6!$. Portanto, a

$$\text{probabilidade do evento} = \frac{6!}{6^6} = \frac{5 \times 4}{6^4} = 0,015432.$$

Exemplo 4.7. Uma funcionária de correio deve enviar 5 passaportes para seus legítimos donos. Preocupada com o encontro que teria nesta noite, ela trabalha apressadamente, sem verificar corretamente a correspondência. Determine a probabilidade da funcionária ter enviado todos os 5 passaportes para donos errados.

Solução. O espaço amostral neste caso pode ser representado pelas permutações dos números $\{1,2,3,4,5\}$. Logo o número de resultados possíveis é $5!$. Já os favoráveis correspondem às permutações que não deixam nenhum elemento fixo. Para calcular este número, usemos o princípio da inclusão-exclusão. Denotamos por N_i as permutações que deixam fixo o elemento i, N_{ij} aquelas deixam fixos i e j, e assim sucessivamente, e finalmente por N_0 aquelas que não fixam nenhum elemento. Pelo princípio da inclusão e exclusão,

$$N_0 = N - N_1 - N_2 - N_3 - N_4 - N_5 + N_{12} + \cdots + N_{45} - \\ - N_{123} - \cdots - N_{345} + N_{1234} + \cdots + N_{2345} - N_{12345},$$

onde N é o número de permutações de 5 elementos. Observe que $N_1 = N_2 = \cdots = N_5$, e existem 5 conjuntos destes, e similarmente, $N_{12} = N_{23} = \cdots = N_{45}$, e existem exatamente $C_{5,2}$ destes conjuntos, e assim sucessivamente. Isto segue do fato de ser irrelevante quais os algarismos que são fixados. Logo, denotando por $N^i = N_{j_1 j_2 \cdots j_i}$, nossa fórmula se torna:

$$N_0 = N - C_{5,1}N^1 + C_{5,2}N^2 - C_{5,3}N^3 + C_{5,4}N^4 - C_{5,5}N^5.$$

Temos então que calcular cada um destes números. Mas as permutações de n elementos que deixam k elementos fixos correspondem às permutações de $n-k$ elementos e, portanto, $N^k = (n-k)!$. Finalmente obtemos

$$N_0 = 5! - C_{5,1} \times 4! + C_{5,2} \times 3! - C_{5,3} \times 2! + C_{5,4} \times 1! - C_{5,5} \times 1 = \\ = 120 - 5 \times 24 + 10 \times 6 - 10 \times 2 + 5 \times 1 - 1 \times 1 = 44.$$

Segue que a probabilidade procurada é

$$p = \frac{44}{120}.$$

Exemplo 4.8. Dez pessoas são separadas em dois grupos de 5 pessoas cada um. Qual é a probabilidade de que duas pessoas determinadas, A e B, façam parte do mesmo grupo?

Solução. O número de casos possíveis é $C_{10,5} = 252$, pois há $C_{10,5} = 252$ modos de escolher o primeiro grupo e, depois disso, há apenas um modo possível para escolher o segundo grupo. O número de casos favoráveis é $2 \cdot C_{8,3} = 112$, pois há $C_{8,3} = 56$ modos de distribuir as pessoas A e B no primeiro grupo e há outro tanto com A e B no segundo grupo.

A probabilidade procurada é

$$P = \frac{112}{252} = \frac{4}{9}.$$

Exemplo 4.9. Há 8 carros estacionados em 12 vagas em fila.

a) Qual é a probabilidade das vagas vazias serem consecutivas?

b) Qual é a probabilidade de não haver duas vagas vazias consecutivas?

Solução.

a) Há $C_{12,4} = 495$ modos de selecionar as 4 vagas que não serão ocupadas e 9 modos de escolher 4 vagas consecutivas (1 2 3 4, 2 3 4 5, ..., 9 10 11 12). A resposta é $\frac{9}{495} = \frac{1}{55}$.

b)Há $C_{12,4} = 495$ modos de selecionar as 4 vagas vazias. Consideremos na escolha das vagas que ficarão vazias uma disposição de 8 carros. Restam para a escolha das 4 vagas vazias, que não podem ser consecutivas, 9 espaços possíveis.

– C1 – C2 – C3 – C4 – C5 – C6 – C7 – C8 –

Segue que existem $C_{9,4} = 126$ escolhas de vagas vazias sem que haja consecutivas. Portanto $p = \frac{126}{495} = \frac{14}{55}$.

Exemplo 4.10. Um torneio é disputado por 4 times A, B, C e D. É 3 vezes mais provável que A vença o torneio do que B, 2 vezes mais provável que B vença do que C e é 3 vezes mais provável que C vença do que D. Quais as probabilidades de vitória para cada um dos times?

Solução. Vamos indicar por $S = \{s_A, s_B, s_C, s_D\}$ o espaço amostral em que s_A denota o evento "A vence o torneio", e assim sucessivamente.

Seja $p = P(\{s_D\})$ a probabilidade de D ganhar o torneio. Segue do enunciado que

$$P(\{s_C\}) = 3p; \quad P(\{s_B\}) = 2P(\{s_C\}) = 6p; \quad P(\{s_A\}) = 3P(\{s_B\}) = 18p.$$

Como a soma das probabilidades tem que ser igual a 1, temos:

$$p + 3p + 6p + 18p = 1 \Rightarrow 28p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{28}$$

e, portanto,

$$P(\{s_C\}) = 3p = \frac{3}{28}; \quad P(\{s_B\}) = \frac{6}{28}; \quad P(\{s_A\}) = \frac{18}{28}; \quad P(\{s_D\}) = \frac{1}{28}.$$

4.2 Eventos Independentes e Probabilidade Condicional

Vamos considerar agora um experimento, por exemplo, o lançamento de uma moeda, e repeti-lo n vezes. Podemos considerar isto como um experimento único, e neste caso o espaço amostral será constituído de seqüências de comprimento n de elementos de S. Assim o espaço amostral correspondente a este experimento é o conjunto S^n de tais seqüências. O número de resultados deste experimento (novo) é $(\#S)^n$. Considerando cada seqüência equiprovável, tem-se $P(a_1, a_2, \cdots a_n) = \frac{1}{k^n}$ onde $k = \#S$. No exemplo do lançamento de uma moeda 2 vezes, $S = \{H, T\}$ e o espaço amostral do experimento repetido será $S' = \{HH, HT, TH, TT\}$. A probabilidade de cada resultado é, portanto, $1/4$. Esta definição pretende ser um modelo em que o resultado de cada experimento repetido é independente dos resultados anteriores, no sentido cotidiano de que *nenhuma influência sobre um experimento pode ocorrer em função dos experimentos anteriores.*

Suponhamos que lancemos duas moedas não viciadas simultaneamente em lados opostos de um quarto. Intuitivamente, o modo como uma das moedas cai não influencia o modo como a outra cai. O conceito matemático que formaliza esta intuição é chamado de *independência*. Geralmente, independência é uma hipótese que assumimos na modelagem de um fenômeno – ou gostaríamos que fosse possível assumir realisticamente. Muitas fórmulas de probabilidade só são válidas se certos eventos forem considerados independentes.

Voltemos ao exemplo do lançamento das duas moedas. Seja A o evento em que na primeira moeda sai CARA, e seja B o evento da segunda sair CARA. Se assumimos que A e B são independentes, então a probabilidade que as duas moedas saiam CARA é:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P(A)P(B).$$

Por outro lado, seja N o evento em que amanhã será um dia nublado e C o evento em que amanhã será um dia chuvoso. Suponhamos que $P(N)=1/5$ e que $P(C)=1/10$. Se estes eventos fossem independentes, então poderíamos concluir que a probabilidade de um dia chuvoso e nublado seria bem pequena:

$$P(N \cap C) = P(N)P(C) = \frac{1}{5}.\frac{1}{10} = \frac{1}{50}.$$

No entanto, estes eventos são dependentes. Em particular, todo dia chuvoso é nublado. Assim a probabilidade de um dia chuvoso e nublado é, de fato, $1/10$. Assim definimos:

Definição 4.1. *Dizemos que dois eventos, A e B, são independentes se*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Vejamos. Por um lado, sabemos que $P(A \cap B) = 0$ porque não contém evento algum, $A \cap B = \varnothing$. Por outro lado, temos $P(A) \cdot P(B) > 0$, exceto nos casos degenerados, nos quais ou A ou B tenham probabilidade zero. Assim, disjunção e independência são conceitos muito diferentes. Vejamos uma imagem mais adequada pra explicar isto. Seja o retângulo da figura abaixo um espaço de probabilidade onde a área de cada subconjunto é a probabilidade do evento representado pelo conjunto. Se A cobre uma fração α do retângulo e B cobre uma fração β do mesmo, então a área da interseção será uma fração $\alpha \cdot \beta$ do retângulo. Em termos de probabilidade

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Suponhamos que lancemos duas moedas não viciadas. Considere os eventos:

A = as moedas caem com a mesma face voltada pra cima
B = a primeira moeda cai CARA.

São estes dois eventos independentes? Intuitivamente, a resposta é "não". De modo geral, se as moedas caem iguais, depende de como cai a primeira moeda. Entretanto, a definição matemática de independência não corresponde com a noção intuitiva de "não-relacionados". Estes eventos são, de fato, independentes, como se pode ver pelos cálculos:

$$P(A) = P(HH) + P(TT) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(HH) + PHT) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(HH) = \frac{1}{4}$$

Considere o lançamento de um dado, se $A = \{2,4,6\}$ é o evento que corresponde a sair par, e $B = \{3,6\}$ significa sair um múltiplo de 3. Então A e B são independentes, pois $A \cap B = \{6\}$ e, portanto,

$$P(A \cap B) = P(\{6\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P(A)P(B).$$

Definição 4.2. *Dizemos que n eventos,* $A_1, A_2, \cdots, A_n$, *são independentes se, para todo* $2 \le k \le n$ *e* $j_1, j_2, \cdots j_k$ *com* $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$, *vale*

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_k}).$$

Exemplo 4.11. (Eventos independentes dois a dois, mas que não são independentes) Considere uma bola retirada de uma urna contendo quatro bolas, numeradas 1, 2, 3, 4. Seja $E = \{1,2\}, F = \{1,3\}, G = \{1,4\}$.

Solução.

Se todos os quatro resultados possíveis são igualmente prováveis, temos:

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{4}$$

$$P(E \cap G) = P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{4}$$

$$P(F \cap G) = P(F) \cdot P(G) = \frac{1}{4}.$$

Entretanto,

$$\frac{1}{4} = P(E \cap F \cap G) \neq P(E) \cdot P(F) \cdot P(G) = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Logo, ainda que os eventos E, F, G sejam dois a dois independentes, eles não são independentes.

Exemplo 4.12. Suponhamos que seja lançado um dado não viciado. Seja E o evento em que a soma dos números na parte superior dos dados seja 7 e F o evento no qual no primeiro dado é sorteado o número 4. São estes eventos independentes?

Solução. Observe que

$$P(E \cap F) = P(\{4,3\}) = \frac{1}{36}$$

enquanto

$$P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(E \cap F),$$

provando que eles são, de fato, independentes.

Uma outra noção importante em probabilidade é a noção de probabilidade condicional. Vamos defini-la agora. Para tal, consideremos o seguinte problema: suponha que temos um espaço de probabilidade e que saibamos que um determinado evento ocorreu. Como são então as probabilidades dos outros eventos, uma vez que o evento considerado já ocorreu?

Exemplo 4.13. Um experimento consiste em lançar um dado. Seja X o resultado, seja F o evento $\{X = 6\}$, e seja E o evento $\{X > 4\}$. Como probabilidade, assumamos que $P(Y) = \frac{1}{6}$ para $Y = 1, 2, \cdots 6$. Assim $P(F) = \frac{1}{6}$. Agora suponhamos que o dado foi lançado e que fomos informados de que o evento E ocorreu. Neste caso, nos restam 2 resultados possíveis: 5 e 6. Qual, então, é a probabilidade de F ter ocorrido?

Solução.

Como restam 2 resultados possíveis segue que a probabilidade procurada é $\frac{1}{2}$. Vamos denotar por $P(F \mid E)$ e referenciá-lo como a probabilidade do evento F dado que o evento E ocorreu.

Exemplo 4.14. Dois dados são lançados. Qual é a probabilidade de que tenha saído 4 em um dos dados, sabendo que a soma dos resultados dos lançamentos é 8?

Solução. Sabemos que a soma dos dois dados foi 8, e portanto sabemos que o lançamento dos dois dados deve ter sido 2 e 6, 3 e 5, 4 e

4, 5 e 3, 6 e 2. Assim, existe um total de 5 possibilidades. Entre estes resultados, somente 1 tem 4 como resultado de um dos dados. Logo, se denotamos pelo evento E "saiu um 4" e pelo evento F "a soma dos dados é 8", temos que

$$P(E \mid F) = \frac{1}{5}.$$

Exemplo 4.15. Três candidatos, A, B e C, estão concorrendo a um cargo político. Apenas um candidato pode ganhar. Suponhamos que A e B têm a mesma chance de ganhar e que C tem metade das chances de ganhar que tem A.

Solução.

Seja A o evento "A vence", B o evento "B vence", e C o evento "C vence". Logo as probabilidades de cada evento serão $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ e $P(C) = \frac{1}{5}$.

Suponhamos que, antes da eleição acontecer, A desista. Então quais seriam agora as probabilidades para os eventos B e C?

Solução.

É natural, na ausência de outras informações, atribuir probabilidades a estes eventos que sejam proporcionais às probabilidades originais. Assim teríamos $P(B \mid A) = \frac{2}{3}$ e $P(C \mid A) = \frac{1}{3}$.

Nestes exemplos, temos um dado espaço de probabilidade e uma nova informação que determina, de certa maneira, um novo espaço de probabilidades. Este novo espaço consiste nos resultados que ainda são possíveis, dada a informação adicional que temos. Nosso objetivo é atribuir probabilidades a estes eventos. Vamos formalizar então os procedimentos realizados nestes exemplos. Seja $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_r\}$ o espaço amostral original com as probabilidades $P(\omega_i)$ correspondentes. Suponhamos que o evento E tenha ocorrido. Queremos atribuir novas probabilidades $P(\omega_i \mid E)$ aos eventos $\{\omega_1, \cdots, \omega_r\}$ que reflitam esta informação. Claramente, se $\omega_i \notin E$, é razoável atribuir $P(\omega_i \mid E) = 0$. Além disso, na ausência de informação, é razoável assumir que as probabilidades para ω_i em E deveriam ter a mesma magnitude relativa que estas probabilidades tinham antes de sabermos que E ocorrera. Para isso, exigimos que

$$P(\omega_i \mid E) = cP(\omega_i)$$

para todo $\omega_i \in E$, com c uma constante positiva. Por outro lado, devemos ter

$$1 = \sum_{i:\omega_i \in E} P(\omega_i \mid E) = c \sum_{i:\omega_i \in E} P(\omega_i) = cP(E).$$

Segue que

$$c = \frac{1}{\sum_{i:\omega_i \in E} P(\omega_i)} = \frac{1}{P(E)}.$$

Observe que precisamos exigir que $P(E) > 0$. Assim definimos:

$$P(\omega_i \mid E) = \frac{P(\omega_i)}{P(E)},$$

para todo $\omega_i \in E$ nas condições $P(E) > 0$.

Esta nova distribuição de probabilidades chamamos de probabilidade condicional dado E. Para um evento qualquer F define-se:

$$P(F \mid E) = \sum_{i:\omega_i \in E \cap F} P(\omega_i \mid E) = \sum_{i:\omega_i \in E \cap F} \frac{P(\omega_i)}{P(E)} = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}.$$

Chamamos $P(F \mid E)$ de *probabilidade condicional de* F *dado que* E *ocorreu*, e calcula-se pela fórmula:

$$P(F \mid E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}.$$

De outra maneira podemos definir:

Definição 4.3. *Dados dois eventos, A e B, a probabilidade condicional de B dado A é o número* $P(A \cap B)/P(A)$ *que se denota por*

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Este número só está definido quando $P(A) > 0$.

Exemplo 4.16. Retornemos ao exemplo do lançamento de um dado (ex. 4.13). Lembre-se que F corresponde ao evento $X = 6$, e que E é o evento $X > 4$. Observe que $F \cap E$ é o evento F. Logo a fórmula acima nos dá

$$P(F \mid E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2},$$

em concordância com nossos cálculos anteriores.

Exemplo 4.17. Encontre a probabilidade de se tirar um 4 de um baralho de 52 cartas, dado que dele já tiramos um 7.

Solução. Dado que um 7 já foi retirado, temos agora apenas 51 cartas disponíveis. Portanto, a probabilidade de tirar um 4 agora é $P(4 \mid 7) = \frac{4}{51}$. Se usarmos a fórmula, temos:

$$P(4 \mid 7) = \frac{P(4 \cap 7)}{P(7)} = \frac{\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51}}{\frac{4}{52}} = \frac{4}{51}.$$

Exemplo 4.18. Uma moeda é lançada 3 vezes sucessivas. Calcule a probabilidade do evento A ocorrer dado que o evento B ocorreu, quando os eventos A e B são definidos por:

$$A = \{\text{mais caras que coroas aparecem}\},\ B = \{\text{a primeira é cara}\}.$$

Solução. O espaço amostral consiste nas 8 seqüências:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\},$$

que assumimos serem igualmente prováveis. O evento B consiste de quatro elementos, HHH, HHT, HTH, HTT, e, portanto, sua probabilidade é

$$P(B) = \frac{4}{8}.$$

O evento $A \cap B$ consiste em três resultados possíveis, HHH, HHT, HTH, logo sua probabilidade é

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/8}{4/8} = \frac{3}{4}.$$

Exemplo 4.19. Uma família tem dois filhos. Qual é a probabilidade condicional de que ambos os filhos sejam meninos, dado que pelo menos um deles é um menino? Assuma que o espaço amostral S é dado por $S=\{(m_o,m_o),(m_o,m_a),(m_a,m_o),(m_a,m_a)\}$ e que todos os resultados são igualmente prováveis. [(m_o,m_a) indica que o mais velho é um menino e que o mais novo é uma menina.]

Solução. Seja E o evento em que ambos os filhos são meninos, e F o evento em que pelo menos um dos filhos é um menino. Então, a probabilidade procurada é dada por

$$P(E\mid F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{P\left(\{(m_o,m_o)\}\right)}{P\left(\{(m_o,m_o),(m_o,m_a),(m_a,m_o)\}\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Os próximos lemas resumem as propriedades básicas da noção de probabilidade condicional.

Lema 4.1. *Seja A tal que* $P(A)>0$. *Então*

a) $P(\varnothing\mid A)=0,\ \ P(S\mid A)=1,\ \ P(B\mid A)\le 1$.

b) $P\left((B\cup C)\mid B\right)=P(B\mid A)+P(C\mid A)$, se $B\cap C=\varnothing$.

Em outras palavras, fixado A, a probabilidade condicional é uma probabilidade (outra) sobre o espaço amostral S.

Demonstração. a) Temos

$$P(\varnothing\mid A)=\frac{P(\varnothing\cap A)}{P(A)}=\frac{P(\varnothing)}{P(A)}=0$$

e

$$P(S\mid A)=\frac{P(S\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1.$$

Como $0\le P(A\cap B)\le P(A)$, então $0\le\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}\le 1$ e, portanto,

$$0\le P(B\mid A)\le 1.$$

■

b) Sabemos que

$$P((B\cup C)\mid A)=\frac{P((B\cup C)\cap A)}{P(A)}=\frac{P((B\cap A)\cup(C\cap A))}{P(A)}$$

$$=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}+\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=P(B\mid A)+P(C\mid A).$$

Lema 4.2. *Se* $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq \varnothing$, *então,*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) =$$

$$P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Lema 4.3 (Lei de Bayes). *Seja* $\wp = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ *uma partição do espaço de probabilidade* S. *Então se* E *é um evento com* $P(E) > 0$, *v+ale*

$$P(A_j \mid E) = \frac{P(A_j) \cdot P(E \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(E \mid A_i)}.$$

Exemplo 4.20. Numa prova há 7 perguntas do tipo verdadeiro-falso. Calcular a probabilidade de acertarmos todas as 7 se:

a) escolhermos aleatoriamente as 7 respostas,

b) escolhermos aleatoriamente as respostas, mas sabendo que há mais respostas verdadeiras do que falsas.

Solução.

a) Há $2^7 = 128$ possibilidades e, portanto,

$$P[\text{acertar os 7 testes}] = \frac{1}{128}.$$

b) Seja A o conjunto de todos os pontos com mais respostas "V" do que "F". Temos

$$\# A = C_{7,4} + C_{7,5} + C_{7,6} + C_{7,7} = 35 + 21 + 7 + 1 = 64.$$

E, portanto, a probabilidade buscada é igual a $\frac{1}{64}$.

Exemplo 4.21. Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento ocorreu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas.

Solução. Nos 5 lançamentos seguintes devemos ter 4 ou 5 caras. A probabilidade de ter 5 caras é $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ e a probabilidade de ter 4 caras (e 1 coroa) é $5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$, porque a probabilidade de ter 4 ca ras e 1 coroa na ordem cara-cara-cara-cara-coroa é $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$, e há

5 ordens possíveis. A resposta é

$$\frac{1}{32}+\frac{5}{32}=\frac{3}{16}.$$

Exemplo 4.22. Considere duas urnas. A primeira contém duas bolas brancas e sete pretas, e a segunda contém cinco bolas brancas e seis pretas. Lançamos uma moeda, e se sair cara retiramos uma bola da primeira urna, caso contrário, retiramos uma bola da segunda urna. Qual é a probabilidade condicional de ter saído cara, dado que uma bola branca foi selecionada?

Solução. Seja W o evento em que uma bola branca foi retirada e H o evento em que a moeda deu cara. A probabilidade procurada pode ser calculada como segue:

$$P(H\mid W)=\frac{P(H\cap W)}{P(W)}=\frac{P(W\mid H)P(H)}{P(W)}=$$

$$=\frac{P(W\mid H)P(H)}{P(W\mid H)P(H)+P(W\mid H^c)P(H^c)}=$$

$$=\frac{\frac{2}{9}\frac{1}{2}}{\frac{2}{9}\frac{1}{2}+\frac{5}{11}\frac{1}{2}}=\frac{22}{67}$$

Exemplo 4.23. Uma moeda equilibrada é jogada duas vezes. Sejam A e B os eventos: .

A: cara na primeira jogada;

B: cara na segunda jogada.

Verifique se A e B são independentes.

Solução. $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$, pois em cada lançamento há dois resultados possíveis que são igualmente prováveis (cara e coroa), e em cada lançamento há apenas um resultado favorável (cara). $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, pois para os dois lançamentos há quatro resultados possíveis que são igualmente prováveis (cara-cara, cara-coroa, coroa-cara e coroa-coroa), e apenas um favorável (cara-cara). Como $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, os eventos A e B são independentes.

Exemplo 4.24. Suponhamos que haja um teste para diagnosticar o câncer que dá positivo em 95% dos casos quando se aplica às pessoas que possuem a enfermidade, e dá negativo em 95% dos casos quando se aplica às pessoas que não a possuem. Se a probabilidade de que uma pessoa tenha realmente câncer é $0,005$, qual é a probabilidade de que uma pessoa tenha realmente câncer quando o teste tiver dado positivo?

Solução. Seja C o evento no qual uma pessoa examinada tenha câncer e A o evento no Qual é o resultado do teste seja positivo para o câncer. Apliquemos a lei de Bayes:

$$P(C \mid A) = \frac{P(A \mid C) \cdot P(C)}{P(A \mid C) \cdot P(C) + P(A \mid C^c) \cdot P(C^c)}$$

$$= \frac{(0,95)(0,005)}{(0,95)(0,005) + (0,05)(0,995)} = 0,087 \text{.}$$

Exemplo 4.25. Das 28 peças de um dominó, escolhem-se duas aleatoriamente. Ache a probabilidade de que com elas se possa formar uma cadeia compatível às regras do jogo.

Solução.

$$P(\text{cadeia compatível}) = P(2^{a} \text{ peça encaixe}|\ 1^{a} \text{ dupla})P(1^{a} \text{ dupla})$$

$$+\ P(2^{a} \text{ peça encaixe}|\ 1^{a} \text{ não dupla})P(1^{a} \text{ não dupla})$$

$$= \frac{7}{28}\frac{6}{27} + \frac{21}{28}\frac{12}{27} = \frac{7}{18}.$$

Exemplo 4.26. Retiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas de um baralho comum (52 cartas). Calcule a probabilidade de a 1^{a} carta ser uma dama e a 2^{a} carta ser de copas.

Solução. Há dois casos a considerar:

a) Se a primeira carta é a dama de copas, a probabilidade é $\frac{1}{52}\frac{12}{51}$.

b) Se a primeira carta é uma dama não de copas, a probabilidade é $\frac{3}{52}\frac{13}{51}$.

A resposta é $P = \frac{1}{52}\frac{12}{51} + \frac{3}{52}\frac{13}{51} = \frac{1}{52}$.

Exemplo 4.27. Determine a probabilidade de obter:

a) Ao menos um 6 em quatro lançamentos de um dado.

b) Ao menos um duplo 6 em 24 lançamentos de um par de dados.

Solução. A probabilidade de nenhum seis em quatro lançamentos é $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,4823$. A probabilidade de pelo menos 1 seis é $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1-0,4823 = 0,5177$, o que responde a letra a.

A probabilidade de nenhum duplo seis em 24 lançamentos de um par de dados é $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,5086$. Logo, a probabilidade de pelo menos 1 duplo seis é $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 1-0,5086 = 0,4914$.

Exemplo 4.28. Marina quer enviar uma carta a Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $\frac{8}{10}$. A probabilidade de que o correio não a perca é de $\frac{9}{10}$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $\frac{9}{10}$. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

Solução. Vamos usar aqui na solução um diagrama de árvore.

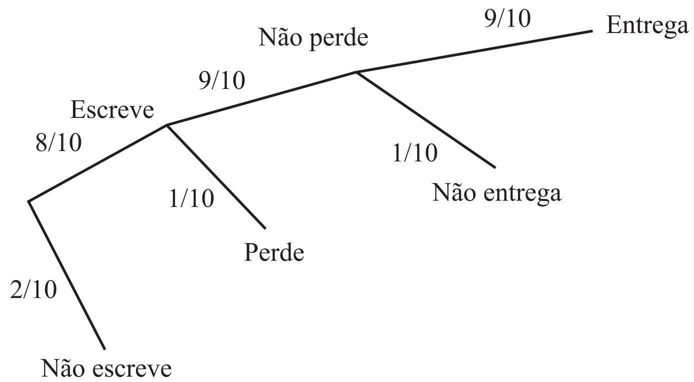


Figura 4.3

$$P(\text{não escreve}|\text{ não recebe}) = \frac{P(\text{não escreve})}{P(\text{não recebe})} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{2}{10}+\frac{8}{10}\frac{1}{10}+\frac{8}{10}\frac{9}{10}\frac{1}{10}} = \frac{25}{44}.$$

Lista de Exercícios

1) Três urnas I, II e III contêm respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a II?

2) Uma moeda é jogada 4 vezes. Sabendo que o primeiro resultado foi cara, calcular a probabilidade condicional de obter pelo menos 2 caras.

3) A probabilidade de um homem ser canhoto é $\frac{1}{10}$.Qual é a probabilidade de, em um grupo de 10 homens, haver pelo menos um canhoto?

4) Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $\frac{4}{10}$. O Fluminense ganha um jogo em um dia com chuva com probabilidade $\frac{6}{10}$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $\frac{4}{10}$. Sabendo-se que o Fluminense ganhou um jogo naquele dia de agosto, qual a probabilidade de que choveu neste dia?

5) Num exame há três respostas para cada pergunta e apenas uma delas é certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade de 1/3 de escolher a resposta certa se ele está adivinhando e 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das respostas do exame. Se ele deu a resposta correta a uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou?

6) Treze cartas são escolhidas de um baralho comum de 52 cartas. Seja A o evento "o ás de copas está entre as 13 cartas" e B o evento "as 13 copas são do mesmo naipe". Provar que A e B são independentes.

7) Joguei um dado duas vezes. Calcule a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados foi 7.

8) Em uma cidade, as pessoas falam a verdade com probabilidade de 1/3. Suponha que A faz uma afirmação e que D diz que C diz que B diz que A falou a verdade. Qual a probabilidade de A ter falado a verdade?

9) Um urna contém 3 bolas vermelhas e 7 brancas. A e B sacam alternadamente, sem reposição, bolas dessa urna até que uma bola vermelha seja retirada. A saca a 1ª bola. Qual a probabilidade de A sacar a bola vermelha?

10) Considere 4 urnas, cada uma delas contendo 10 bolas numeradas de 1 a 10. Extrai-se uma bola de cada urna. Calcular a probabilidade de que as 4 bolas somem 20.

11) Ao responder uma questão de um teste de múltipla escolha um estudante ou sabe a resposta ou a chuta. Seja p a probabilidade de que ele saiba resposta e $1-p$ a probabilidade de que ele chute. Suponha que o estudante quando chuta tem probabilidade de $\frac{1}{m}$ de acertar, onde m é o número de alternativas das questões. Qual é a probabilidade condicional de que o estudante sabia a resposta da questão dado que ele respondeu acertadamente?

12) Nós sabemos que uma determinada carta é igualmente provável de estar em um de três escaninhos. Seja α_1 a probabilidade de que nós a vamos encontrar depois de um exame superficial no escaninho i se a carta estiver de fato no escaninho i, para $i = 1, 2, 3$. (Podemos ter $\alpha_i < 1$.) Suponhamos que examinemos o escaninho e não encontremos a carta. Qual é a probabilidade da carta estar de fato no escaninho 1?

Resposta dos exercícios

CAPÍTULO 1

Lista 1	Lista 2
1) a) 43	1) a) 42
1) b) 35	2) a) $\sum_{i=1}^{5}(2i-1)$
2) a) n + 2	2) b) $\sum_{i=1}^{6}(-1)^i i^2$
2) b) $\frac{(n+2)}{(n+1)}$	3) a) $13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22 \cdot ....$
3) a) n = 9	3) b) 3159
3) b) n = 5	4) a) $\prod_{i=1}^{5}(2i-1)$
4) a) x = 6	4) b) $\prod_{i=0}^{n}(p+i)$
4) b) x = 4	

CAPÍTULO 2

Lista 1	Lista 2
1) a) 7	1) 6
1) b) 11	2) $x = \frac{4}{(n-3)}$
2) a) x = 1 ou x = 4	3) x = 9 ou x = 1
2) b) x = 1 ou x = 7	4) x = 6 e y = 7
3) a) n = 3	**Lista 3**
3) b) n = 10	2) $2^{n-1}(n+2)$
4) a) x = 4	3) a) 145180
4) b) x = 5	3) b) $\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

Lista 3	Lista 4
2) $2^{n-1}(n+2)$	1) a) 20
3) a) 145180	1) b) $\frac{-1120}{81}$
3) b) $\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$	3) $924x^{-6}$
CAPÍTULO 3	
Lista 1	Lista 2
1) 40	1) 15.600
2) 7200	2) 9.765.625
3) 56	3) 132
4) 600	4) 60
5) 4096	5) a) 3864
6) 1.048.576	5) b) 1567
7) 125	5) c) 560
8) 9.000.000	6) 4464
	7) 461
	8) 48
	9) 43200
	10) 18

Lista 3

1) a) 11520

1) b) 720

1) c) 4320

1) d) 1152

1) e) 720

1) f) 9360

1) g) 13080

2) a) 81º

2) b) 46721

2) c) 1

2) d) 5.333.280

3) 3600

4) 8640

5) 604.800

6) a) 462

6) b) 5775

6) c) 792

6) d) 10395

6) e) 51975

7) 564.480

8) 720

9) 8192

10) 2880

Lista 4

1) a) 560

1) b) 434

2) 6300

3) 40

4) 267.148

5) 12.960

6) 138.378.240

CAPÍTULO 4

1) $\frac{5}{12}$

2) $\frac{7}{8}$

3) 0,6513

4) $\frac{1}{2}$

5) $\frac{7}{16}$

7) $\frac{1}{6}$

8) $\frac{13}{41}$

9) $\frac{7}{12}$

Referências

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar 5**: Combinatória e Probabilidade. Atual: São Paulo, 1977.

NETTO, F.A.L. **Lições de Análise Combinatória**. Livraria Nobel: São Paulo, 1967.

MORGADO, A.C.O.; CARVALO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FERANANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. (Coleção Professor de Matemática) SBM: Rio de Janeiro, 2004.

SANTOS, J.P.O.; MELLO, M.P.; MURARI, I.T.C. **Introdução à Análise Combinatória**. Ed. Unicamp: Campinas, 1995.

HOEL, P.G.; PORT, S.C. ; STONE, C.J. **Introdução à Teoria da Probabilidade**. Interciência: Rio de Janeiro, 1978.