1. 함수, 미적분Function, Calculus - 3/3

적분

- 확률에 기반을 둔 머신러닝 모델들은 적분이 많이 나옴
- 표현법 위주로 리뷰
- 정적분과 부정적분의 차이를 아는 것이 매우 중요

부정적분

- 주어진 함수의 미분하기 전 모습anti-derivative을 찾는 미분의 역과정
- 어떤 $f(x)$가 이미 미분되었다고 생각했을 때 그 함수가 미분되기 전에는 어떤 함수였나는 다음과 같다.

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

- 상수 C는 $F(x) + C^*$라는 원래 함수가 미분되어 $f(x)$가 되는 과정에서 사라졌으므로 복구하지 못하는 모르는 상수 C이다.
- 부정적분의 의미상 $\int$ 기호는 연산적으로 아무 의미가 없는 기호이나 정적분과 어떤 연관관계로 인해 같은 기호를 쓰게 됨
- 특별한 계산 방법이 있는 것이 아니고 그냥 미분의 역과정으로 기본 공식을 생성하고 이를 이용해서 계산
- 그렇기 때문에 어떻게든 미분하기전 함수를 찾아 내기 위해 온갖 기교들이 난무함....
- 간단한 다항함수의 부정적분 예
- $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ 의 역과정으로 $\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$임을 알 수 있다.

치환적분

- 치환적분을 직접 할 일은 없지만 야코비안 개념을 알아볼 때를 위해...

  $x = g(t)$의 관계가 있을 때

$$\int f(x)dx = \int f\left(g(t)\right) \frac{dg(t)}{dt} dt$$

- 야코비안 부분에서 더 자세히
- $\int x(x^2-1)^3 dx$, $x = g(t) = \sqrt{t+1}$로 두면 $\frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$

$$\begin{aligned}\int x(x^2-1)^3 dx &= \int \sqrt{t+1}\, t^3 \frac{1}{2\sqrt{t+1}} dt \\ &= \frac{1}{2}\int t^3 dt = \frac{1}{8}t^4 + C \\ &= \frac{1}{8}(x^2-1)^4 + C\end{aligned}$$

In [27]:

```
x = sympy.Symbol('x')

sympy.simplify(sympy.integrate(x*(x**2 - 1)**3, x))
```

Out[27]:

$$\frac{x^2}{8}\left(x^6 - 4x^4 + 6x^2 - 4\right)$$

부분적분

- 역시 직접할 일은 없지만 정규분포 확률밀도함수를 적분할 때 한번 나타남 - 암기법 : 그적미적
- 곱의 미분법으로 부터

$$\frac{df(x)g(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

- 양변의 부정적분은

$$f(x)g(x) = \int \frac{df(x)}{dx}g(x)dx + \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

이므로 적당히 이항하면

$$\int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx = f(x)g(x) - \int \frac{df(x)}{dx}g(x)dx$$

$$\int \frac{df(x)}{dx}g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

- $\int x \ln x \, dx$에서 $f(x) = \ln x$:그대로 적고 미분하는 함수, $\frac{dg(x)}{dx} = x$:적분하는 함수

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= (\ln x)\frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

In [4]:

```
x = sympy.Symbol('x')

sympy.integrate(x*sympy.ln(x), x)
```

Out[4]:

$$\frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4}$$

몇가지 부정적분 공식(참고)

- 다항함수

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$
$$\int x^{-1} \, dx = \ln|x| + C$$

- 지수함수

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$
$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

- 로그함수(치환적분과 부분적분 이용)

$$\int \log_a x \, dx = x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$$
$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

정적분

- 그래프 아래 넓이나 부피를 구하기 위해 도입된 급수를 간단히 기호로 나타낸 것
- 따라서 정적분과 부정적분은 서로 완전히 다른 개념, 부정적분 : 미분하기 전 함수를 찾는것, 정적분 : 주어진 그래프 아래의 넓이나 부피
- 다만, 미적분의 기본정리에 의해 정적분을 할 때 부정적분을 이용할 수 있음
- 정적분의 간단한 예

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \left(3x^2 - 2x + 5\right) dx &= \left[x^3 - x^2 + 5x\right]_{-1}^{2} \\ &= (2^3 - 2^2 + 10) - ((-1)^3 - (-1)^2 - 5) \\ &= 14 - (-7) = 21\end{aligned}$$
$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

In [30]:

```
x = sympy.Symbol('x')

sympy.integrate(3*x**2 - 2*x +5, (x,-1, 2))
sympy.integrate(sympy.E**x, (x, 0, 1))
```

Out[30]:

21
$-1 + e$

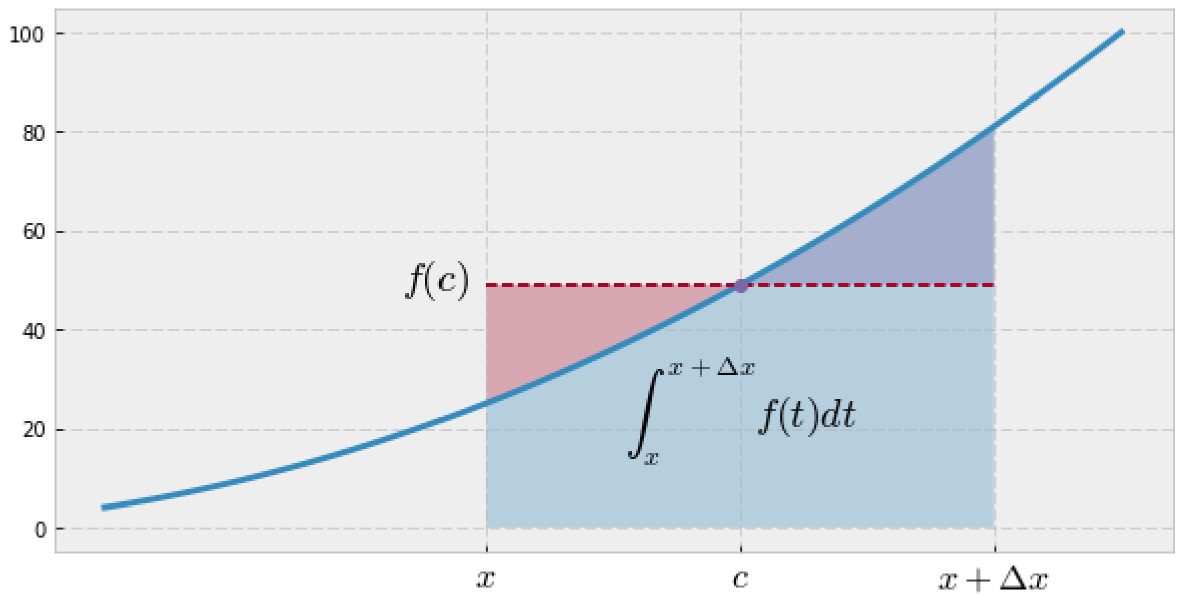
미적분의 기본정리 : 부정적분과 정적분을 연결†

미분과 정적분과의 관계

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

- 위 식의 의미 : "$f(x)$ 아래 넓이를 나타내는 함수"를 미분하면 원래 함수 $f(x)$가 된다. 따라서 "$f(x)$ 아래 넓이를 나타내는 함수"는 $f(x)$를 미분하기전 함수 즉 부정적분 중 하나가 된다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(x) \quad \because \Delta x \to 0 \implies c \to x\end{aligned}$$

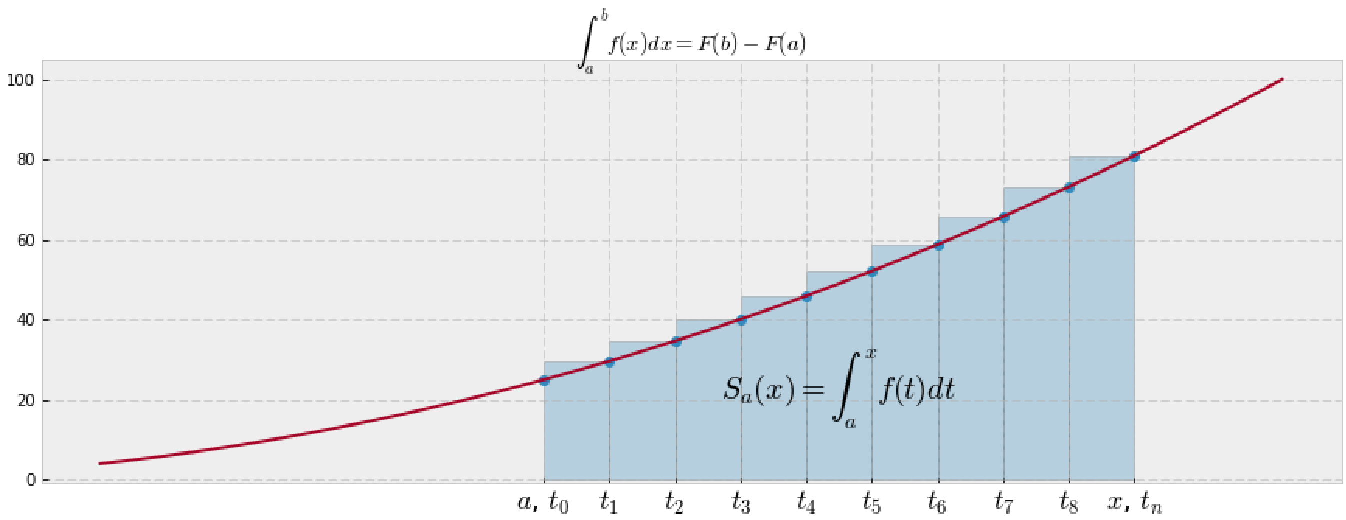


- 위 계산 과정에서 첫째줄은 적분식으로 표현된 넓이함수를 미분의 정의대로 적은 것
- 여기서 분자는 함수값의 차이로 기하학적 의미는 넓이의 차
- 둘째줄은 이 넓이의 차를 적분구간을 조정해서 하나의 정적분식으로 나타낸 것
- 이 넓이의 차는 아래 그림에서 파란색 보라색 영역을 더한 것
- 여기서 3번째 줄로 가는 과정은 그림처럼 해당 넓이차와 동일한 넓이가 되는 직사각형을 만드는 $x < c < x + \Delta x$인 c가 있어서 밑변 Δx와 높이 $f(c)$를 곱한 직사각형의 넓이로 함수 아래 사다리꼴 형태의 넓이를 바꿔 적은 것

부정적분과 정적분과의 관계

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- 위 식의 의미 : 구간 $[a, b]$에서 주어진 함수 $f(x)$ 아래 넓이의 계산은 함수 $f(x)$의 부정적분을 이용해서 구할 수 있다.
- 임의의 구간 $[a, x]$에서 주어진 함수 $f(x)$의 넓이를 구해주는 함수를 $S_a(x)$라고 써보자.
- 그렇다면 $b, c, d, \ldots$에서 부터 x까지 넓이를 구해주는 $S_b(x), S_c(x)$등등 임의의 시작점에서 주어진 x까지 넓이를 구하는 무수히 많은 $S(x)$가 있다는 것을 알 수 있다.
- $S_a(x)$를 정식화하기 위해 그림처럼 구간 $[a, x]$를 n 등분해서 n개의 사각 기둥을 생각하자.



기둥의 기준점	기둥의 넓이
$t_0 = a + 0\Delta t$	
$t_1 = a + 1\Delta t$	$f(t_1) \cdot \Delta t$
$t_2 = a + 2\Delta t$	$f(t_2) \cdot \Delta t$
$\vdots$	$\vdots$
$t_n = a + n\Delta t$	$f(t_n) \cdot \Delta t$

- 등분된 기둥의 넓이를 다 더하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t$$

- 이제 $S_a(x)$는 다음처럼 근사되었다.

$$S_a(x) \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t$$

- $S_a(x)$는 a부터 x까지의 넓이이므로 정식화된 식에 a가 나타나도록 써보면 $\Delta t = \dfrac{x-a}{n}$이므로

$$S_a(x) \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\left\{\frac{x-a}{n}\right\}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{n}\right)$$

- 처럼 a부터 x까지의 넓이를 써볼 수 있다. 이제 $\approx$으로 $=$로 만들기 위해 기둥을 무수히 많이 작게 자르고 이를 더 다하는 식으로 바꾸면

$$S_a(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\left\{\frac{x-a}{n}\right\}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{n}\right)$$

- 식을 간단히 쓰기 위해 $\int$ 기호를 도입하면

$$S_a(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\left\{\frac{x-a}{n}\right\}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{n}\right) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (*)$$

- 이것으로 넓이 함수 $S_a(x)$를 정식화 하였지만 아직 시그마의 극한을 찾지 않고서 위 함수의 값을 계산할 수 없다.
- 그런데 우리는 앞 과정에서 다음과 같은 사실을 알고 있다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}S_a(x) = f(x)$$

- 위 사실로 인해 $S_a(x)$는 $f(x)$의 미분하기 전 함수중 하나와 정확히 같게 되고

$$S_a(x) = F(x) + C$$

- 따라서 C만 결정하면 우리는 a부터 x까지의 넓이를 주는 $S_a(x)$ 함수의 (*)와 모양이 다른 계산 가능한 함수를 얻게 된다.
- a부터 a까지의 넓이는 0이라는 사실을 이용하면

$$S_a(a) = F(a) + C = 0$$

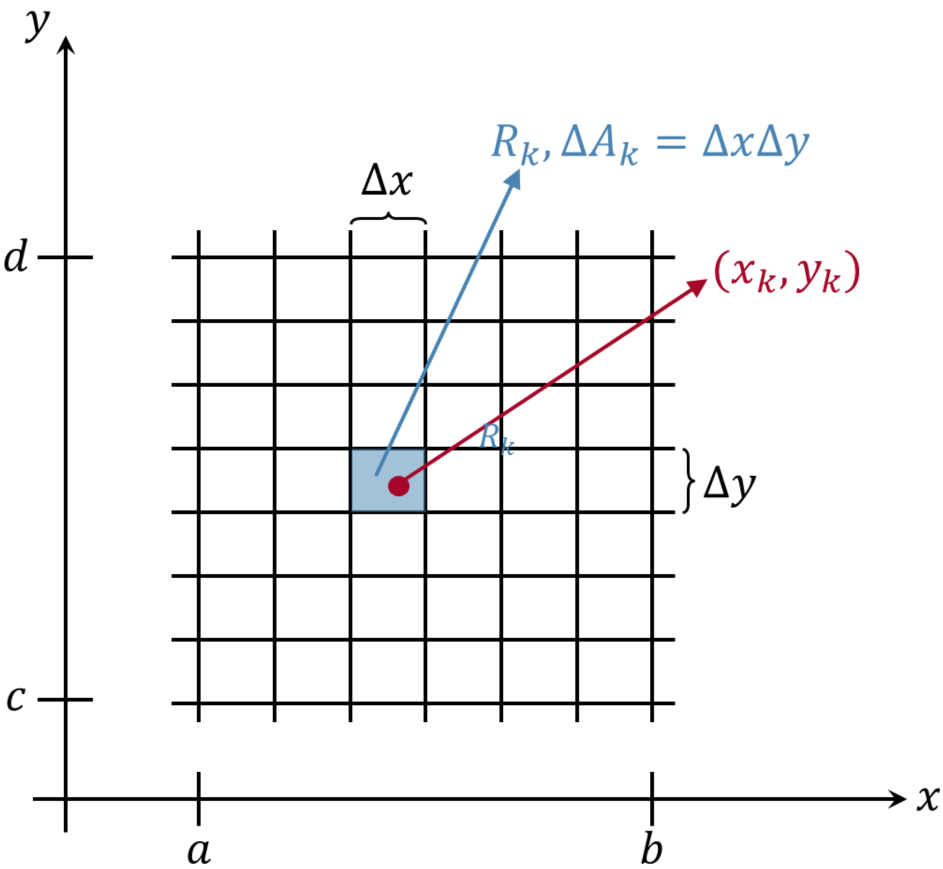
- 최종적으로

$$S_a(x) = F(x) - F(a)$$

- 이 과정을 통해 넓이를 계산하기위해 복잡한 (*)식 대신 위 식을 이용할 수 있게 된다.

다변수 함수의 정적분[8]

- 함수 $f(x,y)$는 직사각형 영역 $R : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$에서 정의된 함수
- 영역을 작은 직사각형들로 분할 $R_1, \ldots R_n$, 그리고 이때 $\Delta x_k, \Delta y_k$를 R_k의 양변이라하면 면적은 $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$이다.



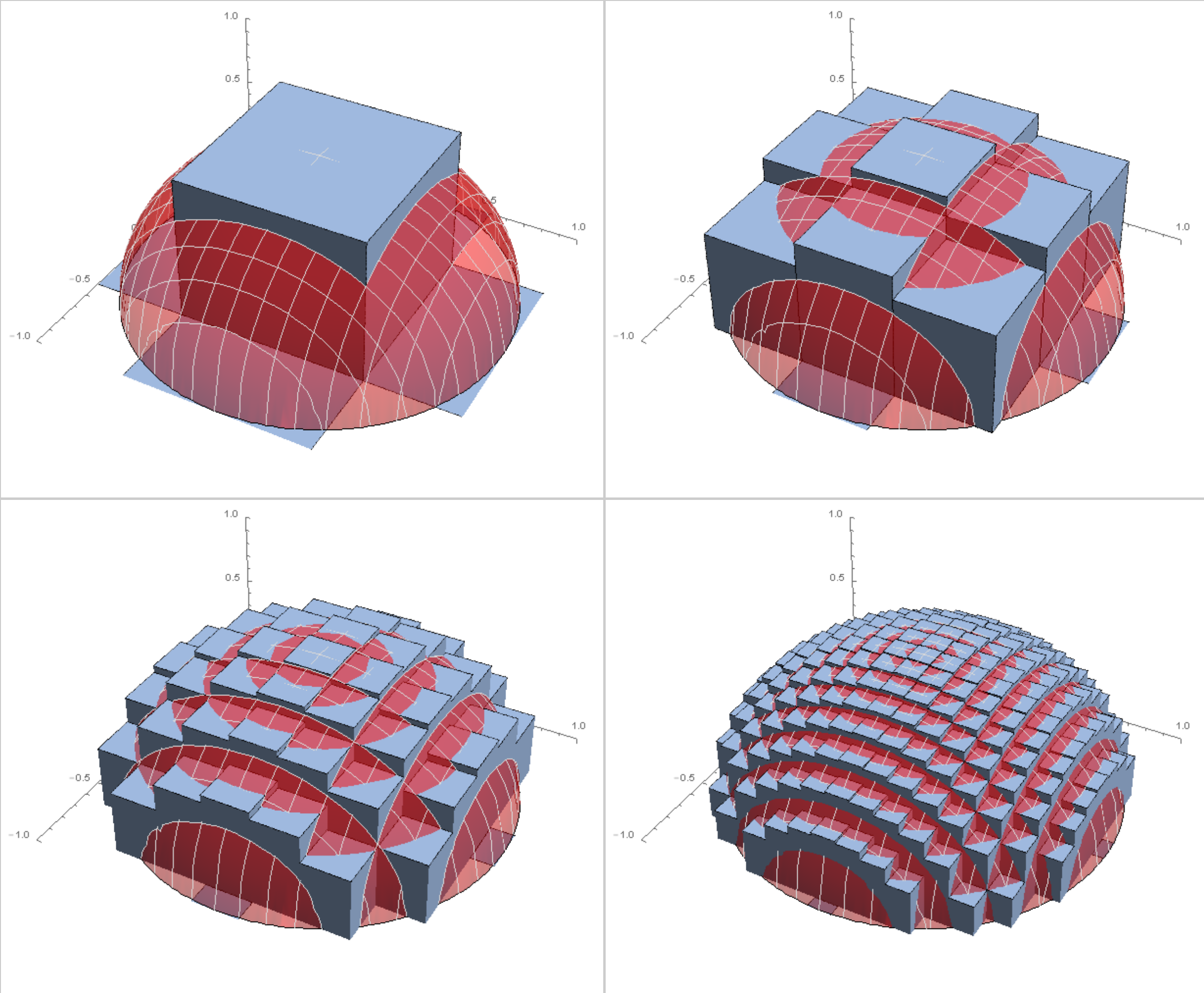
- 한 작은 사각형 R_k 내의 임의의 점 (x_k, y_k)에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

- S_n은 그래프 아래 부피의 근사값이 된다.
- 여기서 $\lim_{n\to\infty} S_n$으로 하여 극한값이 존재하면 이를 R 위에서 $f(x,y)$의 중적분double integral이라 한다.

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int\int_R f(x,y)dxdy$$

- 아래 그림처럼 그래프 아래 부피를 사각 기둥으로 근사하여 다 더함.

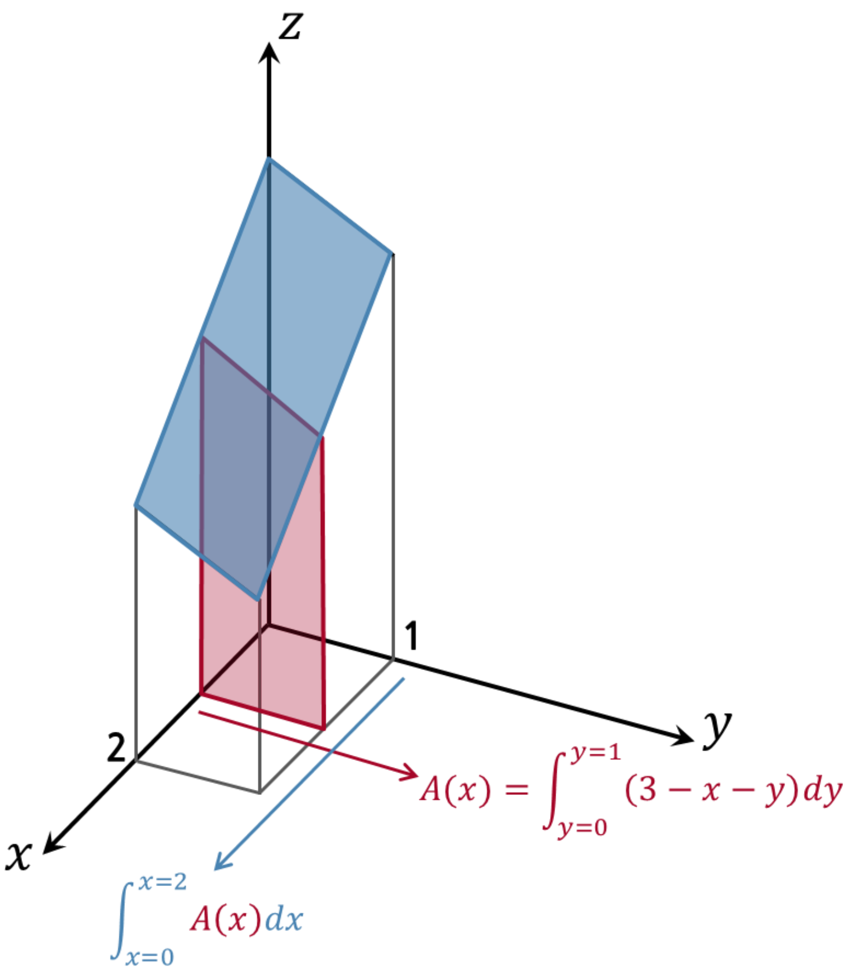


n의 크기에 따른 기둥으로 묘사된 부피[9]

- 간단한 예제[8], 실제 계산은 한 변수씩 차례로 적분해주면 된다.

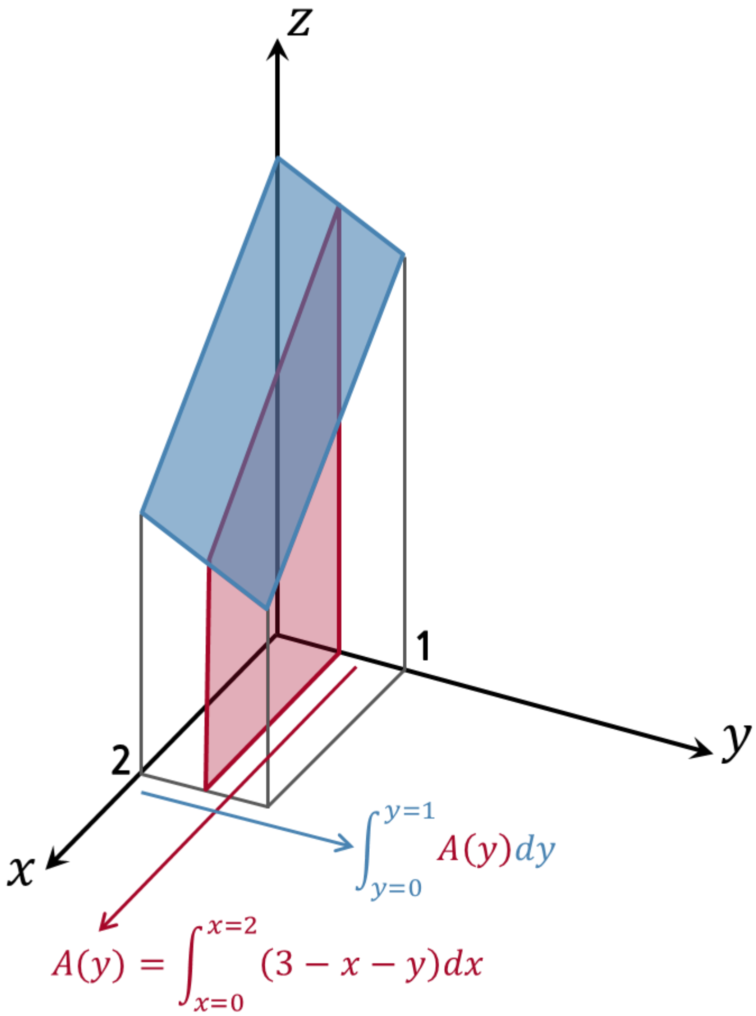
$z = 3 - x - y$를 $R : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$에서 적분

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} (3 - x - y) dy dx &= \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (3 - x - y) dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left[3y - xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{5}{2} - x \right) dx \\
&= \left[\frac{5}{2} x - \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=2} = 3
\end{aligned}$$



- 또는 순서를 바꿔서 해도 됨 (푸비니 정리)

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=2}(3-x-y)dxdy = \int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=0}^{x=2}(3-x-y)dx\right)dy$$
$$= \int_{y=0}^{y=1}\left[3x-\frac{1}{2}x^2-yx\right]_{x=0}^{x=2}dy$$
$$= \int_{y=0}^{y=1}(4-2y)\,dy$$
$$= \left[4y-y^2\right]_{y=0}^{y=1} = 3$$



In [48]:

```
x = sympy.Symbol('x')
y = sympy.Symbol('y')

sympy.integrate(3 - x - y, (x,0, 2), (y, 0, 1))
```

Out[48]:

3

야코비안jacobian

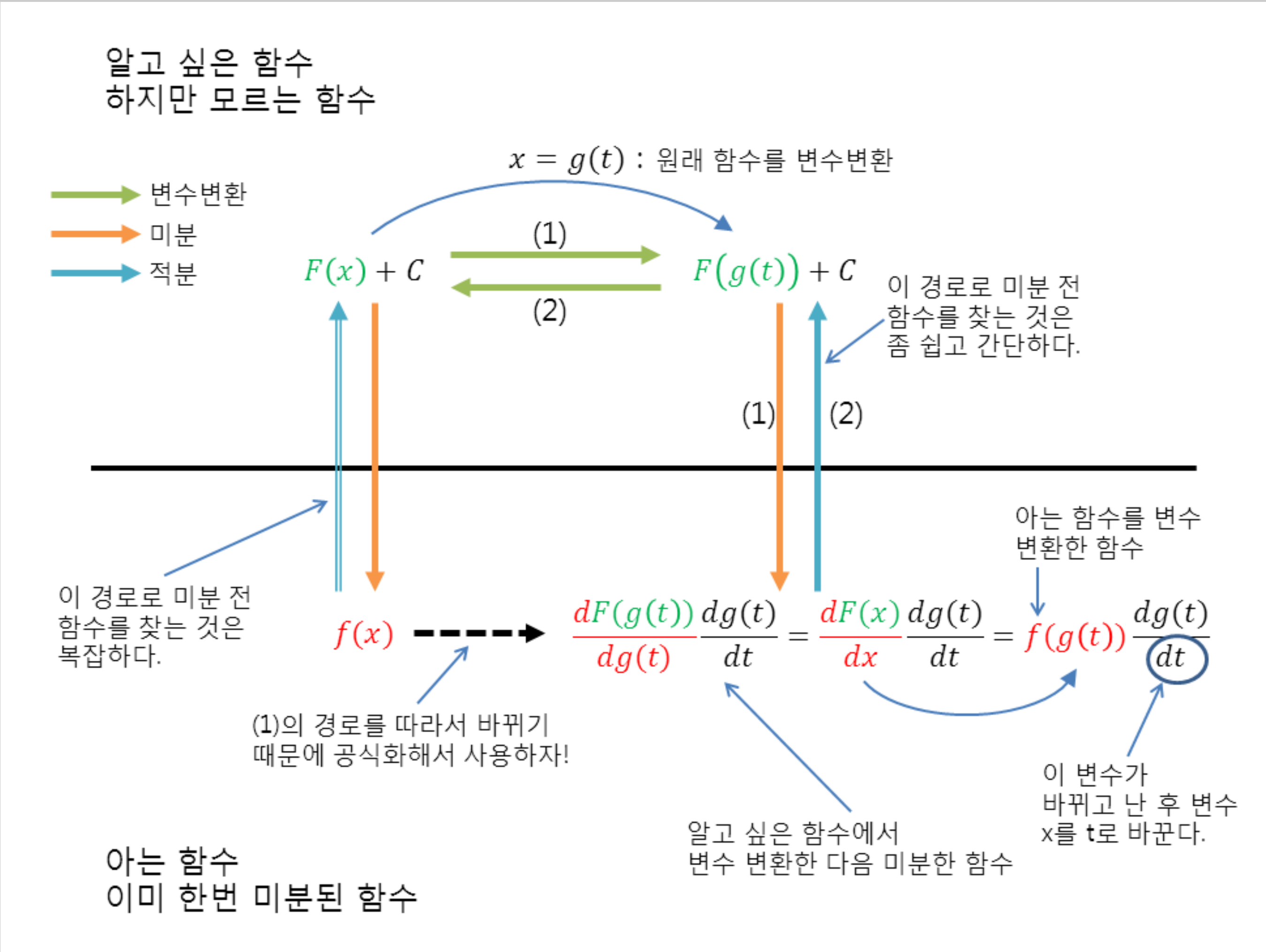
- 치환적분에서 등장한 보정항에 대한 일반화

일변수 함수에서 치환적분과 야코비안

- $x = g(t)$의 관계가 있을 때 치환적분은 다음과 같다.

$$\int f(x)dx = \int f\left(g(t)\right)\frac{dg(t)}{dt}dt \tag{1.1}$$

- 위와 같이 변수를 바꿔서 적분하는 것이 원래 적분과 왜 같은지 일변수 함수의 경우 다음 그림으로 설명

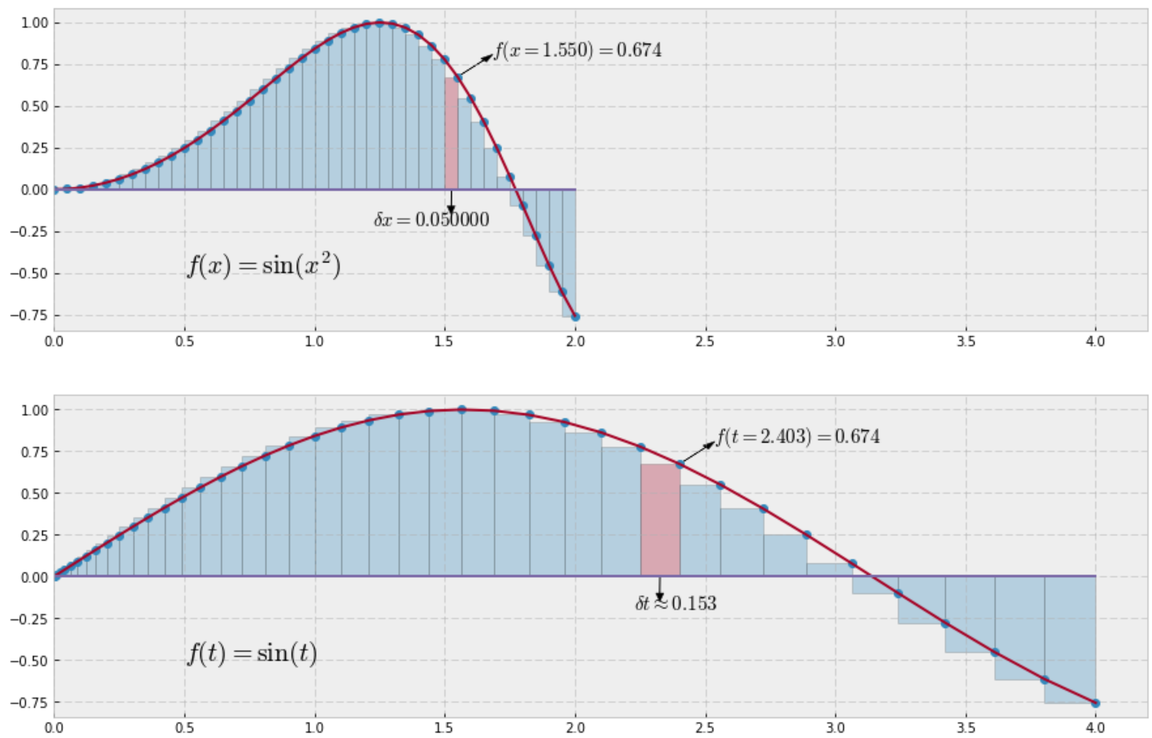


1변수 함수의 치환적분

- $f(x)$의 원시함수 $F(x)$를 구하고자할 때 그림처럼 $F(x)$를 $x = g(t)$ 관계에 의해 $F(g(t))$로 변수변환하고 이를 미분하면

$$\frac{dF\left(g(t)\right)}{dt} = \frac{dF\left(g(t)\right)}{dg(t)}\frac{dg(t)}{dt}$$

- $F(g(t))$의 미분은 원래 함수 $f(x)$를 $x = g(t)$ 관계에 의해 $f(g(t))$로 변수 변환한 것에 dx/dt를 곱한 것
- 그래서 이것을 적분하여 역으로 변수변환 $t = g^{-1}(x)$ 을 해주면 $F(x)$를 구할 수 있게 된다.
- 위 그림에서 (2)번 경로
- **변수변환한 함수 $f(g(t))$에 곱해주는 dx/dt을 야코비안이라고 한다.**
- 이 야코비안이 어떤 역할을 하기에 x에서의 적분과 t에서의 적분을 동일하게 하는가? 이를 다음 실습으로 확인




```
dx = 0.001 for calc.
int f(x)dx  numerical = 0.804776, approx. = 0.805
x_32=1.550, f[x_32]=0.674, dx=0.05, f[x_32]*dx=0.034


dt = [  2.5000e-07   7.5000e-07   1.2500e-06]...  for calc. is variable
int f(t)dt  numerical = 1.6536  , approx. = 1.652
t_32=2.403, f[t_32]=0.674, dt=0.153, f[t_32]*dx=0.103
J[31]=0.328
int f(t)¦J¦dt = 0.804
```

- 위 그림은

$$\int_0^2 \sin(x^2)dx \tag{1.3}$$

를 하기 위해 $x = g(t) = \sqrt{t}$ 로 치환하여 적분할 때 상황

- 실제 수치 적분값은 0.804776이고 4000구간으로 잘라 막대기둥의 넓이를 다 더한것이 0.805
- t로 변수를 바꿔서 적분
- $x = g(t) = \sqrt{t}$로 부터 $t = g^{-1}(x) = x^2$ 이므로 위쪽 그래프의 x을 모두 제곱해서 t로 만든다.
- x 도메인에서 일정하던 등간격이 t 도메인에서는 t값이 커질 수록 간격이 넓어지게 됨
- 선형 관계가 아니라 비선형 즉 제곱의 관계로 변환되어서 그렇다.
- **이렇게 변환된 t는 x가 모두 제곱되어 있는 것이므로 이를 $\sin(t)$에 넣어서 함수값을 계산하면 원래 $\sin(x^2)$와 동일한 함수값을 얻게 됨.**

- 두 경우 다 sin함수에 x를 제곱해서 입력했기 때문
- 다만 t 도메인에서 계산한 함수값은 가로축 위치가 달라져서 t 도메인에서 $\sin(t)$함수는 $\sin(x^2)$를 옆으로 잡아늘린 모양이 된다.
- 구체적인 예 : 32번째 x, x_{32} = 1.550, $f(x_{32})$= 0.674, 1.550이 제곱된 t =2.403에 대해서도 함수값은 여전히 $f(t = 2.403)$ = 0.674인 것을 알 수 있다.

- 이제 두 그래프의 붉은색 기둥을 보면 **높이는 같은데 밑변이 달라서 넓이가 서로 다르다.**
- 넓이를 계산해서 나누면 위 그래프의 붉은색 원기둥은 아래 그래프 붉은색 원기둥 넓이의 약 0.328배
- 각 기둥마다 대응되는 기둥의 넓이비가 모두 존재
- 따라서 그 비율을 $\sin(t)$의 각 기둥에 곱한 다음 다 더해주면 원래의 적분과 동일하게 된다는 것을 그림으로부터 알 수 있다.
- 그냥 다 더하면 1.652라는 값이 되어 원래 적분값보다 많이 커진다.
- 이때 넓이의 비라는 것은 대응하는 기둥의 높이는 모두 같으므로 결국 밑변의 길이비
- 이 비는 $\delta x/\delta t$로 표시
- **이 미소변량의 길이비가 야코비안이다.**
- 다시말해 야코비안은 작은 조각을 모두 더해서 적분할때 어떤 한 조각이 변수변환된 스페이스에서 얼마나 변했는지를 알려주는 양이다.
- 변수변환의 관계가 선형이라면 기둥의 넓이비는 일괄적으로 2배 또는 3배처럼 상수배가 되지만 비선형일 경우 변환된 변수에 따라 그 값이 달라진다.
- 위 그래프에서 등간격으로 잘린 δx가 t 도메인으로 변환되면서 점점 더 넓어지는 현상을 통해 이를 이해할 수 있다.
- 예시의 경우 야코비안은 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2\sqrt{t}} \tag{1.4}$$

- 위 데모 프로그램에서 각 기둥의 야코비안을 기둥의 넓이비로 구하였는데 식(1.4)를 이용해서 붉은색 기둥의 야코비안을 직접 구하기 위해서는 기둥 밑변의 중점을 구해 위 식에 대입

In [22]:

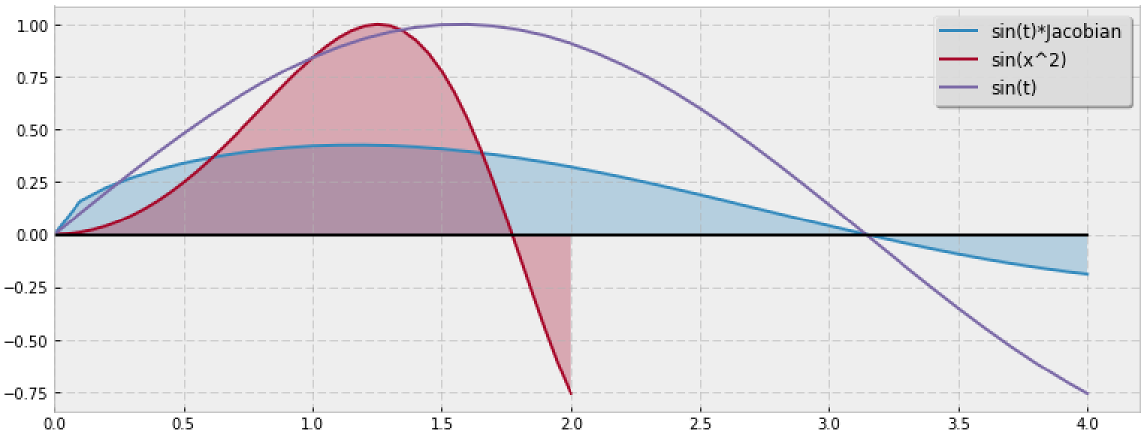
```
print("{:.3f}".format(1/(2*np.sqrt((Txg[31]+Txg[30])/2))))
```

```
0.328
```

- 기둥의 넓이비와 동일함을 알 수 있다. 그래서 전체 적분은 다음과 같다.

$$\int_0^2 \sin(x^2)dx = \int_0^4 \sin(t)\frac{1}{2\sqrt{t}}dt \tag{1.5}$$

- 전체적으로 보면 $\sin(t)$에 야코비안이 곱해진 또 다른 함수를 적분



다변수 함수에서 치환적분과 야코비안†

- 많은 문서에서 설명하는 방법이 조금씩 달라서 많이 혼란스러움.
- 용어부터 정리

- **야코비안 또는 야코비안 행렬**

  한 변수를 다른 변수로 매핑하는 맵(함수)를 독립변수로 미분한 행렬 즉, 다변수 벡터함수를 다변수로 미분한 것으로 행렬형태로 나타나므로 야코비안 행렬 또는 그냥 야코비안 이라고 함. J로 표시

- **야코비안 행렬식**jacobian determinant

  야코비안 행렬의 행렬식으로 기하학적으로 야코비안 행렬의 각 칼럼 벡터로 이루어진 도형의 넓이를 의미함. 문헌에 따라 이것을 야코비안이라고 지칭하기도 함. 이 행렬식의 값을 J로 표시하기도 함.

- $|J|$ 야코비안 행렬식의 절대값, 정확하게는 $|\det(J)|$로 써야하나 위 정의처럼 야코비안 행렬식을 그냥 야코비안으로 부르고 J라고 쓰는 경우는 야코비안 행렬식의 절대값을 의미하는 표시로 사용할 수 있음.

- 야코비안의 용어에 대한 위키피디아의 내용[10]

> In vector calculus, the Jacobian matrix (/dʒɪˈkoʊbiən/, /jɪˈkoʊbiən/) is the matrix of all first-order partial derivatives of a vector-valued function. When the matrix is a square matrix, both the matrix and its determinant are referred to as the Jacobian in literature.

- 적분할 함수와 변수변환의 관계를 아래와 같이 정의하고 실습을 통해 확인

$$f(x_1, x_2) = f(\mathbf{x}) = f(x_1^2 + x_2^2) \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(u_1, u_2) = u_1 \cos(u_2) \\ x_2 &= g_2(u_1, u_2) = u_1 \sin(u_2) \end{aligned} \tag{1.6}$$

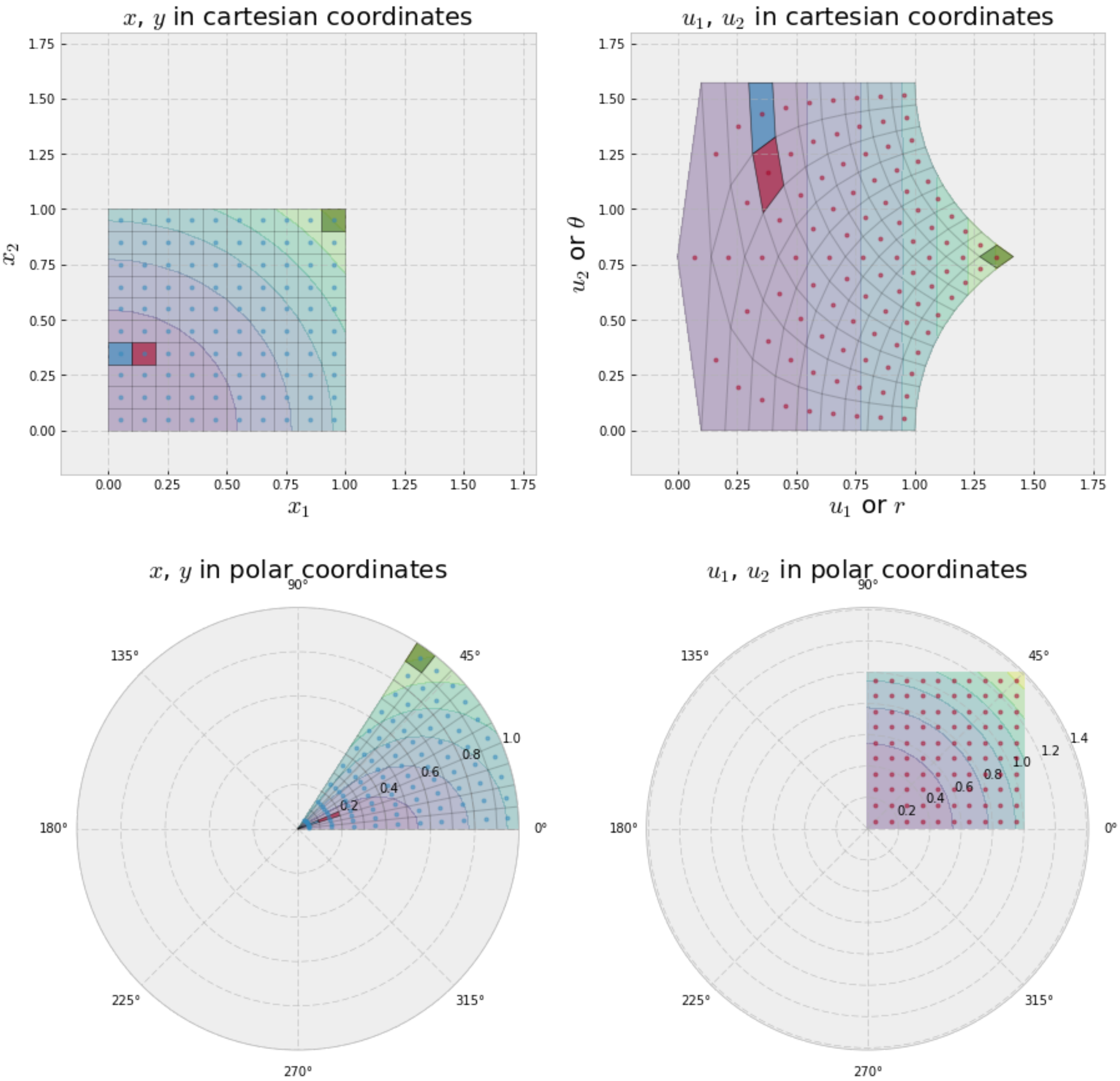
- 위 예는 직교좌표계와 극좌표계의 변환식인데 변수를 하나의 벡터변수로 쓰기위해 x, u로 표시
- 정의에 의해 변수변환의 관계를 나타내는 함수 $\mathbf{g}(\mathbf{u})$는 다변수 벡터함수multi valued vector function

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \begin{cases} g_1(\mathbf{u}) = u_1 \cos(u_2) \\ g_2(\mathbf{u}) = u_1 \sin(u_2) \end{cases} \tag{1.7}$$

- 일변수함수에서 알게된 치환적분의 공식대로 하면
- "변수를 바꾸고 변수변환의 관계식을 변환 후의 변수로 미분한 항을 곱한다"
- 다변수 함수의 경우 치환적분은 다음과 같이 되어야 할 것같다.

$$
\begin{aligned}
&\int\int_D f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 \\
&= \int\int_{D^*} f(g_1(u_1, u_2), g_2(u_1, u_2)) \frac{\partial\, \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}} du_1 du_2
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

- 여기서 $\dfrac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$은 벡터함수를 벡터변수로 미분하는 꼴이되어 결과는 행렬이 된다. [11]
- 위 식은 성립하지 않는다.
- 일변수함수에서 사용했던 논리는 넓이를 구하기 위한 밑변의 길이비의 변화를 알아내는 것
- 이를 기하학적으로 2변수 함수에 그대로 적용하면 부피를 구하기 위한 밑면의 넓이비를 알아내야 함.
- 일변수 함수처럼 대수적으로 이해하기 힘들고 기하학적 해석을 통해 미소면적^infinitesimal area^넓이비를 다시 구함.
- 이를 위해 우선 그림부터 그려서 상황을 알아보자.



- 위 그림에서
- 색깔띠 : 함수값을 색깔로 나타낸것, 그리드 영역: 적분의 영역을 나타냄, 점:그 영역의 중간점
- 좌표 변환이 어떻게 되는지 확인하기 위해 3개의 영역의 색깔을 다르게 나타냄
- **좌상단** : $f(\mathbf{x})$를 x_1x_2 평면에 그대로 그린것으로 적분의 영역은 $[0,1]\times[0,1]$
- **우상단** : 적분 영역 $[0,1]\times[0,1]$을 작은 정사각형으로 분할한 후 그 영역의 격자점의 u_1, u_2값(쉽게 생각해서 각점의 r, θ값)을 계산하여 직교좌표 u_1u_2 평면에 그린것
- **좌하단** : x_1x_2 평면의 값을 변환없이 그대로 극좌표계에다 그린것, x_1은 r로 x_2는 θ로 매핑함.
- **우하단** : 변환된 u_1, u_2값을 극좌표계에다 그린것 실제 변수변환하여 적분하는 상황을 나타낸 그림
- 이제 정적분을 하는 상황을 생각해보자.
- 기본적으로 좌상단의 경우 100개의 작은 정사각형 영역에서 점으로 나타낸 중간값에서의 $f(\mathbf{x})$값을 구하여 해당 정사격형의 넓이에 곱하여 다 더하면 된다.
- 이 값을 V_1이라 하자.
- $\mathbf{g}(\mathbf{u})$에 의해 적절해 변환된 $\mathbf{u}$를 u_1u_2 평면에 그리게 되면 이 정사각형 영역이 우상단 그림처럼 왜곡된다.
- 이 때 격자점에서 함수값 $f(\mathbf{u})$는 변하지 않으므로 왜곡된 폴리곤의 넓이에 그 함수값을 곱해서 다 다한 V_2는 V_1과 당연히 같지 않다.
- 이 값을 서로 같게 해주는 것이 목적인데 일변수 때의 논리를 그대로 적용하면 각각 대응되는 멸면의 넓이차를 보정해주면 된다.
- 그렇게 보정해주는 역할을 하는 것이 야코비안
- 여기까지 논리는 일변수때와 동일
- 그림에서 보면 녹색 정사각형은 왜곡이 적고 파란색과 붉은색 정사격형은 왜곡이 심해지는 것을 알 수 있다.
- 일변수때도 아래 밑변의 길이의 변화가 오른쪽으로 갈 수록 커지는 것을 확인한바 있다.
- 이제 이 두 밑면의 넓이에 어떤 관계가 있는지 밝히기 전에 수치적으로 두 적분이 동일한지 실험해보자.

```
좌상단 그림의 격자의 넓이와 중점에서의 함수값 f(x1, x2)를 곱해서 다 더한 값 = 0.6650
우상단 폴리곤의 넓이와 좌상단 격자와의 넓이비를 폴리곤 넓이에 곱하고 그것을 중점에서
의 함수값 f(u1, u2)과 곱해서 다 더한 값 = 0.6650
```

```
파란 찌그러진 사각형:0.028329, 정사각형과의 넓이비 Ax/Au:0.352993
붉은 찌그러진 사각형:0.026138, 정사각형과의 넓이비 Ax/Au:0.382591
녹색 찌그러진 사각형:0.007436, 정사각형과의 넓이비 Ax/Au:1.344743
```

- 밑면의 넓이비를 보정하고 이를 함수값과 곱한 부피를 다 더하면 결과는 같다.
- 각 사각형의 넓이비는 다음과 같다. 수치적으로 구한 이 넓이비가 계산된 야코비안과 같은지 나중에 다시 확인함.

In [26]:

```
np.set_printoptions(threshold=1000, linewidth =150)
# (0,0)의 값이 그림상 좌하단 사각형
print(J)
```

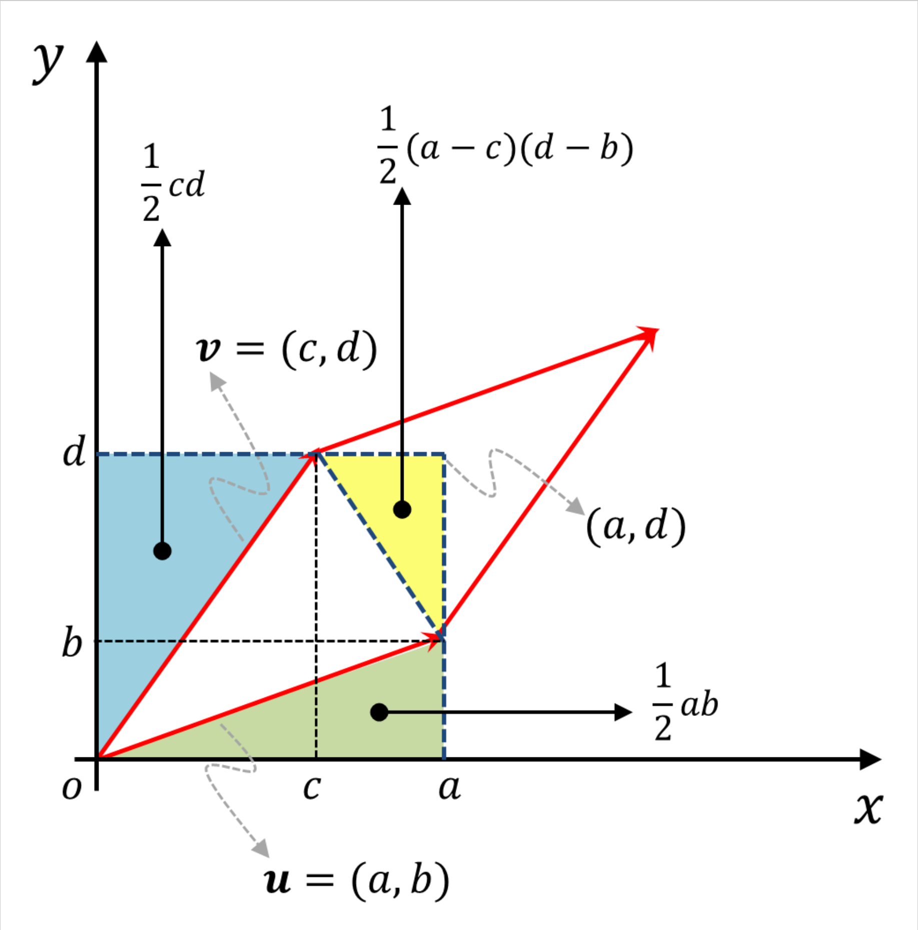
```
[[ 0.09   0.161  0.2549 0.353  0.4521 0.5517 0.6514 0.7512 0.851  0.9509]
 [ 0.161  0.2198 0.2957 0.3826 0.4751 0.5703 0.6671 0.7647 0.8629 0.9615]
 [ 0.2549 0.2957 0.3582 0.4335 0.5169 0.6054 0.6972 0.791  0.8862 0.9824]
 [ 0.353  0.3826 0.4335 0.4983 0.5728 0.6539 0.7396 0.8286 0.9199 1.0129]
 [ 0.4521 0.4751 0.5169 0.5728 0.639  0.7129 0.7923 0.876  0.9628 1.052 ]
 [ 0.5517 0.5703 0.6054 0.6539 0.7129 0.78   0.8534 0.9316 1.0137 1.0988]
 [ 0.6514 0.6671 0.6972 0.7396 0.7923 0.8534 0.921  0.9941 1.0715 1.1523]
 [ 0.7512 0.7647 0.791  0.8286 0.876  0.9316 0.9941 1.0622 1.135  1.2117]
 [ 0.851  0.8629 0.8862 0.9199 0.9628 1.0137 1.0715 1.135  1.2035 1.276 ]
 [ 0.9509 0.9615 0.9824 1.0129 1.052  1.0988 1.1523 1.2117 1.276  1.3447]]
```

행렬식의 기하학적 의미

- 위의 넓이비를 적절히 만들어내는 야코비안 행렬을 유도하기전에 행렬의 행렬식이 가지는 기하학적인 의미에 대해 알아본다.[12]
- 2차원 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$를 열로 가지는 행렬 $\mathbf{M}$이 있을 때

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

- 각 열을 두 변으로 하는 평행사변형을 생각



행렬식의 기하학적 의미

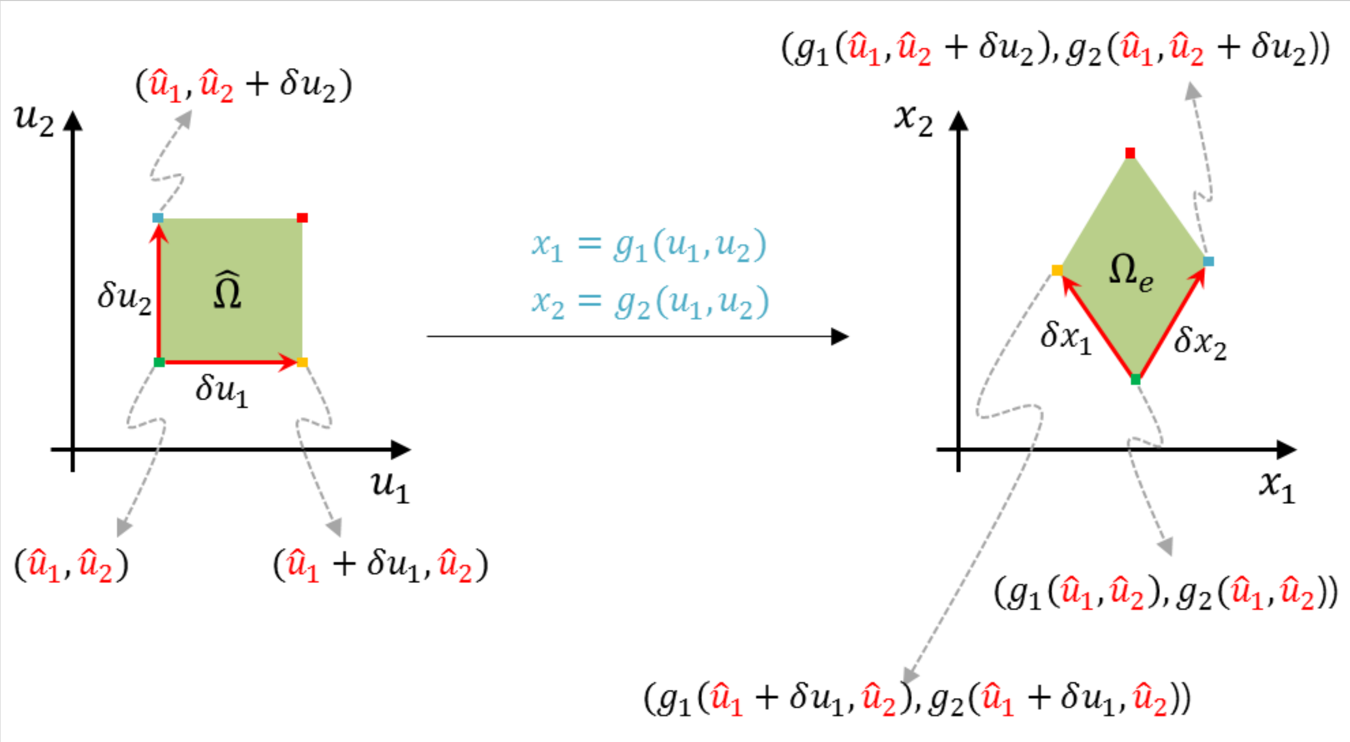
- 위 그림처럼 구성된 평행사변형의 넓이의 반은 사각형 o, a, (a,d), d의 넓이에서 초록, 노랑, 파랑 삼각형의 넓이를 뺀 것
- 따라서 평행사변형 넓이의 반은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&ad - \frac{1}{2}cd - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}(a-c)(d-b) \\
&= ad - \frac{1}{2}cd - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}(ad - ab - cd + cb) \\
&= ad - \frac{1}{2}cd - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd - \frac{1}{2}cb \\
&= \frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}cb \\
&= \frac{1}{2}(ad - bc)
\end{aligned}
$$

- 위 결과를 2배하면 평행사변형의 넓이가 되고 이는 행렬 $\mathbf{M}$의 행렬식과 일치
- 이 결과는 평행사변형을 이루는 두 벡터를 열이 아니라 행으로 가지는 행렬에 대해서도 성립

변수변환에 있어서 미소면적의 변화

- 문제가 정의된 좌표계가 변환 후 좌표계, 변수를 변환해서 얻게 되는 좌표계가 정규좌표계
- $u_1 u_2$ 평면에서의 미소 정사각형이 $x_1 x_2$ 평면에서 어떻게 변화하는지 알아본다.
- 문제는 $x_1 x_2$ 좌표계에서 $u_1 u_2$ 좌표계로 변환시키지만 그 변환에 따른 넓이 변화의 관계를 파악하기 위해서는 거꾸로 $u_1 u_2$ 좌표계에서 $x_1 x_2$ 좌표계로의 변환을 고려
- 그렇게 하지 않고 $x_1 x_2$ 좌표계의 미소 정사각형이 $u_1 u_2$ 좌표계에서 어떻게 변하는지를 고려하게 되면 결과적으로 야코비안 행렬의 역행렬을 구하게 됨
- 어차피 넓이의 비를 알아보려는 것이어서 어느쪽으로 해도 상관은 없음
- 여기서는 원래 야코비안을 유도하기 위해 전자의 경우를 고려



일차변환에 의한 사각형의 상

- 위 그림을 보면 왼쪽이 $u_1 u_2$ 좌표계에서의 미소 정사각형, 마스터 엘리먼트master element $\hat{\Omega}$[13]
- 주어진 사상 $x_1 = g_1(u_1, u_2), x_2 = g_2(u_1, u_2)$에 의해 변환된 좌표계에서 마스터 엘리먼트가 찌그러진 마름모꼴로 변환되는데 이를 Ω_e로 두자.
- 각 꼭지점의 색깔로 변환 과정을 알 수 있음
- 왼쪽에서 오른쪽으로 변환을 생각
- $u_1 u_2$ 좌표계에서 초록색 꼭지점의 좌표를 $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$라 두면 노란색 꼭지점의 좌표는 $(\hat{u}_1 + \delta u_1, \hat{u}_2)$, 파란색 꼭지점의 좌표는 $(\hat{u}_1, \hat{u}_2 + \delta u_2)$
- 이 점들이 사상 $\mathbf{g}(\mathbf{u})$에 의해 변환된 좌표는 순서대로 $(g_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2), g_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2))$, $(g_1(\hat{u}_1 + \delta u_1, \hat{u}_2), g_2(\hat{u}_1 + \delta u_1, \hat{u}_2))$, $(g_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2 + \delta u_2), g_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2 + \delta u_2))$
- 초록색 꼭지점을 $(\hat{x}_1 = g_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2), \hat{x}_2 = g_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2))$라 두면

- 노란색 점의 좌표는 δu_1 에 의해 함수 g_1 과 g_2 가 변화한 양만큼을 초록색 꼭지점의 좌표에 더해주면 되므로

$$\text{yellow point} = \left(\hat{x}_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\delta u_2, \hat{x}_2 + \frac{\partial g_2}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\delta u_2\right) \tag{1.9}$$

- 여기서 $\delta u_2 = 0$ 이므로 결과적으로

$$\text{yellow point} = \left(\hat{x}_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\delta u_1 \ , \ \hat{x}_2 + \frac{\partial g_2}{\partial u_1}\delta u_1\right) \tag{1.10}$$

- 같은 논리로

$$\text{blue point} = \left(\hat{x}_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\delta u_2 \ , \ \hat{x}_2 + \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\delta u_2\right) \tag{1.11}$$

- 각 포인트의 좌표를 구했으므로 Ω_e 의 넓이를 구한다.
- 초록점에서 노란점으로의 벡터를 $\mathbf{v}_y$, 초록점에서 파란점으로의 벡터를 $\mathbf{v}_b$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_y &= \left(\hat{x}_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\delta u_1 \ , \ \hat{x}_2 + \frac{\partial g_2}{\partial u_1}\delta u_1\right) - (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}\delta u_1 \ , \ \frac{\partial g_2}{\partial u_1}\delta u_1\right) \\ \mathbf{v}_b &= \left(\hat{x}_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\delta u_2 \ , \ \hat{x}_2 + \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\delta u_2\right) - (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_2}\delta u_2 \ , \ \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\delta u_2\right)\end{aligned} \tag{1.12}$$

- 이 두 벡터를 열로 하는 행렬의 행렬식이 Ω_e 의 넓이

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\delta u_1 & \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\delta u_2 \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1}\delta u_1 & \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\delta u_2 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

- Ω_e 의 넓이를 $S(\Omega_e)$ 로 표기하기로 하고 행렬식을 구해 보면

$$\begin{aligned} S(\Omega_e) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\delta u_1 & \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\delta u_2 \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1}\delta u_1 & \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\delta u_2 \end{bmatrix}\right) &= \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\delta u_1 \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\delta u_2 - \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\delta u_2 \frac{\partial g_2}{\partial u_1}\delta u_1 \\ &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}\frac{\partial g_2}{\partial u_2} - \frac{\partial g_2}{\partial u_1}\frac{\partial g_1}{\partial u_2}\right)\delta u_1 \delta u_2 \\ &= \det\underbrace{\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}\right)}_{\text{Jacobian Matrix, J}}\delta u_1 \delta u_2 \end{aligned} \tag{1.14}$$

- 정리하면

$$S(\Omega_e) = \mid \det(J) \mid \delta u_1 \delta u_2 \tag{1.15}$$

- 여기서 J는 야코비안 행렬로 다음과 같으며 이는 변환 사상 $\mathbf{g}$를 $\mathbf{u}$로 미분한 행렬

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial u_2}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial u_2}\end{bmatrix}=\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \tag{1.16}$$

- 위 식(1.15)의 의미 : u_1u_2 평면에서 정사각형 넓이 $\delta u_1 \delta u_2$는 x_1x_2 평면에서 $S(\Omega_e)$로 왜곡되는데 그때 두 도형의 넓이 비가 $|\det(J)|$
- 한가지 더 생각해야 할 것은 변환의 비선형성이다.
- 변환에 따라 정사각형이 평행사변형꼴로 왜곡되지 않는것이 일반적(변환이 선형변환일 때만 평행사변형으로 변환)
- 정사각형의 크기를 매우 작게해서 어떤점 근방에서 변환의 선형근사를 생각한다면 평행사변형으로 왜곡된다고 볼 수 있다.

- 이야기를 계속하기 위해 식(1.15)를 다시 쓰면

$$S(\Omega_e)=|\det(J)|\, S\left(\hat{\Omega}\right) \tag{1.17}$$

- 여기서 명백하게 $S(\Omega_e)\neq S(\hat{\Omega})$이다.
- 이렇게 서로 다른 영역의 넓이를 $|\det(J)|$가 같게 해준다는 의미인데 여기서 좌변, 즉 $S(\Omega_e)$를 미소면적 분할에 대한 리만합으로 표현하면

$$S(\Omega_e)=\int\int_{\Omega_e} dx_1dx_2 \tag{1.18}$$

- 우변 역시 미소면적 분할에 대한 리만합으로 써보면

$$|\det(J)|\, S\left(\hat{\Omega}\right)=\int\int_{\hat{\Omega}} |\det(J)|\, du_1du_2 \tag{1.19}$$

- 따라서 u_1u_2 평면에서 임의의 영역 $\hat{\Omega}$와 이 영역이 변환된 x_1x_2 평면에서 영역 Ω_e에 대해 각각의 면적 간에 다음과 같이 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int\int_{\Omega_e} dx_1dx_2=\int\int_{\hat{\Omega}}\left|\det\left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right)\right| du_1du_2 \tag{1.20}$$

- 이제 식(1.20)으로 부터 두 영역 위에서 정의된 다변수 함수의 적분 관계를 얻을 수 있다.

$$\int\int_{\Omega_e} f(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int\int_{\hat{\Omega}} f(g_1(u_1,u_2),g_2(u_1,u_2))\left|\det\left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right)\right| du_1du_2 \tag{1.21}$$

- 즉, 식(1.20)에 의해 면적이 동일하게 되는 두 적분식의 양변에 동일한 함수값을 곱해서 적분하니 결과는 당연히 같다.
- 각 영역에서의 함수값 $f(x_1,x_2)$와 $f(g_1(u_1,u_2),g_2(u_1,u_2))$는 같다는 것을 앞서 수치적으로 확인한바 있다.
- 이 식을 다른 표현으로 다음과 같이 쓸 수 도 있다.

$$\int\int_{\Omega_e} f(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int\int_{\hat{\Omega}} f(g_1(u_1,u_2),g_2(u_1,u_2))\,|J|\,du_1du_2 \tag{1.22}$$

$$
\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega_e} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\
&\int\int_{\hat{\Omega}} f(g_1(u_1, u_2), g_2(u_1, u_2)) \left| \det \left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right) \right| du_1 du_2
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

- 식(1.22)같은 경우는 J를 이미 야코비안 행렬식으로 표기한 경우이다.
- 이 식이 바로 야코비안 행렬식이 등장하는 다변수함수에서 보게 되는 치환적분 식이다.

- 예제의 야코비안 행렬식의 값

$$
J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1 \cos(u_2)}{\partial u_1} & \dfrac{\partial u_1 \cos(u_2)}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial u_1 \sin(u_2)}{\partial u_1} & \dfrac{\partial u_1 \sin(u_2)}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(u_2) & -u_1 sin(u_2) \\ \sin(u_2) & u_1 \cos(u_2) \end{bmatrix} \tag{1.24}
$$

- 행렬식

$$
\begin{aligned}
\det(J) &= \det \left(\begin{bmatrix} \cos(u_2) & -u_1 \sin(u_2) \\ \sin(u_2) & u_1 \cos(u_2) \end{bmatrix} \right) \\
&= u_1 \cos^2(u_2) + u_1 \sin^2(u_2) = u_1(\cos^2(u_2) + \sin^2(u_2)) = u_1
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

- 위 그래프에서 좌상단 그래프의 정사각형이 우상단 그래프의 폴리곤으로 왜곡될때 대응되는 각 도형의 넓이비가 u_1
- 정말 그런가 수치적으로 구해진 넓이비와 u_1의 값을 비교

In [28]:

```
print('수치적으로 구한 두 도형의 넓이비')
print(J)
print('\n')
print('왜곡된 도형의 중점에서 u_1 값')
print(uu1c)
```

```
수치적으로 구한 두 도형의 넓이비
[[ 0.09   0.161  0.2549 0.353  0.4521 0.5517 0.6514 0.7512 0.851  0.9509]
 [ 0.161  0.2198 0.2957 0.3826 0.4751 0.5703 0.6671 0.7647 0.8629 0.9615]
 [ 0.2549 0.2957 0.3582 0.4335 0.5169 0.6054 0.6972 0.791  0.8862 0.9824]
 [ 0.353  0.3826 0.4335 0.4983 0.5728 0.6539 0.7396 0.8286 0.9199 1.0129]
 [ 0.4521 0.4751 0.5169 0.5728 0.639  0.7129 0.7923 0.876  0.9628 1.052 ]
 [ 0.5517 0.5703 0.6054 0.6539 0.7129 0.78   0.8534 0.9316 1.0137 1.0988]
 [ 0.6514 0.6671 0.6972 0.7396 0.7923 0.8534 0.921  0.9941 1.0715 1.1523]
 [ 0.7512 0.7647 0.791  0.8286 0.876  0.9316 0.9941 1.0622 1.135  1.2117]
 [ 0.851  0.8629 0.8862 0.9199 0.9628 1.0137 1.0715 1.135  1.2035 1.276 ]
 [ 0.9509 0.9615 0.9824 1.0129 1.052  1.0988 1.1523 1.2117 1.276  1.3447]]


왜곡된 도형의 중점에서 u_1 값
[[ 0.0707 0.1581 0.255  0.3536 0.4528 0.5523 0.6519 0.7517 0.8515 0.9513]
 [ 0.1581 0.2121 0.2915 0.3808 0.4743 0.5701 0.6671 0.7649 0.8631 0.9618]
 [ 0.255  0.2915 0.3536 0.4301 0.5148 0.6042 0.6964 0.7906 0.886  0.9823]
 [ 0.3536 0.3808 0.4301 0.495  0.5701 0.6519 0.7382 0.8276 0.9192 1.0124]
 [ 0.4528 0.4743 0.5148 0.5701 0.6364 0.7106 0.7906 0.8746 0.9618 1.0512]
 [ 0.5523 0.5701 0.6042 0.6519 0.7106 0.7778 0.8515 0.9301 1.0124 1.0977]
 [ 0.6519 0.6671 0.6964 0.7382 0.7906 0.8515 0.9192 0.9925 1.07   1.1511]
 [ 0.7517 0.7649 0.7906 0.8276 0.8746 0.9301 0.9925 1.0607 1.1336 1.2104]
 [ 0.8515 0.8631 0.886  0.9192 0.9618 1.0124 1.07   1.1336 1.2021 1.2748]
 [ 0.9513 0.9618 0.9823 1.0124 1.0512 1.0977 1.1511 1.2104 1.2748 1.3435]]
```

- 실제 넓이비가 야코비안 행렬식 u_1값과 비슷함을 수치적인 실험으로도 확인
- 2변수 이상에서도 차원이 하나 증가할 뿐 논리는 이와 동일

가우스적분

- 정규분포의 정규화 상수를 이해하기 위해 필요
- 야코비안을 알기 때문에 이제 적분할 수 있다.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

를 적분하기 위해 제곱을 해서 적분을 하면...

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

- 극좌표로 변경하기 위해 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$로 두면 $r^2 = x^2 + y^2$ 이고
- 야코비안은

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \dfrac{d(r\cos\theta)}{dr} & \dfrac{d(r\cos\theta)}{d\theta} \\ \dfrac{d(r\sin\theta)}{dr} & \dfrac{d(r\sin\theta)}{d\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \\ &= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \\ &= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r \end{aligned}$$

이 되고 다음처럼 치환적분할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r \int_{0}^{2\pi} d\theta dr \\ &= 2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r dr \\ &= 2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-u} \sqrt{u} \frac{dr}{du} du \qquad \because r = \sqrt{u} \\ &= 2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-u} \sqrt{u} \frac{1}{2\sqrt{u}} du \\ &= 2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-u} \frac{1}{2} du \\ &= \pi \int_{0}^{\infty} e^{-u} du \\ &= \pi \left[-e^{-u}\right]_{0}^{\infty} \\ &= \pi\left[0 - (-1)\right] = \pi \\ \therefore\ I &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

- 상수가 곱해진 경우, 동일한 과정으로 하고 $r = \sqrt{u/a}$ 로 치환하면 됨

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

In [47]:

```
from sympy import oo

x = sympy.Symbol('x')
y = sympy.Symbol('y')

sympy.integrate(sympy.E**(-x**2), (x, -oo, oo))
```

Out[47]:

$\sqrt{\pi}$

이것만은 기억하기

- 일변수 실함수 : 지수함수, 로그의 의미와 로그함수
- 다변수 실함수 : 모양과 의미
- 합성함수 미분, 미분의 연쇄법칙
- 야코비안의 대강의 의미

참고문헌

1. Scalars and Vectors, http://www.physicsclassroom.com/class/1DKin/Lesson-1/Scalars-and-Vectors (http://www.physicsclassroom.com/class/1DKin/Lesson-1/Scalars-and-Vectors)
2. https://ko.wikipedia.org/wiki/함수 (https://ko.wikipedia.org/wiki/함수)
3. 벡터 미적분학, 곽도영,서동엽,임진환,진교택, 경문사
4. https://ko.wikipedia.org/wiki/음함수와_양함수 (https://ko.wikipedia.org/wiki/음함수와_양함수)
5. Surface Modeling for CAD/CAM - Advanced in Industrial Engineering, Byoung K. Choi, Elsevier
6. Unit normal vector of a surface, https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions/flux-in-3d-articles/a/unit-normal-vector-of-a-surface (https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions/flux-in-3d-articles/a/unit-normal-vector-of-a-surface)
7. Derivative#Notation_(details): https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative (https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative)
8. Thomas' Calculus, Giordano, Weir, Finney, Pearson
9. Riemann 합의 3D 시각화, https://www.wolfram.com/mathematica/new-in-8/new-and-improved-scientific-and-information-visualization/visualize-3d-riemann-sums.html (https://www.wolfram.com/mathematica/new-in-8/new-and-improved-scientific-and-information-visualization/visualize-3d-riemann-sums.html)
10. Jacobian matrix and determinant, https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant (https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant)
11. 벡터, 행렬에 대한 미분Derivatives for vectors and matrices, https://metamath1.github.io/2018/01/02/matrix-derivatives.html (https://metamath1.github.io/2018/01/02/matrix-derivatives.html)
12. 행렬식의 기하학적 의미 , https://wikidocs.net/4049 (https://wikidocs.net/4049)
13. Finite Elements vol.1 An Introduction, Eric B. Becker, Graham F. Carey, J. Tinsley Oden, Prentice-Hall
14. The Jacobian matrix, Khan Academy, https://youtu.be/bohL918kXQk?t=1m15s (https://youtu.be/bohL918kXQk?t=1m15s)