# 1. 함수, 미적분Function, Calculus - 2/3

## 미분

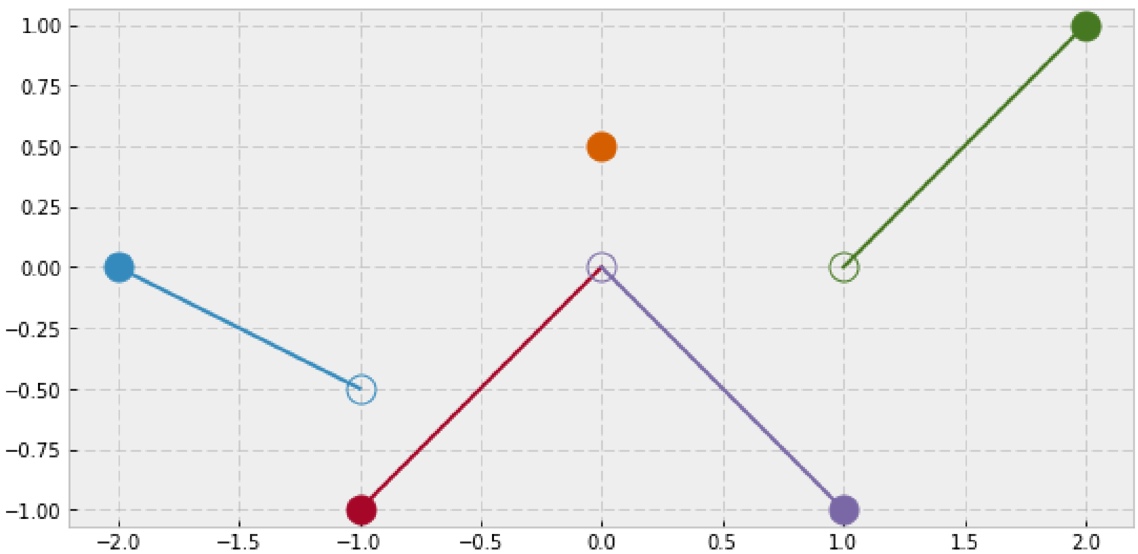
- 선형 회귀의 핵심
- 결정적 최적화에 기반한 알고리즘의 근간
- 딥러닝 또는 뉴럴네트워크의 역전파 알고리즘은 결국 미분을 위한 것
- 미분의 의미와 자주 등장하는 미분 형태를 중심으로 리뷰

### 극한limits

- 함수에서 정의할 수 있는 함수값과는 다른 또 다른 값
- 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $a$와 다른 값을 가지면서 $a$에 가까이 갈 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 $L$에 가까워지면

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

- 이때 $L$을 $x \to a$일 때 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 한다.
- 특수한 경우 함수값과 극한값은 같고 이를 연속이라 함.
- 대부분 우리는 이런 경우를 일반적이라고 생각
- 하지만 일반적으로는 $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- 중요한 것은 $x$가 결코 $a$가 되지 않는다는 점, $x = a$가 된다면 그값은 함수값이 됨.



$$\lim_{x \to -2+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = -0.5 \quad \neq \quad \lim_{x \to -1+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0 \quad = \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = 0 \quad \neq \quad f(0) = 0.5$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = -1 \quad \neq \quad \lim_{x \to 1+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = 1$$

- 극한의 존재성 : $x \to a$일때 함수 $f(x)$가 $L$로 수렴하면 $x \to a+$ 일때 우극한과 $x \to a-$일때 좌극한이 모두 존재하고 그 값이 $L$로 같다. 또한 그역도 성립
- 위 경우 $\lim_{x \to -1} f(x), \lim_{x \to 1} f(x)$은 존재하지 않음.

- 분수함수에서의 극한

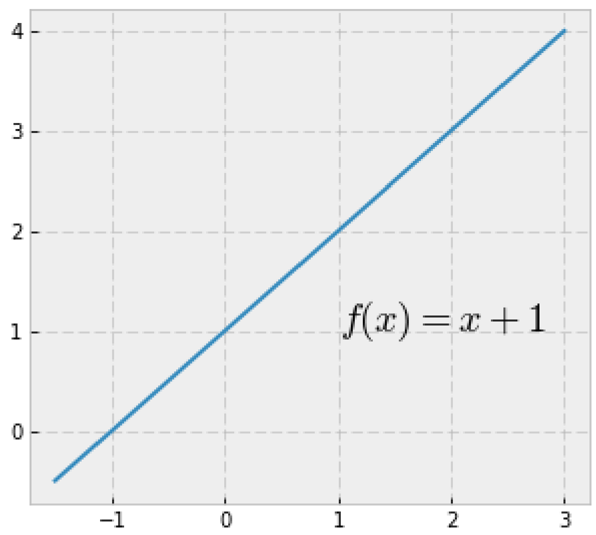
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

- 위 함수에서 $x = 1$근처에서 어떤일이 일어나는가?

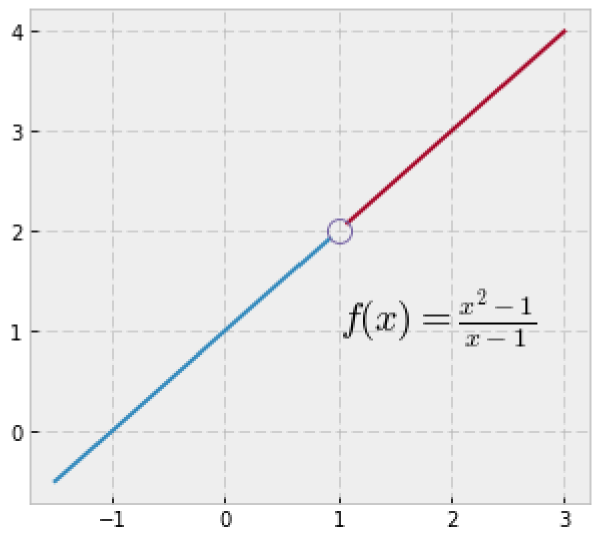
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \neq f(1)$$

- $f(1)$는 정의되지 않음

| | f(x) | x |
|---|---|---|
| 0 | 1.900000 | 0.900000 |
| 1 | 2.100000 | 1.100000 |
| 2 | 1.990000 | 0.990000 |
| 3 | 2.010000 | 1.010000 |
| 4 | 1.999000 | 0.999000 |
| 5 | 2.001000 | 1.001000 |
| 6 | 1.999999 | 0.999999 |
| 7 | 2.000001 | 1.000001 |



$f(x) = x + 1$
4
3
2
1
0
−1
0
1
2
3

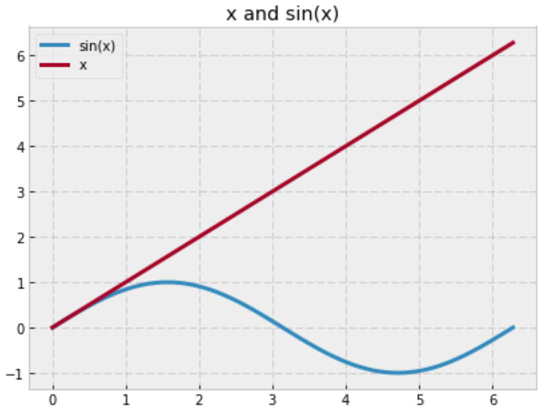



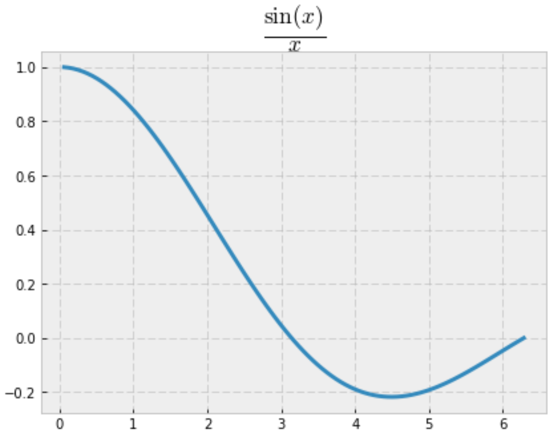
$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
4
3
2
1
0
−1
0
1
2
3

- 삼각함수의 극한을 다루지 않지만 극한의 개념을 이해하기에 좋은 예제로 소개

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

- $x = 0$에서 함수값이 정의되지 않지만 분자와 분모의 비가 어떻게 될까?
- $x$가 결코 0이 되지 않는다면 분자와 분모의 비를 계속 계산해 볼 수 있을 것이다!
- 엑셀로도 확인 가능



# 미분differentiation

## 평균변화율

- $x$의 증분 $\Delta x$에 대한 $y$의 증분 $\Delta y$의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

- 두 점사이의 곡선의 형태는 평균변화율에 영향을 미치지 않음.
- 좀 더 자세한 정보를 위해 두 점사이의 간격을 좁힐 필요가 있음.

## 미분계수(순간변화율)The Derivative at a Point

- 평균변화율의 분모를 순간에 이를 정도로 작게 만들어

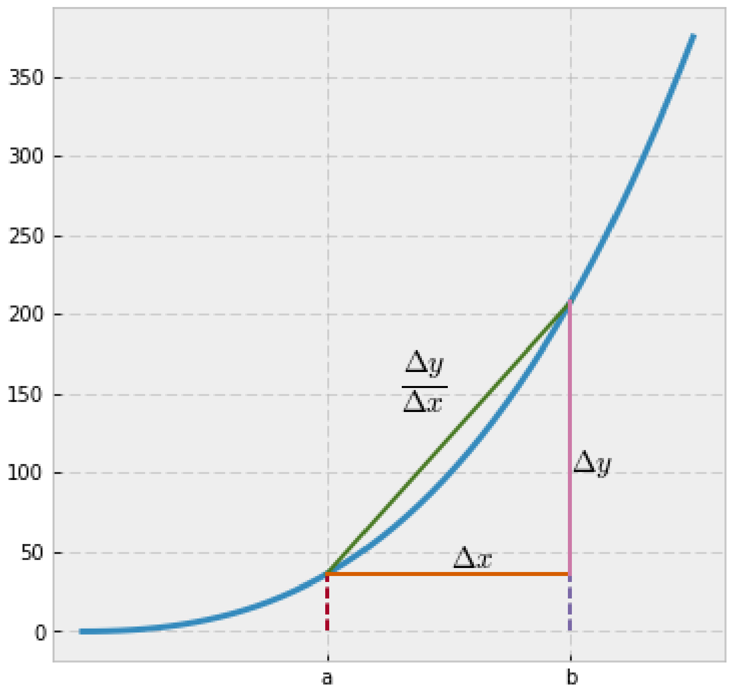
$$f'(a) = \frac{df(a)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

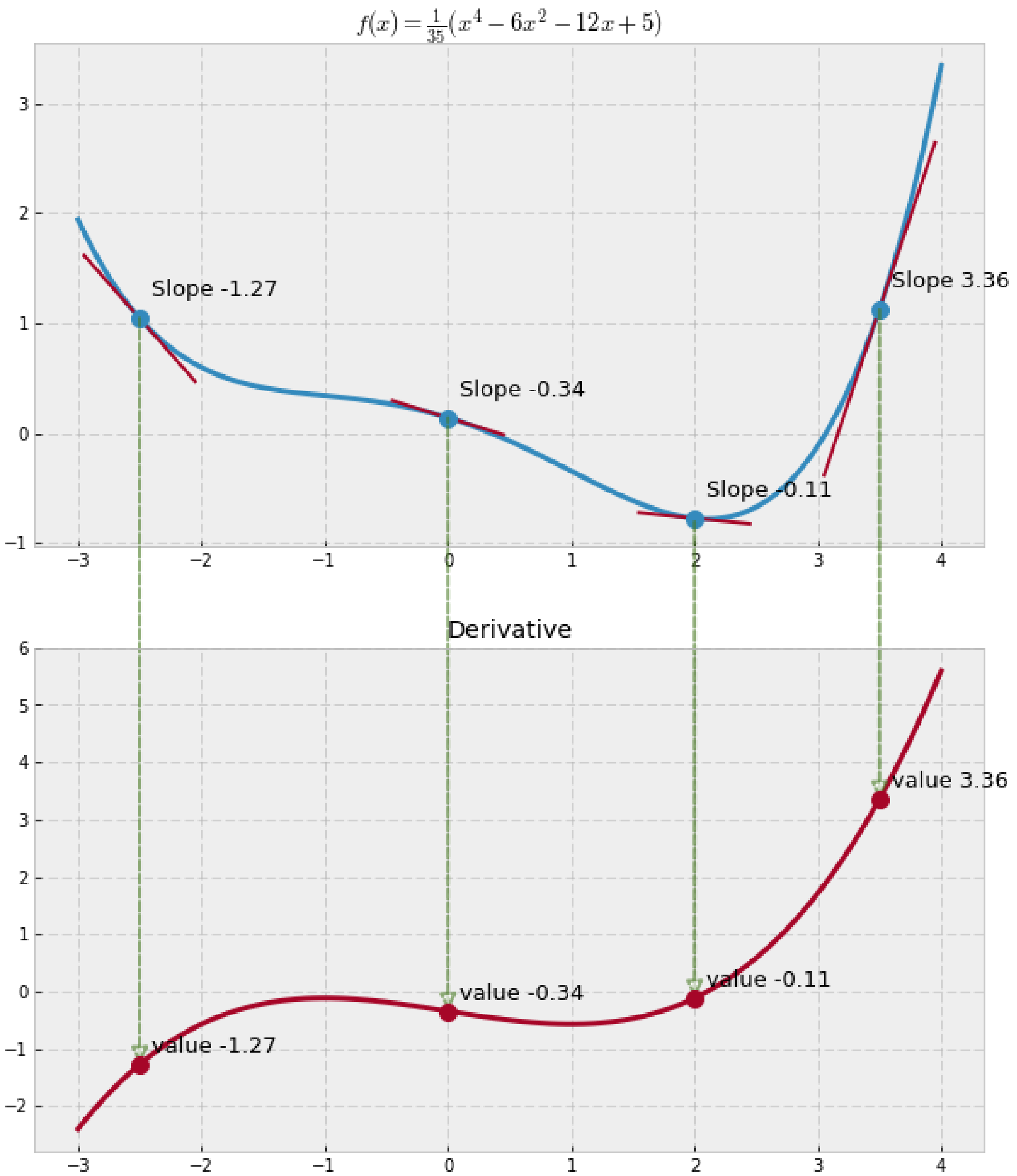
- 극한이 존재하면 즉 $\Delta x$가 결코 0이 되지 않기 때문에 수렴한다면 이 극한값을 순간변화율 또는 미분계수라 함
- **순간변화율은 그 위치에서 접선의 기울기로 해석 가능**

## 도함수The Derivative as a Function

- 미분계수를 함수값으로 가지는 함수, 미분 가능한 함수 $y = f(x)$의 도함수는

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$






## 용어

- differentiation $\neq$ derivative

> "The process of calculating a derivative is called differentiation."
>
> "If $f'$ exists at a particular $x$, we say that $f$ is differentiable (has a derivative) at $x$. If $f'$ exists at every point in the domain of $f$, we call $f$ differentiable."

## 기호[7]

- $y = f(x)$일 때
  - **Leibniz's notation** : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}f(x)$
  - **Lagrange's notation** : $f'(x), y'$
  - **Newton's notation** : $\dot{y}, \ddot{y}$
  - **Euler's notation** : $D_x y$,$D_x f(x)$, $D_x^2 y$

## 다항 함수의 미분

- 공식

$$f(x) = x^n, \qquad \frac{d(f(x))}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}}{h} \\
&\because (a-b)^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}) \\
&= \lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\} \\
&= \underbrace{(x)^{n-1}+(x)^{n-1}+\cdots+(x)^{n-1}}_{n} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

- 간단한 예

$$y = x^2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} = 2x$$

## 지수 함수의 미분

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a \qquad a > 0, a \neq 1$$

## 로그 함수의 미분

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x \ln a} \qquad x > 0, a > 0, a \neq 1$$

### 지수, 로그 함수 미분 예제

- 도함수의 정의대로 미분을 구하고, 공식으로 구하기
- $y = e^{2x}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{2(x+h)} - e^{2x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x}e^{2h} - e^{2x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x}(e^{2h}-1)}{h} = e^{2x}\lim_{h\to 0}\frac{(e^{2h}-1)}{h} = e^{2x}\cdot 2\lim_{h\to 0}\frac{(e^{2h}-1)}{2h} = 2e^{2x}\end{aligned}$$

$$u = 2x, y = e^u \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u \cdot 2 = 2e^{2x}$$

In [38]:

```
x = sympy.Symbol('x')

sympy.diff(sympy.E**(2*x), x)
```

Out[38]:

$2e^{2x}$

- $y = \ln(x+1)$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+1+h)-\ln(x+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+1+h}{x+1}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x+1}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x+1}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{h}}\right]^{\frac{1}{x+1}} \\
&= \frac{1}{x+1}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{h}} = \frac{1}{x+1}\ln e = \frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

$$u = x+1, y = \ln(u) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot 1 = \frac{1}{x+1}$$

In [44]:

```
x = sympy.Symbol('x')

sympy.diff(sympy.log(x+1), x)
```

Out[44]:

$$\frac{1}{x+1}$$

## 몇가지 미분법(참고)

- 상수 미분

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

- 곱의 미분

$$y = f(x)g(x), \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- $y = (3x^2 + x)(x^2 - x)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (3x^2 + x)'(x^2 - x) + (3x^2 + x)(x^2 - x)' \\ &= (6x + 1)(x^2 - x) + (3x^2 + x)(2x - 1) \\ &= 12x^3 - 6x^2 - 2x\end{aligned}$$

- 분수함수 미분

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

- $y = \dfrac{x^2}{x+3}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2)'(x+3) - x^2(x+3)'}{(x+3)^2} \\ &= \frac{2x(x+3) - x^2 \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}\end{aligned}$$

In [16]:

```
x = sympy.Symbol('x')

sympy.diff(x**2 / (x+3), x)
```

Out[16]:

$$- \frac{x^{2}}{\left(x + 3\right)^{2}} + \frac{2 x}{x + 3}$$

In [17]:

```
x = sympy.Symbol('x')

sympy.simplify(sympy.diff(x**2 / (x+3), x))
```

Out[17]:

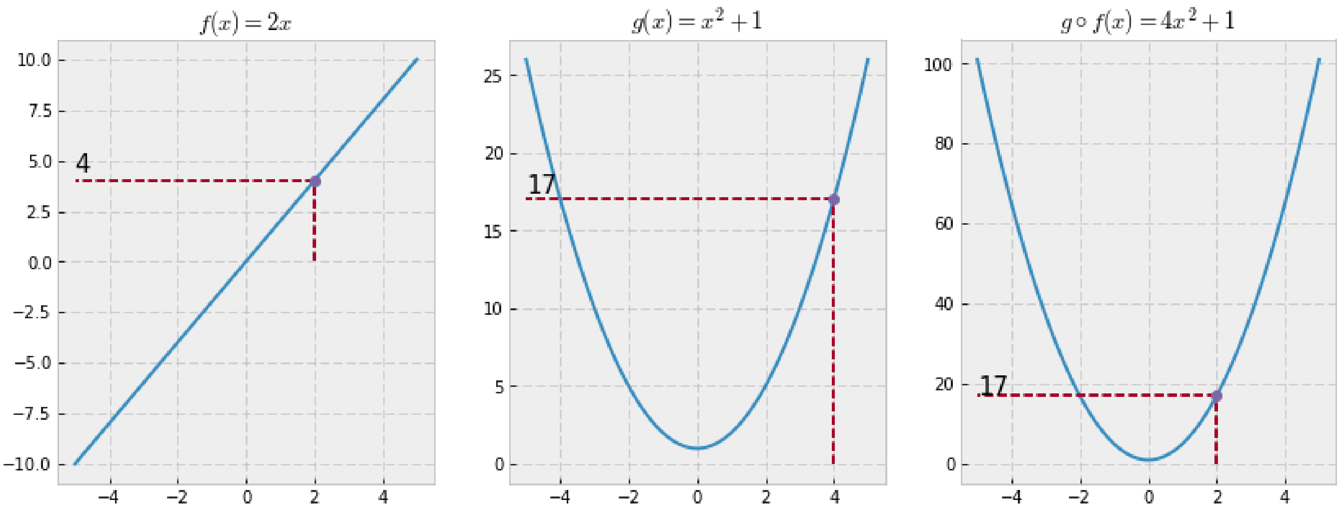
$$\frac{x \left(x + 6\right)}{x^{2} + 6 x + 9}$$

- 합성함수 미분

두 함수 $y = f(u), u = g(x)$가 미분 가능할 때, 합성함수 $y = f(g(x))$의 $x$에 대한 미분

$$\frac{d\,y(u)}{dx} = \frac{d\,y(u)}{du}\frac{d\,u(x)}{dx}$$

합성함수 단원에 나왔던 예제




$f(x) = 2x, g(x) = x^2 + 1$ 일 때 $g \circ f(x)$의 $x$에 대한 미분

$y = f(x) = 2x$로 쓰면 $g(y) = g \circ f(x) = y^2 + 1$

$$\frac{dg(y)}{dx} = \frac{dg(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = 2y \cdot 2 = 4y = 8x$$

In [42]:

```
x = sympy.Symbol('x')

sympy.diff((2*x)**2 + 1, x)
```

Out[42]:

$8x$

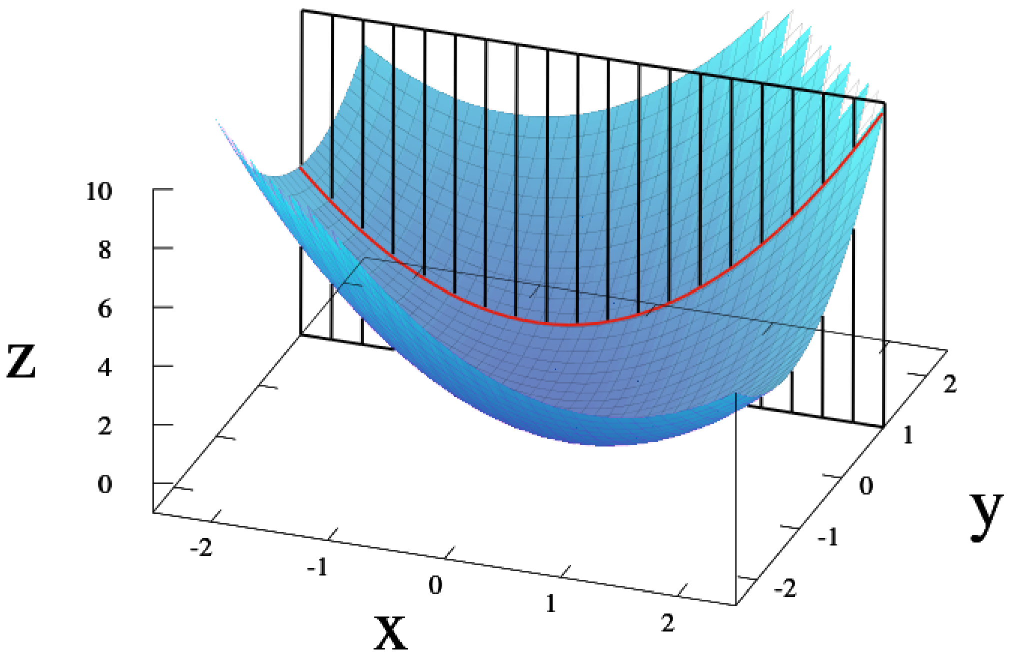
## 다변수 미분 - 편미분[8]

- 2변수 이상 함수에서 하나의 변수에 대해서만 미분하는 것
- 함수 $f(x, y)$에 대한 $(x_0, y_0)$에서의 $x$에 대한 편도함수의 함수값(편미분)을 다음의 극한값으로 정의

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- 함수 $f(x, y)$에 대한 $(x_0, y_0)$에서의 $y$에 대한 편도함수의 함수값(편미분)을 다음의 극한값으로 정의

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$




https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_derivative#/media/File:Partial_func_eg.svg CC BY-SA 4.0

- 편미분의 간단한 예 (4,-2)에서 $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 3$ 에 대해 $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$의 값을 구하라.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 3) = 2x + 3y = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + y - 3) = 3x + 1 = 13$$

- 결과와 그래프를 함께 보면서 상황을 이해

In [48]:

```
x = sympy.Symbol('x')
y = sympy.Symbol('y')

sympy.diff(x**2 + 3*x*y + y -3, x)
```

Out[48]:

$$2x + 3y$$

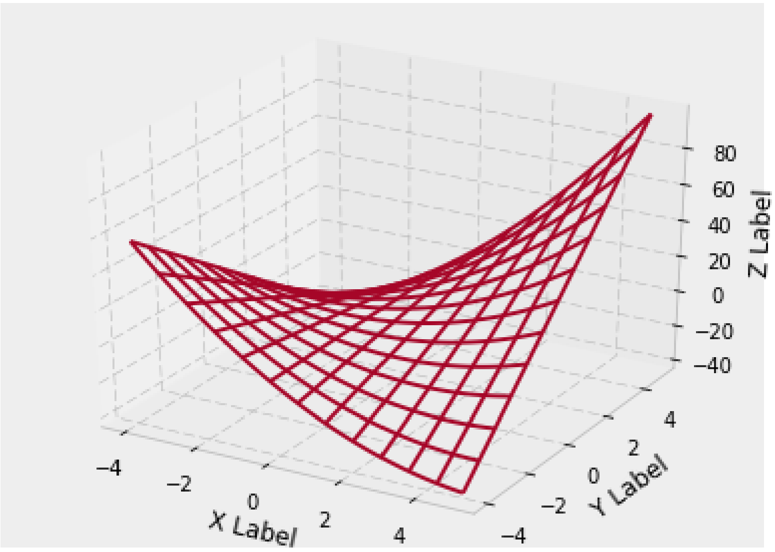
In [49]:

```
x = sympy.Symbol('x')
y = sympy.Symbol('y')

sympy.diff(x**2 + 3*x*y + y -3, y)
```

Out[49]:

$$3x + 1$$

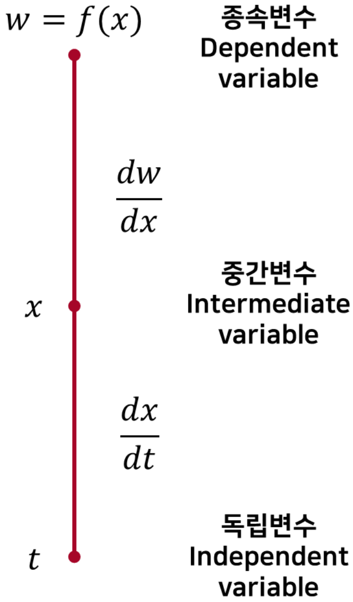



- 위 그래프에서 $y$를 고정하고 $x$를 변화시키면 이동 경로는 아래로 볼록한 포물선 모양이 되는데 포물선의 모양이 $y$값 어디를 고정했느냐에 따라 다르고 $x$의 위치에 따라 미분계수(접선의 기울기)가 다름 $\rightarrow$ $x$에 대한 편미분은 $f(x, y)$
- 반면 $x$를 고정하고 $y$를 변화시키는 경우는 $x$값 어디를 고정했느냐에 따라서 직선의 모양이 달라지나 그 직선은 $y$값에 따라서 미분계수가 변하지 않음 $\rightarrow$ $y$에 대한 편미분은 $f(x)$

## 미분의 연쇄법칙[8]

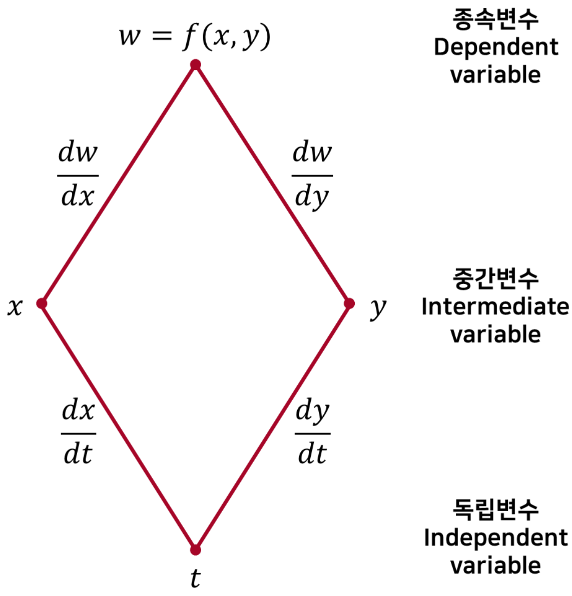
- **역전파 알고리즘을 이해하는 핵심 사항**
- 일변수의 경우 합성함수 미분에서 본 것이 미분의 연쇄법칙, $x = g(t)$일 때 $w = f(x)$의 $t$에 대한 미분

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}$$



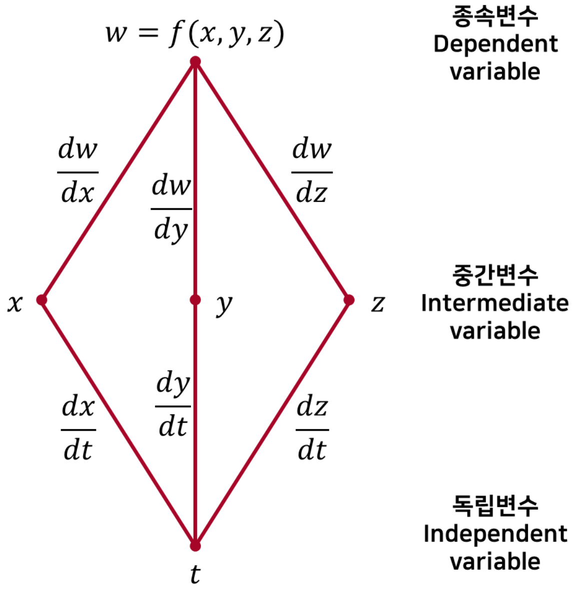

- 다변수 함수에 대해서도 동일한 규칙이 적용되며 다음과 같다. $y = f(t), x = g(t)$일 때 $w = f(x, y)$의 $t$에 대한 편미분

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$



- 3변수 일때 $z = f_1(t), y = f_2(t), x = f_3(t)$일 때 $w = f(x, y, z)$의 $t$에 대한 편미분

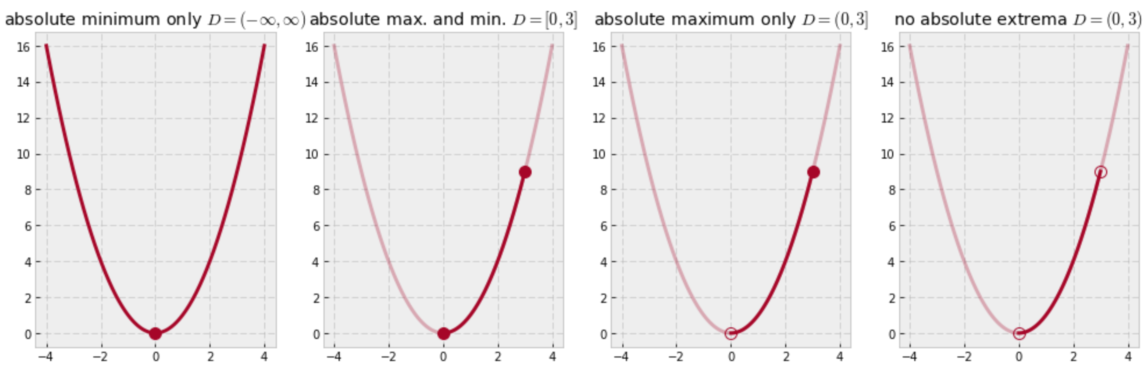
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$




## 함수의 극대, 극소

### 함수의 최대, 최소global minimum, global maximum

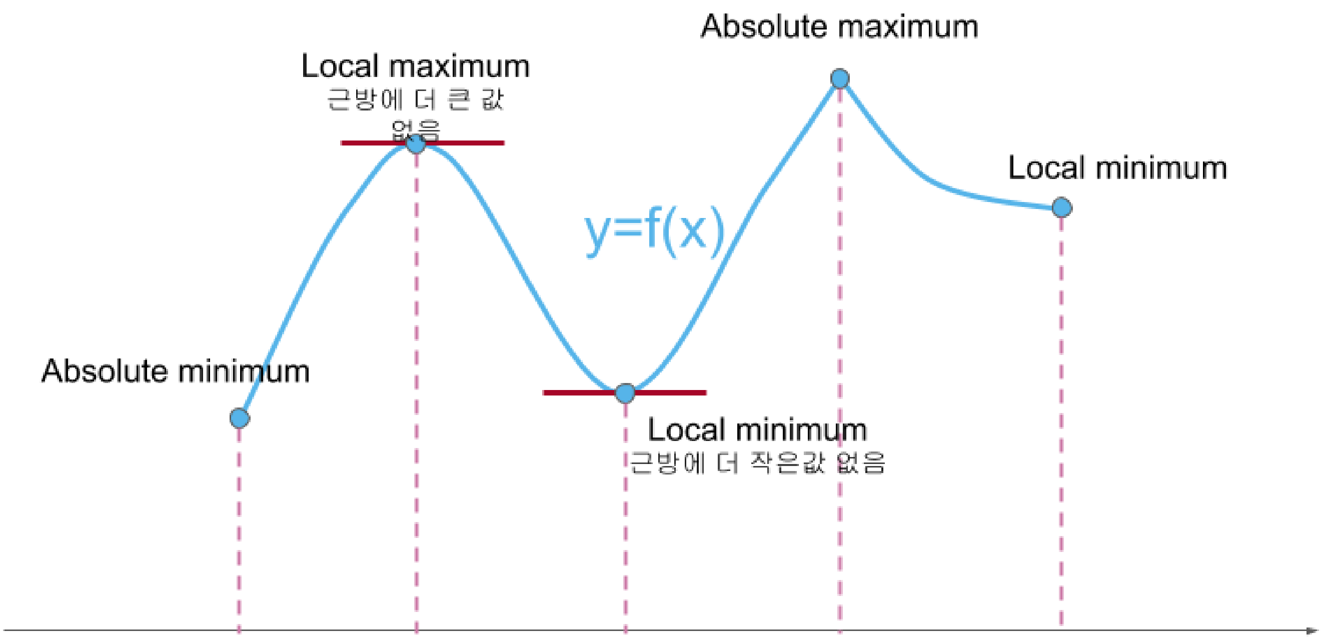
> 정의역 $D$에서 함수 $f$가 있을 때,
>
> - $D$의 점 $c$가 $D$의 모든 $x$에 대해서 $f(x) \leq f(c)$이면 $f$는 최댓값absolute maximum $f(c)$를 가진다.
> - $D$의 점 $c$가 $D$의 모든 $x$에 대해서 $f(x) \geq f(c)$이면 $f$는 최솟값absolute minimum $f(c)$를 가진다.



| 함수 | 도메인 $D$ | 최대, 최소 |
|---|---|---|
| (a) $y = x^2$ | $(-\infty, \infty)$ | 최대값 없음<br>$x = 0$에서 최소값 0 |
| (b) $y = x^2$ | $[0, 3]$ | $x = 3$에서 최대값 9<br>$x = 0$에서 최소값 0 |
| (c) $y = x^2$ | $(0, 3]$ | $x = 3$에서 최대값 9<br>최소값 없음 |
| (d) $y = x^2$ | $(0, 3)$ | 최대, 최소 없음 |

## 함수의 극대, 극소 local minimum, local maximum

- $f$는 $x = c$에서 극댓값을 가진다. 만약 $c$를 포함하는 어떤 열린 구간에서 함수 $f$의 도메인 $D$에 있는 모든 $x$에 대해 $f(x) \leq f(c)$이면
- $f$는 $x = c$에서 극솟값을 가진다. 만약 $c$를 포함하는 어떤 열린 구간에서 함수 $f$의 도메인 $D$에 있는 모든 $x$에 대해 $f(x) \geq f(c)$이면
- 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값 local extrema 라 한다.



## 극값과 미분계수The First Derivative theorem for Local extreme values

> 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=c$에서 극값을 가지고, $c$에서 $f'$가 정의되면 $f'(c)=0$

- 함수 $f(x)$가 $x=c$에서 극댓값을 가진다면 $f(c+h)\le f(c)$이므로

$$h<0 \implies 0\le \frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \quad h>0 \implies \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0$$

- $f'(c)$가 정의된다 했으므로

$$0\le \underbrace{\lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{f'(c)}\le 0$$

$$\therefore f'(c)=0$$

- 예제 : $[1,4]$에서 $f(x)=-(x-2)^2+10$의 최솟값과 최댓값은?

$$f'(x)=-2(x-2)$$

- 미분이 0이 되는 지점

$$f'(2)=0$$

- 미분이 0이 되는 지점과 경계의 양끝점에서 함수값

$$f(1)=9, \quad f(2)=10, \quad f(4)=6$$